例题3 离散时间傅里叶变换与采样

School of Computer Engineering and Science
Shanghai University

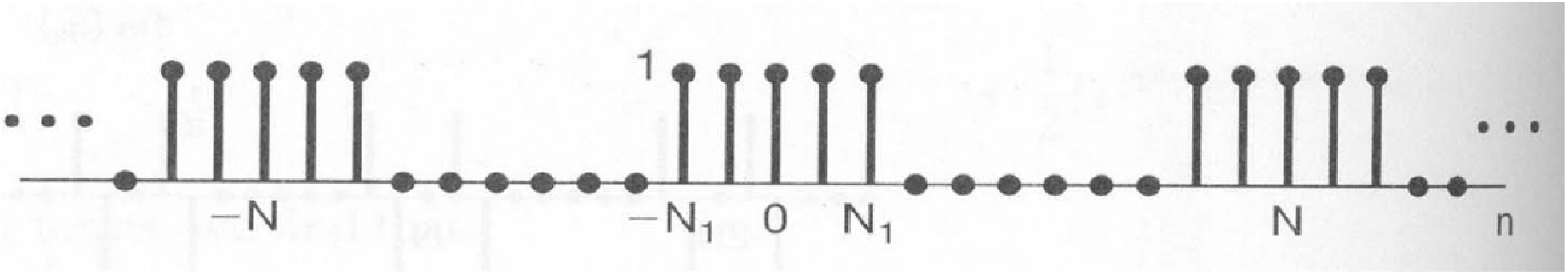
Instructor: Shengyu Duan

通过此次例题与习题，掌握以下知识：

- 离散时间周期信号傅里叶级数表示；
- 离散时间非周期信号傅里叶变换与逆变换；
- 傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系；
- 计算奈奎斯特率。

例1：离散时间周期信号傅里叶级数表示

对以下离散时间周期信号，计算傅里叶级数系数a_k



例1：离散时间周期信号傅里叶级数表示

解：

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{jk\omega_0 N_1} - e^{-jk\omega_0(N_1+1)}}{1 - e^{-jk\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{-jk\frac{\omega_0}{2}}}{e^{-jk\frac{\omega_0}{2}}}\frac{e^{jk\omega_0(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-jk\omega_0(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{\omega_0}{2}} - e^{-jk\frac{\omega_0}{2}}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin[k\omega_0(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{k\omega_0}{2})}, \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

例1：离散时间周期信号傅里叶级数表示

解：

$k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{2N_1 + 1}{N}$$

例2：离散时间非周期信号傅里叶变换

对以下离散时间非周期信号，计算傅里叶变换结果

$$y[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 2a^n u[n], & \mathrm{n}\neq 0\end{cases},\qquad |a|<1$$

例2：离散时间非周期信号傅里叶变换

对以下离散时间非周期信号，计算傅里叶变换结果

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 2a^n u[n], & \mathrm{n}\neq 0\end{cases}$$

解：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x\,[n]e^{-j\omega n}$$

$$=x[0]e^{-j\omega 0}+\sum_{n=1}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}=1+\sum_{n=1}^{\infty} 2a^n u[n]e^{-j\omega n}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

$$=1+2\frac{ae^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1+ae^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

傅里叶级数与傅里叶变换常用性质汇总

	连续时间傅里叶级数 $x(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$	连续时间傅里叶变换 $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)$	离散时间傅里叶级数 $x[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$	离散时间傅里叶变换 $x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$
线性	$\mathrm{A}x(t) + By(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} Aa_k + Bb_k$	$\mathrm{a}x(t) + by(t) \overset{F}{\leftrightarrow} aX(j\omega) + bY(j\omega)$	$\mathrm{A}x[n] + By[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} Aa_k + Bb_k$	$\mathrm{a}x[n] + by[n] \overset{F}{\leftrightarrow} aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
时移	$x(t-t_0) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$	$x(t-t_0) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$	$x[n-n_0] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$	$x[n-n_0] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega n_0}$
频移	$x(t)e^{jM\omega_0 t} \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{k-M}$	$x(t)e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\leftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))$	$x[n]e^{jM\omega_0 n} \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{k-M}$	$x[n]e^{j\omega_0 n} \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
时间反转	$x(-t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}$	$x(-t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(-j\omega)$	$x[-n] \overset{FS}{\leftrightarrow} a_{-k}$	$x[-n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(e^{-j\omega})$
尺度变换	$x(\alpha t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k$ （此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\mathrm{k}\omega_0\alpha$）	$x(at) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$x_{(m)}[n] \overset{FS}{\leftrightarrow} \frac{1}{m}a_k$ （m为大于0的整数，此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\frac{\omega_0}{m}\alpha$）	$x_{(k)}[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{jk\omega}\right)$ （k为大于0的整数）
卷积	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FS}{\leftrightarrow} Ta_k b_k$	$x(t) * h(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega)H(j\omega)$	$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \overset{FS}{\leftrightarrow} Na_k b_k$	$x[n] * h[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$
乘法	$\mathrm{x}(t)y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} a_k * b_k$	$s(t)p(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]$	$\mathrm{x}(t)y(t) \overset{FS}{\leftrightarrow} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$	$x_1[n]x_2[n] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
帕斯瓦尔关系	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert a_k\rvert^2$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$	$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} \lvert a_k\rvert^2$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$

傅里叶级数与傅里叶变换常用性质汇总

其它重要性质：

1. 信号奇偶分解：

   信号$x(t)$的偶信号部分：$x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$

   信号$x(t)$的奇信号部分：$x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

2. 奇偶共轭性质：

   信号时域表示为实且偶，则频域表示也为实且偶；

   信号时域表示为实且奇，则频域表示也为纯虚且奇。

3. 对偶性：

   连续时间傅里叶变换的对偶性：$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)=X'(\omega)$

   $$X'(t)\overset{F}{\leftrightarrow}2\pi x(-\omega)$$

傅里叶级数与傅里叶变换常用性质汇总

其它重要性质：

4. 连续时间傅里叶变换

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$（高通）

频域微分：$tx(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{j}\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$（低通）

5. 离散时间傅里叶变换

时域一阶差分*：$x[n] - x[n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)(1 - e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega$（高通）

频域微分：$nx[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$

时域累加*：$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} X\left(e^{j\omega}\right) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$（低通）

傅里叶级数与傅里叶变换常用变换关系

表 4.2 基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数（若为周期的）
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega-k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1=1$ $a_k=0$，其余 k
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$ $a_k=0$，其余 k
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1=-a_{-1}=\frac{1}{2j}$ $a_k=0$，其余 k
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0=1$，$a_k=0$，$k\neq 0$ （这是对任意 $T>0$ 选择的傅里叶级数表示）
周期方波 $x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & T_1<\lvert t\rvert\leqslant\frac{T}{2}\end{cases}$ 和 $x(t+T)=x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)=\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k=\frac{1}{T}$ 对全部 k
$x(t)\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t)$，$\mathcal{Re}\{a\}>a$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$te^{-at}u(t)$，$\mathcal{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$， $\mathcal{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

表 5.2 基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数（若为周期的）
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}1, & k=m,m\pm N,m\pm 2N,\cdots\\ 0, & 其余\ k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\cos\omega_0 n$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=\pm m,\pm m\pm N,\pm m\pm 2N,\cdots\\ 0, & 其余\ k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\sin\omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi r}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2j}, & k=r,r\pm N,r\pm 2N,\cdots\\ -\frac{1}{2j}, & k=-r,-r\pm N,-r\pm 2N\cdots\\ 0, & 其余\ k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$x[n]=1$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$	$a_k=\begin{cases}1, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0, & 其余\ k\end{cases}$
周期方波 $x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\ 0, & N_1<\lvert n\rvert\leqslant N/2\end{cases}$ 和 $x[n+N]=x[n]$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1+\frac{1}{2})]}{N\sin[2\pi k/2N]}$，$k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots$ $a_k=\frac{2N_1+1}{N}$，$k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{1}{N}$ 对全部 k
$a^n u[n]$，$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$	—
$x[n]\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\ 0, & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant W\\ 0, & W<\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$ $X(\omega)$ 周期的、周期为 2π	—
$\delta[n]$	1	—

续表 5.2

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数（若为周期的）
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$	—
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n]$，$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n]<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	—

例3：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系($|a|<1$)：

$$\begin{cases} 1, & n=0 \\ 2a^n u[n], & \mathrm{n}\neq 0 \end{cases} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1+ae^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

利用性质求$x[n]=a^{|n|}$的傅里叶变换。

例3：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系($|a|<1$)：

$$\begin{cases} 1, & n=0 \\ 2a^n u[n], & \mathrm{n}\neq 0 \end{cases} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1+ae^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

利用性质求$x[n]=a^{|n|}$的傅里叶变换。

解：

$x[n]=a^{|n|}$ 是组成 $\begin{cases} 1, & n=0 \\ 2a^n u[n], & \mathrm{n}\neq 0 \end{cases}$ 的偶信号部分。

由奇偶共轭性质， $x[n]=a^{|n|}$ 的频域表示为实且偶，因此：

$$x[n]=a^{|n|} \overset{F}{\leftrightarrow} \mathbb{R}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2acos\omega}$$

例4：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系：

$$e^{-|t|} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}$$

利用性质求$x(t) = te^{-|t|}$的傅里叶变换。

例4：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系：

$$e^{-|t|} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}$$

利用性质求$x(t) = te^{-|t|}$的傅里叶变换。

解：

由频域微分性质： $\mathrm{t}x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{j}\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$$x(t) = te^{-|t|} \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{j}\frac{d\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)}{d\omega} = j2\omega\left[-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right] = \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

例5：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系：

$$te^{-|t|} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

利用性质求$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$的傅里叶变换。

例5：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

已知傅里叶变换关系：

$$te^{-|t|} \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{-4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$$

利用性质求$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$的傅里叶变换。

解：

由连续时间傅里叶变换的对偶性：$x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega) = X'(\omega)$

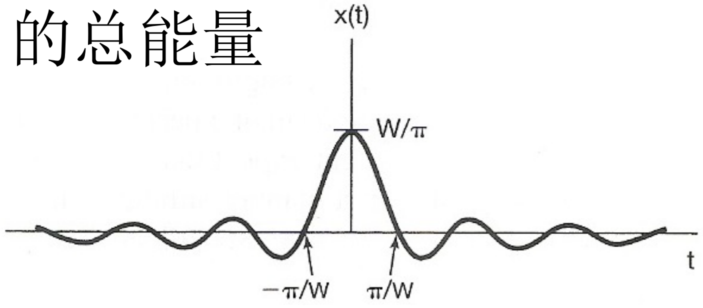
$$X'(t) \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega)$$

$$\frac{-4jt}{(1+t^2)^2} \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi(-\omega e^{-|\omega|})$$

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2} \overset{F}{\leftrightarrow} j2\pi(-\omega e^{-|\omega|})$$

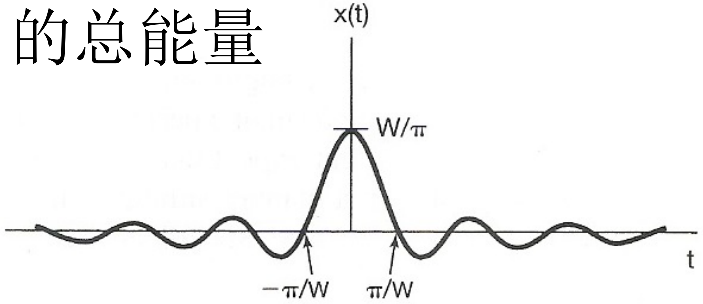
例6：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

求$x(t)=\dfrac{sinWt}{\pi t}$的总能量



例6：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

求$x(t)=\dfrac{sinWt}{\pi t}$的总能量



解：$x(t)$的总能量为：

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{sinWt}{\pi t}\right|^2 dt$$

由帕斯瓦尔关系：

$$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$$

例6：傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系

解：$x(t)$的总能量为：

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{sinWt}{\pi t}|^2 dt$$

由帕斯瓦尔关系：

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

由傅里叶变换关系：

$$x(t) = \frac{sinWt}{\pi t} \overset{F}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

因此：$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1^2 d\omega = \frac{W}{\pi}$

例7：计算奈奎斯特率

求$x(t)=\left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$的奈奎斯特率。

例7：计算奈奎斯特率

求对$x(t)=(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t})^2$进行采样的奈奎斯特率。

解：

由傅里叶变换关系：

$$y(t)=\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\overset{F}{\leftrightarrow}Y(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<4000\pi\\ 0, & |\omega|>4000\pi\end{cases}$$

由乘法性质：

$$x(t)=(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t})^2\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}[Y(j\omega)*Y(j\omega)]=\begin{cases}\frac{\omega+8000\pi}{2\pi}, & -8000\pi<\omega\leq 0\\ \frac{-\omega+8000\pi}{2\pi}, & 0<\omega<8000\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此，信号最大频率为8000π，奈奎斯特率为16000π