

Chapitre 7

Equilibres et invariants

Dans les chapitres 7, 8 et 9, nous allons étudier le comportement des systèmes dynamiques $\dot{x} = f(x, u)$ lorsque les variables d'entrée sont constantes. Dans le présent chapitre nous examinons tout d'abord les conditions d'existence d'états d'équilibre et de sous ensembles invariants dans l'espace d'état.

7.1. Equilibres : définition et exemples

Définition 7.1. *Equilibre*

Le couple (\bar{x}, \bar{u}) est un *équilibre* du système $\dot{x} = f(x, u)$ si

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0. \quad \square$$

Cette définition implique que si les signaux d'entrée sont constants à partir de l'instant t_0 :

$$u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq t_0$$

et si l'état du système est égal à \bar{x} à l'instant t_0 :

$$x(t_0) = \bar{x}$$

alors l'état du système reste constant et égal à \bar{x} à tous les instants ultérieurs :

$$x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq t_0.$$

Dans certains ouvrages, en particulier ceux relatifs à l'ingénierie des procédés, un équilibre s'appelle aussi un *régime permanent*. De même, l'état \bar{x} d'un équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est parfois appelé point d'équilibre ou point *fixe* ou encore point *stationnaire*.

Définition 7.2. Equilibre isolé

Le couple (\bar{x}, \bar{u}) est un équilibre *isolé* si, pour \bar{u} fixé, il existe un voisinage de \bar{x} dans \mathbb{R}^n ne contenant aucun autre vecteur \tilde{x} tel que $f(\tilde{x}, \bar{u}) = 0$. \square

Les exemples qui suivent illustrent la grande diversité des configurations d'équilibre possibles à partir de modèles simples de systèmes caractérisés par des équations de bilan.

Exemple 7.3. Réservoir à écoulement libre

On considère un réservoir de section constante alimenté par une pompe dont le débit volumétrique u est la variable d'entrée tandis que l'écoulement est libre (Fig.7.1).

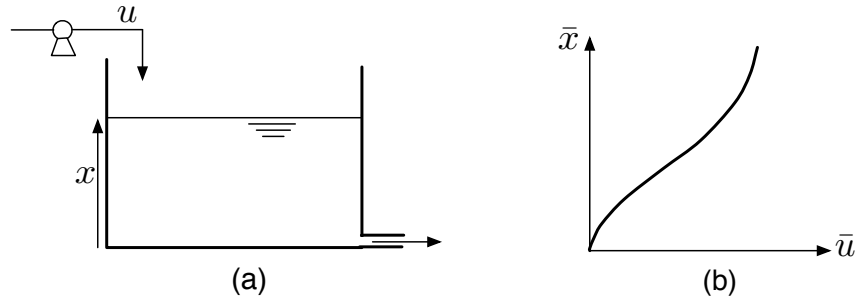


FIGURE 7.1 – (a) Réservoir à écoulement libre (b) Diagramme d'équilibre

Le modèle d'état de ce système a été établi au chapitre 4 :

$$\dot{x} = -\frac{kx\sqrt{x}}{S\beta + x} + u,$$

où x représente le volume du liquide contenu dans le réservoir. Les équilibres du système vérifient la relation $k\bar{x}\sqrt{\bar{x}} = \bar{u}(S\beta + \bar{x})$ dont le graphe dans \mathbb{R}^2 porte le nom de *diagramme d'équilibre* (Fig. 7.1). On observe sur ce graphe qu'il y a un état d'équilibre \bar{x} distinct pour chaque valeur distincte de $\bar{u} \geq 0$ et que tous les équilibres sont isolés. \square

Exemple 7.4. Réservoir à écoulement forcé

Considérons maintenant le même réservoir que précédemment mais en supposant que l'écoulement est forcé par une pompe dont le débit volumétrique F_0 est constant (Fig. 7.2). Le modèle d'état devient alors :

$$\dot{x} = -F_0 + u.$$

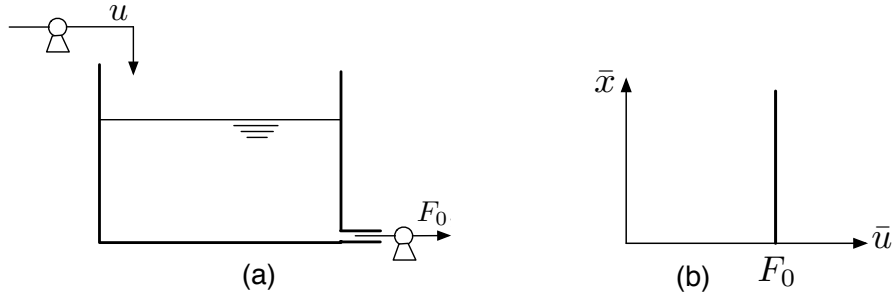


FIGURE 7.2 – (a) Réservoir à écoulement forcé. (b) Diagramme d'équilibres.

Comme dans l'exemple précédent, le système est à l'équilibre lorsque le débit d'entrée compense exactement le débit de sortie :

$$\bar{u} = F_0.$$

Cette fois, il n'y a qu'une seule valeur possible de l'entrée u qui donne lieu à un équilibre. Par contre, l'état d'équilibre \bar{x} peut prendre n'importe quelle valeur positive. Le diagramme d'équilibre est illustré à la figure 7.2. On observe que les équilibres ne sont pas isolés puisque \bar{x} est indéterminé. \square

Exemple 7.5. Cuve de mélange à volume constant

Considérons une cuve de mélange de volume V constant et parfaitement mélangée (Fig.7.3(a)). Le débit d'alimentation transporte une substance en solution

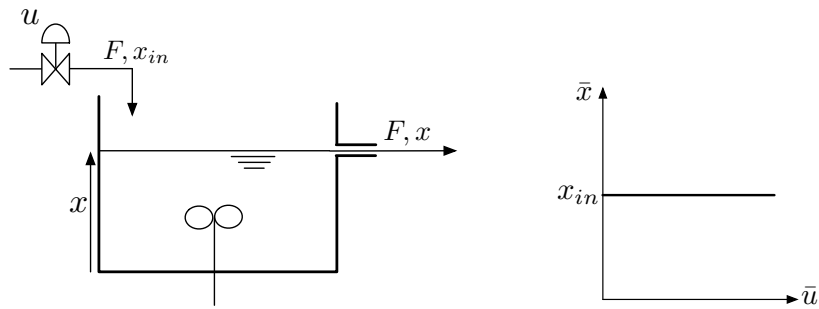


FIGURE 7.3 – (a) Cuve de mélange à volume constant. (b) Diagramme d'équilibres.

(par exemple un colorant) de concentration x_{in} . Le débit d'alimentation F est contrôlé par une vanne de caractéristique :

$$F = ku + b \quad k > 0, \quad b > 0,$$

où u désigne l'ouverture de la vanne.

L'état du système est la concentration x en colorant dans la cuve et le modèle d'état s'écrit :

$$\dot{x} = (x_{in} - x) \frac{ku + b}{V}.$$

Le système est à l'équilibre lorsque le débit massique de colorant à l'entrée compense exactement le débit massique à la sortie :

$$\frac{k\bar{u} + b}{V} x_{in} = \frac{k\bar{u} + b}{V} \bar{x},$$

ce qui implique $\bar{x} = x_{in}$. Le diagramme d'équilibre illustré à la figure 7.3(b) montre que l'état d'équilibre est fixé et isolé mais que l'entrée constante correspondant à cet état d'équilibre est indéterminée. \square

Exemple 7.6. Cuve de mélange à écoulement forcé

Jusqu'à présent, nous avons considéré des exemples où le vecteur d'état est de dimension 1. Dans les systèmes de dimension supérieure, les diverses configurations décrites plus haut peuvent coexister, comme nous l'illustrons maintenant en prenant comme exemple une cuve de mélange à écoulement forcé (Fig. 7.4). Le modèle

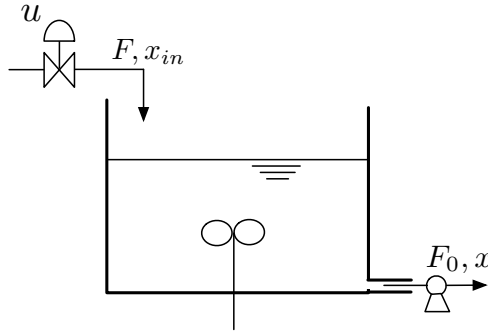


FIGURE 7.4 – Cuve de mélange à écoulement forcé

d'état de ce système, en notant x_1 le volume de la cuve et x_2 la concentration en colorant dans celle-ci, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -F_0 + ku + b, \\ \dot{x}_2 &= (x_{in} - x_2) \frac{ku + b}{x_1}. \end{aligned}$$

Dans ce cas-ci, le diagramme d'équilibre se représente en dimension 3 (Fig. 7.5) et on constate qu'il y a une seule valeur de l'entrée qui donne lieu à un équilibre,

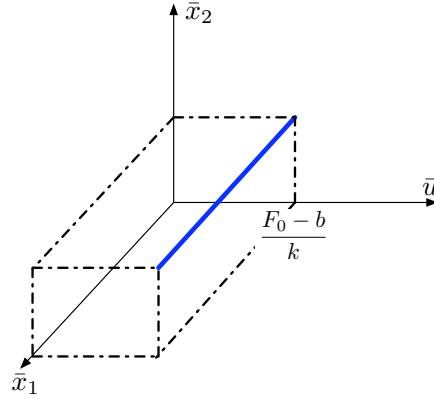


FIGURE 7.5 – Diagramme d'équilibre pour la cuve de mélange à écoulement forcé

$\bar{u} = (F_0 - b)/k$, et que pour cette valeur \bar{u} , le volume d'équilibre \bar{x}_1 est indéterminé alors que la concentration à l'équilibre vaut $\bar{x}_2 = x_{in}$. \square

Les exemples de dimension 1 ou 2 considérés jusqu'à présent ont illustré des situations où

- soit le système possède un équilibre isolé pour chaque valeur de l'entrée \bar{u} ,
- soit le système possède une infinité d'équilibres non isolés correspondant à une valeur précise de \bar{u} .

Pour les systèmes non-linéaires, d'autres configurations sont possibles. En particulier, on peut observer plusieurs équilibres isolés correspondant à une même valeur de \bar{u} comme cela est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 7.7. Réacteur chimique

Considérons un réacteur chimique continu parfaitement mélangé dans lequel se produit une réaction exothermique irréversible $A \rightarrow B$. Le modèle d'état s'écrit comme suit (voir Chapitres 1 et 5) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_A &= -kx_A e^{-\frac{\alpha}{T}} + D(x_A^{in} - x_A), \\ \dot{x}_B &= kx_A e^{-\frac{\alpha}{T}} - Dx_B, \\ \dot{T} &= h k x_A e^{-\frac{\alpha}{T}} - qT + u,\end{aligned}$$

où x_A et x_A^{in} sont les concentrations en réactif A dans le réacteur et dans l'alimentation, x_B est la concentration en produit B , D est le débit volumétrique supposé constant d'alimentation et de sous-tirage, T est la température et u est l'apport calorifique par unité de temps.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par les équations

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= \frac{Dx_A^{in}}{ke^{-\alpha/\bar{T}} + D}, \\ \bar{x}_B &= \frac{k\bar{x}_A e^{-\alpha/\bar{T}}}{D}, \\ \bar{T} &= \frac{1}{q} \left(\frac{Dx_A^{in} h k e^{-\alpha/\bar{T}}}{ke^{-\alpha/\bar{T}} + D} + \bar{u} \right).\end{aligned}$$

La troisième équation permet de déterminer \bar{T} en fonction de \bar{u} . Les deux premières permettent alors de déduire de \bar{T} des valeurs d'équilibre pour \bar{x}_A et \bar{x}_B . Le

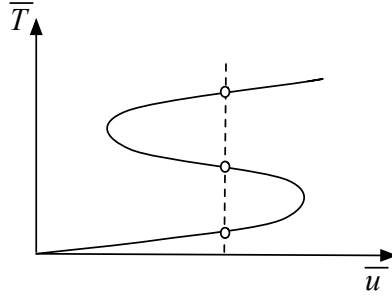


FIGURE 7.6 – Diagramme d'équilibre pour un réacteur chimique simple

diagramme d'équilibre représentant \bar{T} en fonction de \bar{u} est illustré à la figure 7.6. Suivant les valeurs de \bar{u} , on constate donc qu'il existe un, deux ou trois équilibres isolés. \square

7.2. Équilibres des systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

pour lequel l'équation définissant les équilibres devient

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0.$$

Les équilibres d'un système linéaire sont complètement caractérisés par le théorème suivant.

Théorème 7.8.

- Si la matrice A est régulière, alors pour tout \bar{u} , le couple $(-A^{-1}B\bar{u}, \bar{u})$ est un équilibre isolé.
- Si la matrice A est singulière, le système (7.1) a une infinité d'équilibres (non isolés) pour autant que $B\bar{u} \in \text{Im}A$. Ces équilibres sont la variété affine solution du système $A\bar{x} = -B\bar{u}$. Par contre, pour tout \bar{u} tel que $B\bar{u} \notin \text{Im}A$, le système (7.1) ne possède pas d'équilibre. \square

Pour les systèmes dynamiques linéaires, on ne peut donc pas avoir plusieurs équilibres isolés correspondant à la même valeur de l'entrée \bar{u} . Remarquons enfin que le couple $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ est toujours un équilibre pour un système dynamique linéaire de la forme (7.1).

Exemple 7.9. Modèles linéaires de machines DC

Plusieurs modèles de machines à courant continu (moteurs et génératrices) ont été présentés à la section 3.6. Sous les hypothèses générales de frottement visqueux linéaire et de non-saturation des flux, certains de ces modèles sont linéaires. Nous examinons ci-dessous leur configuration d'équilibre.

Génératrice DC commandée par le stator

On considère le modèle d'état d'une génératrice à courant continu tournant à vitesse ω constante. En notant $x_1 = I_s$, le courant statorique, $x_2 = I_r$, le courant rotorique et $u = v_s$ la tension aux bornes du circuit statorique, le modèle d'état est linéaire et s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ K_e\omega & -\frac{R_r + R_L}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

La matrice A de ce système linéaire est inversible et la génératrice possède donc un état d'équilibre isolé pour chaque valeur de la tension d'entrée \bar{u} :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{L_s}{R_s} \bar{u} \\ \bar{x}_2 &= \frac{L_r}{R_r + R_L} \frac{L_s}{R_s} K_e \omega \bar{u} \end{aligned}$$

Moteur DC commandé par le rotor

Avec comme variables d'état pour ce système $x_1 = \theta$, la position angulaire du rotor, $x_2 = \dot{\theta} = \omega$, la vitesse de rotation et $x_3 = I_r$, le courant rotorique, on

obtient le modèle suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_m I_s}{J} \\ 0 & -\frac{K_e I_s}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

où u_1 est le couple résistant et u_2 la tension de commande de l'induit. On observe que :

- la matrice d'état A du système est singulière,
- $B\bar{u} = (0 \quad \bar{u}_2/J \quad \bar{u}_1/L_r)^T \notin \text{Im}A$ sauf si $\bar{u}_1/\bar{u}_2 = -R_r/K_m I_s$ ou si $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$.

Le premier cas correspond à une tension de commande rotorique qui crée un couple moteur compensant exactement le couple résistant. La vitesse de rotation est alors nulle et la position angulaire du rotor est indéterminée. La valeur d'équilibre du courant rotorique est donnée par $\bar{x}_3 = \bar{I}_r = \bar{u}_2/K_m I_s$. Dans le deuxième cas, les équilibres sont de la forme $\bar{x}_1 = \bar{\theta}$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$, c.à.d. que le moteur est à l'arrêt avec le rotor dans une position angulaire quelconque.

On peut examiner aussi les équilibres du sous-système dont les états sont la vitesse ω et le courant I_r :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m I_s}{J} \\ -\frac{K_e I_s}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'état de ce système est inversible (toutes les constantes sont positives et le déterminant ne s'annule donc pas) et à chaque valeur du vecteur d'entrée \bar{u} correspondra une valeur d'équilibre du vecteur d'état $(\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)^T$. Cette situation d'équilibre, qui n'est en rien contradictoire avec la précédente, correspond au cas d'un moteur DC qui entraîne une charge en tournant à vitesse constante. \square

7.3. Invariants

La notion d'invariant que nous allons définir dans cette section est une généralisation de la notion d'équilibre.

Définition 7.10. Invariant

Le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un invariant du système dynamique $\dot{x} = f(x, u)$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) \in \mathcal{X} \\ u(t) \in U \quad \forall t \geq t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) \text{ existe} \\ x(t) \in \mathcal{X} \end{array} \right\} \forall t \geq t_0 \quad \square$$

Cette définition signifie donc que si l'état du système se trouve dans \mathcal{X} à un instant initial, il y restera à tous les instants ultérieurs tant que le signal d'entrée $u(t)$ sera lui-même maintenu dans U .

Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples d'invariants dans les chapitres précédents. L'exemple le plus simple est l'ensemble des équilibres d'un système correspondant à une entrée \bar{u} constante. Dans ce cas, le sous-ensemble $U = \{\bar{u}\}$ est réduit à un singleton tandis que \mathcal{X} contient le ou les états d'équilibres \bar{x} correspondants.

Un autre exemple typique est l'*orthant positif* ($\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n$) \times ($U \subset \mathbb{R}^m$) qui est, par définition, un invariant pour les systèmes positifs (voir Définition 4.3 et Théorème 4.4.).

Il y a diverses manières de caractériser les invariants d'un système dynamique selon la forme particulière que prend le sous-ensemble \mathcal{X} . Nous allons présenter deux caractérisations remarquables : dans la première \mathcal{X} est un ouvert de \mathbb{R}^n , dans la seconde \mathcal{X} est une hypersurface dans \mathbb{R}^n .

• **\mathcal{X} est un ouvert dans \mathbb{R}^n**

Soit \mathcal{X} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n dont la frontière $\partial\mathcal{X}$ est suffisamment régulière. Si en tout point y de la frontière $\partial\mathcal{X}$, le vecteur $f(y, v)$ pointe vers l'intérieur de \mathcal{X} pour tout $v \in U$, alors le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ est un invariant du système $\dot{x} = f(x, u)$.

Cette caractérisation d'un invariant sera illustrée au chapitre 8 (section 8.4).

• **\mathcal{X} est une hypersurface de niveau dans \mathbb{R}^n**

On appelle *intégrale première* une fonction $z = h(x)$ de classe C^2 telle que :

$$\frac{\partial h}{\partial x} f(x, u) = 0 \quad \forall u \in U. \quad (7.1)$$

On définit le sous-ensemble \mathcal{X} comme suit :

$$\mathcal{X} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = c\}$$

avec c constante réelle quelconque. Cet ensemble \mathcal{X} est une hypersurface dans \mathbb{R}^n . Comme la condition (7.1) implique que la fonction $z = h(x)$ est constante le long des trajectoires, il est évident que le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ est un invariant du système $\dot{x} = f(x, u)$. Les *invariants réactionnels* en constituent une illustration typique.

Exemple 7.11. Les invariants réactionnels

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 5, le modèle d'état d'un réacteur continu parfaitement mélangé s'écrit comme suit :

$$\dot{x} = Cr(x) + u(x^{in} - x) \quad (7.2)$$

où x est la composition du milieu réactionnel, u le débit d'alimentation, x^{in} la composition (supposée constante) de l'alimentation, C est la matrice stoechiométrique et $r(x)$ est le vecteur des cinétiques de réaction.

Le débit u est positif et borné par la capacité maximale de la pompe d'alimentation u_{\max} , de sorte que nous définissons U comme l'intervalle fermé :

$$U = [0, u_{\max}]$$

D'autre part, le sous-ensemble \mathcal{X} est défini comme suit :

$$\mathcal{X} = \{x : x \in \mathbb{R}_+^n, \quad Lx = Lx^{in}\}$$

où L est une matrice $(n-p) \times n$ telle que $LC = 0$. En d'autres termes, les lignes de L forment une base du noyau de la transposée de la matrice stoechiométrique C .

Le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ ainsi défini constitue un invariant du système (7.2). Pour le vérifier, nous considérons la transformation linéaire partielle d'état :

$$z = Lx$$

dont nous calculons l'évolution le long des trajectoires du système :

$$\dot{z} = LCr(x) + u(Lx^{in} - Lx) = u(Lx^{in} - Lx) \quad \text{car } LC = 0$$

Selon la définition de \mathcal{X} , on observe immédiatement que, si $Lx(t_0) = Lx^{in}$, alors $\dot{z} = 0$ le long des trajectoires du système et donc $Lx(t) = Lx^{in} \quad \forall t \geq t_0$, et ceci indépendamment du signal d'entrée $u(t)$.

D'autre part, le système (7.2) est un système positif et donc $x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq t_0$ si $x(t_0) \in \mathbb{R}_+^n$ et si $u(t) \in U \quad \forall t \geq t_0$.

Les invariants définis de cette manière portent le nom d'invariants réactionnels ou encore d'invariants chimiques dans la littérature. \square

7.4. Exercices

Exercice 7.1. Un relais électromagnétique

Déterminer les équilibres du modèle d'état d'un relais électromagnétique donné au chapitre 3, exemple 3.2 (voir aussi l'exercice 6.2). \square

Exercice 7.2. Génératrice à courant continu

On considère le modèle d'une génératrice à courant continu (voir chapitre 3, section 3.6) débitant sur une charge résistive avec un frottement visqueux linéaire.

1. Calculer les équilibres en fonction des entrées \bar{u}_1 et \bar{u}_2

- Déterminer les points de fonctionnement optimaux qui maximisent le courant débité par la génératrice. \square

Exercice 7.3. Une boucle à asservissement de phase

Une boucle à asservissement de phase (phase-locked loop) utilisée dans les réseaux de communication est décrite par l'équation

$$\ddot{y} + (a + b \cos y)\dot{y} + u \sin y = 0$$

avec $a > b > 0$ et $u(t) > 0 \forall t$.

- Mettre le système sous forme d'un modèle d'état.
- Déterminer les équilibres.

Exercice 7.4. Un bateau

Déterminer les équilibres du modèle d'état du bateau de l'exercice 2.7. Quel est le sens physique de ces équilibres ? \square

Exercice 7.5. Un broyeur industriel

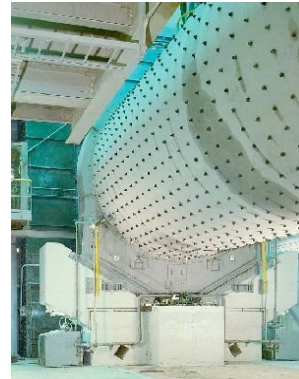
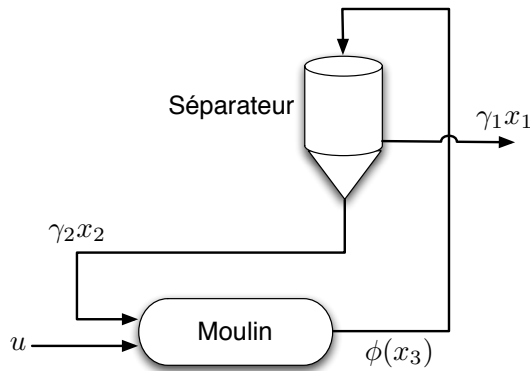


FIGURE 7.7 – Circuit de broyage - Photo d'un broyeur industriel

Le fonctionnement d'un circuit de broyage industriel (fig. 7.7) est décrit par le modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma_1 x_1 + (1 - \alpha)\phi(x_3), \\ \dot{x}_2 &= -\gamma_2 x_2 + \alpha\phi(x_3), \\ \dot{x}_3 &= \gamma_2 x_2 - \phi(x_3) + u.\end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

- x_1 = quantité de produit fini dans le séparateur ;
- x_2 = quantité de matière recyclée dans le séparateur ;
- x_3 = quantité de matière dans le broyeur ;
- u = débit d'alimentation du broyeur.

Le paramètre α est la constante caractéristique du séparateur. ($0 < \alpha < 1$). La fonction de broyage $\phi(x_3)$ est de la forme suivante :

$$\phi(x_3) = k_1 x_3 e^{-k_2 x_3}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes positives.

1. Montrer qu'il s'agit d'un système à compartiments et donner le graphe du système.
2. Déterminer les équilibres du système.
3. L'ensemble décrit par les inégalités suivantes caractérise une situation de bourrage de l'installation. Montrer qu'il s'agit d'un invariant du système.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0, \\ (1 - \alpha)\phi(x_3) &\leq \gamma_1 x_1 < \bar{u}, \\ \alpha\phi(x_3) &\leq \gamma_2 x_2, \\ \frac{\partial\phi(x_3)}{\partial x_3} &< 0. \end{aligned}$$

□

Exercice 7.6. Un réacteur biochimique

On considère le modèle d'état d'un réacteur biochimique de l'exercice 6.2.

1. Déterminer les équilibres du système et esquisser les diagrammes d'équilibre.
2. Déterminer les invariants réactionnels du système.
3. Mêmes questions si la réaction est réversible.

□

Exercice 7.7. Dynamique d'une infection virale

La dynamique d'une infection virale avec actions lytique et non-lytique d'immunisation est décrite par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda - dx_1 - \frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3} - ax_2 - px_2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= cx_2 - bx_3. \end{aligned}$$

Dans ces équations, x_1 , x_2 et x_3 sont respectivement les quantités de cellules saines, infectées et immunes. Les cellules infectées produisent les particules virales. λ est le taux de production des cellules saines et d leur taux de mortalité. Les composants lytiques de l'activité anti-virale tuent les cellules infectées tandis que les composants non-lytique inhibent la réplication des particules virales. Les cellules infectées sont tuées à la vitesse px_3 où p représente l'intensité de l'activité anti-virale lytique. La production des cellules infectées est représentée par le terme

$$\frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3}$$

où qx_3 représente l'intensité d'inhibition de la réplication par l'activité antivirale non-lytique. Le taux de mortalité des cellules infectées est a et le taux de mortalité des cellules immunes est b . Enfin cx_2 est le taux de production des cellules immunes.

1. Montrer que le modèle d'état est un système réactionnel.
2. Montrer que le modèle d'état est équivalent à un système à compartiments.
3. Déterminer les équilibres du système dans l'orthant positif.

Exercice 7.8. *Système mécanique*

On considère le modèle d'un système mécanique à un degré de liberté :

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + r \sin \theta = 0$$

1. Ecrire le modèle d'état du système ($x_1 = \theta$).
2. Déterminer les équilibres.
3. Montrer que, sous la condition $c^2 \geq 4r$, existe un invariant borné (dont l'intérieur est non vide) dans l'orthant $\{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$. □