代数与矩阵基础

主 讲 人: 马 丽 艳
办 公 室: 计 1013
Email: liyanma@t.shu.edu.cn
计算机工程与科学学院

主要内容

- 1.1 代数与矩阵
- 1.2 矩阵的初等变换
- 1.3 矩阵的性能指标
- 1.4 内积与范数
- 1.5 矩阵和向量的应用案例

代数与矩阵

- **符号表示：**
- **域**是一种可以进行加减乘除四则运算的代数结构。域的概念时数域及四则运算的推广。
- **数域：**P 。**实数域：**$\mathbb{R}$。**复数域：**$\mathbb{C}$。**整数域：**$\mathbb{Z}$

量 physical quantity
- 向量
  - 物理向量
  - 几何向量
  - 代数向量
    - 常数向量
    - 函数向量
    - 随机向量
- 矩阵、张量、其他

数：自然数，整数，有理数，实数，复数

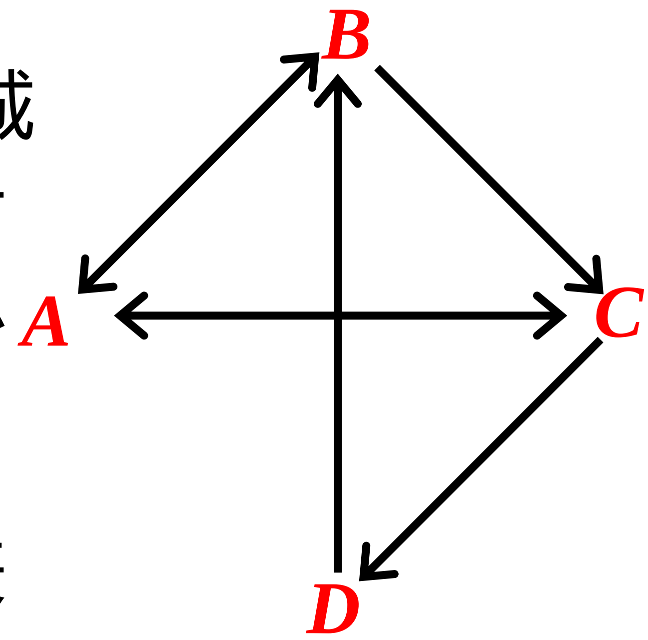
运算：加，减，乘，除

运算规则：交换律，结合律，分配律

等号规则：等号两边施加相同运算，等式仍然成立

代数与矩阵

- 某航空公司在 A、B、C、D 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.



- 城市间的航班图情况常用表格来表示:

目的地

始发地

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中√表示有航班

代数与矩阵

- 为了便于计算，把表中的√改成1，空白地方填上0，就得到一个数表：

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

- 这个数表反映了四个城市之间交通联接的情况。

矩阵的定义

定义　由 $m\times n$ 个数排成的一个**m**行**n**列的的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵, 其中 $a_{ij}\in P$ 称为矩阵的第 i 行 j 列元素(简称元)。 $m\times n$ 矩阵 A 也记为 $A_{m\times n}$ 或 $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

注：矩阵一般用大写字母***A,B,C***….表示.

矩阵的定义

方阵: 当 $m = n$ 时, 即矩阵的行数等于列数时,
称 A 为**n阶方阵**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 称为方阵**A**的主对角元.

零矩阵: 所有元素都为零的矩阵。记为$\boldsymbol{O}_{mxn}$.

若m<n，则称A为宽矩阵（broad matrix）或扁矩阵；

若m>n，便称A是高矩阵（high matrix）；

矩阵的定义

行矩阵(行向量)：行数为1的矩阵，若列数为n，也称为n维行向量。

列矩阵(列向量)：列数为1的矩阵，若行数为m，也称为m维列向量。

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \vec{\beta}_3 & \vec{\beta}_4 & \vec{\beta}_5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\alpha}_3 \end{pmatrix}$$

矩阵的定义

单位矩阵：主对角元素全为1，其他元素全为零的**n**阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

记为 I_n 或 I ，

很多书也记为 E_n 或 E .

对角矩阵：如果 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 中的元满足 $a_{ij}=0$,

$i\neq j(i,j=1,2,\ldots n)$, 则称 A 是对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

通常对角矩阵记为

$diag\left(a_{11},a_{22},\ldots a_{nn}\right)$

当 $a_{ii}=k$ 时，称**A**为数量矩阵，记为**A=kI**.

矩阵的定义

上三角矩阵：如果 n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$中的元满足

$a_{ij}=0, i>j(i, j=1,2,\cdots,n)$，则称$A$为上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)$中的元满足$a_{ij}=0, i<j$

$(i, j=1,2,\cdots,n)$，则称A为下三角矩阵.

矩阵的定义

对称矩阵：如果 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 中的元满足

$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\ldots n)$ 则称 A 为对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵的定义

反对称矩阵：如果 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 中元满足

$a_{ij}=-a_{ji}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n)$ 则称 A 为反对称阵.

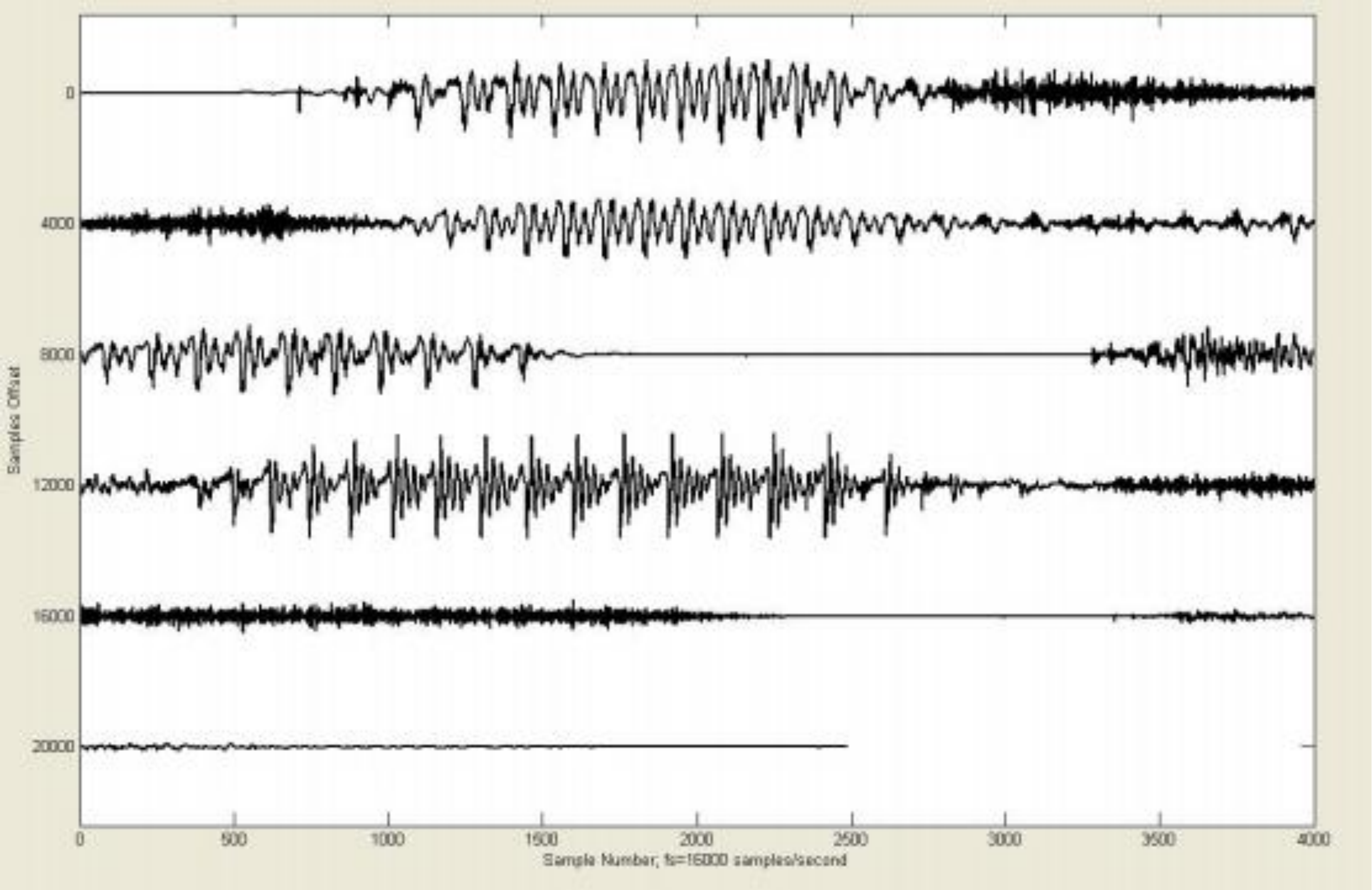
由定义可以推出,若 A 为反称矩阵,则 $a_{ii}=-a_{ii}$,即

$a_{ii}=0(i=1,2,\ldots,n)$ 因此反对称阵的主对角线元全为零

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的应用

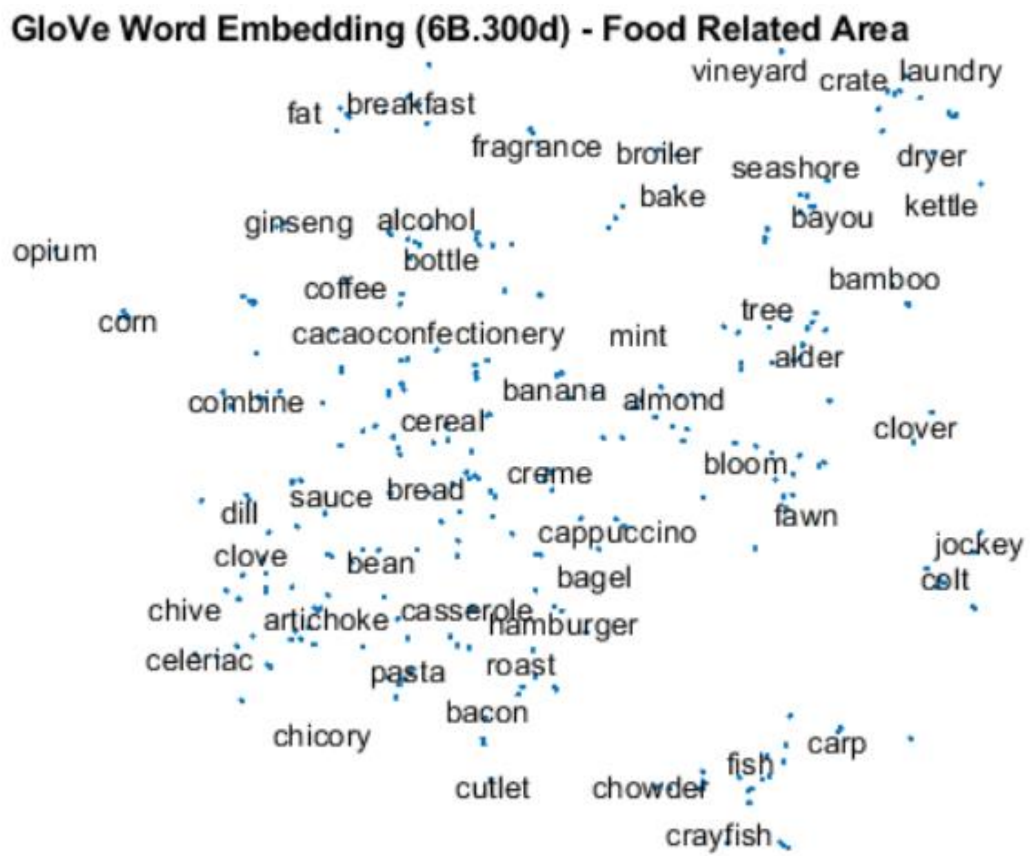
- **信号处理：**



0
4000
8000
12000
16000
20000
Samples Offset
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
Sample Number, fs=16000 samples/second

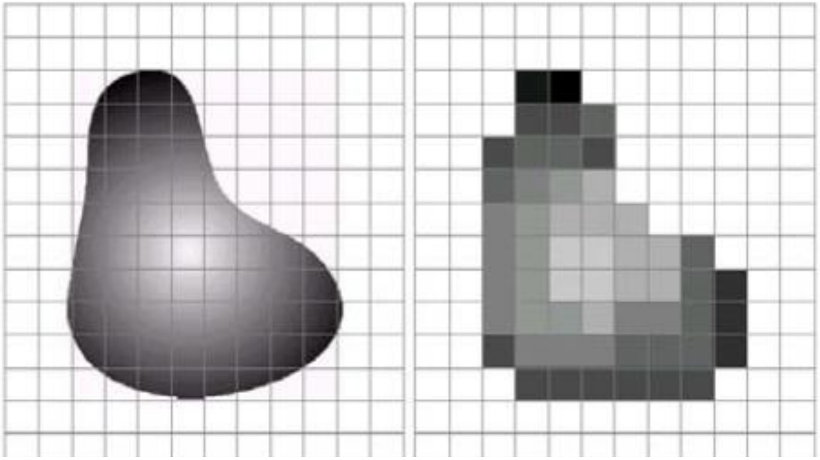
矩阵的应用

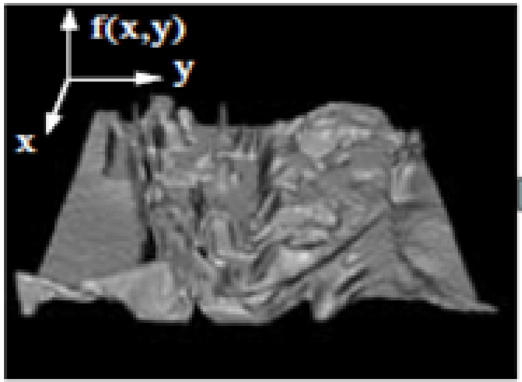
- **自然语言处理：** word2vec或GloVe模型可用来映射每个词到一个向量，可用来表示词对词之间的关系。



矩阵的应用

- **图像处理**





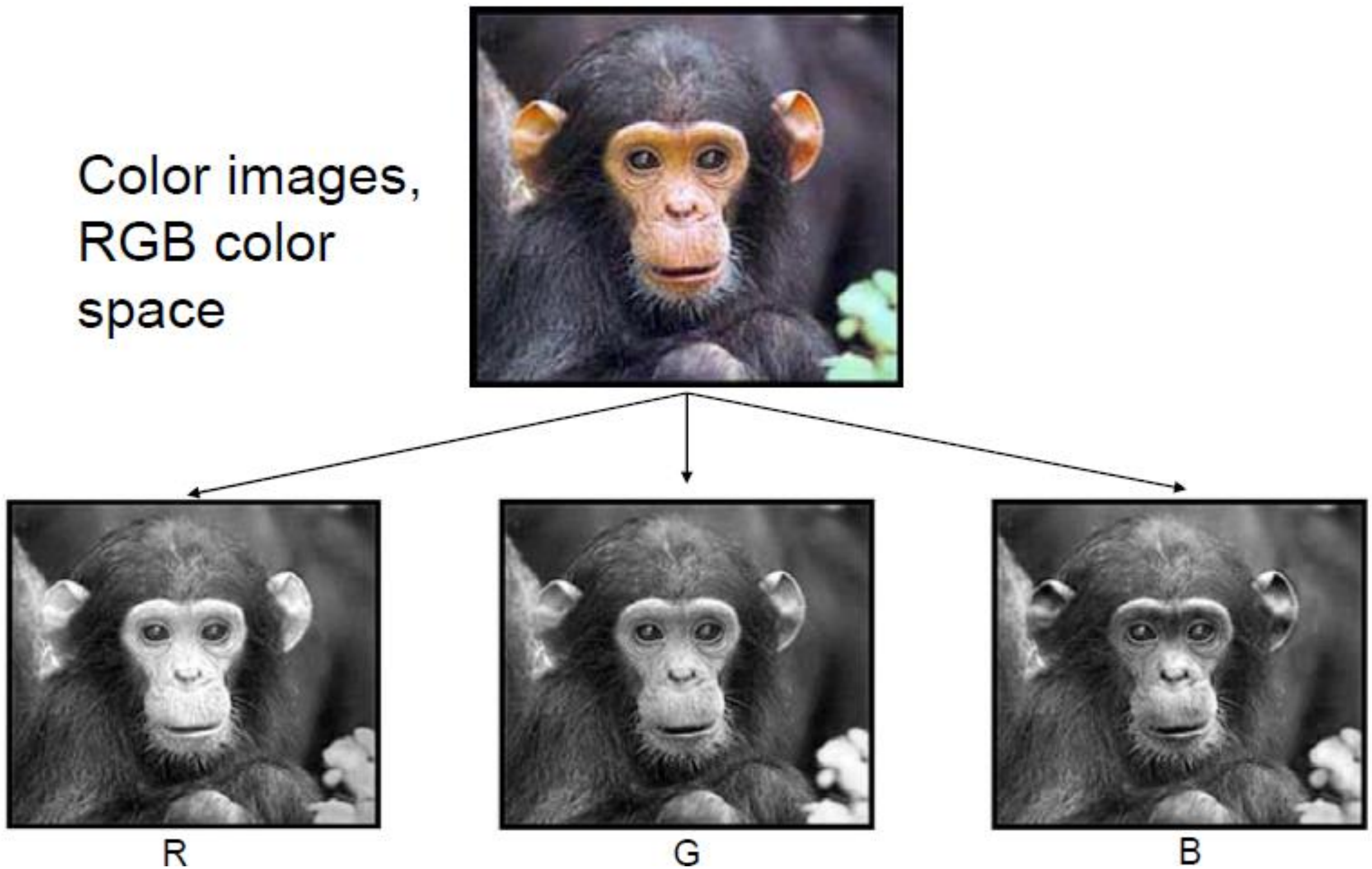
j →

i ↓

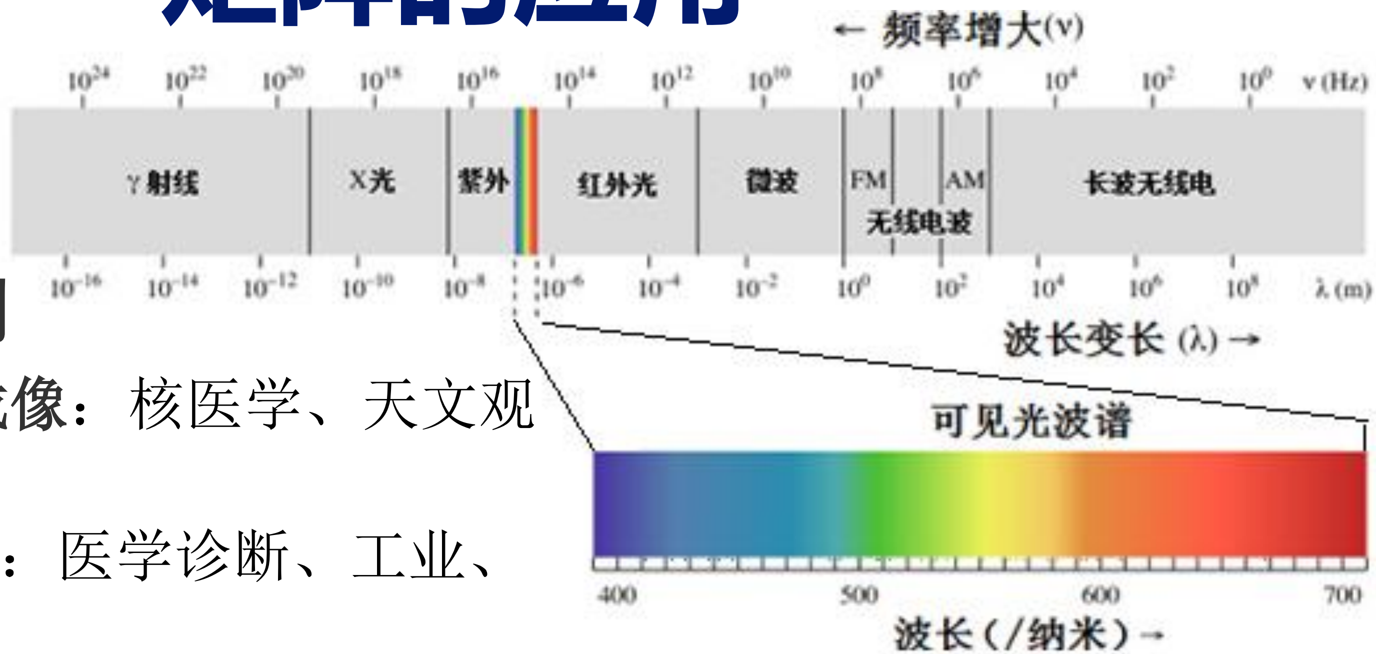
62	79	23	119	120	105	4	0
10	10	9	62	12	78	34	0
10	58	197	46	46	0	0	48
176	135	5	188	191	68	0	49
2	1	1	29	26	37	0	77
0	89	144	147	187	102	62	208
255	252	0	166	123	62	0	31
166	63	127	17	1	0	99	30

矩阵的应用

- **图像处理**



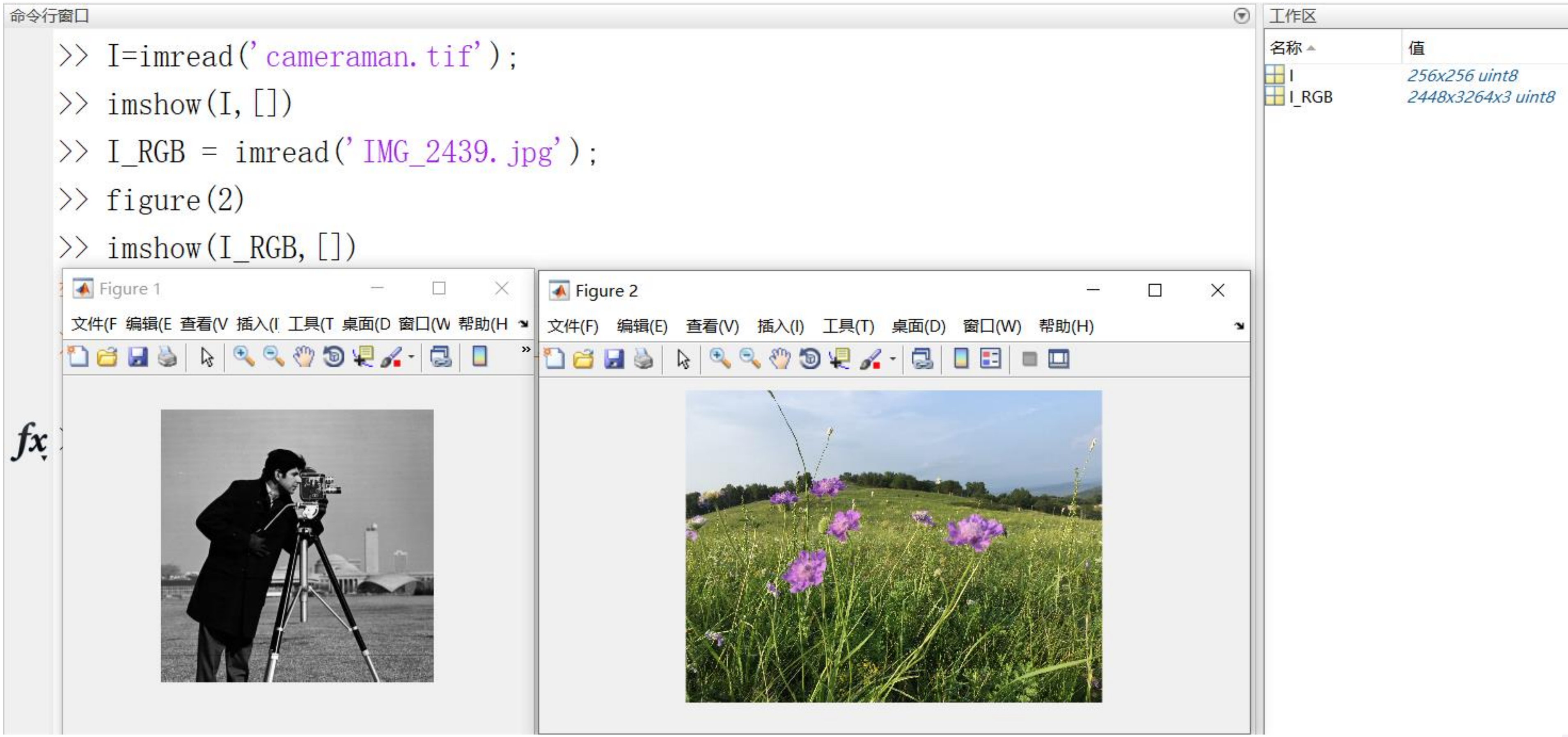
矩阵的应用



➢ 主要应用

- 伽马射线成像：核医学、天文观测；
- X射线成像：医学诊断、工业、天文学；
- 紫外线成像：平板印刷术、工业检测、显微镜方法、激光、生物成像、天文；
- 可见光及红外波段成像：显微镜方法、天文学、遥感、工业、法律设施；
- 微波波段成像：雷达；
- 无线电波段成像：医学、天文学。

矩阵的定义


命令行窗口
>> I=imread('cameraman.tif');
>> imshow(I,[])
>> I_RGB = imread('IMG_2439.jpg');
>> figure(2)
>> imshow(I_RGB,[])
Figure 1
文件(F 编辑(E 查看(V 插入(I 工具(T 桌面(D 窗口(W 帮助(H
Figure 2
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
工作区
名称
值
I
256x256 uint8
I_RGB
2448x3264x3 uint8

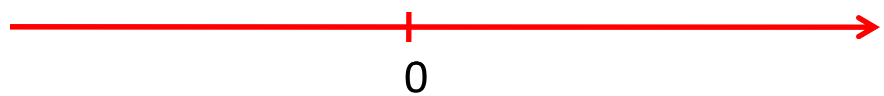
矩阵的定义

```
>> I(101:110,101:110)

ans =

     9    11    13    11    11    11    16   106   178    68
    12    12    12    11    12    11    69   181    62    15
    13    12    12    11    12    82   168    60    14    13
    11    10     9    10    69   182    67    14    12    14
    10    10    10    71   200    81    15    12    14    14
    12    12    58   204    91    17    12    14    14    17
    11    46   201   106    18    14    16    15    16    16
    34   185   122    23    10    14    17    16    13    13
   186   135    30    11     9     9    10    10     9    10
   154    33    11    13    12     9     9     9     9    11
```

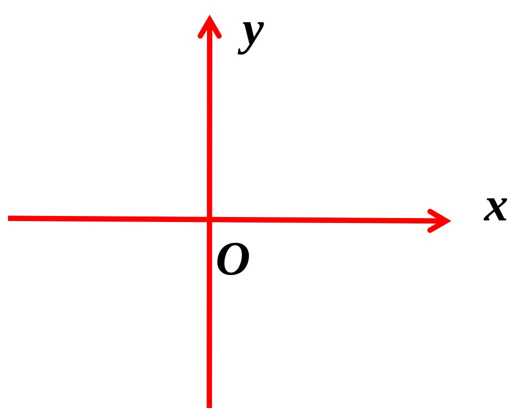
线性空间

常见的几何空间：

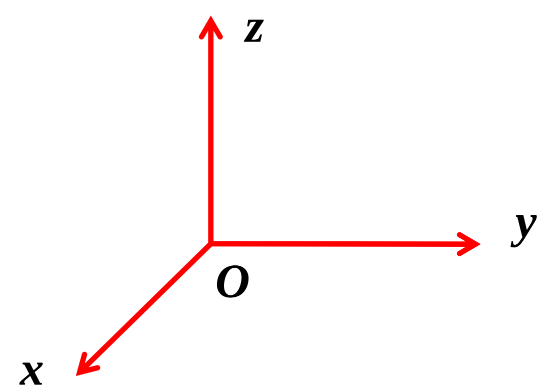
数轴



平面



三维空间



线性空间

几何空间R^3的运算

加法： $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha};$

数乘： $k\vec{\alpha}(k\in R)$

运算规律

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha};$

(2) $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right);$

(3) $\boldsymbol{R}^3$中存在零元素$\vec{0}$,对$\forall\vec{\alpha}\in\boldsymbol{R}^3$,都有

$$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha};$$

线性空间

(4)对任何$\vec{\alpha}\in \boldsymbol{R}^3$**,**存在负向量$-\vec{\alpha}\in \boldsymbol{R}^3$**,**使

$$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{\mathbf{0}};$$

(5) $\lambda\left(\mu\vec{\alpha}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{\alpha}$; $(\lambda,\ \ \mu\in R)$

(6) $\left(\lambda+\mu\right)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$;

(7) $\lambda\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

(8) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$;

线性空间

◆对几何空间进行推广，通过抽象出几何空间线性运算的本质；

◆在任意研究对象的集合上定义具有线性运算的代数结构。

线性空间

定义 1　设 V是一个非空集合，P 为一个数域．如果对于任意两个元素 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$，总有唯一的一个元素$\vec{\gamma} \in V$与之对应，称为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的和，记作

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

若对于任一数 $\lambda \in P$ 与任一元素$\vec{\alpha} \in V$，总有唯一的一个元素$\vec{\delta} \in V$ 与之对应，称为λ 与 $\vec{\alpha}$ 的积，记作

$$\vec{\delta} = \lambda\vec{\alpha}$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律：

线性空间

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$; (2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$;

(3) $\mathbf{V}$中存在零元素 $\vec{0}$, 对$\forall\vec{\alpha}\in\mathbf{V}$, 都有$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$;

(4)对任何$\vec{\alpha}\in\mathbf{V}$, 都有$\vec{\alpha}$的负元素$\vec{\beta}\in\mathbf{V}$, 使$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\mathbf{0}$;

(5) $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$;$(\lambda,\ \mu\in F)$

(6) $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$;

(7) $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.　(8) $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$;

那么$\boldsymbol{V}$就称为数域$\boldsymbol{P}$上的线性空间.

线性空间

注

1．凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为**线性运算**.

2．判别线性空间的方法：一个集合，对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不满足八条性质的任一条，则此集合就不能构成线性空间.

特别地，当集合中定义的加法和乘数运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性.

线性空间

例1 次数不超过n的多项式的全体，记作$P[x]_n$，即

$$P[x]_n=\{p=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\ldots,a_1,a_0\in R\},$$

对于通常的多项式加法，数乘多项式的乘法构成实数域上的线性空间.

加法： $$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n$$

数乘： $$\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)$$
$$=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n$$

故$P[x]_n$对加法、数乘运算封闭，因此构成实数域上的线性空间.

注 n次多项式的全体$Q[x]_n=\{p=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\ldots,a_1,a_0\in R \text{且} a_n\neq 0\}$
对于通常的多项式加法和乘数运算不构成线性空间.

线性空间

例2 全体正实数R⁺, 定义加法和数量乘法如下：

$$a \oplus b = ab, \quad \forall a, b \in R^+$$

$$k \circ a = a^k, \forall k \in R, \quad \forall a \in R^+$$

解：

$\forall a, b \in R^+$，$a \oplus b = ab \in R^+$, 故加法运算封闭；

$\forall k \in R$, $a \in R^+$, $k \circ a = a^k \in R^+$，故数乘运算封闭。

(1) $a \oplus b = b \oplus a$; (2) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

(3) 存在零元θ，使$\forall a \in R^+$, 都有$a \oplus \theta = a$; 零元为常数1

线性空间

(4)对任何$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^{+}$,都存在$\boldsymbol{a}$的负元素; 负元为$1/\boldsymbol{a}$

(5) $\lambda\circ(\mu\circ\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\circ\boldsymbol{a}$;

(6)$(\lambda+\mu)\circ\boldsymbol{a}=(\lambda\circ\boldsymbol{a})\oplus(\mu\circ\boldsymbol{a})$;

(7)$\lambda\circ(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b})=\lambda\circ\boldsymbol{a}\oplus\lambda\circ\boldsymbol{b}$;

(8) $1\circ\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{1}=\boldsymbol{a}$.

故在该加法和数乘运算下，对应集合构成实数域上的线性空间。

线性空间

注：线性空间的元素统称为“向量”，但它可以是通常的向量，也可以是矩阵、多项式、函数等.

线性空间的简单性质：

1. 零元素是唯一的； $\vec{0}_1=\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_2$
2. 负元素是唯一的；

$$-\vec{\alpha}_1=\left(-\vec{\alpha}_1\right)+\vec{0}=\left(-\vec{\alpha}_1\right)+\left(\vec{\alpha}+\left(-\vec{\alpha}_2\right)\right)$$

$$=\left(\left(-\vec{\alpha}_1\right)+\vec{\alpha}\right)+\left(-\vec{\alpha}_2\right)=\vec{0}+\left(-\vec{\alpha}_2\right)=-\vec{\alpha}_2$$

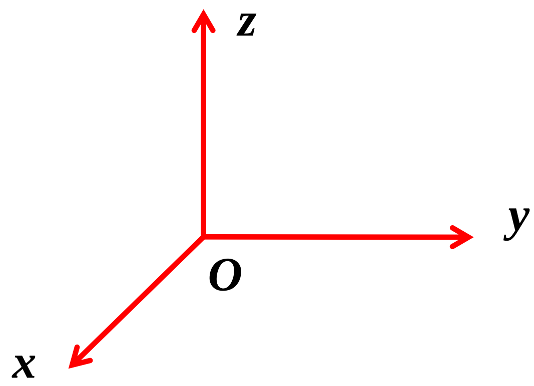
3. $0\vec{\alpha}=\vec{0},\ k\vec{0}=\vec{0},\ (-1)\vec{\alpha}=-\vec{\alpha};$

4. 如果 $k\vec{\alpha}=\vec{0}$，那么 $k=0$ 或 $\vec{\alpha}=\vec{0}$.

线性相关

- 如果线性空间V以通常的向量作为元素，即V中含有无穷多个向量。如何用有限个向量刻划空间中的所有向量？需要讨论向量间的关系.

如三维几何空间：



$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0);\ \vec{j} = (0, 1, 0);\ \vec{k} = (0, 0, 1).$$

$\vec{r}$与$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$线性相关

$\vec{k}$无法表示成$c\vec{i} + d\vec{j}$的形式

线性相关

设V是数域F上的一个线性空间,$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s$ 是 V 中的一组向量, $k_1,k_2,\ldots,k_s$ 是数域P 中的数，那么向量

$$\vec{\alpha}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_s\vec{\alpha}_s$$

称为向量 $\vec{\alpha}$的一个线性组合，有时也称向量 $\vec{\alpha}$可以由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s$ 线性表示。

例1: n维向量空间R^n中任一向量$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$可由 n维单位向量组$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$线性表示:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_n\vec{e}_n$$

线性相关

例2　设

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

问$\vec{\alpha}_4$能否由$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，$\vec{\alpha}_3$线性表示？

解：观察发现：$\vec{\alpha}_4=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3.$

线性相关

设V是数域F上的一个线性空间，且$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s \in V$. 如果在数域$F$中存在$s$个不全为零的数 $k_1,k_2,\ldots,k_s$, 使得

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0},$$

则称向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s$ 线性相关.

此时至少有一个向量可以由其他向量线性表示。

否则称向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s$线性无关，即若

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\ldots+k_s\vec{\alpha}_s=\vec{0},$$

则必有$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

线性相关

进一步来理解向量组的线性相关与线性无关

考虑等式 $k_1\vec{\alpha}_1 + k_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + k_r\vec{\alpha}_r = 0 \qquad (*)$

无论向量组$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2,\cdots$，$\vec{\alpha}_r$是线性相关还是线性无关，

当$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$时，等式(*)总成立。

$\therefore$

向量组$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2,\cdots$，$\vec{\alpha}_r$线性相关：

至少有两组以上的数k_1，$k_2,\cdots$，k_r，

使得等式(*)成立。

向量组$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2,\cdots$，$\vec{\alpha}_r$线性无关：

只存在唯一的一组数k_1，$k_2,\cdots$，k_r，

使得等式(*)成立，即$k_1 = k_2 = \cdots k_r = 0$

线性相关

注：(1) 给定向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\ldots,\vec{\alpha}_s$，该向量组要么线性相关，要么线性无关。

(2) 含有零向量的向量组一定线性相关。

(3) 向量组只包含一个向量 $\vec{\alpha}$ 时：

若 $\vec{\alpha}=\vec{\mathbf{0}}$，则说 $\vec{\alpha}$ 线性相关；

若 $\vec{\alpha}\neq\vec{\mathbf{0}}$，则说 $\vec{\alpha}$ 线性无关。

线性相关

例3. n维向量组

$$\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\ \vec{e}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\ \vec{e}_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

称为 n 维单位坐标向量组， 讨论其线性相关性.

解：令

$$k_1\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2+\cdots+k_n\vec{e}_n=\vec{0}$$

即 $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}=\vec{0}$ 故 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$线性无关.

线性相关

向量组等价 设有两个向量组

$(\mathrm{I}):\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_m$ 及 $(\mathrm{II}):\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_s$.

若（II）组中的每个向量都能由向量组（I）线性表示，则称向量组（II）可由向量组（I）线性表示，若向量组（I）与向量组（II）能相互线性表示，则称这两个**向量组等价**.

性质 设A,B,C是向量组，则

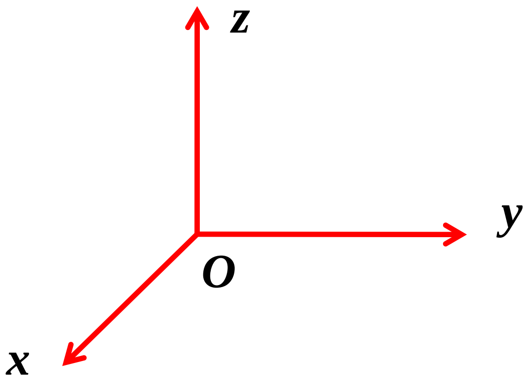
(1) 反身性：A与A等价

(2) 对称性：A与B等价，则B与A等价

(3) 传递性：A与B等价，B与C等价，则A与C等价.

线性子空间

对三维几何空间：



任何过原点的平面是R^3的子集

在该平面上的所有向量对于向量的加法和数乘运算构成一个二维的线性空间。

R^3的线性子空间

线性子空间

定义： 设W是数域F上线性空间V的非空子集合. 如果W中的向量对V中所定义的向量加法和数乘运算也构成F上的线性空间，则称W为V的线性子空间, 简称子空间.

定理： W是V的非空子集合，则W是V的子空间的充要条件是

$$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in W, \forall k \in F, 有\ \ k\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in W.$$

注 V的子空间 $\begin{cases} V和零子空间是V的平凡子空间; \\ 其它子空间称为V的真子空间. \end{cases}$

线性子空间

生成子空间

设$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s \in V$,则

$$L(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s)=\{k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s \mid k_1,k_2,\cdots,k_s \in F\}$$

是V的子集.上述集合记为L_α.

易证L_α是V的子空间.

我们称L_α是由$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$生成的子空间.

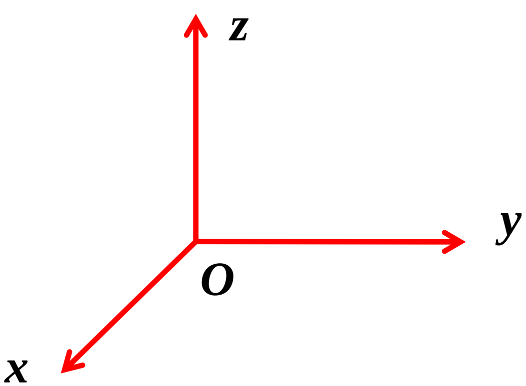
$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$是它的生成向量组.

基、维数和坐标

- 如果线性空间中含有无穷多个向量。如何找出有限个向量刻划空间中的所有向量？

如三维几何空间：

可以用$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$刻划R^3中的任意向量.



$$\vec{r}=(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{i}=(1,0,0);\ \vec{j}=(0,1,0);\ \vec{k}=(0,0,1).$$

3个最基本的向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$构成坐标系

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$中$x,y,z$称为在该坐标系下的坐标.

基、维数和坐标

设$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\ldots,\vec{\alpha}_{i_r}$是线性空间$V$中的一个向量组，若满足

(1)$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\ldots,\vec{\alpha}_{i_r}$线性无关;

(2)V中任意一个向量$\vec{\alpha}$都可由$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\ldots,\vec{\alpha}_{i_r}$线性表示:

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{\alpha}_{i_1}+x_2\vec{\alpha}_{i_2}+x_r\vec{\alpha}_{i_r}$$

则称：$\vec{\alpha}_{i_1},\vec{\alpha}_{i_2},\ldots,\vec{\alpha}_{i_r}$是$V$的一组基.

基中所含向量的个数，即r为V的维数，

记为$\dim(V)=r$.

$x_1,x_2,\cdots,x_r$称为$\vec{\alpha}$在该基下的坐标.

注: (1)规定$V=\{\vec{0}\}$为零维空间.

(2)有限维线性空间V的基不唯一.

矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 线性变换，其中 a_{ij}为常数.

矩阵与线性变换

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$\cdots\cdots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

矩阵与线性变换

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=y_i$$

则方程组又可表示为 $A\vec{x}=\vec{y}.$

矩阵与线性变换

例　线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n, \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n \end{cases}$$

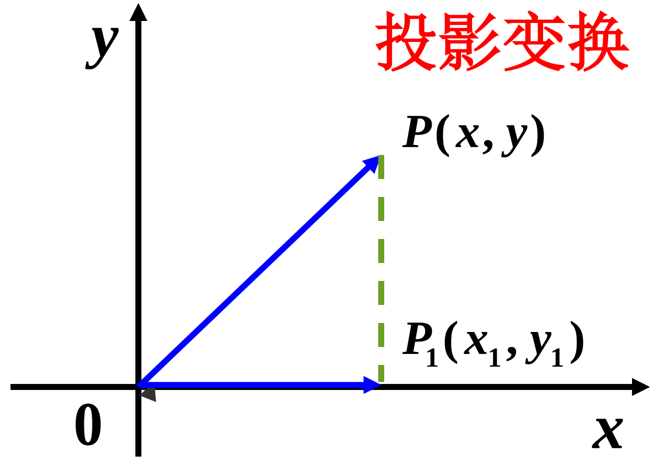
$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$

矩阵与线性变换

例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

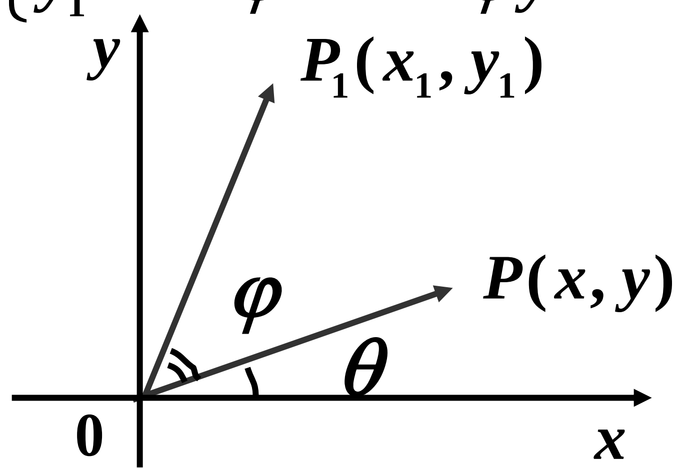
投影变换



例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



矩阵的基本运算

定义 行数列数对应相等的矩阵为同型矩阵.

定义 如果 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，且满足

$$a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$$

则称矩阵 A 与矩阵 B 相等, 记为 $A=B$.

定义(加法): 两个 $m\times n$ 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ 的和 $A+B$

仍是 $m\times n$ 矩阵 , 且

$$A+B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$$

同型

矩阵的基本运算

例1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -5\\ 1 & 4 & 7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

求 $A+B,\ A+C.$

解:

$$A+B=\begin{pmatrix}3+3 & 0+1 & -5+2\\ 1+4 & 4+3 & 7+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ 5 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

而$A+C$无意义.

矩阵的基本运算

负矩阵:记 $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$,则称其为 A 的负矩阵

$$A+\left(-A\right)=O$$

定义(减法): $A-B=A+(-B)$

$$A-B=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(-b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$$

减法同样也要求同型矩阵.

矩阵的基本运算

定义(数乘) 设$A=\left(a_{ij}\right)$是$m\times n$矩阵, k是常数, 数k与矩阵A的乘积kA或者Ak定义为

$$kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}$$

即

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

矩阵的加法和数乘运算统称为矩阵的线性运算，其运算规律为：

(1)$A+B=B+A$ (2)$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3)$A+O=A$

(4)对任何$\vec{\alpha}\in\mathbf{V}$,都有$\vec{\beta}\in\mathbf{V}$,使$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\mathbf{0}}$;

(5)$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ (6)$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(7)$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (8)$1A=A$;

实数域上的全体 $m\times n$矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间.

矩阵的基本运算

例2 设

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}11&-1\\2&7\end{pmatrix}$$

且$3A+2X=B$，求矩阵 X.

解: 在 $3A+2X=B$ 等式两端同加上 $-3A$，得

$$2X=B+(-3A)=\begin{pmatrix}11&-1\\2&7\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3&2\\-1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11&-1\\2&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&6\\-3&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-7\\5&-8\end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

$$2X=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 5 & -8\end{pmatrix}$$

- 上式两端同乘 $\frac{1}{2}$，得

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -7\\ 5 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{7}{2}\\ \frac{5}{2} & -4\end{pmatrix}$$

矩阵：是映射也是坐标系

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (i = 1, 2, \cdots, m).$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

……

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n$$

$$\vec{\beta}_1 \qquad \vec{\beta}_2 \qquad \vec{\beta}_n$$

$$\vec{y} = x_1\vec{\beta}_1 + x_2\vec{\beta}_2 + \cdots + x_n\vec{\beta}_n.$$

矩阵向量乘法给出了向量$\vec{y}$在A坐标系下的刻划方法。

矩阵：是映射也是坐标系

特别地，若令$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

则

$$\vec{y}=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\cdots+y_n\vec{e}_n.\qquad (I\text{坐标系})$$

$$=x_1\vec{\beta}_1+x_2\vec{\beta}_2+\cdots+x_n\vec{\beta}_n\qquad (A\text{坐标系})$$

矩阵向量乘法给出了 对一客观存在的向量$\vec{y}$不同角度的刻划方法.

注：矩阵的列向量组是在*I*坐标系下的表示

矩阵：是映射也是坐标系

视矩阵A为一个空间到另一个空间的映射,并记$y=\mathbf{A}(x)=Ax$. 下面考虑两个映射的复合。

例 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$.

令$y=\mathbf{A}(x)=Ax$, $x=\mathbf{B}(t)=Bt$, $y=\mathbf{C}(t)=(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})(t)$, 则

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$ 与 $$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases}$$

矩阵：是映射也是坐标系

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + \\ \qquad (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22} \\ \qquad b_{32})t_2 \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = C\vec{t}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

定义(矩阵乘法) $A_{m\times s}, B_{s\times n}$, 则$C = AB$

满足 $C_{m\times n} = A_{m\times s}\ B_{s\times n}$

且 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$$

注：A的列数和B的行数相等时，AB才有意义。

矩阵的基本运算

例3 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$$

求乘积 AB.

解：

$$C=AB=\begin{pmatrix}\boxed{1\quad 0\quad -1}\\\boxed{-1\quad 1\quad 3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}4\\1\\-1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\blacksquare&\blacksquare&\blacksquare\\\blacksquare&\blacksquare&\blacksquare\end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

例4　设$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 求$AB, BA$.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O \qquad BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

显然　$AB \neq BA$

1. 两个非零的矩阵乘积可能为O;
2. 矩阵乘法不满足交换律

矩阵的基本运算

例5 设$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -9 & -6\end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -9 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow AB=AC$$

但是 $B\neq C$

请记住：

矩阵乘法不满足交换律

不满足消去律

矩阵的基本运算

矩阵乘法的运算规则

$(1)\ (AB)C = A(BC)$

$(2)\ A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA$

$(3)\ k(AB) = (kA)B = A(kB)$ （其中 k 为常数）；

$(4)\ A_{m\times n}I_n = I_mA_{m\times n} = A;$

$A_{m\times n}O_{n\times p} = O_{m\times p};$

$O_{q\times m}A_{m\times n} = O_{q\times n}$

矩阵的基本运算

➢方阵的幂运算：

$$A^k = \underbrace{A\,A\cdots A}_{k个} \quad (k为正整数)$$

称A^k为方阵A的k次幂。

可直接验证如下运算律：

$$A^m A^k = A^{m+k}, \quad \left(A^m\right)^k = A^{mk}.$$

规定 $A^0 = I$

☞ 一般来说$(AB)^k$与$A^k B^k$是不相等的

分块矩阵

用一些横线和竖线把矩阵分割成若干块小块，每一个小分块称为矩阵的子块或子矩阵, 此时可以称矩阵为分块矩阵。

如

$$A=\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

注：给定一个矩阵，可以有多种分块方法，完全根据讨论问题的便利来分。

如此我们可以把它写成简单的形式：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

分块矩阵

在作分块矩阵的运算时，把子块作为元素处理，分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似。

1、加法、数乘和转置运算

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$，按同一种方法分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

如:矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$，则它的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

对称矩阵

$A^T=A$

矩阵的转置

例8 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & -5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

求$(AB)^T$, A^TB^T, B^TA^T.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -4 & -5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 12 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^TB^T=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\\ -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & 14 & -7\\ -22 & 19 & -11\\ 27 & -24 & 15\end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=B^TA^T\neq A^TB^T$$

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -5\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 12\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

矩阵的转置

A、B为对称矩阵，是否成立？

$$(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$$

A =

4	7	8	6	6
7	10	4	6	4
8	4	6	5	10
6	6	5	2	4
6	4	10	4	10

>> B

4	3	4	5	4
3	10	7	4	8
4	7	8	5	6
5	4	5	8	6
4	8	6	6	4

>> A*B

123	210	195	172	180
120	205	184	167	184
133	206	193	186	170
88	153	140	119	130
136	224	212	188	180

>> B*A

123	120	133	88	136
210	205	206	153	224
195	184	193	140	212
172	167	186	119	188
180	184	170	130	180

矩阵的转置

A、B为对称矩阵，是否成立？

$$(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$$

```
>> a=randi(5,5)
a =
     1     4     3     5     1
     4     2     1     3     5
     2     4     2     5     1
     3     4     5     1     4
     1     4     1     3     5
>> b=randi(5,5)
b =
     5     3     1     5     1
     1     5     5     4     2
     2     1     3     2     1
     2     2     3     3     1
     5     1     1     3     2
```

```
>> a*b
ans =
    30    37    46    45    19
    55    34    31    54    22
    33    39    44    48    19
    51    40    45    56    25
    42    35    38    47    23
>> b*a
ans =
    35    54    46    47    46
    45    58    40    55    57
    19    34    24    33    23
    26    40    30    37    32
    22    46    35    42    33
```

矩阵的转置

矩阵的转置满足下述运算规律（假设运算可行）

(i) $\left(A^T\right)^T = A;$　　(ii) $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$

(iii) $\left(kA\right)^T = k\left(A\right)^T$　　(iv) $\left(AB\right)^T = B^T A^T$

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^T = A_m^T A_{m-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$$

$$(A^k)^T = (A^T)^k$$

➢矩阵的共轭

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为复矩阵，称 $\bar{A}=\left(\bar{a}_{ij}\right)_{m\times n}$ 为A的共轭矩阵.

逆矩阵

问题驱动： 由于矩阵向量乘法 $\vec{y} = A\vec{x}$ 可看成映射，我们自然关心逆映射怎么求？

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}.$$

$$\mathbf{A}:\quad \begin{tikzcd} \vec{\mathbf{x}} \arrow[r] & \vec{\boldsymbol{b}}. \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

回顾： $y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$满足

$$f \circ f^{-1} = 1, \qquad f^{-1} \circ f = 1 \ \ (1\text{为恒等映射})$$

逆矩阵

定义(可逆矩阵) 对于 n 阶方阵 A，若有一个 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = I$$

则称 A 是可逆 (非退化/非奇异)的，并称 B 是 A 的逆矩阵.

如：$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$

注 可逆矩阵是方阵，其逆阵是同阶的方阵。

逆矩阵

性质1(唯一性) 可逆阵的逆矩阵唯一.

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

注 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

应用：线性方程组 $A_{n\times n}x = y$

$$y = Ax \xrightarrow{\text{逆映射}} x = A^{-1}y$$

A^{-1} : 把y再变回x的变换

逆矩阵

例1 设 $ab \neq 0$，求 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1}$

证明：
$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + cz = 1 \\ ay + cw = 0 \\ bz = 0 \\ bw = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}cb^{-1} \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

推广 设 $A_{n\times n}, B_{k\times k}$ 为可逆阵，且$C_{n\times k}$ ，则

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

特别地，

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

- 可逆矩阵的性质：
- **(1)** 若 A 可逆，则其逆阵 A^{-1} 也可逆，且

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

- **(2)** 若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

- **(3)** 若 A 可逆，λ 为非零常数，则 λA 也可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}\ (\lambda\neq 0)$$

- **(4)** 若 A，B 为同阶可逆阵，则 AB 也可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

逆矩阵

注： $\boxed{(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}}$

例如：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A,B可逆，但$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$不可逆

A,C可逆，$A+C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆，

但$A^{-1}+C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \neq (A+C)^{-1}$

逆矩阵

另外，当A可逆时,定义

$$A^0 = I, \quad A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k.$$

(k为正整数)

(5) 当A可逆,λ,μ为整数(可以是负数)时,有

$$A^{\lambda} A^{\mu} = A^{\lambda+\mu}, \quad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu} = A^{\lambda\mu}.$$

（6）若A可逆，且$AB=AC$, 则$B=C$.（消去律）

逆矩阵

- 矩阵的共轭、转置、共轭转置满足分配律：

$$(A+B)^* = A^* + B^*, (A+B)^T = A^T + B^T, (A+B)^H = A^H + B^H$$

- 矩阵乘积的转置、共轭转置和逆矩阵满足关系式：

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^H = B^H A^H,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad （A, B\text{为可逆的正方阵}）$$

- 共轭、转置和共轭转置等符号均可与求逆符号交换，即有

$$A^{-*} = (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, A^{-T} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1},$$

$$A^{-H} = (A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$$

矩阵的初等变换

引例：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ \boxed{}x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ \boxed{4}x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ \boxed{3}x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ & \\ & \end{cases}$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-3\times①}]{②-③}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \end{cases}$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{②\div 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \\ \\ \end{cases}$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-2\times③]{③\longleftrightarrow④}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ & \\ & \end{cases}$$

矩阵的初等变换

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\
x_4 = -3, & ③ \\
0 = 0. & ④
\end{cases}
$$

恒等式

取 x_3 为自由变量，则 $\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix}} \right.$

令 $x_3 = c$，则 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

矩阵的初等变换

三种变换：

✓交换方程的次序，记作 $(i) \leftrightarrow (j)$ ；

✓以非零常数 k 乘某个方程，记作 $(i) \times k$ ；

✓一个方程加上另一个方程的 k 倍，记作 $(i) + k(j)$.

其逆变换是：

$(i) \leftrightarrow (j) \Rightarrow (i) \leftrightarrow (j)$

$(i) \times k \Rightarrow (i) \div k$

$(i) + k(j) \Rightarrow (i) - k(j)$

结论：

1. 由于对原线性方程组施行的变换是可逆变换，因此变换前后的方程组同解.
2. 在上述变换过程中，实际上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算.

矩阵的初等变换

定义：下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

✓对调两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

✓以非零常数 k 乘某一行的所有元素，记作 $r_i \times k$；

✓某一行加上另一行的 k 倍，记作 $r_i + kr_j$.

其逆变换是：

$r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;

$r_i \times k \Rightarrow r_i \div k$;

$r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

初等变换 $\begin{cases} \text{初等行变换} \\ \text{初等列变换} \end{cases}$

把定义中的“行”换成“列”，就得到矩阵的初等列变换的定义.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

$$\left(\qquad \right) = B$$

增广矩阵

结论：对原线性方程组施行的变换可以转化为对增广矩阵的变换.

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\longleftrightarrow②} \qquad \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-3\times①}]{②-③} \qquad \underset{\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}}{\overset{r_2 - r_3}{\sim}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{② \div 2} \qquad \underbrace{}_{\substack{r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2}}^{r_2 \div 2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$\xrightarrow[④-2\times③]{③\longleftrightarrow④} \qquad \underset{r_4-2r_3}{\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

B_5 对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$，则 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

矩阵的初等变换

- 带有运算符的矩阵运算，用“ = ”．例如：
  - 矩阵加法＋
  - 数乘矩阵、矩阵乘法×
  - 矩阵的转置 T（上标）
  - 方阵的行列式|·|
- 不带运算符的矩阵运算，用“～”．例如：
  - 初等行变换
  - 初等列变换

矩阵的初等变换

矩阵之间的等价关系

行等价，记作 $A \overset{r}{\sim} B$

$$A \xrightarrow[\text{有限次初等列变换}]{\text{有限次初等行变换}} B$$

列等价，记作 $A \overset{c}{\sim} B$

矩阵的初等变换

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} \overset{\text{有限次初等变换}}{\rightleftarrows} \boldsymbol{B}$$

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反身性　$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$；

对称性　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$；

传递性　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\overset{r_1 - r_2}{\underset{r_2 - r_3}{\sim}}$$

行阶梯形矩阵:

1. 可画出一条阶梯线，线的下方全为零;
2. 每个台阶只有一行;
3. 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵:

4. 非零行的第一个非零元为1;
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵:

4. 非零行的第一个非零元为1;
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\xrightarrow[\substack{c_4+c_1+c_2 \\ c_5-4c_1-3c_2+3c_3}]{c_3 \leftrightarrow c_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

标准形矩阵:

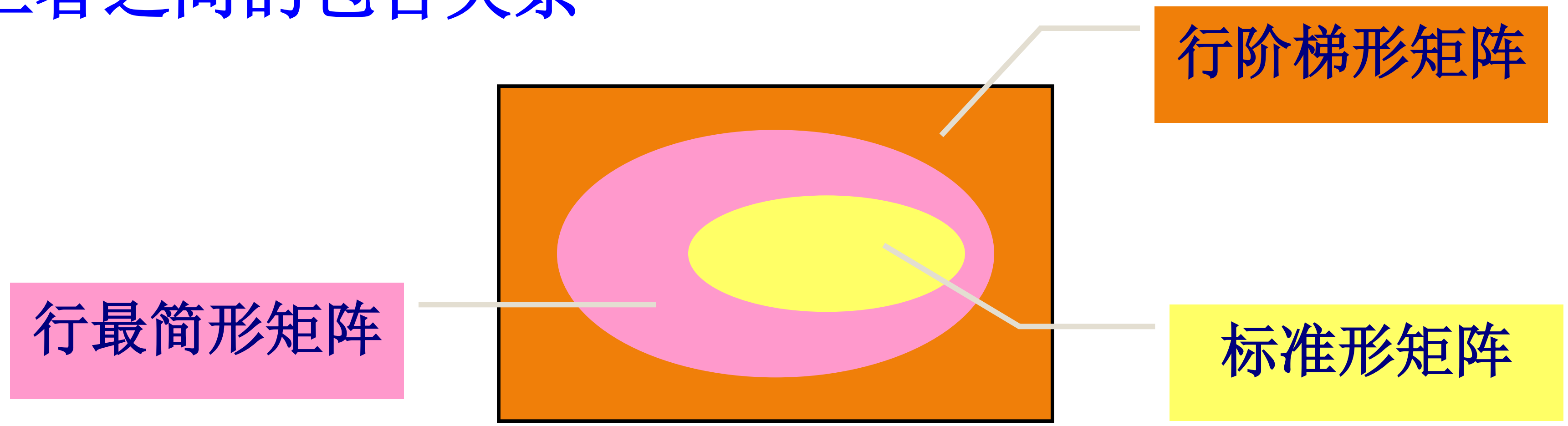
6. 左上角是一个单位矩阵,其它元素全为零.

矩阵的初等变换

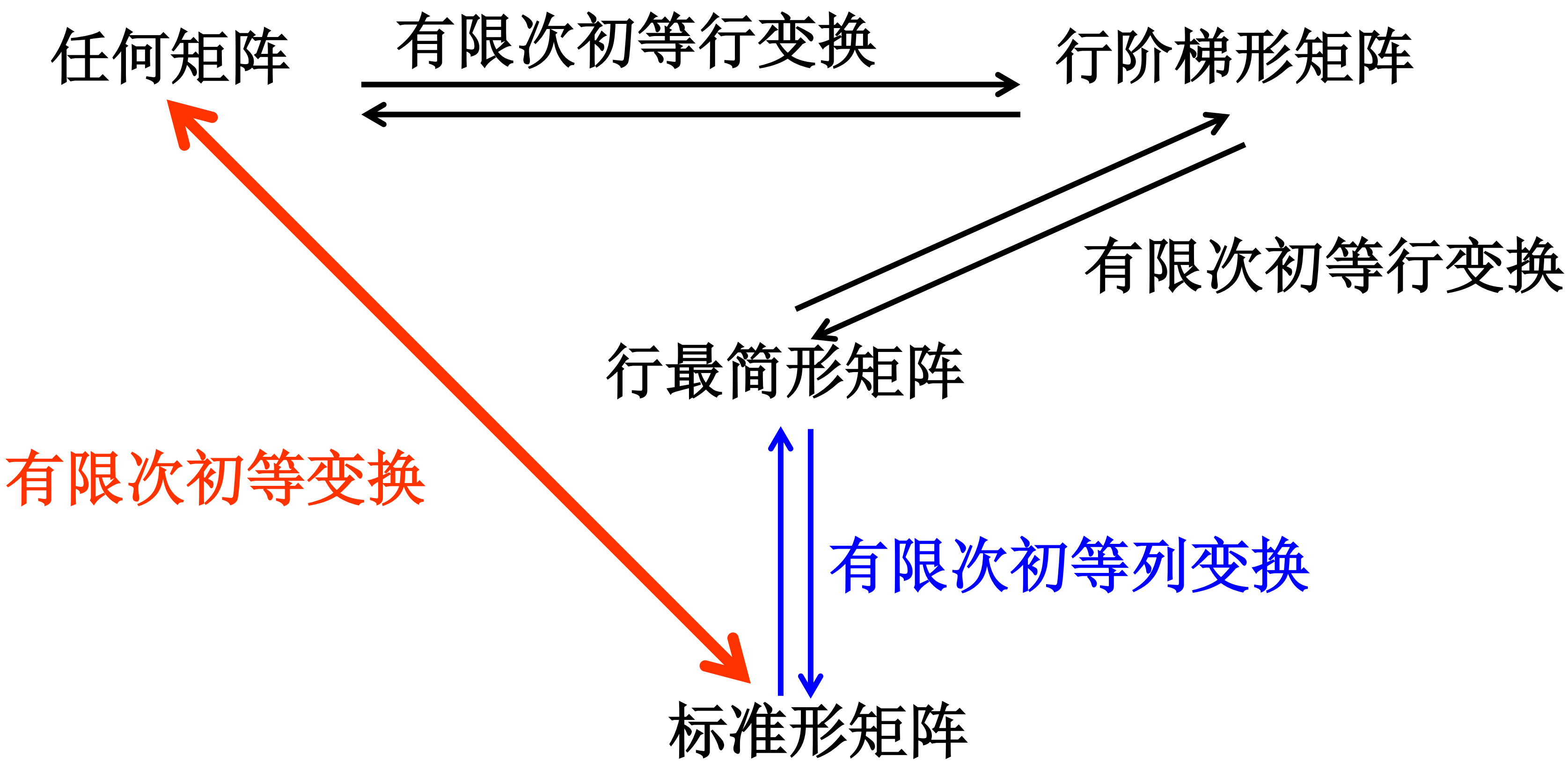
$$F=\begin{pmatrix} {\color{red}E_r} & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形矩阵由m、n、r三个参数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

三者之间的包含关系



矩阵的初等变换


任何矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

矩阵的初等变换

定义：由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调单位阵的两行（列）；

(2) 以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵的某一 行（列）；

(3) 以 k 乘单位阵单位阵的某一 行（列）加到另一 行（列） .

矩阵的初等变换

（1）对调单位阵的第 i, j 行（列），记作 $E_m(i, j)$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\&&&&\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3, 5)$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_5}\begin{pmatrix}1&0&&0&\\0&1&&0&\\0&0&&0&\\0&0&&1&\\0&0&&0&\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

(2) 以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵第 i 行（列），记作 $E_m(i(k))$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3(k))$

$$\|$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0& &0&0\\0&1& &0&0\\0&0& &0&0\\0&0& &1&0\\0&0& &0&1\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

(3) 以 k 乘单位阵第 j 行加到第 i 行，记作 $E_m(ij(k))$.

两种理解！

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{r_3+r_5\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ & & & & \\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(35(k))$

以 k 乘单位阵第 i 列加到第 j 列.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{c_5+?_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&k\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_3(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3(2,3)A_{3\times4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{23} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

结论

$E_m(i,j)A_{m\times n}$ 把矩阵A的第 i 行与第 j 行对调，即 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j)$ 把矩阵A的第 i 列与第 j 列对调，即 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$E_m(i(k))A_{m\times n}$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$.

$A_{m\times n}E_n(i(k))$ 以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$.

$E_m(ij(k))A_{m\times n}$ 把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$.

$A_{m\times n}E_n(ij(k))$ 把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$.

矩阵的初等变换

口诀：左行右列.

性质1 设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

矩阵的初等变换

初等变换	$\longleftrightarrow$	初等矩阵
初等变换的逆变换	$\longleftrightarrow$	?

矩阵的初等变换

因为“对于n 阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\&&&&\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\&&&&\end{pmatrix}$$

$$E_5(3,5)E_5$$

$$E_5(3,5)E_5(3,5)E_5$$
$$=E_5(3,5)E_5(3,5)$$
$$=E_5$$

所以 $E_5(3,5)^{-1}=E_5(3,5)$.

一般地，$\boxed{E(i,j)^{-1}=E(i,j)}$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是
可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3 ? k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5(3(k))E_5$$

$$E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))E_5$$

$$=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(3(k))^{-1}=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

一般地，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

矩阵的初等变换

因为“对于n 阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_5+c_3\times k}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\&&&&\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{c_5+c_3?\times(-k)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_5(35(k))\qquad E_5E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(35(k))^{-1}=E_5(35(-k))$.

一般地，$\boxed{E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))}$.

矩阵的初等变换

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵的逆矩阵 ?

初等矩阵的逆矩阵是：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);$$

$$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

$$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k)).$$

矩阵的初等变换

定理2 设A为n阶矩阵，则如下命题等价：

1. A是可逆的；
2. $AX=O$只有零解；
3. A与I行等价；
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

证 1→2: 显然(*why*?)

2→3: 设A经一系列初等行变换化为行阶梯形B

则$BX=0$只有零解. 断言: B的对角元均非零

否则 B最后一行元均为零, $BX=O$有非零解, 矛盾!

于是B可经一系列初等行变换化为行简化阶梯形I

矩阵的初等变换

1. A是可逆的;
2. $AX=O$只有零解;
3. A与I行等价;
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

3→4: 由条件，A可经行初等变换得I.

故存在初等矩阵$E_1,\dots,E_k$使得

$$E_k\cdots E_1A=I$$

$$\Rightarrow A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}I=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$$

4→1: 显然(*why*?)

矩阵的初等变换

性质2　方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \dots, P_l$，使 $A = P_1 P_2 \dots, P_l$.

这表明，可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵．其实，可逆矩阵的行最简形矩阵也是单位阵．

推论1　方阵 A 可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$.

推论2　方阵 A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ = B$.

矩阵的初等变换

当$|A| \neq 0$时，由 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E，\text{及} \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1},$$

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \vdots E)$$

$$= (P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \vdots P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E)$$

$$= (E \vdots A^{-1})$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

矩阵的初等变换

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

解 $$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}$$

矩阵的初等变换

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等变换

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$.

$$\because \quad A^{-1}(A \vdots B) = (E \vdots A^{-1}B)$$

即

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \quad \boxed{A^{-1}B})$$

矩阵的初等变换

例2 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B.$

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

$$
\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\
0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -3
\end{pmatrix}
$$

$$
\underset{r_3\div(-1)}{\overset{r_2\div(-2)}{\sim}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{pmatrix},
$$

$$
\therefore \qquad X=\begin{pmatrix}
3 & 2 \\
-2 & -3 \\
1 & 3
\end{pmatrix}.
$$

矩阵的初等变换

如果要求$Y = CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \boxed{CA^{-1}} \end{pmatrix},$$

即可得$Y = CA^{-1}$.

也可改为对(A^T, C^T)作初等行变换，

$$(A^T, C^T) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, \boxed{(A^T)^{-1}C^T}),$$

即可得$Y^T = (A^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}} = (A^T)^{-1}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}$,

即可求得Y.

矩阵的初等变换

消元法解方程组经常要对方程组用到如下三种变换：

（1）交换方程次序；

（2）以不等于 0 的数乘某个方程；

（3）一个方程加上另一个方程的k倍(k非零).

相当于对增广矩阵施行如下变换：

(1) 对调矩阵的两行。

(2) 用非零常数k乘矩阵的某一行的所有元素。

(3) 将矩阵的某一行所有元素乘以非零常数k后加到另一行对应元素上。

统称为矩阵的初等行变换

矩阵的初等变换

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

换法变换 (1) 对调两行（对调 i, j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

倍法变换 (2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素(kr_i);

消法变换 (3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作 $r_i + kr_j$）.

同理可定义矩阵的初等列变换 (把“r”换成c”).

初等行变换和初等列变换统称为初等变换。

矩阵的初等变换

逆矩阵的求法

$$(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I,\ A^{-1})$$

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

谢　谢！