《离散数学》（二）讨论课题目

研讨 1

第 6 章图 6.1 图的基本概念

1. 证明：在任何一个有 6 人的组里，存在 3 个人相互认识或者存在 3 个人相互不认识。
2. 证明：简单无向图 G 有 n 个顶点，如果顶点数大于等于 2，则至少有 2 个顶点的度数相同。
3. 画出一个 5 阶简单图 G 与它的补图 G' 同构。（画出所有可能的图 G）

研讨 2

6.2 图的连通性 6.3 图的矩阵表示 6.3.1 无向图的关联矩阵 6.3.2 有向无环图的关联矩阵

1. 若简单图 G 有 n 个顶点，而边数大于$(n-1)(n-2)/2$，那么 G 是连通图。
2. 若 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对结点度数之和均大于等于 $n-1$，那么 G 是连通图。
3. 有 13 个杯子，杯口均朝上放在桌子上。要求每次只能翻动 12 只杯子，能否把 13 只杯子全部翻成底朝上。

研讨 3

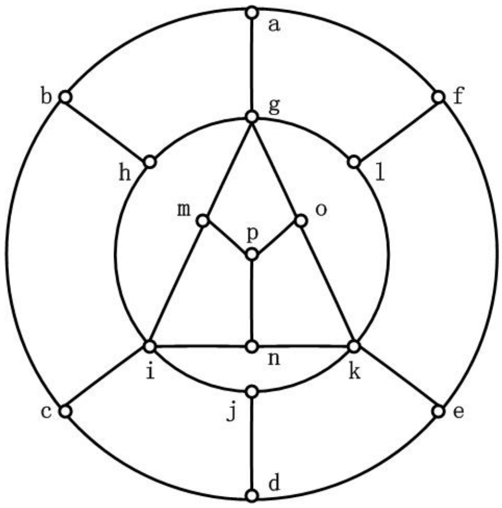
6.3 图的矩阵表示 6.3.3 有向图的邻接矩阵 6.3.4 有向图的可达矩阵 6.4 几种特殊图 6.4.1 二部图 6.4.2 欧拉图

1. 说一说：有向图的邻接矩阵与关系矩阵之间的联系，并阐明可达矩阵是否可以用计算传递闭包的 Warshall 算法计算。
2. 在 8×8 黑白相间的棋盘上跳动一只马，要使这只马完成每一种可能跳动恰好一次，并跳遍所有的棋格，问这样的跳动是否可能。
3. 已知图 G 至少要 k 笔才能画成，若去掉一条边后得图 G'，问 G' 至少要几笔才能画成？试举例加以说明。

研讨 4

6.4 几种特殊图 6.4.3 哈密顿图 6.4.4 平面图

1. 证明所示图不是汉密尔顿图。



2. 证明: 足球是由几个五边形和六边形组成的。（提示：先用多面体的缺角和为 720°求出顶点数。）
3. 证明: 6 个结点 12 条边的连通简单平面图中，每个面均有 3 条边组成。

研讨 5

第 7 章 7.1 无向树

1. 画出具有 7 个结点的所有非同构的树。

2. 对任意一个图 G=<V，E>，设|V|=n，|E|=m，$p(G)$=p，试证明 G 中至少包含 $m - n+p$ 条不同的回路。
3. 若连通图 G 的顶点数大于 2，则 G 中至少有 2 个顶点，将它们去掉后 G 仍然是连通。

研讨 6

第 14 章代数系统 14.1 二元运算及其性质

1. 集合 $A = \{ n \mid n$ 是与 5 互质的自然数$\}$，则加法和乘法哪个是 A 上的二元运算，为什么？
2. 在实数集 R 上定义二元运算∗为：$a,b\in R$, $a * b = a \mid b \mid$, 问该二元运算是否满足交换率、结合律和幂等律。
3. 求出上述二元运算∗的左单位元、右单位元、左零元和右零元，若单位元存在则求出逆元。

研讨 7

第 14 章代数系统 14.2 代数系统

1. 设 f 和 g 是两个<S, ∘>到<V, ∗>的同态，其中二元运算∗满足交换律和结合律，证明：

$$h(x) = f(x) * g(x),$$

也是< S,∘>到<V, ∗>的同态。

2. 请写出代数系统<N, ×>的所有子代数系统。那么代数系统<N, +, ×>的子代数系统有哪些。
3. 设 V_1 和 V_2 都是一个代数系统 V 的子代数系统，那么 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 \cup V_2$ 也是 V 的子代数系统吗？若是证明之，若不是请举一例。

研讨 8

第 14 章代数系统 14.3 几个典型的代数系统 14.3.1 半群与独异点 14.3.2 群（只讲到群的概念）

1. <$P(\{a, b\})$, ∪>为哪种代数系统？
2. 设 V = <S, ∘>是一个半群，则对任意的 $a \in S$, 令

$$<a> = \{x \mid x = a^n, n > 0\},$$

证明：<a>是一个子半群。若 V 是一个独异点，怎样类似地定义一个子独异点。

3.设 V = <S, ∘>是一个半群，若二元运算∘满足交换律，则对任意的幂等元 a, 映射

$$f_a(x) = a \circ x,$$

是一个 V 上的自同态。

研讨 9

第 14 章代数系统 14.3.2 群（剩余部分）

1. 设<G, ∘>是群，f 和 g 是两个 G 上的自同态，令

$$H = \{x \mid f(x)=g(x), x \in G\},$$

证明：H 是 G 的子群。

2. 设<G, ∘>是交换群，n 是任意给定的整数，令

$$G_n = \{x \mid x=a^n, \forall a \in G\},$$

证明：G_n 是 G 的子群。

3. 写出群<Z_{42}, ⊕>的所有生成元和子群，并画出子群格。

研讨 10

1、证明：当每个结点的度数大于等于 3 时，不存在有 7 条边的简单连通平面图。

2、设<H, ∗>和<K, ∗>都是交换群<G, ∗>的子群，令

$$HK = \{h * k \mid h \in H \wedge k \in K\},$$

证明：<HK, ∗>是<G, ∗>的子群。

3、设σ,τ是五元置换

$$\sigma=(1\ 5)(2\ 3\ 4),\tau=(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$$

求$\sigma\tau,\tau\sigma$和$\tau^{-1}\sigma$。