



第四章 频率域滤波

主要内容:

- 1.傅立叶变换
- 2.傅立叶变换在图像处理中的应用
- 3.空间域与变换域
- 4.余弦变换
- 5.沃什变换和哈达玛变换
- 6.低通滤波
- 7.高通滤波

1 概述(背景知识)

2/106



1.概述

2.一维傅立叶变换

3.一维快速傅立叶变换

4.二维傅立叶变换

5.余弦变换

6 沃什变换和哈达玛变换

7 低通滤波

8 高通滤波

设 $f(t)$ 是定义在 $[-T/2, T/2]$ 上的函数(信号), $0 < T < \infty$.

将信号 $f(t)$ 分解成一系列基本信号的叠加具有理论和工程意义.“分解—综合”是解决复杂问题的常用思路.

◆泰勒展式

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} (t - t_0)^N$$

◆傅立叶级数

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right\}$$
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} t\right) dt \end{cases}$$

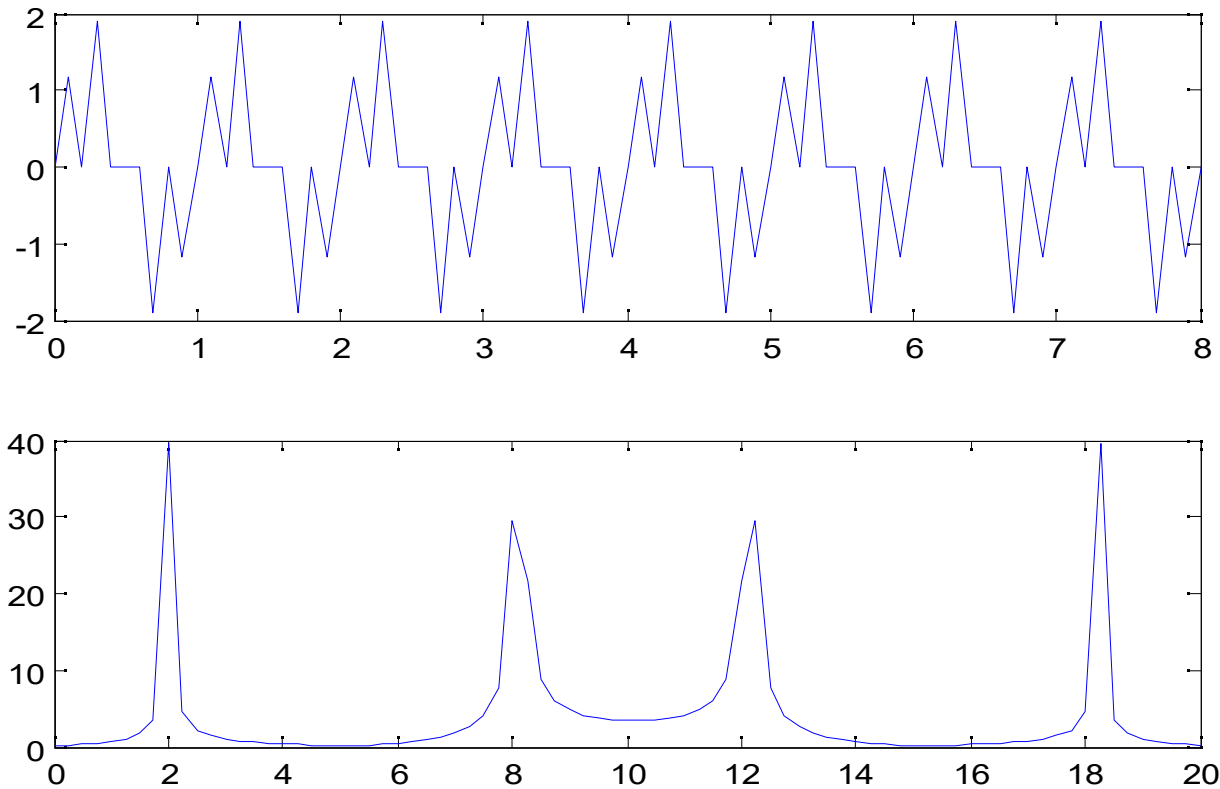
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(2n\pi/T)t}, \quad j = \sqrt{-1}$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j(2n\pi/T)t} dt$$

称 $1/T$ 为基频.令 T 趋向于无穷大,可导出傅立叶变换的概念. C_n 是频率为 n/T 的谐波信号所占的“比重”.

将信号 $f(t)$ 分解成一系列基本信号的叠加具有理论和工程意义.“分解—综合”是解决复杂问题的常用思路.

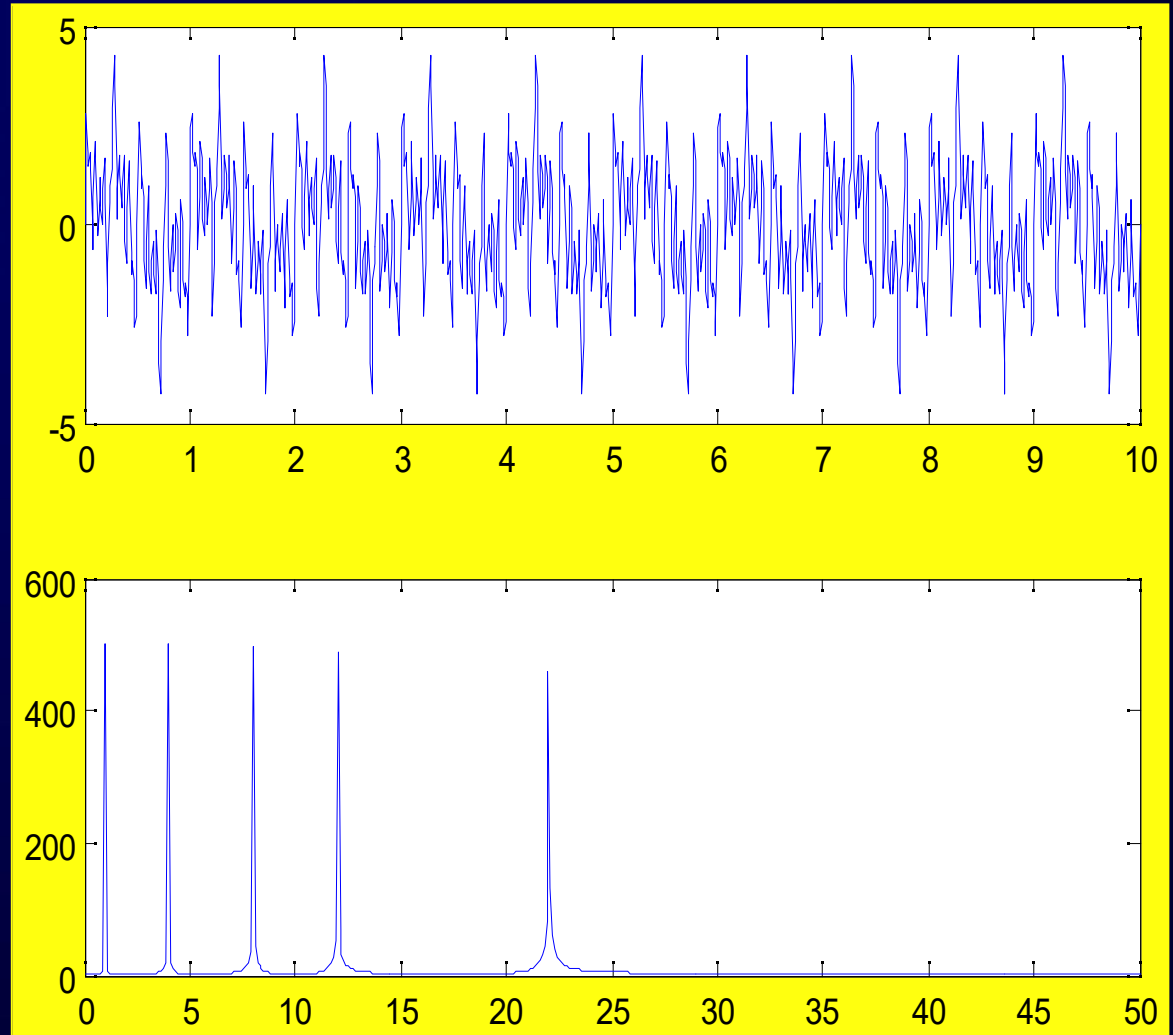


```
t=0:0.1:8;  
y=sin(2*pi*t)+sin(4*2*pi*t)+sin(8*2*pi*t)+sin(12*2*pi*t);  
yy=fft(y);  
subplot(2,1,1);plot(t,y);  
subplot(2,1,2);plot(2.5*t,abs(yy));
```



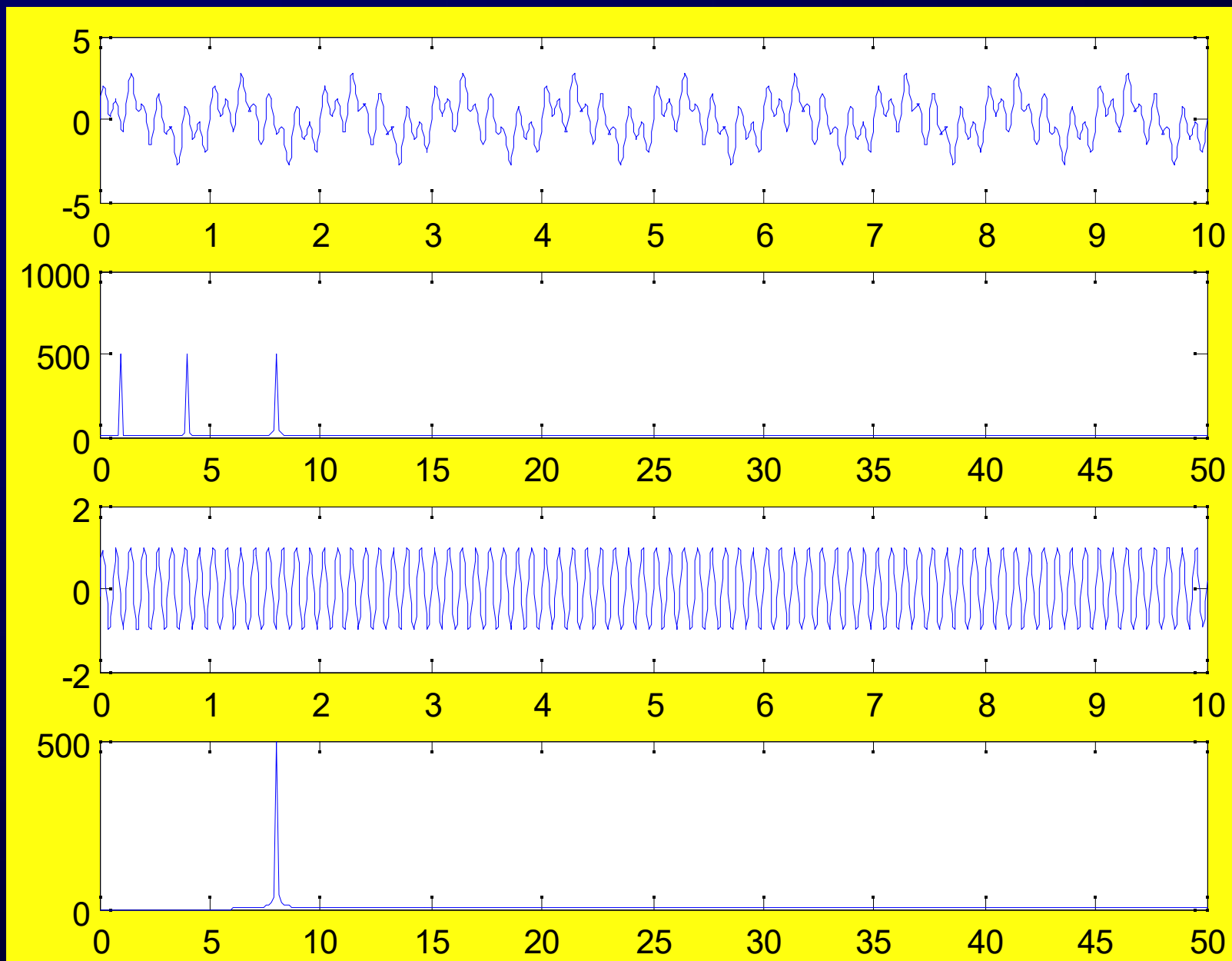
$$y = \sin(2\pi \times t) + \sin(2\pi \times 4t) + \sin(2\pi \times 8t) + \sin(2\pi \times 12t) + \sin(2\pi \times 22t)$$

```
t=0:0.01:10;  
N=length(t);  
TT=2;  
yy=fft(y);  
subplot(2,1,1);plot(t,y);  
i=0:1/(N*0.01):1/0.01/TT;  
u=length(yy)/2+1;  
yyy=yy(1:u);  
subplot(2,1,2);plot(i,abs(yyy));
```



$$y = \sin(2\pi \times t) + \sin(2\pi \times 4t) + \sin(2\pi \times 8t)$$

6/106





```
ttt=10;
tt=0.01;
N=ttt/tt;
TT=2;
t=0:tt:ttt;
y=sin(2*pi*t)+sin(4*2*pi*t)+sin(8*2*pi*t);
yy=fft(y);
subplot(4,1,1);plot(t,y);
i=0:1/(N*tt):1/tt/TT;
u=N/TT+1;
yyy=yy(1:u);
subplot(4,1,2);plot(i,abs(yyy));
TTT=60;
yy(N-TTT:N+1)=0;
yy(1:TTT)=0;
z=ifft(yy);
subplot(4,1,3);plot(t,real(z));
yyy=yy(1:u);
subplot(4,1,4);plot(i,abs(yyy));
```

$$y = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi 4t) + \sin(2\pi 8t)$$



2. 一维Fourier变换

1. 概述

2. 一维傅立叶变换

3. 一维快速傅立叶变换

4. 二维傅立叶变换

5. 余弦变换

6. 沃什变换和哈达玛变换

7. 低通滤波

8. 高通滤波

➤ 一维连续傅立叶变换

引理1: 若一维实空间上的函数 $f(x)$ 绝对可积, 则函数

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-j2\pi xu) dx$$

存在, 若 $F(u)$ 绝对可积, 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \exp(j2\pi ux) du$$

其中 $j = \sqrt{-1}$ (下同)

定义: 通常称 $F(u)$ 为 $f(x)$ 的Fourier变换, $f(x)$ 为 $F(u)$ 的Fourier反变换. 记

$$F(u) = \mathbf{F}(f(x)), f(x) = \mathbf{F}^{-1}(F(u))$$



将 $F(u)$ 写成 $F(u) = R(u) + jI(u) = |F(u)| e^{j\theta(u)}$

其中 $|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$, $\theta(u) = \arctg \frac{I(u)}{R(u)}$

$F(u)$ 称为 $f(x)$ 的振幅谱（频谱, *Fourier*谱）

$\theta(u)$ 称为 $f(x)$ 的相位谱, $E(u) = |F(u)|^2$ 称为 $f(x)$ 的能量谱。

通常, 我们将 *Fourier* 变换前的变量域, 即 x 的变化范围称为空间域, 而将变换后的 变量域, 即变量 u 的变化范围称为频率域或变换域。

关于傅里叶谱的叫法



例1. 设 $f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{-j2\pi nx/T}$, 则 $f(x)$ 的 *Fourier* 变换为

$$\begin{aligned} F(u) &= \mathbf{F}(f(x)) = \mathbf{F}\left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{-j2\pi nx/T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \frac{1}{T} \mathbf{F}(e^{-j2\pi nx/T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(u - Tn) \end{aligned}$$

例2. 设 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(x - Tn)$, 则 $f(x)$ 的 *Fourier* 变换为

$$\begin{aligned} F(u) &= \mathbf{F}(f(x)) = \mathbf{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \delta(x - Tn)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) \mathbf{F}(\delta(x - Tn)) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{j2\pi un/T} \end{aligned}$$

其中, $\delta(0) = +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, 为单位脉冲函数。

➤ 一维离散傅立叶变换

11/106



对有限长序列 $f(x)$, $x=0,1,2,\dots,N-1$,可定义一维离散傅立叶变换对如下:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp(-2\pi i x u / N), u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{A})$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp(2\pi i x u / N), x = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B})$$

令 $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 则以上两式可写为:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W^{xu}, u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) W^{-ux}, x = 0, 1, \dots, N-1$$

傅立叶变换对也可以简记为: $f(x) \Leftrightarrow F(u)$



注意到(A)和(B)的结构，傅立叶变换也可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \dots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^{-1 \times 1} & W^{-2 \times 1} & \dots & W^{-(N-1) \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{-(N-1) \times 1} & W^{-(N-1) \times 2} & \dots & W^{-(N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \dots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \dots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^{1 \times 1} & W^{2 \times 1} & \dots & W^{(N-1) \times 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{1 \times (N-1)} & W^{2 \times (N-1)} & \dots & W^{(N-1) \times (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \dots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

例3 $f(x)=1, x=0,1,2,\dots,N-1$ 有限长常数序列的离散傅立叶变换：

$$F(u) = \begin{cases} 1 & u = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

3 一维快速傅立叶变换

- 1.概述
- 2.一维傅立叶变换
- 3.一维快速傅立叶变换
- 4.二维傅立叶变换
- 5.余弦变换
- 5'.数字图像处理方法
- 6 沃什变换和哈达玛变换
- 7 低通滤波
- 8 高通滤波

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp(-2\pi i u x / N)$$

N	N ² (DFT) 乘法N ² 加法N(N-1)	Nlog ₂ N(FFT) 乘法(N/2)log ₂ N 加法Nlog ₂ N	N ² /Nlog ₂ N
2	4	2	2.0
4	16	8	2.0
16	256	64	4.0
64	4096	394	10.7
512	262144	4608	56.9
1024	1048576	10240	102.4



$N > 8000$, IBM7094(1962.9), 耗时40分钟

设 t_N 为 N 个数据的傅立叶变换所用总时间, 则

t_N / N 为得到每个傅立叶变换系数所用的平均时间.

$$(40 \text{ 分钟} / 8000) \times 8000^2 = 0.609 \text{ 年} = 5334.84 \text{ 小时}$$

$$(40 \text{ 分钟} / 8000) \times 8000^2 \times \frac{(N/2) \log_2 N}{N^2} = 0.18 \text{ 天} = 4.33 \text{ 小时}$$

[假设运算效率主要由乘法效率决定]



Cooley（库利）和Tukey（图基）在1965年提出FFT算法

例 3609×5455 , PIV 2.0G, 256M, Matlab 2006, 语句
`t=cputime;f=fft2(double(a(:,:,1)));tt=cputime;`
内存不够; 463×687 , 0.4844s

4 二维离散傅立叶变换

15/106



1.概述

2.一维傅立叶变换

3.一维快速傅立叶变换

4.二维傅立叶变换

5.余弦变换

6.沃什变换和哈达玛变换

7.低通滤波

8.高通滤波

➤ 二维连续傅立叶变换

引理2: 若二维实空间上的函数 $f(x, y)$ 绝对可积, 则

$$F(u, v) = \int_{R^2} f(x, y) \exp(-j2\pi(xu + yv)) dx dy$$

若 $F(u, v)$ 绝对可积, 则有反演公式

$$f(x, y) = \int_{R^2} F(u, v) \exp(j2\pi(ux + vy)) du dv$$

为了记号简略起见, 若 f 的Fourier变换为 F , 则记

$$f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$$



将 $F(u, v)$ 写成 $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v) = |F(u, v)| e^{j\theta(u, v)}$

其中 $|F(u, v)| = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$, $\theta(u, v) = \arctg \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$

$F(u, v)$ 称为 $f(x, y)$ 的振幅谱（频谱，*Fourier* 谱(变换)）

$\theta(u, v)$ 称为 $f(x, y)$ 的相位谱， $E(u, v) = |F(u, v)|^2$ 称为 $f(x, y)$ 的能量谱。

通常，我们将 *Fourier* 变换前的变量域，即 (x, y) 的变化范围称为空间域，而将变换后的变量域，即变量 (u, v) 的变化范围称为频率域或变换域。



➤ 二维离散傅立叶变换

将连续傅立叶变换离散化，可得离散傅立叶变换。（[详细推导过程请参考相关文献](#)）

设有离散函数 $f(x, y)$ ，则可定义其傅立叶变换对：

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$



有些文献是这样 定义傅立叶变换对的:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$

或者:

$$F(u, v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$



傅立叶变换的数学表达式问题



当 $M = N$ 时，傅立叶变换对可以写为

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N})$$

$$u = 0, 1, \dots, N-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

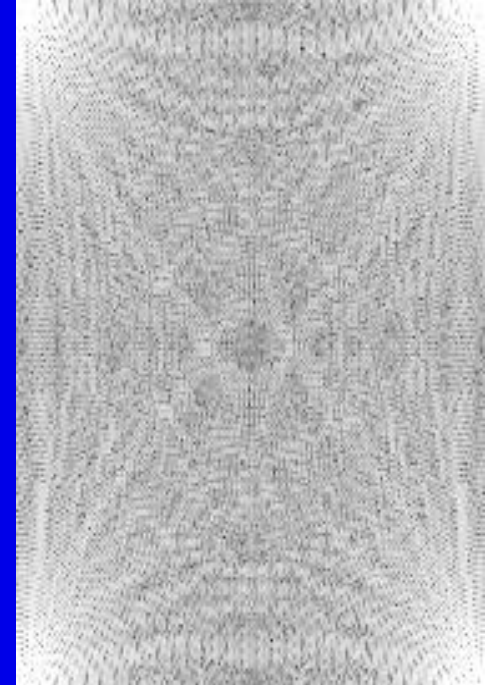
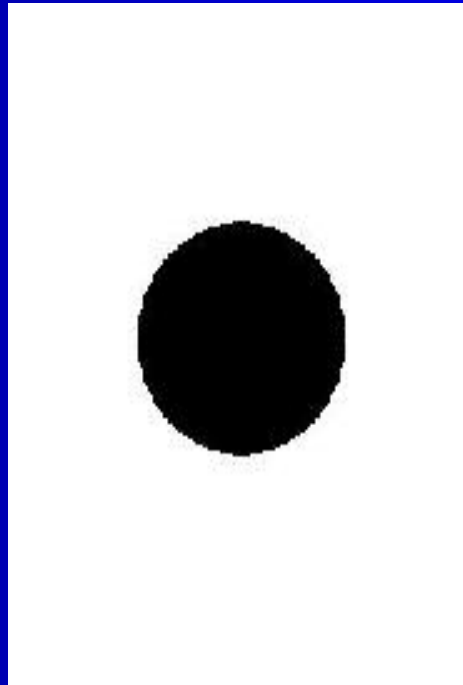
$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi \frac{ux + vy}{N})$$

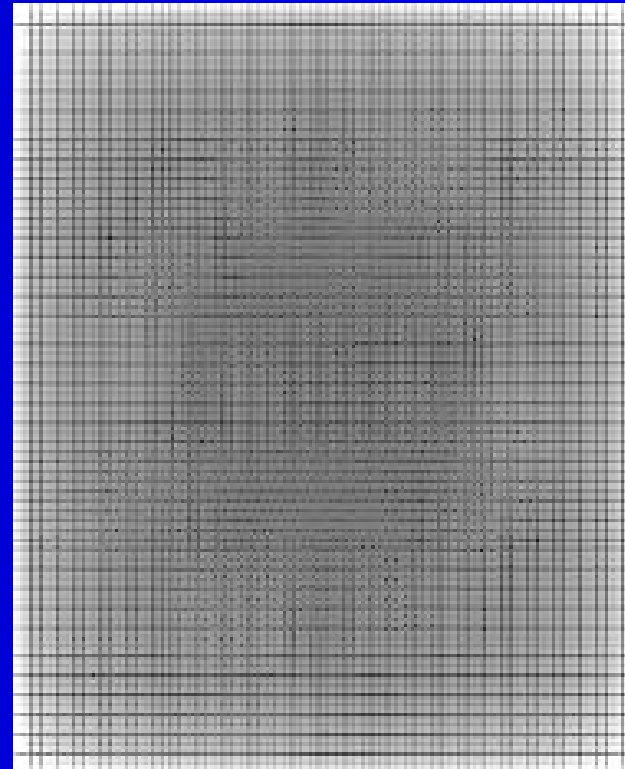
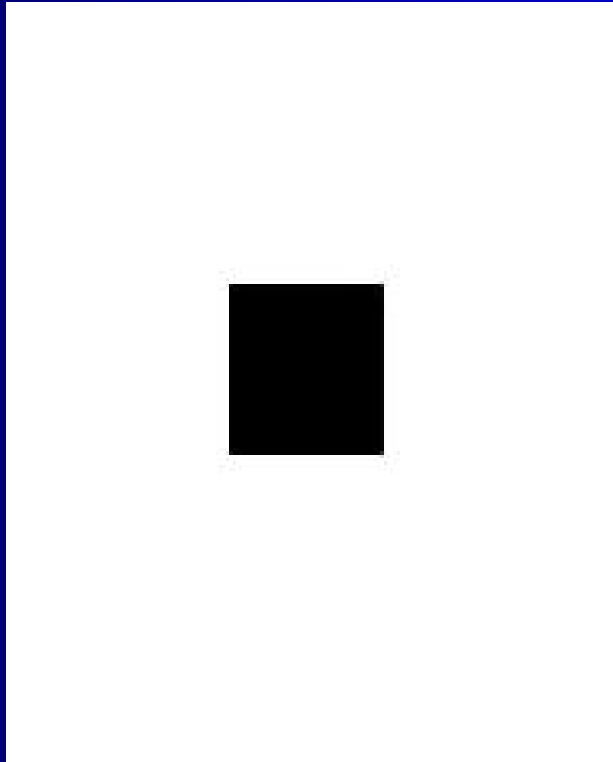
$$x = 0, 1, \dots, N-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$

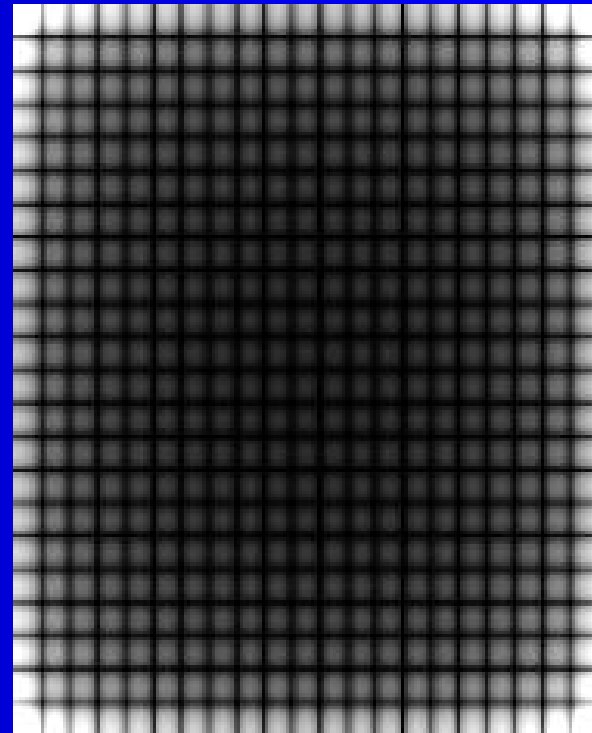
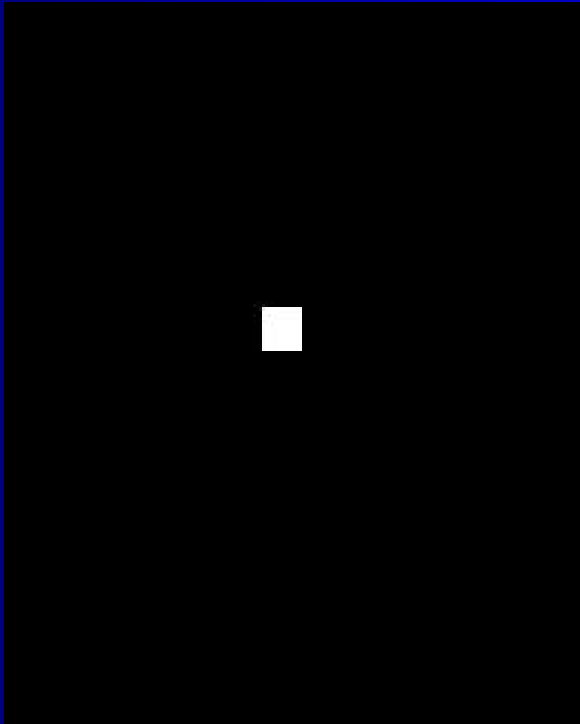
一般来讲，数字图像是空间域中的连续图像的一种满足人为满意尺度的近似，对图像进行频谱分析，对应地，对数字图像也可以进行频谱分析，有关的分析数据都有相同的物理解释。

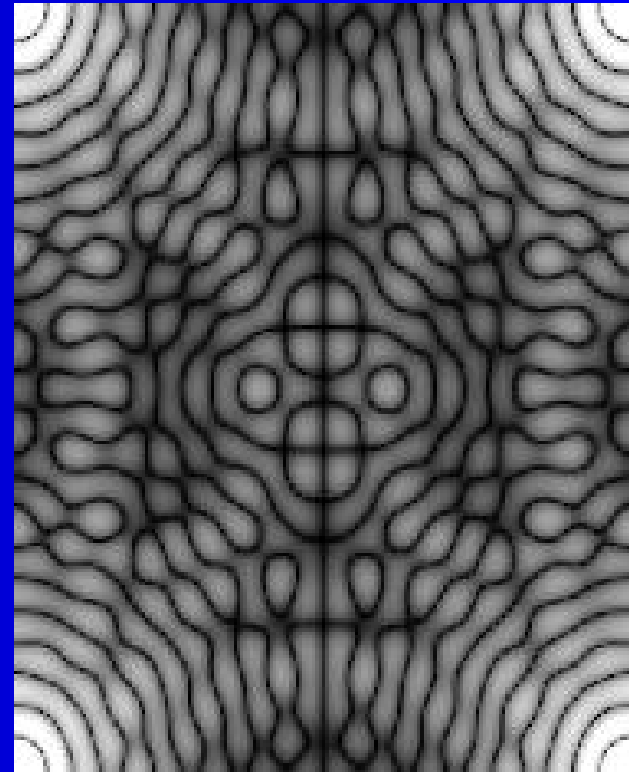
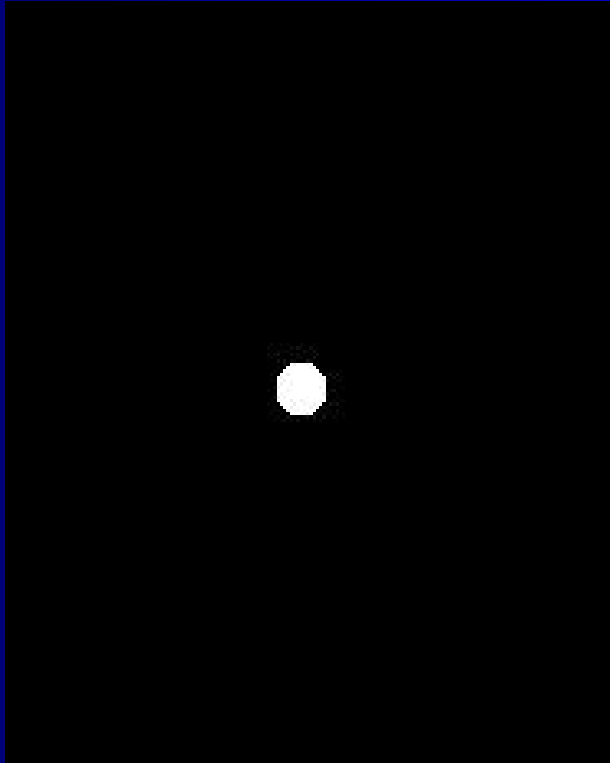
例4 图像的傅立叶谱

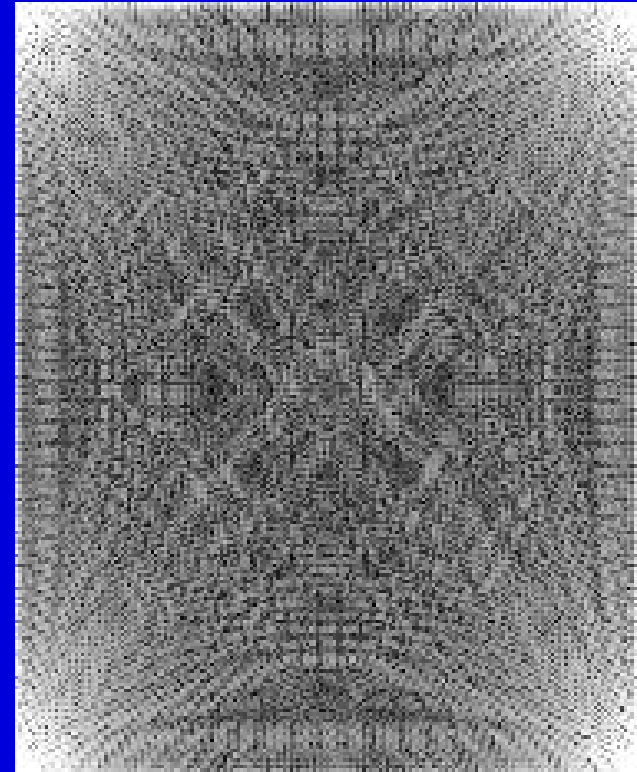
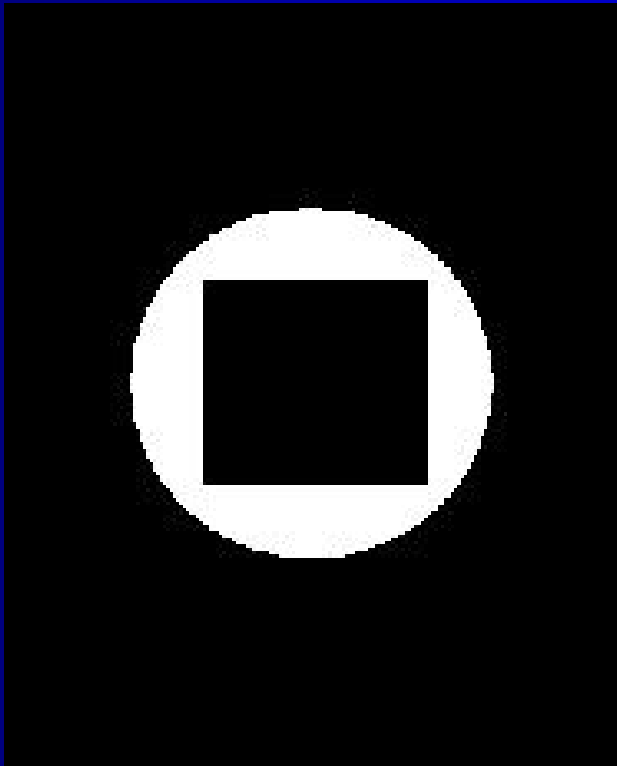
```
a=imread('fft1.jpg');  
b=uint8(a(:,:,1));  
subplot(1,2,1);  
imshow(b);  
f=fft2(double(a(:,:,1)));  
subplot(1,2,2);  
imshow(log(1+abs(f)),  
[0 10],'notruesize');
```



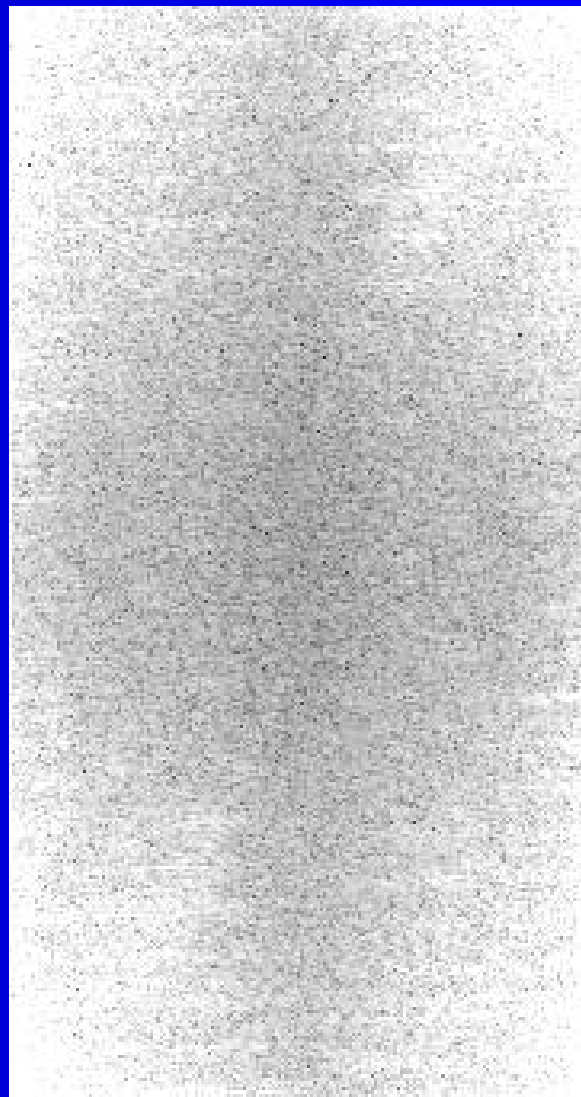








例5 灰度图像的傅立叶谱



例6



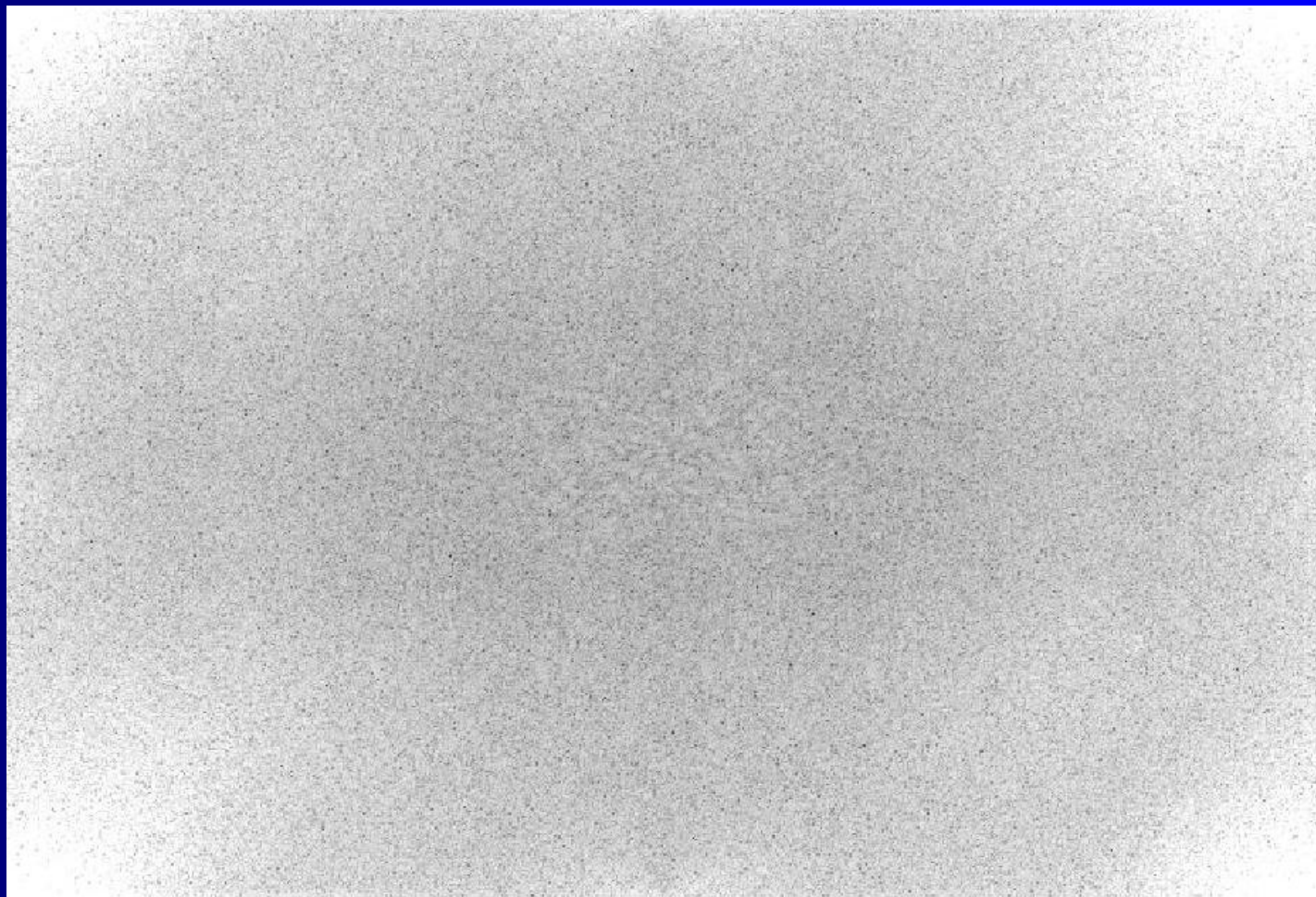
报春花 (http://www.shyu.net/hhzp/hhzp_c05.htm)

亮度分量图

$$I=R+G+B$$

27/106





```
F=FFT2(I); imshow(log(1+abs(F)),[0 10],'notruesize');
```

Fourier反变换

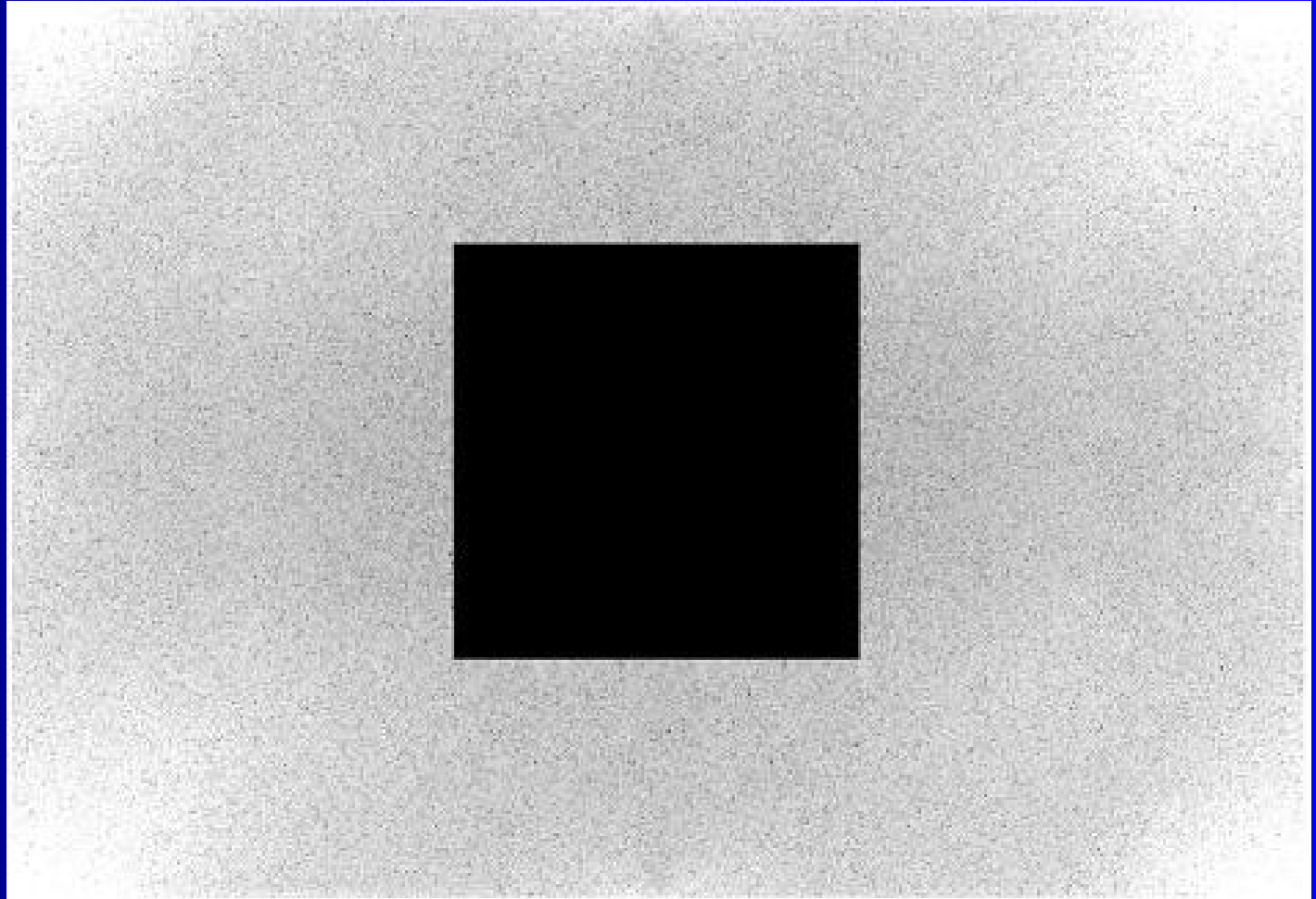


```
FF=IFFT2(F);  imshow(abs(FF),[0 256],'notruesize');
```

例7. Fourier变换的一个应用

(1)

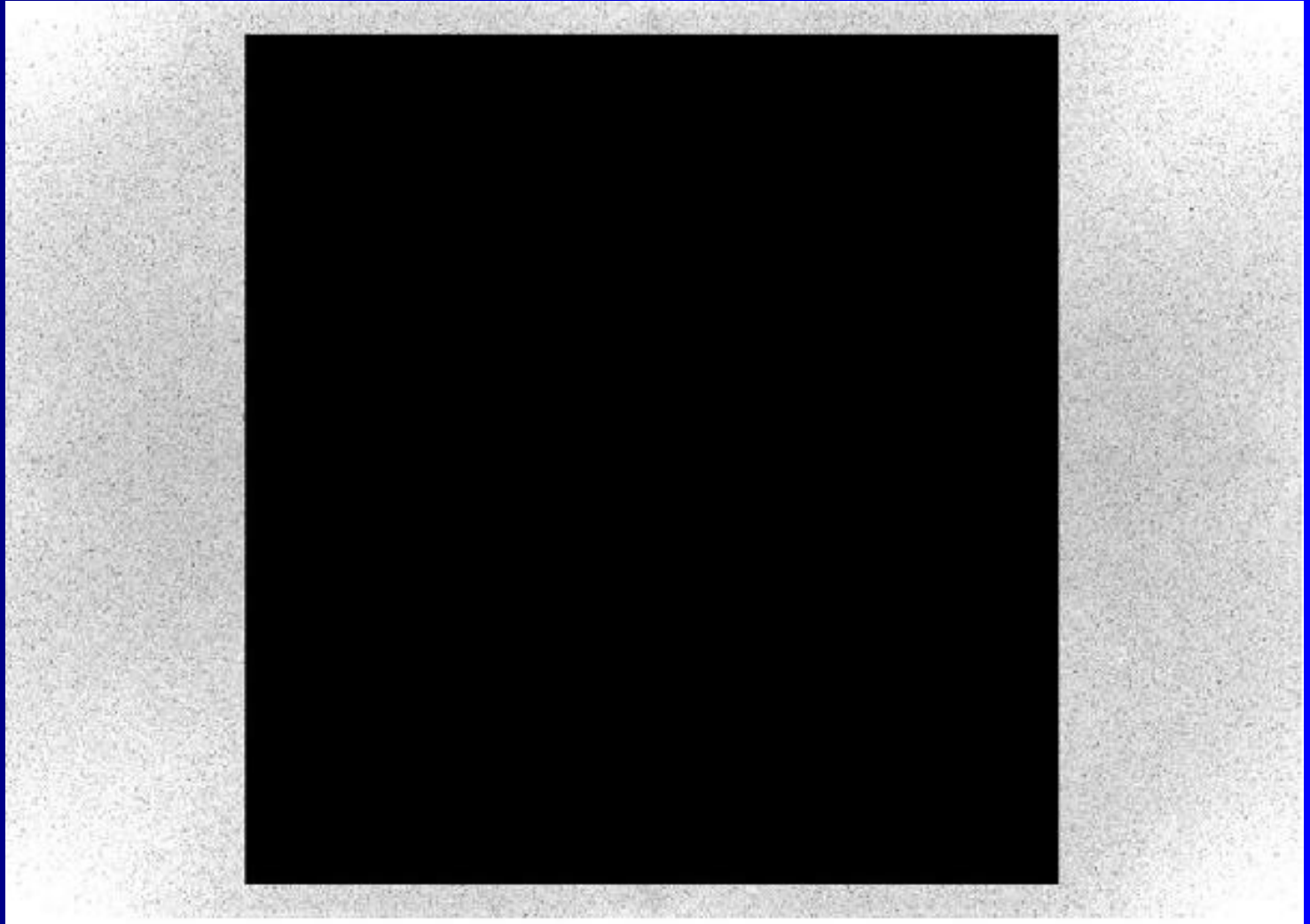
20%





(2)

50%





(3)

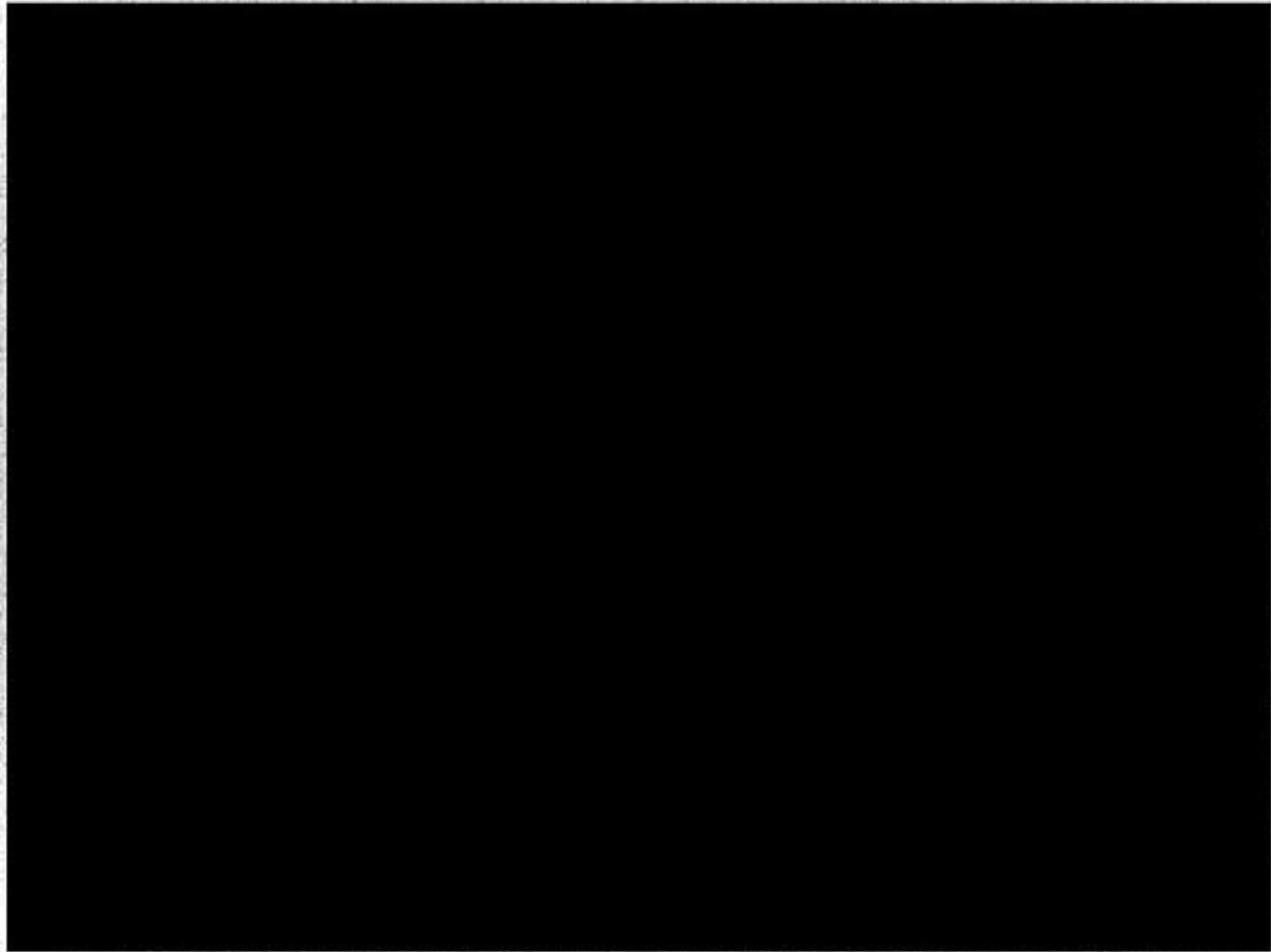
80%





(4)

90%







➤ 二维Fourier变换的性质

为简化问题，只讨论离散二维图像函数的**Fourier**变换，并且图幅参数为 **$N \times N$** 的特殊情况。

✓可分离性

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux}{N}) \exp(-2j\pi \frac{vy}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp(-2j\pi \frac{ux}{N}) \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{vy}{N}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp(-2j\pi \frac{ux}{N}) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{vy}{N}) \\ &= \mathbf{F}_x(\mathbf{F}_y(f)) \end{aligned}$$

高维变换可以通过一维变换复合而成！



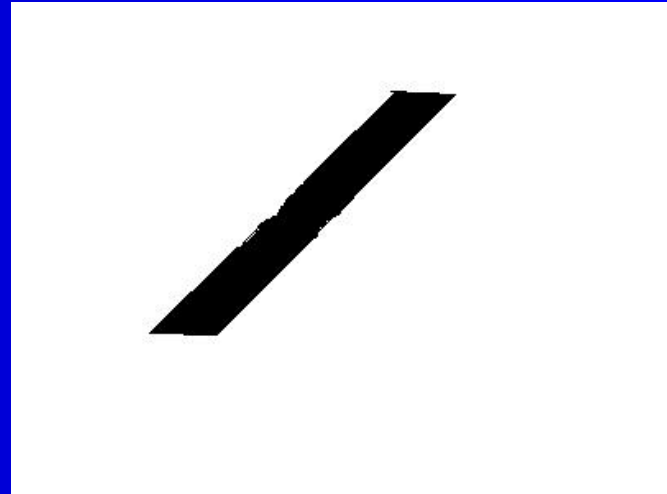
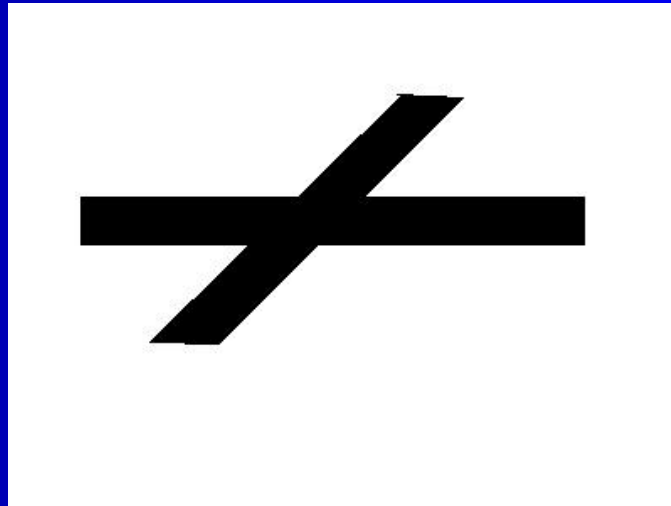
✓线性

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} (af(x, y) + bg(x, y)) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \\ &= a \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \\ &\quad + b \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} g(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \end{aligned}$$

即

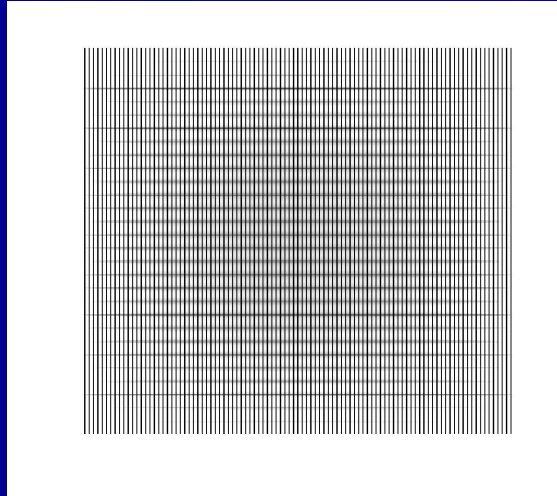
$$\mathbf{F}(af(x, y) + bg(x, y)) = a\mathbf{F}(f(x, y)) + b\mathbf{F}(g(x, y))$$

例8

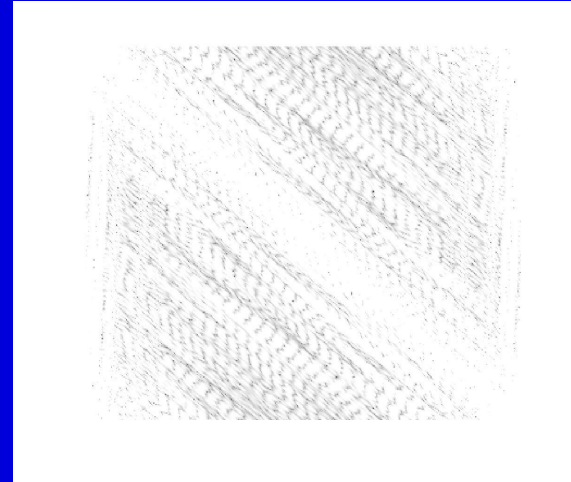
 f  g $f+g$ 

$$\mathbf{F}(f(x, y) + g(x, y)) = \mathbf{F}(f(x, y)) + \mathbf{F}(g(x, y))$$

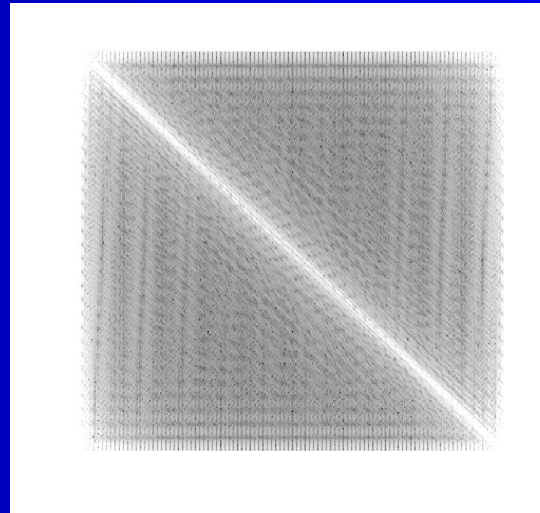
F



G



F+G





✓共轭对称性

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp\left(-2\bar{j}\pi \frac{(-u)x + (-v)y}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \overline{f(x, y) \exp\left(-2j\pi \frac{(-u)x + (-v)y}{N}\right)} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \overline{f(x, y) \exp\left(-2j\pi \frac{(-u)x + (-v)y}{N}\right)} \\
 &= \overline{F(-u, -v)}
 \end{aligned}$$

$$z = x + jy, \bar{z} = x - jy$$



共轭对称性告诉我们：

傅立叶变换的逆变换，可以通过求其正变换而得到

$$F^{-1}(F(u, v)) = F(\overline{F(u, v)})$$

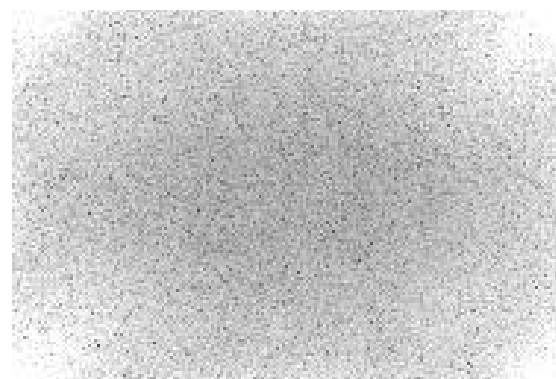
```
colormap(gray);
a=imread('fft7.jpg');
%b=uint8(a(:,:,1));
subplot(2,2,1);
imshow(a);
xlabel('原始图像');
f=fft2(double(a));
subplot(2,2,2);
imshow(log(1+abs(f)),[0
10],'notruesize');
xlabel('傅立叶变换');
```

```
ff=fft2(double(conj(f)));
subplot(2,2,3);
cc=abs(ff);
imagesc(cc);
xlabel('傅立叶变换的共轭的
傅立叶变换');
fff=ifft2(f);
subplot(2,2,4);
cc=abs(fff);
imagesc(cc);
xlabel('傅立叶反变换');
```

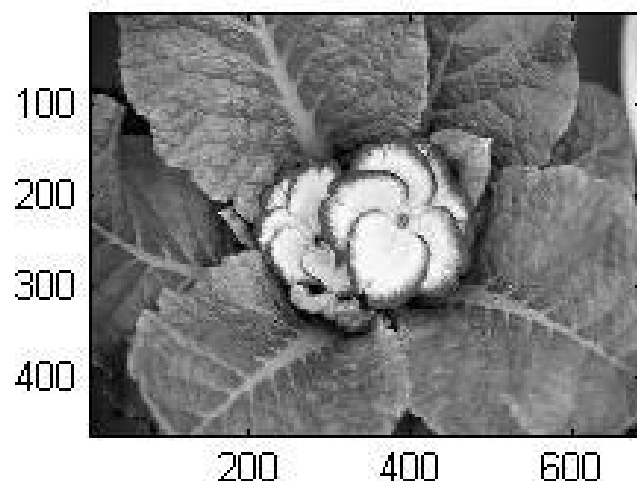
逆变换可以通过“正向”
变换和“共轭运算”复
合而成！



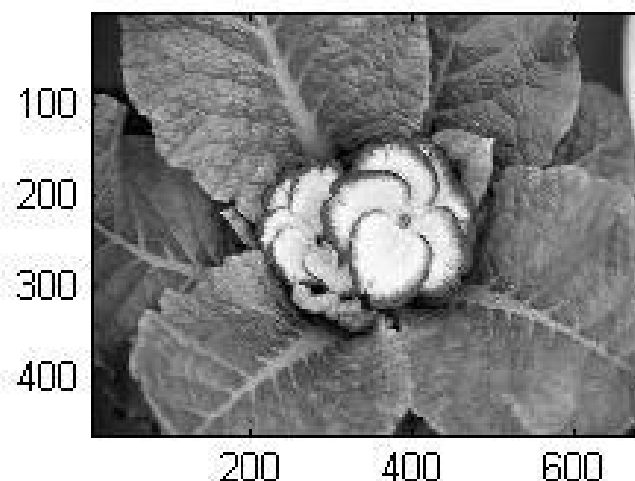
原始图像



原始图像的傅立叶谱



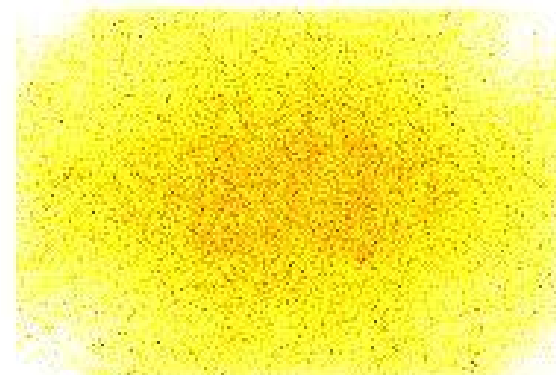
傅立叶变换的共轭的傅立叶变换



傅立叶反变换



原始图像



原始图像的傅立叶谱

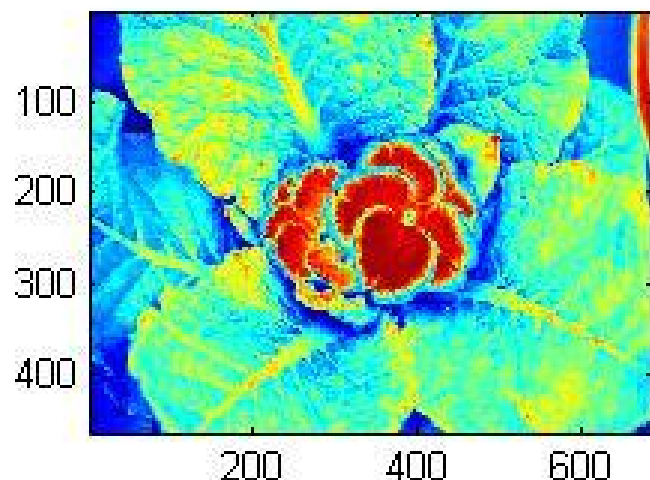


傅立叶变换的共轭的傅立叶变换



傅立叶反变换

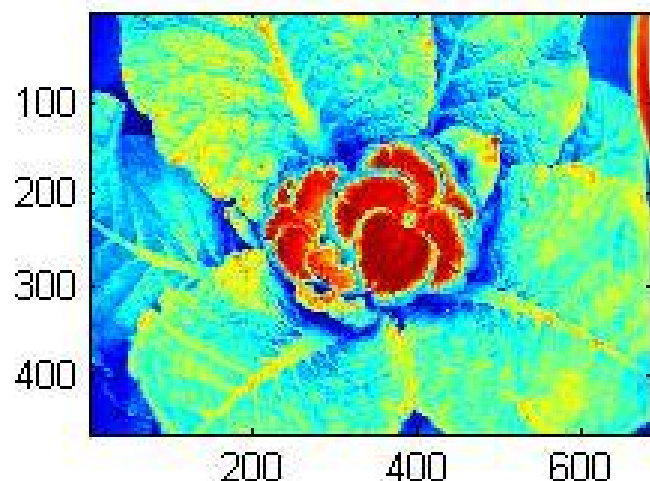
hot



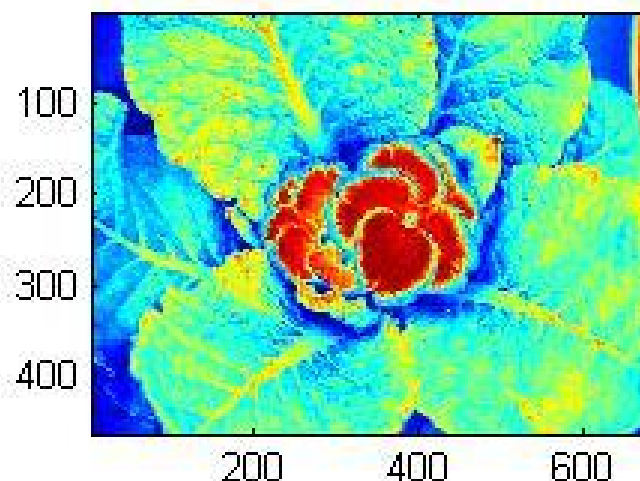
原始图像



原始图像的傅立叶谱



傅立叶变换的共轭的傅立叶变换



傅立叶反变换



✓平均值

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp(-2j\pi \frac{0x+0y}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \end{aligned}$$

直流分量
AC

✓位移性（平移与频移）

如果 $f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$, 则

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v) \exp(-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N)$$

$$f(x,y) \exp(j2\pi(u_0x + v_0y)/N) \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$



✓周期性

Fourier变换和反变换均以N为周期

$$\begin{aligned} F(u + kN, v + lN) &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{(u + kN)x + (v + lN)y}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \exp(-2j\pi \frac{(kx + ly)N}{N}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \exp(-2j\pi (kx + ly)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N}) \\ &= F(u, v) \end{aligned}$$

其中 k, l 是任意整数

注意到正变换与反变换的形式上的对称性，可知，反变换也是具有周期性



✓尺度变换

$$1. af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$2. f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right), \text{其中 } ab \neq 0$$

✓旋转性

若 $f(r, \theta) \Leftrightarrow F(\omega, \phi)$, 则

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0)$$

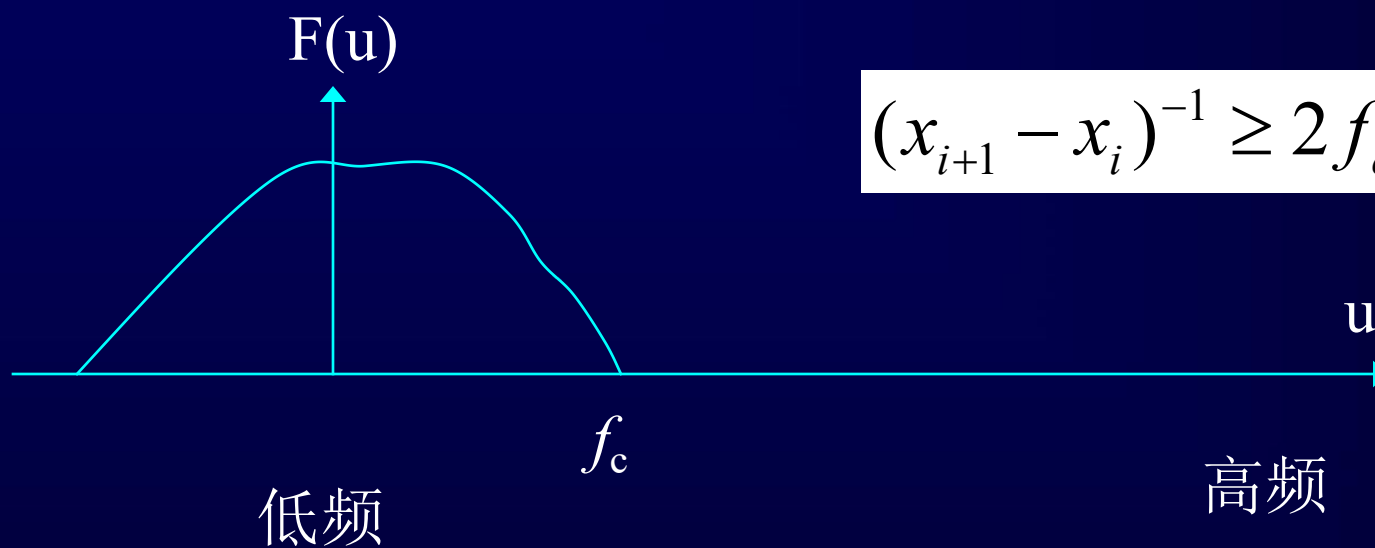
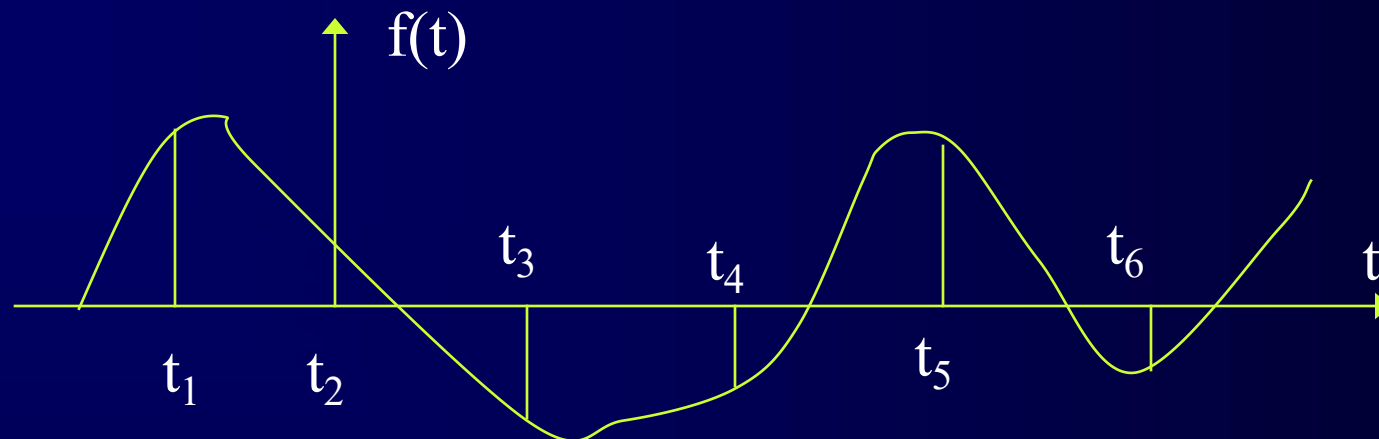
$f(r, \theta)$, $F(\omega, \phi)$ 分别为 f , F 的极坐标形式。



➤连续Fourier变换与离散傅立叶变换的联系及他们的物理解释

◆采样定理 (Nyquist)

□一维采样定理：若连续信号 $f(t)$ 的最高截止频率为 f_c ,则采样频率必须满足 $f_s \geq 2f_c$ 时，才能保证采样信号不失真地表示原信号.





□ 二维采样定理：如果二维信号 $f(x,y)$ 的Fourier频谱 $F(u,v)$ 满足：

$$F(u,v) = \begin{cases} F(u,v) & |u| \leq U_c, |v| \leq V_c \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中， U_c, V_c 是相应于空间变量 x, y 的最高截止频率，
则当采样周期 $\Delta x, \Delta y$

$$\frac{1}{\Delta x} = U_s \geq 2U_c, \frac{1}{\Delta y} = V_s \geq 2V_c$$

时，采样信号 $f(m\Delta x, n\Delta y), m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 能唯一地恢复原信号 $f(x,y)$ ，且有



$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta x, n\Delta y) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta x} (x - m\Delta x)}{\frac{\pi}{\Delta x} (x - m\Delta x)} \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta y} (y - n\Delta y)}{\frac{\pi}{\Delta y} (y - n\Delta y)}$$

适当地调整 $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ 之间的值的搭配关系，就能从连续参数的Fourier变换公式出发，通过离散化步骤，得到离散傅立叶变换关系.一般取：

$$\frac{1}{\Delta x} = 2U_c, \frac{1}{\Delta y} = 2V_c, \Delta x \Delta u = \frac{1}{N}, \Delta y \Delta v = \frac{1}{N}$$

通俗地讲，违反如上原则，离散正变换和反变换无法成对出现.

不确定性原理

[编辑](#)

同义词 测不准原理一般指不确定性原理

本词条由“科普中国”百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

不确定性原理（Uncertainty principle）是由海森堡于1927年提出，这个理论是说，你不可能同时知道一个粒子的位置和它的速度，粒子位置的不确定性，必然大于或等于普朗克常数（Planck constant）除以 4π （ $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$ ），这表明微观世界的粒子行为与宏观物质很不一样。此外，不确定原理涉及很多深刻的哲学问题，用海森堡自己的话说：“在因果律的陈述中，即若确切地知道现在，就能预见未来”，所得出的并不是结论，而是前提。我们不能知道现在的所有细节，是一种原则性的事情。”

中文名	不确定性原理	提出者	维尔纳·海森堡（Werner Heisenberg）
外文名	Uncertainty principle	提出时间	1927年
别 称	测不准原理；不确定原理	应用学科	物理
表达式	$\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$	适用领域范围	量子力学

目录

1 定律定义

- 不确定性原理
- 简介

2 定律影响

3 发展简史

- 旧量子论
- 质疑
- 现代不等式
- 名称

4 理论背景

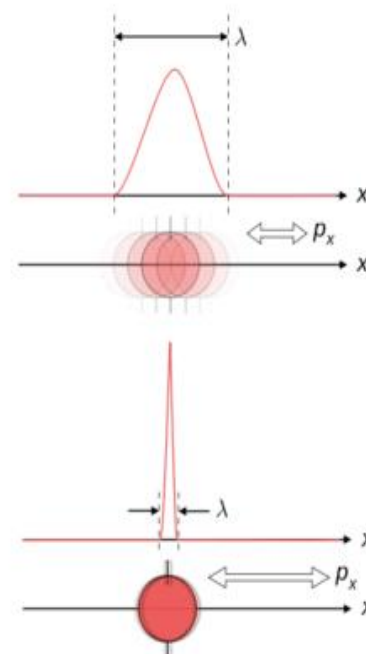
- 海森堡

- 与玻尔的辩论
- 玻尔理论

5 霍金观点

- 决定论
- 宿命论
- 量子假设

- 量子假设意义
- 影响
- 量子力学



不确定性原理图册



科普中国

致力于权威的科学传播

本词条认证专家为

尚轶伦 | 副教授

同济大学数学科学学院

审核



问题：哪些区域，像素值变化比较快（慢）？

◆傅立叶变换的统计特性

图像的能量主要集中在低频区，其高频区的幅值很小或趋于零，对于大多数无明显颗粒噪音的图像来说，低频区集中了85%以上的能量。

图像中如果存在有明显的颗粒噪音，或明显的细节亮度跳跃变化，则变换后，高频数据增加，分布增多。

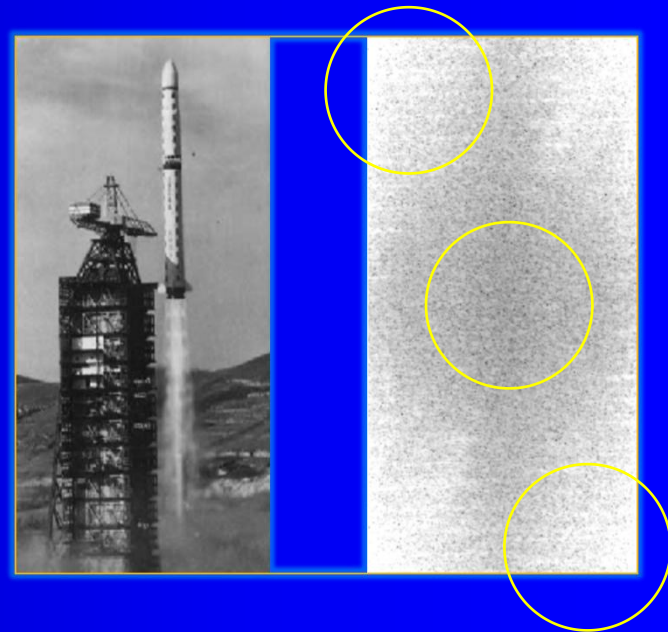
先验知识，后验知识.高频、低频。

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi \frac{ux + vy}{N})$$

$$u = 0, 1, \dots, N-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi \frac{ux + vy}{N})$$

$$x = 0, 1, \dots, N-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$





➤卷积定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 则

$$(1) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a)g(x-a)da$$

称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积

设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 是定义在 R^2 上的函数, 则

$$(2) \quad f * g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a, b)g(x-a, y-b)da db$$

称为 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的卷积



◆一维函数的卷积定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 的 *Fourier* 变换为 $F(u)$, $G(u)$,
则存在如下的 *Fourier* 变换对:

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u)$$

◆二维函数的卷积定理

设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 的 *Fourier* 变换为 $F(u, v)$, $G(u, v)$,
则存在如下的 *Fourier* 变换对:

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$



◆离散卷积定理

定义：设 $f(x, y), g(x, y)$ 是定义在 $[0, N-1] \times [0, N-1]$ 上的离散函数，则

$$f * g(x, y) = \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{b=0}^{N-1} f(a, b) g(x-a, y-b)$$

称为 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的卷积。

设 $f(x, y), g(x, y)$ 的 *Fourier* 变换为 $F(u, v), G(u, v)$,
则存在如下的 *Fourier* 变换对：

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) G(u, v)$$

$$f(x, y) g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$



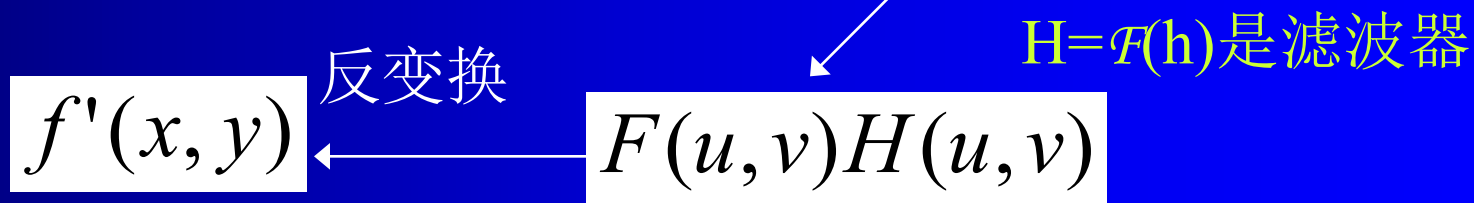
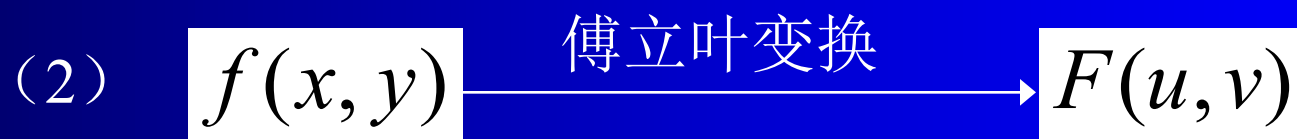
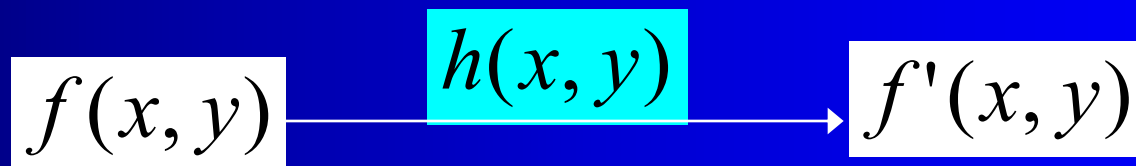
证明：不妨设 f, g 都是定义在 $\overline{0, N-1} \times \overline{0, N-1}$ 上的离散函数，

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(f(x, y) * g(x, y)) &= \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n) \right\} \exp(-j2\pi \frac{ux+vy}{2N}) \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp(-j2\pi \frac{um+vn}{2N}) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} g(x-m, y-n) \exp(-j2\pi \frac{u(x-m)+v(y-n)}{2N}) \\
 &= F(u, v) G(u, v)
 \end{aligned}$$

注意 $2N$, 以上只是一个形式推导



➤空间域与变换域



空域法和变换域法



问题模型:

空间域: $f'(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$

变换域: $F'(u, v) = H(u, v)F(u, v)$



➤ 图像变换的通用公式

✓ 标量表达式

设有离散函数 $f(x, y)$, 则可定义其傅立叶变换对:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2j\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}))$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$



✓矩阵表达式

$$\text{令 } P(u, x) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}ux}, Q(y, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}yv}, \text{ 则}$$

$$F(u, v) = \sum_{x, y} P(u, x) f(x, y) Q(y, v)$$

$$f(x, y) = \sum_{u, v} P^*(x, u) F(u, v) Q^*(v, y)$$



令 $F = [F(u, v)]_{N \times N}$, $f = [f(x, y)]_{N \times N}$

$P = [P(u, x)]_{N \times N}$, $Q = [Q(y, v)]_{N \times N}$

注意到矩阵乘法的定义, 可知:

$$F = PfQ, f = P^* F Q^*$$

P 是正交矩阵 (酉矩阵)

*是共轭转置运算

一般地, 若 P 是正交矩阵, 则称

$F = PfP^T$ 是图象的正交变换

1. 概述
2. 一维傅立叶变换
3. 一维快速傅立叶变换
4. 二维傅立叶变换
5. 余弦变换
6. 沃什变换和哈达玛变换
7. 低通滤波
8. 高通滤波

➤ 二维离散余弦变换

$$F(u, v) = \frac{2}{N} C(u) C(v) \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(j, k) \cos\left[\frac{\pi u(j + \frac{1}{2})}{N}\right] \cos\left[\frac{\pi v(k + \frac{1}{2})}{N}\right]$$

$$F(u, v) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} C(u) C(v) F(u, v) \cos\left[\frac{\pi u(j + \frac{1}{2})}{N}\right] \cos\left[\frac{\pi v(k + \frac{1}{2})}{N}\right]$$

其中

$$\begin{cases} C(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ C(w) = 1, w = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$



令

$$P = \left[\sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[\frac{\pi u \left(j + \frac{1}{2} \right)}{N} \right] \right]_{N \times N}$$

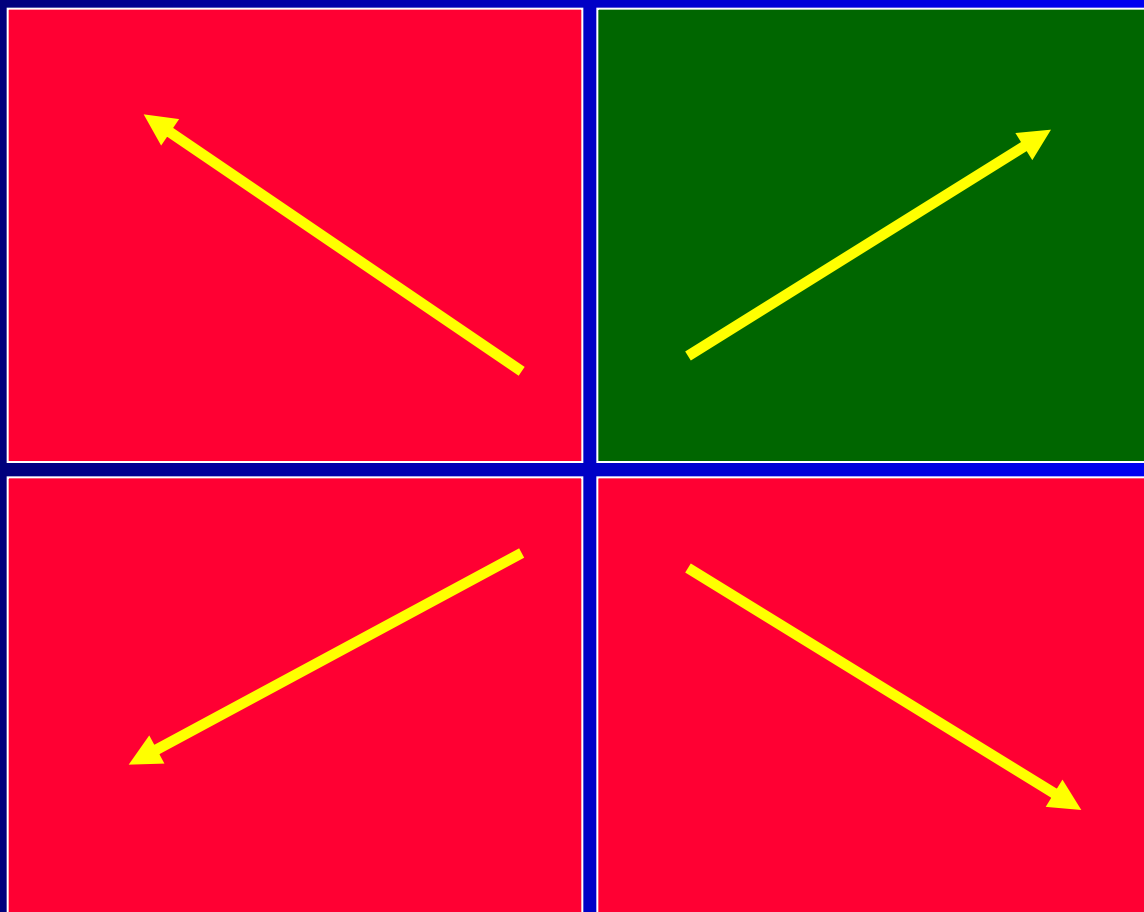
则

$$C = P f P^T$$

从理论推导可知，余弦变换是一种“特殊的”傅立叶变换

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-1-x, y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x, -1-y) & x \geq 0, y < 0 \\ f(-1-x, -1-y) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

是 $g(x, y)$ 的在 $[-N, N-1] \times [-N, N-1]$ “子空间”上的傅立叶变换

 $f(x,y)$

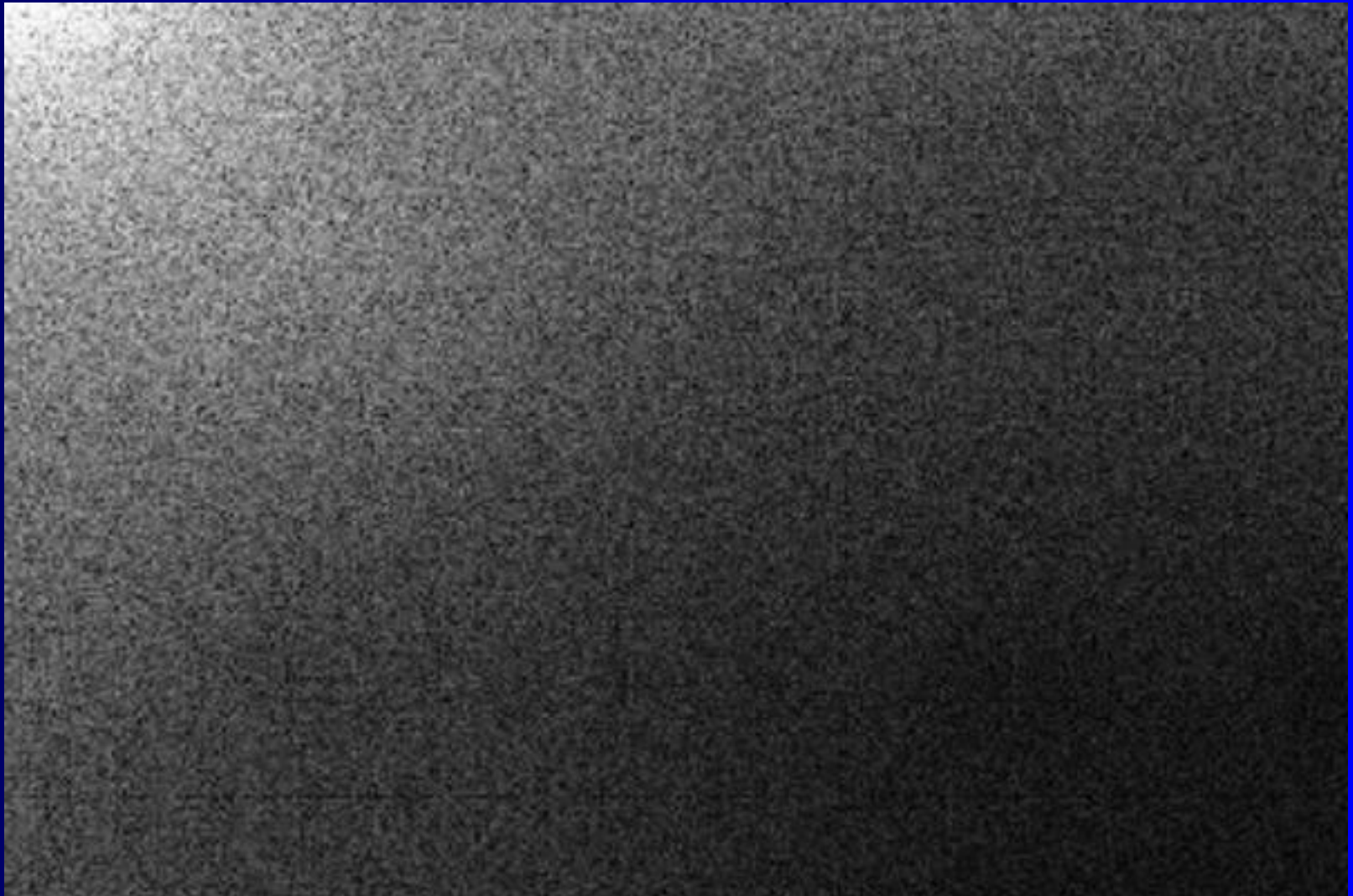
$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

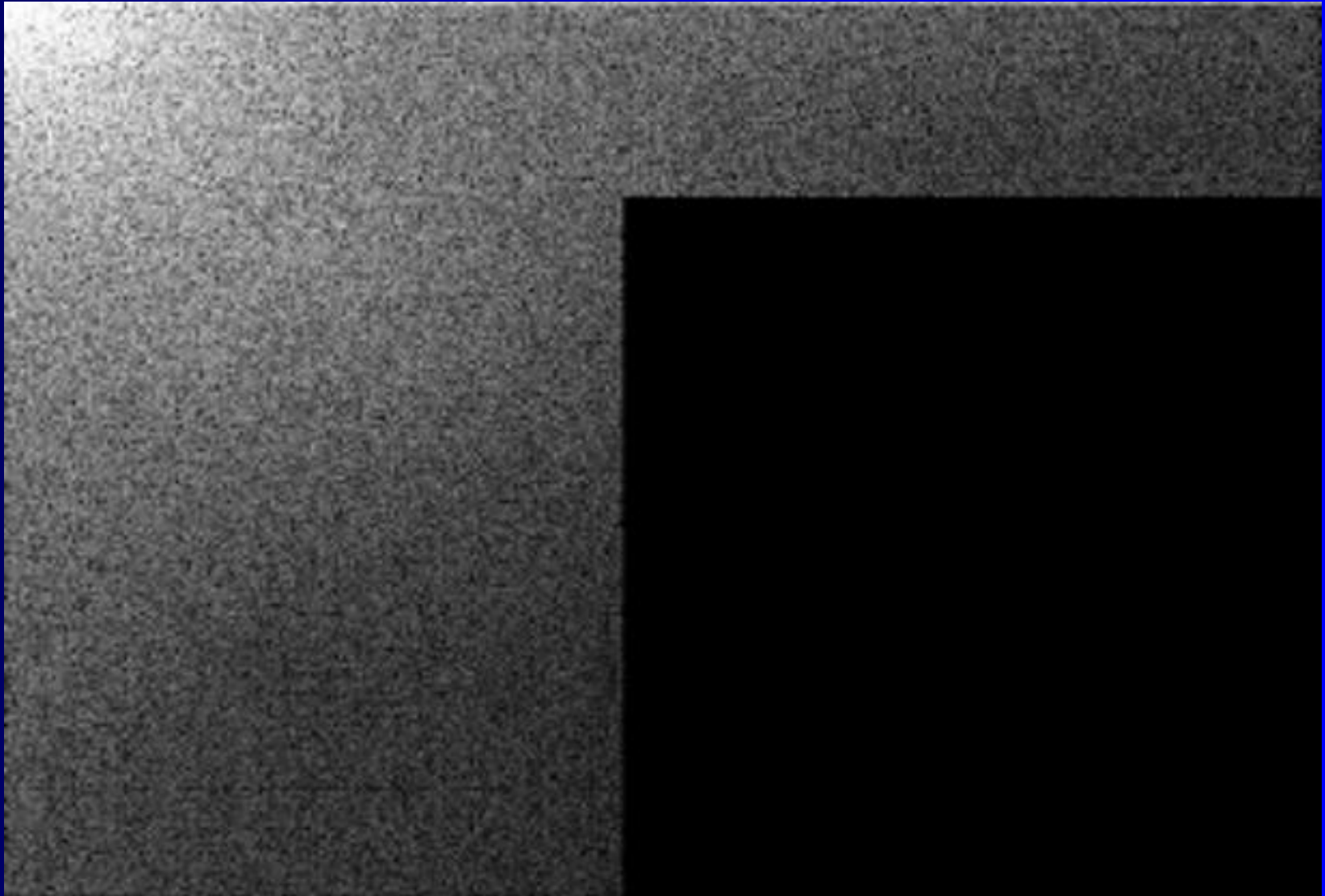
对称点

偶函数 $g(x,y)$

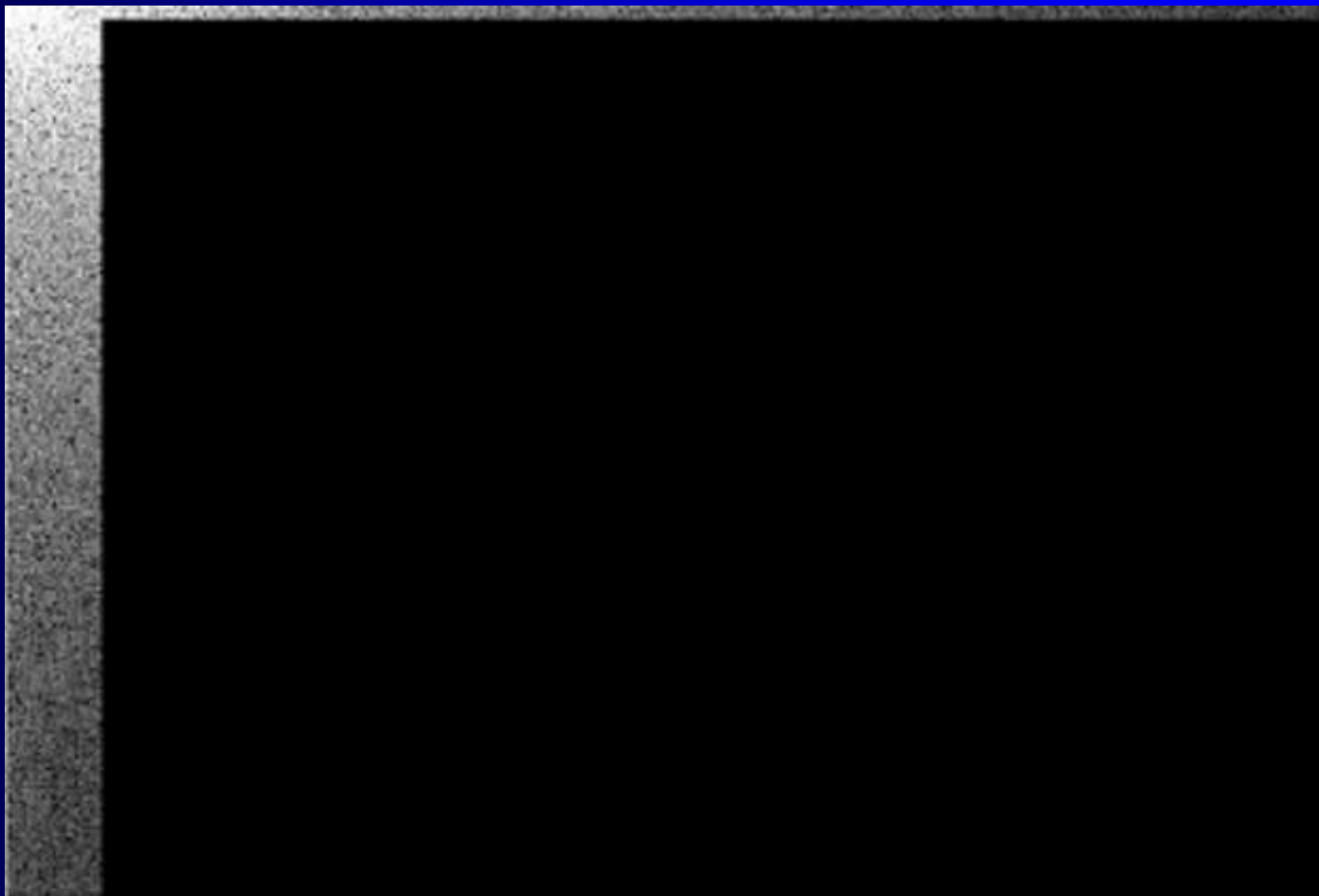
例9



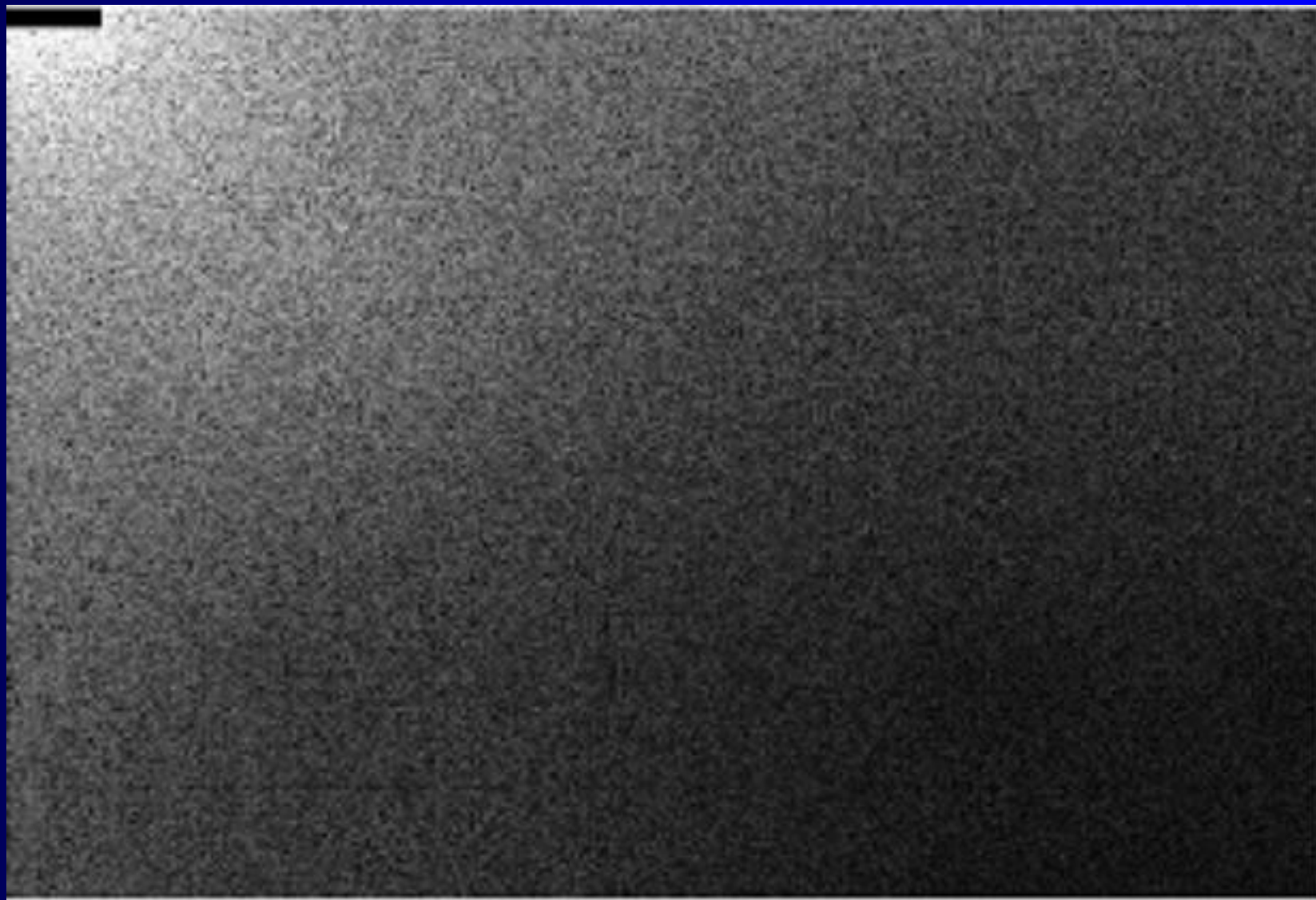










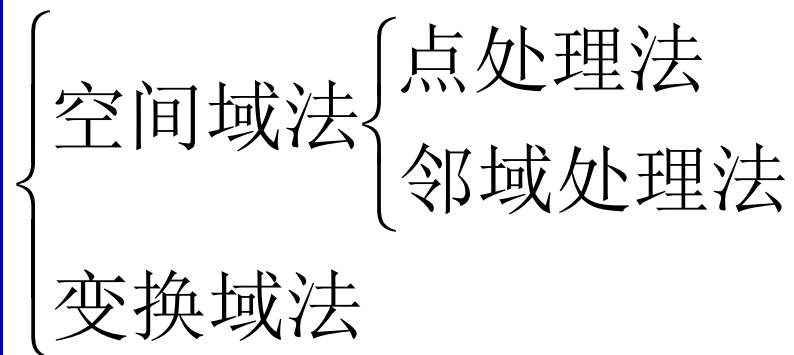






➤ 数字图像处理方法

1. 概述
2. 一维傅立叶变换
3. 一维快速傅立叶变换
4. 二维傅立叶变换
5. 余弦变换
6. 沃什变换和哈达玛变换
7. 低通滤波
8. 高通滤波





1.概述

2.一维傅立叶变换

3.一维快速傅立叶变换

4.二维傅立叶变换

5.余弦变换

6.沃什变换和哈达玛变换

7.低通滤波

8.高通滤波

➤可分离图像变换

设有离散函数 $f(x, y)$, 则可定义其图像变换对:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)g(x, y; u, v)$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1; v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v)h(x, y; u, v)$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1$$

其中, g, h 为变换核。若

$$g(x, y; u, v) = g_1(x, y)g_2(u, v), h(x, y; u, v) = h_1(x, y)h_2(u, v)$$

则称 T 是可分离的。

图象变换的要点之一: 选取恰当的变换核



变换

变换核

二维傅立叶变换

$$\exp(-2\pi j(xu/M + yv/N))$$

二维余弦变换

$$\cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

沃什变换

$$\frac{1}{N^2} (-1)^{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(x)b_{N-1-i}(u)} (-1)^{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(y)b_{N-1-i}(v)}$$

哈达玛变换

$$\frac{1}{N^2} (-1)^{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(x)b_i(u)} (-1)^{\sum_{i=0}^{N-1} b_i(y)b_i(v)}$$

$b_k(z)$ 为 z 的二进制表示的第 k 位



Hadamard变换的矩阵

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hadamard变换

$$T = \frac{1}{N^2} H_n f H_n', N = 2^n$$



1.概述

2.一维傅立叶变换

3.一维快速傅立叶
变换

4.二维傅立叶变换

5.余弦变换

6.沃什变换和哈
达玛变换

7.低通滤波

8.高通滤波

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \quad (4-1)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v) \quad (4-2)$$

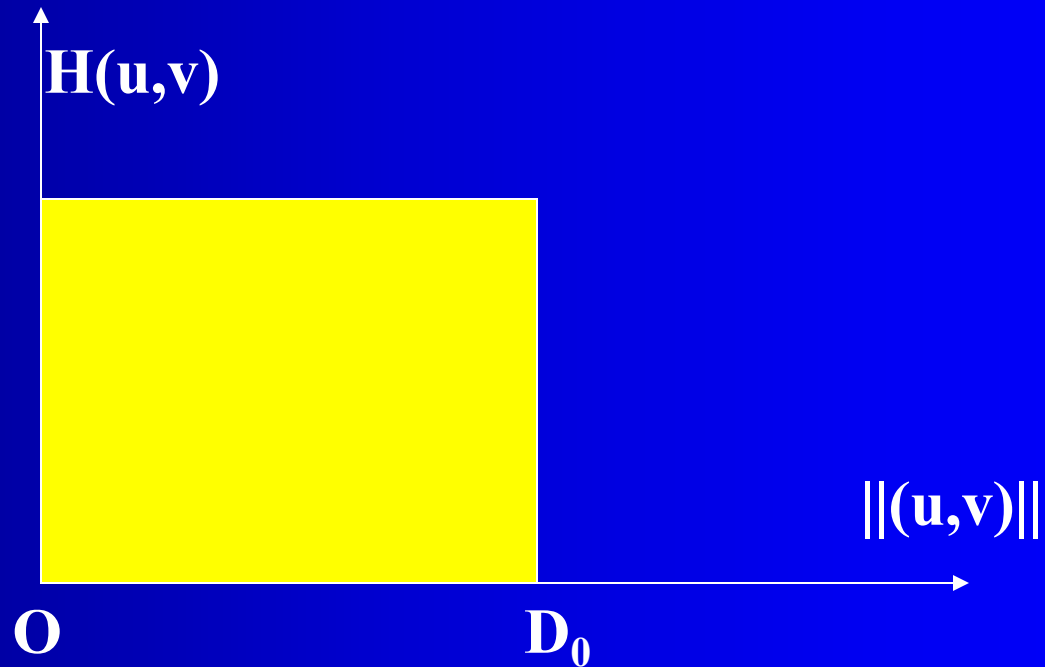
$$g(x,y)=\mathbf{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v)) \quad (4-3)$$

✓理想低通滤波器

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \| (u,v) - (u_0,v_0) \| \leq D_0 \\ 0 & \| (u,v) - (u_0,v_0) \| > D_0 \end{cases}$$

(u_0,v_0) 是低频中心， D_0 是滤波器的截止频率.

若设 $(u_0, v_0) = (0, 0)$, $\|(u, v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$, 则理想低通滤波器传递函数径向剖面图为



例10

```
a=imread('c:\1.jpg');  
b=a(:,:,1);  
f=fft2(b);  
ff=f;  
h=50;  
xy=imfinfo('c:\1.jpg');  
x=xy.Width/2;  
y=xy.Height/2;  
%(x,y)为图象的中心  
ff(x-h:x+h,y-h:y+h)=0;  
fff=ifft2(ff);  
imshow(abs(fff),[0,255]);
```





✓ Butterworth低通滤波器

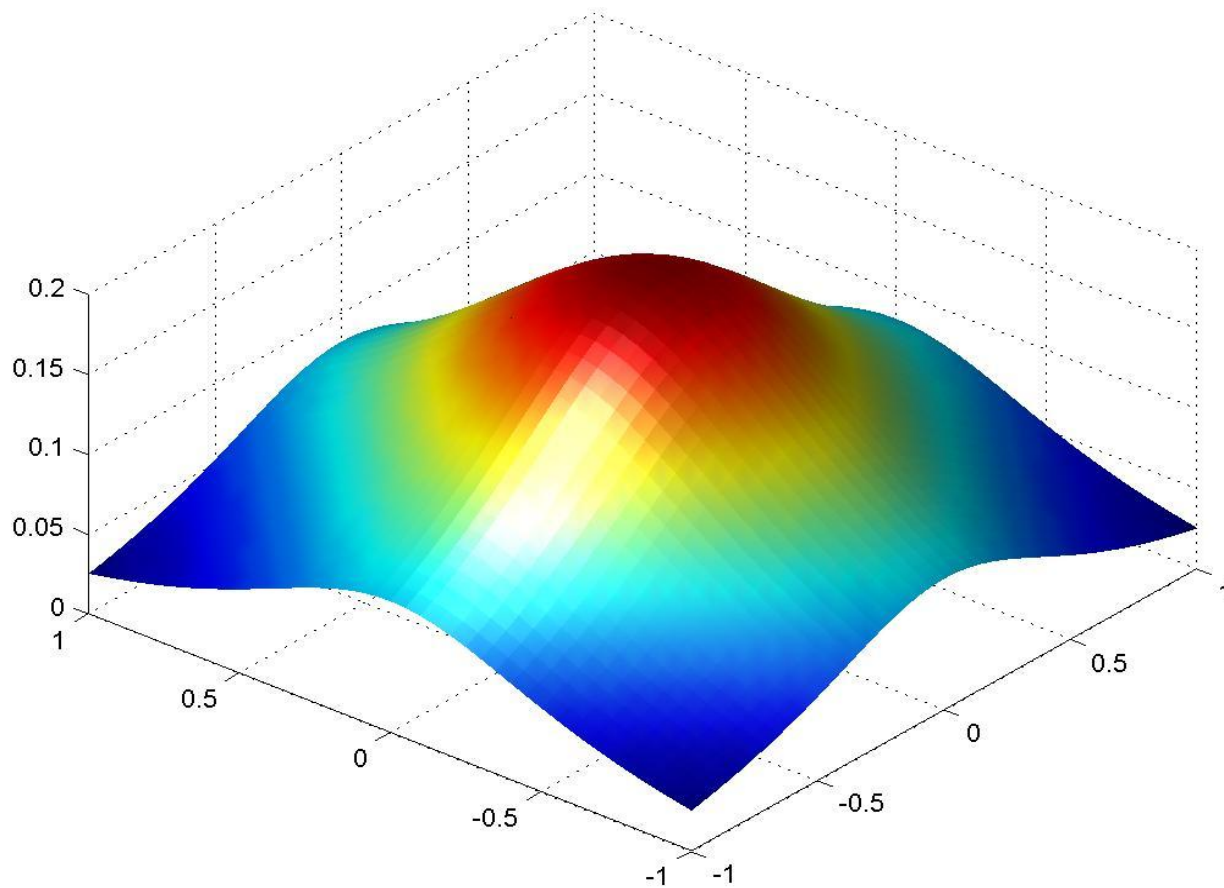
n阶Butterworth低通滤波器的传递函数由下式定义:

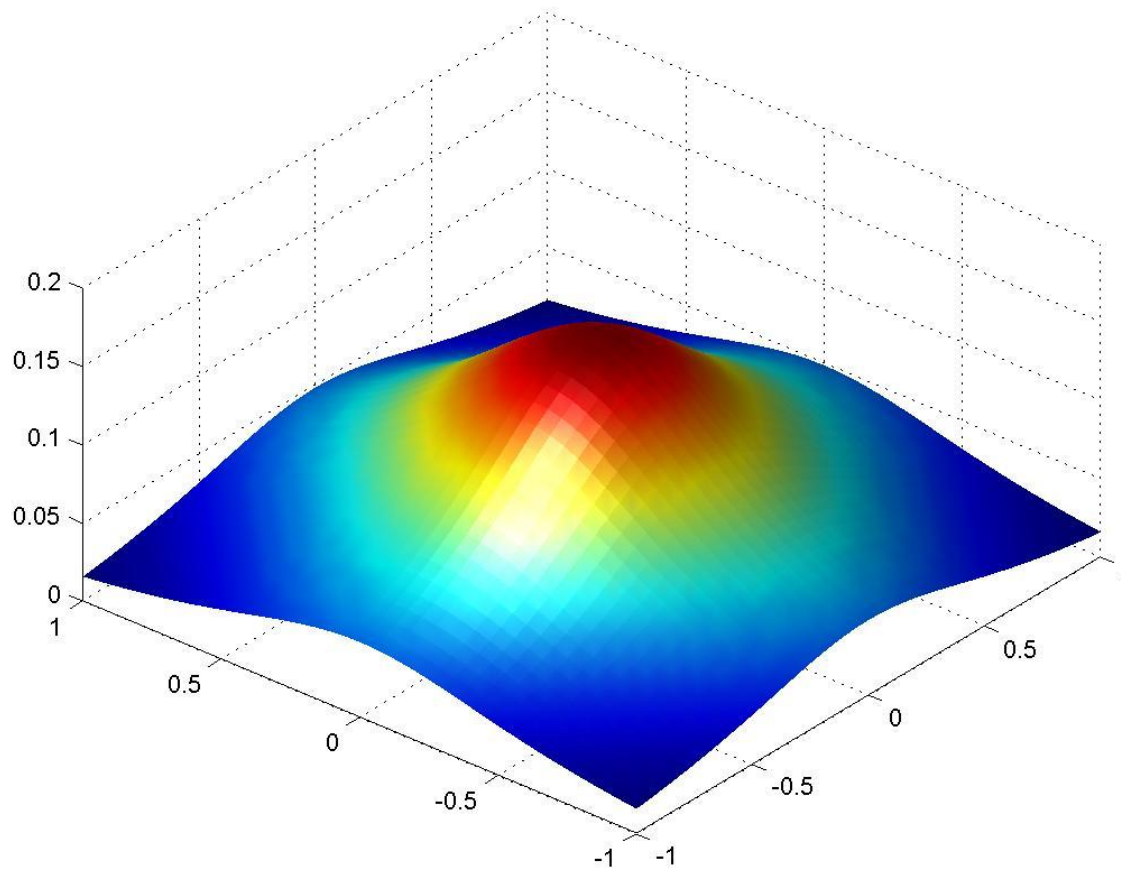
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

其中

$$D(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$$

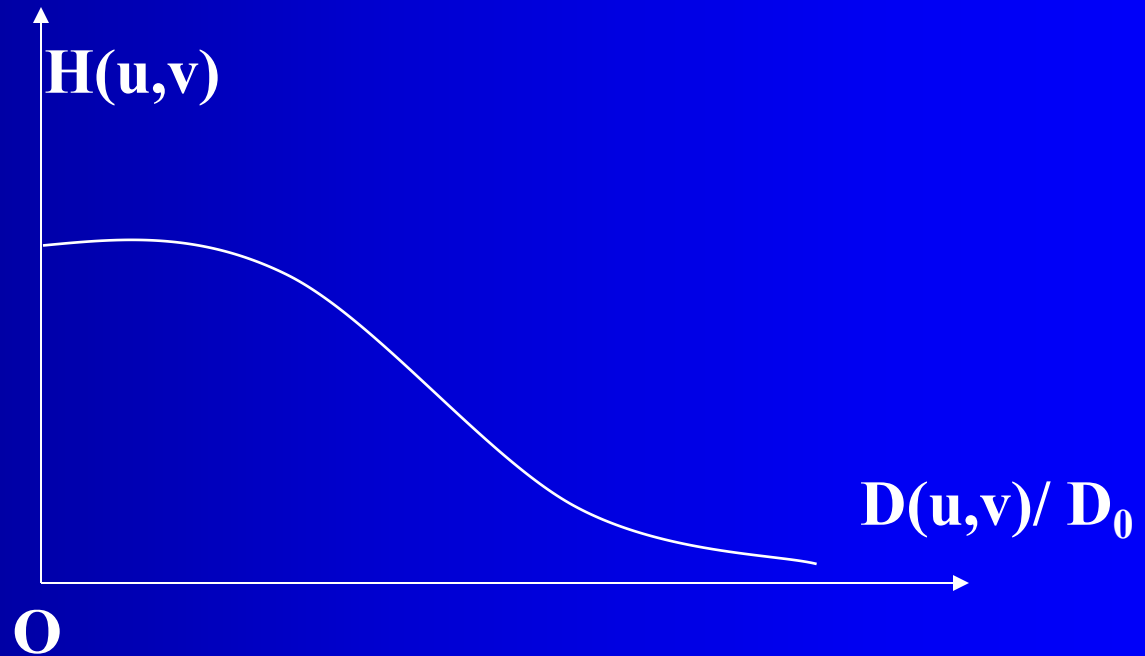
(u_0, v_0) 是低频中心, D_0 是滤波器的截止频率.

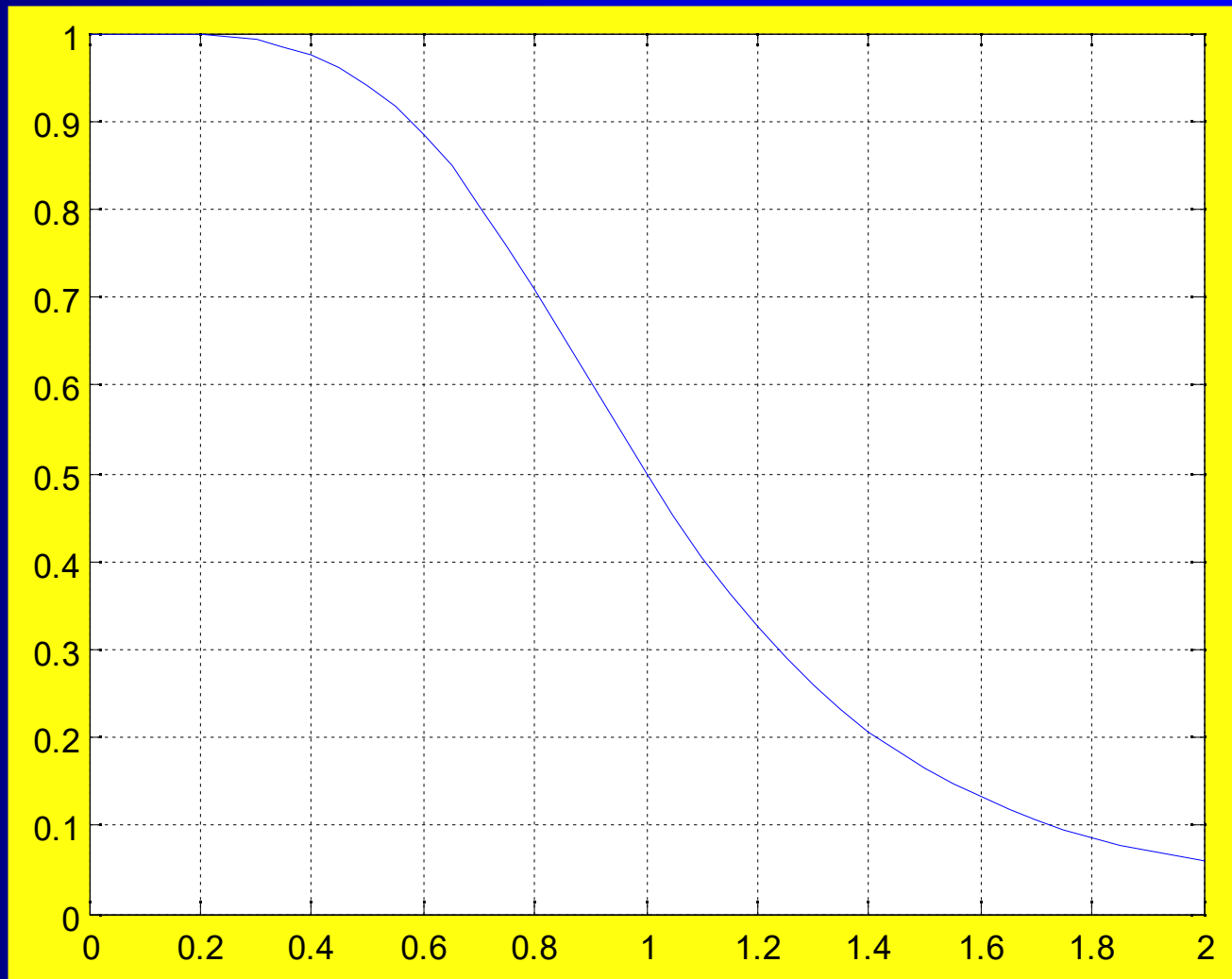
 $n=2$

 $n=3$



其传递函数径向剖面图为







理想低通滤波器在数学上定义得很清楚，在计算机模拟中也可以实现，但不能用实际的电子器件实现，是“非物理”的理想滤波器。**Butterworth**滤波器是物理上可以实现的。令

$$B = \sum_{D(u,v) \leq D_0} E(u,v) / \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} E(u,v)$$

B为低通能量百分比。

8高通滤波器

90/106



- 1.概述
- 2.一维傅立叶变换
- 3.一维快速傅立叶变换
- 4.二维傅立叶变换
- 5.余弦变换
- 6.沃什变换和哈达玛变换
- 7.低通滤波
- 8.高通滤波

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \quad (4-1b)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v) \quad (4-2b)$$

$$g(x,y)=\mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v)) \quad (4-3b)$$

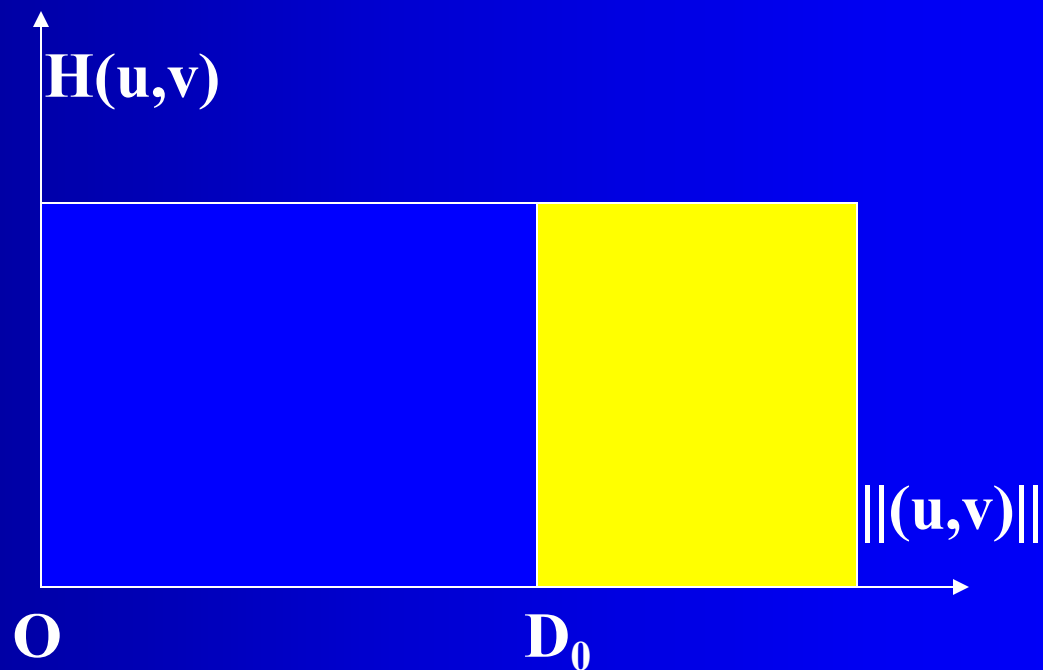
✓理想高通滤波器

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \| (u,v) - (u_0,v_0) \| \geq D_0 \\ 0 & \| (u,v) - (u_0,v_0) \| < D_0 \end{cases}$$

(u_0,v_0) 是低频中心， D_0 是滤波器的截止频率.

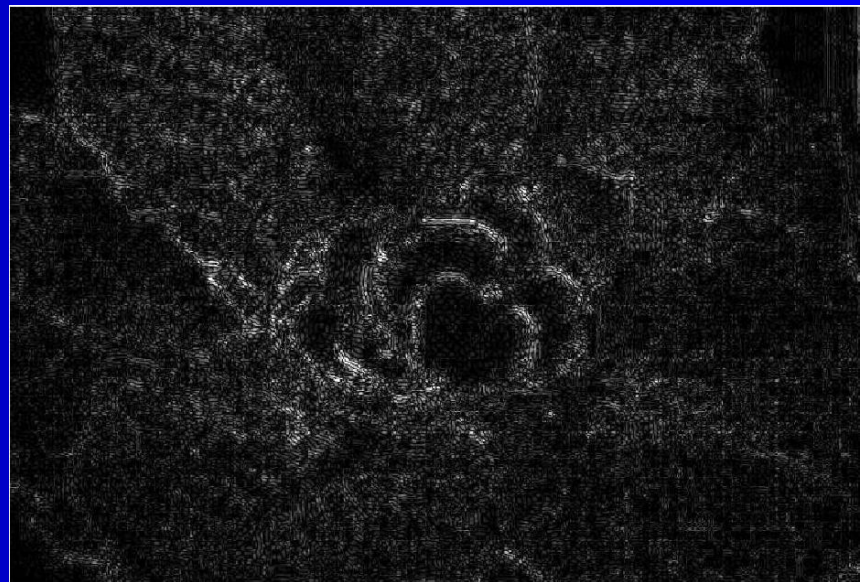
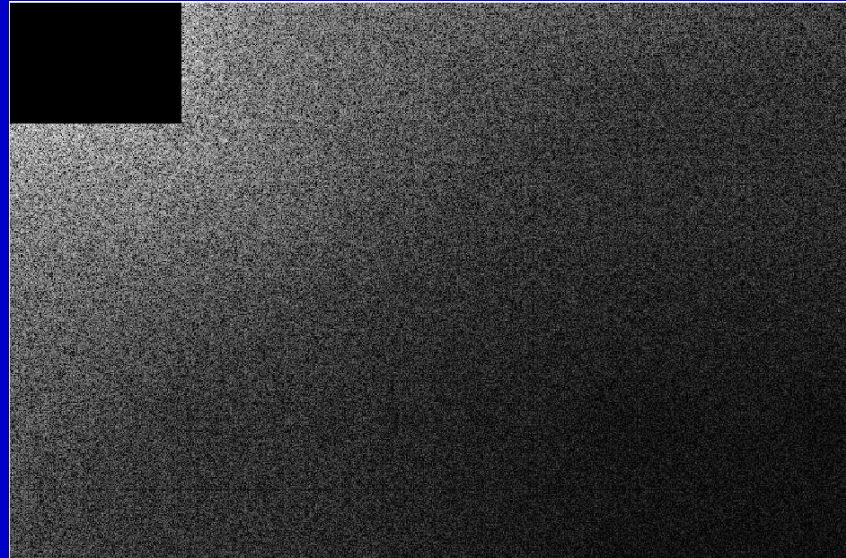


若设 $(u_0, v_0) = (0, 0)$, $\|(u, v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$, 则理想高通滤波器传递函数径向剖面图为



例11

```
a=imread('a.jpg');  
f=dct2(a);  
h=400;  
xy=imfinfo('a.jpg');  
x=xy.Width;  
y=xy.Height;  
f(1:y-h,1:x-h-200)=0;  
imshow(log(1+abs(f)),[0  
5],'notruesize');  
%fff=idct2(f);  
%imshow(5*abs(fff),[0  
256],'notruesize');
```





✓ Butterworth高通滤波器

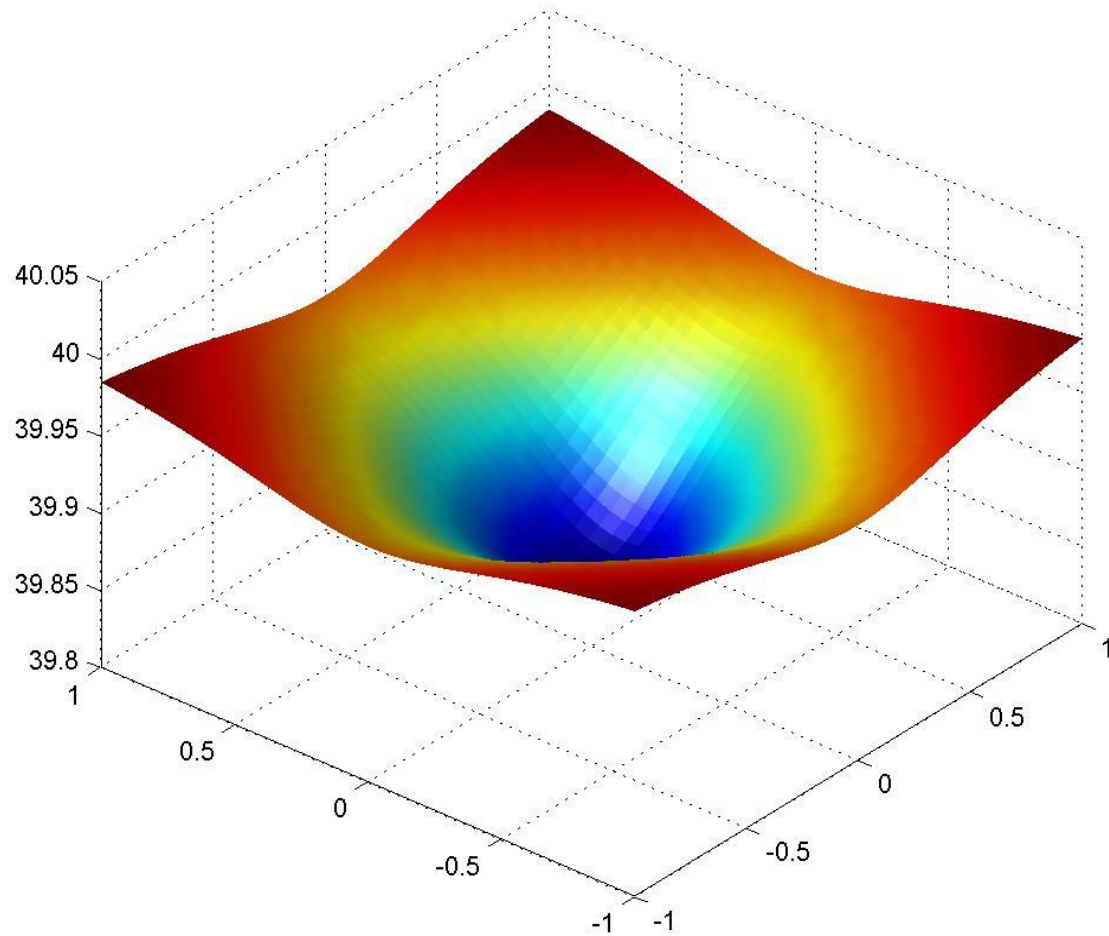
n阶Butterworth高通滤波器的传递函数由下式定义:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{-2n}}$$

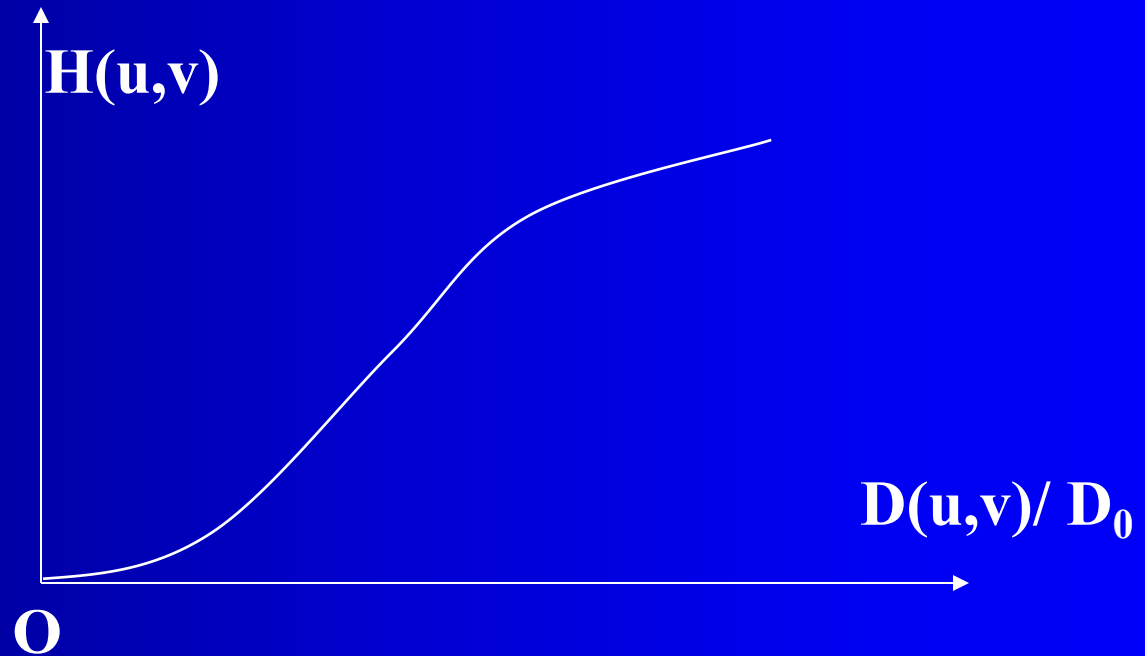
其中

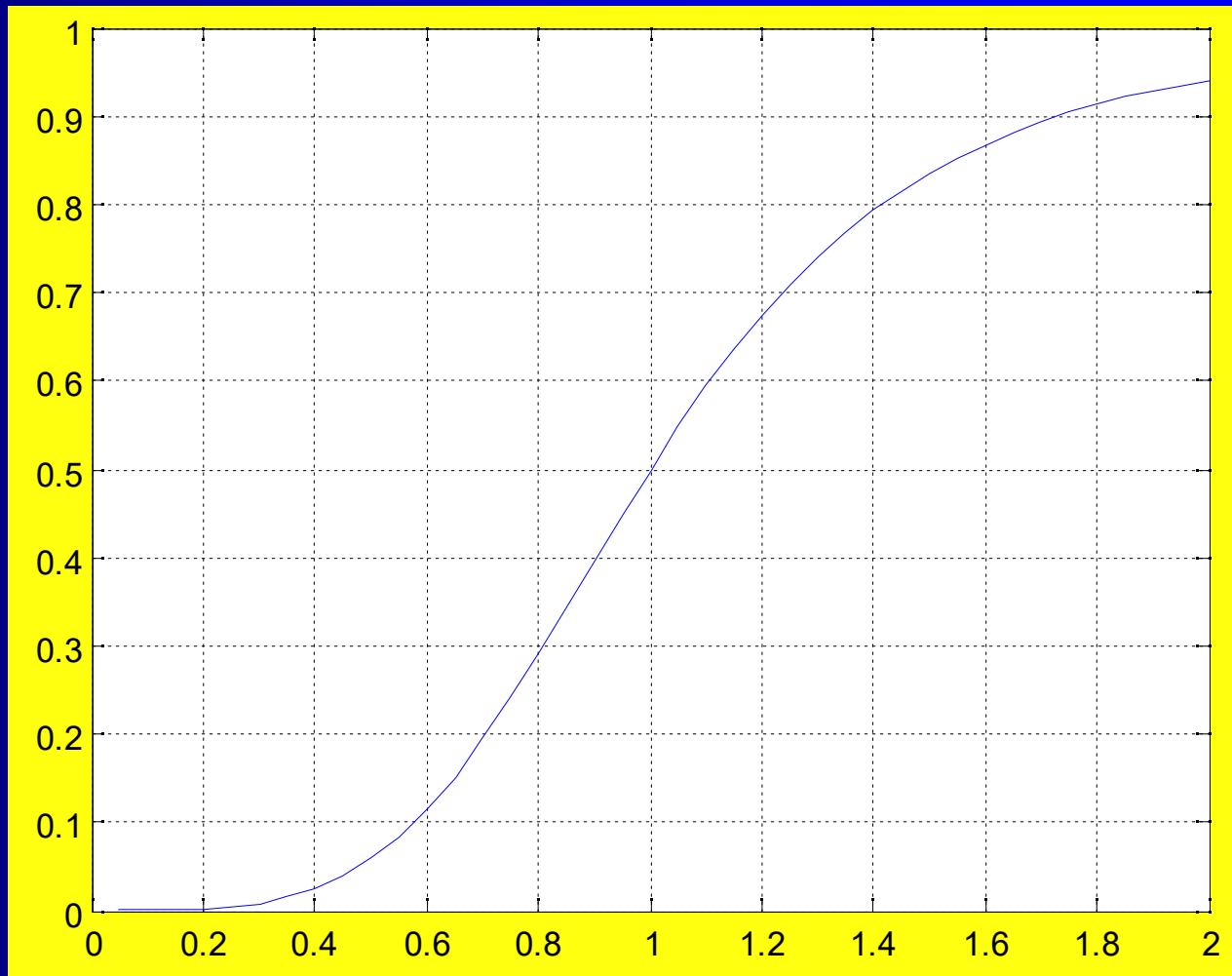
$$D(u, v) = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}$$

(u_0, v_0) 是低频中心, D_0 是滤波器的截止频率.

 $n=3$

其传递函数径向剖面图为





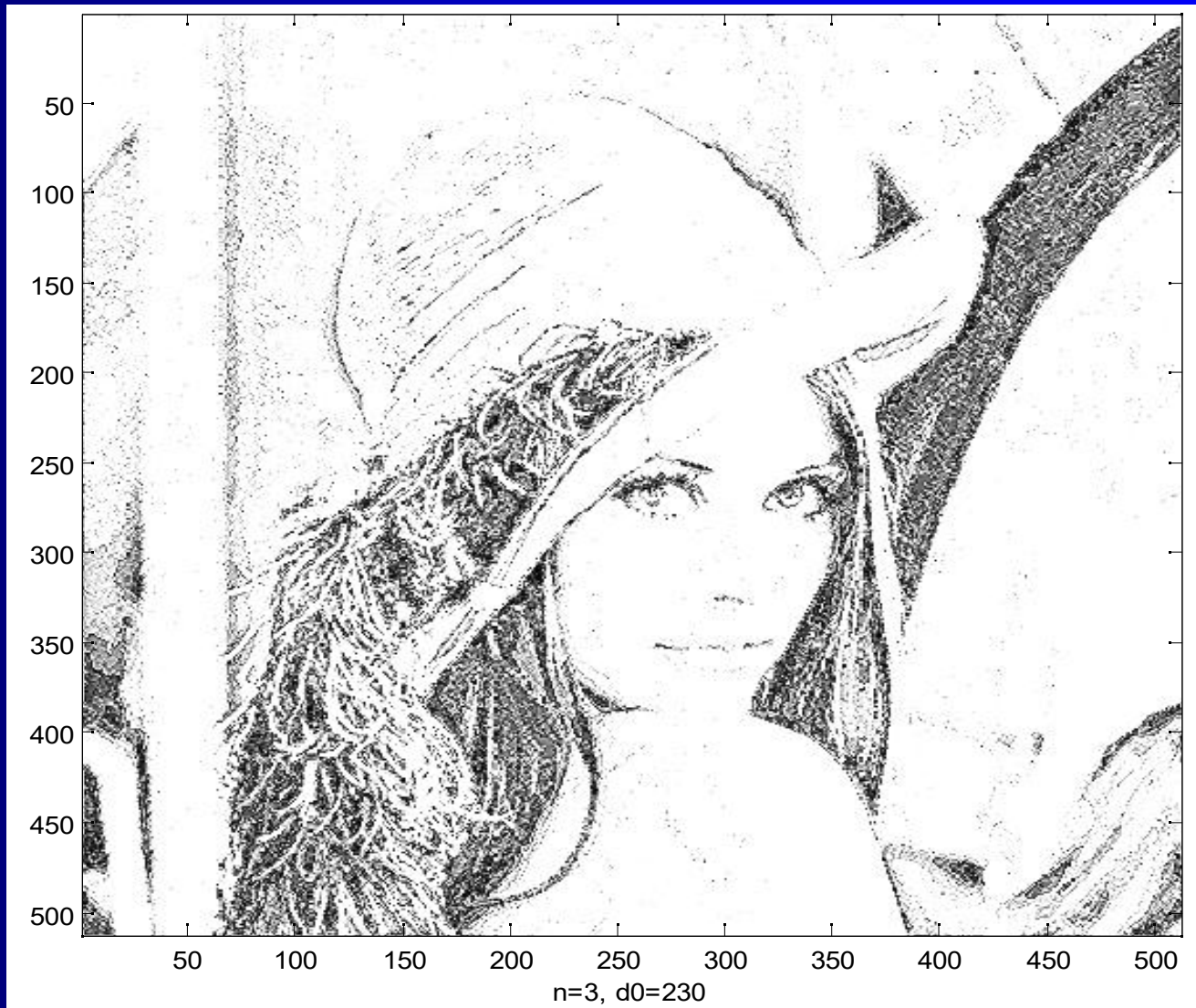


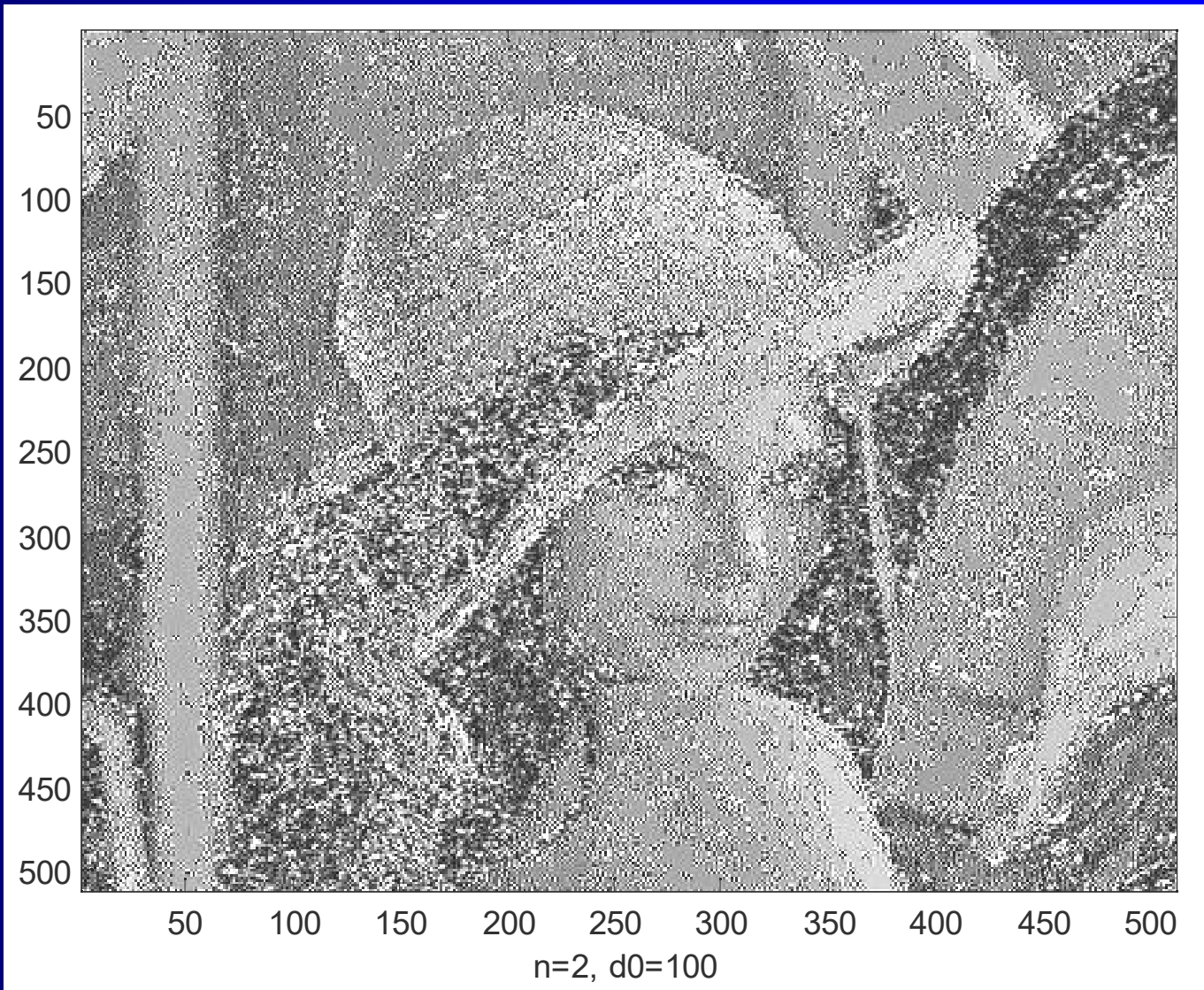
例13（仅供参考）

```
b=imread('t.gif');
%b=(a(:,:,1)+a(:,:,2)+a(:,:,3))/3;
colormap(gray);
imagesc(b);
c=size(b);
x=c(1);
y=c(2);
for i=1:x
    for j=1:y
        d(i,j)=double(b(i,j));
    end;
end;
e=fft2(d);
f=e;
```

```
n=-4;
d00=x/5;
d0=d00*d00;
for i=1:x
    for j=1:y
        f(i,j)=1/(1+(((i-x/2)^2+(j-y/2)^2)/d0)^n);
    end;
end;
g=f.*e;
h=ifft2(g);
imagesc(abs(h),[0,50]);
xlabel('n=-4, d0=100');
```

















低通和高通滤波器之间的关系

$$H_L(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

$$H_H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{-2n}}$$

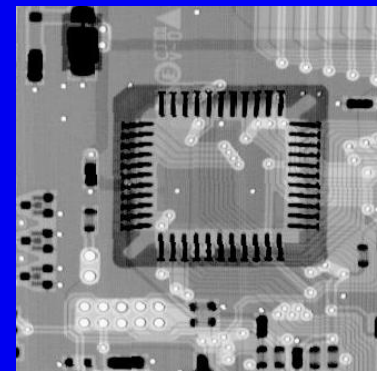
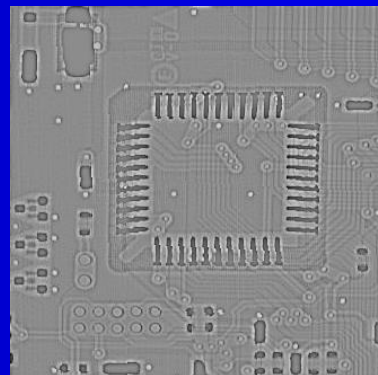
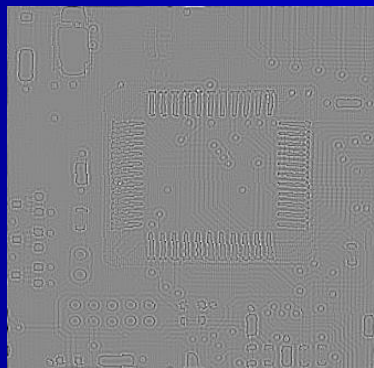
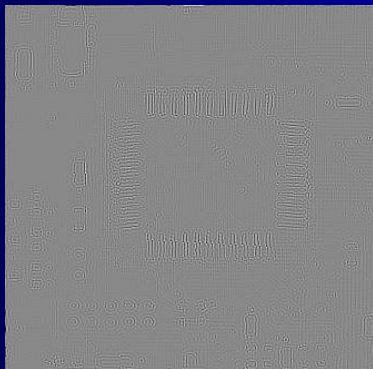
$$H_L(u, v) + H_H(u, v) = 1$$

提问



作业

4.41, 4.43, 4.57, 4.58, 4.64 (第四版)



<http://www.imageprocessingplace.com>

提交截止日期: 10月11日晚24点