



上海大学

SHANGHAI UNIVERSITY

矩阵代数与应用

主 讲 人：马 丽 艳

办 公 室：计 1013

Email: liyanma@t.shu.edu.cn

计算机工程与科学学院

目 录

1. 矩阵代数简述
2. 本课程的主要内容
3. 教材及参考书
4. 授课方式与考核

矩阵代数发展

- **行列式**：1693年
- **线性代数和矩阵**：18世纪晚期开始，拉格朗日、高斯（高斯消元法）
- 1850年由西尔维斯特（Sylvester）首先提出**矩阵**的概念。
- **矩阵代数**：1858年卡莱（A. Cayley）建立了矩阵运算规则.被认为是矩阵论的创立者。

矩阵代数

- 1. 线性或非线性：** 研究的多个因素之间呈线性（非线性）关联性，那么称这个问题为线性（非线性）问题。
- 2. 代数**是研究数、数量、关系、结构及其之间的联系（如代数方程(组)等)的通用解法及其性质的数学分支。
代数 (algebra) 是由算术 (arithmetic) 演变来的，常见的代数结构类型有群、环、域、模、线性空间等。



矩阵代数

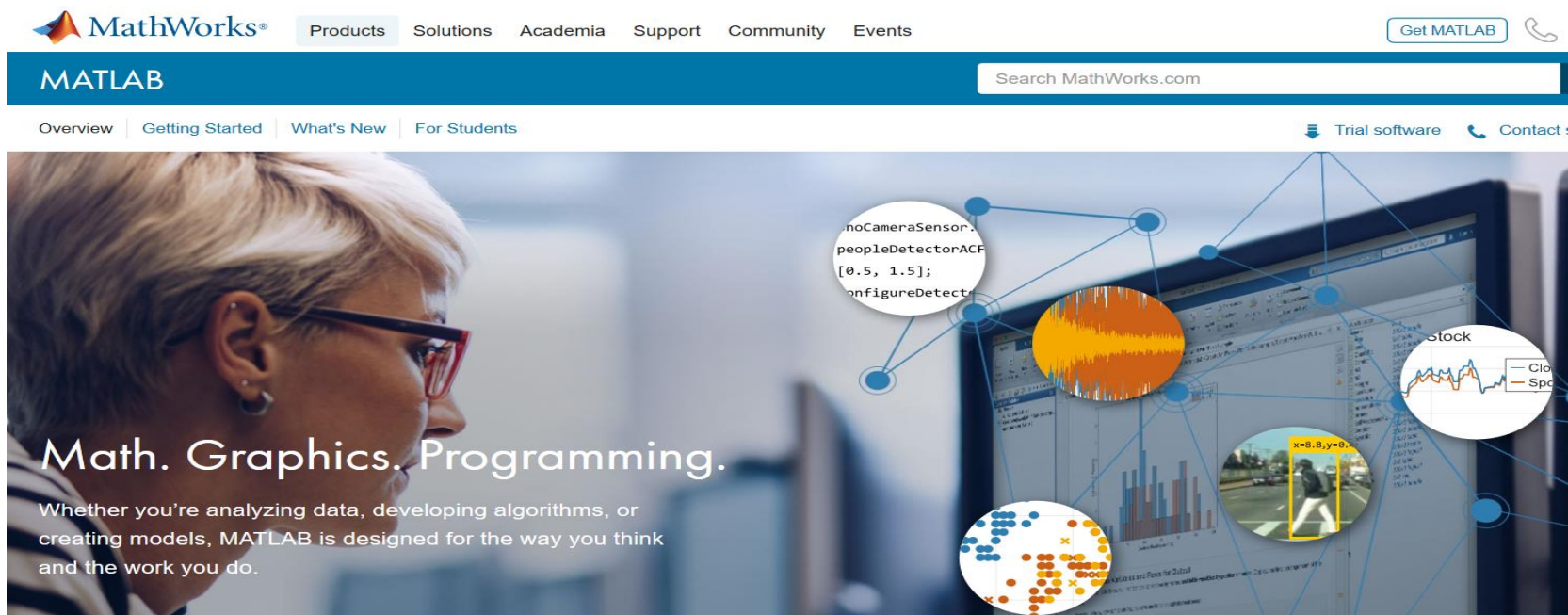
1. 讨论线性方程及线性运算的代数就叫做**线性代数**。
2. 在线性代数中用矩阵（向量）代替代数式中的实数，得到的代数式称为矩阵代数式。矩阵代数式遵守代数式的规律，同时具备特殊规律。

矩阵代数

1. 矩阵理论（矩阵分析）是一门最具有实用价值的数学理论和方法。矩阵分析作为一种基本的数学工具，在数学学科与其他科学技术领域（如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、系统工程等）都有广泛应用。
2. 电子计算机及计算技术的发展也为矩阵理论的应用开辟了更广阔的前景。因此，学习和掌握矩阵的基本理论和方法，对于理工科本科生和研究生来说是必不可少的。

矩阵的应用

- **MATLAB**是matrix&laboratory的组合，意为矩阵工厂（矩阵实验室）是由美国mathworks公司发布的主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。1984年推出第一个版本。



The image shows a screenshot of the MATLAB website banner. At the top, there is a navigation bar with links: Products, Solutions, Academia, Support, Community, and Events. To the right of these links is a 'Get MATLAB' button and a phone icon. Below the navigation bar is a search bar with the text 'Search MathWorks.com'. The main banner features a woman with short blonde hair and red-rimmed glasses looking at a computer screen. The screen displays various MATLAB plots and code snippets. Overlaid on the screen are several circular callouts containing MATLAB code and plots. The code snippets include: `noCameraSensor`, `peopleDetectorACF`, `[0.5, 1.5];`, and `configureDetect`. The plots include a bar chart, a line graph labeled 'stock' with a legend for 'Clo' and 'Sp', a scatter plot with a yellow box around a point labeled `x=8.8, y=0.5`, and a plot of a person walking. The text 'Math. Graphics. Programming.' is prominently displayed on the left side of the banner. Below this text, it says: 'Whether you're analyzing data, developing algorithms, or creating models, MATLAB is designed for the way you think and the work you do.'

Math. Graphics. Programming.

Whether you're analyzing data, developing algorithms, or creating models, MATLAB is designed for the way you think and the work you do.

矩阵的应用

应用

> 数学、统计和优化

> 数据科学和深度学习

> 信号处理和无线通信

> 控制系统

> 图像处理和计算机视觉

> 并行计算

> 测试和测量

> 计算金融学

> 计算生物学

> 应用程序部署

> 基于事件建模

> 物理建模

> 机器人和自主系统

> 实时仿真和测试

> 代码生成

> 验证、确认和测试

> 数据库访问和报告

> 仿真图形和报告

> 系统工程

矩阵的应用

Simulink	Filter Design HDL Coder	MATLAB Compiler SDK	Phased Array System Toolbox	SimBiology
5G Toolbox	Financial Instruments Tool	MATLAB Drive	Polyspace Bug Finder	SimEvents
Aerospace Blockset	Financial Toolbox	MATLAB Grader	Polyspace Bug Finder Access	Simscape
Aerospace Toolbox	Fixed-Point Designer	MATLAB Mobile for Android	Polyspace Bug Finder Server	Simscape Driveline
Antenna Toolbox	Fuzzy Logic Toolbox	MATLAB Mobile for iOS	Polyspace Code Prover	Simscape Electrical
Audio Toolbox	Global Optimization Tool	MATLAB Parallel Server	Polyspace Code Prover Access	Simscape Fluids
Automated Driving	GPU Coder	MATLAB Production Server	Polyspace Code Prover Server	Simscape Multibody
AUTOSAR Blockset	HDL Coder	MATLAB Report Generator	Polyspace Products for Ada	Simscape Multibody I
Bioinformatics Tool	HDL Verifier	Mixed-Signal Blockset	Powertrain Blockset	Simulink 3D Animation
Communications Tool	IEC Certification Kit (for 26262 and IEC 61508)	Model Predictive Control Toolbox	Predictive Maintenance Toolbox	Simulink Check
Computer Vision Tool	Image Acquisition Toolbox	Model-Based Calibration Toolbox	Reinforcement Learning Toolbox	Simulink Code Inspector
Control System Tool	Image Processing Toolbox	Navigation Toolbox	RF Blockset	Simulink Coder
Curve Fitting Toolbox	Installation, Licensing, and Activation	OPC Toolbox	RF Toolbox	Simulink Control Design
Data Acquisition Tool	Instrument Control Toolbox	Optimization Toolbox	Risk Management Toolbox	Simulink Coverage
Database Toolbox	Licensing on the Cloud	Parallel Computing Toolbox	Robotics System Toolbox	Simulink Design Optimizer
Datafeed Toolbox	LTE HDL Toolbox	Partial Differential Equation Toolbox	Robust Control Toolbox	Simulink Design Verifier
Deep Learning Tool	LTE Toolbox		ROS Toolbox	Simulink Desktop Real-Time
DO Qualification Kit (178)	Mapping Toolbox		Sensor Fusion and Tracking Toolbox	Simulink PLC Coder
DSP System Toolbox	MathWorks Cloud Center		SerDes Toolbox	Simulink Real-Time
Econometrics Toolbox	MATLAB Coder		Signal Processing Toolbox	Simulink Report Generator
Embedded Coder				Simulink Requirements
				Simulink Test



这本书可以学到什么

第 1 章	代数与矩阵基础.....	1
1.1	代数与矩阵的基本概念	1
1.1.1	代数基本概念	1
1.1.2	矩阵与向量	3
1.1.3	矩阵的基本运算	4
1.2	矩阵的初等变换	6
1.2.1	初等行变换与阶梯型矩阵	7
1.2.2	初等行变换的两个应用	9
1.2.3	初等列变换	12
1.3	矩阵的性能指标	13
1.3.1	矩阵的行列式	13
1.3.2	矩阵的二次型	14
1.3.3	矩阵的特征值	14
1.3.4	矩阵的迹	15
1.3.5	矩阵的秩	16
1.4	内积与范数	18
1.4.1	向量的内积与范数	18
1.4.2	矩阵的内积与范数	22
1.5	矩阵和向量的应用案例	23
1.5.1	模式识别与机器学习中向量的相似比较	23
1.5.2	人脸识别的稀疏表示	25
	本章小结	26

这本书可以学到什么

第 2 章	特殊矩阵
2.1	置换矩阵、互换矩阵与选择矩阵
2.1.1	Hermitian 矩阵
2.1.2	置换矩阵与互换矩阵
2.1.3	广义置换矩阵与选择矩阵
2.1.4	广义置换矩阵在鸡尾酒会问题中的应用案例
2.2	正交矩阵与酉矩阵
2.3	三角矩阵
2.4	Vandermonde 矩阵与 Fourier 矩阵
2.4.1	Vandermonde 矩阵
2.4.2	Fourier 矩阵
2.5	Hadamard 矩阵
2.6	Toeplitz 矩阵与 Hankel 矩阵
2.6.1	Toeplitz 矩阵
2.6.2	Hankel 矩阵
	本章小结
	习题

这本书可以学到什么

第 3 章	矩阵的相似化简与特征分析
3.1	特征值分解
3.1.1	矩阵的特征值分解
3.1.2	特征值的性质
3.1.3	特征向量的性质
3.1.4	特征值分解的计算
3.2	矩阵与矩阵多项式的相似化简
3.2.1	矩阵的相似变换
3.2.2	矩阵的相似化简
3.2.3	矩阵多项式的相似化简
3.3	多项式矩阵及相抵化简
3.3.1	多项式矩阵与相抵化简的基本理论
3.3.2	多项式矩阵的相抵化简方法
3.3.3	Jordan 标准型与 Smith 标准型的相互转换
3.4	Cayley-Hamilton 定理及其应用
3.4.1	Cayley-Hamilton 定理
3.4.2	在矩阵函数计算中的应用
3.5	特征分析的应用
3.5.1	Pisarenko 谐波分解
3.5.2	主成分分析
3.5.3	基于特征脸的人脸识别
3.6	广义特征值分解
3.6.1	广义特征值分解及其性质
3.6.2	广义特征值分解算法
3.6.3	广义特征分析的应用
3.6.4	相似变换在广义特征值分解中的应用
	本章小结

第 4 章	奇异值分析
4.1	数值稳定性与条件数
4.2	奇异值分解
4.2.1	奇异值分解及其解释
4.2.2	奇异值的性质
4.2.3	矩阵的低秩逼近
4.2.4	奇异值分解的数值计算
4.3	乘积奇异值分解
4.3.1	乘积奇异值分解问题
4.3.2	乘积奇异值分解的精确计算
4.4	奇异值分解的工程应用案例
4.4.1	静态系统的奇异值分解
4.4.2	图像压缩
4.4.3	数字水印
4.5	广义奇异值分解
4.5.1	广义奇异值分解的定义与性质
4.5.2	广义奇异值分解的实际算法
4.5.3	广义奇异值分解的应用例子
	本章小结

这本书可以学到什么

第 5 章	子空间分析
5.1	子空间的一般理论
5.1.1	子空间的基
5.1.2	无交连、正交与正交补
5.1.3	子空间的正交投影与夹角
5.2	列空间、行空间与零空间
5.2.1	矩阵的列空间、行空间与零空间
5.2.2	子空间基的构造：初等变换法
5.2.3	基本空间的标准正交基构造：奇异值分解法
5.3	信号子空间与噪声子空间
5.4	快速子空间跟踪与分解
5.4.1	投影逼近子空间跟踪
5.4.2	快速子空间分解
5.5	子空间方法的应用
5.5.1	多重信号分类
5.5.2	子空间白化
5.5.3	盲信道估计的子空间方法
	本章小结

这本书可以学到什么

第 6 章	广义逆与矩阵方程求解
6.1	广义逆矩阵
6.1.1	满列秩和满行秩矩阵的广义逆矩阵
6.1.2	Moore-Penrose 逆矩阵
6.2	广义逆矩阵的求取
6.2.1	广义逆矩阵与矩阵分解的关系
6.2.2	Moore-Penrose 逆矩阵的数值计算
6.3	最小二乘方法
6.3.1	普通最小二乘方法
6.3.2	数据最小二乘
6.3.3	Tikhonov 正则化方法
6.3.4	交替最小二乘方法
6.4	总体最小二乘
6.4.1	总体最小二乘问题
6.4.2	总体最小二乘解
6.4.3	总体最小二乘解的性能
6.5	约束总体最小二乘
6.5.1	约束总体最小二乘方法
6.5.2	最小二乘方法及其推广的比较
6.6	稀疏矩阵方程求解
6.6.1	L_1 范数最小化
6.6.2	贪婪算法
6.6.3	同伦算法
6.7	三个应用案例
6.7.1	恶劣天气下的图像恢复
6.7.2	总体最小二乘法在确定地震断层参数中的应用
6.7.3	谐波频率估计
	本章小结

第 7 章	矩阵微分与梯度分析
7.1	Jacobian 矩阵与梯度矩阵
7.1.1	Jacobian 矩阵
7.1.2	梯度矩阵
7.1.3	梯度计算
7.2	一阶实矩阵微分与 Jacobian 矩阵辨识
7.2.1	一阶实矩阵微分
7.2.2	标量函数的 Jacobian 矩阵辨识
7.2.3	矩阵微分的应用举例
7.3	实变函数无约束优化的梯度分析
7.3.1	单变量函数 $f(x)$ 的平稳点与极值点
7.3.2	多变量函数 $f(\mathbf{x})$ 的平稳点与极值点
7.3.3	多变量函数 $f(\mathbf{X})$ 的平稳点与极值点
7.3.4	实变函数的梯度分析
7.4	平滑凸优化的一阶算法
7.4.1	凸集与凸函数
7.4.2	无约束凸优化的一阶算法
7.5	约束凸优化算法
7.5.1	标准约束优化问题
7.5.2	极小 - 极大化与极大 - 极小化方法
7.5.3	Nesterov 最优梯度法
	本章小结

基本要求

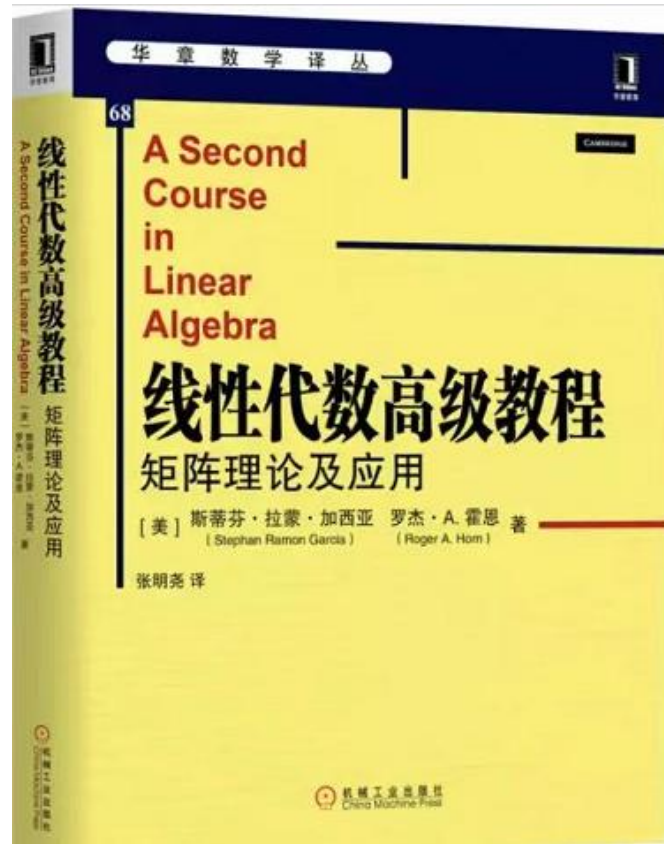
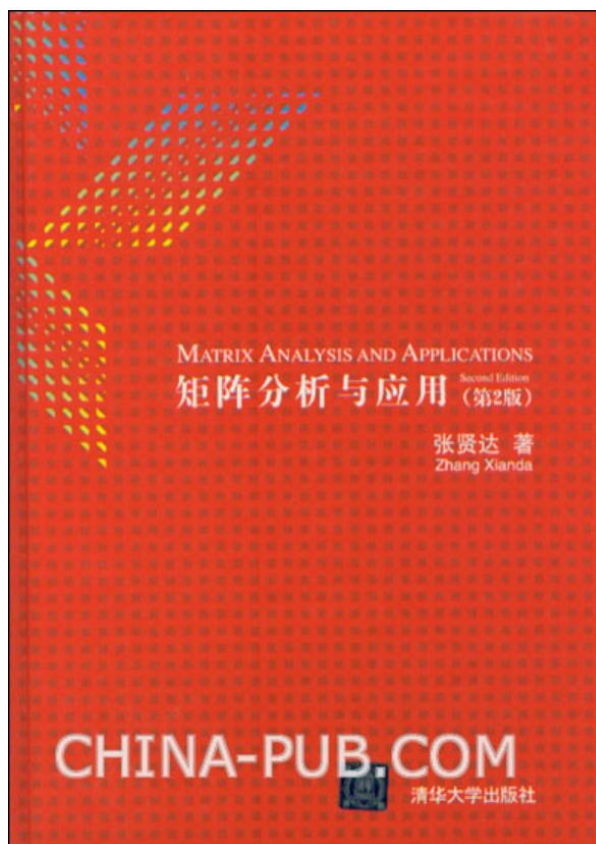
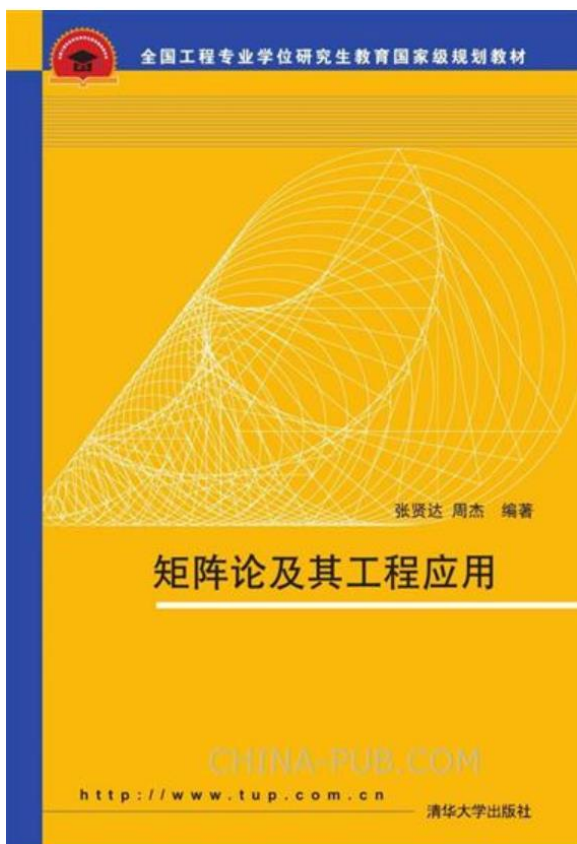
- **预备知识：**高等数学、微积分、线性代数等。
- 了解每一类算法的**原理**，掌握相应的**计算方法**，学会初步的**应用技术**。
- 通过**探究身边矩阵代数问题**，培养和提高发现问题、分析问题、解决问题的能力。

注意事项

- 课上不准吃东西、不准大声喧哗
- 课前预习、课后复习，**不要考试突击**
- 作业、上机不允许抄袭，发现记为零分
- 课堂练习会请同学回答问题、答对者平时成绩加分
- 读书不能太功利，不要满足于只读与眼前考试相关的东西。“书到用时方恨少”。要充满好奇心带着乐趣去学习

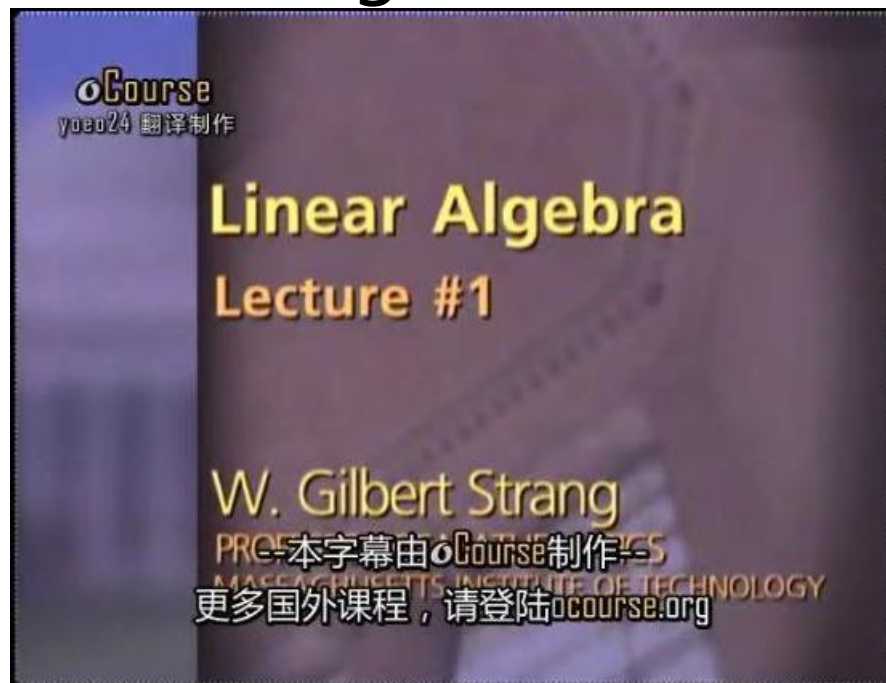
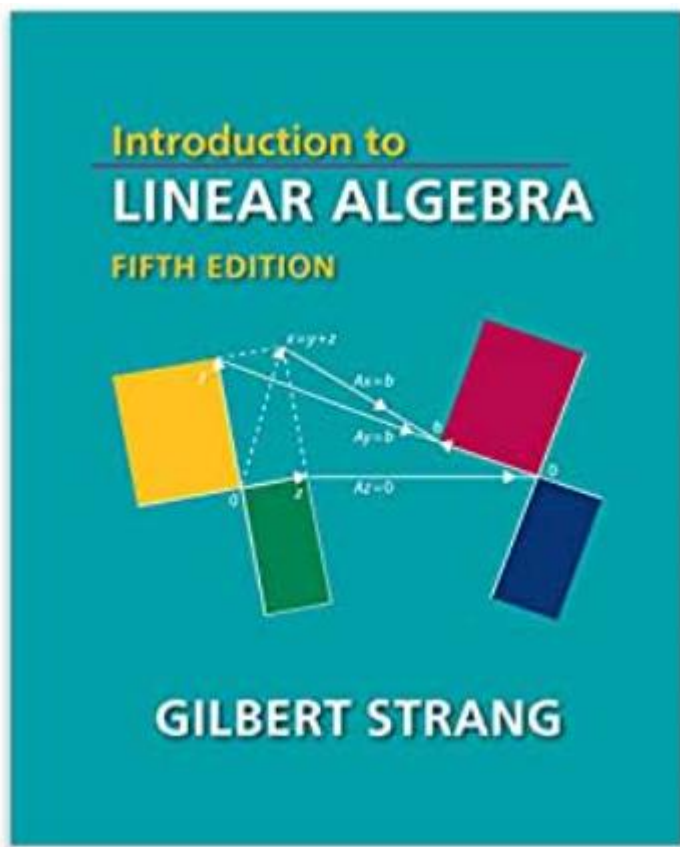
参考教材

仅供参考，不需要购买，课后作业、考试只需看课件



参考资料

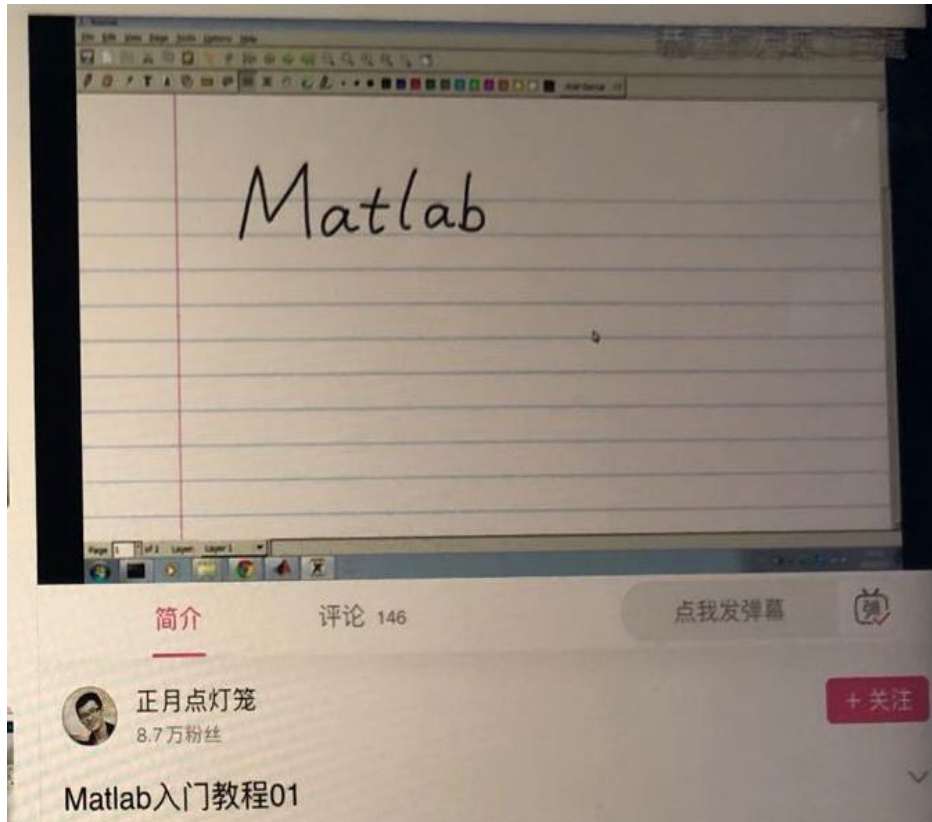
- Gilbert Strang. Introduction to Linear Algebra, 5th Edition. Wellesley-Cambridge Press 2016



网易公开课

上机软件： Matlab

- Matlab学习资料



成绩评定

- 平时成绩：考勤、课堂练习、作业、上机及平时表现共同构成平时成绩
- 总成绩=平时成绩（40%）
+ 期末考试成绩（60%）



谢谢!

