例题1 信号、系统与卷积

School of Computer Engineering and Science
Shanghai University

Instructor: Shengyu Duan

通过此次例题与习题，掌握以下知识：

- 复数的直角坐标、极坐标表示；复指数函数的直角坐标、极坐标表示；
- 对系统的如下性质进行判断：记忆性、因果性、稳定性、时不变性、线性；
- 对信号的周期性进行判断
- 卷积运算

例1：复数的直角坐标与极坐标表示

用直角坐标形式（x+jy）表示下列复数：$\sqrt{2}e^{-j\theta\pi/4}$

例1：复数的直角坐标与极坐标表示

用直角坐标形式（x+jy）表示下列复数： $\sqrt{2}e^{-j\theta\pi/4}$

解：根据欧拉公式：

$$re^{j\theta}=rcos\theta+jrsin\theta$$

$$\sqrt{2}e^{-j\theta\pi/4}=\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\theta\right)+j\sqrt{2}\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\theta\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\theta\right)-j\sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi}{4}\theta\right)$$

$$(\text{即}x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\theta\right),y=-\sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi}{4}\theta\right))$$

或直接通过复数表示画出极坐标下的图，再转化为直角坐标表示。

例2：复数的直角坐标与极坐标表示

用极坐标形式（ $re^{j\theta}$ ）表示下列复数： $(1+j)/(1-j)$

例2：复数的直角坐标与极坐标表示

用极坐标形式（$re^{j\theta}$）表示下列复数：$(1+j)/(1-j)$

解：

$$\frac{1+j}{1-j}=\frac{(1+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)}=\frac{2j}{2}=j$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+jsin\frac{\pi}{2}=e^{j\frac{\pi}{2}}\qquad (\text{即}r=1,\theta=\frac{\pi}{2})$$

例3：系统性质判断

有以下函数表示的两个系统：

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$

2. $y[n] = x[-n]$

分别判断以上两个系统是否具有以下性质：1) 无记忆；2) 时不变；3) 线性；4) 因果；5) 稳定。

例3：系统性质判断

1） 无记忆系统：系统的输出完全取决于当前时刻的输入；

2）时不变系统：系统特性不随时间改变，即如果系统对输入信号$x(t)$的输出是$y(t)$，则系统对输入信号$x(t-t_0)$的输出为$y(t-t_0)$；

3）线性系统：如果输入信号是两个信号的加权和，那么输出信号也是这两个输入信号对应输出的加权和；

4）因果系统：系统的输出只取决于现在的输入及过去的输入；

5）稳定系统：当系统的输入为在任意时间都有界时，系统的输出也是有界的。

例3：系统性质判断

$$y(t)=\int_{-\infty}^{2t}x(\tau)d\tau$$

判断以上系统是否具有以下性质：1) 无记忆；2) 时不变；3) 线性；4) 因果；5) 稳定。

解：1）系统有记忆，因为$y(t)$的值取决于之前时间的$x(t)$;

2）$y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{2t-2t_0}x(\tau)d\tau \neq \int_{-\infty}^{2t}x(\tau-t_0)d\tau$，因此系统无时不变性（时变）；

3）$\int_{-\infty}^{2t}[ax_1(\tau)+bx_2(\tau)]d\tau=a\int_{-\infty}^{2t}x_1(\tau)d\tau+b\int_{-\infty}^{2t}x_2(\tau)d\tau=ay_1(t)+by_2(t)$，因此是线性系统；

4）系统无因果性，当前输出取决于未来的输入；

5）系统不稳定，假定$x(t)=1$，则$y(t)=\int_{-\infty}^{2t}1.d\tau$，当t=∞时，$y(t)$无界。

例3：系统性质判断

$$y[n] = x[-n]$$

判断以上系统是否具有以下性质：1) 无记忆；2) 时不变；3) 线性；4) 因果；5) 稳定。

解：1）系统有记忆，因为当$n>0$时，$y[n]$的值取决于之前时间的$x[n]$;

2）$y[n-n_0] = x[-(n-n_0)] \neq x[-n-n_0]$，因此系统无时不变性；

3）$ax_1[-n] + bx_2[-n] = ay_1(t) + by_2(t)$，因此是线性系统；

4）系统无因果性，因为当$n<0$时，当前输出取决于未来的输入；

5）系统稳定，找不到任何一个有界的输入通过该系统得到一个无界的输出。

例4：判断信号的周期性

判断以下信号是否具有周期性。若有周期性，计算最小周期：

$$x(t) = cos(w_n t)\,cos(\,sin(\,w_m t))$$

例4：判断信号的周期性

判断以下信号是否具有周期性。若有周期性，计算最小周期：

$$x(t)=cos(w_n t)\,cos(sin(w_m t))$$

解：　假设$x(t)$具有周期性，则其周期T需同时对以下两个三角函数成立：

$$cos(w_n(t+T))=cos(w_n t)$$
$$sin(w_m(t+T))=sin(w_m t)$$

因此：

$$w_n T=2\pi n$$
$$w_m T=2\pi m$$
$$m,n均为整数$$

➞ $T=\frac{2\pi}{w_n}\mathrm{n}=\frac{2\pi}{w_m}\mathrm{m}$, 若存在整数$m,n$使以上条件满足，则该信号为周期信号；否则该信号为非周期信号。

例5：卷积

计算并画出$y[n]$：

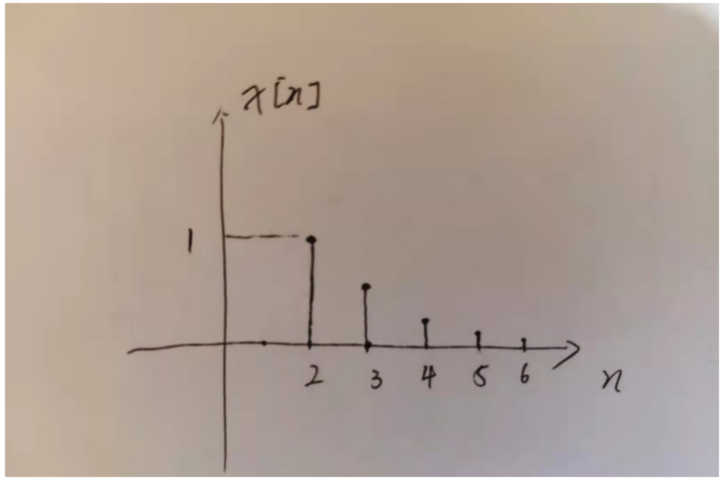
$$y[n] = x[n] * h[n], \qquad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \qquad h[n] = u[n+2]$$

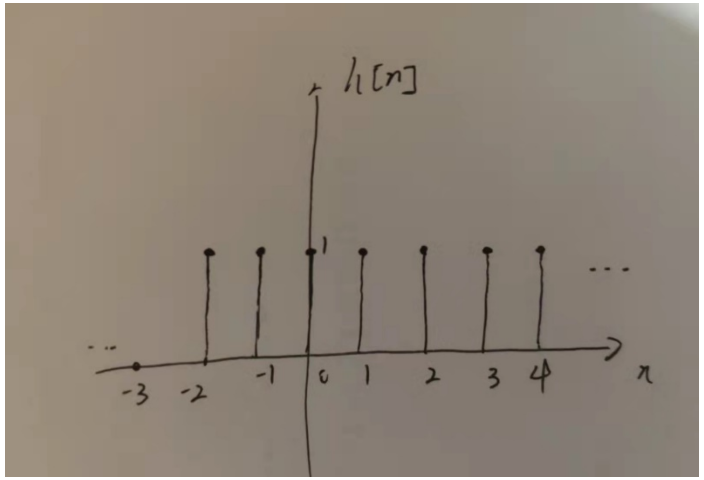
例5：卷积

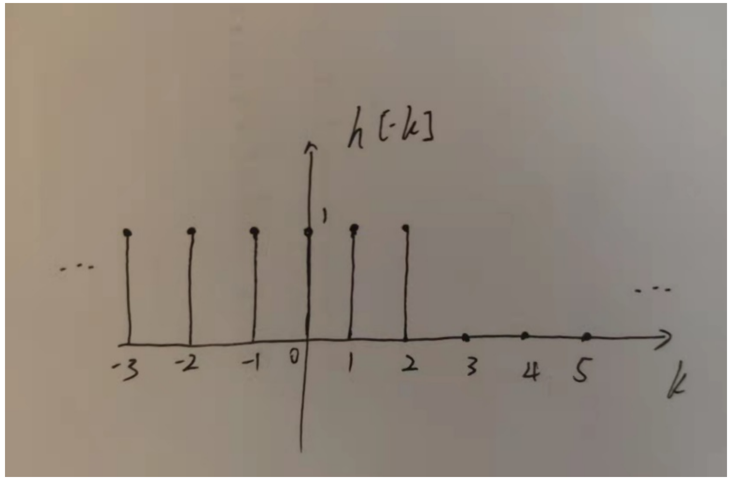
计算并画出$y[n]$：

$$y[n] = x[n] * h[n], \qquad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \qquad h[n] = u[n+2]$$

解： 画出$x[n]$与$h[n]$的波形：







例5：卷积

计算并画出$y[n]$：

$$y[n] = x[n] * h[n], \qquad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2], \qquad h[n] = u[n+2]$$

解： 当n<0时，

$$y[n] = 0$$

当$n \geqslant$0时，

$$y[n] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} [1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]}{1 - \frac{1}{2}} = 2[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}]$$

综上： $y[n] = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$

例6：卷积

计算并画出$y(t)$：

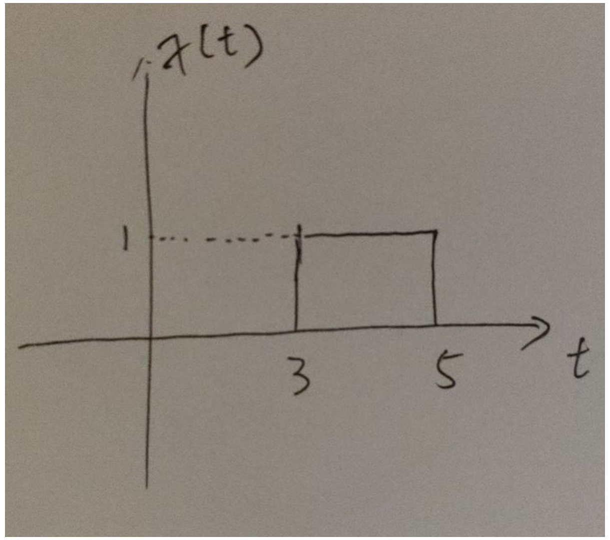
$$y(t) = x(t) * h(t), \qquad x(t) = u(t-3) - u(t-5), \qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

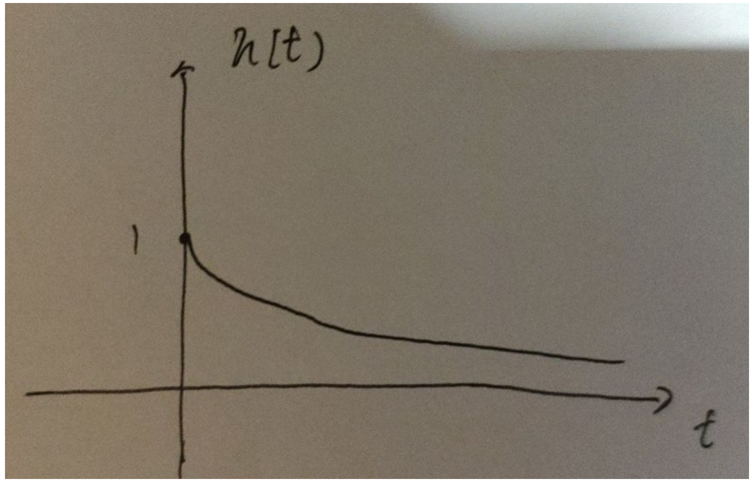
例6：卷积

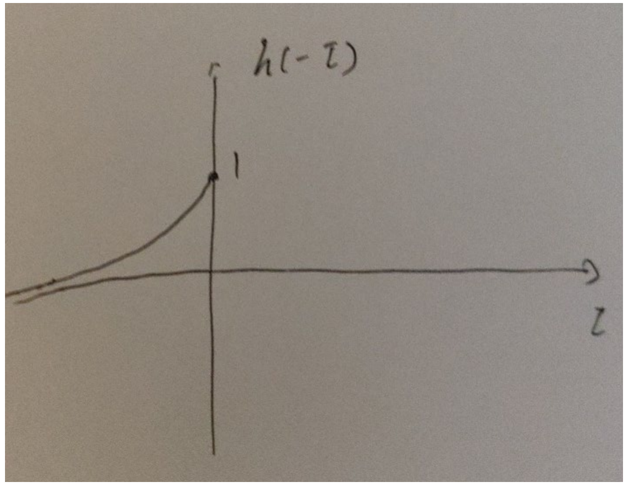
计算并画出$y(t)$：

$$y(t) = x(t) * h(t), \qquad x(t) = u(t-3) - u(t-5), \qquad h(t) = e^{-3t}u(t)$$

解： 画出$x(t)$与$h(t)$的波形：







例6：卷积

计算并画出$y(t)$：

$$y(t)=x(t)*h(t),\qquad x(t)=u(t-3)-u(t-5),\qquad h(t)=e^{-3t}u(t)$$

解： 当t<3时，

$$y(t)=0$$

当3≤t<5时，

$$y(t)=\int_3^t e^{-3(t-\tau)}d\tau=e^{-3t}\int_3^t e^{3\tau}d\tau=\frac{1-e^{(9-3t)}}{3}$$

当t≥5时，

$$y(t)=\int_3^5 e^{-3(t-\tau)}d\tau=e^{-3t}\int_3^5 e^{3\tau}d\tau=\frac{e^{(15-3t)}-e^{(9-3t)}}{3}$$