例题2 连续时间信号傅里叶级数与傅里叶变换

School of Computer Engineering and Science
Shanghai University

Instructor: Shengyu Duan

通过此次例题与习题，掌握以下知识：

- 不同傅里叶级数表示形式的相互转换；
- 周期信号的傅里叶级数表示；
- 非周期信号的傅里叶变换与逆变换；
- 利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出。

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

有一连续时间周期的实信号$x(t)$，其基波周期T=8，$x(t)$的非零傅里叶级数系数是：

$$a_1 = a_{-1} = 2, \qquad a_3 = a_{-3}^* = 4j$$

试将$x(t)$表示成如下形式：

1) $x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)]$

2) $x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

解：首先回忆傅里叶级数表示的三种形式：

① 正余弦形式：

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sin(k\omega_0 t)]$$

② 复指数形式：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, a_k = \begin{cases} \dfrac{A_{-k} + jB_{-k}}{2} & k < 0 \\ A_0 & k = 0 \\ \dfrac{A_k - jB_k}{2} & k > 0 \end{cases}$$

③ 幅度-相位形式：

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), a_k = A'_k e^{j\theta_k}$$

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

解：1）解法一：根据以下公式：

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{A_{-k}+jB_{-k}}{2} & k<0\\ A_0 & k=0\\ \dfrac{A_k-jB_k}{2} & k>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=\dfrac{A_1-jB_1}{2}=2\\ a_{-1}=\dfrac{A_1+jB_1}{2}=2\\ a_3=\dfrac{A_3-jB_3}{2}=4j\\ a_{-3}^*=(\dfrac{A_3+jB_3}{2})^*=4j\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=4\\ B_1=0\\ A_3=0\\ B_3=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{aligned}x(t)&=4\cos(\omega_0 t)-8\sin(3\omega_0 t)\\ &=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-8\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)\end{aligned}$$

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

有一连续时间周期的实信号$x(t)$，其基波周期T=8，$x(t)$的非零傅里叶级数系数是：

$$a_1 = a_{-1} = 2, \qquad a_3 = a_{-3}^* = 4j$$

试将$x(t)$表示成如下形式：

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

解：1）解法二：根据$a_1 = a_{-1} = 2,\quad a_3 = a_{-3}^* = 4j$，首先写出复指数形式的傅里叶级数表达式：

$$x(t) = 2e^{j\omega_0 t} + 2e^{-j\omega_0 t} + 4je^{j3\omega_0 t} - 4je^{-j3\omega_0 t}$$

再利用欧拉公式：

$$x(t) = 4\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} - 8\frac{e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}}{2j}$$

$$= 4\cos(\omega_0 t) - 8\sin(3\omega_0 t)$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 8\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$$

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

解：2）解法一：根据以下公式：

$$a_k = A'_k e^{j\theta_k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = A'_1 e^{j\theta_1} = 2 \\ a_3 = A'_3 e^{j\theta_3} = 4j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'_1 = 2 \\ \theta_1 = 0 \\ A'_3 = 4 \\ \theta_3 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= 2[2\cos(\omega_0 t) + 4\cos\left(3\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)] \\ &= 2[2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)] \end{aligned}$$

例1：不同傅里叶级数表示形式的相互转换

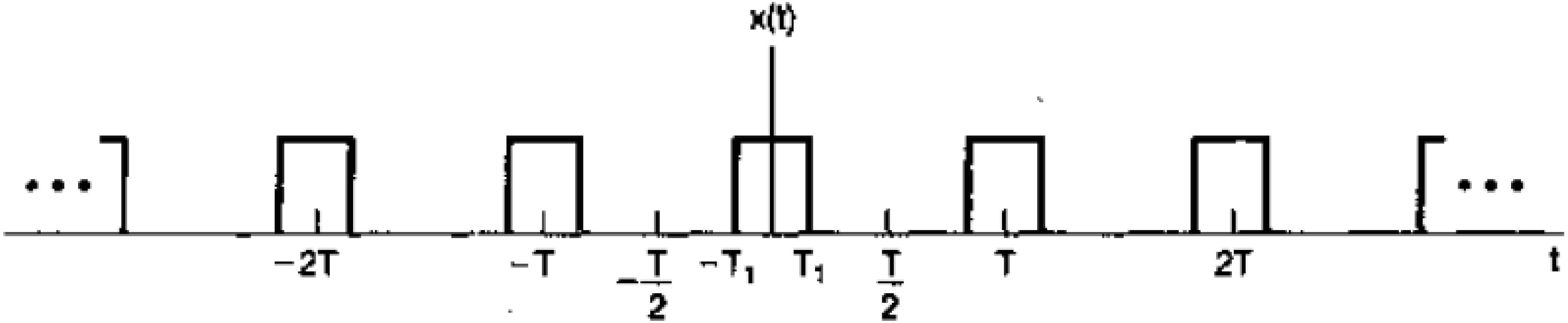
解：2）解法二：根据第一小题的结果及正余弦函数关系：

$$x(t)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-8\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-8cos\left(\frac{3\pi}{4}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

例2：周期信号的傅里叶级数表示

将以下周期信号用傅里叶级数表示，其中$T_1=\frac{T}{4}$：

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<{}^{T}/_{2}\end{cases}$$



例2：周期信号的傅里叶级数表示

解：

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<{}^{T}/_{2}\end{cases}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt$$

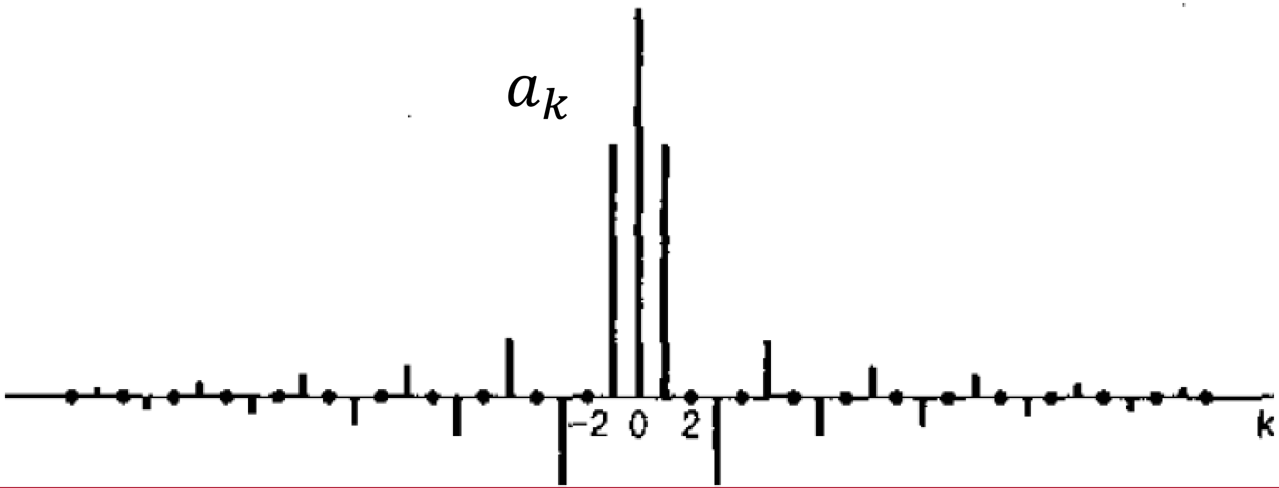
$$=\begin{cases}\dfrac{e^{jk\omega_0T_1}-e^{-jk\omega_0T_1}}{jk\omega_0\dfrac{2\pi}{\omega_0}}=\dfrac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}, & k\neq 0\\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T_1}^{T_1}dt=\dfrac{2T_1}{T}, & k=0\end{cases}$$

例2：周期信号的傅里叶级数表示

解： $T_1 = {}^{T}/_{4}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

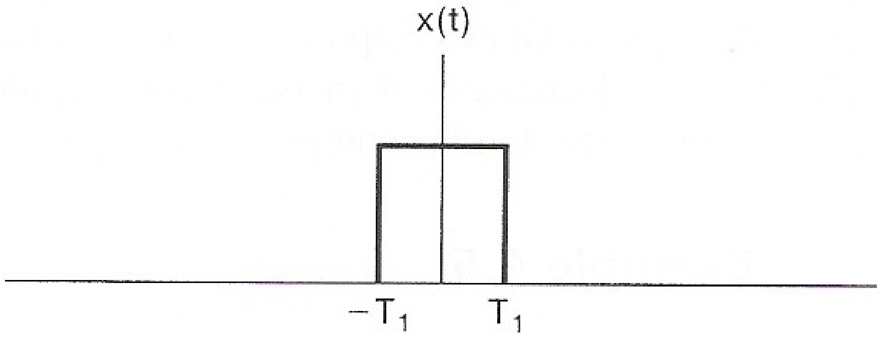
$$\text{其中 } a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \dfrac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}, & k \neq 0 \\ \dfrac{2T_1}{T} = \dfrac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$



例3：非周期信号的傅里叶变换

有如下信号$x(t)$，计算该信号的频域表示$X(j\omega)$

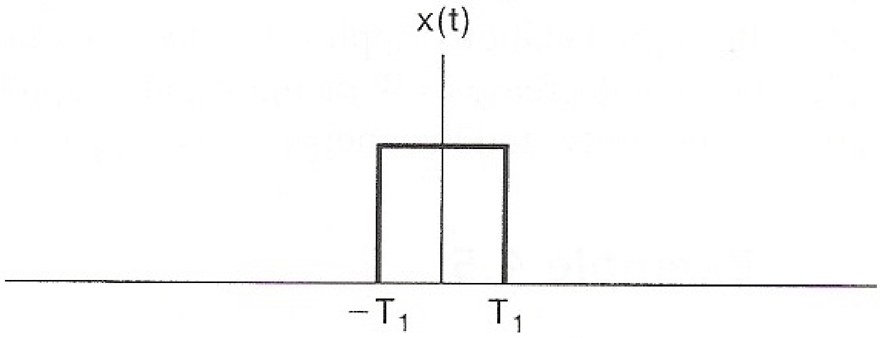
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



例3：非周期信号的傅里叶变换

有如下信号$x(t)$，计算该信号的频域表示$X(j\omega)$

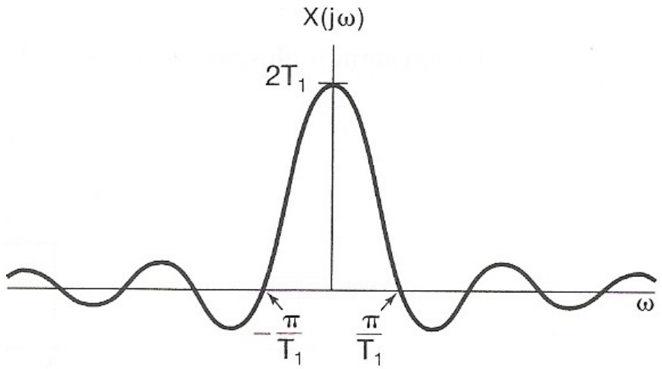
$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & |t|>T_1\end{cases}$$



解：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-T_1}^{T_1}e^{-j\omega t}dt$$

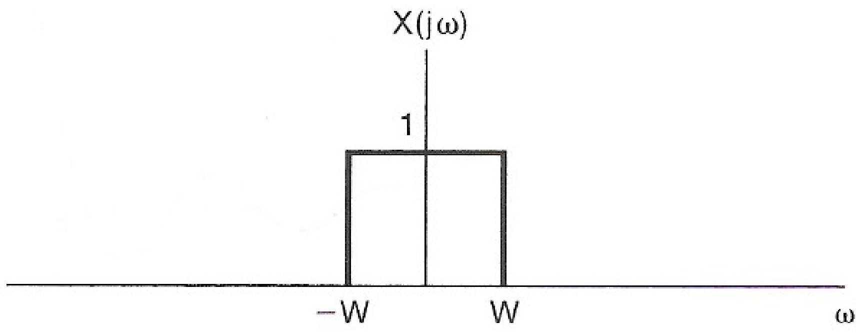
$$=-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega T_1}-e^{j\omega T_1}=\frac{2sin\omega T_1}{\omega}$$



例4：非周期信号的傅里叶变换

有如下信号的频域表示X($j\omega$)，计算该信号的时域表示$x(t)$

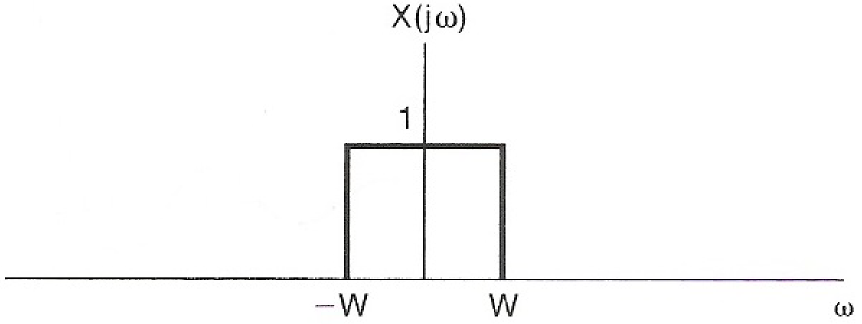
$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$



例4：非周期信号的傅里叶变换

有如下信号的频域表示$X(j\omega)$，计算该信号的时域表示$x(t)$

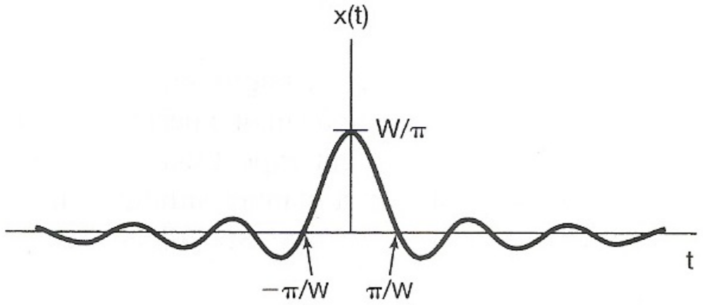
$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$



解：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}e^{jWt}-e^{-jWt}=\frac{sinWt}{\pi t}$$



例5：利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出

考虑如下系统，其单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{sin4(t-1)}{\pi(t-1)}$$

求上述系统对以下输入信号$x(t)$的输出：

$$x(t)=\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$$

例5：利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出

解：首先求$x(t)$的频域表示：$x(t)$是周期信号，可以首先利用傅里叶级数展开：

$$x(t)=\cos\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{j\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-j\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)}}{2}$$

$$=\frac{e^{j3t}e^{j\frac{\pi}{2}}+e^{-j3t}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}=\frac{je^{j3t}-je^{-j3t}}{2}=\frac{je^{j\omega_0 t}-je^{-j\omega_0 t}}{2}$$

因此，$a_1=\frac{j}{2}$，$a_{-1}=-\frac{j}{2}$

傅里叶变换后频域表示为：

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)=\pi j\delta(\omega-3)-\pi j\delta(\omega+3)$$

例5：利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出

解：

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)=\pi j\delta(\omega-3)-\pi j\delta(\omega+3)$$

然后，求h(t)的频域表示：

根据例4的结果： $x(t)=\dfrac{sinWt}{\pi t}\overset{F}{\leftrightarrow}X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$

则： $h(t)=\dfrac{sin4(t-1)}{\pi(t-1)}\overset{F}{\leftrightarrow}H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\omega}, & |\omega|<4\\ 0, & |\omega|>4\end{cases}$

因此，输出信号的频域表示为：

$$X(j\omega)H(j\omega)=\pi je^{-j\omega}[\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)]$$

例5：利用傅里叶级数、傅里叶变换计算系统的输出

解：

因此，输出信号的频域表示为：

$$X(j\omega)H(j\omega) = \pi j e^{-j\omega}[\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)]$$

输出信号的时域表示为：

$$x(t)*h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi j e^{-j\omega}[\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)]\ e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{j}{2}\left(e^{-j3}e^{j3t}-e^{j3}e^{-j3t}\right) = \frac{1}{2j}\left(-e^{j3(t-1)}+e^{-j3(t-1)}\right)$$

$$= -\sin\big(3(t-1)\big) = \cos\left(3(t-1)+\frac{\pi}{2}\right)$$