数值微分

目录

- 数值微分的重要性
- 导数的近似值
- 数值差分公式
- 运用插值函数求数值微分
    - 牛顿多项式微分
    - 拉格朗日多项式微分

在实际问题中，往往会遇到某函数$f(x)$是用表格表示的,用通常的导数定义无法求导,因此要寻求其他方法近似求导。常用的数值微分方法有:

- 运用差商求数值微分
- 运用插值函数求数值微分

数值微分的重要性

- 数值微分的主要内容为数值求导数
- 数值微分的重要性

科学和工程问题绝大多数为微分方程

常微分方程和偏微分方程

$$c_1 \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + c_2 \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

最简单直接的数值微分方法就是用差商代替微商.

导数的近似值

差商的极限

导数的定义

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

转化为数列的极限

$$\{h_k\},\quad h_k\to 0$$

差商 $D_k=\dfrac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k},\qquad (k=1,2,\ldots)$

差商的极限

导数的近似值

例 6.1 设 $f(x)=e^x$ 且 $x=1$。使用步长 $h_k=10^{-k}$, $k=1,2,\cdots,10$ 计算差商 D_k。精度为小数点后 9 位。

解：计算 D_k 所需的值 $f(1+h_k)$ 和 $(f(1+h_k)-f(1))/h_k$ 如表 6.1 所示。■

表 6.1 求解 $D_k=(e^{1+h_k}-e)/h_k$ 的差商

h_k	$f_k=f(1+h_k)$	f_k-e	$D_k=(f_k-e)/h_k$
$h_1=0.1$	3.004166024	0.285884196	2.858841960
$h_2=0.01$	2.745601015	0.027319187	2.731918700
$h_3=0.001$	2.721001470	0.002719642	2.719642000
$h_4=0.0001$	2.718553670	0.000271842	2.718420000
$h_5=0.00001$	2.718309011	0.000027183	2.718300000
$h_6=10^{-6}$	2.718284547	0.000002719	2.719000000
$h_7=10^{-7}$	2.718282100	0.000000272	2.720000000
$h_8=10^{-8}$	2.718281856	0.000000028	2.800000000
$h_9=10^{-9}$	2.718281831	0.000000003	3.000000000
$h_{10}=10^{-10}$	2.718281828	0.000000000	0.000000000

误差增大

差商的极限不容易得到导数的近似值。

导数的近似值

程序 6.1(使用极限的微分求解) 计算 $f'(x)$ 的近似值，生成序列

$$f'(x) \approx D_k = \frac{f(x+10^{-k}h) - f(x-10^{-k}h)}{2(10^{-k}h)} \quad \text{其中 } k = 0, \cdots, n$$

当 $\boxed{|D_{n+1} - D_n| \geqslant |D_n - D_{n-1}| \text{或} |D_n - D_{n-1}|}$ 小于容差时停止计算。后者用来求最佳近似值 $f'(x) \approx D_n$。

```
function [L,n]=difflim(f,x,toler)
%Input - f is the function input as a string 'f'
%       - x is the differentiation point
%       - toler is the tolerance for the error
%Output-L=[H' D' E']:
%          H is the vector of step sizes
%          D is the vector of approximate derivatives
%          E is the vector of error bounds
%        - n is the coordinate of the ''best approximation''
max1=15;
h=1;
H(1)=h;
D(1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
E(1)=0;
R(1)=0;
for n=1:2
    h=h/10;
    H(n+1)=h;
    D(n+1)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+1)=abs(D(n+1)-D(n));
    R(n+1)=2*E(n+1)-(abs(D(n+1))+abs(D(n))+eps);
end
n=2;
while((E(n)>E(n+1))&(R(n)>toler))&n<max1
    h=h/10;
    H(n+2)=h;
    D(n+2)=(feval(f,x+h)-feval(f,x-h))/(2*h);
    E(n+2)=abs(D(n+2)-D(n+1));
    R(n+2)=2*E(n+2)-(abs(D(n+2))+abs(D(n+1))+eps);
    n=n+1;
end
n=length(D)-1;
L=[H' D' E'];
```

导数的近似值

中心差分公式

设 $f \in C^3[a,b]$, $x-h, x, x+h \in [a,b]$ 则

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

截断误差

$$E_{trunc}(f,h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6} = \underline{O(h^2)}$$

$$(c = c(x) \in [a,b])$$

导数的近似值

中心差分公式的推导

利用Taylor展开式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_1)h^3$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(c_2)h^3$$

$$\Rightarrow \quad f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{1}{3!}(f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))h^3$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underline{\frac{1}{3!}f^{(3)}(c)h^2}$$

截断误差

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$

导数的近似值

精度为0(h⁴)中心差分公式

设 $f \in C^5[a,b],\ \ x-2h, x-h, x, x+h, x+2h \in [a,b]$

则 $f'(x) \approx \dfrac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}$

截断误差

$$E_{trunc}(f,h) = -\frac{h^4 f^{(5)}(c)}{30} = O(h^4)$$

$$(c = c(x) \in [a,b])$$

收敛速度更快

可取更大的h，减少计算机的舍入误差

证明：

设关于x的四阶泰勒展开式：$f(x)=P_4(x)+E_4(x)$

则$f(x+h)$和$f(x-h)$的泰勒展开式为：

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{2f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{2f^{(5)}(c_1)h^5}{5!} \quad (1)$$

用$2h$代替h，可得如下近似：

$$f(x+2h)-f(x-2h)=4f'(x)h+\frac{16f^{(3)}(x)h^3}{3!}+\frac{64f^{(5)}(c_1)h^5}{5!} \quad (2)$$

(1)*8-(2),消去包含f^3的项：

证明（接上页）：

$$-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)$$

$$=12f'(x)h+\frac{(16f^{(5)}(c_1)-64f^{(5)}(c_2))\ h^5}{120} \qquad \mathbf{(3)}$$

如果 $f^{(5)}(x)$ 的符号只是正或者负，且值变化不快，

则可在[x−2h, x+2h]内找到一个值c，满足

$$16f^{(5)}(c_1)-64f^{(5)}(c_2)=-48f^{(5)}(c\ ) \qquad \mathbf{(4)}$$

将(4)代入(3)，结果f ’ (x)表示为

证明（接上页）：

$$f'(x)=\boxed{\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}}$$

$$+\frac{f^{(5)}(c)h^4}{30}$$

截断误差

中心差分公式

导数的近似值

中心差分公式

例 6.2 设 $f(x)=\cos(x)$。

(a) 利用公式(3)和公式(10)，步长分别为 $h=0.1, 0.01, 0.001$ 和 0.0001，计算 $f'(0.8)$ 的近似值。精度为小数点后 9 位。

(b) 与真实值 $f'(0.8)=-\sin(0.8)$ 进行比较。

解：(a) 设 $h=0.01$，根据公式(3)，可得

$$f'(0.8)\approx\frac{f(0.81)-f(0.79)}{0.02}\approx\frac{0.689498433-0.703845316}{0.02}\approx-0.717344150$$

设 $h=0.01$，根据公式(10)，可得

$$\begin{aligned}f'(0.8)&\approx\frac{-f(0.82)+8f(0.81)-8f(0.79)+f(0.78)}{0.12}\\&\approx\frac{-0.682221207+8(0.689498433)-8(0.703845316)+0.710913538}{0.12}\\&\approx-0.717356108\end{aligned}$$

导数的近似值

中心差分公式

(b) 公式(3)和公式(10)的近似值误差分别为 -0.000011941 和 0.000000017。在本例中，当 $h=0.01$ 时，公式(10)给出的 $f'(0.8)$ 的近似值比公式(3)给出的更好。通过对本例的误差分析可以得出上面的结论。其他的计算如表 6.2 所示。■

表 6.2　根据公式(3)和公式(10)得到的数值微分

步长	公式(3)的近似值	公式(3)的误差	公式(10)的近似值	公式(10)的误差
0.1	−0.716161095	−0.001194996	−0.717353703	−0.000002389
0.01	−0.717344150	−0.000011941	−0.717356108	0.000000017
0.001	−0.717356000	−0.000000091	−0.717356167	0.000000076
0.0001	−0.717360000	−0.000003909	−0.717360833	0.000004742

导数的近似值

Richardson外推法

精度为$O(h^2)$ 和$O(h^4)$ 中心差分公式的关系

设$f_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$ 则由$O(h^2)$中心差分公式得

$$f'(x_0) \approx D_0(h) + Ch^2$$

步长为h的近似值

$$f'(x_0) \approx D_0(2h) + 4Ch^2$$

$$\Rightarrow \quad 3f'(x_0) \approx 4D_0(h) - D_0(2h) = \frac{4(f_1 - f_{-1})}{2h} - \frac{f_2 - f_{-2}}{4h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} - f_{-2}}{12h}$$

即精度为$O(h^4)$ 的中心差分公式

由低阶精度的解推导得到高阶精度的解，称为外推法。

导数的近似值

例 6.3 设 $f(x)=\cos(x)$。设 $h=0.01$ 并利用式(27)和式(28)，说明式(30)中的线性组合 $(4D_0(h)-D_0(2h))/3$ 如何用来求出式(10)给出的 $f'(0.8)$ 的近似值。精度为小数点后 9 位。

解：$h=0.01$ 并利用式(27)和式(28)可得

$$D_0(h)\approx\frac{f(0.81)-f(0.79)}{0.02}\approx\frac{0.689498433-0.703845316}{0.02}$$
$$\approx -0.717344150$$

和

$$D_0(2h)\approx\frac{f(0.82)-f(0.78)}{0.04}\approx\frac{0.682221207-0.710913538}{0.04}$$
$$\approx -0.717308275$$

式(30)中的线性组合为

$$f'(0.8)\approx\frac{4D_0(h)-D_0(2h)}{3}\approx\frac{4(-0.717344150)-(-0.717308275)}{3}$$
$$\approx -0.717356108$$

这与例 6.2 中直接用式(10)得到的 $f'(0.8)$ 的近似值相同。

导数的近似值

Richardson外推法

设 $f'(x_0)$的两个精度为$O(h^{2k})$的近似值分别为

$D_{k-1}(h)$ 和 $D_{k-1}(2h)$ ，且

$$f'(x_0) = D_{k-1}(h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots$$

$$f'(x_0) = D_{k-1}(2h) + 4^k c_1 h^{2k} + 4^{k+1} c_2 h^{2k+2} + \ldots$$

可得改进的近似值表达式

$$f'(x_0) = D_k(h) + O(h^{2k+2}) = \frac{4^k D_{k-1}(h) - D_{k-1}(2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2})$$

导数的近似值

作业

P257　1 (a) (b)

P258　3 (a) (b)

上机

P260　1, 2, 3

数值差分公式

其它中心差分公式

精度为 $O(h^2)$ 的中心差分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_k = f(x_0 + kh) \\ (k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3) \end{array}}$$

数值差分公式

其它中心差分公式

推导 $f''(x_0) \approx \dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$

$$f_k = f(x_0 + kh)$$
$$(k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$$

利用**Taylor展开式**

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \ldots$$

$$\Rightarrow f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \ldots$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c)$$

数值差分公式

其它中心差分公式

精度为 $O(h^4)$ 的中心差分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

数值差分公式

例 6.4 设 $f(x)=\cos(x)$。

(a) $h=0.1, 0.01$ 和 0.001，利用公式(6)求解 $f''(0.8)$ 的近似值。精度为小数点后 9 位。

(b) 比较计算结果和真实值 $f''(0.8) = -\cos(0.8)$。

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

解：

(a) 当 $h=0.01$ 时，计算过程如下：

$$f''(0.8) \approx \frac{f(0.81) - 2f(0.80) + f(0.79)}{0.0001}$$

$$\approx \frac{0.689498433 - 2(0.696706709) + 0.703845316}{0.0001}$$

$$\approx -0.696690000$$

(b) 近似值结果的误差为 -0.000016709。其他的计算如表 6.5 所示。在误差分析中将解释在此例中为何 $h=0.01$ 是最佳的。

表 6.5 求解例 6.4 中 $f''(x)$ 的数值近似值

步长	公式(6)的近似值	公式(6)的误差
$h=0.1$	-0.696126300	-0.000580409
$h=0.01$	-0.696690000	-0.000016709
$h=0.001$	-0.696000000	-0.000706709

数值差分公式

Lagrange多项式微分

如果函数必须在x_0的某一边计算，则无法采用中心差分公式。

前向(后向)差分公式

采用位于x_0的右边(左边)的等距横坐标点上的函数值

$$\boxed{f_k = f(x_0 + kh)}$$

表 6.7 精度为 $O(h^2)$的前向差分公式和后向差分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \quad \text{(前向微分)}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h} \quad \text{(后向微分)}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \quad \text{(前向微分)}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2} \quad \text{(后向微分)}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

运用插值函数求数值微分

- 牛顿多项式微分
- 拉格朗日多项式微分

拉格朗日多项式微分

设$L_n(x)$是$f(x)$的过点$\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset [a, b]$的 n 次插值多项式，由Lagrange插值余项,有对任意给定的 $x \in [a, b]$，总存在如下关系式:

$$f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad a < \xi < b$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_N)$$

若取数值微分公式 $\quad f'(x) \approx L_n'(x)$

拉格朗日多项式微分

误差为:

$$R_n'(x)=f'(x)-L_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\omega_{n+1}(x)\frac{d}{dx}\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

其中$\omega_{n+1}(x)\dfrac{d}{dx}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ 中ξ_x是未知的,其误差不能估计,

注意到在插值节点处$\omega_{n+1}(x_i)\dfrac{d}{dx}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}=0$,此时的余项为

$$R_n'(x_i)=f'(x_i)-L_n'(x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!}\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k)$$

拉格朗日多项式微分

因此插值型求导公式常用于求节点处的导数值

$$f'(x_i) \approx L_n'(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l'_k(x_i) \quad i = 0,1,\dots,n$$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

称为n+1点求导公式。

常用的数值微分公式是 $n=1,2$ 的插值型微分公式.

当 $n=1$ 时,有

$$L_n(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

拉格朗日多项式微分

所以，当n=1时,有

$$R_1'(x_i) = f'(x_i) - L_1'(x_i) = \frac{f^{(2)}(\xi_i)}{2!}\omega_2'(x_i) \quad i = 0,1$$

$$f'(x_i) \approx L_1'(x_i) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad i = 0,1$$

令$h = x_1 - x_0 > 0$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_1) \qquad (1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_2) \qquad (2)$$

（1）称为x_0点的向前差商公式，

(2) 称为x_1点的向后差商公式。

拉格朗日多项式微分

例1　设$f(x)=lnx$，$x_0=1.8$，用2点公式计算$f'(x_0)$。

解：计算$f'(x_0)$的误差为 $\dfrac{|hf''(\xi)|}{2}=\dfrac{h}{2\xi^2}$,

这里　$1.8<\xi<1.8+h$　或　$1.8-h<\xi<1.8$

列表计算如下：

h	$\dfrac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$	$\dfrac{h}{2(1.8)^2}$	$\dfrac{f(1.8)-f(1.8-h)}{h}$	$\dfrac{h}{2(1.8-h)^2}$
0.1	0.5406722	0.0154321	0.5715841	0.0173010
0.01	0.5540180	0.0015432	0.5571045	0.0015605
0.001	0.5554013	0.0001543	0.55570993	0.0001545

$f'(1.8)=0.55\dot{5}$

拉格朗日多项式微分

举$l'_0(x_i)$为例

$$l'_0(x_i)=\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]'\Bigg|_{x=x_0}=\frac{\left[(x-x_1)(x-x_2)\right]'}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\Bigg|_{x=x_0}$$

$$=\frac{x-x_1+x-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\Bigg|_{x=x_0}=\frac{2x_0-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

其他$l'_1(x_i)$和$l'_2(x_i)$同理

拉格朗日多项式微分

当n=2时,有

$$f'(x_i)=\sum_{k=0}^{2}f(x_k)l'_k(x_i)+\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2}(x_i-x_k)$$

$$=f(x_0)\frac{2x_i-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{2x_i-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+f(x_2)\frac{2x_i-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_i)\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2}(x_i-x_k)\quad i=0,1,2$$

当节点等距时，即有 $x_1=x_0+h,\ x_2=x_0+2h,\quad h>0,$

上述公式可简化为

拉格朗日多项式微分

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2)=\frac{f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

这里 $x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h,\quad x_0<\xi_i<x_2$

n=2时，计算$f'(x_0)$的误差是O(h^2)，且（4）的误差最小。

有时，也将x_i统一表为x_0,将上述公式写成如下形式

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)\qquad(3)$$

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)\qquad(4)}$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)\qquad(5)$$

$x_0-h<\xi_i<x_0+h, i=0,1,2.$ (3)、(4)、(5)称为3点公式。

拉格朗日多项式微分

$$f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)\qquad(3)$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)\qquad(4)$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)}{2h}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)\qquad(5)$$

例2 设$f(x)=xe^x$，$x_0=2$，用3点公式计算$f'(x_0)$。

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

h	公式（3）	公式（4）	公式（5）
0.1	22.032310	22.228790	22.054525
0.2		22.414163	
误差	1.35×10^{-1}	$\begin{cases}-6.16\times10^{-2}\\-2.47\times10^{-1}\end{cases}$	1.13×10^{-1}

$$f'(x)=(x+1)e^x,\ f'(2)=22.167168$$

公式(4)计算$f'(2)$较准确。

Newton多项式微分

考虑 $f(t)$ 的2次Newton多项式 $P(t)$

根据点t0, t1, t2, 使用2次牛顿多项式p(t)可近似f(t)

$$P(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1)$$

其中 $a_0 = f(t_0)$ $\qquad a_1 = \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$

$$a_2 = \frac{\left(\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right)}{t_2 - t_0}$$

Newton多项式微分

P(t)的导数为:

$$P'(t)=a_1+a_2((t-t_0)+(t-t_1))$$

而且当t=to时，结果为:

$$P'(t_0)=a_1+a_2(t_0-t_1)\approx f'(t_0)$$

这里不要求点集$\{t_k\}$是等距的

选择不同的横坐标可导出不同的求解f’（x）近似值的公式，下面进行讨论。

Newton多项式微分

情况(i): 如果 $t_0 = x, t_1 = x+h, t_2 = x+2h$

则 $$a_1 = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)}{2h^2}$$

带入求导公式 $P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) \approx f'(t_0)$

则有：

$$P'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{-f(x)+2f(x+h)-f(x+2h)}{2h}$$

$$P'(x) = \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h} \approx f'(x)$$

即$f'(x)$的2阶前向差分公式

Newton多项式微分

情况(ii): 如果 $t_0 = x,\ t_1 = x+h,\ t_2 = x-h$

则 $$a_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h^2}$$

带入求导公式 $P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) \approx f'(t_0)$

则有:

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{-f(x+h) + 2f(x) - f(x-h)}{2h}$$

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx f'(x)$$

即$f'(x)$的2阶中心差分公式

Newton多项式微分

情况(iii): 如果 $t_0 = x, t_1 = x-h, t_2 = x-2h$

则
$$a_1 = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$a_2 = \frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{2h^2}$$

带入求导公式 $P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) \approx f'(t_0)$

则有:

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$$

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h} \approx f'(x)$$

即$f'(x)$的2阶后向差分公式

Newton多项式微分

推广到N次牛顿多项式

根据点$t_0,t_1,\ldots,t_N$，考虑$f(t)$的n次Newton多项式$P(t)$

$$P(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)(t-t_1)$$
$$+a_3(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)+\ldots+a_n(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{n-1})$$

P(t)导数为

$$P'(t)=a_1+a_2((t-t_0)+(t-t_1))$$
$$+a_3((t-t_0)(t-t_1)+(t-t_0)(t-t_2)+(t-t_1)(t-t_2))$$
$$+\ldots+a_n\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(t-t_j)$$

Newton多项式微分

当在t=t_0处计算P'(t)时，式中有许多项为零，

这样P'(t_0)可简化为：

$$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \dots$$
$$+ a_n(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)\dots(t_0 - t_{n-1})$$

假设N=5，我们看取不同点时候的P'(t)

Newton多项式微分

$$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \ldots$$
$$+ a_n(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)\ldots(t_0 - t_{n-1})$$

若取5个点 $t_k = x + kh, k = 0,1,2,3,4$

则P’(x)等价于精度$O(h^4)$为$f'(x)$的前向差分公式

若取5个点 $t_k = x - kh, k = 0,1,2,3,4$

则P’(x)等价于精度$O(h^4)$为$f'(x)$的后向差分公式

若取5个点

$$t_0 = x,\ t_1 = x + h,\ t_2 = x - h,\ t_3 = x + 2h,\ t_4 = x - 2h$$

则P’(x)等价于精度$O(h^4)$为$f'(x)$的中心差分公式

Newton多项式微分

```
function [A,df]=diffnew(X,Y)
%Input   - X is the 1xn abscissa vector
%        - Y is the 1xn ordinate vector
%Output  - A is the 1xn vector containing the coefficients of
%          the Nth-degree Newton polynomial
%        - df is the approximate derivative
A=Y;
N=length(X);
for j=2:N
   for k=N:-1:j
      A(k)=(A(k)-A(k-1))/(X(k)-X(k-j+1));
   end
end
x0=X(1);
df=A(2);
prod=1;
n1=length(A)-1;
for k=2:n1
   prod=prod*(x0-X(k));
   df=df+prod*A(k+1);
end
```

Newton多项式微分

$$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \Lambda$$

$$+ a_n(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)\Lambda\ (t_0 - t_{n-1})$$

作 业

课堂作业

P269　2, 4

上机

P269　2, 3, 9