上海大学 学年度春季学期试卷（A 卷）

成绩	

课程名:编码理论 课程号: 08305093 学分:3（闭卷）

应试人声明：
我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 应试人学号应试人所在院系

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

得分	

一、判断题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 设$\boldsymbol{Z}_8$表示模 8 的等价类的集合，$\oplus$和$\otimes$分别表示模 8 的加法和乘法运算，

则$<\boldsymbol{Z}_8,\oplus,\otimes>$是一个有限域。（ X ）

2. 设F是有 16 个元素的有限域，则F的特征一定是 2。（ √ ）

3.线性分组码一定等价于一个系统码。（ √ ）

4.所有的本原多项式都是不可约多项式。（ √ ）

5. 所有的不可约多项式都是本原多项式。（X）

得分	

选择题（5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. 不存在个元素的有限域。（B）

A.23 B. 24 C.25 D. 27

2. 设二元线性分组码C的一致校验矩阵是一个 4×7 矩阵，则C有个码字。（B）

A.7 B. 8 C. 16 D. 2^7

3.设C是一个三元（5，3）线性分组码，则C的校验矩阵是一个矩阵。（ B ）

A. 3 X 5 B. 2 X 5 C. 5 X 3 D. 5 X 2

4. 设收到的字是$\mathrm{r}=(11111010)$，则根据极大似然译码方法，应该将该字译为下面的哪个码字？（A）

   A. $\mathrm{c}=(11011010)$　　B. $\mathrm{c}=(10101010)$

   C. $\mathrm{c}=(10110010)$　　D. $\mathrm{c}=(10011010)$

5.在有限域$<\boldsymbol{Z}_{13},\oplus,\otimes>$中，下列等式成立的是：（A）

   A. $5^{-1}=8$　B. $6^{-1}=4$

   C. $5^{-1}=4$D. $6^{-1}=8$

得分	

三、（10 分）考察$\boldsymbol{Z}_2[x]$中多项式$f_1(x)=x^3+x^2+1$和$f_2(x)=x^3+1$,

（1）判断$f_1(x)$和$f_2(x)$哪个是$\boldsymbol{Z}_2[x]$上的不可约多项式；（2 分）

（2）将找出的不可约多项式记为$f(x)$，写出$\boldsymbol{Z}_2[x]$关于模$f(x)$的剩余类的集合$\boldsymbol{Z}_2[x]_{f(x)}$的全部元素；（2 分）

（3）在集合$\boldsymbol{Z}_2[x]_{f(x)}$上定义加法运算⊕和乘法运算⊗分别为:

$$a(x)\oplus b(x)=a(x)+\ b(x)$$

$$a(x)\otimes b(x)=(a(x)b(x))_{f(x)}$$

请求出$(x^2+1)\oplus(x^2+x+1)$和$(x^2+1)\otimes(x^2+x+1)$的值。（4 分）

（4）求出x^2+x关于乘法运算⊗的逆元；（2 分）

参考答案：

（1）$f_1(x)$是$\boldsymbol{Z}_2[x]$上的不可约多项式。（2 分）

（2）$\boldsymbol{Z}_2[x]_{f(x)}=\{0,1,x,x+1,x^2,\ x^2+1,\ x^2+x,\ x^2+x+1\}$。（2 分）

（3）$(x^2+1)\oplus(x^2+x+1)=x$；（2 分）

$(x^2+1)\otimes(x^2+x+1)=(x^4+x^3+x+1)_{f(x)}=1$。（2 分）

（4）$(x^2+x)^{-1}=x$。（2 分）

得分	

四、（10 分）将域$\mathbf{F}_3$上的 5×5 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\2&0&1&2&1\\0&0&2&1&2\\1&0&1&2&1\\0&0&1&2&2\end{pmatrix}$，化为与之**行等价**的阶梯形矩阵$A_0$，

其中 A_0 形如：$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&*\cdots*&0&*\cdots*&0&*\cdots*&0&*\cdots*\\0&\cdots&0&0&0\cdots0&1&*\cdots*&0&*\cdots*&0&*\cdots*\\0&\cdots&0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&1&*\cdots*&0&*\cdots*\\\cdots&&&&\cdots&&&\cdots&&&\cdots\\0&\cdots&0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&1&*\cdots*\\0&\cdots&0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&0&0\cdots0\\\cdots&&&&\cdots&&&\cdots&&&\cdots\\0&\cdots&0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&0&0\cdots0&0&0\cdots0\end{pmatrix}$；（7 分）

并求出矩阵A的秩。（3 分）

参考答案：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\2&0&1&2&1\\0&0&2&1&2\\1&0&1&2&1\\0&0&1&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&2&1&2\\0&0&2&1&2\\0&0&1&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&2\\0&0&1&2&2\\0&0&2&1&2\\0&0&2&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$（7 分）

矩阵 A 的秩为 3。（3 分）

得分	

五、（10 分）设C是一个二元（6,3）线性码，其生成矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0\end{pmatrix},$$

（1）求出其一致校验矩阵 H；（6 分）

（2）C 是系统码吗？如果不是请求出与 C 等价的系统码 C’的生成矩阵 G’。（4 分）

参考答案：

（1）G 通过初等行变换可化为下列阶梯型矩阵 $G_0=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$（3 分）

一致校验矩阵 $H=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&1\end{pmatrix}$（3 分）

（2）不是。

与 C 等价的系统码 C’的生成矩阵为

$$G'=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$（4 分）

得分	

六、（10 分）用辗转相除法求 $\boldsymbol{Z}_3[x]$中多项式

$$a(x)=x^4+x^2+x+1 \quad 和 b(x)=x^3+x+1$$

的最高公因式$\gcd\big(a(x),b(x)\big)$，（5 分）

并将 $\gcd\big(a(x),b(x)\big)$表示成$a(x)$和$b(x)$的线性组合。（5 分）

参考答案：

$a(x)=xb(x)+1$

$\gcd\big(a(x),b(x)\big)=1$ （5 分）

$1=a(x)+2x\,b(x)$（5 分）

得分	

七、（10 分）某二元（6，3）线性分组码的一致校验矩阵为

$$H=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

（1）求该码的生成矩阵；（5 分）

（2）简述一种判断线性码的纠错能力和检错能力的方法；（3 分）

（3）判断该线性码C是可以检几错的检错码和可以纠几错的纠错码。（2 分）

参考答案：

（1）该码的生成矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$（5 分）

（2）方法一：根据生成矩阵求出 C 的所有码字，然后求出 C 的极小距离，若 C 的极小距离是 t+1，则 C 是可以检 t 错的检错码，是纠$\lfloor t/2 \rfloor$错的纠错码。

方法二：：根据生成矩阵求出 C 的所有码字，然后求出 C 的极小重量，若 C 的极小重量是 t+1，则 C 是可以检 t 错的检错码，是纠$\lfloor t/2 \rfloor$错的纠错码。

方法三：根据校验矩阵 H 判断，判断 H 的列向量的线性相关性，如果 H 的任意 t 列线性无关而有 t+1 列线性相关，则 C 是可以检 t 错的检错码，是纠$\lfloor t/2 \rfloor$错的纠错码。（3 分）

（3）因为 C 的校验矩阵任意 2 列线性无关，而有 3 列线性相关，所以 C 的极小重量为 3，是可以检 2 错的检错码和纠 1 错的纠错码。（2 分）

得分	

八、（10 分）设C是一个二元（6, 3）线性码，其一致校验矩阵为

$$H=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&0\end{pmatrix},$$

（1）求出所有的校验子（伴随式）Hx' 和与之相对应的陪集首（差错模式）e（将不能确定译码的写在虚线下）;（5 分）

（2）设收到的字为 $r=(1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$，计算 r 的校验子Hr',并确定 r 的译码;（3 分）

（3）判断上述译码是否为确定性译码。（2 分）

参考答案：

（1）校验子Hx'陪集首 e

（伴随式）（差错模式）

$(0\ 0\ 0)'$（0 0 0 0 0 0）

$(1\ \ 0\ 1)'$（1 0 0 0 0 0）

$(0\ 1\ 0)'$（0 1 0 0 0 0）

$(0\ 0\ 1)'$（0 0 1 0 0 0）

$(0\ 1\ 1)'$（0 0 0 0 1 0）

……………………………………………

$(1\ 1\ 0)'$（0 0 0 1 0 0）

$(1\ 0\ 0)'$（10 1 0 0 0）

$(1\ 1\ 1)'$（1 1 0 0 0 0）

（5 分）

（2）$Hr'=(1\ 0\ 1)'$（2 分）r 应译为$(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$（1 分）

（3）是确定性译码。（2 分）

得分	

九、（20 分）在 GF(2)={0, 1}的系数域上，以$p(x) = x^4 + x^3 + 1$为模构成有限域 GF(2^4)，

（1）设α为$p(x)$的根，写出 GF(2^4)中元素的幂级数表示和矢量表示的对照表；（5 分）

（2）找出所有的共轭根组。（5 分）

（3）求出α^3所在的共轭根组对应的最小多项式并化简；（3 分）该最小多项式是本原多项式吗？（2 分）

（4）求出所有的本原元。（5 分）

参考答案：

（1）（3 分）　GF(2^4)中元素的幂级数表示和矢量表示的对照表

幂级数	矢量	幂级数	矢量
0	0000	α^7	0111
1	0001	α^8	1110
α	0010	α^9	0101
α^2	0100	α^{10}	1010
α^3	1000	α^{11}	1101
α^4	1001	α^{12}	0011
α^5	1011	α^{13}	0110
α^6	1111	α^{14}	1100

（2）共轭根组：

{0}，{1}，{α、α^2、α^4、α^8}，{α^3、α^6、α^{12}、α^9}，

{α^5、α^{10}}，{α^7、α^{14}、α^{13}、α^{11}}（5 分）

（3）α^3的共轭根组对应的最小多项式为：

$$m_3(x) = (x - \alpha^3)(x - \alpha^6)(x - \alpha^{12})(x - \alpha^9)$$

$= x^4 + (\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12})x^3 + (\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12})x^2 + (\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{12})x + 1$

$= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$（3 分）

不是本原多项式（2 分）

（4）本原元为：α、α^2、α^4、α^8、α^7、α^{14}、α^{13}、α^{11}（5 分）