# CE080 - FUNDAMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA

*Bruno Geronymo*[1]
*Fernanda Buhrer Rizzato*[2]

*24 de março de 2018*

[1]Universidade Federal do Paraná
[2]Universidade Federal do Paraná

# Sumário

# Prefácio

Este material busca auxiliar na compreensão e nos estudos dos assuntos tratados na matéria *Fundamentos Básicos para Estatística* (CE080) ministrada pela professora *Fernanda Buhrer Rizzato* (fernandab@ufpr.br) no primeiro semestre de 2018 para os candidatos presentes na terceira fase de seleção de acadêmicos do curso de Estatística da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Os livros utilizados como texto-base são, principalmente, *Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5ª Edição* de Guidorizzi (2013) e *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1* de Iezzi and Murakami (2004).

Foi desenvolvido através do software R Core Team (2017) de computação estatística com a utilização dos pacotes *knitr* desenvolvido por Xie (2018b), o *rmarkdown* desenvolvido por Allaire et al. (2018) para geração de documentos dinâmicos no *R* e o *bookdown* desenvolvido por Xie (2018a) para criação de livros e documentos técnicos em *R Markdown*.

# Capítulo 1

# Conjuntos Numéricos

Um conjunto numérico pode ser definido como um agrupamento de elementos numéricos que possuem alguma característica em comum. Por exemplo, podemos definir o conjunto dos números pares positivos como:

$$P = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ ...\}$$

Onde a característica em comum entre os elementos de $P$ é a satisfação dos requisitos: i) ser par; ii) ser positivo.

De forma geral podemos denotar um conjunto em função das caracetísticas em comum de seus elementos. Seja $C$ um conjunto de elementos $e$ com uma característica em comum $a$ definimos:

$$C = \{e \mid e \text{ possui a característica } a\}$$

Lê-se: $C$ é o conjunto dos elementos $e$ tal que $e$ possui a característica $a$.

Retomando o exemplo do conjunto $P$, podemos escrevê-lo em função de suas características (i e ii):

$$P = \{x \mid x = 2n\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Repare que $n$ pertence a um conjunto denotado por $\mathbb{N}^*$. O conjunto $\mathbb{N}^*$ possui apenas elementos positivos e inteiros (zero não está incluso pois não é positivo e sim neutro). Logo os valores de $x$ serão os valores de $n$ multiplicados por 2, desta forma todos os valores de $x$ serão positivos e pares. Falaremos mais sobre o conjunto $\mathbb{N}$ nas próximas seções.

## 1.1 Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$, compreende todos os números inteiros não positivos (inclui o zero) e os números inteiros positivos. Desta forma temos:

$$\mathbb{Z} = \{...,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$

Na notação de conjunto podemos incluir três operadores: $*$, $+$ e $-$ que servem respectivamente para denotar a ausência do elemento neutro (zero), presença somente de elementos não negativos e a presença somente de elementos não positivos. Com esses operadores obtemos diversas variações do conjunto $\mathbb{Z}$, ou seja, subconjuntos do conjunto $\mathbb{Z}$, são elas:

1. Números inteiros não-nulos

   $\mathbb{Z}^* = \{..., \ -3, \ -2, \ -1, \ 1, \ 2, \ 3, \ ...\}$

2. Números inteiros não negativos

   $\mathbb{Z}_+ = \{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ ...\}$

3. Números inteiros não positivos

   $\mathbb{Z}_- = \{..., \ -3, \ -2, \ -1, \ 0\}$

4. Números inteiros positivos

   $\mathbb{Z}_+^* = \{1, \ 2, \ 3, \ ...\}$

5. Números inteiros negativos

   $\mathbb{Z}_-^* = \{..., \ -3, \ -2, \ -1\}$

## 1.2 Números Naturais

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$, compreende todos os números inteiros não negativos (inclui o zero). Desta forma temos:

$$\mathbb{N} = \{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ ...\}$$

Repare que o conjunto $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Note também que $\mathbb{N}$ é equivalente a $\mathbb{Z}_+$.

Na notação do conjunto dos números naturais podemos definir somente o operador $*$ uma vez que, por natureza, ele só possui elementos não negativos.

1. Números naturais positivos

   $\mathbb{N}^* = \{1, \ 2, \ 3, \ ...\}$

## 1.3 Números Racionais

O conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{Q}$, compreende todos os números da forma $\frac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Desta forma temos:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Repare que o conjunto $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Então podemos dizer que todos número natural é um número inteiro, e todo numero inteiro é um número racional, sendo assim todo número natural é também racional.

Na notação do conjunto dos números racionais estão definidos os três operadores.

1. Números racionais não-nulos

   $\mathbb{Q}^* = \{\frac{a}{b} \mid \ a \in \mathbb{Z}^*, \ b \in \mathbb{Z}^*\}$

2. Números racionais não negativos

   $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} \mid \ a \in \mathbb{Z}_+, \ b \in \mathbb{Z}_+^*\}$

   $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} \mid \ a \in \mathbb{Z}_-, \ b \in \mathbb{Z}_-^*\}$

3. Números racionais não positivos

   $\mathbb{Q}_- = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}_-, \; b \in \mathbb{Z}^*_+\}$

   $\mathbb{Q}_- = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}_+, \; b \in \mathbb{Z}^*_-\}$

4. Números racionais positivos

   $\mathbb{Q}^*_+ = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}^*_+, \; b \in \mathbb{Z}^*_+\}$

   $\mathbb{Q}^*_+ = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}^*_-, \; b \in \mathbb{Z}^*_-\}$

5. Números racionais negativos

   $\mathbb{Q}^*_- = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}^*_-, \; b \in \mathbb{Z}^*_+\}$

   $\mathbb{Q}^*_- = \{\frac{a}{b} \mid \; a \in \mathbb{Z}^*_+, \; b \in \mathbb{Z}^*_-\}$

## 1.4 Números Irracionais

O conjunto dos números irracionais, denotado por $\mathbb{I}$, compreende todos números reais que não podem ser expressos através de $\frac{a}{b}$ em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Desta forma temos:

$$\mathbb{I} = \{a \mid \; a \in \mathbb{R}, a \notin \mathbb{Q}\}$$

São exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $e = 2,71828...$, $\pi = 3,14159...$, entre outros.

Na notação do conjunto dos números irracionais estão definidos dois operadores: $+$ e $-$.

1. Números irracionais positivos

   $\mathbb{I}_+ = \{a \mid \; a \in \mathbb{R}_+, a \notin \mathbb{Q}\}$

2. Números irracionais negativos

   $\mathbb{I}_- = \{a \mid \; a \in \mathbb{R}_-, a \notin \mathbb{Q}\}$

## 1.5 Números Reais

O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, compreende todos os números decimais exatos e periódicos (isto é, todos os racionais) e também todos os números decimais não exatos e não periódicos (isto é, todos os irracionais). Pode-se dizer então que o conjunto dos números reais é uma união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Desta forma temos:

$$\mathbb{R} = \{a \mid \; a \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\}$$

É impossível enumerar todos os elementos que estão entre dois números reais, pois pode-se dizer que entre dois elementos quaisquer do conjunto $\mathbb{R}$ existem infinitos outros elementos. Devido a essa dificuldade denotamos os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ de forma intervalar. Sabemos que o conjunto dos reais compreende todos os elementos que existem entre o valor mais extremo negativo e o valor mais extremo positivo, sendo assim denotamos:

$$\mathbb{R} = \{a \mid \; a \in (-\infty; \; +\infty)\}$$

Para denotar intervalos cuja os valores extremos estão inclusos devemos colocá-los entre colchetes no sentido dos os valores extremos e dizemos que o intervalo é fechado. Para denotar intervalos cuja os valores extremos não estão inclusos devemos colocá-los entre parênteses ou entre colchetes no sentido oposto aos valores extremos e dizemos que este intervalo é aberto. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ define-se:

1. Intervalo que contém todos os valores entre $a$ a $b$ inclusive $a$ e $b$ (intervalo fechado de $a$ a $b$)

   $[a; b]$

2. Intervalo que contém todos os valores entre $a$ a $b$ inclusive $a$ e exclusive $b$ (intervalo fechado em $a$ e aberto em $b$)

   $[a; b)$ ou $[a; b[$

3. Intervalo que contém todos os valores entre $a$ e $b$ exclusive $a$ e inclusive $b$ (intervalo aberto em $a$ e fechado em $b$)

   $(a; b]$ ou $]a; b]$

4. Intervalo que contém todos os valores entre $a$ e $b$ exclusive $a$ e $b$ (intervalo aberto de $a$ a $b$)

   $(a; b)$ ou $]a; b[$

Quanto queremos nos referir ao valor mais extremo possível no conjunto $\mathbb{R}$ usamos o simbolo $\infty$, que significa infinito. Note que na representação intervalar do conjunto $\mathbb{R}$ o intervalo é aberto nos extremos $-\infty$ e $+\infty$, isto ocorre pois $\infty$ não é um elemento e sim um símbolo que representa um valor que não possui limites, logo não faz sentido limitar (fechar) um intervalo em um valor ilimitado.

Na notação do conjunto dos números reaiss estão definidos os três operadores.

1. Números reais não-nulos

   $\mathbb{R}^* = \{a \mid \ a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)\}$

2. Números reais não negativos

   $\mathbb{R}_+ = \{a \mid \ a \in [0;\ \infty)\}$

3. Números reais não positivos

   $\mathbb{R}_- = \{a \mid \ a \in (-\infty;\ 0]\}$

4. Números reais positivos

   $\mathbb{R}_+^* = \{a \mid \ a \in (0;\ \infty)\}$

5. Números reais negativos

   $\mathbb{R}_-^* = \{a \mid \ a \in (-\infty;\ 0)\}$

## 1.6 Operações com Conjuntos

### 1.6.1 União de Conjuntos

Um conjunto definido pela união de dois conjuntos quaisquer pode ser entendido como o conjunto que possui todos os elementos do primeiro conjunto e também todos os elementos do segundo conjunto. Denota-se:

$$A \cup B = \{c \mid \ c \in A \text{ ou } c \in B\}$$

Dado $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5\}$ e $C = \{4,\ 5,\ 6\}$ podemos calcular as seguintes uniões:

1. $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
2. $A \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
3. $B \cup C = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

4. $A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

Propriedades da união:

i. $A \cup A = A$ (idempotente)

ii. $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)

iii. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

iv. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

### 1.6.2 Intersecção de Conjuntos

### 1.6.3 Diferença de Conjuntos

### 1.6.4 Conjuntos Complementares

# Referências Bibliográficas


Allaire, J., Xie, Y., McPherson, J., Luraschi, J., Ushey, K., Atkins, A., Wickham, H., Cheng, J., and Chang, W. (2018). *rmarkdown: Dynamic Documents for R.* https://rmarkdown.rstudio.com, https://github.com/rstudio/rmarkdown.

Guidorizzi, H. (2013). *Um curso de cálculo.* Number v. 1. LTC.

Iezzi, G. and Murakami, C. (2004). *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.* Atual.

R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Xie, Y. (2018a). *bookdown: Authoring Books and Technical Documents with R Markdown.* R package version 0.7.1.

Xie, Y. (2018b). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R.* R package version 1.20.