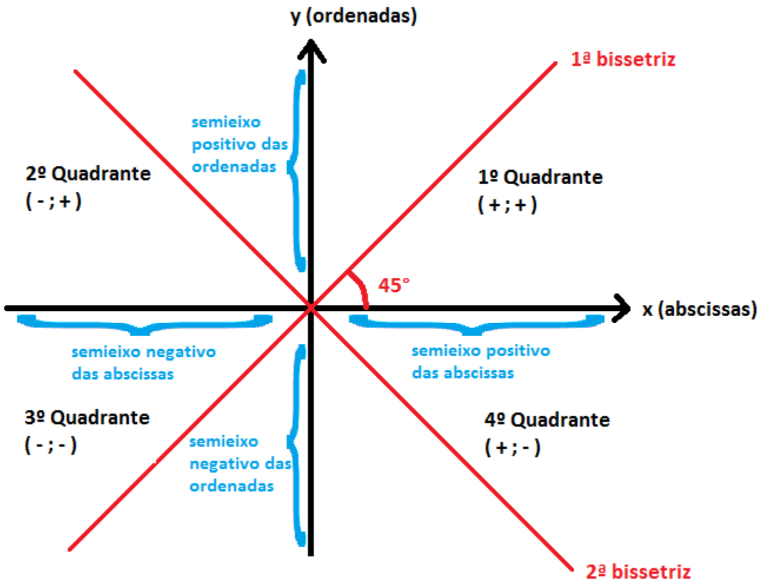
1.1 – Sistemas de Coordenadas Cartesianas ou Plano Cartesiano



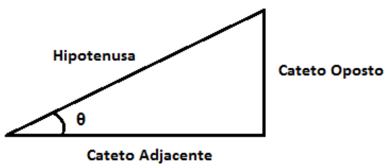
- O Ponto Médio (M) de um segmento qualquer $\overline{AB}$ é dado por:

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2} ; \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

- A Mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é ortogonal ao mesmo
- O comprimento de um segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

- Os ângulos de um triângulo retângulo podem ser encontrados utilizando-se as seguintes funções trigonométricas:



$$\sin\theta = \frac{c.o.}{hip.} \qquad \cos\theta = \frac{c.a.}{hip.} \qquad \tan\theta = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$\csc\theta = \frac{hip.}{c.o.} \qquad \sec\theta = \frac{hip.}{c.a.} \qquad \cot\theta = \frac{c.a.}{c.o.}$$

- **Ângulos Notáveis**

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N.A.

1.2 – Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos não vazios, o produto cartesiano de A por B (AxB) é dado por

$$\boldsymbol{AxB} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\}$$

- O número de elementos de AxB é dado por

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{AxB}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}).\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B})$$

- Se A ≠ B então AxB ≠ BxA.

1.3 – Relação

- Sejam A e B conjuntos não vazios, então a relação R de A em B é qualquer subconjunto de AxB, detonado por $R: A \to B$.
- O Domínio da relação $R: A \to B$, denotado por D(R), é formado por todos os elementos de A que estão associados a pelo menos um elemento de B.
- A Imagem da relação $R: A \to B$, denotado por Im(R), é formada por todos os elementos de B que são imagens de pelo menos um elemento de A.

1.4 – Função

- Sejam A e B conjuntos não vazios, denomina-se função a toda relação de A em B na qual, para todo elemento de A, está associado um único elemento de B. Desta forma, todos os elementos de A estão associados a um elemento de B e nenhum elemento de A pode estar associado a dois ou mais elementos de B.
- Uma função do conjunto A em B denotada por $f: A \to B$ pode ser representada por uma lei do tipo y = f(x) que determina a forma como são obtidos os pares (x; y) do produto cartesiano, ou seja, $(x, y) \in AxB$. Se uma relação R é uma função de A em B, dizemos que:
    - A é o domínio da função;
    - B é o contradomínio;
    - Os elementos do contradomínio B que estão associados aos do domínio A formam o conjunto imagem da função.

1.4.1 – Função Constante

- É a função na qual todos os elementos do domínio possuem a mesma imagem.

1.4.2 – Função crescente e função decrescente

- Uma função f(y), definida no intervalo [a; b] é dita crescente quando para $y_2 > y_1$ tem-se $f(y_2) > f(y_1)$.
- Uma função f(y), definida no intervalo [a; b] é dita decrescente quando para $y_2 > y_1$ tem-se $f(y_2) < f(y_1)$.

1.4.3 – Funções pares e funções ímpares

- Uma função é chamada de função par quando para qualquer valor de x do seu domínio ocorrer f(x) = f(-x).
- Uma função é chamada de função ímpar quando para qualquer valor x do seu domínio ocorrer f(x) = -f(-x).
- Uma função que não é par e não é ímpar é chamada de função sem paridade.

1.4.4 – Função sobrejetora, injetora e bijetora

- Uma função $f: A \to B$ é chamada de função sobrejetora quando todo elemento do contradomínio B for imagem de pelo menos um elemento do domínio A da função. Desta forma o conjunto imagem de f é igual ao seu contradomínio.
- Uma função $f: A \to B$ é chamada de função injetora quando para dois elementos distintos quaisquer do domínio, corresponderem duas imagens distintas no contradomínio.
- Uma função $f: A \to B$ é chamada de função bijetora quando for injetora e sobrejetora simultaneamente.

1.4.5 – Função inversa

- Seja f uma função bijetora de A em B, ou seja, $f: A \rightarrow B$, de domínio é A e o contradomínio é B, a função inversa de f é a função cujo domínio é B e o contradomínio é A, denotada por $f^{-1}: B \rightarrow A$, que associa a cada elemento $y = f(x) \in B$ um único elemento $x \in A$. Essa nova função denotada por f^{-1}, é chamada de função inversa de f. E, então, $f^{-1} = \{(y; x) | (x; y) \in f\}$.
- Vale lembrar: O logaritmo de um número n na base b é o expoente em que devemos elevar a base b para obter o número n.

$$\boldsymbol{l = \ log_b(n)} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{b^l = n}$$

  - Propriedades de logaritmo:
    - $\log(P.Q) = \log(P) + \log(Q)$
    - $\log\left(\frac{P}{Q}\right) = \log(P) - \log(Q)$
    - $\log(C^m) = m.\log(C)$
    - $\log(\sqrt[n]{R}) = \frac{\log(R)}{n}$

Exercícios:

1) Dados os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {2; 3; 4} e a relação R_1= {(1; 3), (3; 4)}. Pede-se:
   a. AxB.
   b. BxA.
   c. A representação gráfica de AxB.
   d. A representação gráfica de BxA.
   e. O número de elementos de AxB.
   f. O número de elementos de BxA.
   g. R_1 é relação de A em B?
   h. R_1 é relação de B em A?
   i. Represente R_1 em um diagrama de flechas como relação de A em B.
   j. O domínio da relação R_1, D(R_1).
   k. A imagem da relação R_1, Im(R_1).
   l. A representação por extensão da relação $R_2 = \{(x; y) \in AxB | x < y\}$.
   m. A representação gráfica de R_2.
2) Dados os conjuntos C = (3; 5], aberto à esquerda, D = [3; 7), aberto à direita e E = [3; ∞), aberto à direita e a relação $R_3 = \{(x; y) \in CxD | y = 2x\}$. Pede-se:
   a. A representação de CxD em linguagem simbólica.
   b. A representação gráfica de CxD.
   c. A representação de Ex(C∩D) em linguagem simbólica.
   d. A representação gráfica de Ex(C∩D).
   e. A representação gráfica da relação R_3.

f. Os conjuntos domínio e imagem da relação R_3.

g. R_3 pode ser considerado uma função? Se sim, pede-se:

   i. Domínio da função.

   ii. Contradomínio da função.

   iii. Imagem da função.

3) Seja o conjunto de pontos do segmento de reta

$\overline{PQ} = \left\{(x;y) \in R^2 \middle| y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad e \quad x \in \left[0;\ \sqrt{3}\right] \subset R\right\}$. Pede-se:

a. As coordenadas das extremidades do segmento $\overline{PQ}$.

b. A representação gráfica do segmento $\overline{PQ}$.

c. O Ponto Médio (M) do segmento $\overline{PQ}$.

d. A Mediatriz do segmento $\overline{PQ}$.

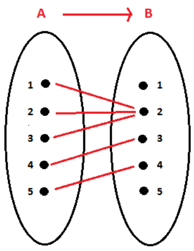
e. O comprimento do segmento.

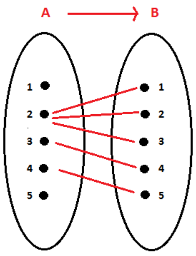
f. Seja a reta r que passa pelos pontos P e Q. Pergunta-se:

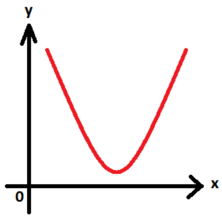
   i. Qual o ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas?

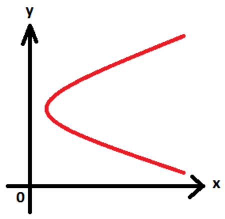
   ii. Qual o ângulo que a reta faz com o eixo das ordenadas?

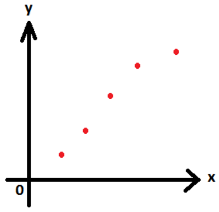
4) Quais das seguintes imagens representa uma função? Explique por quê.

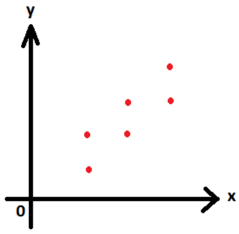
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

5) Represente graficamente a função representada no item ‘a’ da questão 4.
6) Seja $y = f(x) = 3x^2 + 2, \forall x, y \in R$. Pede-se:
   a. A representação de f(x) no plano cartesiano.
   b. O conjunto domínio de f(x).
   c. O conjunto contradomínio de f(x).
   d. O conjunto imagem de f(x).
7) Classifique as seguintes funções como: função constante, função crescente, função decrescente, função par, função ímpar, função sem paridade, função sobrejetora e função injetora. (Uma função pode ter mais de uma classificação)
   a. $f: X \to Y$ com $X = \{2, 3, 4, 5, 6\} \subset N$ e o conjunto unitário $Y = \{0{,}2\} \subset Q$, onde f é a função $y = f(x) = 0{,}2$.
   b. $f: U \to Y$ com $U = [a; b] \subset R$ e o conjunto unitário $Y = \left\{\frac{1}{b-a}\right\} \subset R$, onde f é a função $f(u) = \frac{1}{b-a}$.
   c. $y = f(x) = 2^x, \forall x, y \in R$.
   d. $y = f(x) = \sin x$, com $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $e\ y \in [0; 1]$.
   e. $y = p(x) = 0{,}3^x . 0{,}7^{1-x}$, com $x = \{0; 1\}$ $e\ y \in Q$.
   f. $y = f(x) = \sin x$, com $x \in R\ e\ y \in [-1; 1]$.
   g. $y = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}$, com $z \in R\ e\ y \in (0; 0{,}4]$.
8) Sejam as funções $f(x) = 2x + 1, \forall x \in R$, $g(x) = \sin x$, com $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e $h(x) = e^x, \forall x \in R$. Pede-se:
   a. $g^{-1}(x)$.
   b. $f^{-1}(2)$.
   c. $h^{-1}(e)$.
   d. A representação gráfica de $h(x)\ e\ h^{-1}(x)$.