代数与矩阵基础

主 讲 人: 马 丽 艳
办 公 室: 计 1013
Email: liyanma@t.shu.edu.cn
计算机工程与科学学院

作 业

矩阵论及其工程应用，p.26

① 1.1

② 1.3

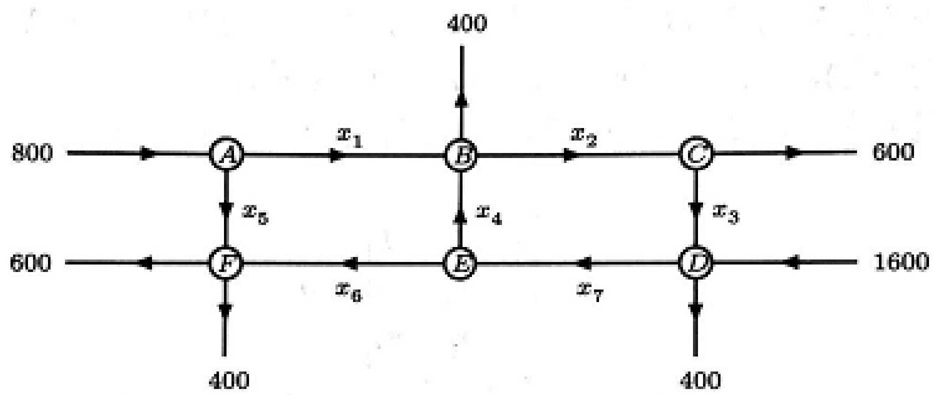
③ 1.7

④ 1.9

⑤ 1.10

⑥ 1.11

1.1 题图 1.1 画出了某城市 6 个交通枢纽的交通网络图[60]。其中，节点表示交通枢纽的编号，数字表示在交通高峰期每小时驶入和驶出某个交通枢纽的车辆数。



题图 1.1　交通网络图

写出表示交通网络图各个交通枢纽的交通流量的线性方程组，并求解该线性方程组。

1.3 [65] 矩阵的秩在工程控制系统的设计中起着重要的作用。一个离散时间的控制系统的状态空间模型包括了差分方程

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k, \quad k = 0, 1, \cdots$$

式中，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，并且 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为描述系统在 k 时刻状态的向量，简称状态向量；而 $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^m$ 为系统在 k 时刻的输入或控制向量。矩阵对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 称为可控的，若

$$\operatorname{rank}\left([\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\right) = n$$

若 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 是可控的，则最多用 n 步即可将系统控制到任意一个指定的状态 $\boldsymbol{x}$。试确定以下矩阵对是否可控：

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

1.7 直线方程可以表示为 $ax+by=-1$。证明一条通过点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

1.9 当 α 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (\alpha+3)x_1+x_2+2x_3=\alpha \\ 3(\alpha+1)x_1+\alpha x_2+(\alpha+3)x_3=3 \\ \alpha x_1+(\alpha-1)x_2+x_3=\alpha \end{cases}$$

有唯一解、无解和无穷多解。当线性方程组有无穷多解时，求出它的通解。

1.10 验证向量组

$$A=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

是一组正交向量。

1.11 证明 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})=1+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$。

谢　谢！