课程总结

School of Computer Engineering and Science
Shanghai University

Instructor: Shengyu Duan

期末考试相关说明

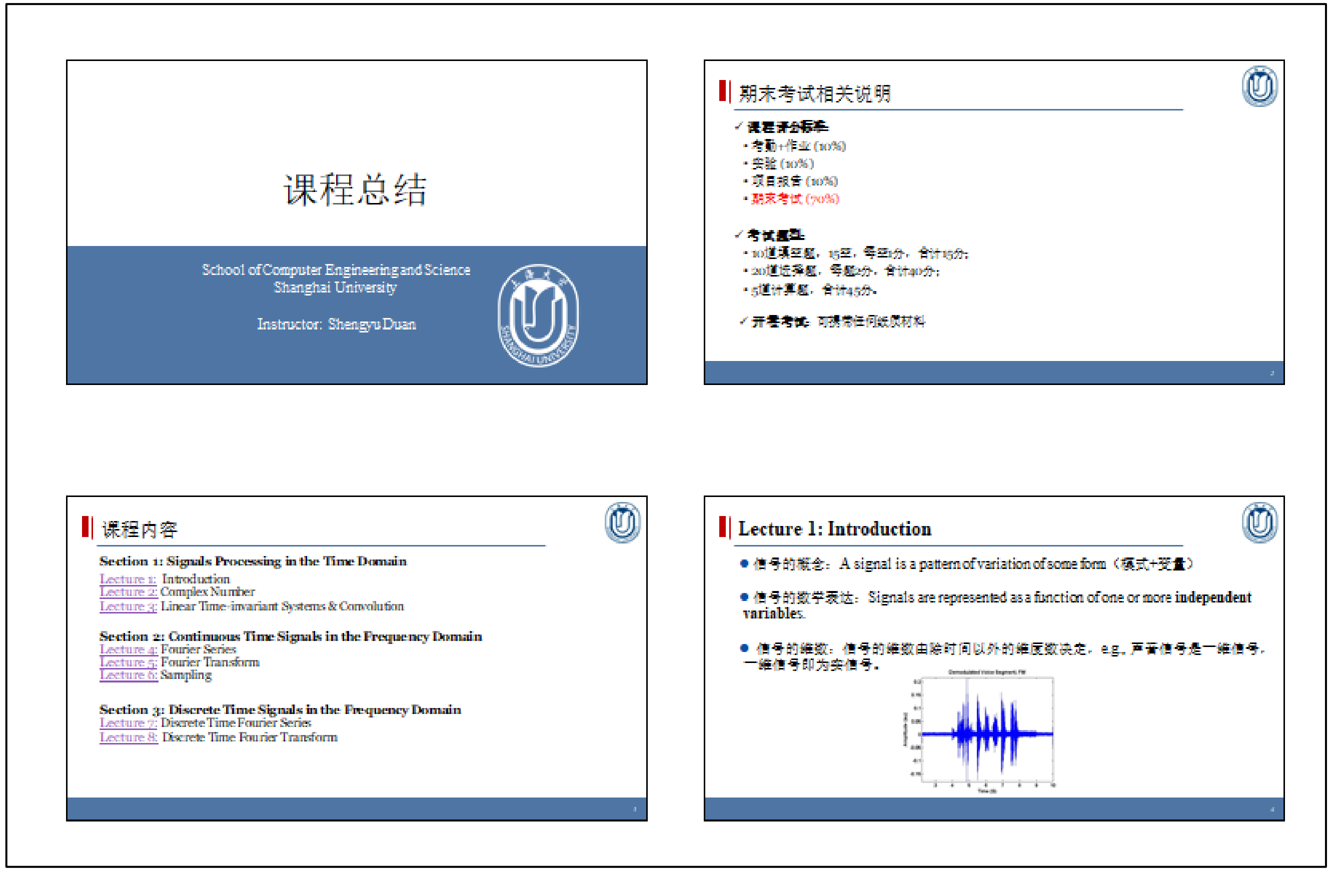
✓ **课程评分标准：**

- 考勤+作业 (10%)
- 实验 (10%)
- 项目报告 (10%)
- 期末考试 (70%)

✓ **考试题型：**

- 填空题，每空1分，共11分；
- 选择题，每题2分，共34分；
- 简答题，每题4分，共20分；
- 计算题，共35分。

✓ **开卷考试：**可携带任何纸质材料



课程内容

Section 1: Signals Processing in the Time Domain

Lecture 1: Introduction
Lecture 2: Complex Number
Lecture 3: Linear Time-invariant Systems & Convolution

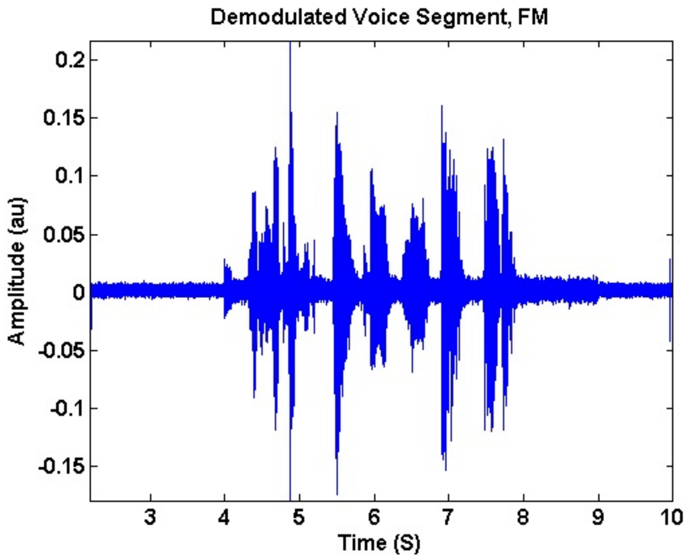
Section 2: Continuous Time Signals in the Frequency Domain
Lecture 4: Fourier Series
Lecture 5: Fourier Transform
Lecture 6: Sampling

Section 3: Discrete Time Signals in the Frequency Domain
Lecture 7: Discrete Time Fourier Series
Lecture 8: Discrete Time Fourier Transform

两种空间域
四种信号类型
五种转换关系

Lecture 1: Introduction

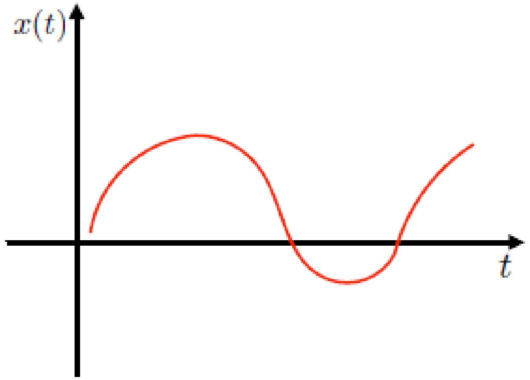
- 信号的概念：A signal is a pattern of variation of some form（模式+变量）
- 信号的数学表达：Signals are represented as a function of one or more **independent variables**.
- e.g., 声音信号是一维信号，一维信号即为实信号。

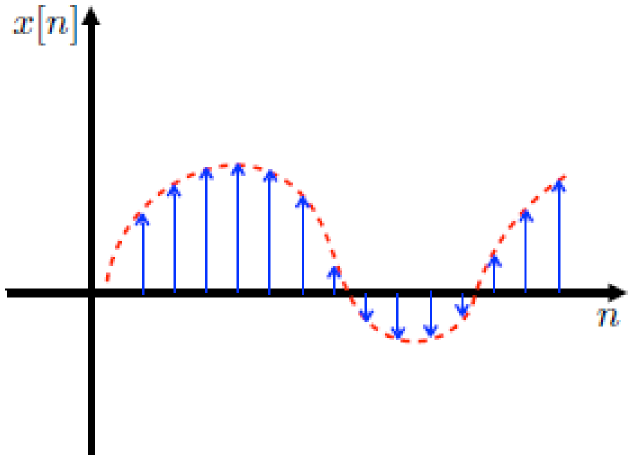


Lecture 1: Introduction

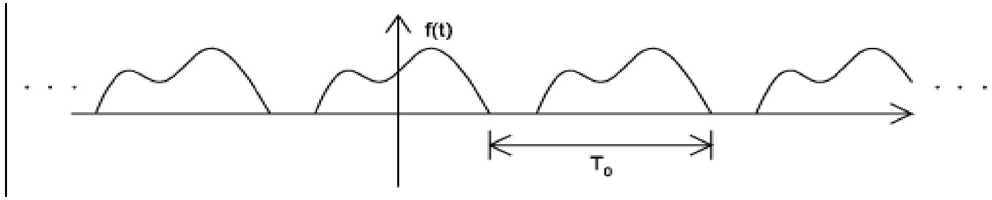
● 信号的分类：

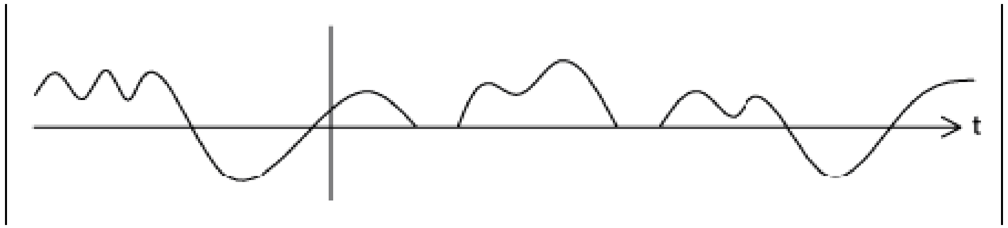
1. 连续时间信号 vs. 离散时间信号





2. 周期信号 vs. 非周期信号





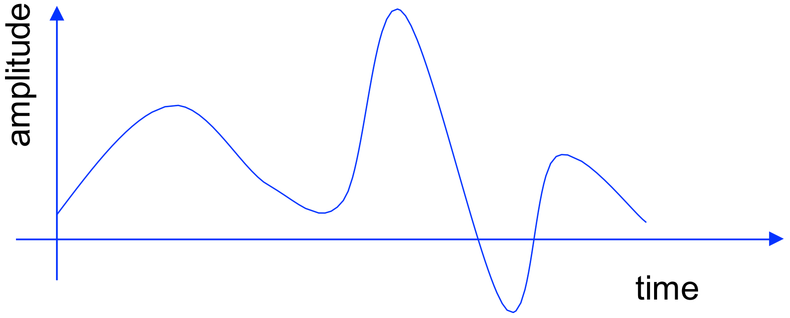
●主观性：连续时间信号是时间间隔无限趋近于0的离散时间信号；
非周期信号是周期趋于无穷大的周期信号。

Lecture 1: Introduction

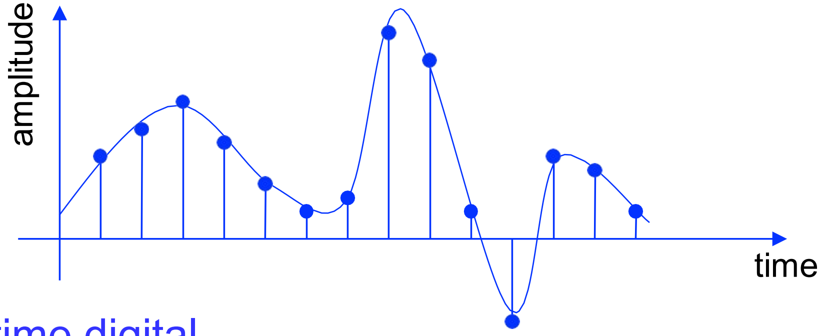
● 信号的分类（具有主观性）：

3. 模拟信号 vs. 数字信号（由信号幅度的连续性决定）

– Continuous time analog

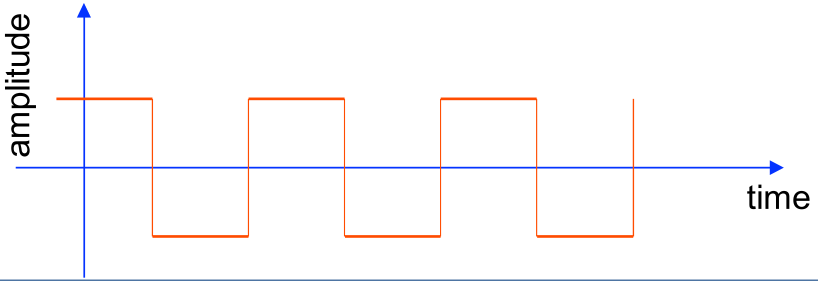


• Discrete time analog



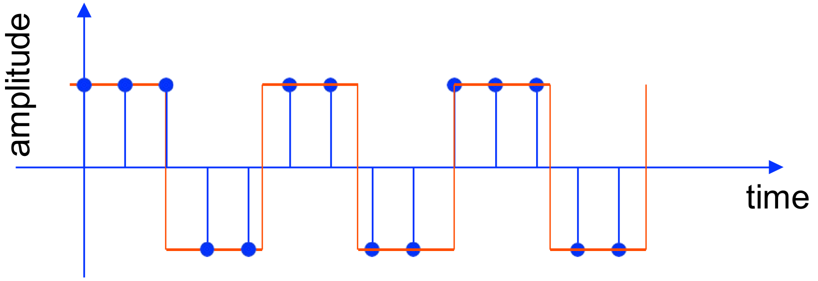
– Continuous time digital (or quantized)

- binary sequence, where the values of the function can only be one or zero.



• Discrete time digital

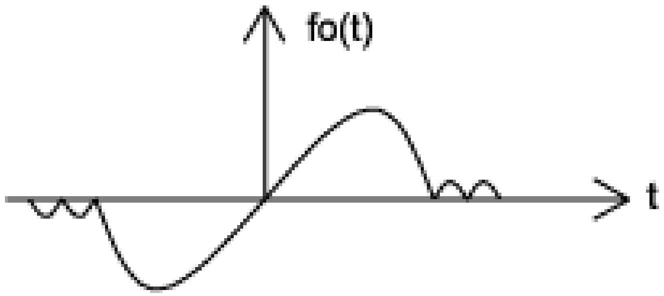
- binary sequence, where the values of the function can only be one or zero.

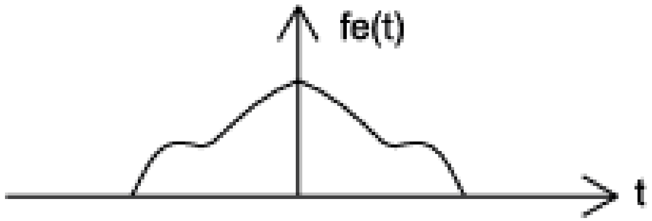


Lecture 1: Introduction

- 信号的分类：

4. 奇信号 vs. 偶信号





- 信号奇偶分解：

信号$x(t)$的偶信号部分：$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$

信号$x(t)$的奇信号部分：$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$

Lecture 1: Introduction

- 信号的能量：

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- 信号的功率：

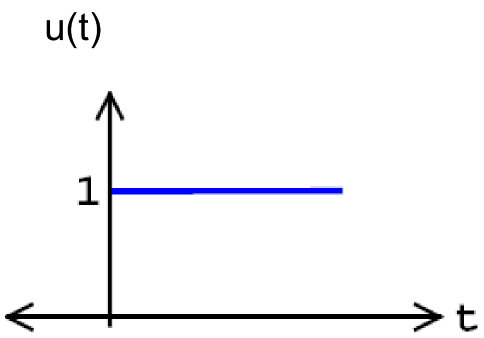
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |x(t)|^2 dt$$

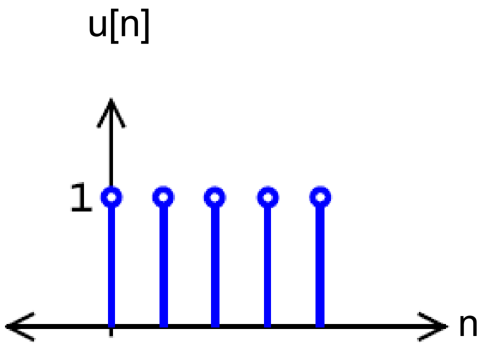
- 一般，我们对非周期信号求能量，对周期信号求功率

Lecture 1: Introduction

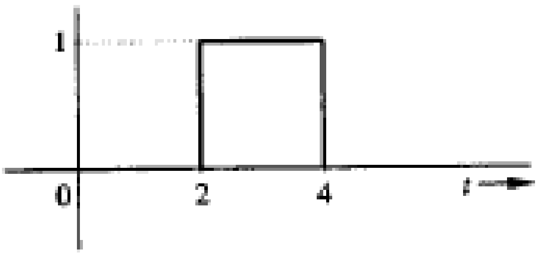
- 几种典型信号：

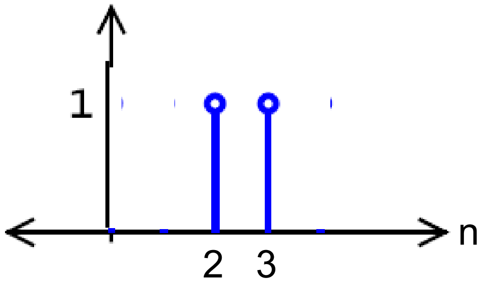
1. 单位阶跃信号





易错点： $f(t)=u(t-2)-u(t-4)$ $f[n]=u[n-2]-u[n-4]$





Lecture 1: Introduction

- 几种典型信号：

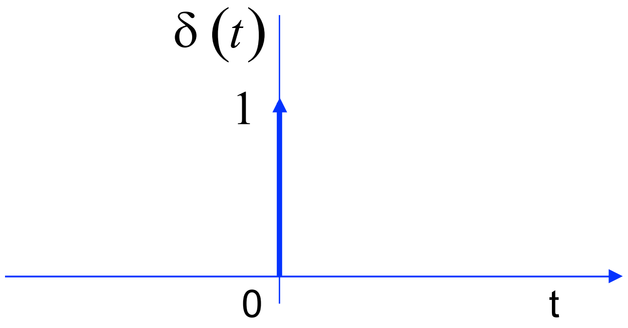
2. 单位冲激信号（信号面积等于1）

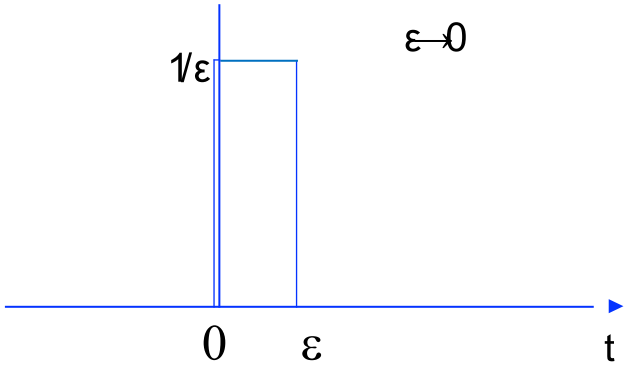
连续时间单位冲激信号

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

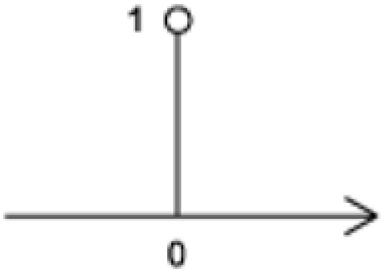
$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \le t \le \varepsilon, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$





离散时间单位冲激信号

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ if } n = 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$



Lecture 1: Introduction

- 几种典型信号：
  - 单位阶跃信号与单位冲激信号的关系

连续时间：

- 单位冲激信号是单位阶跃信号的一阶微分

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u(t)$$

离散时间：

- 单位冲激信号是单位阶跃信号的一阶差分

$$\delta\ [n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta\ [n-k]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta\ [m]$$

Lecture 1: Introduction

- 重要公式：欧拉公式

$$cos\left(\omega t\right)=\frac{e^{jwt}+e^{-(jwt)}}{2}$$

$$sin\left(\omega t\right)=\frac{e^{jwt}-e^{-(jwt)}}{2j}$$

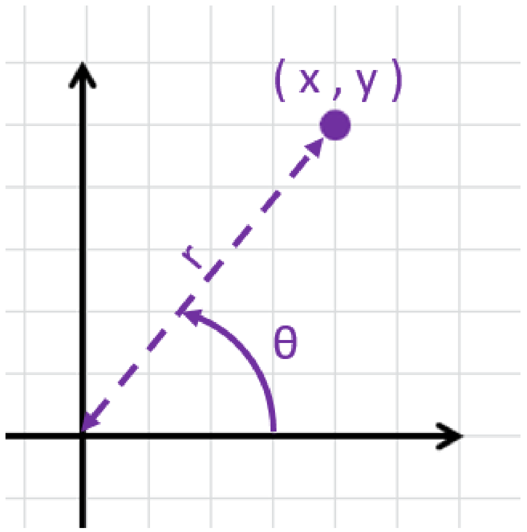
$$e^{jwt}=cos\left(\omega t\right)+jsin\left(\omega t\right)$$

Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 复数的表示形式：$z = x + jy$，复数信号表示二维信号；
- 复数的直角坐标/极坐标表示：

$$\underline{x + jy} = r\cos\theta + jr\sin\theta = \underline{re^{j\theta}}$$

直角坐标　　　　　　　　　　　　　　　　　　极坐标



$$\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \mathrm{atan2}(y,x) \end{cases}$$

Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 复指数信号基波频域与基波周期：

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad \text{fundamental period} \quad T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

$$\text{fundamental frequency} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 : rad / \sec$$

- 复指数信号的谐波信号：

$$\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \quad \text{Harmonical period} \quad T_k = \frac{2\pi}{|k\omega_0|}$$

$$\text{Harmonical frequency} \quad |k\omega_0|$$

- 要求会计算复指数信号或正余弦信号的基波周期

- 重要概念：

对离散时间信号，频率为ω_0的复指数信号与频率为ω_0 +m.2π的复指数信号是同一个信号（m为整数）；对连续时间信号，上述关系不成立。

Discrete-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n} = \cos(\omega_0 n + m\cdot 2\pi\, n) + j\sin(\omega_0 n + m\cdot 2\pi\, n)$$

$$= \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n) \ \ (\text{as } m.n \text{ is an integer})$$

$$= e^{j\omega_0 n}$$

Continuous-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)t} = \cos(\omega_0 t + m\cdot 2\pi\, t) + j\sin(\omega_0 t + m\cdot 2\pi\, t)$$

$$\neq \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \ \ (\text{as } m.t \text{ may not be an integer})$$

$$= e^{j\omega_0 t}$$

- 上述概念的意义：

For periodic discrete-time:

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n}=e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(k\omega_0+2\pi)n}=e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(k\omega_0+N\omega_0)n}=e^{j((k+N)\omega_0)n}=e^{jk\omega_0 n}$$

对周期为N的离散时间复指数信号，第k+N次谐波与第k次谐波相同

=> 对周期为N的离散时间信号进行傅里叶级数展开，则只有N个不同的频率分量，频域表示具有周期性。

Lecture 2: Complex Numbers & Signal Property

- 上述概念的另一个意义：

判断离散时间信号是否具有周期性：

$$e^{j(\omega_0+m\cdot 2\pi)n}=e^{j\omega_0 n}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(\omega_0 n+m\cdot 2\pi)}=e^{j\omega_0 n}$$

若具有周期性(周期为N)，则:

$$e^{j(\omega_0 n+m\cdot 2\pi)}=e^{j\omega_0 n}=e^{j(\omega_0 n+\omega_0 N)}$$

对具有周期性的离散时间信号, $\omega_0 N=2\pi m$, 则基波频域满足$\omega_0=2\pi\left(\frac{m}{N}\right)$（$m,N$为整数)

例：$x[n]=\cos(\frac{1}{8}n-\pi)$不是周期信号，因为$\omega_0=\frac{1}{8}$，不满足$\omega_0=2\pi\left(\frac{m}{N}\right)$（$m,N$为整数
)

Lecture 3: Convolution and LTI Systems

- 卷积的定义：

卷积和：$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

卷积积分：$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

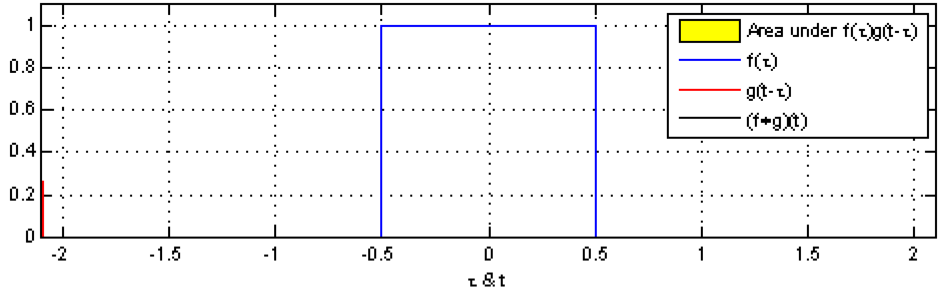
- 卷积的意义：计算线性时不变系统的输出

$x[n]$、$x(t)$为输入信号，$h[n]$、$h(t)$为系统的单位冲激响应（输入为单位冲激信号时系统的输出），则系统的输出信号利用上述卷积求解。

Lecture 3: Convolution and LTI Systems

- 卷积的动态过程：反转再平移，直到两者出现重叠，计算重叠部分相乘、累加或积分结果。

In this example, the red-colored "pulse", $g(\tau)$, is an even function ($g(-\tau) = g(\tau)$), so convolution is equivalent to correlation. A snapshot of this "movie" shows functions $g(t-\tau)$ and $f(\tau)$ (in blue) for some value of parameter t, which is arbitrarily defined as the distance from the $\tau = 0$ axis to the center of the red pulse. The amount of yellow is the area of the product $f(\tau) \cdot g(t-\tau)$, computed by the convolution/correlation integral. The movie is created by continuously changing t and recomputing the integral. The result (shown in black) is a function of t, but is plotted on the same axis as τ, for convenience and comparison.



Lecture 3: Convolution and LTI Systems

- 系统性质判断

1） 无记忆系统：系统的输出完全取决于当前时刻的输入；

2）时不变系统：系统特性不随时间改变，即如果系统对输入信号$x(t)$的输出是$y(t)$，则系统对输入信号$x(t-t_0)$的输出为$y(t-t_0)$；

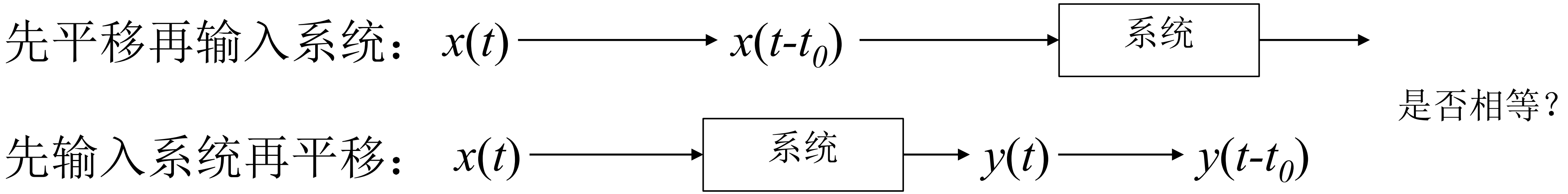
3）线性系统：如果输入信号是两个信号的加权和，那么输出信号也是这两个输入信号对应输出的加权和；

4）因果系统：系统的输出只取决于现在的输入及过去的输入；

5）稳定系统：当系统的输入为在任意时间都有界时，系统的输出也是有界的。

Lecture 3: Convolution and LTI Systems

- 系统时不变性的判断



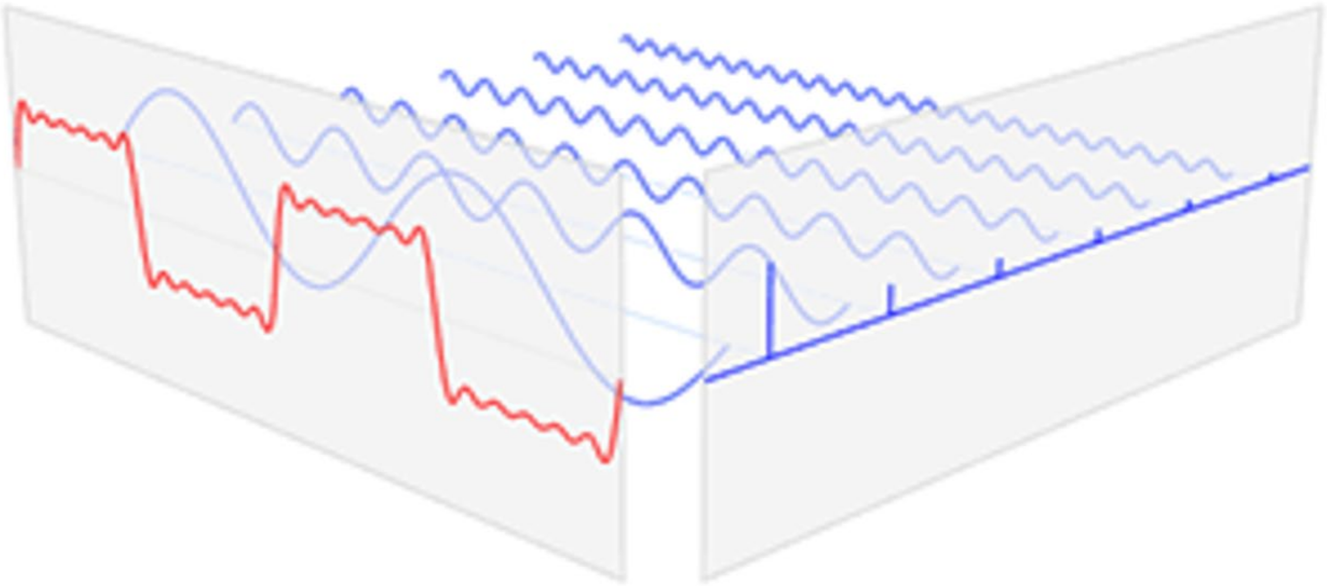
例：系统$y[n]=x[-n]$，先平移再输入：平移后$x[n]$变为$x[n-n_0]$，再输入得$x[-n-n_0]$；
先输入再平移：输入后得$x[-n]$，再平移得变为$x[-n+n_0]$，因此该系统时变。

<u>诀窍：凡是系统对自变量t或n进行尺度变化，系统一定时变。</u>

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶的核心思想：任意连续时间周期信号都可表示成若干个相互呈谐波关系的正余弦信号的线性组合

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega_0 t) + B_k\sin(k\omega_0 t)]$$



Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间的周期信号傅里叶级数核心公式：

Fourier series representation （傅里叶级数表示）：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Fourier series coefficient（傅里叶级数系数）：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间周期信号傅里叶级数的三种表示形式：

① 正余弦形式：

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)]$$

② 复指数形式：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, a_k = \begin{cases} \dfrac{A_{-k} + jB_{-k}}{2} & k < 0 \\ A_0 & k = 0 \\ \dfrac{A_k - jB_k}{2} & k > 0 \end{cases}$$

③ 幅度-相位形式：

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), a_k = A'_k e^{j\theta_k}$$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间周期信号傅里叶级数展开收敛条件：该信号在一个周期内的能量为有限值

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

- 收敛性的判断方法：狄利赫里条件：

A signal can be represented by Fourier series expansion, if

(1) it is absolutely integrable,

(2) it has finite number of maxima & minima in a period

(3) it has finite number of discontinuities in a period

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间周期信号傅里叶级数的各种推广：

Periodicity

Continuity	**Periodic**	**Aperiodic**
Continuous	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	
Discrete		

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间周期信号傅里叶级数到连续时间非周期信号傅里叶变换：

Periodicity

Continuity		**Periodic**		**Aperiodic**
	Continuous	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$\xrightarrow{T \to \infty,\ \omega_0 \to 0}$	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
	Discrete			

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 连续时间周期信号傅里叶级数到离散时间周期信号傅里叶变换：

Periodicity

Continuity		Periodic	Aperiodic
	Continuous	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
	Discrete	k具有周期性 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$	

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 离散时间周期信号傅里叶级数到离散时间非周期信号傅里叶变换：

Periodicity

Continuity	Periodic	Aperiodic
Continuous	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
Discrete	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

$$\xrightarrow{N \to \infty,\ \omega_0 \to 0}$$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 时域连续、离散、周期、非周期对应频域特点：

Periodic in time domain $\leftrightarrow$ Discrete in frequency domain

Aperiodic in time domain $\leftrightarrow$ Continuous in frequency domain

Continuous in time domain $\leftrightarrow$ Aperiodic in frequency domain

Discrete in time domain $\leftrightarrow$ Periodic in frequency domain

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换转换关系：

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

● 傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

	连续时间傅里叶级数 $\boldsymbol{x(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k}$	连续时间傅里叶变换 $\boldsymbol{x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)}$	离散时间傅里叶级数 $\boldsymbol{x[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k}$	离散时间傅里叶变换 $\boldsymbol{x[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})}$
线性	$\mathrm{A}x(t)+By(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}Aa_k+Bb_k$	$\mathrm{a}x(t)+by(t)\overset{F}{\leftrightarrow}aX(j\omega)+bY(j\omega)$	$\mathrm{A}x[n]+By[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}Aa_k+Bb_k$	$\mathrm{a}x[n]+by[n]\overset{F}{\leftrightarrow}aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
时移	$x(t-t_0)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_ke^{-jk\omega_0t_0}$	$x(t-t_0)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$	$x[n-n_0]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_ke^{-jk\omega_0n_0}$	$x[n-n_0]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega n_0}$
频移	$x(t)e^{jM\omega_0t}\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{k-M}$	$x(t)e^{j\omega_0t}\overset{F}{\leftrightarrow}X(j(\omega-\omega_0))$	$x[n]e^{jM\omega_0n}\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{k-M}$	$x[n]e^{j\omega_0n}\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
时间反转	$x(-t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{-k}$	$x(-t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(-j\omega)$	$x[-n]\overset{FS}{\leftrightarrow}a_{-k}$	$x[-n]\overset{F}{\leftrightarrow}X(e^{-j\omega})$
尺度变换	$x(\alpha t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k$ （此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\mathrm{k}\omega_0\alpha$）	$x(at)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{\vert a\vert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$x_{(m)}[n]\overset{FS}{\leftrightarrow}\frac{1}{m}a_k$ （m为大于0的整数，此时a_k对应的频率由$\mathrm{k}\omega_0$变为$\frac{\omega_0}{m}\alpha$）	$x_{(k)}[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{jk\omega}\right)$ （k为大于0的整数）
卷积	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\overset{FS}{\leftrightarrow}Ta_kb_k$	$x(t)*h(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)H(j\omega)$	$\sum_{r=\langle N\rangle}x[r]y[n-r]\overset{FS}{\leftrightarrow}Na_kb_k$	$x[n]*h[n]\overset{F}{\leftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$
乘法	$\mathrm{x}(t)y(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}a_k*b_k$	$s(t)p(t)\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}[S(j\omega)*P(j\omega)]$	$\mathrm{x}(t)y(t)\overset{FS}{\leftrightarrow}\sum_{l=\langle N\rangle}a_lb_{k-l}$	$x_1[n]x_2[n]\overset{F}{\leftrightarrow}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
帕斯瓦尔关系	$\frac{1}{T}\int_0^T\vert x(t)\vert^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\vert a_k\vert^2$	$\int_{-\infty}^{\infty}\vert x(t)\vert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vert X(j\omega)\vert^2d\omega$	$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\vert x[n]\vert^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\vert a_k\vert^2$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\vert x[n]\vert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\vert X(e^{j\omega})\vert^2d\omega$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

其它重要性质：

1. 信号奇偶分解：

   信号$x(t)$的偶信号部分：$x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$

   信号$x(t)$的奇信号部分：$x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

2. 奇偶共轭性质：

   信号时域表示为实且偶，则频域表示也为实且偶；

   信号时域表示为实且奇，则频域表示也为纯虚且奇。

3. 对偶性：

   连续时间傅里叶变换的对偶性：$x(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)=X'(\omega)$

   $$X'(t)\overset{F}{\leftrightarrow}2\pi x(-\omega)$$

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换常用性质

4. 连续时间傅里叶变换

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega)$（高通）

频域微分： $\mathrm{t}x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{j}\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$（低通）

5. 离散时间傅里叶变换

时域一阶差分*： $x[n] - x[n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)(1 - e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega$（高通）

频域微分：$nx[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$

时域累加*：$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X\left(e^{j\omega}\right) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$ （低通）

Lecture 4, 5, 7, 8: 傅里叶级数与傅里叶变换

表 4.2　基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数（若为周期的）
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega-k\omega_0)$	a_k
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1=1$ $a_k=0$，　其余 k
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$ $a_k=0$，　其余 k
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	$a_1=-a_{-1}=\frac{1}{2j}$ $a_k=0$，　其余 k
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0=1$，　$a_k=0$，　$k\neq 0$ （这是对任意 $T>0$ 选择的傅里叶级数表示）
周期方波 $x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & T_1<\lvert t\rvert\leqslant\frac{T}{2}\end{cases}$ 和 $x(t+T)=x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin k\omega_0T_1}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$	$\frac{\omega_0T_1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0T_1}{\pi}\right)=\frac{\sin k\omega_0T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k=\frac{1}{T}$　对全部 k
$x(t)\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T_1\\ 0, & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t)$，$\mathcal{Re}\{a\}>a$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$te^{-at}u(t)$，$\mathcal{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$， $\mathcal{Re}\{a\}>0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

表 5.2　基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}1, & k=m,m\pm N,m\pm 2N,\cdots\\ 0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\cos\omega_0 n$	$\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi m}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=\pm m,\pm m\pm N,\pm m\pm 2N,\cdots\\ 0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$\sin\omega_0 n$	$\frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)-\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)\}$	(a) $\omega_0=\frac{2\pi r}{N}$ $a_k=\begin{cases}\frac{1}{2j}, & k=r,r\pm N,r\pm 2N,\cdots\\ -\frac{1}{2j}, & k=-r,-r\pm N,-r\pm 2N\cdots\\ 0, & \text{其余 } k\end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 无理数⇒信号是非周期的
$x[n]=1$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$	$a_k=\begin{cases}1, & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0, & \text{其余 } k\end{cases}$
周期方波 $x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\ 0, & N_1<\lvert n\rvert\leqslant N/2\end{cases}$ 和 $x[n+N]=x[n]$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1+\frac{1}{2})]}{N\sin[2\pi k/2N]}$，$k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots$ $a_k=\frac{2N_1+1}{N}$，$k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k=\frac{1}{N}$ 对全部 k
$a^n u[n]$，$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$	—
$x[n]\begin{cases}1, & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\ 0, & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\lvert\omega\rvert\leqslant W\\ 0, & W<\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$ $X(\omega)$周期的，周期为 2π	—
$\delta[n]$	1	—

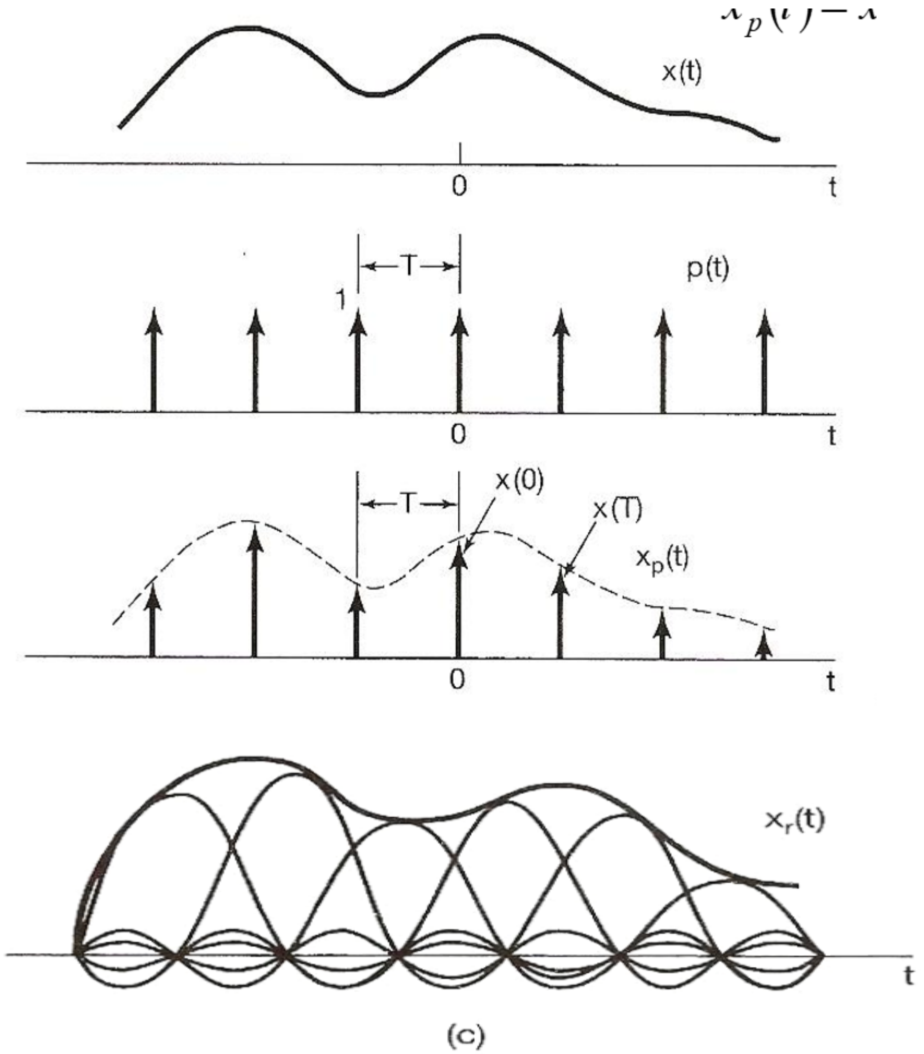
续表 5.2

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$	—
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n]$，$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n]<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$	—

- 傅里叶级数、傅里叶变换常用变换关系

Lecture 6: Sampling

- 信号采样的数学模型：冲激串采样
- 信号重建的方法：低通滤波器，时域表现为内插



Lecture 6: Sampling

- 奈奎斯特采样定理：

- A band-limited （带限） continuous-time signal can be sampled and perfectly reconstructed from its samples if the waveform is sampled over twice as fast as it's highest frequency component.

The highest frequency of $x(t)$: ω_M

The highest sampling frequency that may cause aliasing effect (Nyquist rate奈奎斯特率):

$$\omega_s = 2\omega_M$$

- 混叠现象： When $\omega_s < 2\omega_M$, spectrum overlapped, frequency components confused, resulting in aliasing effect, such that the sampled signal can’t be reconstructed by low-pass filtering.

总结

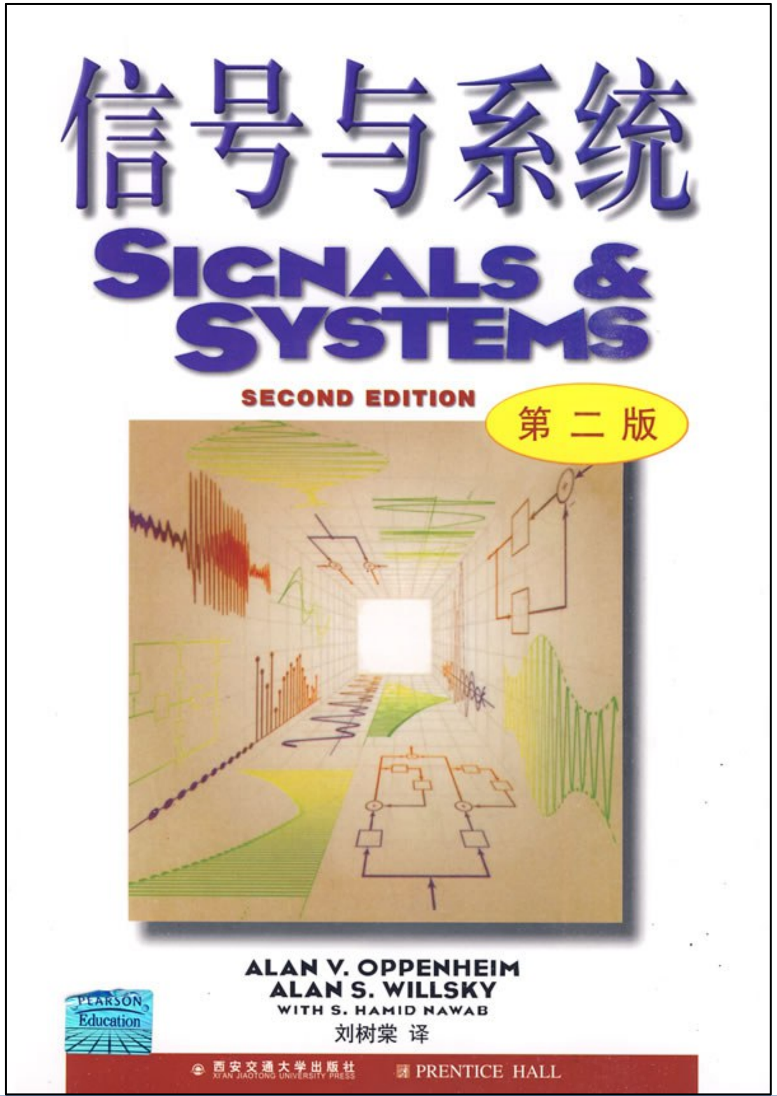
课程要点：

- 复数的直角坐标、极坐标表示；复指数函数的直角坐标、极坐标表示；
- 对系统的如下性质进行判断：记忆性、因果性、稳定性、时不变性、线性；
- 对信号的周期性进行判断
- 卷积运算
- 不同傅里叶级数表示形式的相互转换；
- 周期信号的傅里叶级数表示；
- 非周期信号的傅里叶变换与逆变换；
- 利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出。
- 离散时间周期信号傅里叶级数表示；
- 离散时间非周期信号傅里叶变换与逆变换；
- 傅里叶级数与傅里叶变换常用性质与变换关系；
- 计算奈奎斯特率。

总结

更多习题、例题参见参考书籍课后习题基本题（本书包含部分基本题的答案）

《信号与系统》（第二版），Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid, 刘树棠（译），西安交通大学出版社



See you soon!