曲线拟合

李颖　　电话：15000114526

QQ：153844033

Email: yinglotus@shu.edu.cn

插值与拟合的基本问题

如果可以将一个实际问题用函数来描述，那么对这个函数性质以及运算规律的研究，就是对这一实际问题的某些内在规律的理性揭示。

在工程实践和科学实验中，经常需要建立函数关系，即$y=f(x)$。虽然从原则上说，它在某个区间$[a,b]$上是存在的，但通常只能观测到它的部分信息，即只能获取$[a,b]$上一系列离散点上的值，这些值构成了观测数据。这就是说，我们只知道的一张观测数据表，

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

而不知道函数在其他点x上的取值，这时只能用一个经验函数$y=g(x)$对真实函数$y=f(x)$作近似。

下面两种办法常用来确定经验函数$y=g(x)$

（1）插值法　　（2）拟合法

根据问题的不同，有时要用插值技术来解决，有时则应该采用拟合的方法才合理。

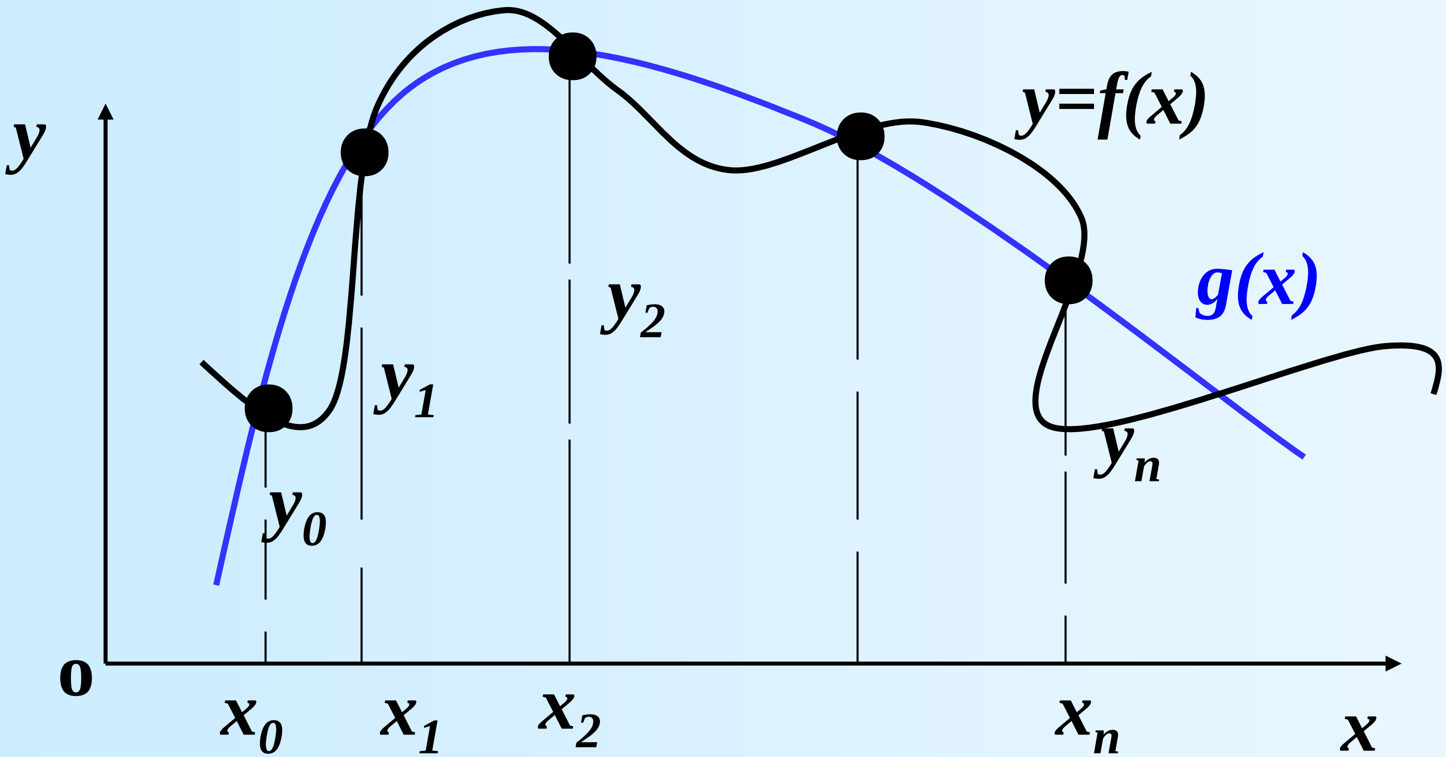
（1）插值法的基本思想

已知数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

求一个经验函数$y=g(x)$，使$g(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\ldots n$.

插值的任务就是由已知的观测点(x_i,y_i)为物理量(未知量),建立一个简单的、连续的解析模型$g(x)$，以便能根据该模型推测该物理量在非观测点处的特性。



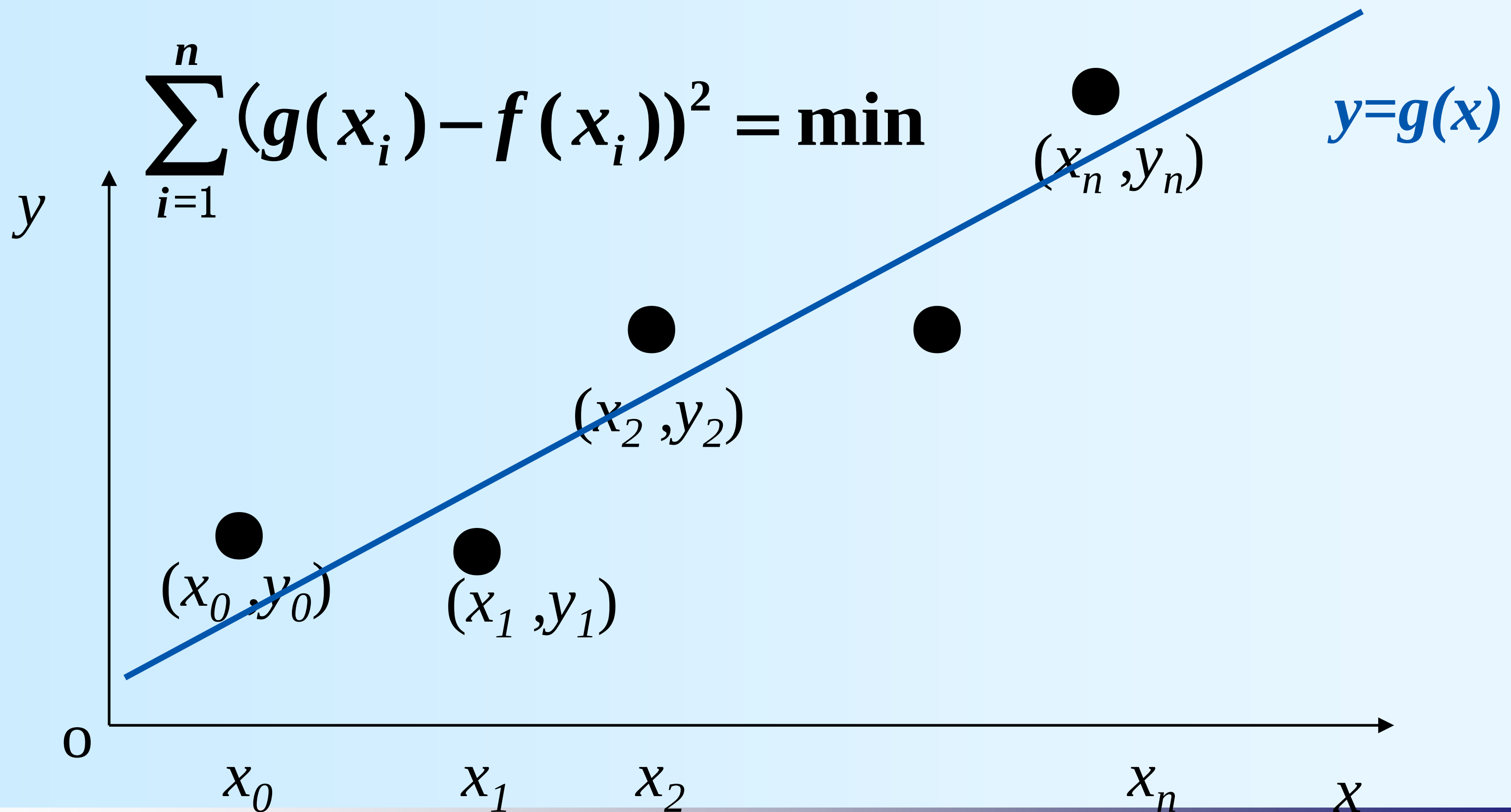
（2）拟合法的基本思想

已知数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

求一个经验函数 $y = g(x)$，使

$$\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-f(x_i))^2 = \min$$



第五章 曲线拟合

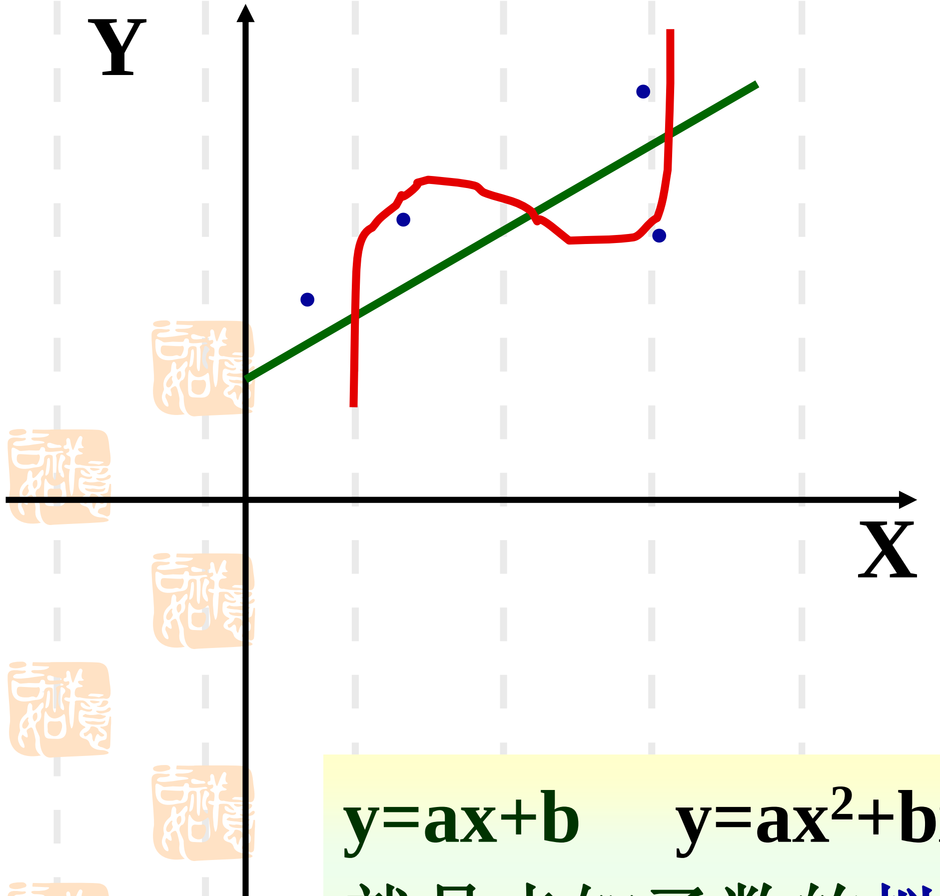
◆最小二乘曲线拟合

◆曲线拟合

- 指数函数曲线拟合

曲线拟合的最小二乘法

1.曲线拟合的意思



$y=ax+b$

$y=ax^2+bx+c$

$y=ax+b$　　$y=ax^2+bx+c$

就是未知函数的拟合曲线。

2最小二乘法原理

观测值与拟合曲线值误差的平方和为最小。

y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4······	观测值
$\hat{y}_i$	$\hat{y}_0$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$······	拟合曲线值

误差平方和表达公式：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2$$

3:拟合1次曲线y=ax+b

根据公式: $Q=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2$

因为y=ax+b 所以 $Q=\sum(ax_i+b-y_i)^2$

根据最小二乘原理，为使Q有最小值，应满足如下式子：

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial b}=0$$

最后得到：

$$a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i+bn=\sum y_i$$

4:拟合2次曲线$y=ax^2+bx+c$

分析：

误差平方和表达公式：

$Q=\sum(\hat{y}_i-y_i)^2$

因为$y=ax^2+bx+c$ 所以 $Q=\sum(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$

又根据：Q分别对a、b、c求偏导值为0,最后求得公式为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial Q}{a}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1\left(x_k^2\right)=0 \\
\dfrac{\partial Q}{b}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1\left(x_k\right)=0 \\
\dfrac{\partial Q}{c}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1\left(1\right)=0
\end{cases}
$$

再将a,b,c移到求和外面，得到正规方程（线性方程组）

自己推导！

可推广到高维 自己练习

一般地，设 $f(x)$的近似函数为

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

寻求 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得

$$S(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{m}\left(p(x_i)-y_i\right)^2=\min$$

则称 $p(x)$为函数 $f(x)$的多项式拟合。

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足下列法方程组:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+l} a_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^{l} y_i, \quad l = 0, 1, 2, \cdots, n$$

求极值的方法：一阶导数为0！

例1： 设给定的观测数据如下，求线性拟合函数 $y=ax+b$。

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0	2	2	5	4

解：

$$a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i+bn=\sum y_i$$

xi平方和为:55 xi和为:15 xi乘yi和为:50 yi和为:13

代入公式，得到方程组为：

$$55a+15b=50$$

$$15a+5b=13$$

解得：$a=1.1 \quad b=-0.7$

所以：线性拟合曲线函数为：　　$y=1.1x-0.7$

例2：试用二次曲线 $y=ax^2+bx+c$ 拟合下列数据:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y_i	4	2	3	0	-1	-2	-5

求得方程组为:

$$\begin{cases} 196a + 28c = -7 \\ 28b = -39 \\ 28a + 7c = 1 \end{cases}$$

解得:

$b=-39/28 \quad a=-11/84 \quad c=2/3$

拟合曲线为:

$y=(-11x^2-117x+56)/84$

练习1

x	y
1.61	1.64
1.63	1.66
1.6	1.63
1.67	1.7
1.64	1.67
1.63	1.66
1.61	1.64
1.66	1.69
1.59	1.62
1.68	1.71
1.58	1.63

根据左侧数据求拟合曲线函数：$y=ax+b$

$$a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i+bn=\sum y_i$$

求所需系数，得到方程：

$$29.139a+17.9b=29.7076$$

$$17.9a+11b=18.25$$

通过全选主元高斯消去求得：

$a=0.912605$　　　　$b=0.174034$

所以线性拟合曲线函数为：

$$y=0.912605x+0.174034$$

练习2

根据下列数据求拟合曲线函数： $y=ax^2+b$

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

$$\sum x_i^4 a + \sum x_i^2 b = \sum x_i^2 y_i$$

$$\sum x_i^2 a + n b = \sum y_i$$

7277699a+5327b=369321.5

5327a+5b=271.4

$Y=0.050035x^2+0.972579$

课堂练习： 设给定的观测数据如下，求线性拟合函数 $y=ax^2+bx+c$。

x_i	1	2	3	4
y_i	0	2	2	5

答案:

求得方程组为:

$$354a+100b+30c=106$$
$$100a+30b+10c=30$$
$$30a+10b+4c=9$$

解得:

$a=0.25 \quad b=0.25 \quad c=-0.25$

拟合曲线为:

$$y=0.25x^2+0.25x-0.25$$

课堂练习

设给定观测数据如下，求线性拟合函数 $y=ax^2+bx+c$

上题答案

- X_i^4和354
- X_i^3和100
- X_i^2和=30
- X_i和10
- X_iy_i和30
- Y_i和9
- N=4
- $X_i^2y_i$和106

- 354a+100b+30c=106
- 100a+30b+10c=30
- 30a+10b+4c=9

- a=1/4
- b=1/4
- c=-1/4

$$\boxed{Y=0.25x^2+0.25x-0.25}$$

第五章 曲线拟合

◆最小二乘曲线拟合

◆非线性函数曲线拟合

- 指数函数曲线拟合

指数函数的曲线拟合

已知：$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$,

求指数函数的曲线拟合 $y = Ce^{Ax}$ --------------------(1)

$y = Ce^{Ax}$ 的线性化方法

对(1)两边取对数 $\ln(y) = Ax + \ln(C)$ --------(2)

引入变量变换：

$$Y = \ln(y), X = x, B = \ln(C) \qquad \text{--------(3)}$$

线性关系式 $Y = AX + B$ --------(4)

xy平面上的初始点集(x_k, y_k)变换成了XY平面上的点集

这个过程称作**数据线性化** $(X_k, X_k) = (x_k, \ln(y_k))$

再利用最小二乘曲线拟合公式即可得：

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} X_k^2\right)A + \left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)B = \sum_{k=1}^{N} X_k Y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)A + NB = \sum_{k=1}^{N} Y_k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A，B

$$C = e^B$$

例子：书上P204,例5.4

常用的非线性函数的数据线性化变换见表P207,5.2.3

作业

P202

1.胡克（Hooke）定律指出 $F = kx$,其中

F 是拉伸弹簧的拉力（单位为盎司），

x 是拉伸的长度（单位为英寸）。

根据下列试验数据，实用程序5.1求解拉伸长量k的近似值。

（a）（b）数据表见书上