

# Uma Proposta de Gráficos de Controle Adaptativos em Amostragem por Conjuntos Ordenados

## ARTICLE HISTORY

Compiled 23 de Março de 2018

## Resumo

Diversos estudos comprovam a maior eficiência de estimadores baseados em amostragem por conjuntos ordenados (ACO) em relação aos correspondentes estimadores obtidos via amostragem aleatória simples (AAS). Recentemente, a amostragem por conjuntos ordenados tem sido considerada no Controle Estatístico de Processos. No presente trabalho propomos a construção de gráficos de controle adaptativos em amostragem por conjuntos ordenados. A estratégia adaptativa utiliza tamanhos amostrais variáveis e multiple dependent state sampling. Através de um extenso estudo por simulação, pudemos verificar o ganho de performance (redução do número médio de amostras até sinalização de um cenário de descontrole) em relação aos planos não adaptativos via ACO e adaptativos via AAS. Adicionalmente, foi estudado o custo implicado pela técnica referente ao tamanho médio das amostras requeridas. Uma aplicação em dados simulados ilustra a implementação da técnica.

## KEYWORDS

Average Run Length; Control Charts; Monte Carlo Simulation; Multiple Dependent State Sampling; Ranked Set Sampling; Variable Sample Size.

## 1. Introduction

Inicialmente propostos por Shewart [1], gráficos de controle constituem uma ferramenta fundamental no controle estatístico de processos industriais. Por meio deles é possível monitorar a produção em tempo real e identificar alterações nos parâmetros do processo. Diversas alternativas aos gráficos propostos por W.A.Shewart foram apresentadas nas últimas décadas, como os gráficos para somas cumulativas (CUSUM) e médias móveis exponencialmente ponderadas (EWMA), gráficos de controle baseados em regressão e extensões para o caso multivariado, dentre outros. Montgomery [2] apresenta diferentes tipos de gráficos de controle e suas aplicações. Uma extensa revisão de literatura sobre controle estatístico de processos e, particularmente, a respeito de gráficos de controle, é apresentada em Woodall e Montgomery [3].

O gráfico de controle de Shewart consiste na representação dos valores de alguma estatística amostral registrados em amostras extraídas do processo ao longo do tempo, versus o momento de coleta. Adicionalmente, duas retas são inseridas no gráfico representando os chamados limites de controle (inferior e superior). Esses limites são estabelecidos com base na distribuição da estatística quando o processo opera sob controle (na ausência de causas de variação identificáveis). A regra de decisão usual para classificar um processo como fora de controle é a ocorrência de um ponto (valor da estatística) beyond the control limits. Regras de decisão alternativas (ou adicionais)

podem ser aplicadas com o objetivo de aumentar o poder dos gráficos de controle, como as regras sensibilizantes apresentadas em *Western Electric Handbook* [4].

Gráficos de controle adaptativos configuram uma evolução dos gráficos de controle convencionais, permitindo que algumas das especificações adotadas no planejamento do gráfico variem ao longo do tempo. Dentre os componentes definidos no planejamento de um gráfico de controle, que podem variar usando alguma estratégia adaptativa, destacamos o tamanho das amostras, a frequência de amostragem e a amplitude dos limites de controle. A aplicação de gráficos de controle adaptativos tem como principais objetivos aumentar o poder de detecção de alterações nos parâmetros do processo, ou ainda reduzir custos de amostragem para processos que operam com elevado nível de qualidade. Reynolds et al. [5] propuseram gráficos de controle adaptativos considerando a variação do intervalo amostral. Prabhu et al. [6] e Costa [7], por sua vez, propuseram gráficos de controle com tamanhos amostrais variáveis. Diversos estudos abordam o delineamento e a performance de gráficos de controle adaptativos, destacando sua maior eficiência e melhor desempenho econômico em relação aos gráficos de controle convencionais. Para maiores informações a respeito de gráficos de controle adaptativos, nós recomendamos [8–13].

O delineamento amostral usualmente aplicado na elaboração de gráficos de controle (e particularmente em suas versões adaptativas) é a Amostragem Aleatória Simples (AAS). A utilização de delineamentos alternativos, no entanto, pode melhorar a performance dos gráficos no monitoramento do processo. Nesse contexto, a amostragem por conjuntos ordenados - ACO (McIntyre [14]) e suas extensões têm se mostrado alternativas eficientes em relação à AAS na estimação de diversos parâmetros populacionais (ver, por exemplo, Chen et al. [15]). Os delineamentos amostrais por conjuntos ordenados podem ser aplicados quando variável de interesse é cara ou de difícil obtenção, mas a ordenação empírica de amostras, por meio de julgamento pessoal ou dos valores de alguma variável fortemente correlacionada, pode ser feita de forma eficiente e com baixo custo. A fundamentação matemática da amostragem por conjuntos ordenados foi primeiramente apresentada em Takahasi e Wakimoto [16] e Dell e Clutter [17]. Uma extensa revisão de literatura sobre o delineamento original, suas extensões, teoria e aplicações é apresentada em Al-Omari e Bouza [18].

A utilização dos delineamentos por conjuntos ordenados na construção de gráficos de controle, e o melhor desempenho em relação aos gráficos baseados em amostragem aleatória simples, tem sido objeto de estudo de diversas publicações. Salazar e Sinha [19] foram os primeiros a propor gráficos de controle baseados em amostragem por conjuntos ordenados. Muttlak e Al-Sabah [20] comprovaram o melhor desempenho de gráficos de controle para a média baseados em ACO e em duas de suas extensões (Median and Extreme Ranked Set Sampling) por meio de um extenso estudo por simulação. Gráficos de controle baseados em delineamentos por conjuntos ordenados com dois estágios de ordenação foram propostos em Abujiya e Muttlak [21] e Al-Omari e Haq [22]. A utilização de delineamentos por conjuntos ordenados em múltiplos estágios proporciona maior eficiência, requerendo, como contrapartida, a seleção inicial e ordenação de um maior número de unidades amostrais. Para outros estudos relevantes quanto a utilização e eficiência de delineamentos por conjuntos ordenados no controle estatístico de processos nós recomendamos [23–25].

Embora se disponha de uma grande quantidade de publicações abordando gráficos de controle adaptativos, a notável maioria baseia-se em AAS. Em nossa pesquisa, não identificamos nenhum estudo em que gráficos de controle adaptativos e amostragem por conjuntos ordenados fossem considerados conjuntamente. A combinação desses dois componentes pode ser de grande valor para o delineamento de gráficos de controle.

Nesse sentido, o presente trabalho apresenta uma proposta de gráficos de controle com tamanhos de amostra variáveis em ACO, aplicado no monitoramento da locação do processo. Adicionalmente, com o objetivo de incrementar a performance do método, nós consideramos a técnica Multiple Dependent State Sampling (MDS Sampling). O método MDS foi proposto por Worthaam e Baker [26], em planos de inspeção por amostragem. Essa técnica baseia-se no planejamento de uma próxima amostra com base não apenas nos dados da amostra mais recente, mas sim de  $k > 1$  amostras anteriores. Propostas de gráficos de controle adaptativos utilizando MDS podem ser verificadas em Aslam et al. [27] e Arshad et al. [28] no monitoramento da média e da variância do processo, respectivamente.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 descreve a amostragem por conjuntos ordenados e os estimadores usuais para a média e para a variância. Na Seção 3 abordamos a construção de gráficos de controle para a média em amostragem por conjuntos ordenados. Nossas propostas de gráficos de controle com tamanhos amostrais variáveis são apresentadas nas Seções 4 (sem MDS) e 5 (com MDS). A Seção 6 descreve e apresenta os resultados do estudo de simulação Monte Carlo realizado. Uma aplicação em dados simulados é apresentada na Seção 7, para fins ilustrativos. Fechando o trabalho, nossas considerações finais estão na Seção 8.

## 2. Amostragem por conjuntos ordenados

O primeiro passo para obtenção de uma amostra por conjuntos ordenados de tamanho  $n$  é a seleção aleatória de  $n^2$  unidades amostrais da população (processo) sob estudo. As unidades selecionadas são então alocadas, aleatoriamente, a  $n$  novas amostras (conjuntos), cada uma com  $n$  unidades. Na sequência, as unidades são ordenadas, dentro de cada conjunto, com base no critério de ordenação (simples e barato) adotado. Para composição da amostra por conjuntos ordenados, seleciona-se, do  $i$ -ésimo conjunto, a observação ranqueada na  $i$ -ésima posição ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Esse processo pode ser repetido  $m$  vezes para obtenção de uma amostra de tamanho  $mn$ . Apenas as  $mn$  unidades selecionadas para composição da amostra final são efetivamente mensuradas quanto ao valor da variável de interesse.

Seja  $X_{(i:n),j}$  a unidade ranqueada na posição  $i$ , no conjunto  $i$  do  $j$ -ésimo ciclo. Para o caso em que  $m = 1$ , podemos denotar as unidades amostrais simplesmente por  $X_{(i:n)}$ . Nesse caso, o estimador não viciado da média populacional, proposto em McIntyre [14], é definido por:

$$\bar{X}_{ACO} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i:n)}. \quad (1)$$

A variância de  $\bar{X}_{ACO}$  é dada por:

$$Var(\bar{X}_{ACO}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{(i:n)}^2, \quad (2)$$

em que  $\sigma_{(i:n)}^2 = E[X_{(i:n)} - E(X_{(i:n)})]^2$ . Para o caso de ordenação perfeita (em que a ordenação dos conjuntos é feita sem erros),  $\sigma_{(i:n)}^2$  corresponde à variância da  $i$ -ésima

estatística de ordem de uma amostra aleatória simples de tamanho  $n$ .

Para o caso de ordenação imperfeita, vamos considerar  $X$  a variável de interesse e  $Y$  a variável concomitante, usada para ordenação dos conjuntos. Assumindo que  $X$  e  $Y$  tem distribuição normal bivariada com correlação  $\rho$ , então  $Var(\bar{X}_{ACO}) = \frac{\sigma_X^2}{n}[(1 - \rho^2) + \rho^2/n \sum_{i=1}^n \sigma_{z(i:n)}^2]$ , sendo  $\sigma_X^2$  a variância de  $X$ . A média amostral por conjuntos ordenados é mais eficiente que sua contrapartida via SRS a menos que se tenha  $\rho = 0$  (caso em que os dois delineamentos são equivalentes). A eficiência máxima é atingida quando  $\rho = 1$  (ordenação perfeita). Informações detalhadas sobre as propriedades do estimador média amostral via ACO podem ser encontrados em Takahasi e Wakimoto [16] e Stokes [29].

Já em relação à estimação da variância populacional, Stokes [30] propôs a variância amostral, definida por:

$$\hat{\sigma}_{ACO}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{(i:n)} - \bar{X}_{ACO})^2, \quad (3)$$

que é um estimador assintoticamente não viciado para  $\sigma_X^2$ .

### 3. Gráficos de controle em amostragem por conjuntos ordenados

Seja  $\omega$  a estatística utilizada no monitoramento do processo e  $\mu_\omega$  e  $Var(\omega)$ , respectivamente, sua média e variância no cenário em que o processo opera sob controle (livre de causas identificáveis de variação). Os gráficos de controle de Shewart baseiam-se num par de limites de controle definidos por  $\mu_\omega \pm A\sqrt{Var(\omega)}$ . Valores de  $\omega$  fora do intervalo delimitado pelos limites indicam uma situação de descontrole. O valor da constante  $A$  determina a amplitude dos limites e geralmente é definida de maneira que a probabilidade de falsos alarmes (pontos fora dos limites quando o processo opera sob controle) seja fixada num valor desejado. Para o monitoramento da média do processo, baseado em amostras aleatórias simples de  $n$  unidades, é usual considerar como limites  $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , em que  $\mu$  e  $\sigma$  são a média e o desvio padrão do processo sob controle, respectivamente. Nesse caso, amostras são selecionadas ao longo do tempo e as respectivas médias amostrais ( $\bar{X}$ ) são confrontadas com os limites de controle. Usando  $A = 3$ , a probabilidade de falsos alarmes é, aproximadamente, 0.0027, o que remete, em média, a um falso alarme a cada 370.4 amostras ( $1/0.0027$ ).

Para o caso em que as amostras são selecionadas via ACO, Muttalak e Al-Sabah [20] sugerem a construção de gráficos de controle para a média simplesmente substituindo, na forma geral do gráfico de Shewart,  $\mu_\omega$  e  $\sqrt{Var(\omega)}$  por  $\mu = \mu_{\bar{X}_{ACO}}$  e  $\sqrt{Var(\bar{X}_{ACO})}$ :

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_0 + A\sqrt{Var(\bar{X}_{ACO})} = \mu + A\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{(i:n)}^2} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu_0 - A\sqrt{Var(\bar{X}_{ACO})} = \mu - A\sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{(i:n)}^2} \end{aligned} \quad (4)$$

em que  $LC$  é a linha central do gráfico e  $A$ , novamente, determina a amplitude dos limites de controle.

Embora a forma apresentada em (4) venha sendo amplamente considerada em diversos estudos, sua utilização implica em algumas limitações. Uma delas, conforme descrito em Mehmood et al. [23], é que a estrutura obtida é pouco flexível, não podendo ser usada, por exemplo, para valores de  $n$  variando ao longo do tempo. Isso se deve ao fato de não ser possível fixar um valor desejado para a probabilidade de falsos alarmes válido para qualquer tamanho de amostra. Dessa forma, no presente trabalho adotamos a construção de gráficos de controle sugerida em Mehmood et al. [23], mais flexível para a construção de planos adaptativos, conforme descrita na sequência:

$$LSC = \mu + A_{(n,\rho,p/2)}\sigma; \quad LC = \mu; \quad LIC = \mu + A_{(n,\rho,(1-p/2))}\sigma, \quad (5)$$

em que  $A_{(n,\rho,p/2)}$  e  $A_{(n,\rho,1-p/2)}$ , que dependem do tamanho da amostra e da correlação entre as variáveis, determina a probabilidade ( $p$ ) de falsos alarmes.

A Tabela 1 apresenta os valores de  $A_{(n,\rho,p/2)}$  e  $A_{(n,\rho,1-p/2)}$  para diferentes combinações de  $n$  e  $\rho$ , obtidos através de simulação Monte Carlo. Para isso, foram simuladas  $3 \times 10^6$  amostras por conjuntos ordenados de tamanho  $n$  de uma distribuição normal bivariada com  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X = \sigma_Y = 1$  e correlação igual a  $\rho$ . Para cada combinação de  $n$  e  $\rho$ , os quantis  $p/2 = 0.00135$  e  $1 - p/2 = 0.99865$  foram extraídos da distribuição dos valores simulados de  $\bar{X}_{ACO}$ . A escolha dos quantis justifica-se pela opção por gráficos de controle com probabilidade de falsos alarmes similar aos gráficos de controle baseados em amostras aleatórias simples ( $\alpha = 0.0027$ ). Além disso, consideramos apenas distribuição normal uma vez que variáveis normalmente distribuídas são bastante frequentes na área de controle de qualidade (ver [2]). Adicionalmente, a suposição de normalidade pode, em muitos casos, ser atendida mediante transformação de variáveis.

### Tabela 1 aqui.

Para as situações em que os parâmetros do processo ( $\mu\sigma$ ) são desconhecidos, o usual é estimá-los com base nos resultados de  $m$  amostras extraídas do processo operando sob controle. Essa etapa é denominada fase 1 da construção dos gráficos de controle. Estimados os parâmetros, os limites de controle são estabelecidos (fixados). A partir de então novas amostras são sequencialmente selecionadas para fins de monitoramento (fase 2). Considere  $\bar{X}_{ACO}^{(1)}, \bar{X}_{ACO}^{(2)}, \dots, \bar{X}_{ACO}^{(m)}$  as médias e  $\hat{\sigma}_{ACO}^{2(1)}, \hat{\sigma}_{ACO}^{2(2)}, \dots, \hat{\sigma}_{ACO}^{2(m)}$  as variâncias de  $m$  amostras selecionadas na fase 1 da construção do gráfico de controle. Vamos assumir que as amostras selecionadas na primeira fase tenham igual tamanho (embora acomodar amostras de diferentes tamanhos seja imediato, ver Montgomery [2]). De maneira análoga à construção de gráficos de controle com limites estimados via AAS, propomos:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + A_{(n,\rho,p/2)} \frac{\bar{\hat{\sigma}}}{c_{4(n,\rho)}}; \quad LC = \bar{\bar{X}}; \quad LIC = \bar{\bar{X}} + A_{(n,\rho,(1-p/2))} \frac{\bar{\hat{\sigma}}}{c_{4(n,\rho)}}, \quad (6)$$

em que  $\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{X}_{ACO}^{(j)}$ ,  $\bar{\hat{\sigma}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\sigma}_{ACO}^{(j)}$  e  $c_{4(n,\rho)}$  é a constante que corrige o viés na estimação de  $\sigma$ . Valores de  $c_{4(n,\rho)}$  para diferentes combinações de  $n$  e  $\rho$  foram obtidos, novamente, usando simulação Monte Carlo. Para cada combinação foram simuladas

$5 \times 10^5$  amostras por conjuntos ordenados (considerando distribuição normal bivariada) e calculados os respectivos desvios padrões ( $\hat{\sigma}_{ACO}^{(1)}, \hat{\sigma}_{ACO}^{(2)}, \dots$ ). Com base nos resultados obtidos,  $c_{4(n,\rho)}$  foi calculado como:

$$c_{4(n,\rho)} = \frac{\frac{1}{500,000} \sum_{t=1}^{500,000} \hat{\sigma}_{ACO}^{(t)}}{\sigma_X} = \frac{1}{500,000} \sum_{t=1}^{500,000} \hat{\sigma}_{ACO}^{(t)}. \quad (7)$$

A Tabela 2 apresenta os valores de  $c_{4(n,\rho)}$  para algumas combinações selecionadas de  $n$  e  $\rho$ . Podemos observar que  $\hat{\sigma}_{ACO}$  pode super ou subestimar  $\sigma_X$ , dependendo dos valores de  $n$  e  $\rho$ . Os resultados apresentados para  $\rho = 0$  referem-se ao caso de amostragem aleatória simples, indicando que, também neste caso, o desvio padrão amostral é um estimador viciado para o desvio padrão da população (ver Montgomery [2]).

**Tabela 2 aqui.**

#### 4. Gráficos de controle com tamanho amostral variável em amostragem por conjuntos ordenados

A construção de um gráfico de controle adaptativo com tamanho de amostra variável requer a especificação de ao menos dois pares de limites (os limites de controle e os limites de atenção). Os limites de atenção (que vamos denotar por LIA e LSA são usados para determinação do tamanho da próxima amostra selecionada, enquanto os limites de controle servem, como anteriormente, para a indicação de um cenário de descontrole. Nossa proposta de gráficos de controle adaptativos com tamanho de amostra variável em amostragem por conjuntos ordenados (considerando dois tamanhos amostrais distintos,  $n_1 < n_2$ ), baseia-se nos seguintes limites:

$$\begin{aligned} LIC_{n_j} &= \mu + A_{(n_j, \rho, p/2)} \sigma & LSC_{n_j} &= \mu + A_{(n_j, \rho, 1-p/2)} \sigma \\ LIA_{n_j} &= \mu + cA_{(n_j, \rho, p/2)} \sigma & LSA_{n_j} &= \mu + cA_{(n_j, \rho, 1-p/2)} \sigma \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $j = 1, 2$  e a constante  $c$  determina a distância relativa entre os limites de controle e os limites de atenção ( $0 < c < 1$ ). Para uma particular amostra, selecionada durante a etapa de monitoramento, o seguinte esquema descreve a aplicação do gráfico de controle com tamanho amostral variável via RSS:

- (1) Se a média da amostra não estiver entre os limites de controle ( $\bar{X}_{ACO} < LIC$  ou  $\bar{X}_{ACO} > LSC$ ), declarar que o processo está fora de controle e interromper a produção;
- (2) Se a média da amostra estiver entre os limites de atenção ( $LIA \leq \bar{X}_{ACO} \leq LSA$ ), selecionar a próxima amostra com o menor tamanho amostral considerado ( $n_1$ ) e aplicar os limites de controle e de atenção correspondentes ( $LIC_{n_1}, LSC_{n_1}; LIA_{n_1}, LSA_{n_1}$ );
- (3) Se a média da amostra não estiver entre os limites de atenção, porém estiver entre os limites de controle ( $LSA < \bar{X}_{ACO} < LSC$  ou  $LIC < \bar{X}_{ACO} < LIA$ ), selecionar a próxima amostra com o maior tamanho amostral considerado ( $n_2$ ) e aplicar os limites de controle e de atenção correspondentes

$$(LIC_{n_2}, LSC_{n_2}; LIA_{n_2}, LSA_{n_2}).$$

## 5. Gráficos de controle com tamanho amostral variável em amostragem por conjuntos ordenados usando multiple dependent State

Multiple dependent State sampling (MDS) é uma técnica proposta originalmente por Wortham e Baker [26], amplamente aplicada na inspeção de lotes por amostragem. Nesse contexto, o princípio básico da técnica é a avaliação de um lote com base não apenas na amostra selecionada a partir dele, mas incorporando também dados de amostras dos lotes que o precederam. Na construção de gráficos de controle adaptativos, a técnica MDS pode ser aplicada se a especificação dos parâmetros do gráfico na próxima amostragem for determinada com base nos resultados de  $k \geq 2$  amostras anteriores. Até o momento, poucos estudos abordaram a utilização de MDS sampling em gráficos de controle, dentre os quais Aslam et al. [27], no monitoramento da média, e Arshad et al. [28], para o monitoramento da variância. Em ambos os casos foi considerada amostragem aleatória simples. Os gráficos obtidos usando MDS apresentaram performance superior (maior poder de detecção de descontrole) quando comparados aos gráficos com tamanho de amostras variáveis convencionais.

Para o gráfico de controle com tamanho de amostra variável e aplicação da técnica MDS, vamos considerar três tamanhos amostrais diferentes ( $n_1 < n_2 < n_3$ ). Seja  $k$  o número de amostras passadas que vão determinar o tamanho da próxima amostra. Consideramos novamente os limites de atenção e de controle, conforme definidos em 8. Entretanto, desta vez temos três diferentes pares de limites de controle e outros três pares de limites de atenção, conforme o tamanho amostral utilizado. Na sequência apresentamos a proposta de gráfico de controle com tamanho de amostra variável e MDS sampling via ACO. Para uma particular amostra, selecionada durante o monitoramento do processo:

- (1) Se a média amostral não estiver entre os limites de controle ( $\bar{X}_{ACO} < LIC$  ou  $\bar{X}_{ACO} > LSC$ ), declarar que o processo está fora de controle, interrompendo-o imediatamente;
- (2) Se a média amostral estiver entre os limites de atenção ( $LIA \leq \bar{X}_{ACO} \leq LSA$ ), retirar a próxima amostra com o menor tamanho amostral considerado ( $n_1$ ) e aplicar os limites de controle e de atenção correspondentes ( $LIC_{n_1}, LSC_{n_1}; LIA_{n_1}, LSA_{n_1}$ );
- (3) Se a média amostral não estiver entre os limites de atenção, porém estiver entre os limites de controle ( $LSA < \bar{X}_{ACO} < LSC$  ou  $LIC < \bar{X}_{ACO} < LIA$ ), e, se para as  $k$  amostras anteriores, nenhuma das médias excedeu os limites de atenção, retirar a próxima amostra com o segundo menor tamanho amostral proposto ( $n_2$ ) e aplicar os limites de controle e de atenção correspondentes ( $LIC_{n_2}, LSC_{n_2}; LIA_{n_2}, LSA_{n_2}$ );
- (4) Se a média amostral não estiver entre os limites de atenção, porém estiver entre os limites de controle, e se para as  $k$  amostras anteriores, houver ao menos uma média amostral que exceda os limites de atenção, retirar a próxima amostra com o maior tamanho amostral proposto ( $n_3$ ) e aplicar os limites de controle e de atenção correspondentes ( $LIC_{n_3}, LSC_{n_3}; LIA_{n_3}, LSA_{n_3}$ ).

## 6. Performance evaluation and comparisons

Com o objetivo de avaliar a performance dos gráficos de controle propostos, e confrontá-los com os gráficos produzidos via amostragem aleatória simples, um estudo de simulação Monte Carlo foi conduzido. Para esse estudo, consideramos a seguinte especificação:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left( \begin{bmatrix} \mu_X \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right), \quad (9)$$

em que  $X$  representa a variável de interesse e  $Y$  a variável concomitante. Estabelecemos  $\mu_X = 0$  a média do processo operando sob controle. Uma sequência crescente de valores para  $\mu_X$  foi considerada, refletindo diferentes níveis de descontrole para o processo. A variância de  $X$  fixada em 1, de tal forma que o descontrole ficasse caracterizado apenas pela alteração na média. As seguintes configurações foram adotadas para o estudo de simulação:

- Tamanhos amostrais:  $\{n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 5\}$  e  $\{n_1 = 3, n_2 = 5, n_3 = 8\}$ ;
- Média do processo ( $\mu$ ): 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.50, 1.00, 1.50, 2.00, 2.50 e 3.00;
- Coeficiente de amplitude para o par de limites de atenção ( $c$ ):  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{3}$ ;
- Correlação entre as variáveis ( $\rho$ ): 0.50, 0.80 e 1.00;
- Parâmetro do MDS ( $k$ ): 0, 1, 3 e 5.

Note que para  $k = 0$  temos o plano de amostragem VSS sem MDS. Nesse caso, consideramos apenas dois tamanhos amostrais ( $n_1$  e  $n_2$ ). Os valores escolhidos para o coeficiente  $c$  determinam limites de atenção mais próximos ( $c = 2/3$ ) ou afastados ( $c = 1/2$ ) dos limites de controle. Como resultado das combinações dos parâmetros de simulação, temos, ao todo, 576 diferentes cenários.

Para cada combinação de tamanhos amostrais,  $k$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  e  $c$ , foram realizadas 10,000 simulações. Em cada simulação, amostras por conjuntos ordenados foram geradas (conforme descrito na Seção 2 e usando os algoritmos apresentados nas Seções 4 e 5) até que uma média excedesse os limites de controle. Além disso, foram realizadas simulações considerando tamanho amostral fixo ( $n = 3$ ). O objetivo é avaliar o ganho de performance dos gráficos ao adotar uma estratégia adaptativa, bem como o custo adicional associado ao tamanho das amostras selecionadas. Os limites de controle foram especificados conforme descrito em (5), para o caso de amostras de tamanho fixo, e conforme (8) para os planos adaptativos. Os valores de  $A_{(n,\rho,p/2)}$  e  $A_{(n,\rho,1-p/2)}$  foram extraídos da Tabela 1. Adicionalmente, uma nova rodada de simulações foi realizada usando amostras aleatórias simples, para fins de comparação. Em todos os casos considerou-se probabilidade de falsos alarmes igual a 0.0027.

O comprimento médio de sequência (CMS), definido como o número médio de amostras até a indicação de descontrole, foi usado para avaliar o desempenho dos gráficos. Para uma configuração de processo qualquer, seja  $p$  a probabilidade de um gráfico sinalizar uma situação de descontrole. Se assumirmos independência entre as amostras, então o número de amostras até o primeiro ponto fora dos limites de controle tem distribuição geométrica de parâmetro  $p$ , tal que sua média é dada por  $CMS = 1/p$ . Para o caso em que o processo opera sob controle, nas configurações adotadas,  $CMS_0 = 1/0.0027 \approx 370.4$ , ou seja, tem-se em média um falso alarme a cada 370.4 amostras. Para o caso em que o processo opera fora de controle, fixado  $CMS_0$ , quanto menor o valor de  $CMS$  melhor a performance do gráfico. Adicional-



mente, como contrapartida ao desempenho dos gráficos, analisamos também o custo inerente aos métodos adaptativos com base nos tamanhos de amostra requeridos. Para isso foi calculado o tamanho médio das amostras geradas nas 10,000 simulações para cada configuração simulada.

Para cada um dos cenários simulados, o comprimento médio de sequência e o tamanho médio de amostra foram calculados da seguinte forma:

$$CMS = \frac{1}{10,000} \sum_{i=1}^{10,000} CS_i; \quad TMA = \frac{1}{10,000} \sum_{i=1}^{10,000} \sum_{j=1}^{CS_i} \frac{TA_{ij}}{CS_i}, \quad (10)$$

em que  $CS_i$  denota o comprimento de sequência (número de amostras até sinalização de descontrole) na  $i$ -ésima simulação e  $TA_{ij}$  é o tamanho da amostra selecionada na  $j$ -ésima amostragem da  $i$ -ésima sequência ( $i = 1, 2, \dots, 10,000$ ;  $j = 1, 2, \dots, CS_i$ ).

As Tabelas 3 e 4 apresentam os comprimentos médios de sequência, obtidos via simulação, para os gráficos de controle adaptativos via ACO. A Tabela 3 contém os resultados para  $n = 3$  (AAS e ACO não adaptativo),  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 4$  (ACO adaptativo sem MDS, quando  $k = 0$ ) e  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$  (ACO adaptativo com MDS). A Tabela 4, por sua vez, apresenta resultados referentes a  $n = 3$  (AAs e ACO não adaptativo),  $n_1 = 3$  e  $n_2 = 5$  (ACO adaptativo sem MDS) e  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$  (ACO adaptativo com MDS). Pode-se observar que a redução no comprimento médio de sequência é mais expressiva para a segunda configuração de tamanhos amostrais (Tabela 4). Alguns dos resultados referentes a essa configuração são descritos na sequência.

#### **Tabelas 3 e 4 aqui.**

- Conforme esperado, o comprimento médio de sequência aumenta (o tempo até sinalização do descontrole aumenta) à medida que a correlação entre as variáveis diminui. Os menores comprimentos médios de sequência são verificados para  $\rho = 1$  (ordenação perfeita). A título de ilustração, para  $c = 2/3$ ,  $k = 3$  e  $\mu = 0.60$ ,  $CMS = 7.06$  para  $\rho = 1$ ;  $CMS = 14.27$  para  $\rho = 0.80$  e  $CMS = 24.10$  para  $\rho = 0.50$ . Outro resultado esperado é que o comprimento médio de sequência diminui a medida que aumenta o descontrole do processo (para maiores valores de  $\mu$ );
- O comprimento médio de sequência (em geral) é menor para  $c = 1/2$  em relação a  $c = 2/3$ . Por exemplo, para  $\rho = 0.80$ ,  $k = 5$  e  $\mu = 0.80$ ,  $CMS = 3.51$  quando  $c = 2/3$  e  $CMS = 2.85$  quando  $c = 1/2$ . Este resultado também era esperado, uma vez que, ao estreitar os limites de atenção, aumenta-se a frequência de amostras com maiores tamanhos, aumentando, conseqüentemente, o poder de detecção do gráfico. Simulações adicionais foram realizadas para  $c = 5/6$  (resultados não apresentados), observando-se que os valores de CMS se aproximam dos verificados para o plano não adaptativo com  $n = 3$ ;
- Os gráficos de controle com tamanho amostral variável apresentam melhor performance que os gráficos de controle com tamanho amostral fixo. Os resultados são mais expressivos ao considerar níveis de descontrole intermediários (para valores de  $\mu$  entre 0.40 e 1.25, ou seja, alterações na média do processo entre 0.40 e 1.25 desvios padrões). Por exemplo, ao considerar  $\mu = 1.00$ ,  $k = 0$  (VSS sem MDS) e  $c = 2/3$ , temos, sob ordenação perfeita,  $CMS = 2.36$  (versus  $CMS = 3.78$  para o plano com tamanho amostral fixo);  $CMS = 3.62$  (versus  $CMS = 5.67$  para o

plano fixo) quando  $\rho = 0.8$  e  $CMS = 5.52$  (versus  $CMS = 8.05$  para o plano fixo) quando  $\rho = 0.5$ ;

- A adição da técnica MDS aumenta a eficiência dos gráficos, produzindo menores comprimentos médios de sequência. Para  $\rho = 1$ ,  $c = 2/3$  e  $\mu = 0.40$ , por exemplo,  $CMS = 39.22$  quando  $k = 0$  (VSS sem MDS);  $CMS = 31.31$  quando  $k = 1$ ;  $CMS = 27.89$  quando  $k = 3$  e  $CMS = 25.90$  quando  $k = 5$ .

A Tabela 5 apresenta os tamanhos médios amostrais, também obtidos via simulação, para  $\mu = 0$  (processo operando sob controle). Esses resultados são particularmente importantes pois refletem o custo adicional de amostragem (em unidades médias amostradas) quando o processo opera sob controle. Maiores tamanhos médios amostrais são observados para os cenários em que  $c = 1/2$  (limites de atenção mais estreitos). Adicionalmente, o uso da técnica MDS requer, em média, maiores amostras. No entanto, pode-se observar que, mesmo no cenário em que são considerados tamanhos amostrais  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$ , o tamanho médio amostral é, no máximo, igual a 3.46 para  $c = 1/2$  e 3.11 para  $c = 2/3$ . Assim, se comparado ao plano com tamanho amostral fixo ( $n = 3$ ), o acréscimo no tamanho médio amostral é pouco expressivo, sobretudo para  $c = 2/3$ . Além disso, note que para  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$  o acréscimo no tamanho médio amostral é ainda menor.

#### **Tabela 5 aqui.**

As Figuras 1 e 2 apresentam os resultados para o tamanho médio de amostra considerando os demais valores para  $\mu$  (processo fora de controle). Podemos observar, para ambas combinações de tamanhos amostrais, que maiores amostras são requeridas, em média, para níveis intermediários de descontrole ( $\mu$  entre 0.50 e 1.50). Como justificativa, menores níveis de descontrole têm menor probabilidade de sinalização (produzindo médias amostrais fora dos limites de atenção com menor frequência). Além disso, níveis de descontrole de maior magnitude são detectados rapidamente, produzindo pontos fora dos limites de controle com maior probabilidade. Não entendemos como um problema o método demandar amostras maiores em cenários de descontrole, desde que a sinalização seja mais rápida. Finalmente, maiores tamanhos médios de amostras são verificados para limites de atenção mais estreitos ( $c = 1/2$ ) e, obviamente, para maiores valores de  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ .

#### **Figuras 1 e 2 aqui.**

Com o objetivo de comparar o desempenho dos gráficos de controle adaptativos produzidos via ACO e AAS, as Tabelas 6 e 7 apresentam, como medida de eficiência relativa, a razão dos comprimentos médios de sequência. Assim, para cada cenário simulado (resultante das combinações possíveis de  $\rho$ ,  $k$  e  $\mu$ ), calculamos  $CMS_{AAS}/CMS_{ACO}$ . Neste ponto, consideramos apenas o caso em que  $c = 2/3$ , por entender que esse valor estabelece um bom compromisso entre custo (TMA) e performance (CMS). Pode-se observar que a eficiência relativa é sempre superior a 1, atingindo maiores valores para: (I) combinações de tamanhos amostrais maiores; (II) maior correlação entre as variáveis; (III) alterações intermediárias na média do processo. Para fins de ilustração, quando  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$ , a eficiência relativa atinge seu máximo (igual a 3.43) quando  $\rho = 1.00$  ( $\mu = 0.75$ , e  $k = 5$ ); 1.98 para  $\rho = 0.80$  ( $\mu = 0.80$ , e  $k = 3$ ) e 1.28 quando  $\rho = 0.50$  (para  $\mu = 1.00$  e  $k = 1$ ). Já para  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$  a eficiência relativa atinge seu máximo em 4.48 quando  $\rho = 1.00$  ( $\mu = 0.60$ , e  $k = 5$ ); 2.26 para  $\rho = 0.80$  ( $\mu = 0.60$ , e  $k = 5$ ) e 1.33 quando  $\rho = 0.50$  ( $\mu = 0.75$ , e  $k = 3$  ou  $k = 5$ ). Importante destacar que, para o caso de AAS, a simulação é baseada apenas com base

na variável de interesse, de tal forma que os resultados utilizados para os três valores de  $\rho$  são os mesmos.

## 7. An example with simulated data

For the sake of illustration, here nós consideramos uma aplicação dos gráficos de controle adaptativos. Para isso, tomamos como referência a base de dados bimetal1, disponível no pacote MSQC do software R [31, 32]. A base contém medidas of the deflection, the curvature, the resistivity and the hardness in low and high expansion sides, from brass and steel bimetal thermostats. The manufacturing process is assumed to be "in-control". There are 28 observations for each one of five variables. Para esta aplicação, nós consideramos duas variáveis:  $X$ : *hardness* (the hardness of the high expansion side in  $10N/mm^3$ ) and  $Y$ : *deflection* (the deflection level in  $10^{-6}1/K$ ). Nós consideramos  $X$  como a variável de interesse e  $Y$  a variável concomitante. Com base nas estatísticas amostrais, foram fixados os seguintes parâmetros para a aplicação:  $\mu_X = 26.012$ ;  $\mu_Y = 21.016$ ;  $\sigma_X^2 = 0.0215$ ;  $\sigma_Y^2 = 0.092$  e  $Cov(X, Y) = 0.0267$ . Com base nesses valores, a correlação entre as duas variáveis é  $\rho = 0.60$ .

Inicialmente foram simuladas  $m = 25$  amostras de tamanho  $n = 3$  de uma distribuição normal bivariada com os parâmetros estabelecidos. As amostras simuladas foram usadas para estimação dos parâmetros e determinação dos limites (fase 1). Com base nos resultados, obteve-se  $\bar{X} = 25.997$  e  $\hat{\sigma}_{ACO} = 0.142$ . Usando esses valores e as constantes de amplitude e corretoras de viés apropriadas, apresentadas nas Tabelas 1 e 2, foram calculados os limites de controle para amostras de tamanho  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$ , conforme descrito na sequência:

$$\begin{aligned} LSC_{n_1} &= 25.997 + 1.580 \times \frac{0.142}{0.925} = 26.239; \quad LIC_{n_1} = 25.997 - 1.577 \times \frac{0.142}{0.925} = 25.754 \\ LSC_{n_2} &= 25.997 + 1.177 \times \frac{0.142}{0.968} = 26.170; \quad LIC_{n_2} = 25.997 - 1.177 \times \frac{0.142}{0.968} = 25.824. \quad (11) \\ LSC_{n_3} &= 25.997 + 0.906 \times \frac{0.142}{0.986} = 26.127; \quad LIC_{n_3} = 25.997 - 0.905 \times \frac{0.142}{0.986} = 25.867 \end{aligned}$$

Uma vez estabelecidos os limites de controle, nós simulamos 75 novas amostras mas, desta vez, considerando  $\mu'_X = \mu_X + 0.75\sigma_X = 26.122$ . Nesse caso estamos considerando um processo fora de controle em que a média é alterada em 0.75 desvios padrões. Gráficos de controle via ACO foram construídos usando três estratégias: (I) tamanho amostral fixo ( $n = 3$ ); (II) tamanho amostral variável ( $n_1 = 3$  e  $n_2 = 5$ ) e (III) tamanho amostral variável com MDS ( $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$ ). Para os casos (II) e (III) consideramos, para definição dos limites de atenção,  $c = 2/3$  e, para o gráfico com MDS, usamos  $k = 5$ . Além disso, outros dois gráficos com especificações semelhantes aos casos (I) e (III), mas baseados em amostragem aleatória simples, foram construídos para fins de comparação. Os cinco gráficos resultantes são apresentados na Figura 3. Usamos a semente 2017 (ano em que a análise foi realizada) para fins de reprodutibilidade.

**Figura 3 aqui.**

Observando os gráficos gerados usando ACO, verificamos a existência de quatro pontos fora dos limites de controle para o gráfico não adaptativo, dez pontos fora dos limites para o gráfico com tamanho amostrais variáveis e 15 pontos para o gráfico

com tamanhos amostrais variáveis e MDS. No segundo gráfico (com VSS e sem MDS), quatro indicações de descontrole somente foram possíveis devido à estratégia adaptativa (amostras 32, 73, 89 e 92). Para o terceiro (com VSS e MDS), seis sinalizações de descontrole somente foram possíveis devido ao uso da estratégia adaptativa, sendo que duas delas (amostras 65 e 79) somente foram possíveis devido ao uso de MDS sampling. Finalmente, para os gráficos construídos a partir de amostras aleatórias simples, apenas uma sinalização de descontrole foi verificada (em ambos os casos).

## 8. Final remarks

No presente trabalho, propomos e avaliamos a performance de gráficos de controle adaptativos em amostragem por conjuntos ordenados. Nossa proposta baseia-se em amostras de tamanhos variáveis e incorpora Multiple Dependent State Sampling. O uso combinado dessas técnicas mostrou-se eficiente quanto à sinalização mais rápida de alterações na média do processo. Adicionalmente, avaliamos o custo inerente aos tamanhos amostrais requeridos pelos métodos adaptativos. A relação entre custo e benefício dos métodos propostos mostrou-se bastante satisfatória. A eficiência relativa dos métodos baseados em ACO, relativa às contrapartidas via AAS, foi claramente comprovada. Trabalhos futuros sobre a proposta e implementação de gráficos adaptativos baseados em ACO ainda devem ser feitos. Pontos como a estimação de outros parâmetros do processo bem como a aplicação de métodos adaptativos alternativos devem ser estudados.

## Acknowledgements

## Disclosure statement

## Referências

- [1] Shewhart WA. Some applications of statistical methods to the analysis of physical and engineering data. *Bell Labs Technical Journal*. 1924;3(1):43–87.
- [2] Montgomery D. Design and analysis of experiments. 7th ed. New York (NY): John Wiley & Sons; 2008.
- [3] Woodall WH, Montgomery DC. Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring. *Journal of Quality Technology*. 2014;46(1):78.
- [4] Company WE. Statistical quality control handbook. The Company; 1958.
- [5] Reynolds MR, Amin RW, Arnold JC, et al. Charts with variable sampling intervals. *Technometrics*. 1988;30(2):181–192.
- [6] Prabhu S, Runger G, Keats J. An adaptive sample size xbar chart. *International Journal of Production Research*. 1993;31(2):2895–2909.
- [7] Costa AF. X chart with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*. 1997;29(2):197.
- [8] Costa AF. X charts with variable parameters. *Journal of quality technology*. 1999; 31(4):408.
- [9] Park C, Reynolds Jr MR. Economic design of a variable sampling rate x chart. *Journal of Quality Technology*. 1999;31(4):427.
- [10] De Magalhães MS, Costa A, Neto FM. A hierarchy of adaptive control charts. *International Journal of Production Economics*. 2009;119(2):271–283.
- [11] Kuo TI, Lee PH. Design of adaptive s control charts. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2013;83(11):2002–2014.

- [12] Amiri A, Nedaie A, Alikhani M. A new adaptive variable sample size approach in ewma control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 2014; 43(4):804–812.
- [13] Psarakis S. Adaptive control charts: recent developments and extensions. *Quality and Reliability Engineering International*. 2015;31(7):1265–1280.
- [14] McIntyre G. A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Crop and Pasture Science*. 1952;3(4):385–390.
- [15] Chen Z, Bai Z, Sinha B. Ranked set sampling: theory and applications. New York (NY): Springer Science & Business Media; 2003.
- [16] Takahasi K, Wakimoto K. On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 1968;20(1):1–31.
- [17] Dell T, Clutter J. Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*. 1972;545–555.
- [18] Al-Omari AI, Bouza CN. Review of ranked set sampling: modifications and applications. *Revista Investigación Operacional*. 2014;3:215–240.
- [19] Salazar R, Sinha A. Control chart  $\bar{x}$  based on ranked set sampling. *Comunicacion Tecnica*. 1997;1:1–97.
- [20] Muttalak H, Al-Sabah W. Statistical quality control based on ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*. 2003;30(9):1055–1078.
- [21] Abujiya M, Muttalak H. Quality control chart for the mean using double ranked set sampling. *Journal of Applied Statistics*. 2004;31(10):1185–1201.
- [22] Al-Omari AI, Haq A. Improved quality control charts for monitoring the process mean, using double-ranked set sampling methods. *Journal of Applied Statistics*. 2012;39(4):745–763.
- [23] Mehmood R, Riaz M, Does RJ. Control charts for location based on different sampling schemes. *Journal of Applied Statistics*. 2013;40(3):483–494.
- [24] Mehmood R, Riaz M, Does RJ. Quality quandaries: on the application of different ranked set sampling schemes. *Quality Engineering*. 2014;26(3):370–378.
- [25] Haq A. An improved mean deviation exponentially weighted moving average control chart to monitor process dispersion under ranked set sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2014;84(9):2011–2024.
- [26] Wortham A, Baker R. Multiple deferred state sampling inspection. *The International Journal of Production Research*. 1976;14(6):719–731.
- [27] Aslam M, Arif OH, Jun CH. A new variable sample size control chart using mds sampling. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2016;86(18):3620–3628.
- [28] Arshad A, Azam M, Aslam M, et al. A control chart for monitoring process variation using multiple dependent state sampling. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 2017;(just-accepted).
- [29] Lynne Stokes S. Ranked set sampling with concomitant variables. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 1977;6(12):1207–1211.
- [30] Stokes SL. Estimation of variance using judgment ordered ranked set samples. *Biometrics*. 1980;36(1):35–42.
- [31] Santos-Fernández E. Multivariate statistical quality control using r. Vol. 14. Springer; 2013. Available from: <http://www.springer.com/statistics/computational+statistics/book/978-1-4614-5452-6>.
- [32] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. 2017. Available from: <https://www.R-project.org/>.

**Tabela 1.** Control limits coefficients for different sample sizes and correlation levels at  $\alpha = 0.0027$ 

$\rho$	Coefficients	Sample size								
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
0.25	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0912	-1.7074	-1.4720	-1.3130	-1.1962	-1.1091	-1.0379	-0.9763	-0.9251
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0985	1.7075	1.4724	1.3094	1.1959	1.1082	1.0359	0.9757	0.9233
0.30	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0920	-1.6937	-1.4587	-1.2996	-1.1845	-1.0939	-1.0251	-0.9644	-0.9140
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0900	1.6928	1.4616	1.3015	1.1853	1.0965	1.0237	0.9661	0.9127
0.35	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0792	-1.6792	-1.4484	-1.2907	-1.1748	-1.0841	-1.0100	-0.9505	-0.9019
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0797	1.6804	1.4482	1.2885	1.1678	1.0796	1.0102	0.9533	0.9008
0.40	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0667	-1.6615	-1.4299	-1.2713	-1.1566	-1.0651	-0.9960	-0.9368	-0.8887
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0680	1.6660	1.4326	1.2700	1.1570	1.0684	0.9966	0.9352	0.8884
0.45	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0519	-1.6439	-1.4090	-1.2525	-1.1376	-1.0488	-0.9783	-0.9152	-0.8704
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0528	1.6449	1.4110	1.2506	1.1361	1.0485	0.9768	0.9205	0.8698
0.50	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0341	-1.6239	-1.3859	-1.2307	-1.1154	-1.0279	-0.9538	-0.8987	-0.8486
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0333	1.6237	1.3830	1.2317	1.1118	1.0268	0.9544	0.8982	0.8496
0.55	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0138	-1.6042	-1.3615	-1.2039	-1.0917	-0.9998	-0.9314	-0.8765	-0.8265
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	2.0148	1.6035	1.3648	1.2061	1.0912	1.0030	0.9345	0.8753	0.8286
0.60	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-2.0029	-1.5771	-1.3367	-1.1768	-1.0619	-0.9764	-0.9050	-0.8487	-0.8023
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.9948	1.5804	1.3345	1.1774	1.0623	0.9778	0.9064	0.8511	0.8038
0.65	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.9728	-1.5493	-1.3031	-1.1464	-1.0345	-0.9440	-0.8756	-0.8225	-0.7738
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.9796	1.5472	1.3051	1.1471	1.0319	0.9456	0.8779	0.8242	0.7737
0.70	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.9496	-1.5200	-1.2723	-1.1097	-0.9984	-0.9118	-0.8427	-0.7864	-0.7420
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.9467	1.5189	1.2729	1.1143	0.9990	0.9111	0.8428	0.7883	0.7438
0.75	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.9251	-1.4788	-1.2382	-1.0752	-0.9618	-0.8724	-0.8075	-0.7529	-0.7081
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.9294	1.4812	1.2363	1.0751	0.9587	0.8731	0.8080	0.7518	0.7069
0.80	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.8954	-1.4444	-1.1941	-1.0329	-0.9194	-0.8327	-0.7666	-0.7122	-0.6676
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.8958	1.4480	1.1913	1.0315	0.9190	0.8325	0.7634	0.7110	0.6667
0.85	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.8660	-1.4060	-1.1474	-0.9839	-0.8701	-0.783	-0.7189	-0.6644	-0.6208
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.8611	1.4050	1.1514	0.9866	0.8709	0.7864	0.7186	0.6658	0.6200
0.90	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.8342	-1.3595	-1.0968	-0.9328	-0.8177	-0.7323	-0.6651	-0.6130	-0.5696
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.8396	1.3634	1.1000	0.933	0.8172	0.7319	0.6641	0.6127	0.5689
0.95	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.8006	-1.3176	-1.0480	-0.8757	-0.7593	-0.6714	-0.6051	-0.5522	-0.5092
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.8035	1.3078	1.0460	0.8795	0.7583	0.6707	0.6044	0.5503	0.5102
1.00	$A_{(n,\rho,p/2)}$	-1.7672	-1.2597	-0.9872	-0.8117	-0.6923	-0.6026	-0.5334	-0.4801	-0.4357
	$A_{(n,\rho,1-p/2)}$	1.7623	1.2632	0.9865	0.8136	0.6925	0.6017	0.5336	0.4799	0.4357

**Tabela 2.** Unbiasing constants for standard deviation estimation under Ranked Set Sampling

$\rho$	Sample size								
	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10
0	0.7979	0.8862	0.9213	0.9400	0.9515	0.9594	0.9650	0.9693	0.9727
0.25	0.8050	0.8930	0.9261	0.9446	0.9559	0.9628	0.9686	0.9718	0.9753
0.30	0.8105	0.8944	0.9297	0.9468	0.9573	0.9643	0.9701	0.9739	0.9769
0.35	0.8133	0.8990	0.9329	0.9488	0.9598	0.9668	0.9719	0.9744	0.9788
0.40	0.8190	0.9038	0.9357	0.9517	0.9626	0.9690	0.9733	0.9770	0.9792
0.45	0.8244	0.9079	0.9395	0.9562	0.9645	0.9708	0.9767	0.9797	0.9822
0.50	0.8297	0.9119	0.9441	0.9600	0.9691	0.9741	0.9786	0.9821	0.9840
0.55	0.8381	0.9208	0.9501	0.9651	0.9720	0.9776	0.9823	0.9847	0.9864
0.60	0.8463	0.9249	0.9553	0.9684	0.9776	0.9819	0.9856	0.9883	0.9889
0.65	0.8530	0.9330	0.9606	0.9745	0.9821	0.9860	0.9895	0.9911	0.9936
0.70	0.8626	0.9421	0.9669	0.9808	0.9869	0.9908	0.9938	0.9954	0.9967
0.75	0.8730	0.9508	0.9764	0.9868	0.9921	0.9962	0.9977	1.0002	1.0008
0.80	0.8831	0.9599	0.9844	0.9952	0.9987	1.0025	1.0043	1.0049	1.0052
0.85	0.8962	0.9709	0.9937	1.0026	1.0062	1.0090	1.0097	1.0101	1.0099
0.90	0.9118	0.9834	1.0033	1.0112	1.0144	1.0159	1.0159	1.0159	1.0153
0.95	0.9233	0.9942	1.0147	1.0213	1.0231	1.0242	1.0233	1.0216	1.0215
1.00	0.9384	1.0093	1.0261	1.0322	1.0326	1.0321	1.0313	1.0298	1.0283

**Tabela 3.** ARL values for adaptive RSS control charts when  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$ 

$\rho$	$\mu$	Fixed SRS (n=3)	Fixed RSS (n=3)	$c = 1/2$				$c = 2/3$			
				$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1.00	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.16	349.50	344.70	344.57	344.12	343.53	342.28	342.72	343.25	345.36
	0.10	322.10	292.32	286.52	282.38	278.83	281.46	290.60	289.49	288.77	289.85
	0.15	275.66	228.21	217.01	213.45	209.98	212.24	222.35	222.43	221.69	220.45
	0.20	227.72	170.39	157.27	155.48	152.02	150.05	164.33	163.39	163.64	162.77
	0.25	184.24	126.11	113.08	109.35	105.00	102.18	120.30	120.04	118.94	118.39
	0.40	94.04	51.49	40.50	35.93	33.23	32.02	46.28	44.40	43.19	42.44
	0.50	60.69	29.52	21.34	17.46	15.97	15.31	24.89	23.41	22.26	21.47
	0.60	40.03	18.11	11.90	9.21	8.54	8.38	14.06	12.54	11.75	11.45
	0.75	22.48	9.22	5.73	4.60	4.43	4.43	6.75	5.83	5.59	5.56
	0.80	18.79	7.63	4.70	3.84	3.74	3.75	5.42	4.79	4.64	4.55
	1.00	9.76	3.78	2.60	2.39	2.39	2.39	2.81	2.64	2.61	2.61
	1.25	4.95	2.05	1.68	1.66	1.66	1.66	1.74	1.71	1.71	1.71
	1.50	2.91	1.40	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32
	2.00	1.47	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04
	2.50	1.10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3.00	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.80	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.16	353.44	353.31	356.53	355.12	350.24	353.77	352.66	352.21	352.52
	0.10	322.10	310.11	308.73	306.92	304.33	299.74	308.25	308.78	308.38	309.94
	0.15	275.66	251.08	244.49	243.13	242.61	239.63	246.65	246.75	247.22	248.19
	0.20	227.72	196.11	187.28	185.44	184.15	182.32	190.71	191.58	191.75	192.08
	0.25	184.24	150.89	139.69	137.27	135.26	134.58	146.25	145.94	144.58	144.43
	0.40	94.04	68.96	59.74	57.23	54.09	52.35	63.92	62.23	62.64	62.16
	0.50	60.69	41.48	33.67	30.76	28.62	28.10	37.02	36.01	35.53	34.87
	0.60	40.03	25.84	19.80	17.29	16.12	15.68	22.52	21.58	20.75	20.10
	0.75	22.48	13.59	9.62	8.19	7.87	7.67	11.37	10.32	9.89	9.80
	0.80	18.79	11.20	7.93	6.59	6.35	6.29	9.03	8.28	7.92	7.90
	1.00	9.76	5.67	3.94	3.52	3.46	3.44	4.44	4.08	3.97	3.96
	1.25	4.95	2.91	2.27	2.17	2.17	2.17	2.39	2.30	2.29	2.30
	1.50	2.91	1.83	1.60	1.59	1.58	1.58	1.63	1.62	1.62	1.62
	2.00	1.47	1.15	1.13	1.13	1.13	1.13	1.12	1.12	1.12	1.12
	2.50	1.10	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
	3.00	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.50	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.16	349.96	351.55	350.59	349.33	348.05	354.62	355.78	354.41	353.78
	0.10	322.10	312.06	308.22	309.56	306.10	306.55	311.69	313.54	311.75	311.22
	0.15	275.66	266.13	252.61	256.18	251.00	252.31	262.08	262.56	262.62	263.05
	0.20	227.72	218.40	204.51	206.68	204.70	200.15	211.67	212.99	212.61	210.88
	0.25	184.24	173.20	162.71	163.10	156.87	157.58	170.22	169.78	169.53	167.64
	0.40	94.04	84.03	75.96	74.08	71.95	71.40	78.65	78.72	79.06	79.10
	0.50	60.69	52.69	46.64	44.45	43.28	42.43	48.65	48.05	47.98	48.25
	0.60	40.03	34.48	28.88	26.99	25.55	25.33	31.12	30.49	29.90	29.89
	0.75	22.48	19.00	15.05	13.47	12.79	12.74	16.59	16.23	15.67	15.22
	0.80	18.79	15.78	12.43	10.90	10.35	10.22	13.52	12.92	12.60	12.33
	1.00	9.76	8.05	6.03	5.27	5.17	5.20	6.65	6.24	6.04	5.97
	1.25	4.95	4.06	3.10	2.88	2.86	2.86	3.37	3.17	3.12	3.11
	1.50	2.91	2.43	2.03	1.94	1.95	1.95	2.10	2.05	2.04	2.04
	2.00	1.47	1.32	1.27	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27
	2.50	1.10	1.06	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05
	3.00	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

**Tabela 4.** ARL values for adaptive RSS control charts when  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$ 

$\rho$	$\mu$	Fixed SRS (n=3)	Fixed RSS (n=3)	$c = 1/2$				$c = 2/3$			
				$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
1.00	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.15	349.50	344.46	341.85	344.99	340.15	343.35	345.55	345.25	346.52
	0.10	322.10	292.32	276.73	271.46	272.76	261.34	288.40	287.38	282.80	280.25
	0.15	275.66	228.21	207.00	198.57	185.07	177.22	216.90	216.63	212.70	209.03
	0.20	227.72	170.39	142.92	130.07	118.09	110.61	159.93	155.10	152.66	148.56
	0.25	184.24	126.11	98.72	79.34	67.99	61.35	112.62	108.68	104.79	99.23
	0.40	94.04	51.49	29.98	16.20	13.55	12.85	39.22	31.31	27.89	25.90
	0.50	60.69	29.52	14.38	7.60	6.93	6.71	19.48	13.84	12.33	11.64
	0.60	40.03	18.11	7.61	4.82	4.61	4.56	10.30	7.66	7.06	6.85
	0.75	22.48	9.22	3.92	3.17	3.14	3.14	4.87	4.17	4.09	4.03
	0.80	18.79	7.63	3.31	2.87	2.86	2.85	4.05	3.60	3.54	3.51
	1.00	9.76	3.78	2.13	2.09	2.09	2.09	2.36	2.31	2.32	2.33
	1.25	4.95	2.05	1.58	1.58	1.58	1.58	1.63	1.63	1.63	1.63
	1.50	2.91	1.40	1.30	1.30	1.30	1.30	1.31	1.31	1.31	1.31
0.80	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.16	353.44	346.03	350.09	348.41	348.16	354.60	356.66	355.15	356.94
	0.10	322.10	310.11	294.37	297.77	288.89	291.02	309.24	307.05	306.57	305.69
	0.15	275.66	251.08	233.66	232.47	228.22	224.42	244.63	246.14	246.91	246.26
	0.20	227.72	196.11	179.19	172.76	164.67	157.94	188.46	188.47	188.27	186.08
	0.25	184.24	150.89	130.61	124.41	117.10	113.04	142.66	142.77	139.55	136.85
	0.40	94.04	68.96	50.95	40.59	35.49	33.13	59.81	56.31	53.97	52.59
	0.50	60.69	41.48	27.45	18.96	16.69	15.75	33.14	29.38	27.22	25.86
	0.60	40.03	25.84	14.98	9.69	8.80	8.66	19.01	15.84	14.27	13.57
	0.75	22.48	13.59	7.24	5.03	4.77	4.70	9.04	7.29	6.70	6.57
	0.80	18.79	11.20	5.89	4.29	4.11	4.08	7.21	5.88	5.61	5.49
	1.00	9.76	5.67	3.14	2.73	2.72	2.72	3.62	3.28	3.21	3.19
	1.25	4.95	2.91	1.99	1.93	1.92	1.92	2.13	2.10	2.09	2.08
	1.50	2.91	1.83	1.52	1.52	1.52	1.52	1.55	1.56	1.56	1.56
0.50	0.00	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
	0.05	357.16	349.96	350.34	352.48	347.38	345.49	361.41	357.22	350.16	352.72
	0.10	322.10	312.06	315.61	313.33	307.43	306.36	318.43	318.46	313.56	313.99
	0.15	275.66	266.13	251.71	254.91	254.40	249.77	260.30	259.92	263.60	264.66
	0.20	227.72	218.40	203.87	202.12	199.74	196.02	211.97	208.71	209.53	206.53
	0.25	184.24	173.20	160.11	155.33	149.06	145.40	169.46	165.23	166.65	165.48
	0.40	94.04	84.03	70.48	64.23	59.14	54.76	78.44	76.85	74.70	72.38
	0.50	60.69	52.69	40.46	34.77	30.80	28.42	47.10	44.79	42.55	41.19
	0.60	40.03	34.48	24.44	18.62	16.20	15.67	28.39	26.32	24.10	23.46
	0.75	22.48	19.00	11.93	8.48	7.71	7.55	14.40	12.33	11.38	10.96
	0.80	18.79	15.78	9.68	6.90	6.36	6.29	11.71	9.87	9.16	8.85
	1.00	9.76	8.05	4.76	3.74	3.66	3.67	5.52	4.78	4.56	4.52
	1.25	4.95	4.06	2.67	2.41	2.41	2.41	2.91	2.72	2.68	2.68
	1.50	2.91	2.43	1.86	1.81	1.81	1.81	1.94	1.89	1.90	1.89



**Tabela 5.** Valores de TMA para  $\mu = 0$ 

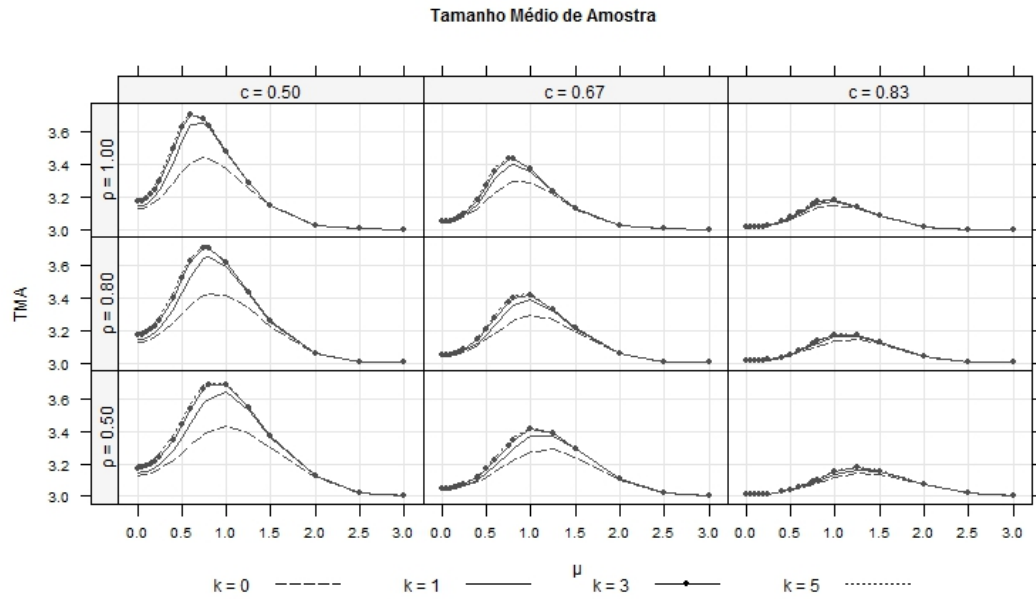
Sample sizes	Método	$\rho$	$c = 1/2$				$c = 2/3$			
			$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$
(3, 4, 5)	AAS	-	3.13	3.15	3.18	3.20	3.04	3.04	3.05	3.05
		1.00	3.13	3.14	3.17	3.19	3.04	3.04	3.04	3.05
	ACO	0.80	3.13	3.14	3.17	3.19	3.04	3.04	3.05	3.05
		0.50	3.13	3.15	3.17	3.19	3.04	3.04	3.05	3.05
(3, 5, 8)	AAS	-	3.26	3.31	3.40	3.46	3.09	3.09	3.10	3.11
		1.00	3.25	3.30	3.38	3.43	3.08	3.09	3.10	3.10
	ACO	0.80	3.26	3.31	3.39	3.44	3.08	3.09	3.10	3.11
		0.50	3.26	3.31	3.39	3.45	3.09	3.09	3.10	3.11

**Tabela 6.** CMS ratios for SRS an RSS adaptive control charts with sample sizes  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  and  $n_3 = 5$  ( $c = 2/3$ )

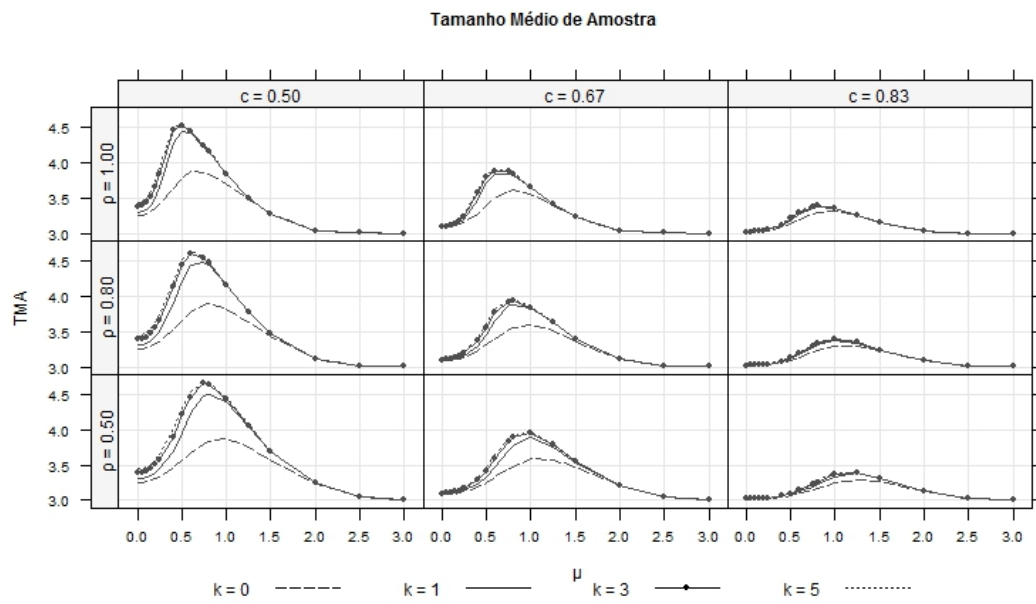
$\mu$	$\rho = 1.00$				$\rho = 0.80$				$\rho = 0.50$			
	k=0	k=1	k=3	k=5	k=0	k=1	k=3	k=5	k=0	k=1	k=3	k=5
0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	1.05	1.05	1.04	1.03	1.02	1.02	1.01	1.01	1.02	1.01	1.01	1.01
0.10	1.11	1.11	1.10	1.10	1.05	1.04	1.03	1.02	1.04	1.02	1.02	1.02
0.15	1.22	1.22	1.23	1.23	1.10	1.10	1.10	1.09	1.04	1.03	1.04	1.03
0.20	1.37	1.37	1.37	1.38	1.18	1.17	1.17	1.17	1.06	1.05	1.06	1.07
0.25	1.51	1.52	1.53	1.53	1.24	1.25	1.26	1.26	1.07	1.07	1.07	1.08
0.40	1.95	2.01	2.07	2.09	1.41	1.44	1.43	1.42	1.15	1.14	1.13	1.12
0.50	2.32	2.44	2.53	2.58	1.56	1.59	1.58	1.59	1.19	1.19	1.17	1.15
0.60	2.63	2.91	3.06	3.11	1.64	1.69	1.73	1.77	1.19	1.20	1.20	1.19
0.75	3.00	3.37	3.42	3.43	1.78	1.90	1.93	1.95	1.22	1.21	1.22	1.25
0.80	3.12	3.38	3.37	3.38	1.87	1.95	1.98	1.95	1.25	1.25	1.24	1.25
1.00	3.00	3.03	2.91	2.88	1.90	1.96	1.91	1.90	1.27	1.28	1.26	1.26
1.25	2.39	2.28	2.24	2.23	1.73	1.70	1.67	1.66	1.23	1.23	1.23	1.23
1.50	1.88	1.81	1.80	1.80	1.52	1.48	1.47	1.47	1.18	1.17	1.17	1.17
2.00	1.34	1.34	1.34	1.34	1.24	1.24	1.24	1.24	1.10	1.10	1.10	1.10
2.50	1.09	1.09	1.09	1.09	1.08	1.08	1.08	1.08	1.04	1.04	1.04	1.04
3.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

**Tabela 7.** CMS ratios for SRS an RSS adaptive control charts with sample sizes  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  and  $n_3 = 8$  ( $c = 2/3$ )

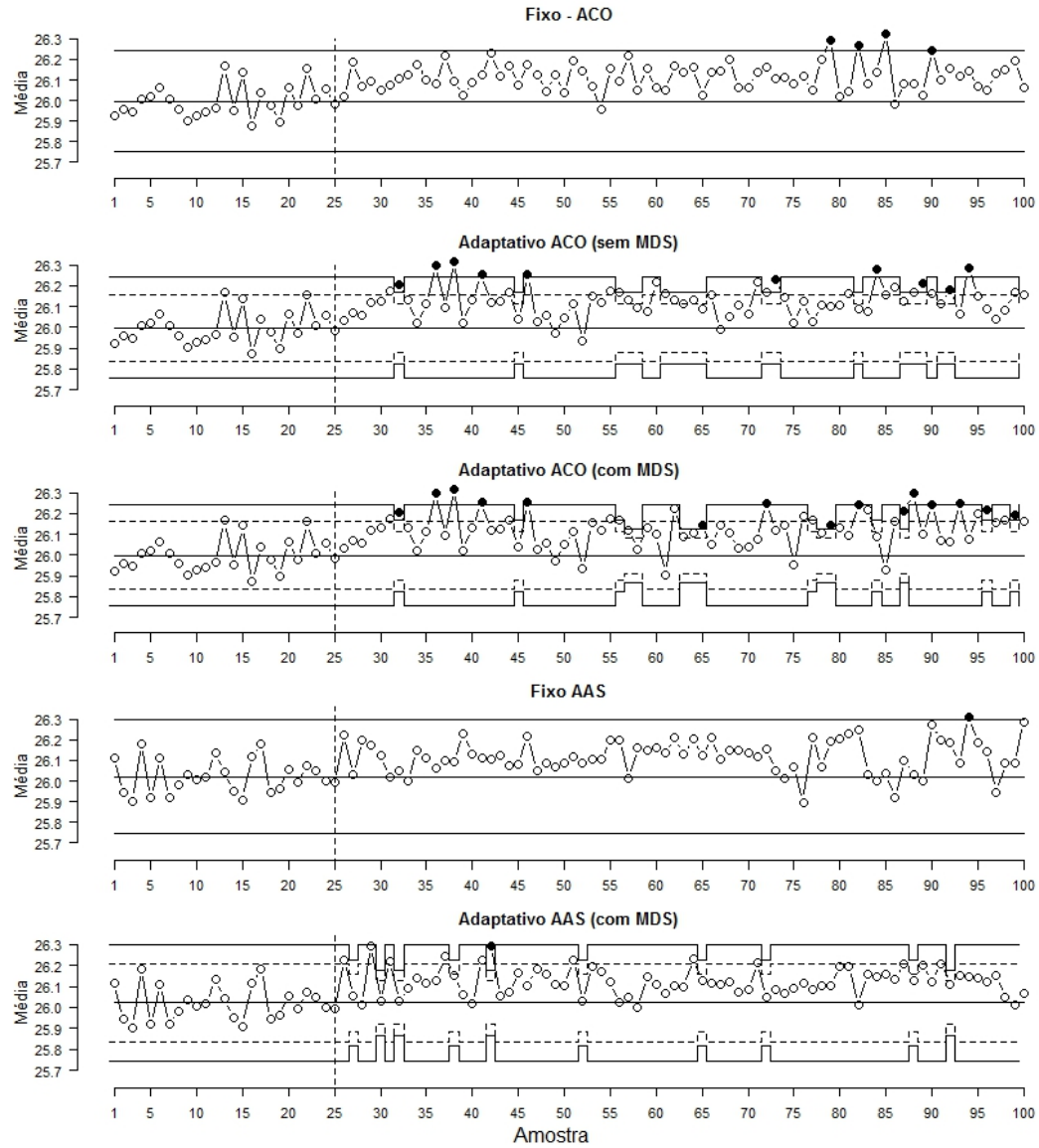
$\mu$	$\rho = 1.00$				$\rho = 0.80$				$\rho = 0.50$			
	k=0	k=1	k=3	k=5	k=0	k=1	k=3	k=5	k=0	k=1	k=3	k=5
0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	1.05	1.04	1.04	1.04	1.01	1.01	1.02	1.01	0.99	1.01	1.03	1.03
0.10	1.13	1.13	1.15	1.16	1.05	1.06	1.06	1.07	1.02	1.02	1.04	1.04
0.15	1.26	1.26	1.28	1.31	1.12	1.11	1.11	1.11	1.05	1.05	1.04	1.03
0.20	1.41	1.45	1.46	1.50	1.19	1.19	1.18	1.20	1.06	1.08	1.06	1.08
0.25	1.61	1.66	1.70	1.80	1.27	1.26	1.28	1.30	1.07	1.09	1.07	1.08
0.40	2.29	2.84	3.12	3.31	1.50	1.58	1.61	1.63	1.15	1.16	1.17	1.18
0.50	2.88	3.90	4.24	4.42	1.69	1.84	1.92	1.99	1.19	1.21	1.23	1.25
0.60	3.41	4.33	4.47	4.48	1.85	2.09	2.21	2.26	1.24	1.26	1.31	1.31
0.75	3.74	3.90	3.69	3.61	2.01	2.23	2.25	2.22	1.26	1.32	1.33	1.33
0.80	3.70	3.63	3.42	3.33	2.08	2.22	2.16	2.13	1.28	1.32	1.32	1.32
1.00	3.02	2.62	2.46	2.41	1.97	1.84	1.78	1.76	1.29	1.26	1.25	1.24
1.25	2.15	1.96	1.92	1.92	1.65	1.52	1.50	1.50	1.20	1.17	1.17	1.17
1.50	1.73	1.67	1.66	1.66	1.45	1.40	1.39	1.39	1.17	1.15	1.14	1.14
2.00	1.31	1.31	1.31	1.31	1.22	1.22	1.22	1.22	1.09	1.09	1.09	1.09
2.50	1.09	1.09	1.09	1.09	1.07	1.07	1.07	1.07	1.03	1.03	1.03	1.03
3.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01



**Figura 1.** Average sample size values for adaptive RSS control charts when  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 5$



**Figura 2.** Average sample size values for adaptive RSS control charts when  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 5$  e  $n_3 = 8$



**Figura 3.** Control charts for different sampling schemes using simulated data