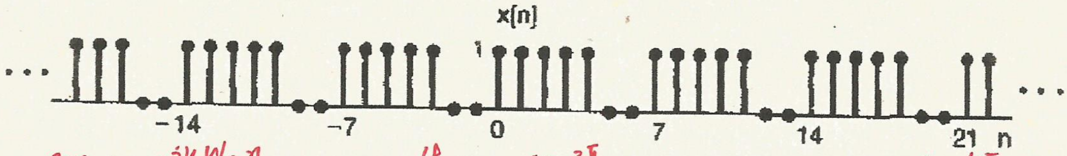
姓名: ______________　　　　　　　　学号: ________________

1. 对以下离散时间周期信号求其傅里叶级数系数a_k



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk\frac{2\pi}{7}n} = \frac{1}{7}\frac{1-e^{-jk\frac{10\pi}{7}}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{7}}}$$

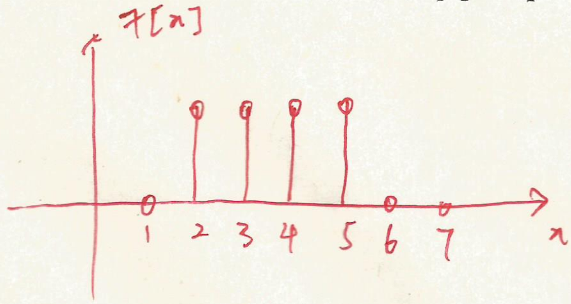
$$= \frac{1}{7}\frac{e^{-jk\frac{4}{7}\pi}\left(e^{jk\frac{5}{7}\pi}-e^{-jk\frac{5}{7}\pi}\right)}{e^{jk\frac{\pi}{7}}-e^{-jk\frac{\pi}{7}}}$$ （由分子、分母同时乘以$e^{-jk\frac{\pi}{7}}$所得）

$$= \frac{1}{7}\frac{e^{-jk\frac{4\pi}{7}}\sin\left(k\frac{5}{7}\pi\right)}{\sin\left(k\frac{\pi}{7}\right)}, \quad k\neq 0, \pm 7, \pm 14, \cdots$$

当 $k = 0, \pm 7, \pm 14, \cdots$:

$$a_k = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4} 1 = \frac{5}{7}$$

2. 利用傅里叶变换公式，计算$x[n] = u[n-2] - u[n-6]$



$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jwn} = \sum_{n=2}^{5} e^{-jwn}$$

$$= e^{-2jw} + e^{-3jw} + e^{-4jw} + e^{-5jw}$$

姓名：________　　　　学号：________

3. 选择合适的傅里叶变换性质和变换关系，计算以下结果，并说明所利用的性质：

1）$e^{-2(t-1)}u(t-1)$的傅里叶变换

2）$(\frac{sint}{\pi t})^2$的傅里叶变换

3）$t(\frac{sint}{\pi t})^2$的傅里叶变换

4）$\frac{2sin\omega T_1}{\omega}$的能量

5）已知$x(t)$与$h(t)$的傅里叶变换分别为$X(j\omega)$与$H(j\omega)$，用$X(j\omega)$与$H(j\omega)$来表示$x(3t)*h(3t)$的傅里叶变换结果

6）已知$x[n]$的傅里叶变换$X(e^{j\omega})$，求$(n-1)^2x[n]$的傅里叶变换

1) 由变换关系：

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2+jw}$$

由时移性质：

$$e^{-2(t-1)}u(t-1) \xleftrightarrow{F} \frac{e^{-jw}}{2+jw}$$

2). 由变换关系，

$$\frac{\sin t}{\pi t} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1, & |w|<1 \\ 0, & |w|>1 \end{cases}$$

由时域乘法性质，$(\frac{\sin t}{\pi t})^2$的傅里叶变换为上述频域表示自身卷积，再乘以$\frac{1}{2\pi}$，得

$$(\frac{\sin t}{\pi t})^2 \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 0, & w<-2 \text{或} w>2 \\ \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}w, & -2\le w<0 \\ \frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\pi}w, & 0\le w\le 2 \end{cases}$$

3). 由2)的结果，结合频域微分性质：

$$t x(t) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(jw)}{dw}$$

$$t(\frac{\sin t}{\pi t})^2 \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 0, & w<-2 \text{或} w>2 \\ \frac{j}{2\pi}, & -2\le w<0 \\ -\frac{j}{2\pi}, & 0\le w\le 2 \end{cases}$$

4). 由变换关系：

$$\begin{cases} 1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} \frac{2\sin wT_1}{w}$$

由帕斯瓦尔关系，在时域上求能量：

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-T_1}^{T_1}dw=2T_1$$

5). 由尺度变换性质

$$x(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3}X(\frac{jw}{3})$$

$$h(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{3}H(\frac{jw}{3})$$

由时域卷积性质：

$$x(3t)*h(3t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{9}X(\frac{jw}{3})H(\frac{jw}{3})$$

6). $(n-1)^2x[n]=(n^2-2n+1)x[n]$

$=n^2x[n]-2nx[n]+x[n]$

由频域微分性质：

$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$$

$$n^2x[n] \xleftrightarrow{F} -\frac{d^2X(e^{jw})}{dw^2}$$

$$\Rightarrow (n-1)^2x[n] \xleftrightarrow{F} -\frac{d^2X(e^{jw})}{dw^2}-2j\frac{dX(e^{jw})}{dw}+X(e^{jw})$$

4. 已知对$x(t)$进行采样的奈奎斯特率为ω_0，确定$\frac{dx(t)}{dt}$、$x^2(t)$以及$x(t)cos\omega_0 t$的奈奎斯特率。

奈奎斯特率为w_0，则$x(t)$的最大频率为$\frac{w_0}{2}$

① 由时域微分性质：

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} jwX(jw)$$

则$jwX(jw)$的最大频率仍是$\frac{w_0}{2}$，奈奎斯特率为w_0。

② 由时域乘法性质：

$$x^2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}[X(jw) * X(jw)]$$

$X(jw) * X(jw)$最大频率为w_0，奈奎斯特率为$2w_0$。

③ $$x(t)\cos w_0 t = \frac{1}{2}x(t)e^{jw_0} + \frac{1}{2}x(t)e^{-jw_0}$$

由频域移动性质：

$$\frac{1}{2}x(t)e^{jw_0} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(j(w-w_0))$$

$$\frac{1}{2}x(t)e^{-jw_0} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(j(w+w_0))$$

上述频域表示最大频率为：$\frac{w_0}{2}+w_0=\frac{3}{2}w_0$，奈奎斯特率为$3w_0$。