

## Chapitre 4

# Compartment systems

The notion of compartment system is used to specify a wide set of systems for which the dynamic can be described by balanced equations. It is used in many engineering fields (such as chemistry engineering, biomedical engineering or ecology), in economy and social sciences as well.

### 4.1. Definitions and notations

A compartment is a conceptual tank or box for which the content (matter, energy, money, population...) can be quantified. The symbolic notation used is depicted at figure 4.1 where  $q_{in}$  and  $q_{out}$  are respectively the filling and emptying flows of the compartment expressed in quantity of content by time unit. These flows are always *positive*, by convention.

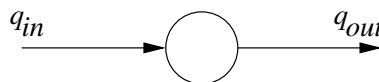


FIGURE 4.1 – Symbolic representation of the compartment.

A compartment system is made of one *network* of compartments interconnected and labelled 1 through  $n$ . To be clear, an example of system made of 3 compartments is shown at figure 4.2. The arrows specify the flows of content exchanged by the the compartment in the network and with outside of the system.

In general, a compartment system is represented by an *oriented graph* whose nodes correspond to compartments and arcs to flows. The following notations are introduced :

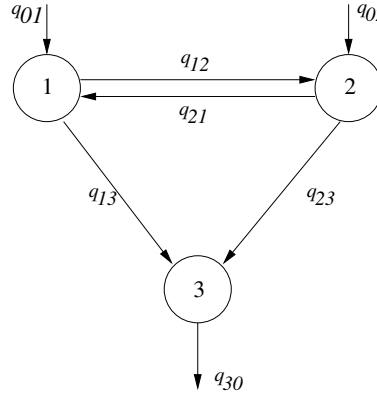


FIGURE 4.2 – An example of a compartment system graph.

$x_i$  is the quantity of content in the compartment of indices  $i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). This quantity is always *positive*. Using a slight abuse of terms,  $x_i$  is used to depict the *level* of matter in the compartment  $i$ .

$q_{ij}$  specify the flow flowing from compartment  $i$  towards the compartment  $j$ , ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ). As mentioned above, it is a variable which is always *positive* by convention.

**Définition 4.1. Open or close system** A system is **open** when there exists a possibility to exchange matter with outside the system. In this case :

$q_{io}$  specify the flow from compartment  $i$  towards the outside

$q_{oi}$  specify the flow from the outside towards the compartment  $i$

Otherwise, the system is said to be **close** :  $q_{io} = q_{oi} = 0$  for all  $i$ . □

**Définition 4.2. System connected to entrances and exits**

A compartment  $i$  is *connected to an exit* if there is a path  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$  from this compartment ending in a compartment  $\ell$  from which there is an outgoing flow  $q_{\ell o}$ . The system is *completely connected to the exits* (CCO) if each and every compartment is connected to an exit.

A compartment  $\ell$  is *connected to an entry* if there is a path  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$  ending in this compartment and coming from a compartment  $i$  in which there is an entering flow  $q_{oi}$ . The system is *completely connected to the entries* (CCI) if every compartment is connected to an entry. □

## 4.2. State model

The balanced equation of every compartment (also called continuity equation)

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^n q_{ji}(t) - \sum_{j=0}^n q_{ij}(t) \quad i = 1, \dots, n$$

is the basic statement to establish the state model of a compartment system. This equation tells us that the variation, per unit of time, of the quantity contained in a compartment is the difference between the sum of the entering flows (or debits) and the sum of the outgoing flows (or debits). In practice, of course, the flows which are structurally null are not explicitly in the equation ((4.1)).

Computing the equations of the state model of a compartment system required two fundamental aspects.

First of all, the structure of the graph related to the system determines the number and the structure of the balanced equations ((4.1)); the variables  $x_i$  are the state variables whereas the order of the model is the number  $n$  of compartments.

To complete the state model, the flows should be specified in terms of the state variables and input variables :

$$q_{ij}(x, u)$$

where  $x$  et  $u$  are, as usual, the vector of state and entries. This modelling is the point of the next section.

The general form of the state equations of a compartment system is the following :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^n q_{ji}(x, u) - \sum_{j=0}^n q_{ij}(x, u) \quad i = 1, \dots, n$$

In this model, the physical meaning of the state variables  $x_i$  is obvious : these are the quantities contained in each compartment. But, the input variables  $u$  can be of different nature, depending on the applications, as the next examples will show.

If the *flows vector*  $q(x, u)$  is defined as containing, in an arbitrary order, all the flows  $q_{ij}(x, u)$  which are not structurally null, then the state model ((4.1)) can also be written in a more compact matrix form :

$$\dot{x} = Lq(x, u) \tag{4.1}$$

where  $L$  is the incident matrix of the oriented graph, whose coefficients all belong to  $(-1, 0, 1)$ , which is ?????.

**Example 4.3.** For the system depicted at figure 4.2, the state model is written as :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_{01}(x, u) - q_{12}(x, u) - q_{13}(x, u) + q_{21}(x, u) \\ \dot{x}_2 &= q_{02}(x, u) + q_{12}(x, u) - q_{21}(x, u) - q_{23}(x, u) \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x, u) + q_{23}(x, u) - q_{30}(x, u)\end{aligned}$$

If the flows vector is defined as :

$$q(x, u) \triangleq \begin{pmatrix} q_{01}(x, u) \\ q_{02}(x, u) \\ q_{12}(x, u) \\ q_{13}(x, u) \\ q_{21}(x, u) \\ q_{23}(x, u) \\ q_{30}(x, u) \end{pmatrix}$$

the state model is written in a matrix format ((4.1)) with the matrix  $L$  :

$$L \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

### 4.3. Modelling of the flows

Depending on the applications, the functions  $q_{ij}(x, u)$  depicting the flows can take different types of forms. However, they must be defined in a way which guarantees the compartment system to be a *positive system*, that is a system for which every state variable remains positive along the trajectories. It is a likelihood guarantee of the model, because the state variables represent measures which do not have a physical meaning if they are negative.

**Définition 4.4. Positive vector and positive orthant**

A vector  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  is positive (notation  $x \geq 0$ ) if each of its component is a positive real number :  $x_i \geq 0$  for all  $i$ .

The positive orthant of dimension  $n$  (written  $\mathbb{R}_+^n$ ) is the set of all positive vectors of dimension  $n$ . □

**Définition 4.5. Positive system**

A dynamical system  $\dot{x} = f(x, u)$  is a positive system if, for every admissible input  $u(t)$ , its state is confined in the positive orthant when the initial state is positive :

$$x(t_0) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u(t) \in \mathcal{U} \implies x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq t_0. \quad \square$$

The following theorem gives a sufficient condition which can be easily used to check that a system is positive.

**Théorème 4.6.** A dynamical system  $\dot{x} = f(x, u)$  is a positive system if  $f(x, u)$  is differentiable and if

$$x \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad x_i = 0 \implies \dot{x}_i \geq 0 \quad \forall i. \quad \square$$

To ensure that a compartment system is a positive system, let's impose the following conditions on the flows functions  $q_{ij}(x, u)$  :

- C1. The functions  $q_{ij}(x, u)$  are positive functions of their arguments on their definition domain :

$$q_{ij}(x, u) : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$$

- C2. The functions  $q_{ij}(x, u)$  are continuous and differentiable functions of their arguments on their definition domain.

- C3. As there cannot be an outgoing flow from an empty compartment, the functions  $q_{ij}(x, u)$  verify the condition :

$$x_i = 0 \implies q_{ij}(x, u) = 0$$

**Théorème 4.7.** Under conditions C1, C2, C3, a dynamical compartment system  $\dot{x} = Lq(x, u)$  is a positive system. ■

#### Exemple 4.8. *Hydraulic system*

Let's consider an hydraulic system made of a set of tanks located at different elevations and whose the liquid content flows « as waterfall » from the highest tanks to the lowest tanks, thanks to gravity action. An example is illustrated at figure 4.3.

It is clearly a compartment system whose the associated graph is depicted at figure 4.4 and whose the continuity equations are written as :

$$\dot{x}_1 = q_{01} - q_{12} - q_{13}$$

$$\dot{x}_2 = q_{12} - q_{23}$$

$$\dot{x}_3 = q_{13} + q_{23} - q_{30}$$

In these equations, the state variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  specify, obviously, the volumes of water contained in the tanks ; and the flows  $q_{ij}$  depict the debits flowing from the upper tanks toward the lower tanks. In order to complete the model, the flows should be expressed in terms of the state variables and the input signals, correctly chosen. The flow provided by the supply pump of the upper tank can obviously be chosen as an input variable. The outgoing flow  $q_{ij}$  of each tank is a positive function of the volume  $x_i$  of the tank. The form of this function depends on the

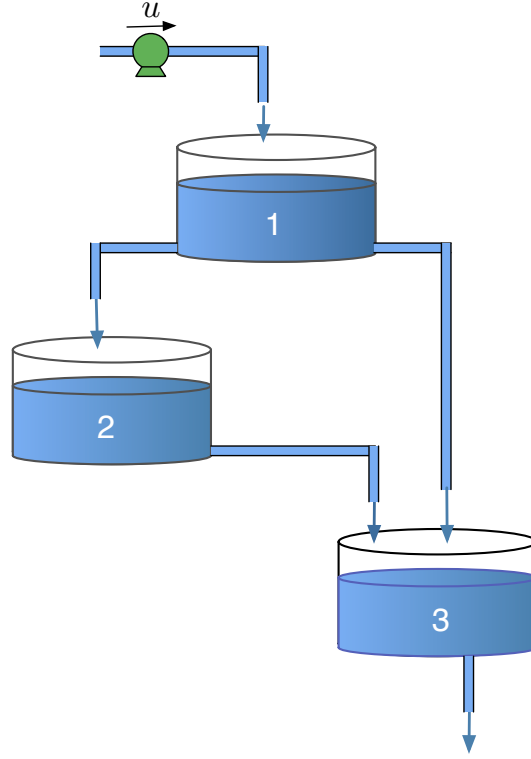


FIGURE 4.3 – Waterfall of tanks.

shape of the tanks and the configuration of the holes through which the water flows. Let's consider the case where the tanks have a constant horizontal section and where the flow goes through a rectangular hole located at the bottom of the tanks. The elevation of the water in a tank is expressed as :

$$h_i = \frac{x_i}{S_i}$$

where  $S_i$  specifies the section of the tank. According to the hydraulic laws, we know that when the elevation of the water  $h_i$  is big toward the elevation of the hole, the link between the elevation of the water is proportional to  $\sqrt{h_i}$  (Torricelli's law<sup>1</sup>). However, when the elevation of the water is lower than the elevation of

1. This law written by Torricelli in 1643 states that the speed  $v$  of the outgoing water of a tank of elevation  $h$  verifies  $v^2 = 2gh$ . It can be proven intuitively by analogy with a body in free fall : a elementary volume of water at the surface of the tank has a potential energy  $\rho gh$  and a kinetic energy  $\rho v^2/2$  when it reaches the exit of the tank, where  $\rho$  depicts the density. More rigorously, this can be deduced from Bernoulli's theorem without pressure loss or pump  $p + \rho gz + \rho v^2/2 = \text{constante}$ , where  $p$  depicts the pressure and  $z$  the elevation.

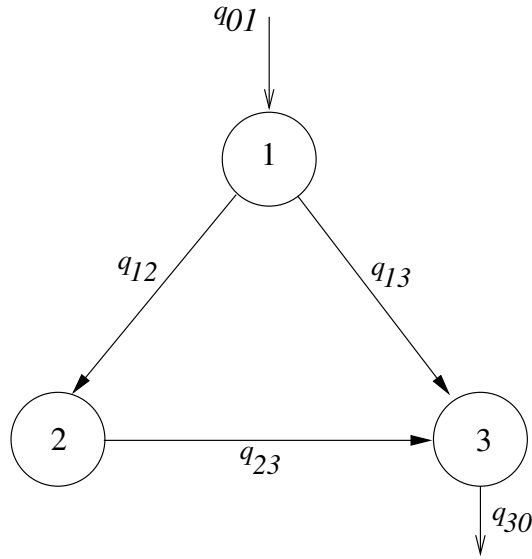


FIGURE 4.4 – Graph of the waterfall of tanks.

the hole, the flows becomes proportional to  $h_i\sqrt{h_i}$  (law of flows for a rectangular tank). A model of the following form can be given :

$$q_{ij} = \frac{\alpha_{ij}h_i\sqrt{h_i}}{\beta_{ij} + h_i}$$

where  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  are positive constants. Indeed, this model verifies the property telling that, for low water elevations ( $h_i \ll \beta_{ij}$ ), the flow  $q_{ij}$  is proportional to  $h_i\sqrt{h_i}$  whereas for high water elevations ( $h_i \gg \beta_{ij}$ ), the flow  $q_{ij}$  is proportional to  $\sqrt{h_i}$ . The flows  $q_{ij}$  can be expressed in terms of  $x_i$  :

$$q_{ij}(x_i) = \frac{k_{ij}x_i\sqrt{x_i}}{S_i\beta_{ij} + x_i} \quad \text{avec } k_{ij} \triangleq \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{S_i}}$$

Finally, the state model can be written as :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{k_{12}x_1\sqrt{x_1}}{S_1\beta_{12} + x_1} - \frac{k_{13}x_1\sqrt{x_1}}{S_1\beta_{13} + x_1} + u, \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_{12}x_1\sqrt{x_1}}{S_1\beta_{12} + x_1} - \frac{k_{23}x_2\sqrt{x_2}}{S_2\beta_{23} + x_2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_{13}x_1\sqrt{x_1}}{S_1\beta_{13} + x_1} + \frac{k_{23}x_2\sqrt{x_2}}{S_2\beta_{23} + x_2} - \frac{k_{30}x_3\sqrt{x_3}}{S_3\beta_{30} + x_3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Let's notice that the functions  $q_{ij}(x_i)$  verifies the positivity conditions C1, C2 and C3. □

#### 4.4. Modèles linéaires avec commande par les alimentations extérieures

C'est la classe de modèles à compartiments que l'on rencontre le plus couramment dans la littérature. Elle est caractérisée par les définitions suivantes des flux :

1. Les flux entre compartiments et les flux de sortie du système sont des fonctions linéaires du niveau du compartiment donneur :

$$q_{ij} = k_{ij}x_i \quad k_{ij} > 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 0, \dots, n)$$

2. Les entrées  $u_\ell$  du système sont proportionnelles aux flux d'alimentation :

$$q_{0\ell} = k_{0\ell}u_\ell$$

Dans ce cas, l'information nécessaire à l'écriture du modèle d'état est entièrement contenue dans le graphe du système. Le modèle d'état prend la forme générale d'un système linéaire (voir chapitre 1), c-à-d :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

mais avec les particularités structurelles suivantes :

1. La matrice  $A$  est une *matrice de Metzler* c-à-d telle que  $a_{ij} \geq 0$  pour tout  $i \neq j$
2. La matrice  $A$  est diagonalement dominante c-à-d

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} a_{ji}$$

3. La matrice  $B$  est une *matrice élémentaire* de plein rang, c'est à dire une matrice qui contient au plus un élément non nul par ligne et par colonne.

**Exemple 4.9.** Le modèle d'état linéaire du système à compartiments correspondant au graphe de la figure 4.2 s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_{12} + k_{13}) & k_{21} & 0 \\ k_{12} & -(k_{21} + k_{23}) & 0 \\ k_{13} & k_{23} & -k_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{01} & 0 \\ 0 & k_{02} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

On observe que  $A$  est bien une matrice de Metzler diagonalement dominante et que  $B$  est une matrice élémentaire de plein rang ( $= 2$ ). ■



**Exemple 4.10. Modélisation physiologique**

Les physiologistes s'intéressent souvent à décrire et à analyser la propagation de substances biologiques ou chimiques dans le corps des mammifères. Il peut s'agir de substances médicamenteuses (on parle alors d'études pharmacocinétiques) ou encore de substances toxiques absorbées volontairement ou accidentellement. Il peut s'agir aussi de substances d'origine naturelle telle que des hormones ou des protéines. Les modèles à compartiments sont fréquemment utilisés pour procéder à de telles études : le corps du mammifère est alors représenté par un ensemble plus ou moins diversifié de réservoirs interconnectés.

Considérons l'exemple de la figure 4.5. Une substance toxique (par exemple

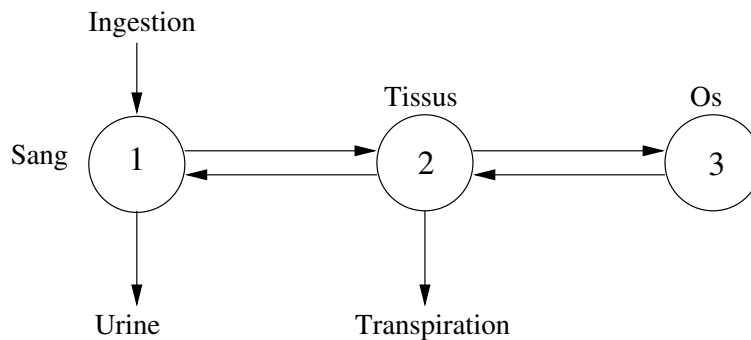


FIGURE 4.5 – Graphe d'un modèle à compartiments en pharmacocinétique

du plomb) est ingérée par un animal et pénètre dans le sang. Cette substance se propage progressivement dans le corps, passant du sang vers les tissus tout d'abord, vers les os ensuite. Elle est excrétée par la transpiration d'une part et par les voies urinaires d'autre part. Le modèle à compartiments linéaires correspondant au graphe de la figure 4.5 est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12}) & k_{21} & 0 \\ k_{12} & -(k_{20} + k_{21} + k_{23}) & k_{32} \\ 0 & k_{23} & -k_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Dans ce modèle, les variables d'état  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  désignent bien sûr les quantités de substance toxique dans les trois compartiments (sang, tissus et os). La variable d'entrée  $u$  désigne le flux d'ingestion par le corps. ■

## 4.5. Modèles non linéaires avec commande par les flux

Nous considérons maintenant des systèmes non linéaires à compartiments dont les flux  $q_{ij}$  peuvent être des fonctions non linéaires quelconques de leurs arguments satisfaisant les conditions C1 - C3. Nous avons déjà rencontré un modèle non linéaire dans l'exemple de la cascade de réservoirs. Toutefois, dans cet exemple, les flux entre compartiments n'étaient pas fonction des variables d'entrée  $u_\ell$ . Ici nous considérerons le cas où certains flux entre compartiments sont des fonctions explicites de variables d'entrée  $u_\ell$  qui permettent de contrôler le débit passant entre ces compartiments. On utilise la représentation symbolique de la figure 4.6 pour indiquer la présence d'une telle variable de contrôle.

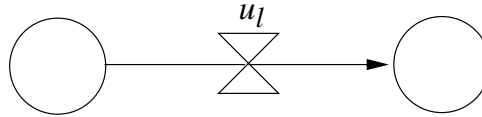


FIGURE 4.6 – Représentation symbolique d'un flux contrôlé

### Exemple 4.11. Réseau de réservoirs

Considérons le système hydraulique illustré à la figure 4.7. Ce réseau de réservoirs est celui de l'exemple de la cascade de réservoirs (exemple 4.3) que nous avons rencontré précédemment, mais avec une petite modification : l'écoulement entre le réservoir 2 et le réservoir 3 n'est plus un écoulement libre mais est devenu un écoulement forcé par la pompe. Dans la mesure où cette pompe est commandable, il est naturel de considérer le débit pompé  $F$  comme une variable d'entrée.

Le modèle d'état (4.2) que nous avons obtenu pour la cascade de réservoirs est alors simplement modifié comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1) - q_{13}(x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1) - u_2 \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x_1) - q_{30}(x_3) + u_2\end{aligned}\tag{4.4}$$

où les variables d'état  $x_i$  sont les volumes d'eau contenus dans les réservoirs, la variable d'entrée  $u_1$  est le débit d'alimentation du premier réservoir, la variable d'entrée  $u_2 = F$  est le débit pompé du deuxième vers le troisième réservoir et les fonctions  $q_{ij}(x_i)$  sont définies comme suit :

$$q_{ij}(x_i) = \frac{k_{ij}x_i\sqrt{x_i}}{S_i\beta_{ij} + x_i}$$

On observe que ce modèle d'état *ne peut pas* être celui d'un système à compartiments vérifiant les conditions C1 - C3. En effet le flux  $q_{23} = u_2$  ne vérifie pas

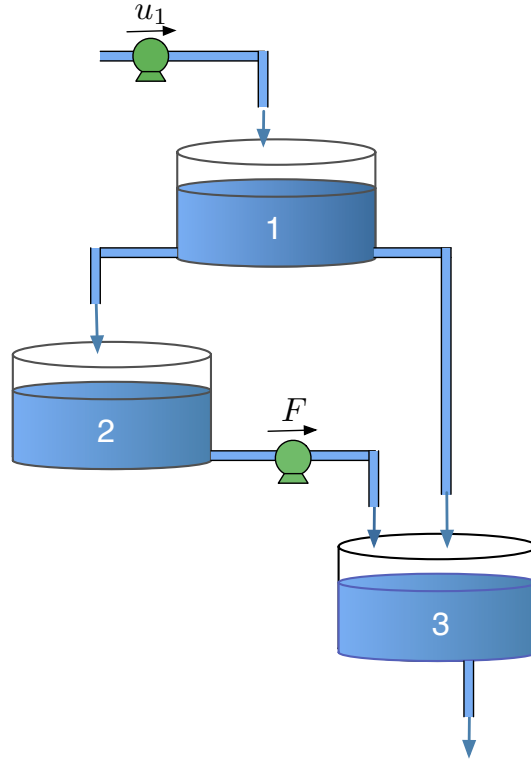


FIGURE 4.7 – Réseau de réservoirs

la condition C3 et le système n'est pas positif : une simulation de ce modèle peut conduire à des niveaux négatifs dans les réservoirs (même si les débits pompés restent positifs) ce qui est évidemment contradictoire avec la réalité physique. La difficulté provient du fait que, avec le modèle tel qu'il est écrit, on peut pomper de l'eau dans le deuxième réservoir même quand il est vide !

On contourne aisément cette difficulté si on modélise le flux  $q_{23}$  (qui est le débit pompé  $F$ ) de manière à respecter la réalité physique et à satisfaire la condition C3 comme ceci :

$$q_{23}(x_2, u_2) = \phi(x_2)u_2$$

où  $\phi(x_2)$  est une fonction positive vérifiant  $\phi(0) = 0$  et  $u_2$  représente l'actionnement de la pompe. On obtient alors un système à compartiments dont le graphe est présenté à la figure 4.8 et dont le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1) - q_{13}(x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1) - \phi(x_2)u_2 \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x_1) - q_{30}(x_3) + \phi(x_2)u_2\end{aligned}$$

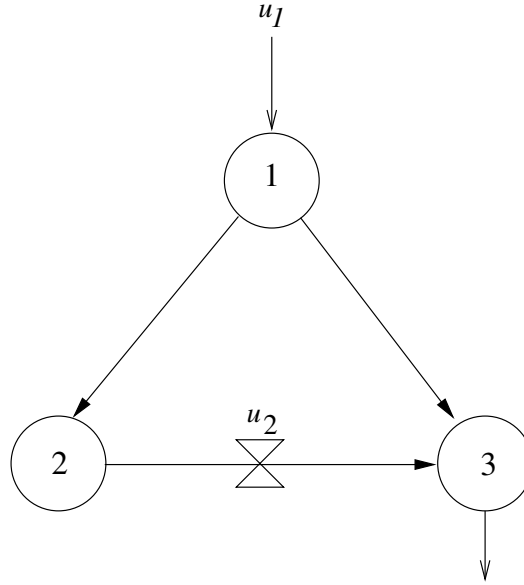


FIGURE 4.8 – Graphe associé au réseau de réservoirs

La propriété structurelle fondamentale des systèmes linéaires à compartiments se généralise aux systèmes non linéaires de la manière suivante.

**Théorème 4.12.** Soit un système non linéaire à compartiments dont les flux  $q_{ij}$  vérifient les conditions C1 - C3. Alors les flux peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q_{ij}(x, u) &= a_{ij}(x, u)x_i \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \\ q_{i0}(x, u) &= a_{i0}(x, u)x_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ q_{0i} &= k_{0i}u_i \end{aligned}$$

où les fonctions  $a_{ij}(x, u)$  et  $a_{i0}(x, u)$ , définies sur l'orthant positif, sont continues.

En conséquence, le modèle d'état du système peut se mettre sous la forme suivante :

$$\dot{x} = A(x, u)x + Bu$$

où la matrice  $A(x, u)$  est une matrice de Metzler diagonalement dominante pour tout  $(x, u)$  dans l'orthant positif et  $B$  est une matrice élémentaire. ■

Nous terminons ce chapitre par la présentation d'un autre exemple industriel classique de système à compartiments.

**Exemple 4.13. Procédé de distillation binaire**

Un procédé de distillation binaire est un procédé utilisé pour séparer un mélange de deux composés chimiques, sous forme liquide, appelé *charge*. Un *dépropaniseur* ayant pour fonction de séparer le propane du butane est un exemple typique de procédé de distillation binaire dans l'industrie pétrochimique.

La séparation s'effectue par évaporation dans une enceinte fermée appelée *ballon* (voir figure 4.9). Au sommet du ballon sort le *distillat* contenant essentiellement

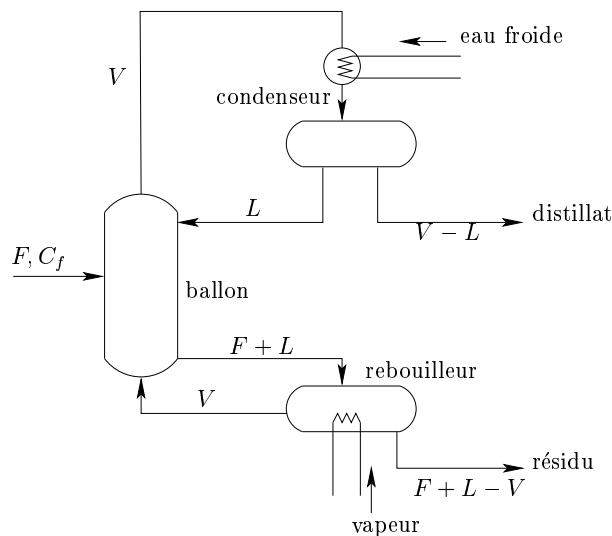


FIGURE 4.9 – Procédé de distillation

le composé léger avec un peu de composé lourd. Au fond du ballon sort le *résidu* qui contient essentiellement le composé lourd avec un peu de composé léger. Le ballon est alimenté par la charge avec un débit molaire  $F$  (mol/min). Le flux de vapeur sortant au sommet du ballon est refroidi et complètement condensé. Le liquide sortant du condenseur est partiellement recyclé vers le ballon avec un débit molaire  $L$ . Le reste, appelé *distillat*, est extrait du système. En fond de ballon, le liquide sortant est réchauffé dans un rebouilleur et la vapeur ainsi produite est recyclée dans le ballon. Le reste, appelé *résidu*, est extrait.

On présente ci-dessous un modèle simplifié de la dynamique de ce procédé de distillation en faisant les hypothèses de modélisation suivantes :

1. la charge est liquide et à sa température de bulle ;
2. les phases liquide et vapeur dans le ballon et le rebouilleur sont homogènes et à l'équilibre ;
3. dans le ballon la pression est constante et il n'y a pas d'accumulation de vapeur ; cette hypothèse permet d'omettre les dépendances en pression dans

les équations et implique que le débit de vapeur  $V$  à la sortie du ballon est égal au débit à l'entrée ;

4. les débits d'extraction liquide sont ajustés de manière que les masses molaires totales de la phase liquide dans les trois récipients soient constantes : le distillat est donc extrait avec un débit molaire  $V - L$ , le liquide en fond de ballon avec un débit molaire  $F + L$  et le résidu avec un débit molaire  $F + L - V$ . Evidemment, cela implique que l'inégalité  $0 < L < V < F + L$  soit vérifiée.

Ainsi décrit, le procédé de distillation peut être vu comme un système à compartiments dont le modèle dynamique est constitué des équations de bilan de l'un des deux composés dans le ballon, dans le condenseur et dans le rebouilleur. Le graphe de ce système à compartiments est présenté à la figure 4.10 et les équations d'état sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_2 k(x_2) - u_1 \frac{x_1}{m_1} - (u_2 - u_1) \frac{x_1}{m_1} \\ \dot{x}_2 &= u_1 \frac{x_1}{m_1} - (u_1 + u_3) \frac{x_2}{m_2} + u_2 (k(x_3) - k(x_2)) + u_3 c_f \\ \dot{x}_3 &= (u_1 + u_3) \left( \frac{x_2}{m_2} - \frac{x_3}{m_3} \right) + u_2 \left( \frac{x_3}{m_3} - k(x_3) \right)\end{aligned}$$

Dans ces équations, les variables d'état  $x_i$  représentent la masse molaire du composant léger dans la phase liquide du condenseur (indice 1), du ballon (indice 2) et du rebouilleur (indice 3) ; les paramètres  $m_i$  sont les masses molaires totales (et constantes) correspondantes : le rapport  $x_i/m_i$  est la *fraction molaire* ; le paramètre  $c_f$  est la fraction molaire du composé léger dans la charge ; les variables d'entrées  $u_1 = L$ ,  $u_2 = V$  et  $u_3 = F$  sont, respectivement, les débits molaires de reflux, de production de vapeur et d'alimentation. Enfin, la fonction  $k(x)$  est une relation d'équilibre liquide-vapeur permettant de relier la fraction molaire du composant léger quittant le liquide sous forme vapeur à la fraction molaire du composant dans la phase liquide.

Cette relation s'exprime classiquement comme suit :

$$k(x_i) \triangleq \frac{\alpha x_i}{m_i + (\alpha - 1)x_i}$$

où le paramètre constant  $\alpha > 1$  porte le nom de facteur de séparation. Cette fonction, définie sur l'intervalle  $[0, m_i]$ , vérifie  $k(0) = 0$  et  $k(m_i) = 1$  (voir figure 4.11).  $\square$

## 4.6. Exercices

### Exercice 4.1. *Un système à compartiments*

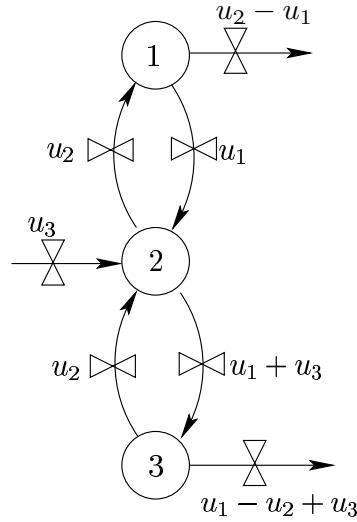


FIGURE 4.10 – Graphe associé au procédé de distillation

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x}_1 = x_3 - \log(1 + x_1)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 - x_2^2$$

$$\dot{x}_3 = x_2^2 - 2x_3 + u$$

Démontrer qu'il s'agit d'un système à compartiments. Dessiner le graphe associé. Calculer les flux  $q_{ij}$ , la matrice  $L$  et la matrice  $A(x, u)$ .  $\square$

#### Exercice 4.2. Un système hydraulique

Un système hydraulique comportant trois réservoirs et deux pompes est représenté à la figure 4.12.

1. Etablir un modèle d'état du système en considérant les débits volumétriques  $u_1 = F_1$  et  $u_2 = F_2$  comme variables d'entrée. Montrer que le système obtenu n'est *pas* un système positif.
2. Proposer une autre définition de la variable d'entrée  $u_2$  qui garantisse que le système soit positif.
3. Dessiner le graphe du modèle à compartiments ainsi obtenu.  $\square$

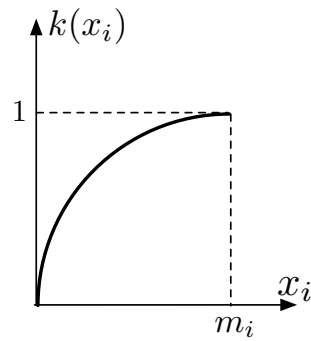


FIGURE 4.11 – Relation d'équilibre liquide-vapeur

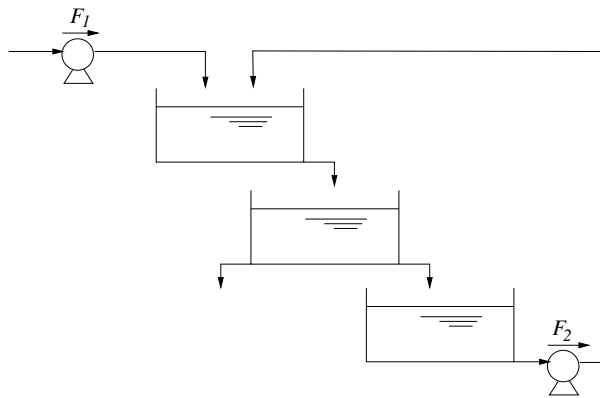


FIGURE 4.12 – Système hydraulique

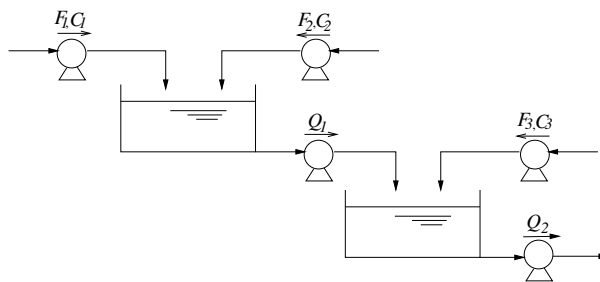


FIGURE 4.13 – Réseau de cuves de mélange

**Exercice 4.3. Un réseau de cuves de mélange**

Le système représenté à la figure 4.13 est conçu pour mélanger trois substances  $X_1, X_2, X_3$  dont les concentrations d'alimentation sont notées  $C_1, C_2, C_3$ . Les



volumes contenus dans les deux cuves sont notés  $V_1, V_2$ . Les débits volumétriques des pompes sont notés  $Q_1, Q_2, F_1, F_2, F_3$ .

1. Etablir un modèle d'état du système avec les variables d'entrée suivantes :  
 $u_1 = Q_1/V_1, u_2 = Q_2/V_2, u_3 = C_1, u_4 = C_2, u_5 = C_3$ . Les débits  $F_i$ ,  
 $i = 1, \dots, 3$ , sont supposés constants.
2. Justifier la forme des variables d'entrées  $u_1$  et  $u_2$ . □

#### Exercice 4.4. *Modèle linéaire à compartiments*

Caractériser la structure du graphe d'un modèle linéaire à compartiments dont la matrice  $A$  est :

1. bidiagonale
2. tridiagonale
3. triangulaire inférieure □

#### Exercice 4.5. *Modèle du procédé de distillation*

Déterminer la matrice  $A(x, u)$  du modèle du procédé de distillation. □

#### Exercice 4.6. *Des réservoirs communicants*

Un système à deux réservoirs communicants est représenté à la figure 4.14. Le liquide s'écoule librement entre les deux réservoirs et vers l'extérieur sous l'action de la pression hydrostatique.

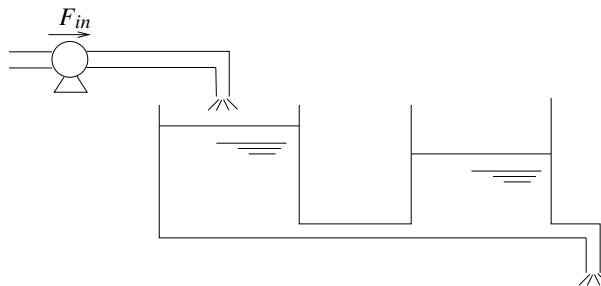


FIGURE 4.14 – Réservoirs communicants

1. Etablir un modèle d'état du système. Le débit fourni par la pompe d'alimentation est la seule variable d'entrée du système.
2. Montrer qu'il s'agit d'un système à compartiments. Dessiner le graphe associé. Expliciter les flux entre compartiments. □