BGuide - Cálculo 1

Bruno Geronymo

2018-03-05

Sumário

Prefácio

Este material trata-se de um manual de resoluções dos exercícios propostos no livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* de *Hamilton Luiz Guidorizzi.* Ao decorrer das resoluções o material busca apresentar, adicionalmente, resoluções computacionais através do software R de computação estatística para facilitar a visualização do problema e também o aprendizado da linguagem *R*.

O material procura abordar todos os assuntos tratados no livro do *Guidorizzi*, seguindo também a mesma ordem dos capítulos, para facilitar a dinâmica de pesquisa por assuntos específicos.

Capítulo 1

Números reais

1.1 Os Números Racionais

Por uma questão de notação admitiremos aqui que, sendo r um número racional, se $r \leqslant 0$, dizemos que r é não positivo. Da mesma forma, se $r \geqslant 0$, dizemos que r é não negativo.

Vale acrescentar aqui algumas definições que poderão auxiliar na leitura do livro.

- **Abscissa**: Trata-se da coordenada de um ponto sobre uma reta.
- **Irredutível**: Algo que não se pode reduzir. Uma fração é dita irredutível quando está em sua forma mais reduzida possível.

1.2 Os Números Reais

EXEMPLO 4. *(Página 6)* Suponha $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Prove:

b) $x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$.

Resolução:

$$\text{e} \left.\begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{array}\right\} \overset{(OM)}{\Rightarrow} \text{e} \left.\begin{array}{c} xx \leqslant xy \\ xy \leqslant yy \end{array}\right\} \overset{(O3)}{\Rightarrow} xx \leqslant xy \leqslant yy \Rightarrow xx \leqslant yy \Rightarrow x^2 \leqslant y^2$$

```r
# Estudo por simulação:

## Semente:

set.seed(sum(utf8ToInt("BGuide")))

## Quantidade de números a serem gerados:

n <- 1000000

##  Gera-se aqui 'n' números aleatórios seguindo a distribuição Uniforme de
## parâmetros 'min = 0' e 'max = 1':

x <- runif(n)
```

```
##  Em seguida geramos mais 'n' números aleatórios seguindo uma distribuição
## Uniforme de parâmetros 'min = x' e 'max = 1'. Isto faz com que todos os
## números armazenados em y[i] sejam maiores do que os armazenados em x[i], com
## 'i' variando de 1 a 'n'. Mas não implica que y[i] seja maior do que x[j] com
## 'j' também variando de 1 a 'n' e 'i != j':

y <- runif(n, min = x)

##  Soma a quantidade de verificações onde a afirmação 'x^2 <= y^2' for
## verdadeira:

sum(x^2 <= y^2)
```

```
## [1] 1000000
```

```
##  Observe que o resultado é 1.000.000, exatamente a quantidade de números
## uniformes no intervalo (0, 1) que foram gerados. Logo para todas as
## simulações obteve-se 'x^2 <= y^2'.

##  Obs.: O resultado obtido por simulação não prova a propriedade acima, apenas
## cria evidências a favor dela. A simulação não é necessária aqui pois a
## propriedade pode ser provada analiticamente.
```

EXEMPLO 9. *(Página 10)* Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5$.

Sendo $x < 2$:

$$\frac{3x-1}{x+2} \geqslant 5 \Leftrightarrow 3x - 1 \leqslant 5(x+2).$$

Então o autor pergunta: Por quê?

Sabemos que $1 < 2$, se multiplicássemos esta expressão por -1 sem alterarmos o sentido da desigualdade teríamos $-1 < -2$ e sabemos que esta afirmação não é verdadeira. Considerando $a < 0$, se multiplicarmos uma desigualdade por a altera-se o sentido da desigualdade pois refletimos estes valores para o outro lado de um eixo com relação a origem a uma taxa de progressão $|a|$. Porém, ao realizar este processo a direção de crescimento das unidades permanece a mesma (não é refletida).

```
# Exemplo gráfico

##  O gráfico a seguir tem como objetivo a visualização do que foi dito
## anteriormente. Nele pode-se observar a propriedade 'x <= y  ==>  ky <= kx'
## quando 'k < 0'. No exemplo utilizaremos 'x = 2', 'y = 3' e 'k = -2'.

## Cria um vetor dos valores a serem plotados:
xy <- c(2, 3)
k <- -2
pontos <- c(k*xy, xy)

## Atribui 0 aos valores de y
pontos <- cbind(pontos, 0)

## Atribui nome às coordenadas
```

```
rownames(pontos) <- c("kx", "ky", "x", "y")

## Cria gráfico unidimensional:
plot(pontos, bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
     ylim = c(-1, 1),
     xlim = c(pontos[2, 1] - 2, pontos[4, 1] + 2), pch = 19, cex = 2)

## Eixo do sistema:
arrows(x0 = pontos[2, 1] - 2, x1 = pontos[4, 1] + 2,
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2)

## Retas de distância:
arrows(x0 = pontos[1, 1], x1 = c(0, pontos[3, 1]),
       y0 = 0.4, y1 = 0.4,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

arrows(x0 = pontos[2, 1], x1 = c(0, pontos[4, 1]),
       y0 = 0.7, y1 = 0.7,
       angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)

## Enumeração do eixo:
axis(side=1,seq(-7,4,1),pos=0)

## Legenda:
text(pontos,labels = rownames(pontos), pos = 3, offset = 1, font = 2)

text(x = pontos[1, 1]/2, labels = rownames(pontos)[1], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[2, 1]/2, labels = rownames(pontos)[2], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[3, 1]/2, labels = rownames(pontos)[3], y = 0.4,
     pos = 3, font = 2)
text(x = pontos[4, 1]/2, labels = rownames(pontos)[4], y = 0.7,
     pos = 3, font = 2)

text(y = 0, x = (pontos[2, 1] + pontos[4, 1])/2,
     labels = "Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades",
     pos = 1, offset = 3, font = 2)
```

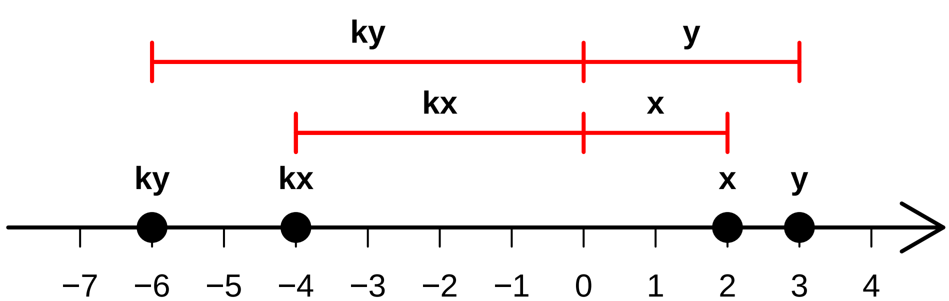

Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades

1.2.1 Exercícios Resolvidos

1. Resolva a inequação.

   a) $3x + 3 < x + 6$

$$\begin{array}{rcl} 3x+3 \;\; (-x) & < & x+6 \;\; (-x) \\ 2x+3 & < & 6 \\ 2x+3 \;\; (-3) & < & 6 \;\; (-3) \\ 2x & < & 3 \\ \dfrac{2x}{2} & < & \dfrac{3}{2} \\ x & < & \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Capítulo 2

Sem Título

Capítulo 3

Sem Título

Capítulo 4

Sem Título

Capítulo 5

Sem Título