| 成绩 | |
|---|---|

# 上海大学 2012～2013 学年 秋 季学期试卷

课程名：离散数学（一）课程号：08305003 学分：4（A 卷）

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ________ 应试人学号 ________ 应试人所在院系 ________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

| 得分 | |
|---|---|

一、选择（10 分，每小题 2 分）

1、设 $S=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$，下面不正确是（ D ）

A. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\subseteq S$　　B. $\varnothing \in S$

C. $\{\varnothing\}\subseteq S$　　D. $\{\{\varnothing\}\}\in S$

2、下列语句是命题的（ D ）

A. 请勿吐痰！　　B. 我们要努力学习。

C. 你明天有空吗？　　D. 不存在最大质数。

3、设 $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系，$I_A$ 是 $A$ 上的恒等关系，$I_A\cup R$，则 $R$ 是 $A$ 上的（ A ）

A. 自反关系　　B. 传递关系

C. 对称关系　　D. 反对称关系

注：教师应使用计算机处理试题的文字、公式、图表等；学生应使用水笔或圆珠笔答题。

4、$A=\{1,2,3,4\}$，在 $A$ 上定义等价关系

$$R=\{\langle a,b\rangle \mid a+b \text{ 为偶数}\},$$

则商集 $A/R$ 是（ D ）

A. $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$　　B. $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

C. $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$　　D. $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$

5、考虑定义在整数集上的函数 $f: Z\to Z$，则下列函数是双射的是（ C ）

A. $f(x)=2x$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=x+1$　　D. $f(x)=5$

| 得分 | |
|---|---|

二、判断是非正确的打“√”，否则打“×”（10 分，每小题 2 分）

1、北京与天津的距离很近是复合命题。 （×）

2、闭式在给定的解释中变成命题。 （√）

3、非空集合 $A$ 上的关系 $R$ 如果不是对称的一定是反对称的。 （×）

4、$R_1$ 和 $R_2$ 分别是非空集合 $A$ 上的关系，若 $R_1$ 和 $R_2$ 是传递的，则 $R_1\cup R_2$ 也是传递的。 （×）

5、若 $f: A\to B$, $g: B\to C$ 是满射的，则 $f\circ g$ 是满射；反之亦然。 （×）

三、计算题（40 分，每小题 10 分）

| 得分 | |
|---|---|

1、有父亲(A)、母亲(B)和三个孩子(C，D，E)组成的一个家庭，关于家中哪几个人看了电视的问题，有以下几种正确说法：

(1) A 在看电视时，B 也在看；

(2) D 和 E 或两人都看，或者他们之中的一个看了；

(3) B 和 C 只有一人看了；

(4) C 和 D 或者两人都看，或者两人都没看；

(5) 如果 E 看了，那么 A 和 D 也看了.

请用主范式证明到底哪几个人看了电视？

解： 设命题变项 A、B、C、D 和 E 分别表示 A、B、C、D 和 E 看了电视；

(1) $\Leftrightarrow A\to B$ (1 分) (2) $\Leftrightarrow D\vee E$ (1 分)

(3) $\Leftrightarrow (B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)$ (1 分) (4) $\Leftrightarrow C\leftrightarrow D$ (1 分)

(5) $\Leftrightarrow E\to(A\wedge D)$ (1 分)

从而，同时满足上述说法的命题公式为

$(A\to B)\wedge(D\vee E)\wedge((B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C))\wedge(C\leftrightarrow D)\wedge(E\to(A\wedge D))$ (1 分)

$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B\Leftrightarrow\Pi(16,\ldots,23)$

$D\vee E\Leftrightarrow\Pi(0,4,8,12,16,20,24,28)$

$(B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C)\Leftrightarrow(B\vee C)\wedge(\neg B\vee\neg C)\Leftrightarrow\Pi(0,\ldots,3,12,\ldots,19,28,\ldots,31)$

$C\leftrightarrow D\Leftrightarrow(\neg C\vee D)\wedge(C\vee\neg D)\Leftrightarrow\Pi(2,\ldots,5,10,\ldots,13,18,\ldots,21,26,\ldots,29)$

$E\to(A\wedge D)\Leftrightarrow\neg E\vee(A\wedge D)\Leftrightarrow(\neg E\vee A)\wedge(\neg E\vee D)\Leftrightarrow\Pi(1,3,5,7,9,11,13,15,17,21,25,29)$ (3 分)

因此，原式$\Leftrightarrow\Pi(0,\ldots5,7,\ldots,31)\Leftrightarrow\Sigma(6)$ (1 分)

因此，看电视的人为 C 和 D。

2、设集合 $A=\{a, b, c, d\}$上的二元关系

$$R=\{<a,a>,<b,c>,<b,d>,<c,a>,<d,a>\}$$

（1）写出 $R$ 的自反闭包 $r(R)$；（3 分）

（2）写出 $R$ 的对称闭包 $s(R)$；（3 分）

（3）用 Warshall 算法求出传递闭包 $t(R)$的关系矩阵。（4 分）

**解：** $r(R)=R\cup\{<b,b>, <c,c>, <d,d>\}$；

$s(R)=R\cup\{<c,b>, <d,b>, <a,c>, <a,d>\}$；

$$M_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

（$M_1$ 到 $M_4$ 每个 1 分）

、公式 $\forall x_1(F(x_1)\to\exists x_2G(x_1,x_2))\to(\exists x_2(H(x_2)\to\forall x_3G(x_2,x_3)))$

1) 在给定解释 $I$：个体域 $D=\{a,b\}$, $F(a)=1$, $F(b)=0$, $H(a)=0$, $H(b)=1$,

$G(a,a)=G(b,b)=1$, $G(a,b)=G(b,a)=0$，求上述公式的真值；（5 分）

2) 求上述公式的前束范式。（5 分）

**解：(1) 消量词得：**

原式$\Leftrightarrow((F(a)\to(G(a,a)\vee G(a,b))\wedge(F(b)\to(G(b,a)\vee G(b,b)))\to$

$((H(a)\to(G(a,a)\wedge G(a,b)))\vee(H(b)\to(G(b,a)\wedge G(b,b))))$

$\Leftrightarrow((1\to(1\vee0))\wedge(0\to(0\vee1)))\to((0\to(1\wedge0))\vee(1\to(0\wedge1)))$

$\Leftrightarrow(1\wedge1)\to(1\vee0)\Leftrightarrow1$

(2) 原式 $\Leftrightarrow\forall x_1(F(x_1)\to\exists x_2G(x_1,x_2))\to(\exists x_4(H(x_4)\to\forall x_3G(x_4,x_3)))$

$\Leftrightarrow\forall x_1\exists x_2(F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(\exists x_4\forall x_3(H(x_4)\to G(x_4,x_3)))$

$\Leftrightarrow\exists x_1\forall x_2\exists x_4\forall x_3((F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(H(x_4)\to G(x_4,x_3)))$

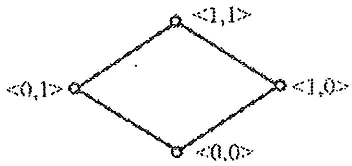
4、已知 $A=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>,<0,0>\}$， 规定 $A$ 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 为：

$$<a,b> \preccurlyeq <c,d> \quad \Leftrightarrow \quad a \leqq c \ \wedge \ b \leqq d$$

（1）画出偏序集 $<A, \preccurlyeq>$ 的哈斯图；（4 分）

（2）令 $B=\{<1,1>,<1,0>,<0,1>\}$，求出 $B$ 的最大元、最小元、极大元、极小元、上确界和下确界。（如果不存在则指明不存在）（6 分）

解：(1)




(2) 最大元：<1,1>；最小元：无；极大元：<1,1>；极小元：<0,1>和<1,0>；上确界：<1,1>；下确界：<0,0>。

| 得分 | |
|---|---|

四、证明（40 分，每小题 10 分）

1、设 $R$ 是非空集合 $A$ 上的关系，若 $\mathrm{dom}\,R = A$，证明：$R \circ R^{-1}$ 是自反的关系。

证：对 $\forall x \in A = \mathrm{dom}\,R$，$\exists y \in A$，使得 $<x,y> \in R$，从而 $<y,x> \in R^{-1}$，因此

$$(<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R^{-1}) \rightarrow <x,x> \in R \circ R^{-1}$$

即，$R \circ R^{-1}$ 是自反的关系。

2、$R$ 是集合 $A$ 上的二元关系。对于所有的 $a$、$b$、$c \in A$，如果 $aRb, bRc$，则 $cRa$，那么称 $R$ 是循环关系。

证明: $R$ 是自反和循环的当且仅当 $R$ 是一等价关系。

证：(1) 充分性：只需证明 $R$ 是对称和传递的。

对称性：对 $\forall <x,y> \in R$，由 $R$ 是自反的可知 $<y,y> \in R$，从而

$$(<x,y> \in R \wedge <y,y> \in R) \to <y,x> \in R \qquad (3\text{ 分})$$

传递性：对 $\forall <x,y> \in R, <y,z> \in R$，则

$$(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R) \to <z,x> \in R \qquad (3\text{ 分})$$

由 $R$ 是对称的，从而 $<x,z> \in R$。

(2)必要性：只需证明 $R$ 是循环的。

对 $\forall <x,y> \in R, <y,z> \in R$，则由传递性知

$(<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R) \to <x,z> \in R$

再由 $R$ 是对称的，有 $<z,x> \in R$，证毕。 (4 分)

3、设 $f: A \to B, g: B \to C$ 是两个函数，证明：

(1) 若 $f \circ g$ 是满射且 $g$ 是单射，则 $f$ 是满射；（5 分）

(2) 若 $f \circ g$ 是单射且 $f$ 是满射，则 $g$ 是单射。（5 分）

证明：(1) $\forall y \in B$，$g(y) = z$, 因为 $f \circ g: A \to C$ 是满射，则存在 $x \in A$，
使得 $f \circ g\,(x) = z = g\,(f(x))$, 因 $g$ 是单射，有 $y = f(x)$，即 $\forall y \in B$，存在 $x \in A$，
使得 $f\,(x) = y$，则 $f$ 是满射。

(2) 反证法：设 $g$ 不是单射，则存在 $y_1, y_2 \in B$，且 $y_1 \neq y_2$，使得 $g(y_1) = g(y_2) = z$。
因 $f$ 是满射，则存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f\,(x_1) = y_1$，$f\,(x_2) = y_2$，从而有

$$g(f\,(x_1)) = g(f\,(x_2)) = z, \quad \text{即} \quad f \circ g\,(x_1) = f \circ g\,(x_2) = z$$

由 $f \circ g$ 是单射可知，$x_1 = x_2$，从而有 $y_1 = y_2$。

、在自然推理系统 $P$ 中证明，

前提：$(p\wedge q)\to r, \neg r\vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

明：　方法一：直接法

| | |
|---|---|
| ①$\neg s$ | 前提引入 |
| ②$\neg r\vee s$ | 前提引入 |
| ③$\neg r$ | ①②析取三段论 |
| ④$(p\wedge q)\to r$ | 前提引入 |
| ⑤$\neg(p\wedge q)$ | ③④拒取式 |
| ⑥$\neg p\vee\neg q$ | ⑤德摩根律置换 |
| ⑦$p$ | 前提引入 |
| ⑧$\neg q$ | ⑥⑦析取三段论 |

方法二：归谬法

| | |
|---|---|
| ①$q$ | 结论的否定引入 |
| ②$p$ | 前提引入 |
| ③$p\wedge q$ | ①②合取引入 |
| ④$(p\wedge q)\to r$ | 前提引入 |
| ⑤$r$ | ③④假言推理 |
| ⑥$\neg r\vee s$ | 前提引入 |
| ⑦$s$ | ⑤⑥析取三段论 |
| ⑧$\neg s$ | 前提引入 |
| ⑨$s\wedge\neg s$ | ⑦⑧合取，矛盾 |

还有其它证明方法，上述方法以供参考，每个推理步骤 1-2 分。

# 上海大学 2005~2006 学年春季学期试卷(A 卷)

课程名：离散数学(一)　　学分：4　(闭卷)

学号：＿＿＿＿＿＿　姓名：参考答案　院系：＿＿＿＿＿＿

| 成绩 | |
|---|---|

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

一、(10 分)数学分析关于极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ 的定义为：任意给定小正数 $\varepsilon$，则存在一个正数 $\delta$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时有 $|f(x)-b|<\varepsilon$。

| 得分 | |
|---|---|

(1)用谓词公式表达上述定义。

(2)将上述谓词公式化为前束范式。

$(\forall\varepsilon)(P(\varepsilon,0)\to(\exists\delta)(P(\delta,0)\wedge\forall(x)(P(\varepsilon,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|)$

(1)：谓词公式(5分)

定义谓词：$P(x,y)$：$x>y$

$$(\forall\varepsilon)(P(\varepsilon,0)\to(\exists\delta)(P(\delta,0)\wedge(\forall x)(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|))))$$

① ② ③ ④ ⑤

(2)：前束公式(5分)

$$(\forall\varepsilon)(P(\varepsilon,0)\to(\exists\delta)(P(\delta,0)\wedge(\forall x)(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|))))$$

$$\Leftrightarrow(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)(P(\varepsilon,0)\to(P(\delta,0)\wedge(P(\delta,|x-a|)\to P(\varepsilon,|f(x)-b|))))$$

二、(10分)求 $P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式。

| 得分 | |
|---|---|

证法一：求主合取范式(5分)

$P \Leftrightarrow (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \to Q \wedge R) \wedge (Q \wedge R \to P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (\neg (Q \wedge R) \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

证法一：求主析取范式(5分)

$P \Leftrightarrow (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg (Q \wedge R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$

证法二：真值表法

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \wedge R$ | $P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$ | 4分 $m$ | 4分 $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ | |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ | |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ | |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | | $P \vee \neg Q \vee \neg R$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | | $\neg P \vee Q \vee R$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | | $\neg P \vee Q \vee \neg R$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | | $\neg P \vee \neg Q \vee R$ |
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $P \wedge Q \wedge R$ | |

主析取范式为:$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$(1分)

主合取范式为:$(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$(1分)

三、(10 分)用推理规则证明：

(1)用直接证法证明：$S \to \neg Q,\ \neg P \quad Q,\ S \vee R,\ \neg R \Rightarrow P$

(2)用 CP 规则证明：$P \vee Q,\ P \to R,\ S \to (Q \to R) \Rightarrow S \to R$

| 得分 | |
|---|---|

(1)证明：5分

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $S \vee R$ | $P$ | |
| 2) | $\neg S \to R$ | $T_{1)}$ | $E_{16}$ |
| 3) | $S \to \neg Q$ | $P$ | |
| 4) | $Q \to \neg S$ | $T_{3)}$ | $E_{18}$ |
| 5) | $\neg P \quad Q$ | $P$ | |
| 6) | $(\neg P \to Q) \wedge (Q \to \neg P)$ | $T_{5)}$ | $E_{20}$ |
| 7) | $\neg P \to Q$ | $T_{6)}$ | $I_1$ |
| 8) | $\neg P \to \neg S$ | $T_{4)7)}$ | $I_{13}$ |
| 9) | $\neg P \to R$ | $T_{2)8)}$ | $I_{13}$ |
| 10) | $\neg R \to P$ | $T_{9)}$ | $E_{18}$ |
| 11) | $\neg R$ | $P$ | |
| 12) | $P$ | $T_{10)11)}$ | $I_{11}$ |

(2)证明：5分

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $S$ | $P(AD)$ | |
| 2) | $P \vee Q$ | $P$ | |
| 3) | $P \to R$ | $P$ | |
| 4) | $S \to (Q \to R)$ | $P$ | |
| 5) | $Q \to R$ | $T_{1)4)}$ | $I_{11}$ ✓ |
| 6) | $R$ | $T_{2)3)5)}$ | $I_{14}$ |
| 7) | $S \to R$ | $CP$规则 | |

3

| 得分 | |
|---|---|

四、(10分)用推理规则证明:

(1)用反证法证明: $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

(2)用直接证法证明: $(\forall x)\neg P(x)$, $(\exists y)(R(y)\wedge S(y))\rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$

$$\Rightarrow(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg S(y))$$

(1)证明: 5分

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\neg((\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x))$ | $P(AD)$ | |
| 2) | $\neg(\forall x)P(x)\wedge\neg(\exists x)Q(x)$ | $T_{1)}$ | $E_9$ |
| 3) | $\neg(\forall x)P(x)$ | $T_{2)}$ | |
| 4) | $(\exists x)\neg P(x)$ | $T_{3)}$ | $E_{26}$ |
| 5) | $\neg(\exists x)Q(x)$ | $T_{2)}$ | |
| 6) | $(\forall x)\neg Q(x)$ | $T_{5)}$ | $E_{25}$ |
| 7) | $\neg P(a)$ | $ES_{4)}$ | |
| 8) | $\neg Q(a)$ | $US_{6)}$ | |
| 9) | $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ | $P$ | |
| 10) | $P(a)\vee Q(a)$ | $US_{9)}$ | |
| 11) | $Q(a)$ | $T_{7)10)}$ | $I_{10}$ |
| 12) | $\neg Q(a)\wedge Q(a)$ | $T_{8)11)}$ 矛盾 | $I_9$ |

(2)证明: 5分

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $(\forall x)\neg P(x)$ | $P$ | |
| 2) | $\neg P(a)$ | $US_{1)}$ | |
| 3) | $\neg P(a)\vee\neg Q(a)$ | $T_{2)}$ | $I_3$ |
| 4) | $\neg(P(a)\wedge Q(a))$ | $T_{3)}$ | $E_8$ |
| 5) | $(\forall x)\neg(P(x)\wedge Q(x))$ | $UG_{4)}$ | |
| 6) | $\neg(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$ | $T_{5)}$ | $E_{25}$ |
| 7) | $(\exists y)(R(y)\wedge S(y))\rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$ | $P$ | |
| 8) | $\neg(\exists y)(R(y)\wedge S(y))$ | $T_{6)7)}$ | $I_{12}$ |
| 9) | $(\forall y)\neg(R(y)\wedge S(y))$ | $T_{8)}$ | $E_{25}$ |
| 10) | $\neg(R(b)\wedge S(b))$ | $US_{9)}$ | |
| 11) | $\neg R(b)\vee\neg S(b)$ | $T_{10)}$ | $E_8$ |
| 12) | $R(b)\rightarrow\neg S(b)$ | $T_{11)}$ | $E_{16}$ |
| 13) | $(\forall y)(R(y)\rightarrow\neg S(y))$ | $UG_{12)}$ | |

五、(10 分)

(1)对谓词公式 $(\forall x)R(x,y)\vee(\forall y)P(x,y)\wedge(\exists y)Q(x,y)$ 中的自由变元进行代入。

(2)对谓词公式 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 先消去量词后求真值。其中，

论域 $D=\{1,2\}$， $P(1,1)\Leftrightarrow P(2,1)\Leftrightarrow F$， $P(1,2)\Leftrightarrow P(2,2)\Leftrightarrow T$。

| 得分 | |
|---|---|

(1) 代入(5分)

$$(\forall \underset{1}{x})R(\underset{1}{x},\underset{1}{y})\vee(\forall \underset{2}{y})P(\underset{2}{x},\underset{2}{y})\wedge(\exists \underset{3}{y})Q(\underset{2}{x},\underset{3}{y})$$

$$\Leftrightarrow(\forall x)R(x,a)\vee(\forall y)P(b,y)\wedge(\exists z)Q(b,z)$$

(2) 求值(5分)

$$(\forall x)(\exists y)P(x,y)\Leftrightarrow(\forall x)(P(x,1)\vee P(x,2))$$

$$\Leftrightarrow(P(1,1)\vee P(1,2))\wedge(P(2,1)\vee P(2,2))$$

$$\Leftrightarrow(F\vee T)\wedge(F\vee T)\Leftrightarrow T\wedge T\Leftrightarrow T$$

5

六、(10 分)对于任意集合 $A$ 和 $B$，$\Phi$ 是空集，$E$ 是全集，证明以下三个命题彼此等价：

$A-B=\Phi$，　$A\subseteq B$，　$A\cup B=E$。

得分

证明(1)：$A-B=\Phi\Rightarrow A\subseteq B$ (4分)

$\because A-B=\Phi\Rightarrow A\cap\sim B=\Phi\Rightarrow B\cup(A\cap\sim B)=B\cup\Phi$

$\Rightarrow(B\cup A)\cap(B\cup\sim B)=B\Rightarrow(B\cup A)\cap E=B\Rightarrow B\cup A=B\overset{\because A\subseteq B\cup A}{\Rightarrow}A\subseteq B$

证明(2)：$A\subseteq B\Rightarrow\sim A\cup B=E$ (3分)

$\because A\subseteq B\Rightarrow\sim A\cup A\subseteq\sim A\cup B\Rightarrow E\subseteq\sim A\cup B\overset{\because\sim A\cup B\subseteq E}{\Rightarrow}\sim A\cup B=E$

证明(3)：$\sim A\cup B=E\Rightarrow A-B=\Phi$ (3分)

$\because\sim A\cup B=E\Rightarrow\sim(\sim A\cup B)=\sim E\Rightarrow A\cap\sim B=\Phi\Rightarrow A-B=\Phi$

由上述结论得到以上三个命题彼此等价。

七、(10分)对于任意集合$A$、$B$和$C$，证明：

(1)$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

(2)$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

得分

证明(1)：(5分)

$Set \quad <x,y>\in(A-B)\times C \Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C \Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge y\in C)\vee(x\in A\wedge\neg(y\in C)\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(\neg(x\in B)\vee\neg(y\in C))\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times C)\wedge\neg(<x,y>\in(B\times C))\Leftrightarrow<x,y>\in(A\times C)-(B\times C)$

$\because$ $<x,y>$是任意取的， $\therefore$ $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

证明(2)：(5分)

$(A\oplus B)\times C=((A-B)\cup(B-A))\times C=((A-B)\times C)\cup((B-A)\times C)$

$=((A\times C)-(B\times C))\cup((B\times C)-(A\times C))=(A\times C)\oplus(B\times C)$

八、(10 分)设 $R$ 是集合 $A$ 上的二元关系，证明：

(1)若 $R$ 对称，则 $r(R)$ 对称。

(2) $ts(R) \supseteq st(R)$。

得分

证明(1)：(5分)

$\because\ r(R) = R \cup I_A \overset{R\text{对称}}{=} R^c \cup I_A^c = (R \cup I_A)^c = (r(R))^c$

$\therefore\ r(R)$ 对称

证明(2)：(5分)

$\because\ s(R) \supseteq R \Rightarrow ts(R) \supseteq t(R) \Rightarrow sts(R) \supseteq st(R)$

又 $\because\ s(R)$ 对称 $\Rightarrow ts(R)$ 对称 $\Leftrightarrow sts(R) = ts(R)$

$\therefore\ ts(R) \supseteq st(R)$

九、(10 分)定义实数集 $R$ 上的二元关系 $S=\left\{<x,y>\left|\frac{x-y}{2}\in I\right.\right\}$，$I$ 为整数集。

| 得分 | |
|---|---|

(1)证明：$S$ 是 $R$ 上的等价关系。

(2)求由等价关系 $S$ 所产生的 1 的等价类 $[1]_S$ 和 1/4 的等价类 $\left[\frac{1}{4}\right]_S$。

证明(1)：(6分)

1) $a\in R\Rightarrow\frac{a-a}{2}=0\in I\Rightarrow<a,a>\in S$ $\because a$是任意取的 $\therefore S$自反

2) $a,b\in R\wedge<a,b>\in S\Rightarrow\frac{a-b}{2}=t\in I\Rightarrow\frac{b-a}{2}=-t\in I\Rightarrow<b,a>\in S$

$\because$ $<a,b>$是任意取的 $\therefore S$对称

3) $a,b,c\in R\wedge<a,b>\in S\wedge<b,c>\in S\Rightarrow\frac{a-b}{2}=t_1\in I\wedge\frac{b-c}{2}=t_2\in I$

$\Rightarrow\frac{a-c}{2}=t_1+t_2\in I\Rightarrow<a,c>\in S$ $\because$ $<a,b>$和$<b,c>$是任意取的 $\therefore S$传递

$\therefore$ $S$是$R$上的等价关系

证明(2)：(4分)

$$[1]_S=\left\{a\left|\frac{1-a}{2}\in I\right.\right\}=\{a|a\in 1-2I\}=\{\cdots,-3,-1,1,3,\cdots\}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right]_S=\left\{a\left|\frac{\frac{1}{4}-a}{2}\in I\right.\right\}=\left\{a\left|a\in\frac{1}{4}-2I\right.\right\}=\left\{\cdots,-\frac{15}{4},-\frac{7}{4},\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{17}{4},\cdots\right\}$$

9

| 得分 | |
|---|---|

十、(10分)设函数$f$：$X\to Y$，$g$：$Y\to Z$，证明：

(1)若$f$和$g$均满射，则复合函数$g\circ f$满射。

(2)若$f$和$g$均入射，则复合函数$g\circ f$入射。

证明(1)：(5分)

$$z\in Z\overset{g满射}{\Rightarrow}(\exists y)\big(y\in Y\wedge g(y)=z\big)\overset{f满射}{\Rightarrow}(\exists y)\Big(\big((\exists x)(x\in X\wedge f(x)=y)\big)\wedge g(y)=z\Big)$$
$$\Rightarrow(\exists x)\Big(x\in X\wedge g\big(f(x)\big)=z\Big)\Leftrightarrow(\exists x)\big(x\in X\wedge g\circ f(x)=z\big)$$

$\because z$是任意取的 $\therefore$复合函数$g\circ f$满射

证明(2)：(5分)

$$g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)\Rightarrow g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\overset{g入射}{\Rightarrow}f(x_1)=f(x_2)\overset{f入射}{\Rightarrow}x_1=x_2$$

$\because x_1,x_2$是任意取的 $\therefore$复合函数$g\circ f$入射

# 上海大学 2006~2007 学年春季学期试卷(A卷)

| 成绩 | |
|---|---|

课程名：离散数学(一)　课程号：08305003　学分：4　(闭卷)

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人：＿＿＿＿　应试人学号：参考答案　应试人所在院系：＿＿＿＿

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

一、(10分) 设函数 $f:A\to B$，函数 $g:B\to A$，且复合函数 $g\circ f$ 为 $A$ 上的恒等函数 $I_A$，试用定义证明：$f$ 是入射的，$g$ 是满射的。

| 得分 | |
|---|---|

证：因为复合函数 $g\circ f$ 为 $A$ 上的恒等函数 $I_A$，所以对于任意 $x\in A$，都有 $g\circ f(x)=x$。

对于任意的 $x_1,x_2\in A$，若 $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

所以，$f$ 是入射的。

对于任意的 $x\in A\Rightarrow g\circ f(x)=x$

$$\overset{\text{复合函数定义}}{\Rightarrow}(\exists y)(y\in B\wedge f(x)=y\wedge g(y)=x)$$

$$\Rightarrow(\exists y)(y\in B\wedge g(y)=x)$$

所以，$g$ 是满射的。

21

二、(10 分) 简化下列命题公式：

得分

(1) $\neg(P \to Q) \vee (P \to (P \wedge Q))$；

(2) $((A \uparrow A) \wedge B) \wedge (A \vee (B \downarrow B))$。

解：(1) $\neg(P \to Q) \vee (P \to (P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee (P \wedge Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q \vee Q)) \vee \neg P \Leftrightarrow P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

(2) $((A \uparrow A) \wedge B) \wedge (A \vee (B \downarrow B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \wedge (A \vee \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg B) \Leftrightarrow F \vee F \Leftrightarrow F$

三、(10 分) 求公式 $(\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge (\forall x)R(z,y))$ 的前束析取范式。

得分

解：$(\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge (\forall x)R(z,y))$

去除多余量词

$\Leftrightarrow \quad (\forall y)\neg P(x,y) \to (\exists y)((\forall z)Q(y,z) \wedge R(z,y))$

换名

$\Leftrightarrow (\forall a)\neg P(x,a) \to (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

蕴涵

$\Leftrightarrow \neg(\forall a)\neg P(x,a) \vee (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

深入

$\Leftrightarrow (\exists a)P(x,a) \vee (\exists y)((\forall b)Q(y,b) \wedge R(z,y))$

量词提前

$\Leftrightarrow \quad (\exists a)(\exists y)(\forall b)[P(x,a) \vee (Q(y,b) \wedge R(z,y))]$

22

四、(10 分) 根据下面真值表，求公式 $S$ 的主析取范式和主合取范式。

得分

| $A$ | $B$ | $C$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $T$ | $T$ | $T$ | $F$ |

解：

| $m$ | $M$ |
|---|---|
| $\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C$ | |
| $\neg A\wedge\neg B\wedge C$ | |
| | $A\vee\neg B\vee C$ |
| $\neg A\wedge B\wedge C$ | |
| $A\wedge\neg B\wedge\neg C$ | |
| $A\wedge\neg B\wedge C$ | |
| | $\neg A\vee\neg B\vee C$ |
| | $\neg A\vee\neg B\vee\neg C$ |

公式 $S$ 的主析取范式为：$\sum m_{0,1,3,4,5} \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5$

$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)$

公式 $S$ 的主合取范式为：$\prod M_{2,6,7} \Leftrightarrow M_2\wedge M_6\wedge M_7$

$\Leftrightarrow(A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)$

五、(10 分) 设集合 $A=\varnothing$，$\rho$ 表示幂集。求 $S=\rho(\rho(\rho(A)))$ 的值，并请说明 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 是 $S$ 的元素，还是 $S$ 的子集。

得分

解：$\rho(A)=\rho(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$\rho(\rho(A))=\rho(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

$S=\rho(\rho(\rho(A)))=\rho(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$。

因为 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in S$，所以 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 是 $S$ 中的元素；

因为 $\varnothing\in S$，$\{\varnothing\}\in S$，所以 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 是 $S$ 的子集。

23

| 得分 | |
|---|---|

六、(10 分) 用推理规则证明：$A\to\neg B,\ A\vee C,\ \neg D\leftrightarrow B\Rightarrow\neg C\to D$。

直接证法：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\neg D\leftrightarrow B$ | $P$ | |
| 2) | $(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$ | $T_{1)}$ | $E_{20}$ |
| 3) | $\neg D\to B$ | $T_{2)}$ | $I_1$ |
| 4) | $\neg B\to D$ | $T_{3)}$ | $E_{18}$ |
| 5) | $A\to\neg B$ | $P$ | |
| 6) | $A\to D$ | $T_{4)5)}$ | $I_{13}$ |
| 7) | $A\vee C$ | $P$ | |
| 8) | $\neg A\to C$ | $T_{7)}$ | $E_{16}$ |
| 9) | $\neg C\to A$ | $T_{8)}$ | $E_{18}$ |
| 10) | $\neg C\to D$ | $T_{6)9)}$ | $I_{13}$得证 |

1) $A\vee C$ P
2) $\neg C\to A$ T①E
3) $A\to\neg B$ P
4) $\neg C\to\neg B$ T②③I
5) $\neg D\leftrightarrow B$ P
6) $(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$ T⑤E
7) $\neg D\to B$ T⑥I
8) $\neg B\to D$ T⑦E
9) $\neg C\to D$ T④⑧I

CP 规则：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\neg C$ | $P$(附加前提) | |
| 2) | $A\vee C$ | $P$ | |
| 3) | $A$ | $T_{1)2)}$ | $I_{10}$ |
| 4) | $A\to\neg B$ | $P$ | |
| 5) | $\neg B$ | $T_{3)4)}$ | $I_{11}$ |
| 6) | $\neg D\leftrightarrow B$ | $P$ | |
| 7) | $(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$ | $T_{6)}$ | $E_{20}$ |
| 8) | $\neg D\to B$ | $T_{7)}$ | $I_1$ |
| 9) | $D$ | $T_{5)8)}$ | $I_{12}$ |
| 10) | $\neg C\to D$ | $CP$规则 | 得证 |

$\neg A\vee\neg B$
$A\vee C$
$D\vee B$ $\neg B\vee\neg D$
$\neg C$

① $\neg C$
② $A\vee C$
③ $A$
④ $\neg A\vee\neg B$
⑤ $\neg B$
⑥ $B\vee D$
⑦ $D$

反证法：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $\neg(\neg C\to D)$ | $P$(附加前提) | |
| 2) | $\neg C$ | $T_{1)}$ | $I_7$ |
| 3) | $A\vee C$ | $P$ | |
| 4) | $A$ | $T_{2)3)}$ | $I_{10}$ |
| 5) | $A\to\neg B$ | $P$ | |
| 6) | $\neg B$ | $T_{4)5)}$ | $I_{11}$ |
| 7) | $\neg D\leftrightarrow B$ | $P$ | |
| 8) | $(\neg D\to B)\wedge(B\to\neg D)$ | $T_{7)}$ | $E_{20}$ |
| 9) | $\neg D\to B$ | $T_{8)}$ | $I_1$ |
| 10) | $\neg D$ | $T_{1)}$ | $I_8$ |
| 11) | $B$ | $T_{10)}$ | $I_{11}$ |
| 12) | $B\wedge\neg B$矛盾 | $T_{6)11)}$ | $I_9$得证 |

24

| 得分 | |
|---|---|

七、(10 分) 设 $S,R$ 是集合 $A$ 上的等价关系，试证明：$R\circ S$ 是集合 $A$ 上的等价关系当且仅当 $R\circ S=S\circ R$。

证：若 $S,R$ 是集合 $A$ 上的等价关系，则满足自反性、对称性、传递性。

("⇐") 1) 对于任意的 $a\in A \overset{S,R满足自反性}{\Longrightarrow} \langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,a\rangle\in S\Rightarrow\langle a,a\rangle\in R\circ S$，

所以 $R\circ S$ 满足自反性；

2) 对于任意的 $a,b\in A\wedge\langle a,b\rangle\in R\circ S\Rightarrow(\exists c)(\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,b\rangle\in S)$

$\overset{S,R满足对称性}{\Longrightarrow}(\exists c)(\langle c,a\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\Rightarrow\langle b,a\rangle\in S\circ R\overset{R\circ S=S\circ R}{\Longrightarrow}\langle b,a\rangle\in R\circ S$，

所以 $R\circ S$ 满足对称性；

3) 对于任意的 $a,b,c\in A\wedge\langle a,b\rangle\in R\circ S\wedge\langle b,c\rangle\in R\circ S\Rightarrow\langle a,c\rangle\in(R\circ S)\circ(R\circ S)$

$\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{\Longleftrightarrow}}\langle a,c\rangle\in R\circ(S\circ R)\circ S\overset{S\circ R=R\circ S}{\Longleftrightarrow}\langle a,c\rangle\in R\circ(R\circ S)\circ S$

$\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{\Longleftrightarrow}}\langle a,c\rangle\in(R\circ R)\circ(S\circ S)\Rightarrow(\exists d)(\langle a,d\rangle\in R\circ R\wedge\langle d,c\rangle\in S\circ S)$

$\Rightarrow(\exists d)((\exists t)(\langle a,t\rangle\in R\wedge\langle t,d\rangle\in R)\wedge(\exists s)(\langle d,s\rangle\in S\wedge\langle s,c\rangle\in S))$

$\overset{S,R满足传递性}{\Longrightarrow}(\exists d)(\langle a,d\rangle\in R\wedge\langle d,c\rangle\in S)\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\circ S$，所以 $R\circ S$ 满足传递性。

综上所述，$R\circ S$ 是集合 $A$ 上的等价关系。

("⇐") 对于任意的关系 $C\subseteq D\wedge E\subseteq F\Rightarrow C\circ E\subseteq D\circ F$

1) 由 $\left.\begin{array}{l} S满足自反性\Leftrightarrow I_A\subseteq S \\ R满足自反性\Leftrightarrow I_A\subseteq R \end{array}\right\}\Rightarrow I_A=I_A\circ I_A\subseteq R\circ S\Leftrightarrow R\circ S满足自反性$；

2) 由 $\left.\begin{array}{l} S满足对称性\Leftrightarrow S=S^C \\ R满足对称性\Leftrightarrow R=R^C \end{array}\right\}\Rightarrow R\circ S=R^C\circ S^C=(S\circ R)^C\overset{R\circ S=S\circ R}{=}(R\circ S)^C$

所以：$R\circ S$ 满足对称性；

3) 由 $\left.\begin{array}{l} S满足传递性\Leftrightarrow S\circ S\subseteq S \\ R满足传递性\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R \end{array}\right\}\Rightarrow(R\circ R)\circ(S\circ S)\subseteq R\circ S$

又因为 $(R\circ R)\circ(S\circ S)\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{=}}R\circ(R\circ S)\circ S\overset{R\circ S=S\circ R}{=}R\circ(S\circ R)\circ S\underset{有结合律}{\overset{复合关系}{=}}(R\circ S)\circ(R\circ S)$，

所以 $(R\circ S)\circ(R\circ S)\subseteq R\circ S$，即 $R\circ S$ 满足传递性；

综上所述，$R\circ S$ 是集合 $A$ 上的等价关系。

("⇒") 若 $R\circ S$ 是集合 $A$ 上的等价关系，则满足自反性、对称性、传递性。

对于任意的 $\langle x,z\rangle\in R\circ S\overset{R\circ S满足对称性}{\Longleftrightarrow}\langle z,x\rangle\in R\circ S\Leftrightarrow(\exists y)(y\in A\wedge\langle z,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in S)$

$\overset{R,S满足对称性}{\Longleftrightarrow}(\exists y)(y\in A\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in S)\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ R$。所以，$R\circ S=S\circ R$。

25

| 得分 | |
|---|---|

八、(10 分) 对谓词公式$(\exists x)(\forall y)\big(H(f(x))\vee G(y,f(x))\big)$先消去量词后求真值。其中，对于任意的$x,y$属于个体域$D=\{2,3\}$，

$$f(x)=\begin{cases}3 & x=2\\ 2 & x=3\end{cases},\quad H(x)=\begin{cases}F & x=2\\ T & x=3\end{cases},\quad G(x,y)=\begin{cases}F & x=y\\ T & x\neq y\end{cases}。$$

解：$(\exists x)(\forall y)\big(H(f(x))\vee G(y,f(x))\big)$

$$\Leftrightarrow(\exists x)\Big[\big(H(f(x))\vee G(2,f(x))\big)\wedge\big(H(f(x))\vee G(3,f(x))\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\Big[\big(H(f(2))\vee G(2,f(2))\big)\wedge\big(H(f(2))\vee G(3,f(2))\big)\Big]\vee$$
$$\Big[\big(H(f(3))\vee G(2,f(3))\big)\wedge\big(H(f(3))\vee G(3,f(3))\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\Big[\big(H(3)\vee G(2,3)\big)\wedge\big(H(3)\vee G(3,3)\big)\Big]\vee\Big[\big(H(2)\vee G(2,2)\big)\wedge\big(H(2)\vee G(3,2)\big)\Big]$$

$$\Leftrightarrow\big[(T\vee T)\wedge(T\vee F)\big]\vee\big[(F\vee F)\wedge(F\vee T)\big]$$

$$\Leftrightarrow(T\wedge T)\vee(F\wedge T)$$

$$\Leftrightarrow T\vee F\Leftrightarrow T$$

26

| 得分 | |
|---|---|

九、(10 分) 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，构造一个以 $\{a,b\},\{c,d,e\},\{f\}$ 为全部等价类的 $A$ 上的等价关系 $R$，并证明 $R$ 是 $A$ 上的等价关系。

解：$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,$

$\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,$

$\langle f,f\rangle\}$

证：1) 因为 $R\supseteq I_A$，所以 $R$ 是自反的；

2) 因为 $R=R^C=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,$

$\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle\}$，所以 $R$ 是对称的；

3) 因为 $R\circ R=R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,$

$\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,e\rangle,\langle e,c\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle\}$，

所以，由 $R\circ R\subseteq R$ 知 $R$ 是传递的。

综上所述，$R$ 是 $A$ 上的等价关系。

27

十、(10 分) 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$R$ 是 $A$ 上的二元关系，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

| 得分 | |
|---|---|

(1) 求：$M_R$、$M_{r(R)}$、$M_{s(R)}$；

(2) 用 $WarShall$ 算法求 $M_{t(R)}$。

解：(1) $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$M_{r(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，$M_{s(R)}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$。

(2) 使用 $WarShall$ 算法

第一列情况：$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，第二列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

第三列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$ 第四列情况：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$。

所以，$M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$。

28