# 第五章 大数定理和中心极限定理

毛雪峰

上海大学理学院数学系

6月1日-6月3日

# 内容介绍

1 大数定理

2 中心极限定理

# **Outline**

1 大数定理

2 中心极限定理

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}$   $\sum_{k=1}^{n} X_k$ ,则对于任意 $\epsilon > 0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_{k}) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$
 由独立性 $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}) = \frac{1}{n^{2}}\sum_{k=1}^{n}D(X_{k}) = \frac{1}{n^{2}}(n\sigma^{2}) = \frac{\sigma^{2}}{n}$  又由切比雪夫不等式得  $1 \ge P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k} - \mu| < \varepsilon\} \ge 1$ 

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

◆ロト ◆団 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ り へ ○

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$
 由独立性 $D(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$ 

又由切比雪夫不等式得  $1 \ge P\{|\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}X_k - \mu| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{\pi}{\varepsilon}$ 

 $\Rightarrow n \rightarrow \infty$  即得结论

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$

由独立性 $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}(n\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}$ 

又由切比雪夫不等式得  $1 \ge P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}-\mu|<\varepsilon\} \ge 1-\frac{e^{2}}{\varepsilon^{2}}$ 

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$
 由独立性 $D(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$ 

又由切比雪夫不等式得  $1 \geq P\{|rac{1}{n}\sum\limits_{k=1}X_k-\mu|<arepsilon\}\geq 1-rac{\pi}{arepsilon^2}$ 

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$
 由独立性 $D(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$  又由切比雪夫不等式得  $1 \ge P\{|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 

设 $X_1, X_2, \cdots$  是相互独立,服从同一分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ . 作前n个变量的算术平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ ,则对于任意 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

证明: 
$$: E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_{k}) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$
 由独立性 $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}) = \frac{1}{n^{2}}\sum_{k=1}^{n}D(X_{k}) = \frac{1}{n^{2}}(n\sigma^{2}) = \frac{\sigma^{2}}{n}$  又由切比雪夫不等式得  $1 \ge P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k} - \mu| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{\sigma^{2}}{\varepsilon^{2}}$  令 $n \to \infty$ ,即得结论.

◆ロト ◆母 ト ◆ 豊 ト ◆ 豊 ・ 夕 Q ②

#### | 5.1.2 弱大数定理的含义

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \cdots, \mathbf{Y}_n, \cdots$  似傚率収敛  $\mathbf{T}\alpha$ ,记为  $\mathbf{Y}_n \to \alpha$ 

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ ,则序列

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{
ightarrow}\mu$ 

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\rightarrow} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ ,则序列

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\right\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{
ightarrow}\mu$ 

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 则称序列 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ 依概率的分子。记为 $Y_n, Y_n, \dots$ 

### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$  相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \cdots)$ , 则序列

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\right\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{\rightarrow}\mu$ .

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\rightarrow} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$  相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ , 则序列

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{\to}\mu$ .

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n-\alpha|<\varepsilon\}=1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为 $Y_n \stackrel{\triangle}{\rightarrow} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ , 则序列

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\right\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{
ightarrow}\mu$ .

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\rightarrow} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \cdots)$ , 则序列

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\right\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{\rightarrow}\mu$ .

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$  是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\rightarrow} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ ,则序列

 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\right\}$ 依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{\rightarrow}\mu$ .

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设  $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$  是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\to} \alpha$ .

#### 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k=1,2,\cdots)$ , 则序列  $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k | n=1,2,\cdots\}$ 依概率收敛于 $\mu$ , 即  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \stackrel{\square}{\rightarrow} \mu$ .

200

对于独立同分布且具有均值 $\mu$ 的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ,当n很大时它们的算术平均  $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$  很可能接近于 $\mu$ .

#### 5.1.3 依概率收敛的定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列,  $\alpha$ 是一个常数. 若对于任意的正数 $\varepsilon$ , 有  $\lim_{n \to \infty} P\{|Y_n - \alpha| < \varepsilon\} = 1,$ 

则称序列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$  依概率收敛于 $\alpha$ , 记为  $Y_n \stackrel{P}{\to} \alpha$ .

## 5.1.4 弱大数定理(辛钦大数定理)的另一叙述

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \dots)$ , 则序列

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}|n=1,2,\cdots\}$$
依概率收敛于 $\mu$ , 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{k}\stackrel{P}{\rightarrow}\mu$ .

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \ \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_n}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{\epsilon}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数, p是事件A在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon>0$ , 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{I_n}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1 \text{ g}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{I_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_0}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{\epsilon}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ . 有

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_n}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{\epsilon}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon>0$ ,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{|rac{r_A}{n} - p| < \varepsilon\} = 1 \; \mathbb{E}$$
 $\lim_{n \to \infty} P\{|rac{f_A}{n} - p| \ge \varepsilon\} = 0.$ 

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_0}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{1}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} P\{\left|\frac{f_{A}}{n} - \rho\right| < \varepsilon\} = 1 \text{ } \vec{\boxtimes}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} P\{\left|\frac{f_{A}}{n} - \rho\right| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_n}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{1}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\n\to\infty}} P\{\left|\frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - \rho\right| < \varepsilon\} = 1 \ \vec{\mathbf{y}}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\n\to\infty}} P\{\left|\frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - \rho\right| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_0}{h} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{\epsilon}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\left| \frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - \rho \right| < \varepsilon\} = 1$$
 或  $\lim_{n \to \infty} P\{\left| \frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - \rho \right| \ge \varepsilon\} = 0.$ 

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_n}{n} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{\epsilon}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

设 $f_A$ 是n次独立重复试验中事件A发生的次数,p是事件A在每次试验中发生的概率,则对于任意正数 $\varepsilon > 0$ ,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1 \text{ } \vec{\boxtimes}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{f_{\mathbf{A}}}{n} - p\right| \ge \varepsilon\} = 0.$$

- 对于任意的 $\varepsilon > 0$ , 只要重复独立试验的次数n充分大, 事件 $\{|\frac{f_n}{n} p| \ge \varepsilon\}$ 是一个小概率事件.
- 对任意给定的任意小的正数 $\varepsilon$ ,在n充分大的时候,频率 $\frac{L}{n}$ 与概率p的偏差小于 $\varepsilon$ 实际上是必定要发生的. 这也就是频率稳定性的真正含义.

# **Outline**

1 大数定理

2 中心极限定理

#### 5.2.1 独立同分布的中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立,服从同一分布,且具有数学期望和方差:  $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \cdots)$ ,则随机变量之和  $\sum_{k=1}^{n} X_k$  的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意x满足

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lim_{n \to \infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

## 5.2.2 独立同分布中心极限定理的内涵

均值为 $\mu$ ,方差为 $\sigma^2 > 0$ 的独立同分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 算术平均 $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ,当n充分大时,近似地服从均值为 $\mu$ ,方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$ 的正态分布.

$$E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知 $Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}$  近似服从N(0,1). 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} > \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$  $= 1 - P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} \le \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$  $\approx 1 - \Phi(\frac{105-20\times5}{105-20\times5}) = 1 - \Phi(0.387) = 0$ 

# $E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知 $Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$  近似服从N(0,1). 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$ 

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{105 - 20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\right) = 1 - \Phi(0.387) = 0.348$$

# $E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知 $Z = \frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$  近似服

从
$$N(0,1)$$
. 所以 $P\{V > 105\} = P\{\frac{V-20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}} > \frac{105-20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}} = 1 - P\{\frac{V-20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{100}}\sqrt{20}} \le \frac{105-20 \times 5}{\sqrt{\frac{100}{100}}\sqrt{20}}\}$ 

 $\approx 1 - \Phi(\frac{105 - 20 \times 5}{\sqrt{100}, \sqrt{20}}) = 1 - \Phi(0.387) = 0.348$ 

# $E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知
$$Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}$$
 近似服从 $N(0,1)$ . 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} > \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$ 
$$= 1 - P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} \le \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$$
$$\approx 1 - \Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}) = 1 - \Phi(0.387) = 0.348$$

$$E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知
$$Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$$
 近似服从 $N(0,1)$ . 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$  
$$= 1 - P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}} \le \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$
 
$$\approx 1 - \Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}) = 1 - \Phi(0.387) = 0.348.$$

$$E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知
$$Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}$$
 近似服从 $N(0,1)$ . 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} > \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$ 
$$= 1 - P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}} \le \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$$
$$\approx 1 - \Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}) = 1 - \Phi(0.387) = 0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压 $V_k(k=1,\cdots,20)$ , 设它们是相互独立的随机变量,且都在区间(0,10)上服从均匀分布. 记 $V=\sum_{k=1}^{20}V_k$ ,求 $P\{V>105\}$ 的近似值.

$$E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知
$$Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}$$
 近似服从 $N(0,1)$ . 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$  
$$= 1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\leq \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}}\}$$
 
$$\approx 1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}\sqrt{20}}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例 5.2.1 一加法器同时收到20个噪声电压 $V_k(k=1,\cdots,20)$ , 设它们是相互独立的随机变量,且都在区间(0,10)上服从均匀分布. 记 $V=\sum_{k=1}^{20}V_k$ ,求 $P\{V>105\}$ 的近似值.

$$E(V_k) = 5, D(V_k) = \frac{100}{12}, k = 1, 2, \dots, 20$$

解: 由独立同分布的中心极限定理可知
$$Z = \frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$$
 近似服从 $N(0,1)$ . 所以 $P\{V>105\} = P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$  
$$= 1-P\{\frac{V-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\leq \frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$
 
$$\approx 1-\Phi(\frac{105-20\times5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}})=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

## 5.2.3 李雅普诺夫(Lyapunov)定理

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 它们具有数学期望和方

存在正数 $\delta$ , 使得当 $n \to \infty$ 时,  $\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0$ ,

则 
$$\sum_{k=1}^{n} X_k$$
的标准化变量 $Z_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$ 的分布 函数 $F_n(\mathbf{x})$ 对于任意 $\mathbf{x}$ . 满足

函数 $F_n(x)$ 对于任意x,满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum\limits_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

#### 5.2.4 李雅普诺夫定理的含义

- 无论各个随机变量 $X_k(k=1,2,\cdots)$ 服从什么分布,只要满足定理的条件,那么他们的和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 当n很大时,就近似地服从正态分布.
- 这就是为什么服从正态分布的随机变量在概率论中占有重要 地位的一个基本原因.

#### 5.2.5 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x \} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ ,利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似求得  $P\{29500 \le X \le 30500\}$ 

## 5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

**例 5.2.2** 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为*p* = 1/3, 若船舶遭受了90000次波浪冲击, 问其中有29500 ~ 30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ , 利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似求得  $P\{29500 \le X \le 30500\}$ 

$$=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq \frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

## 5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $m(n = 1, 2, \cdots)$ 服从参数为n, p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{ \sqrt{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}} \le x \} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ , 利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似求得  $P\{29500 \le X \le 30500\}$ 

$$= P\{\frac{29500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\} \approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) - \Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$$

## 5.2.5 棣莫弗一拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

## 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ , 利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似

 $=P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq \frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2})-\Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2})$ 

## 5.2.5 棣莫弗-拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意
$$X \sim b(90000, \frac{1}{3})$$
, 利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似

$$= P\{\frac{29500 - np}{\sqrt{pp(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{pp(1-p)}} \le \frac{30500 - np}{\sqrt{pp(1-p)}}\} \approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) - \Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2})$$

# 5.2.5 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ , 利用棣莫弗一拉普拉斯定理可近似 求得  $P\{29500 \le X \le 30500\}$ 

$$= P\{\frac{29500 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30500 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\} \approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) - \Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2})$$

## 5.2.5 棣莫弗一拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x \} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意 $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ ,利用棣莫弗-拉普拉斯定理可近似求得  $P\{29500 \le X \le 30500\}$  =  $P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\} \approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) - \Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2})$ .

## 5.2.5 棣莫弗一拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为n,p(0 的二项分布,则对于任意<math>x,有

$$\lim_{n \to \infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x).$$

例 5.2.2 一船舶在某海区航行,已知每遭受一次波浪的冲击,纵摇角大于3°的概率为p=1/3,若船舶遭受了90000次波浪冲击,问其中有29500~30500次纵摇角度大于3°的概率是多少?

#### 90000次波浪冲击中纵摇角度大于3°的次数记为X

解: 由题意  $X \sim b(90000, \frac{1}{3})$ ,利用棣莫弗-拉普拉斯定理可近似求得  $P\{29500 \leq X \leq 30500\}$   $= P\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\} \approx \Phi(\frac{5\sqrt{2}}{2}) - \Phi(-\frac{5\sqrt{2}}{2}).$ 

(1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;

(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解:  $X_k$ 的分布律为  $\frac{X_k}{p_k}$  0 1 2 ,计算得 $E(X_k) = 1.1$ 

 $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$  由独立同分布的中心极限定理可知  $\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$  近似服从 N(0, 1).

记 Y 为有1名家长来参加会议的学生人数,则 Y  $\sim b(400,0.8)$ . 由 棣莫弗一拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1)

(1)求参加会议的家长人数 X 超过450的概率;

(2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

解: $X_k$ 的分布律为	$X_k = 0$	1	2	-, 计算得 <i>E(X<sub>k</sub></i>	(a) = 1.1,

 $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$  由独立同分布的中心极限定理

可知  $\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$  近似服从 N(0,1).

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数,则Y $\sim$ b(400,0.8). 由 棣莫弗一拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1)

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

$\mathbf{m}$ : $X_k$ 的分布律为 $\frac{X_k}{p_k}$							
<b>炉・ ハ</b>							

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解:  $X_k$ 的分布律为  $\frac{X_k}{p_k}$  0 1 2 , 计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□ > 4□

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: 
$$X_k$$
的分布律为  $\frac{X_k}{p_k}$  0 1 2 ,计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

$$D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$$
 由独立同分布的中心极限定理可知  $\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$  近似服从  $N(0,1)$ . 记义为有1名家长来参加会议的学生人数 则义  $\sim b(400,0.8)$  由

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

## 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解: 
$$X_k$$
的分布律为  $\frac{X_k}{p_k}$   $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.05 & 0.8 & 0.15 \end{vmatrix}$ , 计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

$$D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$$
 由独立同分布的中心极限定理

棣莫弗—拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1)

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解:  $X_k$ 的分布律为  $\frac{X_k}{\rho_k}$  0 1 2 ,计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

 $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$  由独立同分布的中心极限定理可知  $\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$  近似服从 N(0, 1).

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数,则 $Y \sim b(400,0.8)$ . 由 棣莫弗一拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1)

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

# 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解:  $X_k$ 的分布律为  $\frac{X_k}{\rho_k}$  0 1 2 ,计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

 $D(X_k) = 0.19, k = 1, 2, \cdots, 400.$  由独立同分布的中心极限定理可知  $\frac{X - 400 \times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$  近似服从 N(0, 1).

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数,则 $Y \sim b(400, 0.8)$ 。由

棣莫弗-拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1).

- (1)求参加会议的家长人数X超过450的概率;
- (2)求有1名家长来参加会议的学生人数不多于340的概率.

## 记第k个学生参加会议的家长人数为 $X_k$ ,则 $X = X_1 + \cdots + X_{400}$

解:  $X_k$ 的分布律为  $\frac{X_k}{\rho_k}$  0 1 2 ,计算得 $E(X_k) = 1.1$ ,

记Y为有1名家长来参加会议的学生人数,则 $Y \sim b(400,0.8)$ . 由棣莫弗一拉普拉斯定理可知  $\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}$  近似服从 N(0,1).