

BGuide - Cálculo 1

Bruno Geronymo

2018-03-24

Sumário

Prefácio	5
1 Números reais	7
1.1 Os Números Racionais	7
1.2 Os Números Reais	7

Prefácio

Este material trata-se de um manual de resoluções dos exercícios propostos no livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* desenvolvido por Guidorizzi (2013). Ao decorrer das resoluções o material busca apresentar, adicionalmente, resoluções computacionais através do software R Core Team (2017) de computação estatística para facilitar a visualização do problema e também o aprendizado da linguagem R.

O material procura abordar todos os assuntos tratados no livro do *Guidorizzi*, seguindo também a mesma ordem dos capítulos, para facilitar a dinâmica de pesquisa por assuntos específicos.

Para o desenvolvimento do material foi utilizado o pacote *knitr* desenvolvido por Xie (2018b), o *rmarkdown* desenvolvido por Allaire et al. (2018) para geração de documentos dinâmicos no R e o *bookdown* desenvolvido por Xie (2018a) para criar livros e documentos técnicos em R *Markdown*.

Capítulo 1

Números reais

1.1 Os Números Racionais

Por uma questão de notação admitiremos aqui que, sendo r um número racional, se $r \leq 0$, dizemos que r é não positivo. Da mesma forma, se $r \geq 0$, dizemos que r é não negativo.

Vale acrescentar aqui algumas definições que poderão auxiliar na leitura do livro.

- **Abscissa:** Trata-se da coordenada de um ponto sobre uma reta.
- **Irredutível:** Algo que não se pode reduzir. Uma fração é dita irredutível quando está em sua forma mais reduzida possível.

1.2 Os Números Reais

EXEMPLO 4. (*Página 6*) Suponha $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Prove:

b) $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Resolução:

$$\text{e } \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq x \leq y \end{array} \right\} \xrightarrow{(OM)} \text{e } \left. \begin{array}{l} xx \leq xy \\ xy \leq yy \end{array} \right\} \xrightarrow{(O3)} xx \leq xy \leq yy \Rightarrow xx \leq yy \Rightarrow x^2 \leq y^2$$

EXEMPLO 9. (*Página 9*) Resolva a inequação $\frac{3x-1}{x+2} \geq 5$.

Sendo $x < 2$:

$$\frac{3x-1}{x+2} \geq 5 \Leftrightarrow 3x-1 \leq 5(x+2).$$

Então o autor pergunta: Por quê?

Sabemos que $1 < 2$, se multiplicássemos esta expressão por -1 sem alterarmos o sentido da desigualdade teríamos $-1 < -2$ e sabemos que esta afirmação não é verdadeira. Considerando $a < 0$, se multiplicarmos uma desigualdade por a altera-se o sentido da desigualdade pois refletimos estes valores para o outro lado de um eixo com relação a origem a uma taxa de progressão $|a|$. Porém, ao realizar este processo a direção de crescimento das unidades permanece a mesma (não é refletida).

Exemplo gráfico

```
## O gráfico a seguir tem como objetivo a visualização do que foi dito
## anteriormente. Nele pode-se observar a propriedade 'x <= y ==> ky <= kx'
## quando 'k < 0'. No exemplo utilizaremos 'x = 2', 'y = 3' e 'k = -2'.
```

```
## Cria um vetor dos valores a serem plotados:
```

```
xy <- c(2, 3)
```

```
k <- -2
```

```
pontos <- c(k*xy, xy)
```

```
## Atribui 0 aos valores de y
```

```
pontos <- cbind(pontos, 0)
```

```
## Atribui nome às coordenadas
```

```
rownames(pontos) <- c("kx", "ky", "x", "y")
```

```
## Cria gráfico unidimensional:
```

```
plot(pontos, bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      ylim = c(-1, 1),
      xlim = c(pontos[2, 1] - 2, pontos[4, 1] + 2), pch = 20, cex = 2)
```

```
## Eixo do sistema:
```

```
arrows(x0 = pontos[2, 1] - 2, x1 = pontos[4, 1] + 2,
        y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2)
```

```
## Retas de distância:
```

```
arrows(x0 = pontos[1, 1], x1 = c(0, pontos[3, 1]),
        y0 = 0.4, y1 = 0.4,
        angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)
```

```
arrows(x0 = pontos[2, 1], x1 = c(0, pontos[4, 1]),
        y0 = 0.7, y1 = 0.7,
        angle = 90, code = 3, col = "red", lwd = 2, length = 0.1)
```

```
## Enumeração do eixo:
```

```
axis(side = 1, seq(-7, 4, 1), pos = 0)
```

```
## Legenda:
```

```
text(pontos, labels = rownames(pontos), pos = 3, offset = 1, font = 2)
```

```
text(x = pontos[1, 1]/2, labels = rownames(pontos)[1], y = 0.4,
      pos = 3, font = 2)
```

```
text(x = pontos[2, 1]/2, labels = rownames(pontos)[2], y = 0.7,
      pos = 3, font = 2)
```

```
text(x = pontos[3, 1]/2, labels = rownames(pontos)[3], y = 0.4,
      pos = 3, font = 2)
```

```
text(x = pontos[4, 1]/2, labels = rownames(pontos)[4], y = 0.7,
      pos = 3, font = 2)
```

```
text(y = 0, x = (pontos[2, 1] + pontos[4, 1])/2,
      labels = "Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades",
      pos = 1, offset = 3, font = 2)
```

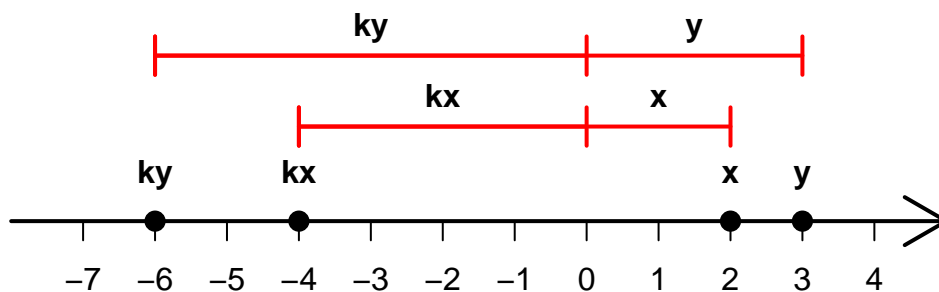



Gráfico Unidimensional para Avaliação das Desigualdades

1.2.1 Exercícios Resolvidos

1. (Página 10) Resolva a inequação.

a) $3x + 3 < x + 6$

$$\begin{aligned}
 3x + 3 \quad (-x) &< x + 6 \quad (-x) \\
 2x + 3 &< 6 \\
 2x + 3 \quad (-3) &< 6 \quad (-3) \\
 2x &< 3 \\
 \frac{2x}{2} &< \frac{3}{2} \\
 x &< \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Resolução no R

```
## Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f1(x) = 3x + 3' e 'f2(x) = x + 6'.
f1 <- function(x){
  3*x + 3
}

f2 <- function(x){
  x + 6
}

## A desigualdade é 'f1(x) < f2(x)' logo 'f1(x) - f2(x) < 0'. Portanto
## queremos os valores de x para os quais 'f1(x) - f2(x)' seja menor que zero.
## Começaremos achando a raiz da expressão 'f1(x) - f2(x)'.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(function(x){f1(x) - f2(x)}, c(-10, 10))$root
r
```

```
## [1] 1.5

## 0 resultado revela somente a raiz da função. No entanto queremos saber onde
## se localizam os valores positivos e negativos da função.
## Chamaremos nessa etapa a expressão 'f1(x) - f2(x)' de 'g(x)'.
g <- function(x){
  f1(x) - f2(x)
}

## Sabemos que a raiz da função 'g(x)' é 1.5, logo basta verificarmos os
## valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.25)
data.frame(x, g(x))

##      x g.x.
## 1 1.00 -1.0
## 2 1.25 -0.5
## 3 1.50  0.0
## 4 1.75  0.5
## 5 2.00  1.0

## Pode-se observar que para valores menores que 1.5, g(x) assume valores
## negativos. Logo os valores de x que satisfazem a inequação são dados por
## 'x < 1.5'

# Exemplo Gráfico

## 0 gráfico a seguir representa f1(x), f2(x) e g(x). Observe que para valores
## menores que 1.5 temos f1(x) < f2(x) e g(x) < 0, para x = 1.5 temos
## f1(x) = f2(x) e g(x) = 0 e para valores maiores que 1.5 temos f1(x) > f2(x) e
## g(x) > 0.

## Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
v <- c(r - 2, r + 2)

## Determina a amplitude do eixo das ordenadas:
mini <- min(f1(v), f2(v), g(v))
maxi <- max(f1(v), f2(v), g(v))

## Curvas:
curve(f1, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
      bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      main = 'Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.1a)')
curve(f2, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)

## Eixos:
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
       y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)

## Comprimento da reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
const <- 1.5
minim <- min(f1(r), f2(r), g(r)) - const
```

```

maxim <- max(f1(r), f2(r), g(r)) + const

## Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
segments(x0 = r, x1 = r,
         y0 = minim, y1 = maxim, lwd = 1)

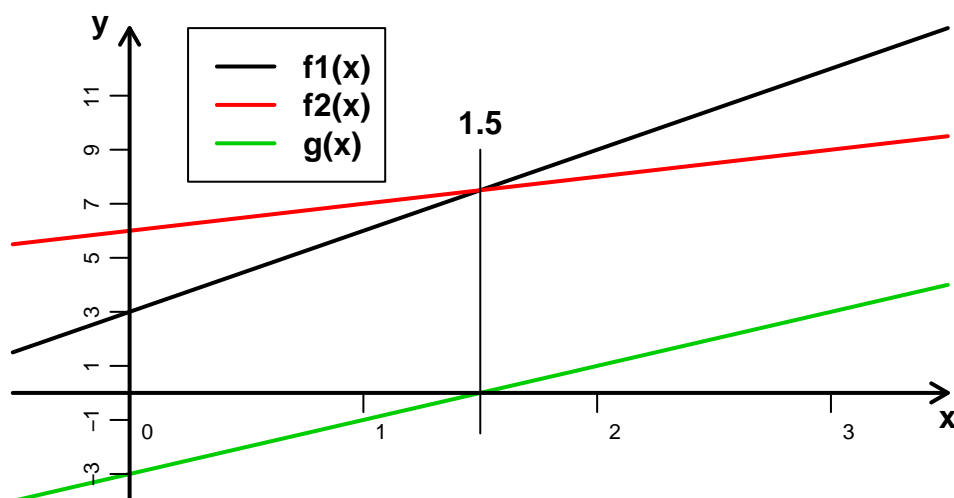
## Enumeração dos eixos:
axis(side = 1, c(seq(v[1] + 0.5, v[2] - 0.5, 1)),
     hadj = -1, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
axis(side = 2, c(seq(mini + 1, maxi - 1, 2)),
     padj = 1, pos = 0, cex.axis = 0.7)

## Legenda:
legend(v[1] + 0.75, maxi, col = c(1, 2, 3), c('f1(x)', 'f2(x)', 'g(x)'),
      lwd = 2, text.font = 2)

text(x = c(v[2], -0.125, r), y = c(-1, maxi, maxim + 1),
     labels = c("x", "y", "1.5"), font = 2)

```

Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.1a)



2. (Página 10) Estude o sinal da expressão.

a) $3x - 1$

i) $f(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned}
 3x - 1 &= 0 \\
 3x - 1 \quad (+1) &= 0 \quad (+1) \\
 3x &= 1 \\
 \frac{3x}{3} &= \frac{1}{3} \\
 x &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

ii) $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< 0 \\ 3x - 1 \quad (+1) &< 0 \quad (+1) \\ 3x &< 1 \\ \frac{3x}{3} &< \frac{1}{3} \\ x &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

iii) $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &> 0 \\ 3x - 1 \quad (+1) &> 0 \quad (+1) \\ 3x &> 1 \\ \frac{3x}{3} &> \frac{1}{3} \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

```
# Resolução no R

## Para estudar o sinal da expressão pelo R começaremos construindo a função:
f <- function(x){
  3*x - 1
}

## Começaremos achando a raiz da expressão f(x) ou seja, os valores de x para
## os quais f(x) = 0.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
r <- uniroot(f, c(-10, 10))$root
r

## [1] 0.3333333

## Logo para x = 1/3 temos f(x) = 0.
## Queremos saber também onde se localizam os valores positivos e negativos da
## função. Para isso basta verificarmos os valores ao redor da raiz.
x <- seq(from = r - 0.5, to = r + 0.5, by = 0.25)
data.frame(x, f(x))

##           x           f.x.
## 1 -0.1666667 -1.500000e+00
## 2  0.08333333 -7.500000e-01
## 3  0.33333333  7.105427e-15
## 4  0.58333333  7.500000e-01
## 5  0.83333333  1.500000e+00
```

Pode-se observar que para valores menores que 1/3, f(x) assume valores negativos e para valores maiores que 1/3, f(x) assume valores positivos.

e) $\frac{x-1}{x-2}$

i) $f(x) = x - 1$

I) $f(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned} x - 1 &= 0 \\ x - 1 \quad (+1) &= 0 \quad (+1) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

II) $f(x) < 0$:

$$\begin{aligned} x - 1 &< 0 \\ x - 1 \quad (+1) &< 0 \quad (+1) \\ x &< 1 \end{aligned}$$

III) $f(x) > 0$:

$$\begin{aligned} x - 1 &> 0 \\ x - 1 \quad (+1) &> 0 \quad (+1) \\ x &> 1 \end{aligned}$$

ii) $g(x) = x - 2$

I) $g(x) = 0$ (raiz):

$$\begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x - 2 \quad (+2) &= 0 \quad (+2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

II) $g(x) < 0$:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 0 \\ x - 2 \quad (+2) &< 0 \quad (+2) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

III) $g(x) > 0$:

$$\begin{aligned} x - 2 &> 0 \\ x - 2 \quad (+2) &> 0 \quad (+2) \\ x &> 2 \end{aligned}$$

	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$f(x)$	-	+	+
$g(x)$	-	-	+
$h(x)$	+	-	+

$$\text{iii) } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Nosso interesse aqui é em $h(x)$, podemos concluir com os resultados de i, ii e iii que temos $h(x) < 0$ para $1 < x < 2$, $h(x) = 0$ para $x = 1$, $h(x) > 0$ para $x < 1$ e $x > 2$. Temos ainda que para $x = 2$ a função $h(x)$ não é definida pois o denominador da função iguala-se a zero.

Resolução no R

```
## Para resolver a inequação pelo R consideraremos as seguintes expressões:
## 'f(x) = x - 1' e 'g(x) = x - 2'.
f <- function(x){
  x - 1
}

g <- function(x){
  x - 2
}

## Começaremos achando a raiz das expressões f(x) e g(x) ou seja, os valores de
## x para os quais f(x) = 0.
## A função abaixo utiliza iterações para achar a raiz em um intervalo
## pré-determinado, utiliza-se aqui o intervalo (-10, 10) mas é possível inserir
## grandes intervalos a um certo custo de tempo computacional (neste caso
## razoável).
rf <- uniroot(f, c(-10, 10))$root
rf

## [1] 1

rg <- uniroot(g, c(-10, 10))$root
rg

## [1] 2

## O resultado revela somente a raiz das funções f(x) e g(x). No entanto
## queremos saber onde se localizam os valores positivos e negativos das
## funções.

## Sabemos que as raízes das funções f(x) e g(x) são, respectivamente, 1 e 2.
## Agora verificaremos os valores ao redor das raízes.
x <- seq(from = min(rf, rg) - 0.5, to = max(rf, rg) + 0.5, by = 0.5)
data.frame(x, f(x), g(x), f(x)/g(x))

##      x      f.x      g.x      f.x./g.x.
## 1 0.5 -5.000000e-01 -1.500000e+00 3.333333e-01
## 2 1.0 1.776357e-15 -1.000000e+00 -1.776357e-15
## 3 1.5 5.000000e-01 -5.000000e-01 -1.000000e+00
## 4 2.0 1.000000e+00 1.776357e-15 5.629500e+14
## 5 2.5 1.500000e+00 5.000000e-01 3.000000e+00
```

```
## Nosso interesse aqui é em  $f(x)/g(x)$ , podemos concluir com o resultado acima
## que valores menores que 1 e maiores que 2 temos  $f(x)/g(x) > 0$ , e para valores
## maiores que 1 e menores que 2 temos  $f(x)/g(x) < 0$  e para  $x = 1$  temos
##  $f(x)/g(x) = 0$ . Por definição, quando  $g(x) = 0$  ( $x = 2$ ) a expressão não é
## definida.
```

Exemplo Gráfico

```
## O gráfico a seguir representa  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$ . Observe que para valores
## menores que 1 temos  $f_1(x) > f_2(x)$  e  $g(x) > 0$ , para  $x = 1$  temos  $f_1(x) = f_2(x)$ 
## e  $g(x) = 0$  e para valores maiores que 1 temos  $f_1(x) < f_2(x)$  e  $g(x) < 0$ .
```

```
## Vetor para determinar a amplitude do eixo das abscissas:
```

```
v <- c(min(rf, rg) - 2, max(rf, rg) + 2)
```

```
## Define função  $h(x)$ :
```

```
h <- function(x){
  f(x)/g(x)
}
```

```
## Determina a amplitude do eixo das ordenadas:
```

```
mini <- min(f(v), g(v), h(v))
```

```
maxi <- max(f(v), g(v), h(v))
```

```
## Curvas:
```

```
curve(f, from = v[1], to = v[2], xlim = v, ylim = c(mini, maxi), lwd = 2,
      bty = 'n', xaxt = 'n', yaxt = 'n', ylab = '', xlab = '',
      main = 'Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.2e)')
```

```
curve(g, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 2, lwd = 2)
```

```
curve(h, from = v[1], to = v[2], add = TRUE, col = 3, lwd = 2)
```

```
## Eixos:
```

```
arrows(x0 = v[1], x1 = v[2],
       y0 = 0, y1 = 0, lwd = 2, length = 0.1)
```

```
arrows(x0 = 0, x1 = 0,
       y0 = mini, y1 = maxi, lwd = 2, length = 0.1)
```

```
## Reta vertical que passa pelo ponto de intersecção:
```

```
segments(x0 = c(rf, rg), x1 = c(rf, rg),
        y0 = -2, y1 = 2, lwd = 1)
```

```
## Enumeração dos eixos:
```

```
axis(side = 1, c(seq(round(v[1]), round(v[2]) - 0.5, 1)),
     hadj = -0.25, padj = -1.5, pos = 0, cex.axis = 0.7)
```

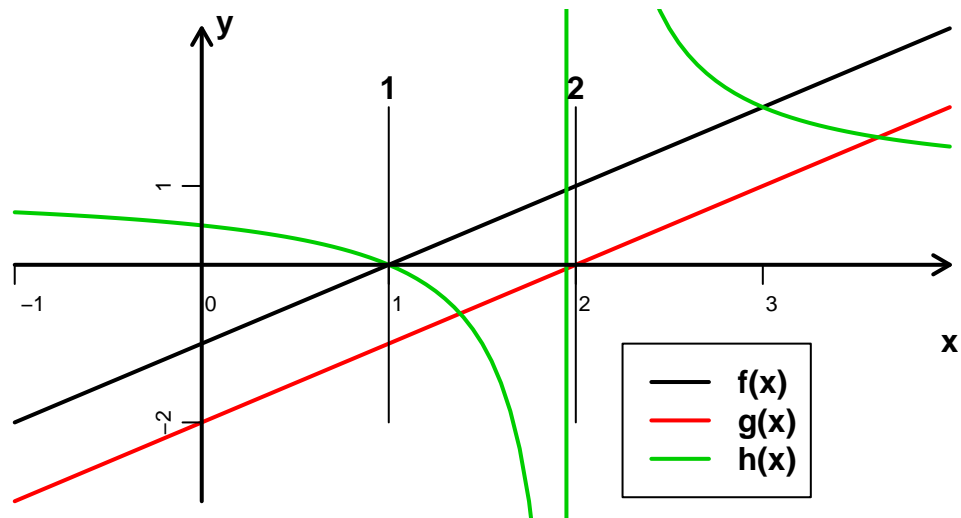
```
axis(side = 2, c(seq(round(mini) + 1, round(maxi) - 1, 3)),
     padj = 1, pos = 0, cex.axis = 0.7)
```

```
## Legenda:
```

```
legend(2.25, -1, col = c(1, 2, 3), c('f(x)', 'g(x)', 'h(x)'),
      lwd = 2, text.font = 2)
```

```
text(x = c(v[2], 0.125, rf, rg), y = c(-1, maxi, 2.25, 2.25),
     labels = c("x", "y", "1", "2"), font = 2)
```

Componentes da Inequação (Seção 1.2.1 Ex.2e)



Repare no grafico acima que para valores de x menores que 1 temos $f(x) < 0$
 ## e $g(x) < 0$ consequentemente $h(x) > 0$. Para $x = 1$ temos $f(x) = 0$ e $g(x) < 0$
 ## consequentemente $h(x) = 0$. Para valores de x maiores que 1 e menores que 2
 ## temos $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ consequentemente $h(x) < 0$. Para $x = 2$ temos
 ## $f(x) > 0$ e $g(x) = 0$ consequentemente $h(x)$ não é definida no ponto. Para
 ## valores de x maiores que 2 temos $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ consequentemente
 ## $h(x) > 0$.

Referências Bibliográficas

Allaire, J., Xie, Y., McPherson, J., Luraschi, J., Ushey, K., Atkins, A., Wickham, H., Cheng, J., and Chang, W. (2018). *rmarkdown: Dynamic Documents for R*. <https://rmarkdown.rstudio.com>, <https://github.com/rstudio/rmarkdown>.

Guidorizzi, H. (2013). *Um curso de cálculo*. Number v. 1. LTC.

R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Xie, Y. (2018a). *bookdown: Authoring Books and Technical Documents with R Markdown*. R package version 0.7.1.

Xie, Y. (2018b). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R*. R package version 1.20.