第十周　复习

目 录

绪 论

- 科学研究的三大方法
- 科学计算的过程
- 数值分析的任务
- 算法及误差
- 误差来源与分类
- 病态问题与条件数

非线性方程求根

- 二分法
- 简单迭代法
- 牛顿迭代法
- 弦截法

非线性方程求根

简单迭代法

迭代法步骤总结

(1)对于一般形式的方程$f(x)=0 \Rightarrow x=g(x)$

(2)再从某一数x_0出发，作序列$\{x_n\}$，$x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$

若序列有极限，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ 则可得$a=g(a)$即$f(a)=0$

即a是方程的根。

x_0称为初始近似，x_n称为n次近似，$g(x)$称为迭代函数，

$x_{n+1}=g(x_n)$称为迭代公式。

非线性方程求根

牛顿法

取$x_0 \approx x^*$，将$f(x)$在x_0做一阶$Taylor$展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$，ξ 在 x_0 和 x 之间。

将（$x^*-x_0)^2$看成高阶小量，则有：

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)\Rightarrow \quad x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ （牛顿公式）

只要 $f\in C^1$,每一步迭代都有$f'(x_k)\neq 0$ ，而且

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x^*$,则$x^*$就是$f(x)$的根

方程组求解

- 线性方程组的直接解法
  - 高斯消去法
  - 矩阵三角分解法
- 线性方程组的迭代法
  - 雅可比迭代
  - 高斯-赛德尔迭代
  - 收敛性

方程组求解

Gauss消元法的求解过程,可大致分为两个阶段:

- 把原方程组化为上三角形方程组,称之为“消元”过程;
- 用逆次序逐一求出上三角方程组的解,称之为“回代”过程。

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\
2x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 28 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\
-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6
\end{cases}
$$

方程组求解

解：增广矩阵为

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ 2x_1+4x_3+3x_4=28 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+x_4=20 \\ -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot} \to \\ m_{21}=2 \\ m_{31}=4 \\ m_{41}=-3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

用行 1 消去列 1 中对角线下的元素。将行 1 作为**主元行**，元素 $a_{11}=1$ 作为**主元**。用行 1 乘以常数 m_{k1}，再被行 k 减，$k=2,3,4$。结果如下：

$$\begin{array}{l} \\ \text{pivot} \to \\ m_{32}=1.5 \\ m_{42}=-1.75 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{-4} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

用行 2 消去列 2 中对角线下的元素。将行 2 作为主元行，用行 2 乘以常数 m_{k2}，再被行 k 减，$k=3,4$。结果如下：

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{pivot} \to \\ m_{43}=-1.9 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-5} & -7.5 & -35 \\ 0 & 0 & 9.5 & 5.25 & 48.5 \end{array}\right]$$

方程组求解

最后用行 3 乘以常数 $m_{43}=-1.9$，再被行 4 减，结果是上三角线性方程组的增广矩阵，表示如下：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7.5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right] \tag{11}$$

用回代法求解矩阵(11)，可得到

$$x_4=2,\quad x_3=4,\quad x_2=-1,\quad x_1=3$$ ■

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ 2x_1+4x_3+3x_4=28 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+x_4=20 \\ -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ -4x_2+2x_3-5x_4=2 \\ -5x_3-7.5x_4=-35 \\ -9x_4=-18 \end{cases}$$

利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

非奇异矩阵A可分解为

$$A = LU$$

L为下三角矩阵

U为上三角矩阵

线性方程组

$$AX = B \Longleftrightarrow LUX = B$$

$$\Updownarrow$$

$$LY = B$$

$$UX = Y$$

方程组求解

线性方程组的直接解法

- 高斯消去法
- 矩阵三角分解法

线性方程组的迭代法

- 雅可比迭代
- 高斯-赛德尔迭代
- 收敛性

推导其分量形式

由 $Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b \Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$ 得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{22}x_2 = -a_{21}x_1 \quad -a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \\ a_{nn}x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} \quad + b_n \end{cases}$$

第i个方程除以a_{ii}(i =1, 2, …, n), 得

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

方程组求解

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Jacobi迭代公式（分量形式）

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) / a_{ii}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

Jacobi迭代的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} \quad - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)} - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)} \quad + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

方程组求解—高斯赛德尔

- Gauss-Seidel迭代的分量形式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii},
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, n
$$

方程组求解—高斯赛德尔

Gauss–Seidel 迭代法

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (7 + y - z)/4 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = (15 + 2x - y)/5 \end{cases}$$

Gauss–Seidel 迭代法过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_{k+1} + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_{k+1} - y_{k+1})/5 \end{cases}$$

给一个初值 $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ 可得解 $(2,4,3)$

曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合

数值分析

下面两种办法常用来确定经验函数$y=g(x)$

（1）插值法　　　　（2）拟合法

根据问题的不同，有时要用插值技术来解决，有时则应该采用拟合的方法才合理。

（1）插值法的基本思想

已知数据表

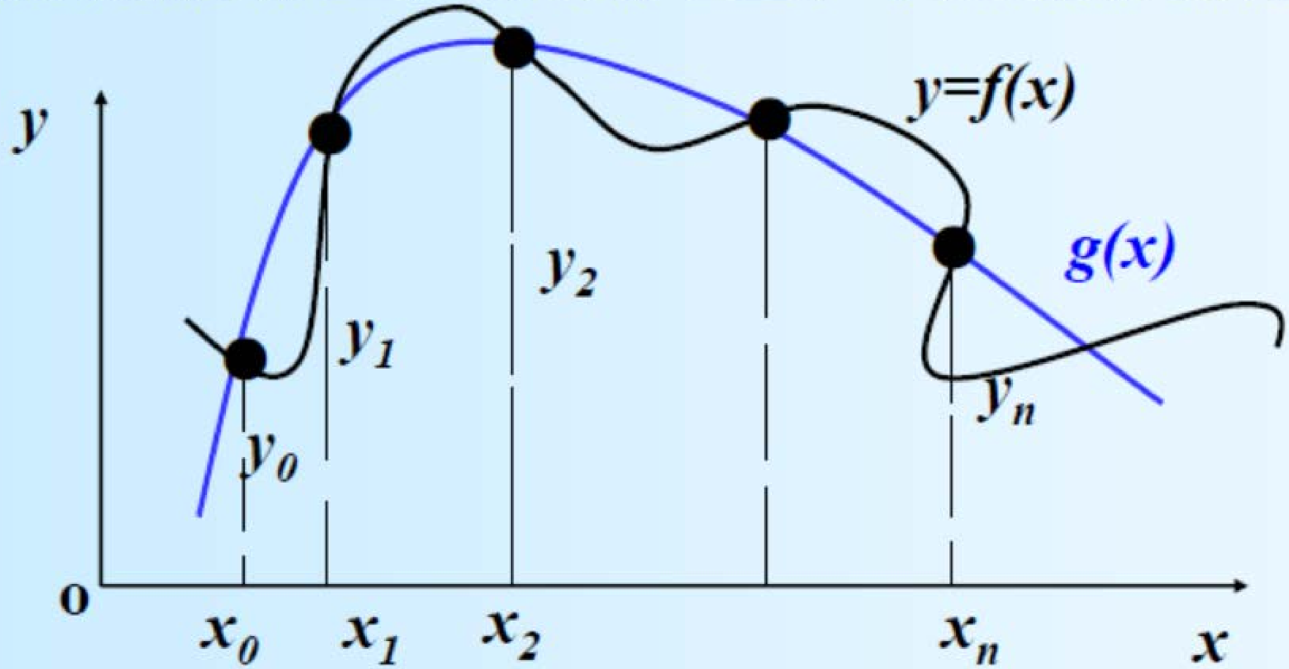
x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

求一个经验函数$y=g(x)$，使$g(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\ldots n$.

曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合

插值的任务就是由已知的观测点(x_i,y_i)为物理量(未知量),建立一个简单的、连续的解析模型$g(x)$，以便能根据该模型推测该物理量在非观测点处的特性。



曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合

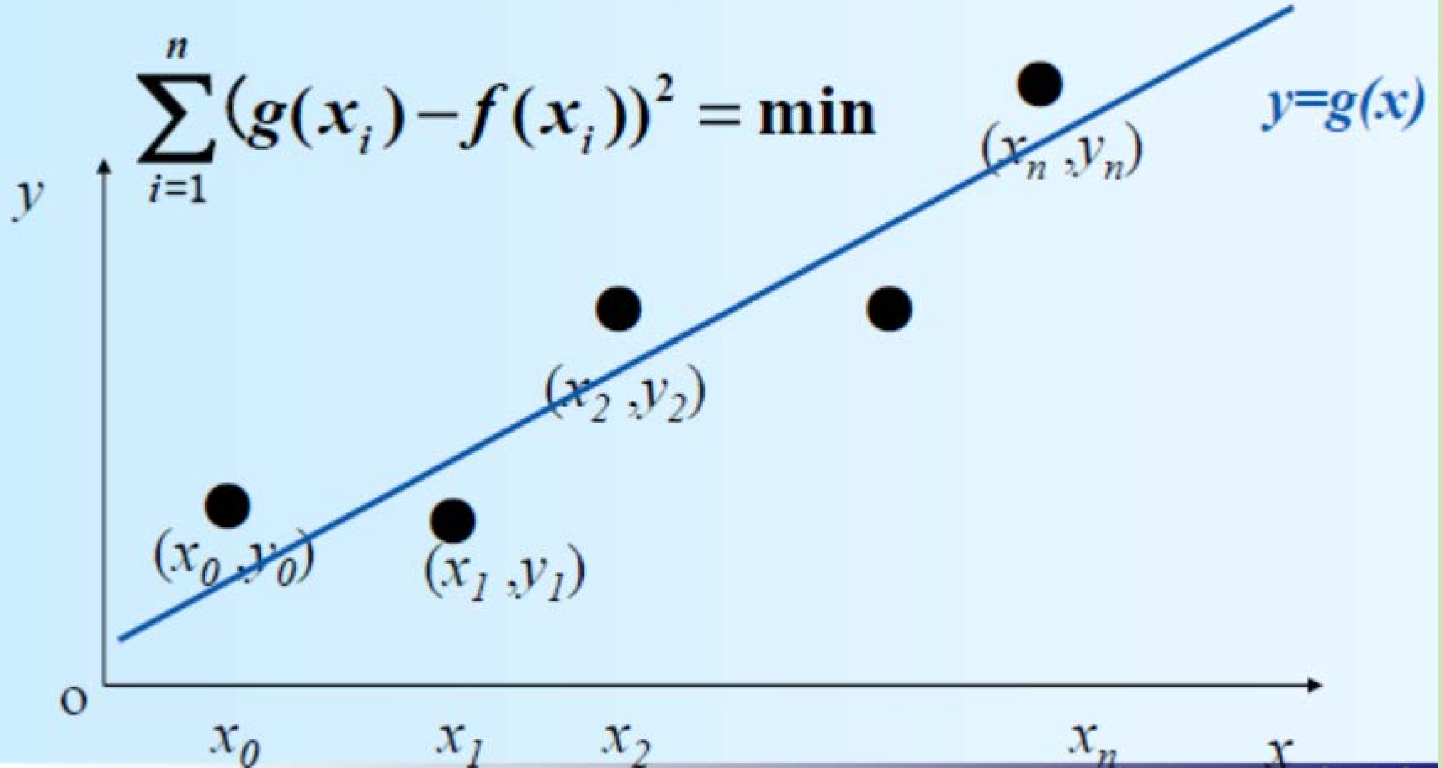
（2）拟合法的基本思想

已知数据表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

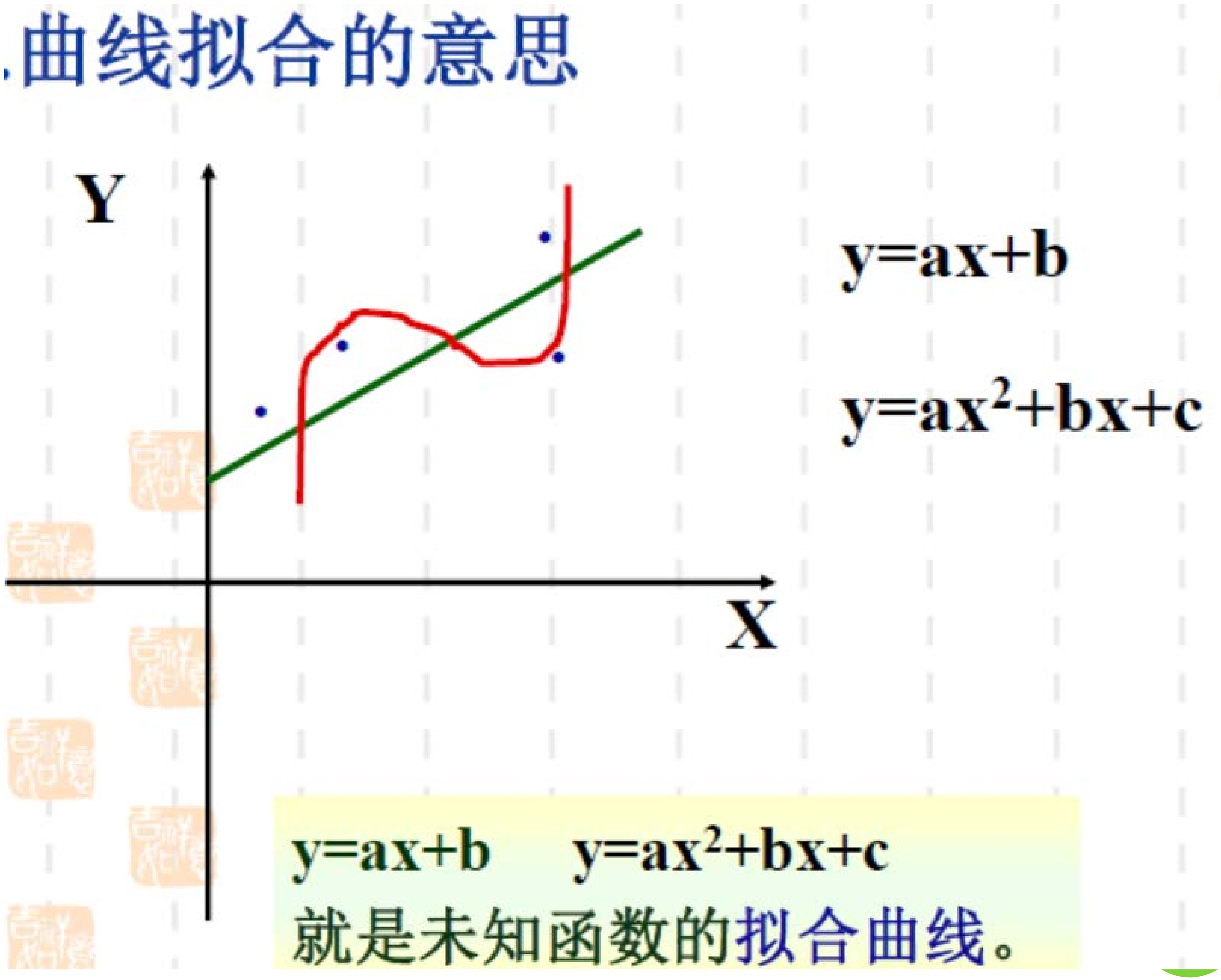
求一个经验函数$y=g(x)$，使

$$\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-f(x_i))^2=\min$$



曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合



曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合

:拟合1次曲线y=ax+b

根据公式： $Q=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2$

因为y=ax+b 所以 $Q=\sum(ax_i+b-y_i)^2$

根据最小二乘原理，为使Q有最小值，应满足如下式子：

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial b}=0$$

后得到：

$$a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum x_i y_i$$

$$a\sum x_i+bn=\sum y_i$$

曲线拟合

- 线性拟合
- 指数拟合

拟合2次曲线$y=ax^2+bx+c$

析:

误差平方和表达公式: $Q=\sum(\hat{y_i}-y_i)^2$

因为$y=ax^2+bx+c$ 所以 $Q=\sum(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2$

又根据:Q分别对a、b、c求偏导值为0,最后求得公式为:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{a}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1\left(x_k^2\right)=0 \\ \frac{\partial Q}{b}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1\left(x_k\right)=0 \\ \frac{\partial Q}{c}=0 \Rightarrow 2\sum_{k=1}^{N}\left(ax_k^2+bx_k+c-y_k\right)^1(1)=0 \end{cases}$$

曲线拟合 ➢ 指数拟合

指数函数的曲线拟合

已知：$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$,

求指数函数的曲线拟合 $y = Ce^{Ax}$ ------------------(1)

$y = Ce^{Ax}$ **的线性化方法**

对(1)两边取对数 $\ln(y) = Ax + \ln(C)$ -------(2)

引入变量变换：

$Y = \ln(y), X = x, B = \ln(C)$ -------(3)

线性关系式 $Y = AX + B$ -------(4)

xy平面上的初始点集(x_k, y_k)变换成了XY平面上的点集
这个过程称作**数据线性化** $(X_k, X_k) = (x_k, \ln(y_k))$

函数插值

- Taylor 级数和函数计算
- 插值介绍
- Lagrange 逼近
- Newton 多项式

函数插值

Taylor多项式逼近

设 $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$ 逼近多项式

$$E_n(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$ 误差项

$(c = c(x)$, c为x和$x0$之间的某个值$)$

函数插值

Lagrange插值

$$\boxed{P_1(x)=\sum_{k=0}^{1} y_k L_{1,k}(x)}$$

$$L_{1,0}(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad L_{1,1}(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$L_{1,0}(x_0)=1 \qquad L_{1,0}(x_1)=0$$

$$L_{1,1}(x_0)=0 \qquad L_{1,1}(x_1)=1$$

称$L_{1,0}(x)$和$L_{1,1}(x)$为以x_0,x_1为节点的**插值基函数**

函数插值

Newton多项式

具有n 个中心x_i ，(i=0,1,…,n-1), 的Newton多项式

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

即

$$P_1(x)=a_0+a_1(x-x_0)$$

$$P_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\boxed{a_2(x-x_0)(x-x_1)}$$

$$P_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\boxed{a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$P_4(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\boxed{a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$$

函数插值

n 次 Newton 插值多项式：

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots\cdots$$
$$+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

差商表

x	$f(x)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	…	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
				…	
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	…	
				…	
…	……	……	……	…	
…				…	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	…	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

函数插值

Newton多项式的系数

函数 $f(x)$ 的差商定义为

$$f[x_k]=f(x_k) \qquad f[x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_k]-f[x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

$$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_{k-1},x_k]-f[x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-2}}$$

$$f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]-f[x_{k-3},x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-3}}$$

$$\boxed{f[x_{k-j},x_{k-j+1},\cdots,x_k]=\frac{f[x_{k-j+1},x_{k-j+2},\cdots,x_k]-f[x_{k-j},x_{k-j+1},\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-j}}}$$

数值微分

- 数值微分的重要性
- 导数的近似值
- 数值差分公式
- 运用插值函数求数值微分
  - 牛顿多项式微分
  - 拉格朗日多项式微分

数值微分

中心差分公式

设 $f \in C^3[a,b]$, $x-h, x, x+h \in [a,b]$ 则

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

截断误差

$$E_{trunc}(f,h) = -\frac{h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2)$$

$$(c = c(x) \in [a,b])$$

数值微分

中心差分公式的推导

利用Taylor展开式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(c_1)h^3$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2!}f^{(2)}(x)h^2-\frac{1}{3!}f^{(3)}(c_2)h^3$$

$$\Rightarrow\quad f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{1}{3!}(f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_2))h^3$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\underbrace{\frac{1}{3!}f^{(3)}(c)h^2}_{\text{截断误差}}$$

$$\boxed{f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}}$$

数值微分

精度为 $O(h^2)$ 的中心差分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f_k = f(x_0 + kh)$$
$$(k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

数值微分

表 6.7 精度为 $O(h^2)$ 的前向差分公式和后向差分公式

$f'(x_0) \approx \dfrac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$	（前向微分）
$f'(x_0) \approx \dfrac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$	（后向微分）
$f''(x_0) \approx \dfrac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}$	（前向微分）
$f''(x_0) \approx \dfrac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}$	（后向微分）

数值积分

- 数值积分的重要性
- 数值积分的基本公式
- 组合梯形公式和Simpson公式
- 递归公式
- Romberg积分
- Gauss-Legendre积分

数值积分

数值积分的节点选择

梯形公式

Simpson 公式

Boole 公式

等距节点

当求积节点等距分布时，插值型求积公式称为牛顿—柯特斯(Newton-Cotes)求积公式。

Gauss-Legendre 公式

Legendre 多项式的零点

数值积分

闭型Newton-Cotes面积公式

设 $x_k = x_0 + kh$ 为等距节点, $f_k = f(x_k)$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$ 梯形公式

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$ **Simpson**公式

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$ **Simpson** $\mathbf{\frac{3}{8}}$公式

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

Boole 公式

数值积分

组合梯形公式的误差

对$[a,b]$上的积分，等距节点时在M个子区间的组合梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + h\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k) + E_T(f,h)$$

若$f \in C^2[a,b]$，则存在$c \in (a,b)$使得

$$E_T(f,h) = \frac{-(b-a)f^{(2)}(c)h^2}{12} = O(h^2)$$

$$(h = \frac{b-a}{M},\ x_k = a+kh,\ k=0,1,2,\ldots,M)$$

数值积分

组合Simpson公式

对 $[x_0, x_{2M}]$ 上的积分，等距节点时在M个子区间分别采用Simpson公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{M}(f(x_{2k-2}) + f(x_{2k-1}) + f(x_{2k}))$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M})$$

$$= \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

$$(h = \frac{b-a}{2M},\ x_k = a + kh, k = 0,1,2,\ldots,2M)$$

优化

- 梯度下降
- 牛顿法