第六章　样本及抽样分布

毛雪峰

上海大学理学院数学系

1月11日～1月15日

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据, 来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料; 如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中, 我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的, 在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中, 我们研究的随机变量, 它的分布是未知的, 或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值, 再分析数据推断结论.

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据,来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料;如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中,我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的,在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中,我们研究的随机变量,它的分布是未知的,或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值,再分析数据推断结论.

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据,来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料;如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中,我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的,在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中,我们研究的随机变量,它的分布是未知的,或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值,再分析数据推断结论.

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据, 来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料; 如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中, 我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的, 在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中, 我们研究的随机变量, 它的分布是未知的, 或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值, 再分析数据推断结论.

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据, 来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料; 如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中, 我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的, 在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中, 我们研究的随机变量, 它的分布是未知的, 或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值, 再分析数据推断结论.

数理统计是怎样一门学科?

数理统计是以概率论为理论基础,根据试验或观察得到的数据,来研究随机现象,对研究的对象的客观规律作出合理的估计和判断.

数理统计包括的内容

如何收集、整理数据资料;如何对所得的数据进行分析、研究,从而对所研究的对象的性质、特点作出推断.

数理统计与概率论的区别

- 在概率论中,我们所研究的随机变量,它的分布都是假设已知的,在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性.
- 在数理统计中,我们研究的随机变量,它的分布是未知的,或者是不完全知道的,人们是通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察,得到许多观察值,再分析数据推断结论.

内容介绍

Outline

6.1.1总体和个体

定义:在数理统计中,往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察,将试验的全部可能的观察值称为总体,每个可能的观察值称为个体,总体中所包含的个体的个数称为总体的容量,总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X,可不区分总体与相应的随机变量,笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义: 在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义:在数理统计中，往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察，将试验的全部可能的观察值称为总体，每个可能的观察值称为个体，总体中所包含的个体的个数称为总体的容量，总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X，可不区分总体与相应的随机变量，笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义:在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义: 在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义:在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义: 在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.1总体和个体

定义:在数理统计中, 往往需要研究有关对象的某一项数量指标. 对这一数量指标进行试验或观察, 将试验的全部可能的观察值称为总体, 每个可能的观察值称为个体, 总体中所包含的个体的个数称为总体的容量, 总体按容量可分为有限总体和无限总体.

为什么总体可看成是一个随机变量?

总体的每一个个体是随机试验的一个观察值,这个取值有一定的分布,而且具有随机性. 所以一个总体对应一个随机变量X, 可不区分总体与相应的随机变量, 笼统称为总体X. X的分布函数和数字特征就是总体的分布函数和数字特征.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F, 在相同条件下, 对总体X进行n次重复独立的观察,得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$,称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的, 容量为n的简单随机样本,简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值,
称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值,又称为X的n个独立的观察值.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F, 在相同条件下, 对总体X进行n次重复独立的观察,得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$,称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的, 容量为n的简单随机样本,简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值, 称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值,又称为X的n个独立的观察值.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F, 在相同条件下, 对总体X进行n次重复独立的观察,得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$,称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的, 容量为n的简单随机样本,简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值,
称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值,又称为X的n个独立的观察值.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F, 在相同条件下, 对总体X进行n次重复独立的观察,得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$,称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的, 容量为n的简单随机样本,简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值,
称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值,又称为X的n个独立的观察值.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F，在相同条件下，对总体X进行n次重复独立的观察，得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$，称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的，容量为n的简单随机样本，简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值，称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值，又称为X的n个独立的观察值.

6.1.2样本的定义

设总体X的分布函数为F, 在相同条件下, 对总体X进行n次重复独立的观察,得到n个结果$X_1, X_2, \cdots, X_n$,称随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X或来自分布函数F的, 容量为n的简单随机样本,简称样本.

6.1.3样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的性质

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都与总体X具有相同的分布.
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$的观察值,
称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值,又称为X的n个独立的观察值.

实际中怎样抽取简单随机样本？(有限总体)

- 当总体容量不是很大时,从总体中抽取一个个体观察再放回,然后再抽取一个个体观察再放回,依次类推作放回抽样.
- 当总体中个体总数比样本容量大很多时, 可采用不放回抽样, 也可近似得到简单随机样本.

例6.1.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本,则$X_1, X_2, \cdots, X_n$必然满足(　)
(A)独立但分布不同　(B) 分布相同但不相互独立
(C)独立同分布　(D) 不能确定

实际中怎样抽取简单随机样本？(有限总体)

- 当总体容量不是很大时,从总体中抽取一个个体观察再放回,然后再抽取一个个体观察再放回,依次类推作放回抽样.
- 当总体中个体总数比样本容量大很多时, 可采用不放回抽样, 也可近似得到简单随机样本.

例6.1.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本,则$X_1, X_2, \cdots, X_n$必然满足(　)

(A)独立但分布不同　(B) 分布相同但不相互独立

(C)独立同分布　(D) 不能确定

实际中怎样抽取简单随机样本？(有限总体)

- 当总体容量不是很大时,从总体中抽取一个个体观察再放回,然后再抽取一个个体观察再放回,依次类推作放回抽样.
- 当总体中个体总数比样本容量大很多时, 可采用不放回抽样, 也可近似得到简单随机样本.

例6.1.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本,则$X_1, X_2, \cdots, X_n$必然满足(　)

(A)独立但分布不同　(B) 分布相同但不相互独立

(C)独立同分布　(D) 不能确定

实际中怎样抽取简单随机样本？(有限总体)

- 当总体容量不是很大时,从总体中抽取一个个体观察再放回,然后再抽取一个个体观察再放回,依次类推作放回抽样.
- 当总体中个体总数比样本容量大很多时, 可采用不放回抽样, 也可近似得到简单随机样本.

例6.1.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本,则$X_1, X_2, \cdots, X_n$必然满足(　)

(A)独立但分布不同　(B) 分布相同但不相互独立

(C)独立同分布　(D) 不能确定

实际中怎样抽取简单随机样本？(有限总体)

- 当总体容量不是很大时,从总体中抽取一个个体观察再放回,然后再抽取一个个体观察再放回,依次类推作放回抽样.
- 当总体中个体总数比样本容量大很多时, 可采用不放回抽样, 也可近似得到简单随机样本.

例6.1.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的一个样本,则$X_1, X_2, \cdots, X_n$必然满足(　)

(A)独立但分布不同　(B) 分布相同但不相互独立

(C)独立同分布　(D) 不能确定

Outline

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个**统计量**.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**观察值**.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

6.2.1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,

- 设$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数,并且g中不包含未知参数,则称$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是一个统计量.
- 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的样本值,称$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观察值.

为什么要抽取样本构造统计量?

了解总体的性质,最理想的办法是对个体逐个观察,但不现实.

1. 许多观察或试验是破坏性的,或则由于容量比较大,逐个观察或试验要耗费大量的人力、物力、财力.
2. 直接使用样本有时太繁琐,不容易用数学方法来研究, 难以提供有效的易了解的信息,因此必须对样本进行加工处理,构造不含未知参数的样本的连续函数.

例6.2.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本,其中μ, σ^2未知,则下面不是统计量的是(   )

(A)X_i, (B)$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

(C)$\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, (D)$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

例6.2.1

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本,其中μ, σ^2未知,则下面不是统计量的是(　)

(A)X_i, (B)$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

(C)$\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, (D)$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

6.2.2常用的统计量

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1,x_2,\cdots,x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$;
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$;
3. 样本标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$;
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k, k=1,2,\cdots$;
5. 样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k, k=2,3,\cdots$;

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$;
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$;
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots$;
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots$;

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2);$
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2};$
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots;$

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2);$
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2};$
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots;$

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$;
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$;
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots$;
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots$;

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$;
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$;
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$;
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots$;
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots$;

6.2.2常用的统计量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是这一样本的观察值.

1. 样本平均值 $\overline{X} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$;
2. 样本方差 $S^2 \triangleq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)$;
3. 样本标准差 $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$;
4. 样本k阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \cdots$;
5. 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, k = 2, 3, \cdots$;

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

上述统计量的观察值

1. $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i;$
2. $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2);$
3. $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2};$
4. $a_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k, k = 1, 2, \cdots;$
5. $b_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k, k = 2, 3, \cdots.$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本,$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}),D(\overline{X})$和$E(S^2)$.

解：$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu=\mu,$

$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}.$

$$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)]=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差, 求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$ 和$E(S^2)$.

解: $E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu,$

$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$

$$E(S^2) = E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)] = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)] = \sigma^2$$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差, 求$E(\overline{X}),D(\overline{X})$ 和$E(S^2)$.

解： $E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu=\mu,$

$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}.$

$$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)]=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本, $\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差, 求$E(\overline{X}),D(\overline{X})$ 和$E(S^2)$.

解：$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu=\mu,$

$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}.$

$$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)]=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差, 求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$ 和$E(S^2)$.

解：$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu,$

$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$

$$E(S^2) = E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)] = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2)] = \sigma^2$$

例6.2.3

设总体X的数学期望为μ,方差为σ^2,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别是样本均值和样本方差, 求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$ 和$E(S^2)$.

解：$E(\overline{X}) = E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu = \mu$,

$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$E(S^2) = E[\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)] = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)]$$

$$= \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)] = \sigma^2$$

假设总体X的k阶矩$E(X^k) \xlongequal{\text{记成}} \mu_k$存在

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与X同分布，所以$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$独立且与$X^k$同分布并且$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.
由辛钦大数定理可知

- 当$n \to \infty$时，$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.
- 若g为连续函数，则$g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$.

假设总体X的k阶矩$E(X^k) \xlongequal{\text{记成}} \mu_k$存在

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与X同分布, 所以$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$独立且与$X^k$同分布并且$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.

由辛钦大数定理可知

- 当$n \to \infty$时,$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.
- 若g为连续函数, 则$g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$.

假设总体X的k阶矩$E(X^k) \xlongequal{\text{记成}} \mu_k$存在

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与X同分布, 所以$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$独立且与$X^k$同分布并且$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.
由辛钦大数定理可知

- 当$n \to \infty$时,$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.
- 若g为连续函数, 则$g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$.

假设总体X的k阶矩$E(X^k) \xlongequal{\text{记成}} \mu_k$存在

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与X同分布, 所以$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$独立且与$X^k$同分布并且$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.
由辛钦大数定理可知

- 当$n \to \infty$时,$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.
- 若g为连续函数, 则$g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$.

假设总体X的k阶矩$E(X^k) \xlongequal{\text{记成}} \mu_k$存在

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且与X同分布, 所以$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$独立且与$X^k$同分布并且$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.
由辛钦大数定理可知

- 当$n \to \infty$时,$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.
- 若g为连续函数, 则$g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$.

6.2.3 与总体X的分布函数$F(x)$相应的统计量—经验分布函数

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体F的一个样本,用$S(x), -\infty < x < \infty$表示$X_1, X_2, \cdots, X_n$中不大于$x$的随机变量的个数. 定义经验分布函数$F_n(x)$为

$$F_n(x) = \frac{1}{n}S(x), -\infty < x < \infty.$$

6.2.4 经验分布函数的一般算法

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是相应于样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的样本值,将它们按由小到大排列,并重新编号,设为$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$,则经验分布函数的观察值为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & 若x < x_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & 若x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, k = 1, 2, \cdots, n-1, \\ 1, & 若x \ge x_{(n)}. \end{cases}$$

6.2.3 与总体X的分布函数$F(x)$相应的统计量—经验分布函数

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体F的一个样本,用$S(x), -\infty < x < \infty$表示$X_1, X_2, \cdots, X_n$中不大于$x$的随机变量的个数. 定义经验分布函数$F_n(x)$为
$$F_n(x) = \frac{1}{n}S(x), -\infty < x < \infty.$$

6.2.4 经验分布函数的一般算法

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是相应于样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的样本值,将它们按由小到大排列,并重新编号,设为$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$,则经验分布函数的观察值为
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & 若x < x_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & 若x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, k = 1, 2, \cdots, n-1, \\ 1, & 若x \ge x_{(n)}. \end{cases}$$

6.2.3 与总体X的分布函数$F(x)$相应的统计量—经验分布函数

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体F的一个样本,用$S(x), -\infty < x < \infty$表示$X_1, X_2, \cdots, X_n$中不大于$x$的随机变量的个数. 定义**经验分布函数**$F_n(x)$为

$$F_n(x) = \frac{1}{n}S(x), -\infty < x < \infty.$$

6.2.4 经验分布函数的一般算法

设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是相应于样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的样本值,将它们按由小到大排列,并重新编号,设为$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$,则经验分布函数的观察值为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若} x < x_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & \text{若} x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, k = 1, 2, \cdots, n-1, \\ 1, & \text{若} x \ge x_{(n)}. \end{cases}$$

例6.2.4

设某商店100天销售电视机的情况有如下统计资料

日出售台数	2	3	4	5	6	合计
天　　数	20	30	10	25	15	100

设X表示商店1天销售的电视机台数(即总体), 求样本均值$\overline{x}$,样本方差s_{100}^2,经验分布函数$F_{100}(x)$的观察值.

解: $\overline{X}=\frac{1}{100}[2\times 20+3\times 30+4\times 10+5\times 25+6\times 15]=\frac{9}{2}$
$s_{100}^2=\frac{1}{99}[4\times 20+9\times 30+16\times 10+625+36\times 15-25\times 81]$

6.2.5 定理　　Glivenko (1933)

对于任一实数x,当$n\to\infty$时$F_n(x)$以概率1一致收敛于分布函数,即　$P\{\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\}=1.$

例6.2.4

设某商店100天销售电视机的情况有如下统计资料

日出售台数	2	3	4	5	6	合计
天　　数	20	30	10	25	15	100

设X表示商店1天销售的电视机台数(即总体), 求样本均值$\overline{x}$,样本方差s_{100}^2,经验分布函数$F_{100}(x)$的观察值.

解: $\overline{X} = \frac{1}{100}[2 \times 20 + 3 \times 30 + 4 \times 10 + 5 \times 25 + 6 \times 15] = \frac{9}{2}$

$s_{100}^2 = \frac{1}{99}[4 \times 20 + 9 \times 30 + 16 \times 10 + 625 + 36 \times 15 - 25 \times 81]$

6.2.5 定理　　Glivenko (1933)

对于任一实数x,当$n \to \infty$时$F_n(x)$以概率1一致收敛于分布函数,即 $P\{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\} = 1.$

例6.2.4

设某商店100天销售电视机的情况有如下统计资料

日出售台数	2	3	4	5	6	合计
天　数	20	30	10	25	15	100

设X表示商店1天销售的电视机台数(即总体), 求样本均值$\overline{x}$,样本方差s_{100}^2,经验分布函数$F_{100}(x)$的观察值.

解: $\overline{X}=\frac{1}{100}[2\times 20+3\times 30+4\times 10+5\times 25+6\times 15]=\frac{9}{2}$

$s_{100}^2=\frac{1}{99}[4\times 20+9\times 30+16\times 10+625+36\times 15-25\times 81]$

6.2.5 定理　Glivenko (1933)

对于任一实数x,当$n\to\infty$时$F_n(x)$以概率1一致收敛于分布函数,即 $P\{\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|=0\}=1.$

Outline

1. 随机样本
2. 统计量
3. 抽样分布

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的, 然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的,然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的,然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的, 然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的, 然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.1抽样分布的定义

- 统计量的分布称为抽样分布
- 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布.
- 当总体的分布函数已知时,抽样分布是确定的, 然而要求出统计量的精确分布一般来说是困难的.
- 教学大纲要求掌握来自正态总体的几个常用统计量的分布(χ^2分布、t分布、F分布).

6.3.2 χ^2分布定义

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(0,1)$的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

是服从自由度为n的χ^2分布, 记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

6.3.3 χ^2 分布的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中Γ函数表达式为 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,且有如下性质

$$\underline{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \quad \Gamma(k+1) = k!(k \in \mathbb{N}).}$$

特别地, 当$n = 2$时$\chi^2(n)$分布就是参数为$\frac{1}{2}$的指数分布.

6.3.2 χ^2分布定义

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(0,1)$的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

是服从自由度为n的χ^2分布, 记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

6.3.3 χ^2 分布的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中Γ函数表达式为 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,且有如下性质

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \quad \Gamma(k+1) = k!(k \in \mathbb{N}).$$

特别地, 当$n = 2$时$\chi^2(n)$分布就是参数为$\frac{1}{2}$的指数分布.

6.3.2 χ^2分布定义

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(0,1)$的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

是服从自由度为n的χ^2分布, 记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

6.3.3 χ^2 分布的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中Γ函数表达式为 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,且有如下性质

$$\underline{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \quad \Gamma(k+1) = k!(k \in \mathbb{N}).}$$

特别地, 当$n = 2$时$\chi^2(n)$分布就是参数为$\frac{1}{2}$的指数分布.

6.3.2 χ^2分布定义

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(0,1)$的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

是服从自由度为n的χ^2分布, 记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

6.3.3 χ^2 分布的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

其中Γ函数表达式为 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$,且有如下性质

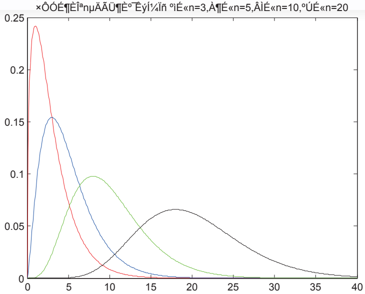
$$\underline{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \quad \Gamma(k+1) = k!(k \in \mathbb{N}).}$$

特别地, 当$n = 2$时$\chi^2(n)$分布就是参数为$\frac{1}{2}$的指数分布.

6.3.4 自由度为n的χ^2分布的密度函数的图像特征

红色$\chi^2(3)$　蓝色$\chi^2(5)$　绿色$\chi^2(10)$　黑色$\chi^2(20)$

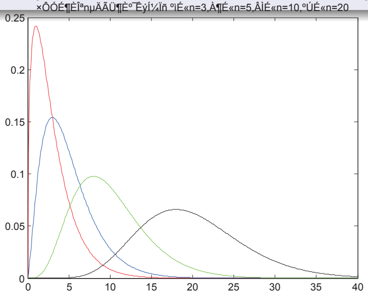
- 随着n的增大,它的对称性越来越好,峰度越来越小.
- 随着n的增大,其图形越来越像正态分布的概率密度函数.
- 随着n的增大,它的图形越来越向右移动,且尾部越来越大.



6.3.4自由度为n的χ^2分布的密度函数的图像特征

红色$\chi^2(3)$　蓝色$\chi^2(5)$　绿色$\chi^2(10)$　黑色$\chi^2(20)$

- 随着n的增大,它的对称性越来越好,峰度越来越小.
- 随着n的增大,其图形越来越像正态分布的概率密度函数.
- 随着n的增大,它的图形越来越向右移动,且尾部越来越大.



6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

$$\text{所以} \quad D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$$

$$\text{从而} \quad D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n,$ 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.5 χ^2分布的性质

- 可加性　设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立,则有$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.
- χ^2分布的数学期望和方差　若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则有$E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

证明:

$\because \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2, X_i \sim N(0,1), E(X_i) = 0, D(X_i) = 1.$

$\therefore E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (D(X_i) + (E(X_i))^2 = n$, 又由分部积分法可得

$$E(X_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

所以　$D(X_i^2) = E(X_i^4) - (E(X_i^2))^2 = 3 - 1 = 2,$

从而　$D(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$

6.3.6 χ^2分布分位点的定义

对于给定的正数$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(x)dx=\alpha$$

的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点.教材附录表格可查询$\chi^2_\alpha(n)$.

当$n\geq 45$时,$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$, 其中$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

6.3.6 χ^2分布分位点的定义

对于给定的正数α, $0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty}f(x)dx=\alpha$$

的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点. 教材附录表格可查询$\chi_\alpha^2(n)$.

当$n\geq 45$时, $\chi_\alpha^2(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$, 其中$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

6.3.6 χ^2分布分位点的定义

对于给定的正数α, $0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty}f(x)dx=\alpha$$

的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点.教材附录表格可查询$\chi^2_\alpha(n)$.

当$n\geq 45$时,$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$, 其中$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

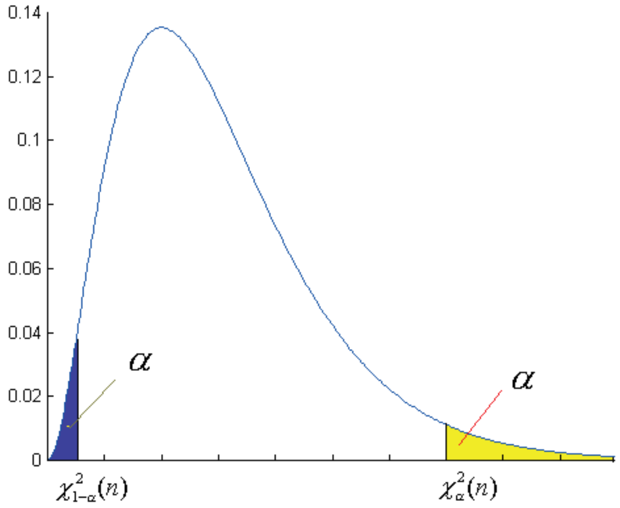
6.3.6 χ^2分布分位点的定义

对于给定的正数α, $0 < \alpha < 1$, 称满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

的点$\chi^2_\alpha(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位点.教材附录表格可查询$\chi^2_\alpha(n)$.

当$n \geq 45$时,$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$, 其中$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.


0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
α
α
$\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\chi^2_{\alpha}(n)$

6.3.7 t分布的定义

设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且X,Y相互独立,则称随机变量$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布,记为$t\sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}},-\infty<t<\infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t)=0$
- $h(t)$的图形关于$t=0$对称
- 由Γ函数的性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6.3.7 t分布的定义

设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且X, Y相互独立,则称随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布,记为$t \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}, -\infty < t < \infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t) = 0$
- $h(t)$的图形关于$t=0$对称
- 由Γ函数的性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6.3.7 t分布的定义

设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且X, Y相互独立,则称随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布,记为$t \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}, -\infty < t < \infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t) = 0$
- $h(t)$的图形关于$t = 0$对称
- 由Γ函数的性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6.3.7 t分布的定义

设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且X, Y相互独立,则称随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从**自由度为$n$的$t$分布**,记为$t \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}, -\infty < t < \infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t) = 0$
- $h(t)$的图形关于$t=0$对称
- 由Γ函数的性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6.3.7 t分布的定义

设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$, 且X,Y相互独立,则称随机变量$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布,记为$t\sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}},-\infty<t<\infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t)=0$
- $h(t)$的图形关于$t=0$对称
- 由Γ函数的性质可得$\lim\limits_{n\to\infty} h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

6.3.7 t分布的定义

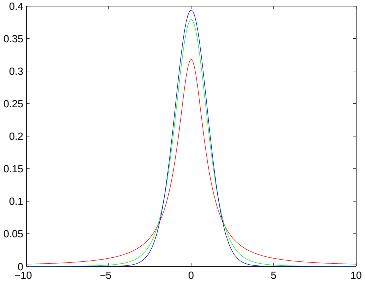
设随机变量$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且X, Y相互独立,则称随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$服从自由度为$n$的$t$分布,记为$t \sim t(n)$.

t分布的概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}(1 + \frac{t^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}, -\infty < t < \infty.$$

- $\lim\limits_{|t|\to\infty} h(t) = 0$
- $h(t)$的图形关于$t = 0$对称
- 由Γ函数的性质可得 $\lim\limits_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

t(n)分布概率密度函数图像 红色$t(1)$ 绿色$t(5)$ 蓝色$t(20)$



6.3.8 t分布的分位点

对于给定的α, $0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)dt=\alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点. 由$h(t)$图像的对称性可知

$$\underline{t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n), t_{0.5}(n)=0.}$$

当$n\geq 45$时,$t_\alpha(n)\approx z_\alpha$,$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

6.3.8 t分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)dt=\alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点. 由$h(t)$图像的对称性可知

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n), t_{0.5}(n)=0.$$

当$n\geq 45$时,$t_\alpha(n)\approx z_\alpha$,$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

6.3.8 t分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0 < \alpha < 1$, 称满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)dt = \alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点. 由$h(t)$图像的对称性可知

$$\underline{t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n), t_{0.5}(n) = 0.}$$

当$n \geq 45$时,$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$,$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.

6.3.8 t分布的分位点

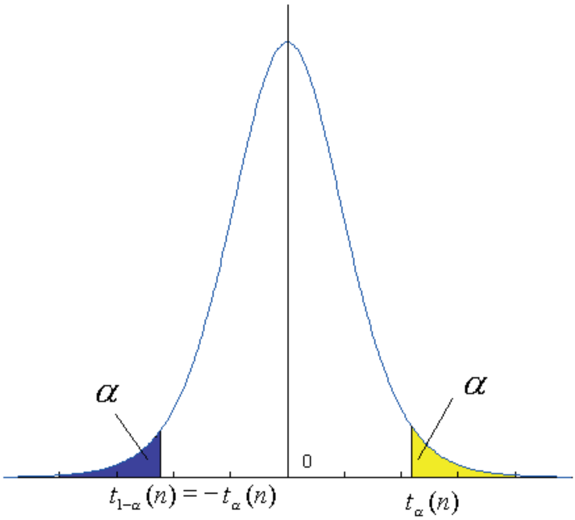
对于给定的$\alpha, 0 < \alpha < 1$, 称满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)dt = \alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点. 由$h(t)$图像的对称性可知

$$\underline{t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n), t_{0.5}(n) = 0}.$$

当$n \geq 45$时,$t_\alpha(n) \approx z_\alpha$,$z_\alpha$是标准正态分布的上$\alpha$分位点.



α
α
0
$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$
$t_\alpha(n)$

6.3.9 F分布的定义及性质

设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$,且$U, V$相互独立,则
称随机变量$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$m, n$的$F$分布,记为$F \sim F(m, n)$.

- 若$X \sim t(n)$, 则$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中$Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

  从而 $$X^2 = \frac{Z^2}{\frac{Y}{n}} \sim F(1, n);$$
- 若$X \sim F(m, n)$, 则$\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

6.3.10 $F(m, n)$分布的概率密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

6.3.9 F分布的定义及性质

设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$,且$U, V$相互独立,则

称随机变量$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$m, n$的$F$分布,记为$F \sim F(m, n)$.

- 若$X \sim t(n)$, 则$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中$Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

  从而 $$X^2 = \frac{Z^2}{\frac{Y}{n}} \sim F(1, n);$$

- 若$X \sim F(m, n)$, 则$\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

6.3.10 $F(m, n)$分布的概率密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}(1+\frac{m}{n}x)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

6.3.9 F分布的定义及性质

设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$,且$U, V$相互独立,则

称随机变量$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$m, n$的$F$分布,记为$F \sim F(m, n)$.

- 若$X \sim t(n)$, 则$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中$Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

  从而 $$X^2 = \frac{Z^2}{\frac{Y}{n}} \sim F(1, n);$$

- 若$X \sim F(m, n)$, 则$\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

6.3.10 $F(m, n)$分布的概率密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

6.3.9 F分布的定义及性质

设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$,且$U, V$相互独立,则称随机变量$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$m, n$的$F$分布,记为$F \sim F(m, n)$.

- 若$X \sim t(n)$, 则$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中$Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

  从而 $$X^2 = \frac{Z^2}{\frac{Y}{n}} \sim F(1, n);$$
- 若$X \sim F(m, n)$, 则$\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

6.3.10 $F(m, n)$分布的概率密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

6.3.9 F分布的定义及性质

设$U \sim \chi^2(m), V \sim \chi^2(n)$,且$U, V$相互独立,则

称随机变量$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}}$服从自由度为$m, n$的$F$分布,记为$F \sim F(m, n)$.

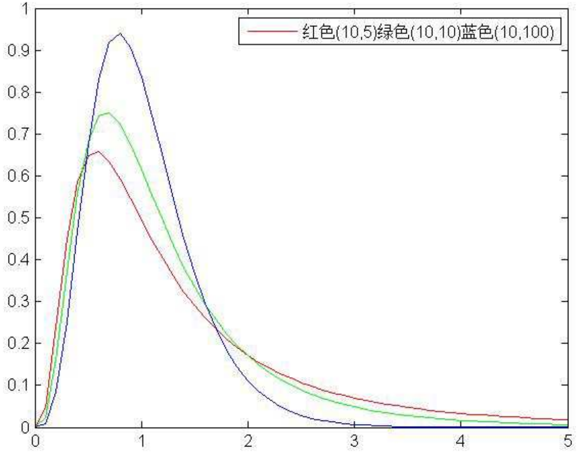
- 若$X \sim t(n)$, 则$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中$Z \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

  从而 $X^2 = \frac{Z^2}{\frac{Y}{n}} \sim F(1, n)$;
- 若$X \sim F(m, n)$, 则$\frac{1}{X} \sim F(n, m)$.

6.3.10 $F(m, n)$分布的概率密度函数

$$f(x, m, n) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}(1 + \frac{m}{n}x)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$F(m,n)$分布的概率密度函数图像



6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的α, $0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\tfrac{1}{F}<\tfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(m,n)\} = \int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx = \alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n) = \frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F \sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha = P\{F > F_{1-\alpha}(m,n)\} = P\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$= 1 - P\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\} = 1 - P\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\} = \alpha$. 又由$\frac{1}{F} \sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F} > F_\alpha(n,m)\} = \alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)} = F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\tfrac{1}{F}<\tfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\frac{1}{F}<\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.

6.3.11 F分布的分位点

对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x,m,n)dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位点.

F分布的上α分位点有如下的性质: $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(n,m)}$.

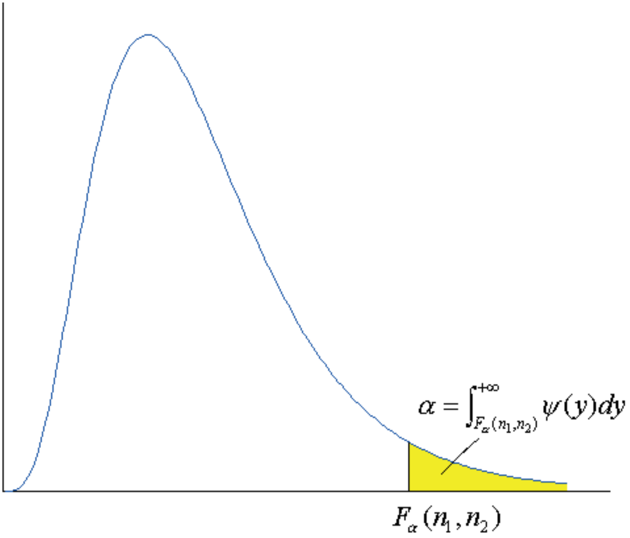
证明:若$F\sim F(m,n)$, 则由定义

$$1-\alpha=P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\tfrac{1}{F}<\tfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$$

$=1-P\{\frac{1}{F}\geq\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}$

$\Rightarrow P\{\frac{1}{F}>\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$. 又由$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$可

知$P\{\frac{1}{F}>F_\alpha(n,m)\}=\alpha$. 从而$\frac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}=F_\alpha(n,m)$.


$\alpha = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} \psi(y)dy$
$F_\alpha(n_1, n_2)$

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差，则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

正态总体的样本均值和样本方差的分布

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$和S^2分别是样本均值和样本方差, 则有

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;
2. ♣ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;
3. ♣ $(\overline{X})$与S^2相互独立;
4. $\frac{(\overline{X}-\mu)}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \sim t(n-1)$.

两个正态总体的样本均值和样本方差

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,且这两个样本相互独立. 设$\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值;$S_1^2, S_2^2$分别是这两个样本的样本方差,则有

1. $\dfrac{(\frac{S_1^2}{S_2^2})}{(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$;
2. 当$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$时, $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$,

   其中$S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

两个正态总体的样本均值和样本方差

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,且这两个样本相互独立. 设$\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值;$S_1^2, S_2^2$分别是这两个样本的样本方差,则有

1. $\dfrac{(\frac{S_1^2}{S_2^2})}{(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})} \sim F(n_1-1, n_2-1)$;
2. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时, $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$,

   其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

两个正态总体的样本均值和样本方差

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,且这两个样本相互独立. 设$\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值;$S_1^2, S_2^2$分别是这两个样本的样本方差,则有

1. $\dfrac{(\frac{S_1^2}{S_2^2})}{(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})} \sim F(n_1-1, n_2-1)$;
2. 当$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$时, $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$,

   其中$S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

两个正态总体的样本均值和样本方差

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$分别是来自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本,且这两个样本相互独立. 设$\overline{X}$和$\overline{Y}$分别是这两个样本的样本均值;$S_1^2, S_2^2$分别是这两个样本的样本方差,则有

1. $\dfrac{(\frac{S_1^2}{S_2^2})}{(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})} \sim F(n_1-1, n_2-1)$;
2. 当$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$时, $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$,

   其中$S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w = \sqrt{S_w^2}$.

课堂练习选择题

(1)设二维随机变量X,Y都服从标准正态分布，则下列正确的是(　)

(A)$X+Y$服从正态分布　(B) X^2+Y^2服从χ^2分布

(C)X^2和Y^2都服从χ^2分布　(D) $\frac{X^2}{Y^2}$服从F分布

(2)设随机变量$X\sim t(n)(n>1)$, $Y=\frac{1}{X^2}$,则(　)

(A)$Y\sim\chi^2(n)$　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C)$Y\sim F(n,1)$　(D) $Y\sim F(1,n)$

(3)设随机变量$X\sim N(1,4)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_{100})$为来自总体X的一个样本,$\overline{X}$为样本均值,已知$Y=a\overline{X}-b\sim N(0,1)$,则(　)

(A)$a=-5,b=5$　(B)$a=5,b=5$

(C)$a=\frac{1}{5},b=-\frac{1}{5}$　(D)$a=-\frac{1}{5},b=\frac{1}{5}$

课堂练习选择题

(1)设二维随机变量X,Y都服从标准正态分布,则下列正确的是(　)

(A)$X+Y$服从正态分布　(B) X^2+Y^2服从χ^2分布

(C)X^2和Y^2都服从χ^2分布　(D) $\frac{X^2}{Y^2}$服从F分布

(2)设随机变量$X\sim t(n)(n>1)$, $Y=\frac{1}{X^2}$,则(　)

(A)$Y\sim\chi^2(n)$　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C)$Y\sim F(n,1)$　(D) $Y\sim F(1,n)$

(3)设随机变量$X\sim N(1,4)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_{100})$为来自总体X的一个样本,$\overline{X}$为样本均值,已知$Y=a\overline{X}-b\sim N(0,1)$,则(　)

(A)$a=-5,b=5$　(B)$a=5,b=5$

(C)$a=\frac{1}{5},b=-\frac{1}{5}$　(D)$a=-\frac{1}{5},b=\frac{1}{5}$

课堂练习选择题

(1)设二维随机变量X,Y都服从标准正态分布, 则下列正确的是(　)

$(A)X+Y$服从正态分布　$(B)\ X^2+Y^2$服从χ^2分布

$(C)X^2$和Y^2都服从χ^2分布　$(D)\ \frac{X^2}{Y^2}$服从F分布

(2)设随机变量$X\sim t(n)(n>1),Y=\frac{1}{X^2}$,则(　)

$(A)Y\sim\chi^2(n)$　$(B)\ Y\sim\chi^2(n-1)$

$(C)Y\sim F(n,1)$　$(D)\ Y\sim F(1,n)$

(3)设随机变量$X\sim N(1,4)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_{100})$为来自总体X的一个样本,$\overline{X}$为样本均值,已知$Y=a\overline{X}-b\sim N(0,1)$,则(　)

$(A)a=-5,b=5$　$(B)a=5,b=5$

$(C)a=\frac{1}{5},b=-\frac{1}{5}$　$(D)a=-\frac{1}{5},b=\frac{1}{5}$

课堂练习选择题

(4)设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为$n-1$的t分布的随机变量是(　)

$(A) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_1}{\sqrt{n}})}$,　$(B) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_2}{\sqrt{n}})}$

$(C) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_3}{\sqrt{n}})}$,　$(D) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_4}{\sqrt{n}})}$

课堂练习选择题

(4)设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本, $\overline{X}$是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为$n-1$的t分布的随机变量是(　)

$(A) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_1}{\sqrt{n}})}$, 　　$(B) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_2}{\sqrt{n}})}$

$(C) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_3}{\sqrt{n}})}$, 　　$(D) t = \frac{\overline{X}-\mu}{(\frac{S_4}{\sqrt{n}})}$

课堂练习

1. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma>0$, 求统计量
$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\text{的数学期望.}$$
2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本,$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 则a,b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0,3^2)$,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y=(\frac{n}{5}-1)\frac{\sum_{i=1}^{5}X_i^2}{\sum_{i=6}^{n}X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

1. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma>0$, 求统计量
$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\text{的数学期望.}$$
2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本,$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 则a,b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0,3^2)$,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y=(\frac{n}{5}-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}X_i^2}{\sum\limits_{i=6}^{n}X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

1. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n \geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma > 0$, 求统计量
$$Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2 \text{的数学期望.}$$
2. 设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(0, 2^2)$的简单随机样本,$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ 则a, b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0, 3^2)$,而$X_1, X_2, \cdots, X_9$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y = (\frac{n}{5} - 1)\frac{\sum_{i=1}^{5} X_i^2}{\sum_{i=6}^{n} X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

1. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n \geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma > 0$, 求统计量
$$Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2 \text{的数学期望.}$$
2. 设X_1, X_2, X_3, X_4是来自正态总体$N(0, 2^2)$的简单随机样本,$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ 则a, b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0, 3^2)$,而$X_1, X_2, \cdots, X_9$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y = (\frac{n}{5} - 1)\frac{\sum_{i=1}^{5} X_i^2}{\sum_{i=6}^{n} X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

1. 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n \geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma > 0$, 求统计量
$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2 \text{的数学期望.}$$
2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本,$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 则a,b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0,3^2)$,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y=(\frac{n}{5}-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}X_i^2}{\sum\limits_{i=6}^{n}X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

1. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,从总体抽取随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geq 2)$, $\overline{X}$为样本均值, $\sigma>0$, 求统计量
$$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\text{的数学期望.}$$
2. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自正态总体$N(0,2^2)$的简单随机样本,$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$ 则a,b为何值时Y服从χ^2分布其自由度为多少?
3. 设随机变量X和Y相互独立且都服从正态分布$N(0,3^2)$,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则统计量$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从什么分布?
4. 设总体X服从标准正态分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的简单随机样本,则统计量$Y=(\frac{n}{5}-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}X_i^2}{\sum\limits_{i=6}^{n}X_i^2}$服从什么分布?

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$\chi^2(n)$的一个样本, $\overline{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差,求$E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

课堂练习

设$X_1, X_2, \cdots, X_n, n > 2$为来自总体$N(0, \sigma^2)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值, 记$Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1, 2, \cdots, n$ 求

1. Y_i的方差$D(Y_i), i = 1, 2, \cdots, n$;
2. Y_1, Y_n的协方差$Cov(Y_1, Y_n)$;
3. $P\{Y_1 + Y_n < 0\}$.

作业1

设$X_1, X_2, \cdots, X_{16}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{25}$分别是两个独立总体$X \sim N(0, 9)$, $Y \sim N(1, 9)$的样本,以$\overline{X}, \overline{Y}$表示两个样本均值,求$E(\overline{X} - \overline{Y}), D(\overline{X} - \overline{Y})$和$P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 1\}$.

作业2

设$X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本,令统计量$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$,求$E(Y), D(Y)$.

作业3

设总体$X \sim U(a, b), X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自$X$的样本.
(1)写出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合概率密度;
(2)求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$.

作业1

设$X_1, X_2, \cdots, X_{16}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{25}$分别是两个独立总体$X \sim N(0,9)$, $Y \sim N(1,9)$的样本,以$\overline{X}, \overline{Y}$表示两个样本均值,求$E(\overline{X}-\overline{Y}), D(\overline{X}-\overline{Y})$和$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>1\}$.

作业2

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自X的样本,令统计量$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$,求$E(Y), D(Y)$.

作业3

设总体$X \sim U(a,b), X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自$X$的样本.
(1)写出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合概率密度;
(2)求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$.

作业1

设$X_1, X_2, \cdots, X_{16}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{25}$分别是两个独立总体$X \sim N(0,9)$, $Y \sim N(1,9)$的样本,以$\overline{X}, \overline{Y}$表示两个样本均值,求$E(\overline{X}-\overline{Y}), D(\overline{X}-\overline{Y})$和$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>1\}$.

作业2

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自X的样本,令统计量$Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$,求$E(Y), D(Y)$.

作业3

设总体$X \sim U(a,b)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的样本.
(1)写出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合概率密度;
(2)求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$.

作业1

设$X_1, X_2, \cdots, X_{16}$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{25}$分别是两个独立总体$X \sim N(0, 9)$, $Y \sim N(1, 9)$的样本,以$\overline{X}, \overline{Y}$表示两个样本均值,求$E(\overline{X} - \overline{Y}), D(\overline{X} - \overline{Y})$和$P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 1\}$.

作业2

设$X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本,令统计量$Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$,求$E(Y), D(Y)$.

作业3

设总体$X \sim U(a, b), X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自$X$的样本.
(1)写出$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合概率密度;
(2)求$E(\overline{X}), D(\overline{X})$.

作业4

设总体X服从$N(0,\sigma^2)$分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自X的简单随机样本, 则统计量$Y=\frac{2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2}$服从什么分布?

作业5

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k, S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$,则统计量

$$Y=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$服从什么分布?

作业4

设总体X服从$N(0,\sigma^2)$分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自X的简单随机样本, 则统计量$Y=\frac{2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2}$服从什么分布?

作业5

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,
$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k, S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$,则统计量

$$Y=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$服从什么分布?

作业4

设总体X服从$N(0,\sigma^2)$分布,而$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自X的简单随机样本, 则统计量$Y=\frac{2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2}$服从什么分布?

作业5

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}$为来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k, S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$,则统计量

$$Y=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$服从什么分布?

作业6

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体的简单随机样本
$Y_1 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}, Y_2 = \frac{X_7+X_8+X_9}{3}$,

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2, Z^2 = \frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明:统计量Z服从自由度为2的t分布.

作业7

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体$X \sim N(0, 3^2)$的简单随机样本,求系数a, b, c使统计量

$$Y = a(X_1+X_2)^2 + b(X_3+X_4+X_5)^2 + (X_6+X_7+X_8+X_9)^2$$

服从χ^2分布,且求其自由度.

作业6

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体的简单随机样本
$Y_1 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}$, $Y_2 = \frac{X_7+X_8+X_9}{3}$,

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2, Z^2 = \frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明:统计量Z服从自由度为2的t分布.

作业7

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体$X \sim N(0, 3^2)$的简单随机样本,
求系数a, b, c使统计量

$$Y = a(X_1 + X_2)^2 + b(X_3 + X_4 + X_5)^2 + (X_6 + X_7 + X_8 + X_9)^2$$

服从χ^2分布,且求其自由度.

作业6

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体的简单随机样本
$Y_1 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}, Y_2 = \frac{X_7+X_8+X_9}{3}$,

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2, Z^2 = \frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明:统计量Z服从自由度为2的t分布.

作业7

设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自正态总体$X \sim N(0, 3^2)$的简单随机样本,
求系数a, b, c使统计量

$$Y = a(X_1 + X_2)^2 + b(X_3 + X_4 + X_5)^2 + (X_6 + X_7 + X_8 + X_9)^2$$

服从χ^2分布,且求其自由度.