第三章　多维随机变量及其分布

毛雪峰

上海大学理学院数学系

12月21日～12月30日

内容介绍

Outline

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随机变量,由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维随机变量.

3.1.2 二维随机变量分布函数定义

设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数x,y二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\leq x)\cap(Y\leq y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\leq x,Y\leq y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称随机变量X和Y的联合分布函数.

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随机变量,由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维随机变量.

3.1.2 二维随机变量分布函数定义

设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数x,y二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称随机变量X和Y的联合分布函数.

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随机变量,由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维随机变量.

3.1.2 二维随机变量分布函数定义

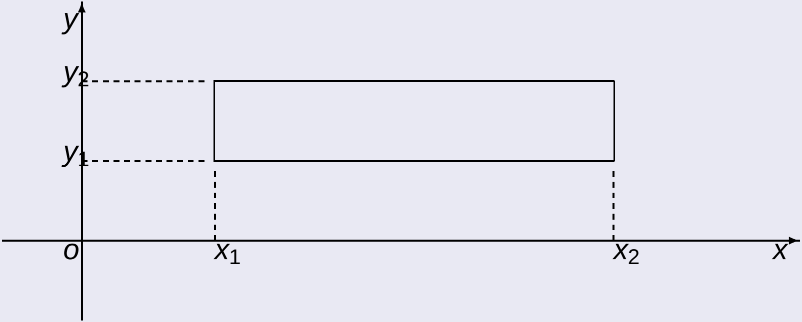
设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数x,y二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\xlongequal{\text{记成}}P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称随机变量X和Y的联合分布函数.

3.1.3 随机点(X,Y)落在矩形区域的概率

$$P\{x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2).$$



3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
(1)对于任意固定的y,当$x_2>x_1$时,$F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$;
(2)对于任意固定的x,当$y_2>y_1$时,$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$.
2. $0\leq F(x,y)\leq 1$, $F(-\infty,-\infty)=0, F(\infty,\infty)=1$. 并且对于任意固定的$x,y$,$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$.
3. $F(x+0,y)=F(x,y), F(x,y+0)=F(x,y)$,即$F(x,y)$关于$x$右连续,关于$y$也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1<y_2$,下述不等式成立:
$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2>x_1$时,$F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2>y_1$时,$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$.
2. $0\leq F(x,y)\leq 1$, $F(-\infty,-\infty)=0$, $F(\infty,\infty)=1$. 并且对于任意固定的x,y,$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$.
3. $F(x+0,y)=F(x,y)$, $F(x,y+0)=F(x,y)$,即$F(x,y)$关于x右连续,关于y也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2,y_1<y_2$,下述不等式成立:
   $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2 > x_1$时,$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时,$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的x,y,$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
3. $F(x+0,y) = F(x,y)$, $F(x,y+0) = F(x,y)$,即$F(x,y)$关于x右连续,关于y也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,下述不等式成立:
   $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2 > x_1$时,$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时,$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的x,y,$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
3. $F(x+0,y) = F(x,y)$, $F(x,y+0) = F(x,y)$,即$F(x,y)$关于x右连续,关于y也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,下述不等式成立: $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2 > x_1$时,$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时,$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的x,y,$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
3. $F(x+0,y) = F(x,y)$, $F(x,y+0) = F(x,y)$,即$F(x,y)$关于x右连续,关于y也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,下述不等式成立:
   $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2 > x_1$时,$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时,$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0, F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的$x,y$,$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
3. $F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y)$,即$F(x,y)$关于$x$右连续,关于$y$也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,下述不等式成立:
   $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
   (1)对于任意固定的y,当$x_2 > x_1$时,$F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;
   (2)对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时,$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.
2. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0, F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的$x,y$,$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
3. $F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y)$,即$F(x,y)$关于$x$右连续,关于$y$也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1 < x_2,y_1 < y_2$,下述不等式成立:
   $F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$.

3.1.4 联合分布函数$F(x,y)$的性质

1. $F(x,y)$是变量x和y的不减函数,即
(1)对于任意固定的y,当$x_2>x_1$时,$F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$;
(2)对于任意固定的x,当$y_2>y_1$时,$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$.
2. $0\leq F(x,y)\leq 1$, $F(-\infty,-\infty)=0, F(\infty,\infty)=1$. 并且对于任意固定的$x,y$,$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$.
3. $F(x+0,y)=F(x,y), F(x,y+0)=F(x,y)$,即$F(x,y)$关于$x$右连续,关于$y$也右连续.
4. 对于任意$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1<y_2$,下述不等式成立:
$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. **定义** 如果二维随机变量(X, Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X, Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$,是二维离散型随机变量$(X, Y)$的所有可能取值.
3. 记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, 则$p_{ij} \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.
4. 称$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$为二维随机变量$(X, Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. 定义　如果二维随机变量(X, Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X, Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$,是二维离散型随机变量$(X, Y)$的所有可能取值.
3. 记$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$, 则$p_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.
4. 称$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$为二维随机变量$(X, Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. **定义**　如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots$,是二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值.
3. 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, 则$p_{ij}\geq 0,\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$
4. 称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$为二维随机变量$(X,Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. **定义** 如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots$,是二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值.
3. 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, 则$p_{ij}\geq 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$.
4. 称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$为二维随机变量$(X,Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. **定义**　如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots$,是二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值.
3. 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, 则$p_{ij}\geq 0,\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$
4. 称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$为二维随机变量$(X,Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.5 离散型二维随机变量

1. **定义** 如果二维随机变量(X,Y)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(X,Y)是离散型的随机变量.
2. 设$(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots$,是二维离散型随机变量(X,Y)的所有可能取值.
3. 记$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, 则$p_{ij}\geq 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$.
4. 称$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$为二维随机变量$(X,Y)$的分布律, 或称随机变量$X$和$Y$的联合分布.

3.1.6 二维离散型随机变量分布的表格表示法

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.1.6 二维离散型随机变量分布的表格表示法

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例3.1.1

设随机变量X在1, 2, 3, 4四个整数中等可能的取一个值另一个随机变量Y在$1 \sim X$中等可能地取一整数值. 试求(X, Y)的分布律.

解: 对$\forall i = 1, 2, 3, 4, j \le i$, 由乘法定理得

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{i}\frac{1}{4} = \frac{1}{4i}.$$

于是(X, Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例3.1.1

设随机变量X在$1,2,3,4$四个整数中等可能的取一个值另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值. 试求(X,Y)的分布律.

解: 对$\forall i=1,2,3,4, j\le i$, 由乘法定理得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\frac{1}{4}=\frac{1}{4i}.$$

于是(X,Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

3.1.7 离散型随机变量X和Y的联合分布函数的计算公式

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}.$$

3.1.8 连续型二维随机变量的定义

若二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$,如果存在非负可积函数$f(x,y)$, 使得对于任意x,y有$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$, 则称$(X,Y)$是连续型的二维随机变量, 函数$f(x,y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的概率密度,或称为随机变量$X$和$Y$的联合概率密度.

3.1.7 离散型随机变量X和Y的联合分布函数的计算公式

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}.$$

3.1.8 连续型二维随机变量的定义

若二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$,如果存在非负可积函数$f(x,y)$, 使得对于任意x,y有$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$, 则称$(X,Y)$是连续型的二维随机变量, 函数$f(x,y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的概率密度,或称为随机变量$X$和$Y$的联合概率密度.

3.1.7 离散型随机变量X和Y的联合分布函数的计算公式

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}.$$

3.1.8 连续型二维随机变量的定义

若二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$,如果存在非负可积函数$f(x,y)$, 使得对于任意x,y有$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$, 则称$(X,Y)$是连续型的二维随机变量, 函数$f(x,y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的概率密度,或称为随机变量$X$和$Y$的联合概率密度.

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(\infty,\infty) = 1.$$
3. 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为
$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_{G} f(x,y)dxdy.$$
4. 若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$

$=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \dfrac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$= \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明: $\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$ 因此若$f(x,y)$在点(x,y)处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明$\because$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\dfrac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\dfrac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$$

$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\dfrac{P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$

$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,$P\{x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

推论3.1.10

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续,则当$\Delta x,\Delta y$很小时,

$$P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

证明:$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}} \frac{1}{\Delta x\Delta y}[F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)]$

$=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$. 因此若$f(x,y)$在点$(x,y)$处连续, 则当$\Delta x,\Delta y$很小时, $P\{x<X\leq x+\Delta x, y<Y\leq y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$.

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} =\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} =\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^{\infty}e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^{\infty}dy=\int_0^{\infty}e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} = \begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$= \begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} = \begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} = \begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases} = \begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \quad\quad\quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases} =\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad\quad 其他\end{cases} =\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad\quad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases} = \begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases} = \begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\le X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\le x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\le X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$

例3.1.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)求分布函数$F(x,y)$; (2)求概率$P\{Y\leq X\}$.

解: $F(x,y)=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2s+t)}dsdt, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x,y>0,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$

设$G=\{(x,y)|y\leq x, x,y\in\mathbb{R}\}$, 则$P\{Y\leq X\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_y^\infty 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$$=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_y^\infty dy=\int_0^\infty e^{-3y}dy=\frac{1}{3}.$$

例3.1.4

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x^2y}, x\geq 1, y\geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数C. (2)求概率$P\{X^2Y>1\}$.

解: $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-x^2y}dydx$

$$=\int_1^{\infty}\frac{-C}{x^2}(e^{-x^2y})|_0^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{c}{x^2}dx=C.$$

$$P\{X^2Y>1\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{x^2}}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y})|_{\frac{1}{x^2}}^{\infty}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=e^{-1}.$$

例3.1.4

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x^2y}, x\geq 1, y\geq 0, \\ 0, \qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数C. (2)求概率$P\{X^2Y>1\}$.

解: $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty} Ce^{-x^2y}dydx$

$$=\int_1^{\infty}\frac{-C}{x^2}(e^{-x^2y})\Big|_0^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{C}{x^2}dx=C.$$

$$P\{X^2Y>1\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{x^2}} f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y})\Big|_{\frac{1}{x^2}}^{\infty}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=e^{-1}.$$

例3.1.4

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x^2y}, x\geq 1, y\geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数C. (2)求概率$P\{X^2Y>1\}$.

解: $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-x^2y}dydx$

$$=\int_1^{\infty}\frac{-C}{x^2}(e^{-x^2y})|_0^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{c}{x^2}dx=C.$$

$$P\{X^2Y>1\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{x^2}}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y})|_{\frac{1}{x^2}}^{\infty}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=e^{-1}.$$

例3.1.4

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} Ce^{-x^2y}, x\geq 1, y\geq 0, \\ 0, \qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数C. (2)求概率$P\{X^2Y>1\}$.

解: $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-x^2y}dydx$

$$=\int_1^{\infty}\frac{-C}{x^2}(e^{-x^2y})|_0^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{C}{x^2}dx=C.$$

$$P\{X^2Y>1\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{x^2}}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y})|_{\frac{1}{x^2}}^{\infty}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=e^{-1}.$$

例3.1.4

设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}Ce^{-x^2y}, x\ge 1, y\ge 0,\\ 0, \qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数C. (2)求概率$P\{X^2Y>1\}$.

解: $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}Ce^{-x^2y}dydx$
$=\int_1^{\infty}\frac{-C}{x^2}(e^{-x^2y})|_0^{\infty}dx=\int_1^{\infty}\frac{C}{x^2}dx=C.$

$P\{X^2Y>1\}=\iint\limits_{y>\frac{1}{x^2}}f(x,y)dxdy=\int_1^{\infty}(-\frac{1}{x^2}e^{-x^2y})|_{\frac{1}{x^2}}^{\infty}dx$
$=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{-1}dx=e^{-1}.$

Outline

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty),$$
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<\infty, Y\le y\}=F(\infty,y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{i,j}, i,j=1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty),$$
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<\infty, Y\le y\}=F(\infty,y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{i,j}, i,j=1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i.}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty),$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{i,j}, i,j = 1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x) = F(x,\infty) = \sum\limits_{x_i \le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty),$$
$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{i,j}, i,j = 1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x) = F(x,\infty) = \sum\limits_{x_i \le x} \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty),$$
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<\infty, Y\le y\}=F(\infty,y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{i,j}, i,j=1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i.}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty),$$
$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X<\infty, Y\le y\}=F(\infty,y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{i,j}, i,j=1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i.}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$.

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数$F(x,y)$, X和Y都是随机变量,各自也有分布函数,将它们分别记为$F_X(x), F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty),$$
$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$$

$F_X(x), F_Y(y)$分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{i,j}, i,j = 1,2,\cdots$, 则

1. 关于X的边缘分布函数为$F_X(x) = F(x,\infty) = \sum\limits_{x_i \le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$.
2. 关于X的边缘分布律 $p_{i\cdot} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1,2,\cdots$.

例3.2.1

一整数N等可能地在$1, 2, 3, \cdots, 10$等10个值中取一个值.设$D = D(N)$是能整除N的正整数的个数, $F = F(N)$是能整除N的素数的个数. 试写出D和F的联合分布律.并求边缘分布律.

解: 样本空间及D, F的取值情况如下表:

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

得D, F的联合分布律和边缘分布律为

F \ D	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D = i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

例3.2.1

一整数N等可能地在$1, 2, 3, \cdots, 10$等10个值中取一个值.设$D = D(N)$是能整除N的正整数的个数, $F = F(N)$是能整除N的素数的个数. 试写出D和F的联合分布律.并求边缘分布律.

解: 样本空间及D, F的取值情况如下表:

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

得D, F的联合分布律和边缘分布律为

F \ D	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D=i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

例3.2.1

一整数N等可能地在$1, 2, 3, \cdots, 10$等10个值中取一个值.设$D = D(N)$是能整除N的正整数的个数, $F = F(N)$是能整除N的素数的个数. 试写出D和F的联合分布律.并求边缘分布律.

解: 样本空间及D, F的取值情况如下表:

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

得D, F的联合分布律和边缘分布律为

F \ D	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
2	0	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$P\{D = i\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

3.2.3 连续型随机变量(X,Y)的边缘概率密度

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{\infty}f(s,t)dt]ds,$$

由此可知X是连续型随机变量并且其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,$$

称$f_X(x)$为(X,Y)关于X的边缘概率密度.

3.2.3 连续型随机变量(X,Y)的边缘概率密度

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(s,t)dt\right]ds,$$

由此可知X是连续型随机变量并且其概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,$$

称$f_X(x)$为(X,Y)关于X的边缘概率密度.

例3.2.2

设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$.

解$\because G=\{(x,y)|x^2\le y\le x\}=\{(x,y)|x^2\le y\le x,0\le x\le 1\}$
$=\{(x,y)|y\le x\le\sqrt{y},0\le y\le 1\}$. 从而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy, 0\le x\le 1\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), 0\le x\le 1\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{y^{\frac{1}{2}}}6dx, 0\le y\le 1\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6(y^{\frac{1}{2}}-y), 0\le y\le 1\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, \qquad\qquad\qquad 其他. \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4 dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k. \therefore k=\frac{1}{8}.$$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\le 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4 dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\ \therefore k=\frac{1}{8}.$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$

(4)$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k. \therefore k=\frac{1}{8}.$$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}$.

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}$.

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, \qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$=k\int_0^2 (6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4 dx=k\int_0^2 (6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2 -\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\le 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$$

(4)$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1, Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\leq 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4 dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$

(2)$P\{X<1, Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5, -\infty<y<\infty\}$

$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$

(4)$P\{X+Y\leq 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.3

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求$P\{X<1,Y<3\}$. (3)求$P\{X<1.5\}$.
(4)求$P\{X+Y\le 4\}$.

解:(1)由$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)dydx$

$=k\int_0^2(6y-xy-\frac{y^2}{2})|_2^4dx=k\int_0^2(6-2x)dx=8k.\therefore k=\frac{1}{8}.$

(2)$P\{X<1,Y<3\}=\int_0^1\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^1\frac{7}{2}-xdx=\frac{3}{8}.$

(3) $P\{X<1.5\}=P\{X<1.5,-\infty<y<\infty\}$

$=\int_0^{1.5}\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\frac{1}{8}\int_0^{1.5}(6-2x)dx=\frac{27}{32}.$

(4)$P\{X+Y\le 4\}=\int_0^2\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dydx=\int_0^2-\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}dx=\frac{1}{3}.$

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$.
称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ 令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$. 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$, $Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$. 称$(X,Y)$为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ 令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$, $Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$
称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为
$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$　　令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得　$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2).$

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$.
称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ 令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$, $Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$ 称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ 令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2).$

例3.2.4

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$都是常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$.
称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布,记为
$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 求$(X,Y)$的边缘概率密度.

解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$

$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$　　令$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得　$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$, $Y\in N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

3.2.4 二维正态分布的边缘分布

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, -\infty < x < \infty.$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, -\infty < y < \infty.$

3.2.5 联合分布与边缘分布的关系

- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,并且不依赖于参数ρ. 对于给定的$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$,不同的$\rho$对应不同的二维正态分布, 但它们的边缘分布都一样.
- 随机变量X和Y的联合分布$\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$关于$X$和关于$Y$的边缘分布.

Outline

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律的定义

设(X,Y)是二维离散型随机变量,对于固定的j,若$P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律.

同样对于固定的i,若$P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律的定义

设(X,Y)是二维离散型随机变量,对于固定的j,若$P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律.

同样对于固定的i,若$P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

3.3.1 离散型随机变量的条件分布律的定义

设(X,Y)是二维离散型随机变量,对于固定的j,若$P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律.

同样对于固定的i,若$P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律.

例3.3.1

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在$X=1$的条件下, Y的条件分布律; (2)求在$Y=0$的条件下,X的条件分布律.

解:(1)$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$;

$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$;$P\{Y=2|X=1\}=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

例3.3.1

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在$X=1$的条件下, Y的条件分布律; (2)求在$Y=0$的条件下,X的条件分布律.

解:(1)$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$;
$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$;$P\{Y=2|X=1\}=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

例3.3.1

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在$X=1$的条件下, Y的条件分布律; (2)求在$Y=0$的条件下,X的条件分布律.

解:(1)$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$;

$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$;$P\{Y=2|X=1\}=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

例3.3.1

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X, Y)具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在$X=1$的条件下, Y的条件分布律; (2)求在$Y=0$的条件下,X的条件分布律.

解:(1)$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$;

$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$;$P\{Y=2|X=1\}=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

例3.3.1

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在$X=1$的条件下, Y的条件分布律; (2)求在$Y=0$的条件下,X的条件分布律.

解:(1)$P\{Y=0|X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$;
$P\{Y=1|X=1\}=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$;$P\{Y=2|X=1\}=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots,n-1.$

又$P\{X=m\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots,$. 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中$m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中$n=m+1,m+2,\cdots.$

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots,n-1.$

$$又P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots,.$$ 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中$m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中$n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0 < p < 1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X, Y)的联合分布律为

$P\{X = m, Y = n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \cdots; m = 1, 2, \cdots, n-1.$

$$又P\{X = m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$= \frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \cdots.$$

$$P\{Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \cdots,$$ 于是条件分布律为

当$n = 2, 3, \cdots$时,$P\{X = m|Y = n\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中 $m = 1, \cdots, n-1$;

当$m = 1, 2, \cdots$时,$P\{Y = n|X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$, 其中 $n = m+1, m+2, \cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

又$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$,. 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中 $m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中 $n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

<u>解</u>: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$

又$P\{X=m\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots,$. 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中 $m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中 $n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

<u>解</u>: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$

又$P\{X=m\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots,$. 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时, $P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中$m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时, $P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中$n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$

又$P\{X=m\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots,$. 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中 $m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中 $n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$

$$又P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots,.$$ 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中 $m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中 $n=m+1,m+2,\cdots.$

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots;m=1,2,\cdots,n-1.$$

又$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2},n=2,3,\cdots,.$$ 于是条件分布律为

当$n=2,3,\cdots$时,$P\{X=m|Y=n\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$,其中$m=1,\cdots,n-1$;

当$m=1,2,\cdots$时,$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}$, 其中$n=m+1,m+2,\cdots$.

例3.3.2

一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0 < p < 1)$, 射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X, Y)的联合分布律为

$P\{X = m, Y = n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \cdots; m = 1, 2, \cdots, n-1.$

又$P\{X = m\} = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2}$

$= \frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \cdots.$

$P\{Y = n\} = \sum\limits_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} = \sum\limits_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}$

$= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \cdots,$. 于是条件分布律为

当$n = 2, 3, \cdots$时,$P\{X = m|Y = n\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中 $m = 1, \cdots, n-1$;

当$m = 1, 2, \cdots$时,$P\{Y = n|X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$, 其中 $n = m+1, m+2, \cdots.$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\leq y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\leq x,y<Y\leq y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad\text{当}\varepsilon\text{很小时},$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x, y \in \mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\leq y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$
\begin{aligned}
P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\} &= \frac{P\{X\leq x, y<Y\leq y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}}\\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt} \qquad \text{当}\varepsilon\text{很小时},\\
&\approx \frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.
\end{aligned}
$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0.$
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$\begin{aligned}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}&=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad \text{当}\varepsilon\text{很小时},\\&\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.\end{aligned}$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad \text{当}\varepsilon\text{很小时},$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$
\begin{aligned}
P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\} &= \frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}\\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_y^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_y^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt} \qquad \text{当}\varepsilon\text{很小时},\\
&\approx \frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.
\end{aligned}
$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":

$$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}\text{分母为零无意义.}$$

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad\text{当}\varepsilon\text{很小时,}$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":

$$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}$$ 当ε很小时,

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\quad 当\varepsilon很小时,$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\leq y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\leq x,y<Y\leq y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\quad \text{当}\varepsilon\text{很小时,}$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x, y \in \mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\leq y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall \varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\leq x, y<Y\leq y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad 当\varepsilon很小时,$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}$$ 当ε很小时,

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\quad \text{当}\varepsilon\text{很小时,}$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\quad \text{当}\varepsilon\text{很小时,}$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}$$

当ε很小时,

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":
$\frac{P\{Y\leq y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}=\frac{P\{X\leq x,y<Y\leq y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leq y+\varepsilon\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad 当\varepsilon很小时,$$

$$\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.$$

问题:

对连续型变量(X,Y)及$\forall x,y\in\mathbb{R}$有$P\{X=x\}=P\{Y=y\}=0$.
因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":

$$\frac{P\{Y\le y\}\bigcap\{X=x\}}{P\{X=x\}}$$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 给定y,对$\forall\varepsilon>0$, 对$\forall x$,考虑条件概率$P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}$,设$P\{y<Y\le y+\varepsilon\}>0$, 则有

$$\begin{aligned}P\{X\le x|y<Y\le y+\varepsilon\}&=\frac{P\{X\le x,y<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\le y+\varepsilon\}}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_y^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_y^{y+\varepsilon}f_Y(t)dt}\qquad \text{当}\varepsilon\text{很小时},\\&\approx\frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x}f(s,y)ds}{\varepsilon f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds.\end{aligned}$$

3.3.2 条件概率密度的定义

设$f(x,y)$和$f_Y(y)$分别为二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度和关于Y的边缘概率密度，若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 则称

$$f_{X|Y}(x|y) \xlongequal{\text{定义}} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度.

3.3.3 条件分布函数的定义

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在$Y=y$的条件下X的条件分布函数, 记为$P\{X \le x|Y=y\}$ 或$F_{X|Y}(x|y)$. 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y=y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx.$$

3.3.2 条件概率密度的定义

设$f(x,y)$和$f_Y(y)$分别为二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度和关于Y的边缘概率密度，若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 则称

$$f_{X|Y}(x|y) \xlongequal{\text{定义}} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度.

3.3.3 条件分布函数的定义

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在$Y=y$的条件下X的条件分布函数，记为$P\{X\leq x|Y=y\}$ 或$F_{X|Y}(x|y)$. 即

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X\leq x|Y=y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx.$$

3.3.2 条件概率密度的定义

设$f(x,y)$和$f_Y(y)$分别为二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度和关于Y的边缘概率密度, 若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 则称

$$f_{X|Y}(x|y) \xlongequal{\text{定义}} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度.

3.3.3 条件分布函数的定义

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$ 为在$Y=y$的条件下X的条件分布函数, 记为$P\{X\le x|Y=y\}$ 或$F_{X|Y}(x|y)$. 即

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx.$$

例3.3.3

设G是平面上的有界区域,其面积为A. 若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布.现设二维随机变量(X,Y)在圆域$x^2+y^2\leq 1$上服从均匀分布,求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

解: 由已知$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2\leq 1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$ 且有边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\leq 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$|y|<1$时,

有$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例3.3.3

设G是平面上的有界区域,其面积为A. 若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布.现设二维随机变量(X,Y)在圆域$x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布,求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

<u>解</u>: 由已知$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1,\\ 0, \quad \text{其他},\end{cases}$ 且有边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, |y|\le 1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

当$|y|<1$时,

有$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2},\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

Outline

3.4.1 随机变量X和Y相互独立的定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X\leq x,Y\leq y\}=P\{X\leq x\}P\{Y\leq y\},$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对于(X,Y) 的所有可能取值(x_i,y_j) 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上几乎处处成立.

3.4.1 随机变量X和Y相互独立的定义

设$F(x,y)$及$F_X(x), F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对于(X,Y) 的所有可能取值(x_i,y_j) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$在平面上几乎处处成立.

3.4.1 随机变量X和Y相互独立的定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\},$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对于(X,Y) 的所有可能取值(x_i,y_j) 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上几乎处处成立.

3.4.1 随机变量X和Y相互独立的定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\},$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对于(X,Y) 的所有可能取值(x_i,y_j) 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上几乎处处成立.

3.4.1 随机变量X和Y相互独立的定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\},$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对于(X,Y) 的所有可能取值(x_i,y_j) 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

(2) 若(X,Y)是连续型随机变量, $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X,Y相互独立 $\Longleftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上几乎处处成立.

例3.4.1

若(X,Y)是离散型随机变量,并且具有分布律

Y \ X	0	1	$P\{Y=j\}$
1	1/6	1/3	1/2
2	1/6	1/3	1/2
$P\{X=i\}$	1/3	2/3	1

试问:X和Y是否相互独立.

解: $\because P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=P\{X=0\}P\{Y=1\}$;

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{6}=P\{X=0\}P\{Y=2\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{3}=P\{X=1\}P\{Y=2\}.$$

$\therefore X$和Y 相互独立.

例3.4.1

若(X,Y)是离散型随机变量,并且具有分布律

Y \ X	0	1	$P\{Y=j\}$
1	$1/6$	$1/3$	$1/2$
2	$1/6$	$1/3$	$1/2$
$P\{X=i\}$	$1/3$	$2/3$	1

试问:X和Y是否相互独立.

解: $\because P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=P\{X=0\}P\{Y=1\};$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{6}=P\{X=0\}P\{Y=2\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{3}=P\{X=1\}P\{Y=2\}.$$

$\therefore X$和Y 相互独立.

例3.4.2

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0, \\ 0, \quad\quad\quad \text{其他}.\end{cases}$$

试问X和Y是否独立?

解:

$$\because f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}0, x\le 0\\ \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dy=2e^{-2x}, x>0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}0, y\le 0\\ \int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dx=e^{-y}, y>0\end{cases}$$

$\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 故$X$和$Y$相互独立.

二维正态随机变量(X,Y), 随机变量X和Y独立的刻画

设(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布, 则其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

X和Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在$8\sim10$时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在$7\sim9$时, 设他们两人同时到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

二维正态随机变量(X,Y), 随机变量X和Y独立的刻画

设(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布, 则其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}.$$

X和Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在$8\sim10$时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在$7\sim9$时, 设他们两人同时到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

二维正态随机变量(X,Y), 随机变量X和Y独立的刻画

设(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布, 则其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

X和Y相互独立的充要条件是参数$\rho=0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在$8\sim 10$时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在$7\sim 9$时, 设他们两人同时到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

作业

1. 设随机变量(X,Y)的概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, \quad\quad\quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$
求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1,\\ 0, \quad\quad\quad\quad\quad 其他.\end{cases}$$
(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$, 并求$P\{Y\ge 1/4|X=1/2\}$.

作业

1. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1,\\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$, 并求$P\{Y\ge 1/4|X=1/2\}$.

作业

1. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1, \\ 0, \qquad\qquad\quad 其他.\end{cases}$$

求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, x^2\le y\le 1, \\ 0, \qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$, 并求$P\{Y\ge 1/4|X=1/2\}$.

n维随机变量的定义

设E是一个随机试验,它的样本空间是S,设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是定义在S上的随机变量,由它们构成的一个n维向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$叫做n-维随机向量或n-维随机变量.

n维随机变量的分布函数

对于任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$ 称

为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布函数.

n维连续型随机变量和其概率密度函数的定义

若存在非负可积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,使得对于任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

则称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度函数.

n维随机变量的边缘分布函数

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\cdots,\infty\},F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\cdots,\infty).$$

n维随机变量的边缘概率密度

设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_2dx_3\cdots dx_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_3dx_4\cdots dx_n.$$

n维随机变量的边缘分布函数

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\cdots,\infty\},F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\cdots,\infty).$$

n维随机变量的边缘概率密度

设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_2dx_3\cdots dx_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_3dx_4\cdots dx_n.$$

n维随机变量的边缘分布函数

设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\cdots,\infty\},F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\cdots,\infty).$$

n维随机变量的边缘概率密度

设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是n-维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度，则$(X_1,X_n,\cdots,X_n)$关于X_1、(X_1,X_2)的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_2dx_3\cdots dx_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_3dx_4\cdots dx_n.$$

相互独立的定义

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$, 则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设F_1, F_2, F 依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m), (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$的分布函数, 若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

则称随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立的.

重要定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立, 则$X_i (i = 1, 2, \cdots, m)$和$Y_j (j = 1, 2, \cdots, n)$相互独立. 又若$h, g$是连续函数,则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

相互独立的定义

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$, 则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设F_1, F_2, F 依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m), (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$的分布函数, 若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

则称随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立的.

重要定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立, 则$X_i(i = 1, 2, \cdots, m)$和$Y_j(j = 1, 2, \cdots, n)$相互独立. 又若h, g是连续函数,则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

相互独立的定义

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$, 则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设F_1, F_2, F 依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m), (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$的分布函数, 若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$有

$$\underline{F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)},$$

则称随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立的.

重要定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立, 则$X_i (i = 1, 2, \cdots, m)$和$Y_j (j = 1, 2, \cdots, n)$相互独立. 又若$h, g$是连续函数,则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

相互独立的定义

若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_n$有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$, 则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设F_1, F_2, F 依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m), (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$的分布函数, 若对于所有的$x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n$有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

则称随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是相互独立的.

重要定理

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立, 则$X_i(i = 1, 2, \cdots, m)$和$Y_j(j = 1, 2, \cdots, n)$相互独立. 又若h, g是连续函数,则$h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

Outline

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx.$
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit).$
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z=X+Y$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x,y)$, 则

- $Z=X+y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx.$
- 若X和Y相互独立,设(X,Y)关于X,Y的边缘分布密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit).$
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为f_X*f_Y.

$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x, y)$, 则

- $Z = X + y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为$f_X * f_Y$.

$Z=X+Y$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x,y)$, 则

- $Z=X+y$为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$
- 或则$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$.
- 若X和Y相互独立,设(X,Y)关于X,Y的边缘分布密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (\clubsuit)$
- $f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (\spadesuit)$.
- $(\clubsuit)$和$(\spadesuit)$称为f_X和f_Y的卷积公式, 记为f_X*f_Y.

Example

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从$N(0,1)$分布,其概率密度为

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$

求$Z=X+Y$的概率密度.

一般的结论

- 设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,
  则$Z=X+Y$服从正态分布且$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

Example

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从$N(0,1)$分布,其概率密度为

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$

求$Z = X + Y$的概率密度.

一般的结论

- 设X, Y相互独立且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,
  则$Z = X + Y$服从正态分布且$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

Example

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从$N(0,1)$分布,其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

一般的结论

- 设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 则$Z=X+Y$服从正态分布且$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

Example

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从$N(0,1)$分布,其概率密度为

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$

求$Z=X+Y$的概率密度.

一般的结论

- 设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,
  则$Z=X+Y$服从正态分布且$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

Example

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从$N(0,1)$分布,其概率密度为

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$

求$Z=X+Y$的概率密度.

一般的结论

- 设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,
  则$Z=X+Y$服从正态分布且$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

Example

1. 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty,$$
又设随机变量Y在$(-1,1)$服从均匀分布,且X和Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度.
2. 在一简单电路中, 两电阻R_1和R_2串联连接,设R_1, R_2相互独立, 它们的概率密度均为
$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$
求总电阻$R = R_1 + R_2$的概率密度.

Example

1. 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty,$$
又设随机变量Y在$(-1,1)$服从均匀分布,且X和Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度.

2. 在一简单电路中, 两电阻R_1和R_2串联连接,设R_1, R_2相互独立, 它们的概率密度均为
$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0, \quad\quad 其他. \end{cases}$$
求总电阻$R = R_1 + R_2$的概率密度.

Example

1. 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty,$$
又设随机变量Y在$(-1,1)$服从均匀分布,且X和Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度.
2. 在一简单电路中, 两电阻R_1和R_2串联连接,设R_1, R_2相互独立, 它们的概率密度均为
$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0, \qquad\qquad \text{其他}. \end{cases}$$
求总电阻$R = R_1 + R_2$的概率密度.

$M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设X,Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$. 设$M=\max\{X,Y\}$,$N=\min\{X,Y\}$, 则

- $$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\};$$
- $F_N(z)=P(\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\};$
- 若X,Y相互独立, 则 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ 并且
  $$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

$M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设X,Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.
设$M=\max\{X,Y\},N=\min\{X,Y\}$, 则

- $$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\};$$
- $F_N(z)=P(\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\};$
- 若X,Y相互独立, 则 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ 并且
$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

$M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设X,Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$. 设$M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$, 则

- $$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z, Y\le z\};$$
- $F_N(z)=P(\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\};$
- 若X,Y相互独立, 则 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ 并且
$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

$M = \max\{X, Y\}$及$N = \min\{X, Y\}$的分布

设X, Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$. 设$M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}$, 则

- $$F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\};$$
- $F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\};$
- 若X, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且 $$F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

$M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

设X,Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.
设$M=\max\{X,Y\},N=\min\{X,Y\}$, 则

- $$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\};$$
- $F_N(z)=P(\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\};$
- 若X,Y相互独立, 则 $F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$ 并且
$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

Example

设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2连接而成,连接的方式分别为(i)串联,(ii)并联, (iii)备用(当系统L_1损坏时,系统L_2开始工作).设L_1, L_2的寿命分别为X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, \qquad x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, y > 0, \\ 0, \qquad y \leq 0, \end{cases}$$

其中$\alpha > 0, \beta > 0$ 且$\alpha \neq \beta$.试分别就以上三种连接方式写出L的寿命Z的概率密度.

作业

1. 设随机变量X和Y分别在$(-1,0)$和$(0,1)$上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求$Z=X+Y$的概率密度以及$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.
2. 设随机变量X_1和X_2独立同分布于$N(0,1)$, 求$Y=X_1^2+X_2^2$概率密度函数.
3. 设X和Y的联合概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$
求$Z=X-Y$的概率密度和$T=\min\{X,Y\}$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X和Y分别在$(-1,0)$和$(0,1)$上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求$Z=X+Y$的概率密度以及$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.
2. 设随机变量X_1和X_2独立同分布于$N(0,1)$, 求$Y=X_1^2+X_2^2$概率密度函数.
3. 设X和Y的联合概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0, \\ 0, \qquad\qquad 其他. \end{cases}$$
求$Z=X-Y$的概率密度和$T=\min\{X,Y\}$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X和Y分别在$(-1,0)$和$(0,1)$上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求$Z=X+Y$的概率密度以及$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.
2. 设随机变量X_1和X_2独立同分布于$N(0,1)$, 求$Y=X_1^2+X_2^2$概率密度函数.
3. 设X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

求$Z=X-Y$的概率密度和$T=\min\{X,Y\}$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X和Y分别在$(-1,0)$和$(0,1)$上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求$Z=X+Y$的概率密度以及$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.
2. 设随机变量X_1和X_2独立同分布于$N(0,1)$, 求$Y=X_1^2+X_2^2$概率密度函数.
3. 设X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$Z=X-Y$的概率密度和$T=\min\{X,Y\}$的概率密度.

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X,Y)的概率密度和边缘概率密度分别为$f(x,y)$,$f_X(x)$,$f_Y(y)$,若存在一点(x_0,y_0),使得

$$f(x_0,y_0)\neq f_X(x_0)f_Y(y_0),$$

则X和Y不相互独立(　).

课堂练习2 选择题

$$\text{设二维随机变量}(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2<1,\\ 0, \qquad \text{其他}.\end{cases}$$

则X与Y为(　)

(A)独立同分布的随机变量　(B) 独立不同分布的随机变量

(C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X,Y)的概率密度和边缘概率密度分别为$f(x,y)$,$f_X(x)$, $f_Y(y)$,若存在一点(x_0,y_0),使得

$$f(x_0,y_0)\neq f_X(x_0)f_Y(y_0),$$

则X和Y不相互独立(　).

课堂练习2 选择题

$$设二维随机变量(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

则X与Y为(　)

(A)独立同分布的随机变量　(B) 独立不同分布的随机变量

(C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X,Y)的概率密度和边缘概率密度分别为$f(x,y)$,$f_X(x)$, $f_Y(y)$,若存在一点(x_0,y_0),使得

$$f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)f_Y(y_0),$$

则X和Y不相互独立(　).

课堂练习2 选择题

$$\text{设二维随机变量}(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2+y^2<1, \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}$$

则X与Y为(　)

(A)独立同分布的随机变量　(B) 独立不同分布的随机变量

(C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

课堂练习3-4

1. 设二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_Y(y)$和条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

2. 已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	−1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0	0.3	0.4

求$Z=X+Y$的分布律.

课堂练习3-4

1. 设二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为
$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\0, \quad 其他.\end{cases}$$
求边缘概率密度$f_Y(y)$和条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

2. 已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0	0.3	0.4

求$Z=X+Y$的分布律.

课堂练习3-4

1. 设二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_Y(y)$和条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

2. 已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	−1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0	0.3	0.4

求$Z=X+Y$的分布律.

课堂练习3-4

1. 设二元随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

求边缘概率密度$f_Y(y)$和条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

2. 已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0	0.3	0.4

求$Z=X+Y$的分布律.

课堂练习5

设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, 0<x<10, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$概率密度. .

课堂练习5

设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0<x<10, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$Z=X+Y$概率密度. .

课堂练习6

设以表示某一推销员一天花费在汽油上的款项(以美元计),以Y表示推销员一天所得的补贴(以美元计),已知X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{25}\frac{20-x}{x}, 10<x<20, \frac{x}{2}<y<x,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$,问X和Y是否相互独立?
(2)求条件概率密度$f_{Y|X}(y|X)$.
(3)求$x=12$时,Y的条件概率密度.
(4) 求条件概率$P\{Y\geq 8|X=12\}$.

课堂练习6

设以表示某一推销员一天花费在汽油上的款项(以美元计),以Y表示推销员一天所得的补贴(以美元计),已知X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{25}\frac{20-x}{x}, & 10<x<20, \frac{x}{2}<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求边缘概率密度$f_X(x), f_Y(y)$,问X和Y是否相互独立?
(2)求条件概率密度$f_{Y|X}(y|X)$.
(3)求$x=12$时,Y的条件概率密度.
(4) 求条件概率$P\{Y\geq 8|X=12\}$.

课堂练习7

对某种电子装置的输出测量了5次,得到结果为X_1, X_2, X_3, X_4, X_5.设它们是相互独立的随机变量且都服从参数$\sigma = 2$的瑞利分布, 即概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}, x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求$Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$的分布函数.
(2)求$P\{Z > 4\}$.

作业

1. 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 当给定$X = x$时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   (1)求X和Y的联合概率密度$f(x,y)$. (2)求边缘密度$f_Y(y)$,并画出图形. (3)求$P\{X > Y\}$

2. 设二维随机变量$(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, -0.5)$, 求$X + Y$的概率密度函数.

作业

1. 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 当给定$X = x$时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, 0 < y < \frac{1}{x}, & \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)求X和Y的联合概率密度$f(x,y)$. (2)求边缘密度$f_Y(y)$,并画出图形. (3)求$P\{X > Y\}$

2. 设二维随机变量$(X,Y) \sim N(0,0,1,1,-0.5)$, 求$X+Y$的概率密度函数.

作业

1. 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 当给定$X = x$时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)求X和Y的联合概率密度$f(x,y)$. (2)求边缘密度$f_Y(y)$,并画出图形. (3)求$P\{X > Y\}$

2. 设二维随机变量$(X,Y) \sim N(0,0,1,1,-0.5)$, 求$X+Y$的概率密度函数.

$Z=\frac{Y}{X}$、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x,y)$,则$Z=\frac{Y}{X}$、$Z=XY$仍为连续型随机变量,其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx, \tag{1}$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx. \tag{2}$$

若X,Y相互独立,设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$,则(1),(2)两式可分别化为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx.$$

$Z=\frac{Y}{X}$、$Z=XY$的分布

设(X,Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度$f(x,y)$,则$Z=\frac{Y}{X}$、$Z=XY$仍为连续型随机变量,其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx, \tag{1}$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx. \tag{2}$$

若X,Y相互独立,设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x),f_Y(y)$,则(1),(2)两式可分别化为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx.$$

Example

某公司提供一种地震保险,保险费Y的概率密度为

$$f(Y)=\begin{cases}\frac{y}{25}e^{-\frac{y}{5}}, y>0, \\ 0, & 其他,\end{cases} \qquad \alpha>0,\theta>0.$$

保险赔付X的概率密度为

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x>0, \\ 0, & 其他,\end{cases} \qquad \alpha>0,\theta>0.$$

设X与Y相互独立,求$Z=\frac{Y}{X}$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, & \\ 0, & 其他. \end{cases}$$
求$Z = Y/X$的概率密度.

2. 设随机变量(X, Y)的概率密度为
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, & \\ 0, & 其他. \end{cases}$$
分别求(1)$Z = X + Y$,(2)$Z = XY$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, & \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$Z = Y/X$的概率密度.

2. 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, & \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

分别求(1)$Z = X + Y$, (2)$Z = XY$的概率密度.

作业

1. 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为
$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, & \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$
求$Z=Y/X$的概率密度.
2. 设随机变量(X, Y)的概率密度为
$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0<x<10, 0<y<1, & \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$
分别求(1)$Z=X+Y$, (2)$Z=XY$的概率密度.

Example

设随机变量X,Y相互独立,且分别服从参数为$\alpha,\theta;\beta,\theta$的$\Gamma$分布(分别记成$X\sim\Gamma(\alpha,\theta),Y\sim\Gamma(\beta,\theta)$). X,Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0, \\ 0, \qquad \text{其他},\end{cases} \qquad \alpha>0,\theta>0.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^\beta\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}e^{-\frac{y}{\theta}}, y\geq 0, \\ 0, \qquad \text{其他},\end{cases} \qquad \beta>0,\theta>0.$$

试证明$Z=X+Y$服从参数为$\alpha+\beta,\theta$的Γ分布,即$X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.