

# BGuide - Cálculo 1

*Bruno Geronymo*

*2018-03-08*



# Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>5</b>
<b>1 Números reais</b>	<b>7</b>
1.1 Os Números Racionais . . . . .	7
1.2 Os Números Reais . . . . .	7
<b>2 Sem Título</b>	<b>19</b>
<b>3 Sem Título</b>	<b>21</b>
<b>4 Sem Título</b>	<b>23</b>
<b>5 Sem Título</b>	<b>25</b>



# Prefácio

Este material trata-se de um manual de resoluções dos exercícios propostos no livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* de *Hamilton Luiz Guidorizzi*. Ao decorrer das resoluções o material busca apresentar, adicionalmente, resoluções computacionais através do software R de computação estatística para facilitar a visualização do problema e também o aprendizado da linguagem R.

O material procura abordar todos os assuntos tratados no livro do *Guidorizzi*, seguindo também a mesma ordem dos capítulos, para facilitar a dinâmica de pesquisa por assuntos específicos.



# Capítulo 1

## Números reais

### 1.1 Os Números Racionais

Por uma questão de notação admitiremos aqui que, sendo  $r$  um número racional, se  $r \leq 0$ , dizemos que  $r$  é não positivo. Da mesma forma, se  $r \geq 0$ , dizemos que  $r$  é não negativo.

Vale acrescentar aqui algumas definições que poderão auxiliar na leitura do livro.

- **Abscissa:** Trata-se da coordenada de um ponto sobre uma reta.
- **Irredutível:** Algo que não se pode reduzir. Uma fração é dita irredutível quando está em sua forma mais reduzida possível.

### 1.2 Os Números Reais

**EXEMPLO 4.** (*Página 6*) Suponha  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Prove:

b)  $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ .

*Resolução:*

$$\text{e } \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq x \leq y \end{array} \right\} \xrightarrow{(OM)} \text{e } \left. \begin{array}{l} xx \leq xy \\ xy \leq yy \end{array} \right\} \xrightarrow{(O3)} xx \leq xy \leq yy \Rightarrow xx \leq yy \Rightarrow x^2 \leq y^2$$

```
# Estudo por simulação:
```

```
## Semente:
```

```
set.seed(sum(utf8ToInt("BGuide")))
```

```
## Quantidade de números a serem gerados:
```

```
n <- 1000000
```

```
## Gera-se aqui 'n' números aleatórios seguindo a distribuição Uniforme de  
## parâmetros 'min = 0' e 'max = 1':
```

```
x <- runif(n)
```

```
## Em seguida geramos mais 'n' números aleatórios seguindo uma distribuição  
## Uniforme de parâmetros 'min = x' e 'max = 1'. Isto faz com que todos os
```

```
## números armazenados em y[i] sejam maiores do que os armazenados em x[i], com
## 'i' variando de 1 a 'n'. Mas não implica que y[i] seja maior do que x[j] com
## 'j' também variando de 1 a 'n' e 'i != j':
y <- runif(n, min = x)

## Soma a quantidade de verificações onde a afirmação 'x^2 <= y^2' for
## verdadeira:
sum(x^2 <= y^2)

## [1] 1000000

## Observe que o resultado é 1.000.000, exatamente a quantidade de números
## uniformes no intervalo (0, 1) que foram gerados. Logo para todas as
## simulações obteve-se 'x^2 <= y^2'.

## Obs.: O resultado obtido por simulação não prova a propriedade acima, apenas
## cria evidências a favor dela. A simulação não é necessária aqui pois a
## propriedade pode ser provada analiticamente.
```

**EXEMPLO 9.** (*Página 10*) Resolva a inequação  $\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$ .

Sendo  $x < 2$ :

$$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5 \Leftrightarrow 3x-1 \leq 5(x+2).$$

Então o autor pergunta: Por quê?

Sabemos que  $1 < 2$ , se multiplicássemos esta expressão por  $-1$  sem alterarmos o sentido da desigualdade teríamos  $-1 < -2$  e sabemos que esta afirmação não é verdadeira. Considerando  $a < 0$ , se multiplicarmos uma desigualdade por  $a$  altera-se o sentido da desigualdade pois refletimos estes valores para o outro lado de um eixo com relação a origem a uma taxa de progressão  $|a|$ . Porém, ao realizar este processo a direção de crescimento das unidades permanece a mesma (não é refletida).

#### # Exemplo gráfico

```
## O gráfico a seguir tem como objetivo a visualização do que foi dito
## anteriormente. Nele pode-se observar a propriedade 'x <= y ==> ky <= kx'
## quando 'k < 0'. No exemplo utilizaremos 'x = 2', 'y = 3' e 'k = -2'.

## Cria um vetor dos valores a serem plotados:
xy <- c(2, 3)
k <- -2
pontos <- c(k*xy, xy)

## Atribui 0 aos valores de y
pontos <- cbind(pontos, 0)

## Atribui nome às coordenadas
rownames(pontos) <- c("kx", "ky", "x", "y")

## Cria gráfico unidimensional:
plot(pontos, bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
```



```

ylim = c(-1, 1),
xlim = c(pontos[2, 1] - 2, pontos[4, 1] + 2), pch = 19, cex = 2)

## Eixo do sistema:
arrows(x0 = pontos[2, 1] - 2, x1 = pontos[4, 1] + 2,
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2)

## Retas de distância:
arrows(x0 = pontos[1, 1], x1 = c(0, pontos[3, 1]),
       y0 = 0.4, y1 = 0.4,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

arrows(x0 = pontos[2, 1], x1 = c(0, pontos[4, 1]),
       y0 = 0.7, y1 = 0.7,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

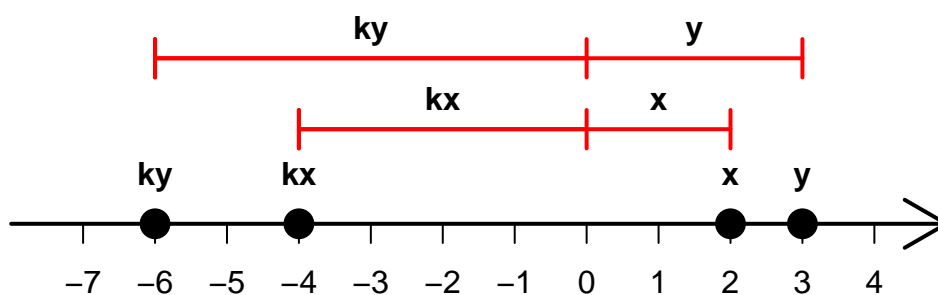
## Enumeração do eixo:
axis(side = 1, seq(-7, 4, 1), pos = 0)

## Legenda:
text(pontos, labels = rownames(pontos), pos = 3, offset = 1, font = 2)

text(x = pontos[1, 1]/2, labels = rownames(pontos)[1], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[2, 1]/2, labels = rownames(pontos)[2], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[3, 1]/2, labels = rownames(pontos)[3], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[4, 1]/2, labels = rownames(pontos)[4], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)

text(y = 0, x = (pontos[2, 1] + pontos[4, 1])/2,
     labels = "Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades",
     pos = 1, offset = 3, font = 2)

```



**Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades**

### 1.2.1 Exercícios Resolvidos

1. Resolva a inequação.

a)  $3x + 3 < x + 6$

$$\begin{aligned}
 3x + 3 &< -x && x + 6 < -x \\
 2x + 3 &< 6 \\
 2x + 3 &< -3 && 6 < -3 \\
 2x &< 3 \\
 \frac{2x}{2} &< \frac{3}{2} \\
 x &< \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

```

# Resolução no R

## Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = 3x + 3' e 'f2(x) = x + 6'.
f1 <- function(x){
  3*x + 3
}

f2 <- function(x){
  x + 6
}

## A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) < 0'. Logo queremos os
## valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja menor que zero.
## Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r

## [1] 1.5

## O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
## Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

## Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é 1.5, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.1)
data.frame(x, g(x))

##      x g.x.
## 1  1.0 -1.0
## 2  1.1 -0.8
## 3  1.2 -0.6
## 4  1.3 -0.4
## 5  1.4 -0.2
## 6  1.5  0.0

```

```
## 7  1.6  0.2
## 8  1.7  0.4
## 9  1.8  0.6
## 10 1.9  0.8
## 11 2.0  1.0

## Pode-se observar que para valores menores que 1.5, g(x) assume valores
## negativos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < 1.5'

# Exemplo Gráfico

## O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que 1.5 temos f1(x) < f2(x) e g(x) < 0, para x = 1.5 temos
## f1(x) = f2(x) e g(x) = 0 e para valores maiores que 1.5 temos f1(x) > f2(x) e
## g(x) > 0.

## Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 2, r + 2)

## Determina a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

## Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
      bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      main = 'Componentes da Inequação')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

## Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
       y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

## Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

## Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
        y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

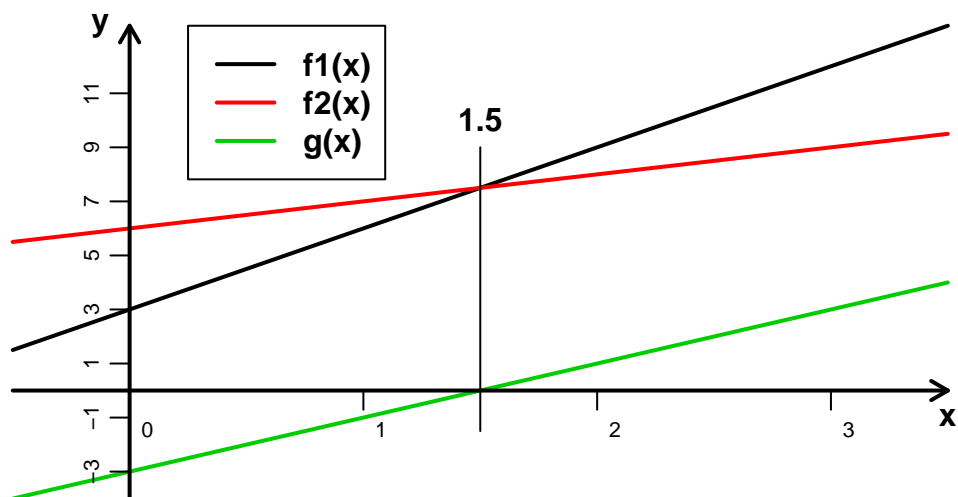
## Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
     hadj = -1, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 2, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 2)),
     padj = 1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

## Legenda:
legend(v[1] + 0.75, maxi, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
```

```
lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
      labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)
```

### Componentes da Inequação



b)  $x - 3 > 3x + 1$

$$\begin{aligned}
 x - 3 \quad (-x) &> 3x + 1 \quad (-x) \\
 -3 &> 2x + 1 \\
 -3 \quad (-1) &> 2x + 1 \quad (-1) \\
 -4 &> 2x \\
 \frac{-4}{2} &> \frac{2x}{2} \\
 -2 &> x \\
 x &< -2
 \end{aligned}$$

*# Resolução no R*

## Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:

## 'f1(x) = x - 3' e 'f2(x) = 3x + 1'.

```
f1 <- function(x){
  x - 3
}
```

```
f2 <- function(x){
  3*x + 1
}
```

## A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) > 0'. Logo queremos os

```
## valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja maior que zero.
## Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r
```

```
## [1] -2
## O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
## Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

## Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é -2, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.1)
data.frame(x, g(x))
```

```
##      x g.x.
## 1 -2.5  1.0
## 2 -2.4  0.8
## 3 -2.3  0.6
## 4 -2.2  0.4
## 5 -2.1  0.2
## 6 -2.0  0.0
## 7 -1.9 -0.2
## 8 -1.8 -0.4
## 9 -1.7 -0.6
## 10 -1.6 -0.8
## 11 -1.5 -1.0
```

```
## Pode-se observar que para valores menores que -2, g(x) assume valores
## positivos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < -2'
```

### *# Exemplo Gráfico*

```
## O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que -2 temos f1(x) > f2(x) e g(x) > 0, para x = 1.5 temos
## f1(x) = f2(x) e g(x) = 0 e para valores maiores que -2 temos f1(x) < f2(x) e
## g(x) < 0.
```

```
## Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 3, r + 3)
```

```
## Determina a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))
```

```
## Curvas:
```

```

curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
      bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      main = 'Componentes da Inequação')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

## Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
       y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

## Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

## Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
         y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

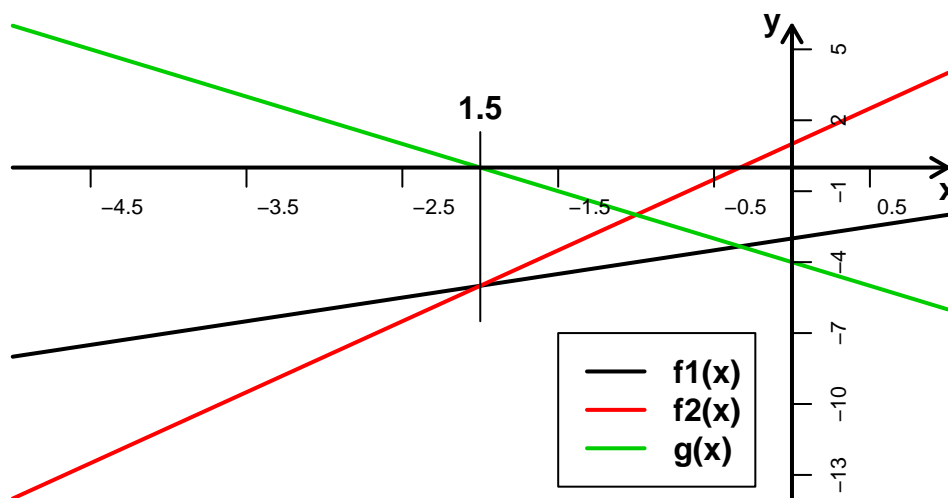
## Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
     hadj = -0.25, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 4, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 3)),
     padj = -1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

## Legenda:
legend(r + 0.5, -7, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
      lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
     labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)

```

### Componentes da Inequação



c)  $2x - 1 \geq 5x + 3$

$$\begin{aligned}
2x - 1 \quad (-2x) &\geq 5x + 3 \quad (-2x) \\
-1 &\geq 3x + 3 \\
-1 \quad (-3) &\geq 3x + 3 \quad (-3) \\
-4 &\geq 3x \\
\frac{-4}{3} &\geq \frac{3x}{3} \\
-\frac{4}{3} &\geq x \\
x &\leq -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

*# Resolução no R*

```
## Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = 2x - 1' e 'f2(x) = 5x + 3'.
f1 <- function(x){
  2*x - 1
}

f2 <- function(x){
  5*x + 3
}

## A desigualdade é 'f1(x) >= f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) >= 0'. Logo queremos
## os valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja maior que zero.
## Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r

## [1] -1.333333

## O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
## Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

## Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é -1.33, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.1)
data.frame(x, g(x))

##           x           g.x.
## 1 -1.833333 1.500000e+00
## 2 -1.733333 1.200000e+00
## 3 -1.633333 9.000000e-01
## 4 -1.533333 6.000000e-01
## 5 -1.433333 3.000000e-01
```

```
## 6 -1.333333 1.776357e-15
## 7 -1.233333 -3.000000e-01
## 8 -1.133333 -6.000000e-01
## 9 -1.033333 -9.000000e-01
## 10 -0.933333 -1.200000e+00
## 11 -0.833333 -1.500000e+00

## Pode-se observar que para valores menores que -1.33, g(x) assume valores
## positivos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x <= -1.33' ou 'x <= -4/3'.

# Exemplo Gráfico

## O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que -1.33 temos f1(x) > f2(x) e g(x) > 0, para x = -1.33 temos
## f1(x) = f2(x) e g(x) = 0 e para valores maiores que -1.33 temos
## f1(x) < f2(x) e g(x) < 0.

## Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 2, r + 2)

## Determina a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

## Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
      bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      main = 'Componentes da Inequação')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

## Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
       y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

## Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

## Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
         y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

## Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(round(v[1]), round(v[2]) - 0.5, 1)),
     hadj = -0.25, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 4, c(seq(round(mini) + 1, round(maxi) - 1, 3)),
     padj = -1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

## Legenda:
```



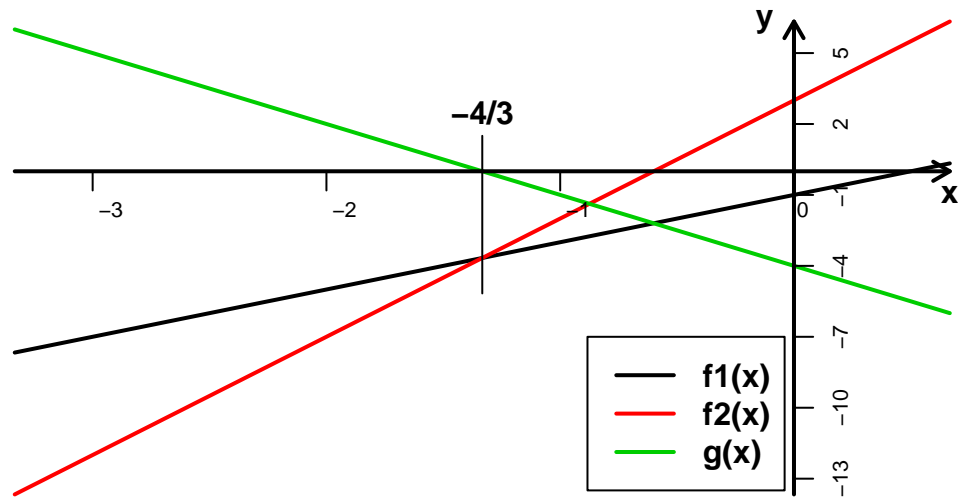
```

legend(r + 0.45, -7, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
      lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
     labels = c("x", "y", "-4/3"), font = 2)

```

### Componentes da Inequação





## Capítulo 2

### Sem Título



## Capítulo 3

### Sem Título



## Capítulo 4

### Sem Título





## Capítulo 5

### Sem Título