

Chapitre 8

Systèmes plans

Dans ce chapitre, nous étudions en détail le comportement des trajectoires des systèmes dynamiques de dimension 2 (appelés aussi systèmes plans) lorsque l'entrée $u(t)$ est constante : $u(t) = \bar{u}$. Ces systèmes sont décrits par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \bar{u}), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \bar{u}).\end{aligned}$$

Une importante motivation de cette restriction aux systèmes plans est d'illustrer facilement les résultats obtenus en représentant les orbites dans le *plan de phase*, c.à.d. le plan des variables d'état x_1 et x_2 . En outre, les systèmes plans permettent d'illustrer la plupart des comportements caractéristiques qui différencient les systèmes non linéaires des systèmes linéaires.

Nous étudierons successivement les trajectoires des systèmes linéaires, puis le comportement des trajectoires des systèmes non linéaires au voisinage des points d'équilibre. Ensuite, nous nous intéresserons aux trajectoires périodiques et aux cycles limites, pour conclure par un aperçu de la théorie des bifurcations.

8.1. Systèmes linéaires plans

Considérons les systèmes linéaires plans lorsque l'entrée $u(t)$ est constante : $u(t) = \bar{u}$. Ces systèmes sont représentés par l'équation

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u},$$

où A est une matrice 2×2 . Nous supposons qu'il existe au moins un état d'équilibre \bar{x} correspondant à \bar{u} .

Par une transformation d'état appropriée, $z = M^{-1}(x - \bar{x})$, on se ramène au système

$$\dot{z} = A'z$$

où

$$A' = M^{-1}AM.$$

Les valeurs propres de la matrice A' sont celles de la matrice A et elle possède l'une des trois formes suivantes :

a.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a deux valeurs propres réelles distinctes ou une valeur propre réelle double de multiplicité géométrique 2.

b.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a une valeur propre réelle double de multiplicité géométrique égale à un. C'est la "forme de Jordan" associée à A .

c.

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm \beta i$.

Dans ces nouvelles coordonnées, les trajectoires se calculent facilement et sont décrites par les équations suivantes :

a.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda t} + tz_2(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\alpha t}(z_1(0) \cos \beta t + z_2(0) \sin \beta t), \\ z_2(t) &= e^{\alpha t}(z_2(0) \cos \beta t - z_1(0) \sin \beta t). \end{aligned}$$

Les tableaux 8.1 à 8.3 illustrent les orbites en fonction de l'une de ces trois formes et en fonction du signe des valeurs propres. Ces orbites sont représentées dans le plan (z_1, z_2) et dans le plan (x_1, x_2) , centré au point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Dans ce deuxième cas, les directions privilégiées dans les figures correspondent aux vecteurs propres de la matrice A .

Remarques 8.1.

1. Dans les deux premiers cas repris dans le tableau 8.1, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, les trajectoires sont rectilignes et peuvent donc être représentées par un faisceau de droites issu de l'origine.
2. Dans le cas où l'une des deux valeurs propres est nulle, l'équilibre n'est pas isolé. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre nulle définit une droite de points d'équilibre et toutes les trajectoires sont rectilignes et convergent vers ou sont issues d'un point de cette droite d'équilibres.

Définition 8.2. Lorsque l'équilibre est tel que les trajectoires convergent vers cet équilibre, on dira qu'il s'agit d'un équilibre attractif. ■

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 \\ &= x^2 - \text{tr}(A)x + \det A. \end{aligned}$$

Observons que pour déterminer l'allure des trajectoires, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ces valeurs propres. La figure 8.1 caractérise la nature de l'équilibre (et dès lors l'allure des trajectoires) en fonction des deux coefficients du polynôme caractéristique respectivement égaux à l'opposé de la somme et au produit des valeurs propres.

On peut se demander dans quelle mesure la nature des trajectoires décrites ci-dessus est sensible à des perturbations du système. Pour répondre à cette question, considérons un système linéaire nominal $\dot{x} = Ax + Bu$ et une perturbation du système nominal de la forme $\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu$. Si la matrice A possède des valeurs propres *distinctes*, on peut montrer que celles-ci dépendent continûment des coefficients de A , ce qui signifie que pour tout nombre positif ϵ , il existe un nombre positif δ tel que si chacun des coefficients de la perturbation ΔA est plus petit que δ , les valeurs propres de la matrice perturbée $A + \Delta A$ seront à l'intérieur de boules de rayon ϵ centrées en les valeurs propres de A . Donc, toute valeur propre initialement à l'intérieur du demi-plan de gauche ($\text{Re}(\lambda) < 0$) ou du demi-plan de droite ($\text{Re}(\lambda) > 0$) restera dans le même demi-plan pour des perturbations ΔA suffisamment petites et, qualitativement, les trajectoires du système perturbé seront semblables à celles du système nominal : un foyer attractif reste un foyer

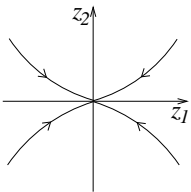
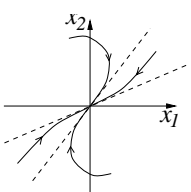
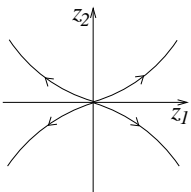
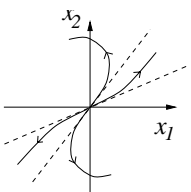
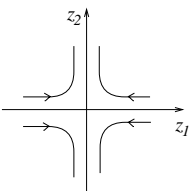
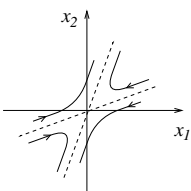
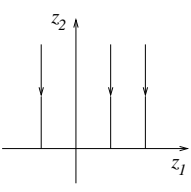
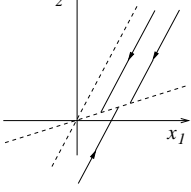
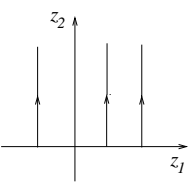
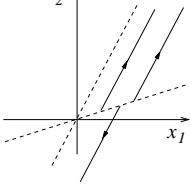
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Noeud attractif			$\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$
Noeud répulsif			$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$
Col			$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Equilibre non isolé, attractif			$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 < 0$
Equilibre non isolé, répulsif			$\lambda_1 = 0,$ $\lambda_2 > 0$

TABLE 8.1 – Orbites des systèmes linéaires plans :
cas a.

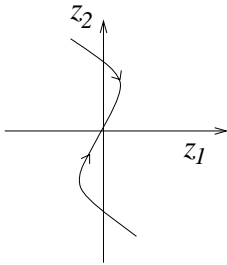
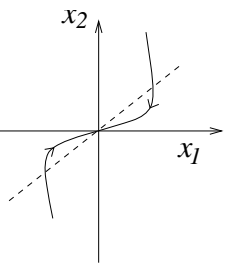
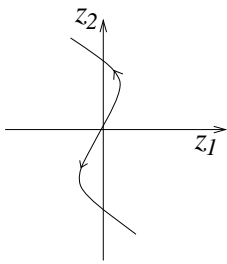
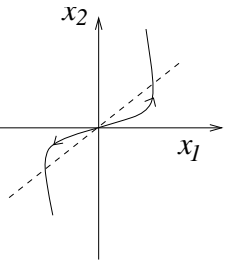
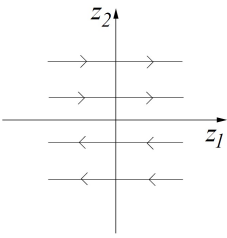
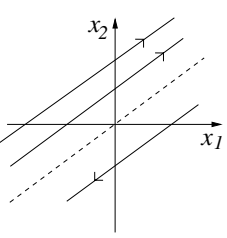
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Noeud dégénéré attractif			$\lambda = 0$ (Jordan)
Noeud dégénéré répulsif			$\lambda > 0$ (Jordan)
Equilibre non-isolé			$\lambda = 0$ (Jordan)

TABLE 8.2 – Orbites des systèmes linéaires plans :
cas **b**.

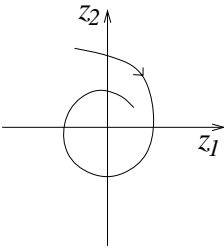
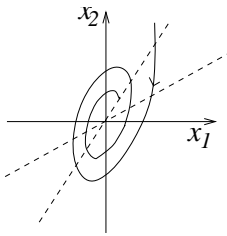
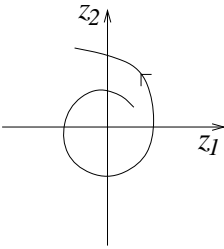
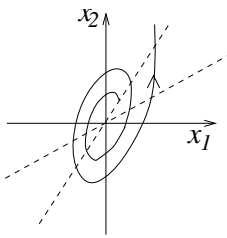
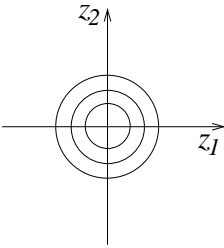
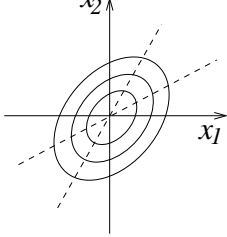
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Foyer attractif			$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha < 0, \beta \neq 0$
Foyer répulsif			$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha > 0, \beta \neq 0$
Centre			$\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ $\beta \neq 0$

TABLE 8.3 – Orbites des systèmes linéaires plans :
cas **c**.

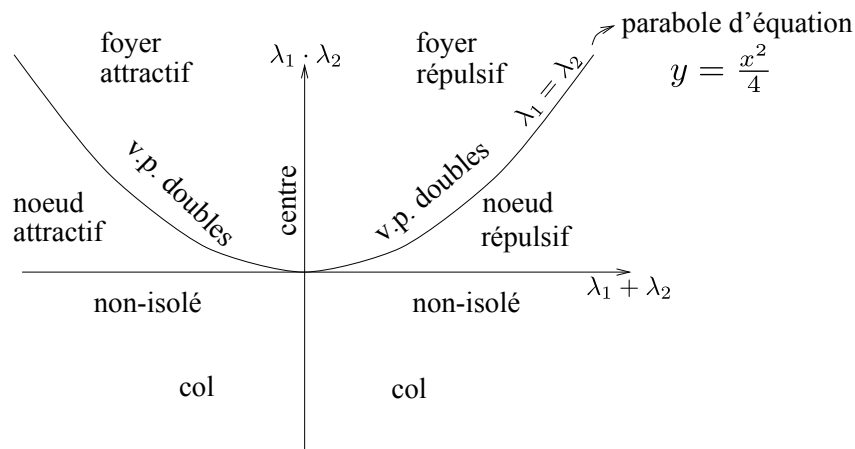


FIGURE 8.1 – térisation des équilibres en fonction de la somme et du produit des valeurs propres

attractif, un noeud répulsif reste un noeud répulsif, un col reste un col,... On dit dans ce cas que de tels systèmes (ou de tels équilibres) sont *structurellement stables*.

Il n'en va pas de même dans le cas d'un équilibre de type *centre*, auquel correspondent des trajectoires périodiques elliptiques et des valeurs propres imaginaires pures. Dans ce cas en effet, la moindre perturbation de la matrice A peut faire en sorte que les valeurs propres quittent l'axe imaginaire et que les trajectoires correspondantes deviennent un foyer attractif ou répulsif. Un système linéaire auquel correspond un équilibre de type *centre* n'est donc **pas** structurellement stable.

Le cas de systèmes linéaires ayant une ou deux valeurs propres nulles conduit également à un changement qualitatif des trajectoires sous l'effet de perturbations arbitrairement petites. Lorsque le système possède une valeur propre double différente de 0, de petites perturbations peuvent conduire à des valeurs propres réelles ou complexes conjuguées, mais la localisation dans l'un ou l'autre des demi-plans ne sera pas modifiée. Un noeud attractif (répulsif) dégénéré peut donc se transformer en noeud attractif (répulsif) ou en foyer attractif (répulsif).

L'analyse précédente montre bien que c'est l'axe imaginaire qui peut poser problème. On introduit dès lors la définition suivante.

Définition 8.3. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle non nulle, le système $\dot{x} = Ax$ (ou le point d'équilibre) est dit hyperbolique. \square

Il résulte de ce qui précède qu'un système hyperbolique est structurellement stable et que les trajectoires resteront qualitativement semblables pour de petites perturbations. Dans le cas d'une valeur propre double différente de zéro, de petites perturbations peuvent engendrer soit un foyer, soit un noeud ; mais le caractère

attractif ou répulsif de l'équilibre sera lui de toute façon préservé. Ces considérations vont être de grande importance pour l'analyse des systèmes non linéaires.

8.2. Linéarisation des systèmes non linéaires

Les orbites illustrées dans les tableaux de la section précédente ne sont pas seulement valables au voisinage du point d'équilibre (ramené à l'origine). On a bien caractérisé grâce à ces tableaux l'ensemble des orbites possibles des systèmes linéaires plans, quelle que soit la condition initiale. Cette observation constitue une différence fondamentale entre systèmes linéaires et non linéaires. En effet, on a vu au chapitre précédent que les systèmes non-linéaires peuvent présenter plusieurs équilibres isolés distincts pour une même valeur de l'entrée \bar{u} . Ceci implique que, contrairement au cas des systèmes linéaires, le comportement des orbites au voisinage d'un équilibre gardera le plus souvent un *caractère local* et ne pourra nullement être étendu à l'ensemble du plan de phase. Moyennant cette restriction, un résultat important permet cependant d'étendre aux systèmes non linéaires une partie de l'analyse que nous venons de développer pour les systèmes linéaires.

Soit le système dynamique décrit par

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \bar{u}), \quad (8.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \bar{u}). \quad (8.2)$$

ou, sous forme condensée,

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}), \quad (8.3)$$

pour lequel on suppose l'existence d'un équilibre (\bar{x}, \bar{u}) tel que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. On suppose en outre que la fonction $f(x, \bar{u})$ est suffisamment régulière dans le voisinage de cet équilibre pour y admettre un développement de Taylor convergent :

$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots$$

L'*approximation linéaire* de ce système au voisinage de l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) , obtenue en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement de Taylor de $f(x, \bar{u})$ autour de (\bar{x}, \bar{u}) , est donnée par

$$\dot{\tilde{x}} = \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}} \tilde{x} \quad (8.4)$$

où $\tilde{x} = x - \bar{x}$. Notons $A = \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}}$, la matrice Jacobienne de f à l'équilibre. On peut alors généraliser la définition 8.3 comme suit :

Définition 8.4. *Equilibre hyperbolique*

L'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) du système non linéaire (8.3) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle non nulle ($Re(\lambda_i(A)) \neq 0, \forall i$). \square

Il doit être clair que c'est bien l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) qui est (ou qui n'est pas) hyperbolique, et non le système non linéaire (8.3). En effet, ce système peut avoir plusieurs équilibres isolés pour une même valeur \bar{u} , certains étant hyperboliques et d'autres non. Dans quelle mesure l'étude de l'approximation linéaire d'un système non-linéaire au voisinage d'un équilibre permet-elle d'en déduire le comportement du système non-linéaire ? Pour préciser ce que l'on entend par comportement, nous voulons pouvoir comparer les trajectoires et introduisons dès lors la définition suivante.

Définition 8.5. Les trajectoires (ou les orbites) de deux systèmes dynamiques sont *topologiquement équivalentes* s'il existe un *homéomorphisme* (une bijection bicontinue) qui permet de passer d'une trajectoire du premier système à une trajectoire du second. \square

Théorème 8.6. Hartman-Grobman, 1959

Si l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est hyperbolique, alors les trajectoires du système non linéaire (8.3) dans un voisinage de l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) sont topologiquement équivalentes à celles de l'approximation linéaire (8.4). Plus précisément, il existe un voisinage X de \bar{x} , un voisinage \tilde{X} de 0 et un homéomorphisme $h : X \rightarrow \tilde{X}$ avec $h(\bar{x}) = 0$ tel que si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire du système non linéaire (8.3) contenue dans X (pour un certain intervalle de temps), alors $t \mapsto h(x(t))$ est une trajectoire du système linéaire (8.4). \square

Des trajectoires topologiquement équivalentes ont la même allure. On pourra donc parler de noeud ou de foyer attractif ou répulsif, ou encore de col, pour les équilibres de systèmes non linéaires, en étudiant les valeurs propres de la matrice de l'approximation linéaire, mais **pas** de centre.

Remarques 8.7.

1. L'intérêt de ce théorème est évident. Sa limitation principale, à savoir son caractère local, ne l'est pas moins. En particulier, ce théorème ne fournit aucune indication sur la taille du bassin d'attraction d'un équilibre attractif.
2. Dans le cas d'un équilibre non hyperbolique, ce sont les termes d'ordre supérieur, ceux-là même qui ont été négligés, qui détermineront localement l'allure des trajectoires.
3. Les outils développés jusqu'ici dans ce chapitre ne sont pas propres aux systèmes plans. Classification des systèmes linéaires, linéarisation, théorème de Hartman-Grobman se généralisent sans problème en toute dimension.
4. Dans la linéarisation (8.4), on garde $u = \bar{u}$ constant. On pourrait également linéariser f autour de $u = \bar{u}$ pour obtenir un linéarisé de type $\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$. Tant que $\tilde{u} = u - \bar{u}$ reste suffisamment petit, et pour un intervalle de temps suffisamment petit, les trajectoires des systèmes non linéaire et linéarisé resteront proches, mais il n'existe pas de variante simple du théorème de Hartman-Grobman dans ce cas. \blacksquare

8.3. Au delà des systèmes plans

Les considérations précédentes ne sont pas propres aux systèmes plans.

Le théorème d'Hartman-Grobman, par exemple, est vrai en toute dimension $n \geq 2$, et la classification des systèmes linéaires est semblable.

Considérons une matrice réelle A de dimension quelconque. Si toutes ses valeurs propres sont distinctes alors on peut la diagonaliser par blocs réels 1×1 , qui contiennent une valeur propre réelle, ou 2×2 , de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

qui encodent une paire de valeurs propres conjuguées $\alpha \pm \beta i$. Dans ce cas le système linéaire (ou linéarisé) peut se décrire comme produit direct¹ de systèmes uni-dimensionnels ou bi-dimensionnels comme vus dans ce chapitre.

Brèvement, le cas de blocs de Jordan est un peu différent et se comporte comme suit. Un bloc de Jordan réel, par exemple

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

engendrera une dynamique fort semblable au cas bidimensionnel, combinaison linéaires de $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda t} + tz_2(0)e^{\lambda t} + t^2z_3(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda t} + tz_3(0)e^{\lambda t}, \\ z_3(t) &= z_3(0)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Un bloc de Jordan complexe se combine avec son conjugué pour former un bloc qui ressemble par exemple à ceci :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

Les solutions ressemblent alors à ceci :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\alpha t}(z_1(0) \cos \beta t + z_2(0) \sin \beta t + t(z_3(0) \cos \beta t + z_4(0) \sin \beta t)), \\ z_2(t) &= e^{\alpha t}(z_2(0) \cos \beta t - z_1(0) \sin \beta t + t(z_4(0) \cos \beta t - z_3(0) \sin \beta t)), \\ z_3(t) &= e^{\alpha t}(z_3(0) \cos \beta t + z_4(0) \sin \beta t), \\ z_4(t) &= e^{\alpha t}(z_4(0) \cos \beta t - z_3(0) \sin \beta t). \end{aligned}$$

1. Une union de systèmes découplés

Illustrons maintenant les sections précédentes par quelques exemples de systèmes non linéaires d'ordre 2.

8.3.1. Les systèmes mécaniques à un degré de liberté

Les équations d'état d'un système mécanique à un degré de liberté s'écrivent (voir chapitre 2) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ m\dot{x}_2 &= -g(x_1) - k(x_1) - h(x_2) + u,\end{aligned}$$

où x_1 est la coordonnée de position du corps en mouvement, x_2 est la vitesse, m désigne la masse ou l'inertie et u représente une force ou un couple extérieur appliqué au système. Les fonctions scalaires $g(x_1)$ et $k(x_1)$ correspondent respectivement à la gravité et à l'élasticité tandis que $h(x_2)$ (tel que $h(0) = 0$) représente le frottement visqueux. Le frottement sec est négligé. Notons aussi (voir chapitre 2, section 2.7) que

$$g(x_1) + k(x_1) = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}$$

où E_p désigne l'énergie potentielle du système.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= 0, \\ g(\bar{x}_1) + k(\bar{x}_1) &= \bar{u}.\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, considérons le cas particulier où $m = 1$. La matrice Jacobienne du système à l'équilibre $(\bar{x}_1, 0, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1} & -h'(0) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$p(x) = x^2 + h'(0)x + \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1}.$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -h'(0).$$

La dérivée $h'(0)$ du frottement visqueux est par nature non-négative : $\lambda_1 + \lambda_2 = -h'(0) \leq 0$.

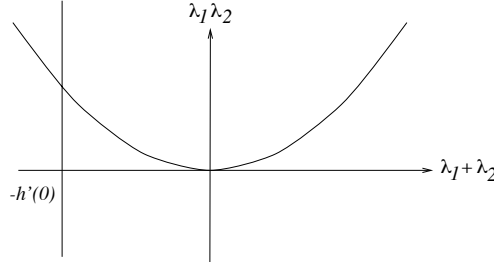


FIGURE 8.2 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système mécanique à un degré de liberté

Les équilibres du système sont hyperboliques si

$$h'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} \neq 0,$$

ou si $h'(0) = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} < 0$.

On observe donc que les équilibres ne sont *pas* hyperboliques si l'énergie potentielle $E_p(x_1)$ est une fonction affine de la position x_1 , ou plus généralement si l'équilibre correspond à un point d'inflexion de $E_p(x_1)$. C'est également le cas lorsque $h'(0) = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} \geq 0$.

Les équilibres hyperboliques d'un système mécanique à un degré de liberté peuvent alors être complètement caractérisés comme indiqué au tableau 8.4 (voir aussi la figure 8.2). On observe en particulier qu'un équilibre hyperbolique ne peut jamais être un noeud ou un foyer répulsif.

8.3.2. Les circuits électriques RLC

Les circuits électriques simples qui ne contiennent qu'une inductance et une capacité sont généralement dénommés *circuits RLC* dans la littérature. Dans les ouvrages de référence en génie électrique ou en théorie des circuits, ils font l'objet d'une étude approfondie car ils constituent la configuration de base de nombreux dispositifs pratiques (filtres, oscillateurs,...).

Le circuit *RLC série* représenté à la figure 8.3 est un exemple typique. En application des principes étudiés au chapitre 3, le comportement dynamique de ce circuit est décrit par un modèle d'état de dimension 2 :

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -r(x_1) - x_2 + u \\ C\dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Caractérisation	Nature des équilibres hyperboliques
$0 < [h'(0)]^2 < 4 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1}$	foyer stable
$0 < 4 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} \leq [h'(0)]^2$	noeud stable
$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} < 0$	col

TABLE 8.4 – Equilibres hyperboliques des systèmes mécaniques à un degré de liberté

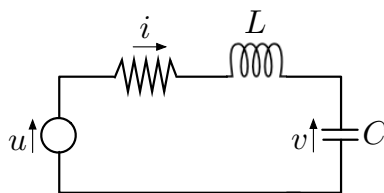


FIGURE 8.3 – Circuit RLC série

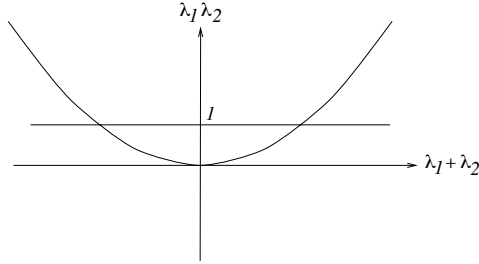


FIGURE 8.4 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un circuit RLC

où $x_1 = i$ est le courant dans l'inductance linéaire L , $x_2 = v$ est la tension aux bornes de la capacité linéaire C et $r(x_1)$ est la caractéristique tension-courant (éventuellement non linéaire) de la résistance.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par les équations :

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 + r(0) &= \bar{u}, \\ \bar{x}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, considérons le cas particulier $L = 1$ et $C = 1$. La matrice Jacobienne du système à l'équilibre $(0, \bar{x}_2, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -r'(0) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\begin{aligned}p(x) &= \lambda^2 + r'(0)\lambda + 1 \\ \text{où } r'(0) &\triangleq (\partial r / \partial x_1)_{x_1=0}.\end{aligned}$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -r'(0).$$

Les équilibres du système sont donc hyperboliques si $r'(0) \neq 0$, c.à.d. si la dérivée de la caractéristique de la résistance n'est pas nulle à l'origine. On observe que c'est notamment le cas pour une résistance linéaire.

Les équilibres hyperboliques d'un circuit RLC série sont alors complètement caractérisés comme indiqué sur le tableau 8.5 (voir aussi la figure 8.4). On remarque en particulier qu'un équilibre hyperbolique d'un circuit RLC série ne peut jamais être un col.

	Nature des équilibres hyperboliques
$r'(0) \geq 2$	noeud attractif
$0 < r'(0) < 2$	foyer attractif
$-2 < r'(0) < 0$	foyer répulsif
$r'(0) \leq -2$	noeud répulsif

TABLE 8.5 – Equilibres hyperboliques d'un circuit RLC

8.3.3. Les systèmes à deux compartiments

Considérons les systèmes à deux compartiments dont le graphe est représenté à la figure 8.5. Le signal d'entrée u est le débit d'alimentation du premier compar-

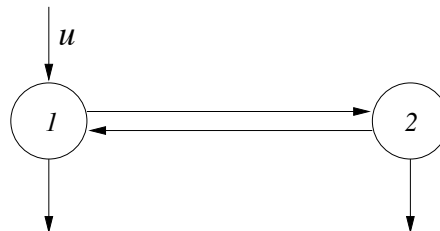


FIGURE 8.5 – Système à deux compartiments

timent. Nous supposons que les flux échangés entre les compartiments satisfont les conditions $C1 - C4$ de modélisation du chapitre 4 (Section 4.3). La dynamique du système est alors décrite par un modèle d'état de dimension 2 de la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1, x_2) + q_{21}(x_2, x_1) - q_{10}(x_1) + u \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1, x_2) - q_{21}(x_2, x_1) - q_{20}(x_2)\end{aligned}$$

Les fonctions q_{ij} satisfont les conditions suivantes sur l'orthant positif :

$$q_{ij}(0, x_j) = 0 \quad \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_i} \geq 0 \quad \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} \leq 0 \quad (8.6)$$

Sous ces conditions, le système possède une infinité d'équilibres isolés positifs $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$. La matrice Jacobienne autour de l'un de ces équilibres s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d) \end{pmatrix}$$

avec les notations simplifiées suivantes (toutes les dérivées partielles sont évaluées à l'état d'équilibre) :

$$\begin{aligned} a &\triangleq \frac{\partial q_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial q_{21}}{\partial x_1} & c &\triangleq \frac{\partial q_{10}}{\partial x_1} \\ b &\triangleq \frac{\partial q_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial q_{12}}{\partial x_2} & d &\triangleq \frac{\partial q_{20}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Sous les conditions (8.6), on observe immédiatement que $a, b, c, d, \geq 0$. Le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne s'écrit :

$$p(x) = x^2 + (a + b + c + d)x + (ad + bc + cd)$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donc donnés par :

$$\lambda_1 \lambda_2 = ad + bc + cd \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(a + b + c + d)$$

Les équilibres du système sont donc hyperboliques si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$a + b + c + d > 0 \quad \text{et} \quad ad + bc + cd > 0$$

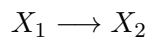
On démontre aisément que, sous ces conditions, l'inégalité suivante est aussi satisfaite :

$$0 < 4(ad + bc + cd) \leq (a + b + c + d)^2$$

On en déduit que les équilibres hyperboliques d'un système à deux compartiments ne peuvent être que des noeuds attractifs (voir figure 8.6).

8.3.4. Les systèmes réactionnels à deux espèces

Les systèmes réactionnels les plus simples font intervenir deux espèces. C'est le cas par exemple d'une réaction irréversible convertissant un réactif X_1 en un produit X_2 :



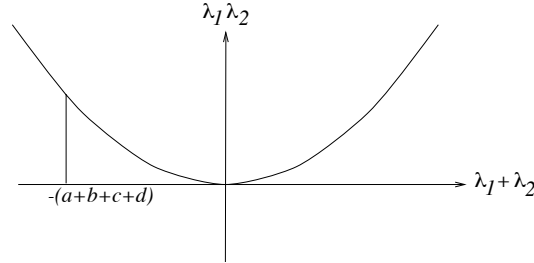


FIGURE 8.6 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système à deux compartiments

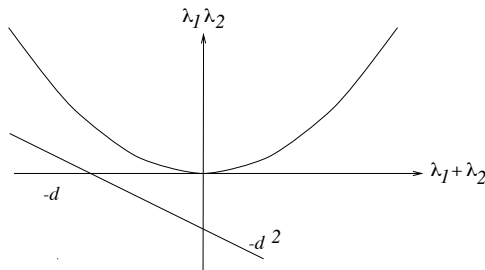


FIGURE 8.7 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système réactionnel à deux espèces

Supposons que cette réaction se déroule dans un réacteur continu parfaitement mélangé à volume constant. Le réacteur est alimenté avec l'espèce X_1 , à débit volumétrique constant strictement positif. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, le modèle d'état du réacteur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -r(x_1, x_2) + d(u - x_1) \\ \dot{x}_2 &= r(x_1, x_2) - dx_2\end{aligned}$$

où x_1 et x_2 représentent les concentrations des espèces X_1 et X_2 dans le milieu réactionnel, d est le taux de dilution et u est la concentration du réactif X_1 dans l'alimentation. La cinétique de réaction $r(x_1, x_2)$ est supposée être une fonction des concentrations des deux espèces.

Les équilibres du système sont donc caractérisés par les équations :

$$d\bar{x}_2 = d(\bar{u} - \bar{x}_1) = r(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Ces équations impliquent à l'équilibre que $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{u}$, c'est à dire que la somme des concentrations des espèces X_1 et X_2 dans le réacteur est égale à la concentration

	Nature des équilibres hyperboliques
$(a - b) < -d$	col
$(a - b) > -d$	noeud attractif

TABLE 8.6 – Equilibres hyperboliques d'un système réactionnel à deux espèces

du réactif X_1 dans l'alimentation. Cette observation est évidemment en accord avec le principe de conservation de la masse.

La matrice Jacobienne autour de l'équilibre s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -a - d & -b \\ a & b - d \end{pmatrix}$$

avec les notations simplifiées suivantes :

$$a \triangleq \left(\frac{\partial r(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \quad b \triangleq \left(\frac{\partial r(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne s'écrit :

$$p(x) = x^2 + (a - b + 2d)x + (a - b)d + d^2$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donc donnés par :

$$\lambda_1 \lambda_2 = (a - b)d + d^2 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(a - b + 2d)$$

Etant donné que le taux de dilution d est une quantité strictement positive, on peut vérifier après quelques calculs que les équilibres du système sont hyperboliques si $(a - b) \neq -d$. On observe que

- si $\lambda_1 + \lambda_2 = -[(a - b) + 2d] > 0$, alors nécessairement $\lambda_1 \lambda_2 = d[(a - b) + d] < 0$ et donc l'équilibre est un col.
- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = -[(a - b) + 2d] \leq 0$, alors l'équilibre est un col si $-2d \leq (a - b) < -d$, et un noeud attractif si $(a - b) > -d$. Par contre, l'équilibre ne peut pas être un foyer, car il est impossible d'avoir $\lambda_1 \lambda_2 \geq \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)^2$.

Cette analyse est résumée dans le tableau 8.6 et la figure 8.7.

8.4. Trajectoires périodiques et cycles limites

A partir des tableaux de la section 8.2, on peut tirer les observations suivantes.

1. Pour un système linéaire de dimension deux, les équilibres *attractifs* sont soit un noeud soit un foyer, soit enfin une droite d'équilibres non isolés. Dans chacun de ces cas, le bassin d'attraction est le plan de phase tout entier.
2. Lorsque l'équilibre est répulsif, les trajectoires du système divergent lorsque le temps t tend vers l'infini.
3. Lorsque l'équilibre d'un système linéaire est un centre, toutes les trajectoires du système sont périodiques et le rayon des trajectoires dépend des conditions initiales. Un système linéaire présentant des trajectoires périodiques est structurellement instable, et donc la moindre perturbation du système peut faire disparaître ces trajectoires périodiques.

Aucune de ces observations n'est vérifiée génériquement dans le cas de systèmes non linéaires. En effet, les deux premières concernent un comportement *global* des trajectoires, et nous avons vu que ce n'est que localement, dans le voisinage d'un équilibre hyperbolique, que les trajectoires d'un système non linéaire se comportent comme celles de l'approximation linéaire de ce système. L'objet de cette section est de montrer que pour des systèmes non linéaires, il existe d'autres ensembles attractifs et notamment des trajectoires périodiques. On montrera en outre que ces ensembles attractifs sont structurellement stables. Ceci est une propriété très intéressante des systèmes non linéaires qui est utilisée pour la conception de circuits oscillateurs.

Exemple 8.8. Circuit RLC à diode tunnel

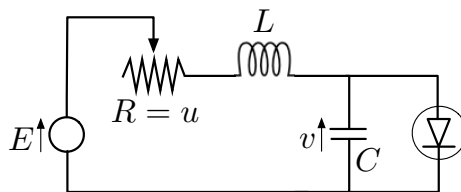


FIGURE 8.8 – Oscillateur à diode tunnel

La figure 8.8 représente un oscillateur à diode tunnel. C'est un circuit électrique RLC comprenant des dipôles linéaires (une source de tension constante E , une résistance linéaire R variable, une inductance linéaire $L = 1H$, une capacité linéaire $C = 1F$) ainsi qu'une résistance non linéaire (diode tunnel) dont la caractéristique courant-tension $i = h(v) = 2v^3 - 6v^2 + 5v$ a l'allure de la courbe représentée à la figure 8.11. L'entrée u de ce système est la résistance variable R . Comme nous l'avons vu au chapitre 3, les variables d'état du système sont le courant $x_1 = i$

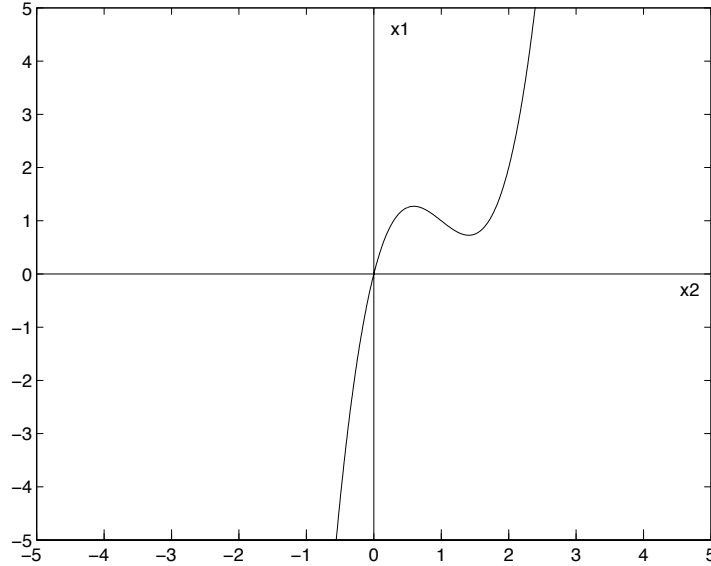


FIGURE 8.9 – Caractéristique courant-tension de la diode tunnel

dans l'inductance et la tension $x_2 = v$ aux bornes de la capacité. On obtient les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ux_1 - x_2 + E \\ \dot{x}_2 &= x_1 - h(x_2),\end{aligned}$$

et les équilibres possibles sont caractérisés par

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{E - \bar{x}_2}{\bar{u}} \\ \bar{x}_1 &= h(\bar{x}_2).\end{aligned}$$

En représentant dans le plan de phase les graphes des courbes $\bar{x}_1 = (E - \bar{x}_2)/\bar{u}$ et $\bar{x}_1 = h(\bar{x}_2)$, on constate que, pour une diode de caractéristique donnée, deux configurations sont possibles selon les valeurs respectives de \bar{u} et E . Si la pente de la droite $(-1/\bar{u})$ est suffisamment raide, il n'y aura qu'un seul point d'équilibre (figure 8.10.a). Par contre, si cette pente est inférieure à celle de la tangente au point d'inflexion de la courbe, il y aura un, deux ou trois équilibres possibles suivant la valeur de E (figure 8.10.b).

On peut à nouveau étudier l'allure des trajectoires au voisinage des équilibres

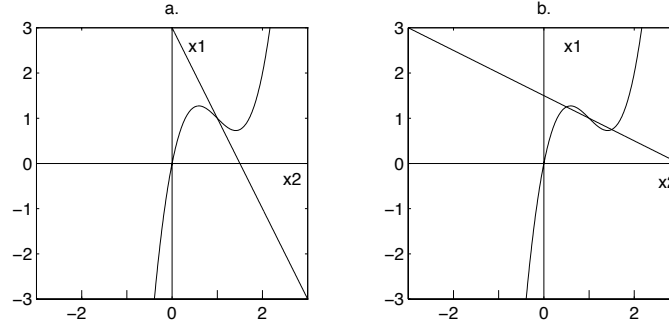


FIGURE 8.10 – Configurations d'équilibres pour le circuit avec diode tunnel

en calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système :

$$A = \begin{pmatrix} -\bar{u} & -1 \\ 1 & -h'(\bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 \lambda_2 = \bar{u} h'(\bar{x}_2) + 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(\bar{u} + h'(\bar{x}_2)),$$

et on observe que le signe des valeurs propres ne dépend pas de E mais seulement des pentes respectives des deux graphes de l'une ou l'autre des figures 8.10.

Examinons en détail les équilibres :

- a. Pour la figure 8.10.a, il n'y a qu'un seul équilibre. Si celui-ci se trouve à gauche du maximum local de la courbe $h(x_2)$ ou à droite du minimum local de celle-ci, le produit des valeurs propres est positif, la somme est négative et l'équilibre correspondant est donc un noeud ou un foyer attractif.
- b. Toujours pour la première figure, si l'équilibre se trouve entre le maximum et le minimum locaux, on a $-1/\bar{u} < h'(\bar{x}_2) < 0$ et le produit des valeurs propres est donc toujours positif. Quant à la somme, elle sera négative et l'équilibre correspondant dès lors attractif si $|h'(\bar{x}_2)| < \bar{u}$ (ce qui correspond à une valeur de \bar{u} importante, c.à.d. une résistance fortement dissipative qui assure la stabilité du circuit). Par contre, si $|h'(\bar{x}_2)| > \bar{u}$, la somme des valeurs propres est positive et l'équilibre correspondant est répulsif.
- c. Pour la figure 8.10.b, les équilibres à gauche du maximum local de $h(x_2)$ et à droite du minimum local sont tels que le produit des valeurs propres est positif et la somme des valeurs propres est négative. L'équilibre correspondant est donc un noeud ou un foyer attractif.
- d. Quant à l'équilibre éventuel compris entre maximum et minimum, il vérifie $h'(\bar{x}_2) < -1/\bar{u} < 0$. Le produit des valeurs propres est négatif et l'équilibre correspondant est un col.

Comme on peut le constater, l'équilibre est répulsif dans différents cas. On peut alors s'interroger sur ce que deviennent les trajectoires qui s'éloignent de ce point d'équilibre. Considérons les valeurs numériques particulières suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 0.5, \\ E &= 1.5, \\ h(v) &= 2v^3 - 6v^2 + 5v.\end{aligned}$$

On peut vérifier que pour ces valeurs particulières, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1, 1, 0.5)$ est le seul équilibre du système, et qu'il s'agit d'un équilibre répulsif (cas **b.** ci-dessus).

En simulant le système de deux équations différentielles pour différentes conditions initiales, on obtient les orbites illustrées à la figure 8.11. Il apparaît clairement que toutes les orbites calculées (on peut penser que les autres se comporteraient de la même manière) s'enroulent autour d'une orbite périodique. Ce système ne possède donc pas d'équilibre attractif, mais il existe une *orbite fermée* qui est attractive. C'est ce qu'on appelle un cycle limite. La figure 8.12 illustre les trajectoires

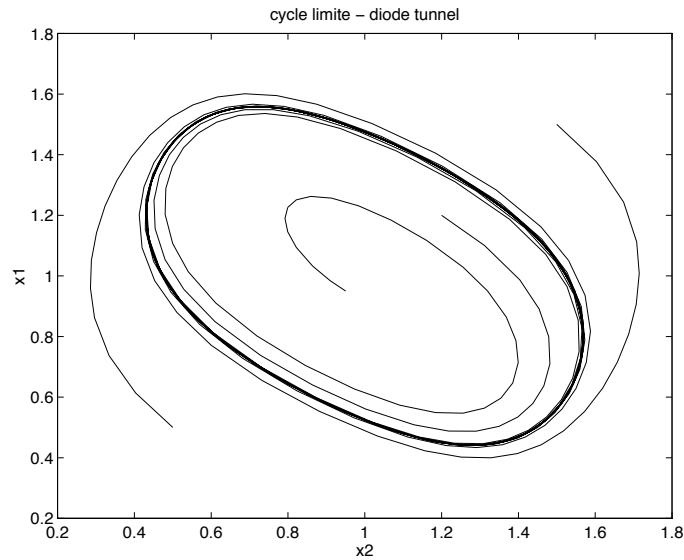


FIGURE 8.11 – Cycle limite pour le circuit à diode tunnel

(état en fonction du temps) et montre bien qu'elles convergent (rapidement) vers des trajectoires périodiques dont la période et l'amplitude ne dépendent pas des conditions initiales.

Asymptotiquement, le système connaîtra donc des oscillations d'amplitude constante, quelle que soit la valeur des conditions initiales, contrairement à ce

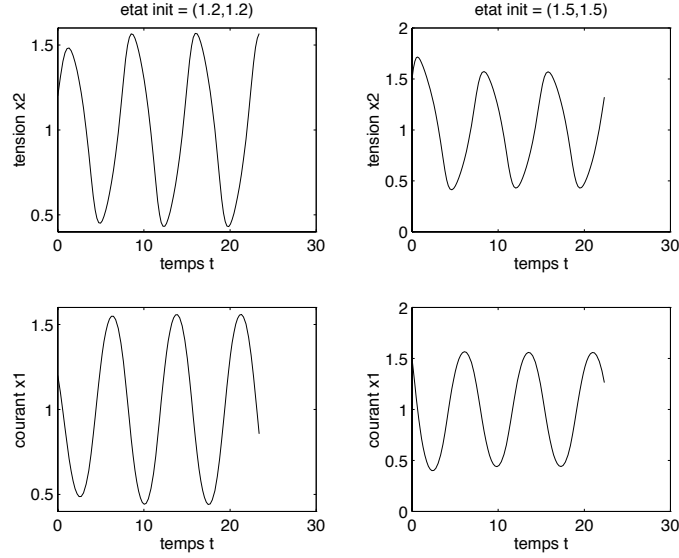


FIGURE 8.12 – Trajectoires du circuit à diode tunnel

qui se passe pour un système linéaire possédant un équilibre de type centre. En fait, c'est exactement ce que l'on cherche à obtenir lorsque l'on construit un oscillateur : des oscillations d'amplitude constante indépendamment des conditions initiales, qu'on ne peut donc obtenir qu'avec un système non linéaire. Enfin, on peut aussi montrer que ce cycle limite est structurellement stable, ce qui est également une propriété intéressante pour la conception d'un oscillateur. \square

Nous formalisons ci-dessous quelques-unes des notions qui viennent d'être décrites dans l'exemple précédent. Considérons un système plan

$$\dot{x} = f(x, \bar{u})$$

avec entrée constante \bar{u} et notons $x(t, x_0, \bar{u})$ la solution au temps t avec $x(0) = x_0$.

Définition 8.9. Point limite

Le point z est un *point limite* de y pour le système dynamique soumis à une entrée constante \bar{u} s'il existe une suite $\{t_n\}$ dans \mathbb{R} telle que $t_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, y, \bar{u}) = z$. \square

Conformément à cette définition, un équilibre attractif est donc un point limite de tout point dans son bassin d'attraction. Mais la notion de point limite est plus générale comme nous le constaterons ci-dessous.

Définition 8.10. Cycle limite

Un cycle limite est une orbite fermée γ telle qu'un point de γ est un point limite d'un autre point du plan de phase n'appartenant pas à γ . \blacksquare

Cette définition montre que lorsqu'une orbite fermée est un cycle limite, tout point de cette orbite est un point limite, et donc que la trajectoire du système s'approchera de plus en plus de chacun des points de cette orbite fermée, à des instants déterminés.

Nous pouvons énoncer maintenant quelques résultats permettant d'établir l'existence de trajectoires périodiques et de cycles limites. Ces résultats ne sont valables que pour les systèmes plans (alors qu'il existe également des cycles limites pour des systèmes d'ordre supérieur). La raison en est que les démonstrations de ces résultats reposent sur le fait qu'en dimension 2, une orbite fermée dans le plan de phase divise ce plan en une région intérieure à l'orbite et une région extérieure, ce qui n'est bien sûr plus vrai dans un espace de phase de dimension supérieure à 2. Le premier résultat est une condition *suffisante* de *non-existence* de trajectoire périodique (et donc de cycle limite).

Théorème 8.11. Bendixson Dulac, 1901 et 1933

Soit D un domaine simplement connexe² dans \mathbb{R}^2 . Si

$$\operatorname{div} f \triangleq \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

est non identiquement nulle dans un sous-domaine de D et ne change pas de signe dans ce sous-domaine, alors D ne contient pas d'orbite fermée. ■

Rappelons que la divergence $\operatorname{div} f$ décrit l'éloignement ($\operatorname{div} f > 0$) ou le rapprochement ($\operatorname{div} f < 0$) issues de $\dot{x} = f(x)$. Ce théorème se prouve simplement par contraposition : supposons qu'il existe une trajectoire fermée γ dans le domaine, dont l'intérieur est $D_\gamma \subseteq D$. Alors l'intégrale de la divergence à l'intérieur de γ , $\int_{D_\gamma} \operatorname{div} f$ est égale par le théorème de Green-Stokes à l'intégrale de flux à travers la frontière $\gamma \int_\gamma \langle f, n \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire et n est le vecteur normal unitaire sortant à γ . Cette dernière intégrale est nulle, puisque f est tangent en tout point de la trajectoire γ . Il en résulte que la divergence $\operatorname{div} f$ ne peut être partout négative ou partout positive dans D_γ .

Le deuxième résultat permet, lui, de mettre en évidence l'existence d'un cycle limite.

Théorème 8.12. Poincaré-Bendixson, 1901

Si E est un sous ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 , invariant pour le système $\dot{x} = f(x, \bar{u})$, et si γ est une orbite qui démarre dans E , alors :

- i) Si E ne contient pas de point d'équilibre, alors γ est une orbite périodique ou converge vers un cycle limite.

2. un domaine simplement connexe dans \mathbb{R}^2 est un domaine dont la frontière peut être obtenue comme déformation continue d'un cercle.

- ii) Si E ne contient pas d'orbite périodique mais contient un point d'équilibre unique, cet équilibre est globalement attractif dans E . \square

Ce théorème peut être utilisé effectivement pour démontrer l'existence d'un cycle limite. Pour ce faire, on cherche d'abord un ensemble fermé borné et invariant. Pour vérifier que l'ensemble est bien invariant, on montre que sur la frontière de cet ensemble, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur. Ensuite, si on a pu exclure la présence d'équilibres dans cet ensemble, celui-ci doit nécessairement contenir un cycle limite, ou ne contenir que des trajectoires périodiques.

Il est important de noter que ces deux théorèmes, contrairement à d'autres résultats de ce chapitre, sont spécifiques aux systèmes plans, et restreignent fortement les dynamiques possibles en deux dimensions : les trajectoires convergent vers un point, un cycle, ou sont non bornées. Les dimensions supérieures recèlent des comportements plus riches qui dépassent le cadre de ce cours : chaos, attracteurs étranges, etc.

Exemple 8.13. *Circuit à diode tunnel (suite)*

Nous reprenons le circuit déjà décrit avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, qui conduisent à un équilibre unique répulsif $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1, 1, E - 1)$, avec $E > 1$. Prenons maintenant dans le plan de phase un cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon suffisamment grand et montrons que, sur ce cercle, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur. Il s'agit donc de montrer que le produit scalaire du champ de vecteurs et de la normale au cercle est négatif : $PS = x_1 f_1(x_1, x_2, \bar{u}) + x_2 f_2(x_1, x_2, \bar{u}) < 0$. Choisissons comme rayon $r = \sqrt{2} \frac{E}{E-1}$ (voir figure 8.13). Le produit scalaire vaut $PS = -(E-1)x_1^2 + Ex_1 - x_2 h(x_2)$. Remarquons que la quantité $-x_2 h(x_2)$ est toujours strictement négative sauf en $x_2 = 0$. Pour $x_1 \leq 0$, $PS < 0$. De même, pour $x_1 \geq \frac{E}{E-1}$, $Ex_1 \leq (E-1)x_1^2$ et $PS < 0$. Il reste à étudier la portion de cercle où $x_1 < \frac{E}{E-1}$, $x_2 > \frac{E}{E-1}$. Un petit calcul permet de vérifier que $|h(x_2)| > |x_2|$ et que les inégalités suivantes sont donc vérifiées :

$$\begin{aligned} x_2 h(x_2) &> x_2^2 > \frac{E^2}{(E-1)^2} \\ Ex_1 &< \frac{E^2}{E-1} < \frac{E^2}{(E-1)^2} \end{aligned}$$

et donc $PS < 0$. Sur ce cercle de rayon r , le champ de vecteurs est donc rentrant. Par ailleurs, comme l'équilibre $(1, 1, E - 1)$ est répulsif, on peut prendre un cercle suffisamment petit autour de cet équilibre tel que le champ de vecteurs évalué sur ce cercle pointe vers l'extérieur. Si l'on considère maintenant le domaine formé de l'anneau (non centré) compris entre le petit cercle et le grand, il s'agit bien d'un ensemble invariant puisque sur la frontière de cet ensemble, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur du domaine. Ce domaine ne comprenant aucun équilibre, il doit donc contenir un cycle limite (ou ne contenir que des trajectoires périodiques). \square

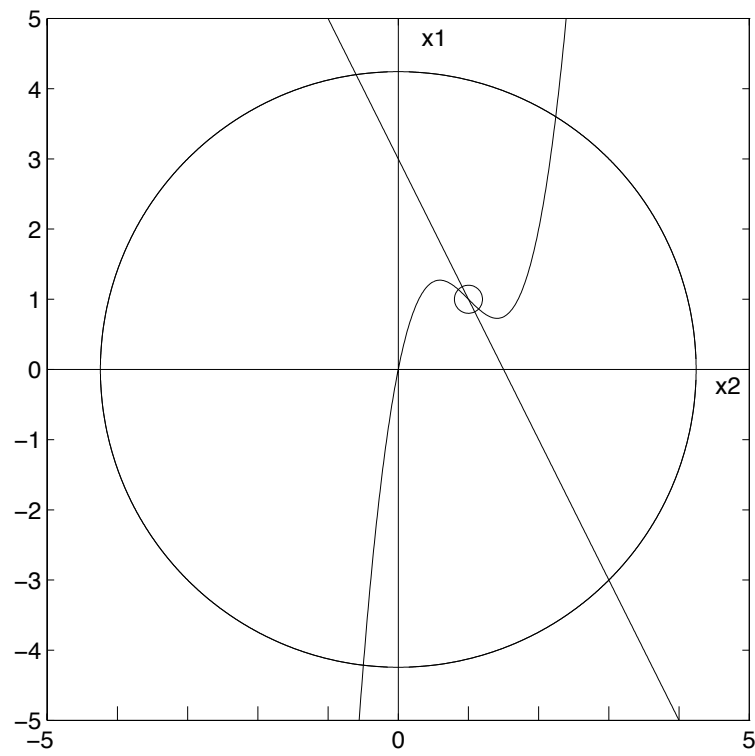


FIGURE 8.13 – Ensemble invariant pour le circuit à diode tunnel

\bar{u}	\bar{x}_2	$h'(\bar{x}_2)$	valeurs propres	type d'équilibre
$\bar{u} > 0.7139$	$\bar{x}_2 < 0.5918$	$h'(\bar{x}_2) > 0$	$\lambda_{1,2} \in C^-$	foyer attractif
$0.1261 < \bar{u} < .7139$	$0.5918 < \bar{x}_2 < 1.4082$	$h'(\bar{x}_2) < 0$	$\lambda_{1,2} \in C^+$	foyer répulsif
$\bar{u} < 0.1261$	$\bar{x}_2 > 1.4082$	$2.5 > h'(\bar{x}_2) > 0$	$\lambda_{1,2} \in C^-$	foyer attractif

8.5. Bifurcations

Nous avons choisi d'étudier dans ce chapitre l'allure des trajectoires de systèmes plans pour une valeur constante de l'entrée, \bar{u} . Cette valeur n'étant pas nécessairement fixée *a priori*, il est intéressant d'analyser dans quelle mesure les trajectoires seront influencées par des changements de \bar{u} . Le théorème 8.6 nous donne déjà une indication. Tant que l'équilibre autour duquel on analyse les trajectoires est hyperbolique, de petites variations de \bar{u} ne déplaceront pas beaucoup les valeurs propres de la matrice d'état de l'approximation linéaire du système, et l'allure des trajectoires restera similaire. Mais en faisant varier l'entrée constante \bar{u} , il peut arriver que les valeurs propres de la matrice d'état atteignent l'axe imaginaire du plan complexe, et dans ce cas il faut s'attendre à une modification fondamentale de l'allure des trajectoires. Plus globalement, les diagrammes d'équilibre étudiés au chapitre précédent montrent également qu'en faisant varier \bar{u} , on peut modifier le nombre de points d'équilibre du système, autant que leur nature. L'étude des modifications de la nature et/ou du nombre des équilibres en fonction de l'évolution de l'entrée du système relève de ce qu'on appelle la théorie des bifurcations, et l'entrée constante \bar{u} est alors appelée *paramètre de bifurcation*. Nous illustrons ci-dessous ce concept en présentant quatre types de bifurcations qui se rencontrent dans les systèmes plans.

8.5.1. Bifurcation de Hopf

Exemple 8.14. Circuit à diode tunnel (suite)

Reprenons à nouveau l'exemple du circuit à diode tunnel en faisant varier l'entrée \bar{u} (c.à.d. la résistance variable R), avec une source de tension constante $E = 1.5$. La figure 8.14 illustre comment l'équilibre unique se déplace lorsque \bar{u} varie. Le tableau suivant caractérise le type d'équilibre rencontré en fonction de \bar{u} .

Dès lors, si l'on part d'une valeur de la résistance variable \bar{u} suffisamment grande, telle que le point d'équilibre se trouve à gauche du premier sommet de la courbe caractéristique de la diode, et que l'on diminue progressivement cette valeur, on passe successivement par les configurations suivantes : un foyer attractif, un foyer

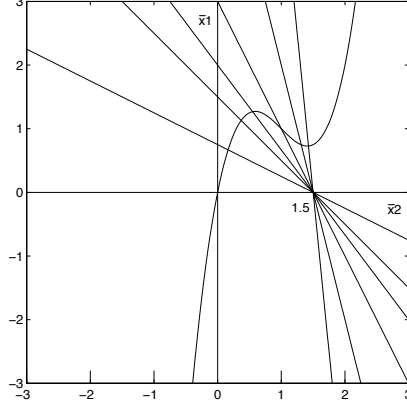


FIGURE 8.14 – Equilibre du circuit à diode tunnel lorsque la résistance R varie.

répulsif (associé à un cycle limite), un foyer attractif. Au moment des deux transitions entre foyer attractif et répulsif, le système passe par une valeur telle que le point d'équilibre n'est pas hyperbolique. \square

La bifurcation que nous venons de mettre en évidence (passage d'un foyer attractif à un foyer répulsif accompagné d'un cycle limite, ou l'inverse) est appelée *bifurcation de Hopf*. Le théorème suivant garantit d'ailleurs l'existence d'un cycle limite. Afin de l'énoncer de façon précise, formalisons ce qui précède. Soit un système plan possédant une famille d'équilibres uniques (\bar{x}, \bar{u}) paramétrée par \bar{u} . On suppose qu'il existe une valeur \bar{u}^* de \bar{u} telle que les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée en cet équilibre ont une partie réelle nulle et une partie imaginaire non nulle. Ces valeurs propres dépendent continûment de \bar{u} , au moins dans un voisinage de \bar{u}^* , et on les notera donc

$$\lambda_i(\bar{u}) = \alpha(\bar{u}) \pm i\beta(\bar{u}).$$

On suppose en outre que $\frac{d\alpha(\bar{u}^*)}{d\bar{u}} > 0$.

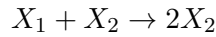
Théorème 8.15. Avec les hypothèses qui précèdent, si pour des valeurs de \bar{u} proches de \bar{u}^* , l'équilibre est attractif pour $\bar{u} < \bar{u}^*$ et répulsif pour $\bar{u} > \bar{u}^*$ alors il existe une orbite fermée pour $\bar{u} > \bar{u}^*$ ou pour $\bar{u} < \bar{u}^*$. En particulier, si (\bar{x}^*, \bar{u}^*) est localement attractif, alors il existe un cycle limite attractif autour de (\bar{x}, \bar{u}) pour tout $\mu = \bar{u} - \bar{u}^* > 0$, suffisamment petit. De plus, l'amplitude du cycle limite augmente lorsque μ augmente. \square

Remarque 8.16. Tel quel, l'énoncé du théorème reste ambigu quant à la nature (attractive ou répulsive) de l'orbite fermée qui apparaît. On peut lever cette

ambiguïté au prix d'un énoncé plus technique faisant apparaître explicitement les termes d'ordre trois du système non linéaire (voir par exemple Guckenheimer et Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983).

8.5.2. Bifurcation transcritique

Considérons la réaction



se produisant dans un réacteur à volume constant, alimenté en réactif X_1 à la concentration x_1^{in} , avec un taux de dilution u .

Le modèle d'état du système (en supposant une cinétique de réaction décrite par la loi d'action des masses) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kx_1x_2 + u(x_1^{in} - x_1) \\ \dot{x}_2 &= kx_1x_2 - ux_2.\end{aligned}$$

Le système possède deux équilibres distincts pour chaque valeur constante de l'entrée $\bar{u} \neq kx_1^{in}$: $(x_1^{in}, 0, \bar{u})$ et $(\bar{u}/k, x_1^{in} - \bar{u}/k, \bar{u})$, comme illustré à la figure 8.15. On vérifie facilement que le premier équilibre est attractif si $\bar{u} > kx_1^{in}$ et est un

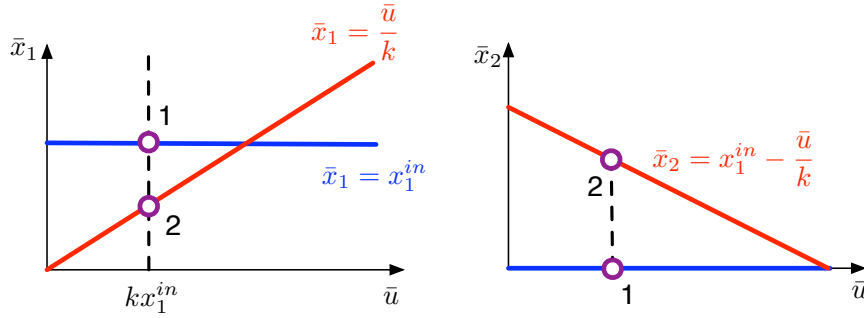


FIGURE 8.15 – Diagramme d'équilibres - Bifurcation transcritique

col sinon. Inversement, le deuxième équilibre est attractif pour les petites valeurs de \bar{u} et devient un col si $\bar{u} > kx_1^{in}$. Il y a donc ici aussi une bifurcation, plus simple toutefois, les caractéristiques des deux équilibres étant échangées lorsque le paramètre de bifurcation \bar{u} franchit la valeur critique kx_1^{in} . Cette bifurcation est appelée *bifurcation transcritique*. On vérifie également qu'à cette valeur critique, l'équilibre (unique) est non hyperbolique.

8.5.3. Bifurcation col-noeud

Le troisième type de bifurcation est illustré par l'exemple du réacteur chimique exothermique décrit à la section 7.1. Rappelons que le diagramme d'équilibre reliant la température d'équilibre du réacteur, \bar{T} , à l'apport calorifique externe, \bar{u} , a l'allure illustrée à la figure 8.16. On constate donc que pour de faibles valeurs de \bar{u} ,

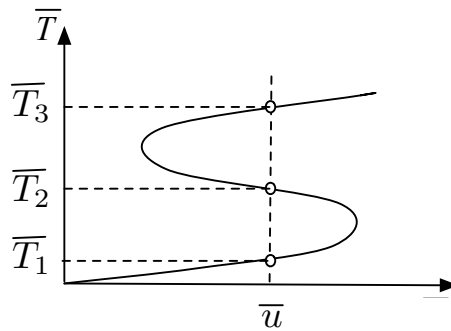


FIGURE 8.16 – Diagramme d'équilibres - Bifurcation col-noeud

le système possède un seul point d'équilibre correspondant à une température d'équilibre basse et à une grande concentration de réactif dans le réacteur (et dès lors une faible concentration du produit de la réaction). On peut vérifier que cet équilibre est attractif. Puis, pour une valeur critique de \bar{u} que l'on repère facilement sur le diagramme d'équilibre, le système passe à trois valeurs d'équilibre pour la température, celle du milieu correspondant à un équilibre attractif et les deux autres à des équilibres répulsifs. Enfin, en augmentant encore \bar{u} , on franchit une nouvelle valeur critique au delà de laquelle le système ne possède plus qu'un seul équilibre, attractif également. Il s'agit ici de *bifurcation col-noeud*. A partir d'une valeur critique de l'entrée (c.à.d. du paramètre de bifurcation) apparaissent deux nouveaux équilibres, l'un d'eux étant un noeud attractif, l'autre étant un col. A la valeur critique, l'équilibre n'est pas hyperbolique.

8.5.4. Bifurcation fourche

Le mécanisme illustré à la figure 8.17 est un « régulateur de Watt ». Ce dispositif peut servir à mesurer une vitesse de rotation à partir d'un pointeur fixé sur l'axe vertical, ou, et c'est pour cela qu'il a été inventé, à réguler cette vitesse si le pointeur est relié à une vanne d'alimentation du moteur faisant tourner le dispositif. On peut vérifier que les équations décrivant le mouvement du système

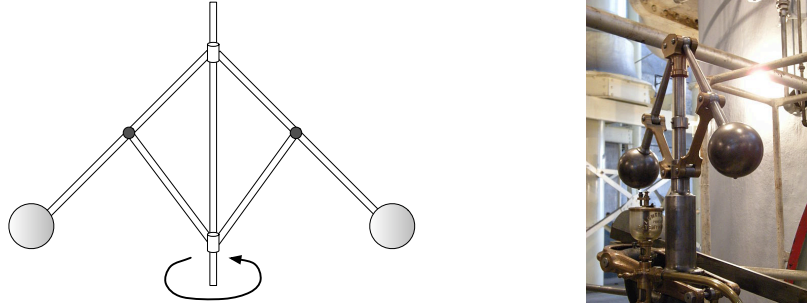


FIGURE 8.17 – Régulateur de Watt

s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u^2 \cos x_1 \sin x_1 - k \sin x_1 - K x_2\end{aligned}$$

où $x_1 = \theta$ est la position angulaire des pendules symétriques et u est la vitesse de rotation.

Ce dispositif a un équilibre en $(x_1, x_2, u) = (0, 0, \bar{u})$ et, si $\bar{u}^2 > k$, un autre équilibre en $(\bar{x}_1 = \arccos \frac{k}{\bar{u}^2}, 0, \bar{u})$ avec $\bar{x}_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En fait $(-\bar{x}_1, 0, \bar{u})$ est aussi un équilibre qui correspondrait à la permutation des deux pendules, ce qui est (physiquement) impossible mais conceptuellement possible, d'après les équations ci-dessus.

La matrice Jacobienne du système autour de l'équilibre $(0, 0, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{u}^2 - k & -K \end{pmatrix}$$

Cet équilibre est attractif pour $\bar{u}^2 < k$ et répulsif pour $\bar{u}^2 > k$. Pour $\bar{u}^2 = k$, l'équilibre n'est pas hyperbolique.

Autour des deux autres équilibres, la matrice Jacobienne devient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k^2}{\bar{u}^2} - \bar{u}^2 & -K \end{pmatrix} \text{ avec } \bar{u}^2 > k \Rightarrow \bar{u}^4 > k^2$$

Ces équilibres sont donc attractifs. Le diagramme de bifurcation peut alors s'illustrer comme indiqué à la figure 8.18. Il s'agit d'une bifurcation de type fourche.

8.5.5. Généralisations

Nous avons décrit dans cette section les bifurcations relatives à des systèmes d'ordre deux dépendant d'un paramètre (la valeur de \bar{u}). Ces bifurcations sont

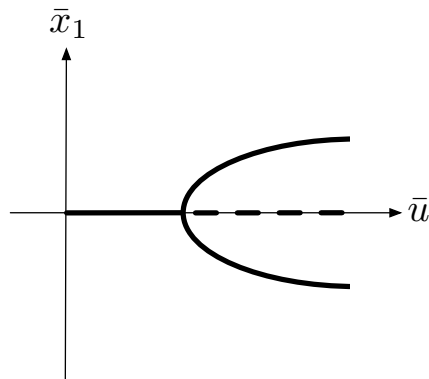


FIGURE 8.18 – Diagramme d'équilibres - bifurcation fourche

caractérisées par la traversée de l'axe imaginaire du plan complexe par une valeur propre réelle de l'approximation linéaire ou par une paire de valeurs propres complexes conjuguées (bifurcation de Hopf). Lorsqu'un système d'ordre plus grand que deux dépend d'un paramètre variable, il est rare que plus d'une valeur propre réelle (ou plus d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées) franchisse l'axe imaginaire pour la même valeur du paramètre de bifurcation. Ce que nous venons de décrire s'observe dès lors aussi, dans des espaces de phase plus compliqués à visualiser, pour des systèmes d'ordre supérieur.

8.6. Exercices

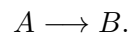
Exercice 8.1. *Un système mécanique*

On considère un robot manipulateur à un segment relié à un châssis fixe par une articulation rotoïde. Le robot se déplace dans un plan vertical. Il est actionné par un moteur produisant un couple appliqué à l'articulation et est soumis à un couple de frottement visqueux. La flexibilité est négligée.

1. Etablir le modèle d'état du système.
2. Déterminer les configurations d'équilibre.
3. Analyser le comportement des trajectoires au voisinage des équilibres en cas de frottement visqueux linéaire quand le couple appliqué est constant.
4. Que peut-on dire des équilibres quand le frottement visqueux est quadratique ?

Exercice 8.2. *Un réacteur chimique*

Soit un réacteur continu parfaitement mélangé et à volume constant dans lequel se déroule une réaction chimique irréversible mettant en oeuvre deux espèces A et B :



Le réacteur est alimenté uniquement avec l'espèce A , à débit volumique constant strictement positif. La variable d'entrée est la concentration d'alimentation du réacteur. La cinétique de réaction est une fonction des concentrations des deux espèces : $r(x_A, x_B)$.

1. Etablir le modèle d'état du système.
2. Montrer que, à entrée constante, l'équilibre est unique et stable si la cinétique obéit à la loi d'action des masses avec inhibition hyperbolique par le produit. Est-ce un noeud ou un foyer ?
3. Montrer que le système peut avoir des équilibres instables si la cinétique est une fonction monotone croissante de ses arguments.

Exercice 8.3. *Un système à compartiments*

Quelles sont les conditions sur la structure du graphe d'un système linéaire à deux compartiments pour que le système ait une ou deux valeurs propres nulles ? Quel est alors le comportement du système (détailler les différents cas possibles) ?

Exercice 8.4. Génératrice DC avec auto-excitation

On considère une génératrice DC avec auto-excitation. La tension induite est, à vitesse constante, une fonction *monotone croissante bornée* du courant d'excitation $E(I_s)$ telle que $E(0) > 0$. La génératrice débite sur une charge résistive. L'entrée de commande du système est la vitesse de rotation de la génératrice.

1. Déterminer le modèle d'état du système.
2. Montrer qu'on peut choisir le sens de référence des courants pour que le système soit positif.
3. Quelle allure doit avoir la fonction $E(I_s)$ pour qu'il y ait trois équilibres hyperboliques isolés à vitesse de rotation constante. Discuter la stabilité de ces équilibres.
4. Etudier les bifurcations de la configuration d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation.

Exercice 8.5. Circuit électrique RLC

On considère le circuit électrique linéaire suivant :

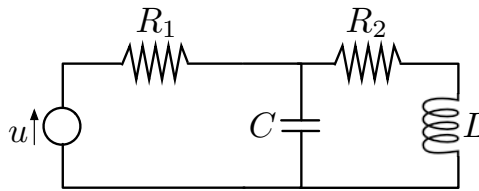


FIGURE 8.19 – Circuit électrique RLC

où $R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$ et $L = 1H$.

1. Ecrire un modèle d'état.
2. Déterminer les équilibres.
3. Quelles sont les conditions sur R_1 pour que chaque équilibre soit un noeud, un foyer ou un col ?

On considère le même circuit électrique mais avec $R_1 = 1\Omega$ et R_2 une résistance non linéaire décrite par la relation tension-courant $v_r = i_r^3 - 3i_r^2 + i_r$

1. Calculer les équilibres du système.
2. Caractériser le comportement du système au voisinage de ces équilibres.

Exercice 8.6. Modélisation d'une activité de pêche.

Dans un lac vit une espèce de poissons dont la croissance obéit à une loi logistique. Les poissons sont capturés par des pêcheurs suivant un principe d'action des

masses. Les pêcheurs sont attirés vers le lac avec un taux directement proportionnel à la quantité de poissons dans le lac. Par contre les pêcheurs sont découragés de pêcher avec un taux directement proportionnel au nombre de pêcheurs déjà présents.

1. Etablir un modèle d'état du système.
2. Etudier l'existence et la stabilité des états d'équilibre.