BGuide - Cálculo 1

Bruno Geronymo

2018-03-08

Sumário

Prefácio

Este material trata-se de um manual de resoluções dos exercícios propostos no livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* de *Hamilton Luiz Guidorizzi*. Ao decorrer das resoluções o material busca apresentar, adicionalmente, resoluções computacionais através do software R de computação estatística para facilitar a visualização do problema e também o aprendizado da linguagem *R*.

O material procura abordar todos os assuntos tratados no livro do *Guidorizzi*, seguindo também a mesma ordem dos capítulos, para facilitar a dinâmica de pesquisa por assuntos específicos.

Capítulo 1

Números reais

1.1 Os Números Racionais

Por uma questão de notação admitiremos aqui que, sendo r um número racional, se $r \leqslant 0$, dizemos que r é não positivo. Da mesma forma, se $r \geqslant 0$, dizemos que r é não negativo.

Vale acrescentar aqui algumas definições que poderão auxiliar na leitura do livro.

- **Abscissa**: Trata-se da coordenada de um ponto sobre uma reta.
- **Irredutível**: Algo que não se pode reduzir. Uma fração é dita irredutível quando está em sua forma mais reduzida possível.

1.2 Os Números Reais

EXEMPLO 4. *(Página 6)* Suponha $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Prove:

b) $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

Resolução:

$$\text{e } \left.\begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{matrix}\right\} \overset{(OM)}{\Rightarrow} \text{ e } \left.\begin{matrix} xx \leqslant xy \\ xy \leqslant yy \end{matrix}\right\} \overset{(O3)}{\Rightarrow} xx \leqslant xy \leqslant yy \Rightarrow xx \leqslant yy \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$$

```r
# Estudo por simulação:

##  Semente:
set.seed(sum(utf8ToInt("BGuide")))

##  Quantidade de números a serem gerados:
n <- 1000000

##  Gera-se aqui 'n' números aleatórios seguindo a distribuição Uniforme de
## parâmetros 'min = 0' e 'max = 1':
x <- runif(n)

##  Em seguida geramos mais 'n' números aleatórios seguindo uma distribuição
## Uniforme de parâmetros 'min = x' e 'max = 1'. Isto faz com que todos os
```

```
## números armazenados em y[i] sejam maiores do que os armazenados em x[i], com
## 'i' variando de 1 a 'n'. Mas não implica que y[i] seja maior do que x[j] com
## 'j' também variando de 1 a 'n' e 'i != j':
y <- runif(n, min = x)

##  Soma a quantidade de verificações onde a afirmação 'x^2 <= y^2' for
## verdadeira:
sum(x^2 <= y^2)
```

```
## [1] 1000000
```

```
##  Observe que o resultado é 1.000.000, exatamente a quantidade de números
## uniformes no intervalo (0, 1) que foram gerados. Logo para todas as
## simulações obteve-se 'x^2 <= y^2'.

##  Obs.: O resultado obtido por simulação não prova a propriedade acima, apenas
## cria evidências a favor dela. A simulação não é necessária aqui pois a
## propriedade pode ser provada analiticamente.
```

EXEMPLO 9. *(Página 10)* Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5$.

Sendo $x < 2$:

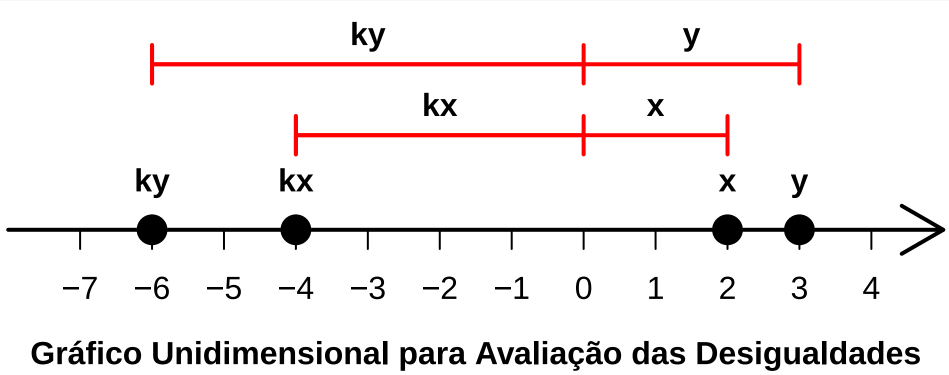
$$\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5 \Leftrightarrow 3x-1 \leqslant 5(x+2).$$

Então o autor pergunta: Por quê?

Sabemos que $1 < 2$, se multiplicássemos esta expressão por -1 sem alterarmos o sentido da desigualdade teríamos $-1 < -2$ e sabemos que esta afirmação não é verdadeira. Considerando $a < 0$, se multiplicarmos uma desigualdade por a altera-se o sentido da desigualdade pois refletimos estes valores para o outro lado de um eixo com relação a origem a uma taxa de progressão $|a|$. Porém, ao realizar este processo a direção de crescimento das unidades permanece a mesma (não é refletida).

```
# Exemplo gráfico

##  O gráfico a seguir tem como objetivo a visualização do que foi dito
## anteriormente. Nele pode-se observar a propriedade 'x <= y  ==>  ky <= kx'
## quando 'k < 0'. No exemplo utilizaremos 'x = 2', 'y = 3' e 'k = -2'.

##  Cria um vetor dos valores a serem plotados:
xy <- c(2, 3)
k <- -2
pontos <- c(k*xy, xy)

##  Atribui 0 aos valores de y
pontos <- cbind(pontos, 0)

##  Atribui nome às coordenadas
rownames(pontos) <- c("kx", "ky", "x", "y")

##  Cria gráfico unidimensional:
plot(pontos, bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
```

```
     ylim = c(-1, 1),
     xlim = c(pontos[2, 1] - 2, pontos[4, 1] + 2), pch = 19, cex = 2)

##  Eixo do sistema:
arrows(x0 = pontos[2, 1] - 2, x1 = pontos[4, 1] + 2,
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2)

##  Retas de distância:
arrows(x0 = pontos[1, 1], x1 = c(0, pontos[3, 1]),
       y0 = 0.4, y1 = 0.4,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

arrows(x0 = pontos[2, 1], x1 = c(0, pontos[4, 1]),
       y0 = 0.7, y1 = 0.7,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

##  Enumeração do eixo:
axis(side = 1, seq(-7, 4, 1), pos = 0)

##  Legenda:
text(pontos, labels = rownames(pontos), pos = 3, offset = 1, font = 2)

text(x = pontos[1, 1]/2, labels = rownames(pontos)[1], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[2, 1]/2, labels = rownames(pontos)[2], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[3, 1]/2, labels = rownames(pontos)[3], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[4, 1]/2, labels = rownames(pontos)[4], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)

text(y = 0, x = (pontos[2, 1] + pontos[4, 1])/2,
     labels = "Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades",
     pos = 1, offset = 3, font = 2)
```



1.2.1 Exercícios Resolvidos

1. Resolva a inequação.

   a) $3x + 3 < x + 6$

$$\begin{aligned}
3x+3\ \ (-x) &< x+6\ \ (-x)\\
2x+3 &< 6\\
2x+3\ \ (-3) &< 6\ \ (-3)\\
2x &< 3\\
\frac{2x}{2} &< \frac{3}{2}\\
x &< \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

```
# Resolução no R

##  Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = 3x + 3' e 'f2(x) = x + 6'.
f1 <- function(x){
  3*x + 3
}

f2 <- function(x){
  x + 6
}

##  A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) < 0'. Logo queremos os
## valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja menor que zero.
##  Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
##  A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r
```

```
## [1] 1.5
```

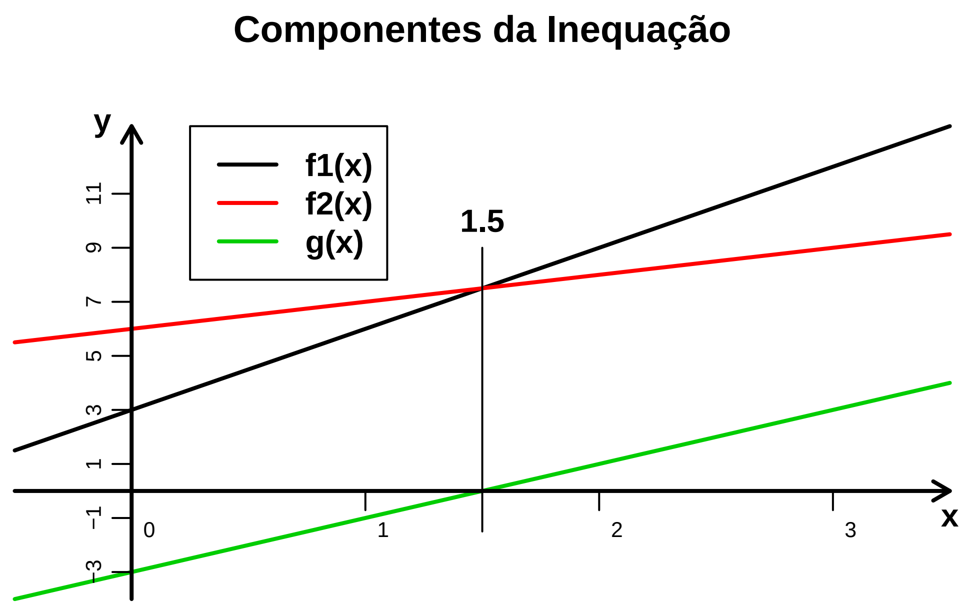
```
##  O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
##  Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

##  Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é 1.5, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.1)
data.frame(x, g(x))
```

```
##      x g.x.
## 1  1.0 -1.0
## 2  1.1 -0.8
## 3  1.2 -0.6
## 4  1.3 -0.4
## 5  1.4 -0.2
## 6  1.5  0.0
```

```
## 7  1.6  0.2
## 8  1.7  0.4
## 9  1.8  0.6
## 10 1.9  0.8
## 11 2.0  1.0
```

```r
##  Pode-se observar que para valores menores que 1.5, g(x) assume valores
## negativos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < 1.5'

# Exemplo Gráfico

##  O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que 1.5 temos f1(x) < f2(x), para x = 1.5 temos f1(x) = f2(x) e para
## valores maiores que 1.5 temos f1(x) > f2(x).

##  Repare também que para valores menores que zero temos g(x) < 0, para x = 0
## temos g(x) = 0 e para valores maiores que zero temos g(x) > 0.

##  Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 2, r + 2)

##  Determina  a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

##  Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
  bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
  main = 'Componentes da Inequação')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

##  Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
   y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
   y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

##  Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

##  Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
     y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

##  Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
 hadj = -1, padj = -1.5, pos = 0,  cex.axis = 0.7)
axis(side = 2, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 2)),
 padj = 1, pos = 0,  cex.axis = 0.7)
```

```
##  Legenda:
legend(v[1] + 0.75, maxi, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
   lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
 labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)
```



b) $x - 3 > 3x + 1$

$$\begin{aligned}
x - 3 \ (-x) &> 3x + 1 \ (-x) \\
-3 &> 2x + 1 \\
-3 \ (-1) &> 2x + 1 \ (-1) \\
-4 &> 2x \\
\frac{-4}{2} &> \frac{2x}{2} \\
-2 &> x \\
x &< -2
\end{aligned}$$

```
# Resolução no R

##  Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = x - 3' e 'f2(x) = 3x + 1'.
f1 <- function(x){
  x - 3
}

f2 <- function(x){
  3*x + 1
}
```

```
##  A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) > 0'. Logo queremos os
## valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja maior que zero.
##  Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
##  A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r
```

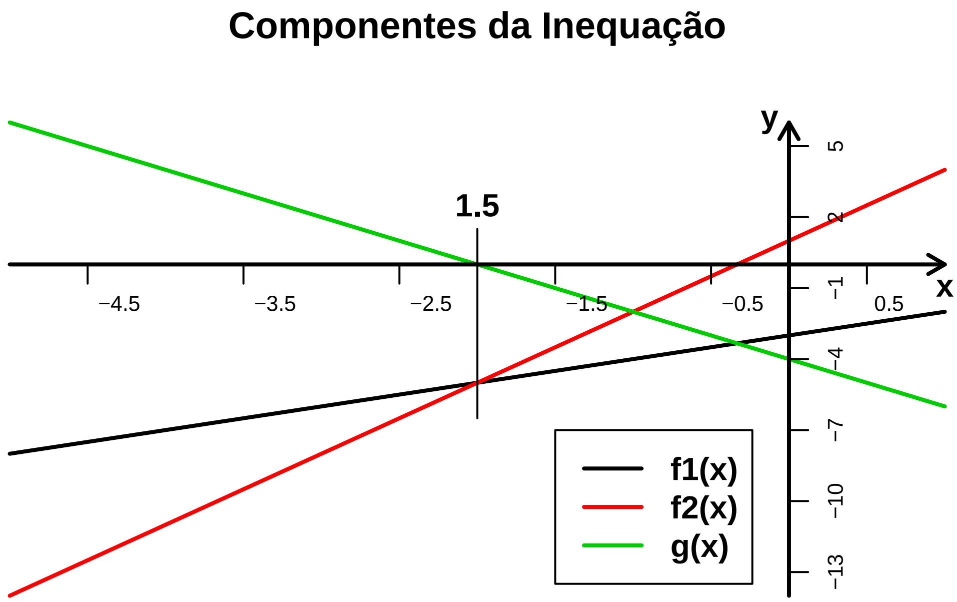
```
## [1] -2
```

```
##  O resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
##  Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

##  Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é -2, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = -2.5, to = -1.5, by = 0.1)
data.frame(x, g(x))
```

```
##       x g.x.
## 1  -2.5  1.0
## 2  -2.4  0.8
## 3  -2.3  0.6
## 4  -2.2  0.4
## 5  -2.1  0.2
## 6  -2.0  0.0
## 7  -1.9 -0.2
## 8  -1.8 -0.4
## 9  -1.7 -0.6
## 10 -1.6 -0.8
## 11 -1.5 -1.0
```

```
##  Pode-se observar que para valores menores que -2, g(x) assume valores
## positivos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < -2'

# Exemplo Gráfico

##  O gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que -2 temos f1(x) > f2(x), para x = 1.5 temos f1(x) = f2(x) e para
## valores maiores que -2 temos f1(x) < f2(x).

##  Repare também que para valores menores que zero temos g(x) > 0, para x = 0
## temos g(x) = 0 e para valores maiores que zero temos g(x) < 0.

##  Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 3, r + 3)

##  Determina  a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
```

```
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

##  Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
  bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
  main = 'Componentes da Inequação')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

##  Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
   y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
   y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

##  Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

##  Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
     y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

##  Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
 hadj = -0.25, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 4, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 3)),
 padj = -1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

##  Legenda:
legend(r + 0.5, -7, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
   lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
 labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)
```


Componentes da Inequação
y
x
1.5
−4.5
−3.5
−2.5
−1.5
−0.5
0.5
5
2
−1
−4
−7
−10
−13
f1(x)
f2(x)
g(x)

Capítulo 2

Sem Título

Capítulo 3

Sem Título

Capítulo 4

Sem Título

Capítulo 5

Sem Título