BGuide - Cálculo 1

Bruno Geronymo

2018-03-24

Sumário

Prefácio

Este material trata-se de um manual de resoluções dos exercícios propostos no livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* de Guidorizzi (2013). Ao decorrer das resoluções o material busca apresentar, adicionalmente, resoluções computacionais através do software R Core Team (2017) de computação estatística para facilitar a visualização do problema e também o aprendizado da linguagem *R*.

O material procura abordar todos os assuntos tratados no livro do *Guidorizzi*, seguindo também a mesma ordem dos capítulos, para facilitar a dinâmica de pesquisa por assuntos específicos.

Para o desenvolvimento do material foi utilizado o pacote *knitr* desenvolvido por Xie (2018b), o *rmarkdown* desenvolvido por Allaire et al. (2018) para geração de documentos dinâmicos no *R* e o *bookdown* desenvolvido por Xie (2018a) para criar livros e documentos técnicos em *R Markdown*.

Capítulo 1

Números reais

1.1 Os Números Racionais

Por uma questão de notação admitiremos aqui que, sendo r um número racional, se $r \leqslant 0$, dizemos que r é não positivo. Da mesma forma, se $r \geqslant 0$, dizemos que r é não negativo.

Vale acrescentar aqui algumas definições que poderão auxiliar na leitura do livro.

- **Abscissa**: Trata-se da coordenada de um ponto sobre uma reta.
- **Irredutível**: Algo que não se pode reduzir. Uma fração é dita irredutível quando está em sua forma mais reduzida possível.

1.2 Os Números Reais

EXEMPLO 4. *(Página 6)* Suponha $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Prove:

b) $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

Resolução:

$$\text{e} \left.\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{matrix}\right\} \overset{(OM)}{\Rightarrow} \text{ e } \left.\begin{matrix} xx \leqslant xy \\ xy \leqslant yy \end{matrix}\right\} \overset{(O3)}{\Rightarrow} xx \leqslant xy \leqslant yy \Rightarrow xx \leqslant yy \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$$

EXEMPLO 9. *(Página 9)* Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5$.

Sendo $x < 2$:

$$\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5 \Leftrightarrow 3x - 1 \leqslant 5(x+2).$$

Então o autor pergunta: Por quê?

Sabemos que $1 < 2$, se multiplicássemos esta expressão por -1 sem alterarmos o sentido da desigualdade teríamos $-1 < -2$ e sabemos que esta afirmação não é verdadeira. Considerando $a < 0$, se multiplicarmos uma desigualdade por a altera-se o sentido da desigualdade pois refletimos estes valores para o outro lado de um eixo com relação a origem a uma taxa de progressão $|a|$. Porém, ao realizar este processo a direção de crescimento das unidades permanece a mesma (não é refletida).

```r
# Exemplo gráfico

##  O gráfico a seguir tem como objetivo a visualização do que foi dito
## anteriormente. Nele pode-se observar a propriedade 'x <= y  ==>  ky <= kx'
## quando 'k < 0'. No exemplo utilizaremos 'x = 2', 'y = 3' e 'k = -2'.

##  Cria um vetor dos valores a serem plotados:
xy <- c(2, 3)
k <- -2
pontos <- c(k*xy, xy)

##  Atribui 0 aos valores de y
pontos <- cbind(pontos, 0)

##  Atribui nome às coordenadas
rownames(pontos) <- c("kx", "ky", "x", "y")

##  Cria gráfico unidimensional:
plot(pontos, bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
     ylim = c(-1, 1),
     xlim = c(pontos[2, 1] - 2, pontos[4, 1] + 2), pch = 20, cex = 2)

##  Eixo do sistema:
arrows(x0 = pontos[2, 1] - 2, x1 = pontos[4, 1] + 2,
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2)

##  Retas de distância:
arrows(x0 = pontos[1, 1], x1 = c(0, pontos[3, 1]),
       y0 = 0.4, y1 = 0.4,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

arrows(x0 = pontos[2, 1], x1 = c(0, pontos[4, 1]),
       y0 = 0.7, y1 = 0.7,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

##  Enumeração do eixo:
axis(side = 1, seq(-7, 4, 1), pos = 0)

##  Legenda:
text(pontos, labels = rownames(pontos), pos = 3, offset = 1, font = 2)

text(x = pontos[1, 1]/2, labels = rownames(pontos)[1], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[2, 1]/2, labels = rownames(pontos)[2], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[3, 1]/2, labels = rownames(pontos)[3], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[4, 1]/2, labels = rownames(pontos)[4], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)

text(y = 0, x = (pontos[2, 1] + pontos[4, 1])/2,
     labels = "Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades",
     pos = 1, offset = 3, font = 2)
```

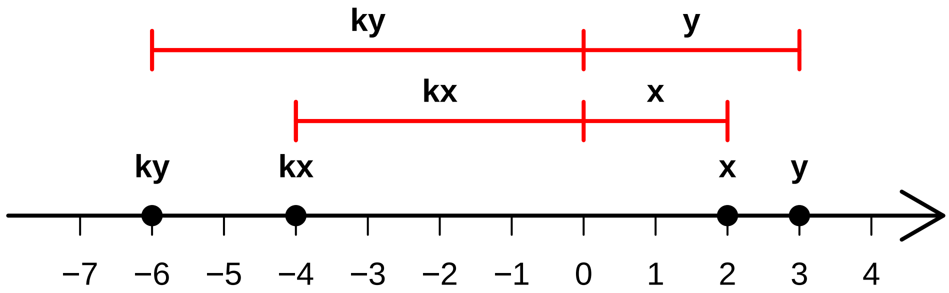


Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades

1.2.1 Exercícios Resolvidos

1. *(Página 10)* Resolva a inequação.

   a) $3x + 3 < x + 6$

$$
\begin{aligned}
3x + 3 \;\; (-x) &< x + 6 \;\; (-x) \\
2x + 3 &< 6 \\
2x + 3 \;\; (-3) &< 6 \;\; (-3) \\
2x &< 3 \\
\frac{2x}{2} &< \frac{3}{2} \\
x &< \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

```r
# Resolução no R

##  Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = 3x + 3' e 'f2(x) = x + 6'.
f1 <- function(x){
  3*x + 3
}

f2 <- function(x){
  x + 6
}

##  A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) < 0'. Portanto
## queremos os valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja menor que zero.
##  Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
##  A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r
```

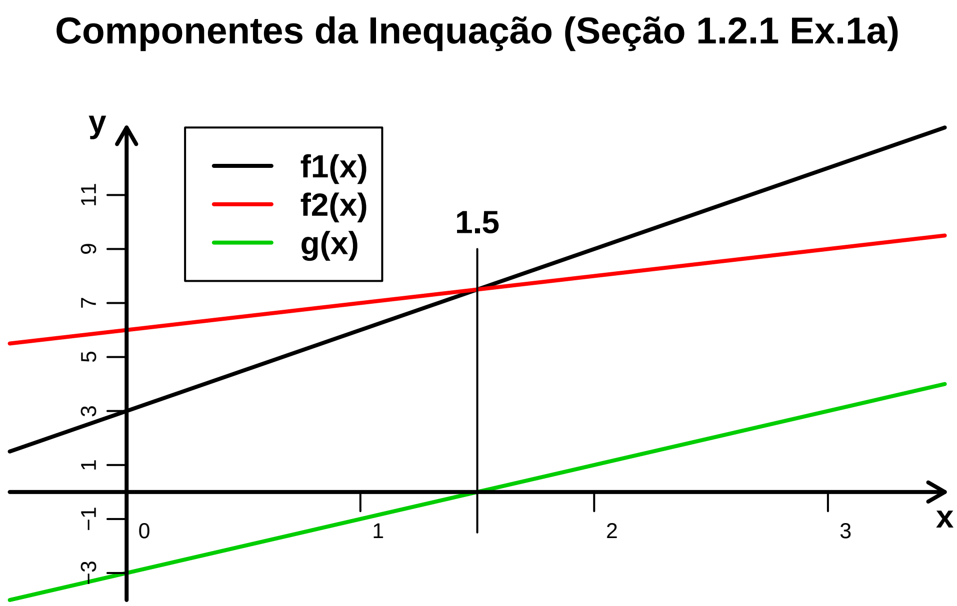
```
## [1] 1.5
```

```r
##  O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
##  Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

##  Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é 1.5, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.25)
data.frame(x, g(x))
```

```
##      x g.x.
## 1 1.00 -1.0
## 2 1.25 -0.5
## 3 1.50  0.0
## 4 1.75  0.5
## 5 2.00  1.0
```

```r
##  Pode-se observar que para valores menores que 1.5, g(x) assume valores
## negativos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < 1.5'

# Exemplo Gráfico

##  O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que 1.5 temos f1(x) < f2(x) e g(x) < 0, para x = 1.5 temos
## f1(x) = f2(x) e g(x) = 0 e para valores maiores que 1.5 temos f1(x) > f2(x) e
## g(x) > 0.

##  Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 2, r + 2)

##  Determina  a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

##  Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
  bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
  main = 'Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.1a)')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

##  Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
   y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
   y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

##  Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
```

```
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

##  Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
     y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

##  Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
 hadj = -1, padj = -1.5, pos = 0,  cex.axis = 0.7)
axis(side = 2, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 2)),
 padj = 1, pos = 0,  cex.axis = 0.7)

##  Legenda:
legend(v[1] + 0.75, maxi, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
   lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
 labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)
```



2. *(Página 10)* Estude o sinal da expressão.

   a) $3x - 1$

      i) $f(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 0 \\ 3x - 1 \ (+1) &= 0 \ (+1) \\ 3x &= 1 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{1}{3} \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ii) $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< 0 \\ 3x - 1 \ (+1) &< 0 \ (+1) \\ 3x &< 1 \\ \frac{3x}{3} &< \frac{1}{3} \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

iii) $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &> 0 \\ 3x - 1 \ (+1) &> 0 \ (+1) \\ 3x &> 1 \\ \frac{3x}{3} &> \frac{1}{3} \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

```r
# Resolução no R

##  Para estudar o sinal da expressão pelo R começaremos construindo a função:
f <- function(x){
  3*x - 1
}

##  Começaremos achando a raiz da expressão f(x) ou seja, os valores de x para
## os quais f(x) = 0.
##  A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(f, c(-10, 10))$root
r
```

```
## [1] 0.3333333
```

```r
##  Logo para x = 1/3 temos f(x) = 0.
##  Queremos saber também onde se localizam os valores positivos e negativos da
## função. Para isso basta verificarmos os valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.25)
data.frame(x, f(x))
```

```
##             x          f.x.
## 1 -0.16666667 -1.500000e+00
## 2  0.08333333 -7.500000e-01
## 3  0.33333333  7.105427e-15
## 4  0.58333333  7.500000e-01
## 5  0.83333333  1.500000e+00
```

```
##  Pode-se observar que para valores menores que 1/3, f(x) assume valores
## negativos e para valores maiores que 1/3, f(x) assume valores positivos.
```

e) $\frac{x-1}{x-2}$

i) $f(x) = x - 1$

I) $f(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x-1\ (+1) &= 0\ (+1) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

II) $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned} x-1 &< 0 \\ x-1\ (+1) &< 0\ (+1) \\ x &< 1 \end{aligned}$$

III) $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} x-1 &> 0 \\ x-1\ (+1) &> 0\ (+1) \\ x &> 1 \end{aligned}$$

ii) $g(x) = x - 2$

I) $g(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \\ x-2\ (+2) &= 0\ (+2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

II) $g(x) < 0$:

$$\begin{aligned} x-2 &< 0 \\ x-2\ (+2) &< 0\ (+2) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

III) $g(x) > 0$:

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ x-2\ (+2) &> 0\ (+2) \\ x &> 2 \end{aligned}$$

	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	+	+
$g(x)$	-	-	+
$h(x)$	+	-	+

iii) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Nosso interesse aqui é em $h(x)$, podemos concluir com os resultados de i, ii e iii que temos $h(x) < 0$ para $1 < x < 2$, $h(x) = 0$ para $x = 1$, $h(x) > 0$ para $x < 1$ e $x > 2$. Temos ainda que para $x = 2$ a função $h(x)$ não é definida pois o denominador da função iguala-se a zero.

```
# Resolução no R

##  Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f(x) = x - 1' e 'g(x) = x - 2'.
f <- function(x){
  x - 1
}

g <- function(x){
  x - 2
}

##  Começaremos achando a raiz das expressões f(x) e g(x) ou seja, os valores de
## x para os quais f(x) = 0.
##  A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
rf <- uniroot(f, c(-10, 10))$root
rf
```

```
## [1] 1
```

```
rg <- uniroot(g, c(-10, 10))$root
rg
```

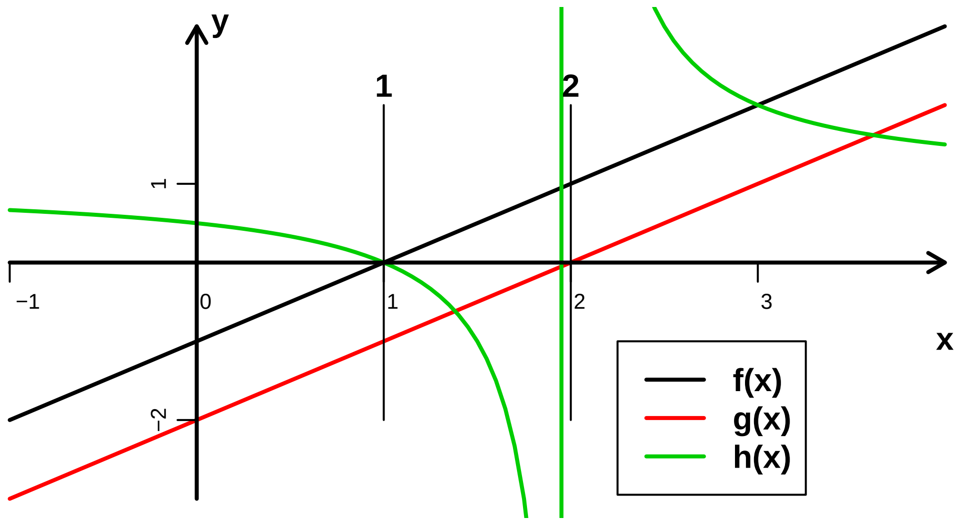
```
## [1] 2
```

```
##  O resultado revela somente a raiz das funções f(x) e g(x). No entanto
## queremos saber onde se localizam os valores positivos e negativos das
## funções.

##  Sabemos que as raízes das funções f(x) e g(x) são, respectivamente, 1 e 2.
## Agora verificaremos os valores ao redor das raízes.
x <- seq(from = min(rf, rg) - 0.5, to = max(rf, rg) + 0.5, by = 0.5)
data.frame(x, f(x), g(x), f(x)/g(x))
```

```
##     x          f.x.          g.x.     f.x..g.x.
## 1 0.5 -5.000000e-01 -1.500000e+00  3.333333e-01
## 2 1.0  1.776357e-15 -1.000000e+00 -1.776357e-15
## 3 1.5  5.000000e-01 -5.000000e-01 -1.000000e+00
## 4 2.0  1.000000e+00  1.776357e-15  5.629500e+14
## 5 2.5  1.500000e+00  5.000000e-01  3.000000e+00
```

```
##  Nosso interesse aqui é em f(x)/g(x), podemos concluir com o resultado acima
## que valores menores que 1 e maiores que 2 temos f(x)/g(x) > 0, e para valores
## maiores que 1 e menores que 2 temos f(x)/g(x) < 0 e para x = 1 temos
## f(x)/g(x) = 0. Por definição, quando g(x) = 0 (x = 2) a expressão não é
## definida.

# Exemplo Gráfico

##  O gráfico a seguir representa f(x), g(x) e h(x). Observe que para valores
## menores que 1 temos f1(x) > f2(x) e g(x) > 0, para x = 1 temos f1(x) = f2(x)
## e g(x) = 0 e para valores maiores que 1 temos f1(x) < f2(x) e g(x) < 0.

##  Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(min(rf, rg) - 2, max(rf, rg) + 2)

##  Define função h(x):
h <- function(x){
  f(x)/g(x)
}
##  Determina  a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f(v), g(v), h(v))
maxi <- max(f(v), g(v), h(v))

##  Curvas:
curve(f, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
  bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
  main = 'Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.2e)')
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(h, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

##  Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
   y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
   y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

##  Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = c(rf, rg), x1 = c(rf, rg),
     y0 = -2, y1 = 2, lwd = 1)

##  Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(round(v[1]), round(v[2]) - 0.5, 1)),
 hadj = -0.25, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 2, c(seq(round(mini) + 1, round(maxi) - 1, 3)),
 padj = 1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

##  Legenda:
legend(2.25, -1, col = c(1, 2, 3), c('f(x)', 'g(x)', 'h(x)'),
   lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], 0.125, rf, rg), y = c(-1, maxi, 2.25, 2.25),
 labels = c("x", "y", "1", "2"), font = 2)
```

Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.2e)




```
##  Repare no grafico acima que para valores de x menores que 1 temos f(x) < 0
## e g(x) < 0 consequentemente h(x) > 0. Para x = 1 temos f(x) = 0 e g(x) < 0
## consequentemente h(x) = 0. Para valores de x maiores que 1 e menores que 2
## temos f(x) > 0 e g(x) < 0 consequentemente h(x) < 0. Para x = 2 temos
## f(x) > 0 e g(x) = 0 consequentemente h(x) não é definida no ponto. Para
## valores de x maiores que 2 temos f(x) > 0 e g(x) > 0 consequentemente
## h(x) > 0.
```

Referências Bibliográficas

Allaire, J., Xie, Y., McPherson, J., Luraschi, J., Ushey, K., Atkins, A., Wickham, H., Cheng, J., and Chang, W. (2018). *rmarkdown: Dynamic Documents for R*. https://rmarkdown.rstudio.com, https://github.com/rstudio/rmarkdown.

Guidorizzi, H. (2013). *Um curso de cálculo*. Number v. 1. LTC.

R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Xie, Y. (2018a). *bookdown: Authoring Books and Technical Documents with R Markdown*. R package version 0.7.1.

Xie, Y. (2018b). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R*. R package version 1.20.