上海大学 2020～2021 学年 冬 季学期试卷

成绩	

课程名：离散数学（一）课程号：08305140 学分：4（闭卷）

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号 ____________ 应试人所在院系 ____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总得分
得分											
目标 1 得分											
目标 2 得分											

一、选择（单选或多选，10 分，每小题 2 分）

得分	

1. 下列语句中的命题是（ B C ）。

A．请系好安全带!

B．太阳系以外的星球上有生物。

C． π 是有理数。

D．本句话是假的。

2. 设 R 是自然数集合 N 上的关系，且 $R=\{<x, y>|\ x, y\in N, y=x+1\}$，则下列性质中 R 具有哪些性质：（ A C ）

A．反自反性　　　　B．对称性

C．反对称性　　　　D．传递性

3．命题公式$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$的类型是（ B C ）

A．矛盾式　　B．重言式

C．可满足式　　D．不能确定

4．设集合$A=\{a，b，c\}$，则集合A上的恒等关系I_A是（ A B C ）

A．等价关系　　B．偏序关系

C．函数　　D．都不是

5．下列函数是双射的为（ D ）。

A．$f:Z\rightarrow Z$，$f(x)=x\ (\text{mod})10$　　B．$f:R\rightarrow R$，$f(x)=x^2+3x+1$

C．$f:Z\rightarrow N$，$f(x)=3x+1$　　D．$f:R\rightarrow R^+$，$f(x)=e^{2x-1}$

（注：Z—整数集，N—自然数集，R—实数集）

得分	

二、判断是非，正确的打“√”，错误的打“×”（10分，每小

1．$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联接词完备集，但$\{\neg, \wedge\}$不是。（ × ）

2．在命题逻辑中，任何公式都存在着唯一的与之等值的主析取范式和主合取范式。（ √ ）

3．设R是非空集合A上的传递关系，则R^{-1}也是A上的传递关系。（ √ ）

4．从偏序关系R的哈斯图可以写出R的关系集合表达式。（ √ ）

5．设$f:A\rightarrow B$，$g:B\rightarrow C$都是函数，若$f\circ g$有反函数，则f和g一定都是双射的。（ × ）

得分	

1．设 $F(x)$: x 是计算机，$P(x,y)$: x 能做 y，$G(x)$：x 是智能工作，则“并非所有智能工作都能由计算机来做”符号化为 ____$\neg\forall x\forall y\,(F(x)\wedge G(y)\rightarrow P(x,y))$____。

2．一个命题含有 n 个命题变项，则它的主析取范式最多包含 ____2^n____ 项极小项。

3．设 R、S 是集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系，$R=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$，$S=\{<a,c>,<b,a>\}$，则 $\mathrm{ran}(S\circ R)=$ ____$\{b,c\}$____。

4．令 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A 上关于模 3 的等价关系 $R=\{<x,y>\mid x=y \bmod 3\}$，$R$ 的商集 $A/R=$ ____$\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$____。

5．设函数 $f(x)=e^x-x^2$，$g(x)=x-2$，则 $g^{-1}\circ f(x)=$ ____$e^{x+2}-(x+2)^2$____。

得分	

四、对公式：$(\exists xF(x)\wedge\forall yG(y))\rightarrow\exists xH(x,z)$

① 求前束范式（5 分）

② 给定解释：$D=\{1,2\}$, $F(x)$: $F(1)=0$, $F(2)=1$; $G(x)$: $G(1)=0$, $G(2)=1$; $H(x,y)$: $H(1,2)=1$, $H(2,2)=0$，自由变元=2。求上述公式的真值。(5 分)

解：(1) 原式 $\Leftrightarrow(\exists xF(x)\wedge\forall yG(y))\rightarrow\exists sH(s,z)$ （1 分）

$\Leftrightarrow\exists x\,\forall y\,(F(x)\wedge G(y))\rightarrow\exists sH(s,z)$ （1 分）

$\Leftrightarrow\forall x\exists y\,((F(x)\wedge G(y))\rightarrow\exists sH(s,z))$ （2 分）

$\Leftrightarrow\forall x\exists y\,\exists s\,((F(x)\wedge G(y))\rightarrow H(s,z))$ （1 分）

(2) 在给定的解释下：

原式 $\Leftrightarrow((F(1)\vee F(2))\wedge(G(1)\wedge G(2)))\rightarrow(H(1,2)\vee H(2,2))$ （2分）

$\Leftrightarrow((0\vee1)\wedge(0\wedge1))-(1\vee0))$ （2分）

$\Leftrightarrow1$ （1分）

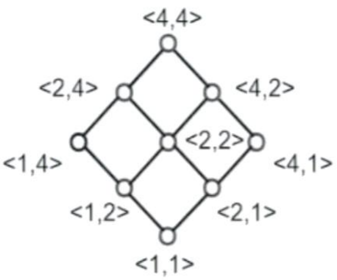
五、（10 分）设 $A=\{1,2,4\}$，R 是 $A\times A$ 上的二元关系，

$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$ 当且仅当 $x|u\wedge y|v$，其中 | 表示整除关系。

得 分	

① 画出偏序集 $\langle A,R\rangle$ 的哈斯图；（4 分）

② 求出 $B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ 的最大元、最小元、极大元、极小元、上确界和下确界。（如果不存在则指明不存在）（6 分）



最大元：无　　最小元：<1,2>

极大元：<1,4>,<4,2>　　极小元：<1,2>

上确界：<4,4>　　下确界：<1,2>

错一边扣 1 分，扣完为止

六、（10 分）设 A，B，C 分别表示选派 A，B，C 四个人出差。按下述三个条件选派人员出差，

得 分	

① 若 A 去则 B 和 C 中要去一人

② B 和 C 不能都去

③ C 去则 A 要留下

请用主范式的方法得到选派的方案。

解：设 A,B,C 分别表示选派 A,B,C 出差。

① $\Leftrightarrow A\rightarrow((B\wedge\neg C)\vee(-B\wedge C))$;　　(1分)

② $\Leftrightarrow \neg(B\wedge C)$;　　(1分)

③ $\Leftrightarrow C\rightarrow\neg A$;　　(1分)

从而

①$\Leftrightarrow \neg A\vee(B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)\Leftrightarrow \Pi(4,7)$;　　(1分)

②$\Leftrightarrow \neg B\vee\neg C\Leftrightarrow \Pi(3,7)$;　　(1分)

③$\Leftrightarrow \neg C\vee\neg A\Leftrightarrow \Pi(5,7)$;　　(1分)

$$①\wedge②\wedge③\Leftrightarrow(A\rightarrow((B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)))\wedge(\neg(B\wedge C))\wedge(C\rightarrow\neg A)$$
$$\Leftrightarrow \Pi(3,4,5,7)$$
$$\Leftrightarrow \Sigma(0,1,2,6)\quad (2分)$$

即①都不去②C去③B去④AB去。(2分)

七、（10 分）如果今天是星期三，那么我有一次离散数学或数字逻辑测验；如果离散数学老师有事，那么没有离散数学测验。

得分	

用推理证明： 今天是星期三且离散数学老师有事，所以，我有一次数字逻辑测验。

证明：先将命题符号化：

设 p: 今天是星期三，q: 我有一次离散数学测验，r: 我有一次数字逻辑测验，s: 离散数学老师有事 （1 分）

前提：$p \to (q \vee r)$, $s \to \neg q$ （2 分）

结论：$(p \wedge s) \to r$ （1 分）

①	$p \wedge s$	附加前提引入	(1 分)
②	p	①的化简	(1 分)
③	s	①的化简	(1 分)
④	$p \to (q \vee r)$	前提引入	
⑤	$q \vee r$	②④的假言推理	(1 分)
⑥	$s \to \neg q$	前提引入	
⑦	$\neg q$	③⑥的假言推理	(1 分)
⑧	r	⑤⑦析取三段论	(1 分)

（以上答案仅供参考）

八、（ 10分）若非空集合 A 上的二元关系 R 和 S 是等价关系，证明：$S\cap R$ 也是 A 上的等价关系。

得分	

证明：①自反性：$\forall x\in A$，因为 R 和 S 是自反的，所以 $<x,x>\in R$，$<x,x>\in S$，

所以，$<x,x>\in R\cap S$，从而 $R\cap S$ 有自反性；（2 分）

②对称性：$\forall x$，$y\in A$，因为 R 和 S 是对称的，则

$<x,y>\in R\cap S$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in S$

$\Rightarrow <y,x>\in R\wedge <y,x>\in S$

$\Rightarrow <y,x>\in R\cap S$

所以，$R\cap S$ 有对称性；（4 分）

③传递性：$\forall x$，y，$z\in A$，因为 R 和 S 是传

$<x,y>\in R\cap S\wedge <y,z>\in R\cap S$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in S\wedge <y,z>\in R\wedge <y,z>\in S$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\wedge <x,y>\in S\wedge <y,z>\in S$

$\Rightarrow <x,z>\in R\wedge <x,z>\in S\Rightarrow <x,z>\in R\cap S$

所以，$R\cap S$ 有传递性。（4 分）

总之，$R\cap S$ 是偏序关系

得分	

九、（10 分）设集合 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$上的二元关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

① 求出 R 的自反闭包 $r(R)$；（2 分）

② 求出 R 的对称闭包 $s(R)$；（3 分）

③ 用 Warshall 算法求出传递闭包 $t(R)$的关系矩阵。（5 分）

解：① $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle\}$。

② $s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$。

③

$$M_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_1=M_0$$

$$M_2=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_3=M_2\qquad M_4=M_3$$

$t(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$。

（每个矩阵 1 分，共 5 分）

十、（10 分）设 $f: A\to B$， $g: B\to C$ 为任意二个函数，证明：

得分	

① 如果 f 不是单射的，则 $f\circ g$ 也不是单射的。（5 分）

② 如果 g 不是满射的，则 $f\circ g$ 也不是满射的。（5 分）

证明：①由已知可知 $f\circ g: A\to C$，因 f 不是单射的，则存在 a_1，$a_2\in A$，$a_1\neq a_2$，
使得： $f(a_1)=f(a_2)$，（2 分）从而，$g(f(a_1))=g(f(a_2))$，（1 分）
即 $f\circ g(a_1)=f\circ g(a_2)$，（1 分）因此，$f\circ g$ 不是单射的。（1 分）

②反证法：假设 $f\circ g$ 是满射的，则对任意的 $c\in C$，存在 $a\in A$，
使得：$f\circ g(a)=c$，（2 分）从而，$f\circ g(a)=g(f(a))=c$，（1 分）
令 $f(a)=b\in B$，从而，$g(b)=c$，（1 分）因此，g 是满射的，得到矛盾（1 分）