第五章　大数定理和中心极限定理

毛雪峰

上海大学理学院数学系

6月1日—6月3日

内容介绍

Outline

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得 $1 \geq P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n \to \infty$,即得结论.

5.1.1 弱大数定理(辛钦大数定理)

设$X_1, X_2, \cdots$是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望$E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$. 作前n个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu|<\varepsilon\}=1.$$

证明: $\because E(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k)=\frac{1}{n}(n\mu)=\mu$

由独立性$D(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D(X_k)=\frac{1}{n^2}(n\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}$

又由切比雪夫不等式得$1\geq P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$

令$n\to\infty$,即得结论.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有
$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$
则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值μ的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$,当n很大时它们的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 很可能接近于μ.

5.1.3 依概率收敛的定义

设$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$是一个随机变量序列, α是一个常数. 若对于任意的正数ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$$

则称序列$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$依概率收敛于$\alpha$, 记为$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$.

5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu (k = 1, 2, \cdots)$, 则序列

$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k | n = 1, 2, \cdots\}$依概率收敛于$\mu$, 即$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

5.1.5 伯努利大数定理

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数$\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \text{ 或}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

5.1.6 伯努利大数定理的含义

- 对于任意的$\varepsilon > 0$, 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件$\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \varepsilon\}$是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数ε,在n充分大的时候,频率$\frac{f_A}{n}$与概率p的偏差小于ε实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

Outline

5.2.1 独立同分布的中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差: $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \cdots)$, 则随机变量之和$\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

5.2.2 独立同分布中心极限定理的内涵

均值为μ,方差为$\sigma^2 > 0$的独立同分布的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的算术平均$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$,当$n$充分大时,近似地服从均值为$\mu$,方差为$\frac{\sigma^2}{n}$的正态分布.

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$近似服从$N(0,1)$. 所以

$$\begin{aligned}P\{V>105\}&=P\Big\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\Big\}\\&=1-P\Big\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\Big\}\\&\approx1-\Phi\Big(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\Big)=1-\Phi(0.387)=0.348.\end{aligned}$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$

$$=1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$\approx1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$，设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$

$$=1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$\approx1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$

$$=1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$\approx1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$，设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以

$$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$=1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$

$$=1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\leq\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$\approx1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以

$$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$
$$=1-P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\leq\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$
$$\approx 1-\Phi(\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k(k=1,\cdots,20)$,设它们是相互独立的随机变量,且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布. 记$V=\sum\limits_{k=1}^{20}V_k$,求$P\{V>105\}$的近似值.

$E(V_k)=5, D(V_k)=\frac{100}{12}, k=1,2,\cdots,20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知$Z=\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$ 近似服从$N(0,1)$. 所以

$$
\begin{aligned}
P\{V>105\} &= P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}} > \frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\} \\
&= 1-P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}} \le \frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\} \\
&\approx 1-\Phi(\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}) = 1-\Phi(0.387) = 0.348.
\end{aligned}
$$

5.2.3 李雅普诺夫(Lyapunov)定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立, 它们具有数学期望和方差$E(X_k) = \mu_k, D(X_k) = \sigma_k^2 > 0, k = 1, 2, \cdots$, 记$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. 若存在正数$\delta$, 使得当$n \to \infty$时, $\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0$,

则$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$的分布函数$F_n(x)$对于任意x, 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

5.2.4 李雅普诺夫定理的含义

- 无论各个随机变量$X_k(k=1,2,\cdots)$服从什么分布，只要满足定理的条件，那么他们的和$\sum_{k=1}^{n} X_k$当n很大时，就近似地服从正态分布.
- 这就是为什么服从正态分布的随机变量在概率论中占有重要地位的一个基本原因.

5.2.5 棣莫弗－拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗－拉普拉斯定理可近似求得

$$P\{29500\le X\le 30500\}$$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim 30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得

$$P\{29500\le X\le 30500\}$$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得

$$P\{29500\le X\le 30500\}$$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$，若船舶遭受了90000次波浪冲击，问其中有29500 ∼ 30500次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解：由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$，利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得

$$P\{29500\le X\le 30500\}$$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得

$$P\{29500\le X\le 30500\}$$
$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\} = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得 $P\{29500\le X\le 30500\}$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意x, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有$29500\sim 30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解: 由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$, 利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得 $P\{29500\leq X\leq 30500\}$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量$\eta_n(n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p(0<p<1)$的二项分布，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3^o的概率为$p=1/3$，若船舶遭受了90000次波浪冲击，问其中有$29500\sim 30500$次纵摇角度大于3^o的概率是多少?

90000次波浪冲击中纵摇角度大于3^o的次数记为X

解：由题意$X\sim b(90000,\frac{1}{3})$，利用棣莫弗—拉普拉斯定理可近似求得 $P\{29500\le X\le 30500\}$

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx\Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\dfrac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\dfrac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0, 1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$ 近似服从 $N(0, 1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\dfrac{X - 400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\dfrac{Y - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k，则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

，计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数，则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\frac{X - 400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗一拉普拉斯定理可知 $\frac{Y - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率；
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k，则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解：X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

，计算得$E(X_k) = 1.1$，$D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\dfrac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数，则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\dfrac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言, 来参加家长会的家长人数是一个随机变量,设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生, 设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X=X_1+\cdots+X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k)=1.1$, $D(X_k)=0.19, k=1,2,\cdots,400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\dfrac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数, 则$Y\sim b(400,0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\dfrac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}$ 近似服从 $N(0,1)$.

例 5.2.3 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05, 0.8, 0.15. 若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立、且服从同一分布.
(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

记第k个学生参加会议的家长人数为X_k, 则$X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: X_k的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

, 计算得$E(X_k) = 1.1$, $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400$. 由独立同分布的中心极限定理可知 $\frac{X - 400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$ 近似服从 $N(0, 1)$.

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数，则$Y \sim b(400, 0.8)$. 由棣莫弗—拉普拉斯定理可知 $\frac{Y - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}$ 近似服从 $N(0, 1)$.