上海大学 2007 ~ 2008 年度 冬 季学期试卷

成绩	

课程名: 概率论与数理统计A 课程号: 01014016 学分: 5

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一、(10分) 填空题 每格2分

1. 将一匀质硬币抛掷有n次, 观测每次的正反面结果. 则样本空间中基本事件的个数为: 2^n; 事件"至少出现一次正面"发生的概率为: $1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$.

2. 如果$P(A)=0.2$, $P(B)=1$, 那么$P(A\cup B)=$ 1.

3. 设总体$\mathbb{X}$的均值为μ, 方差为1. 记$\hat{\mu}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$为由容量为$n$的样本构成的$\mu$的矩估计量. 为使$P\{|\hat{\mu}_n-\mu|<0.1\}\geq 0.9$, 利用Chebyshev不等式估计样本容量$n$至少需要达到 1000 个; 如果利用中心极限定理, 估计样本容量n至少需要达到 271 个.

二、(10分) 判别题(请在每个问题后的括号中填入✓或✗) 每格2分

1. 不可能事件$\emptyset$与任何事件既互不相容又相互独立. (✓)

2. 如果随机变量X的概率密度函数为: $f(x)=Ce^{-x^2+x}(-\infty<x<+\infty)$, 其中$C$是使$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$而适当选取的常数, 则$X$服从正态分布. (✓)

3. 如果随机变量X与Y的协方差等于0, 则X与Y相互独立. (✗)

4. 估计量的方差(如果存在)越小越好. (✗)

5. θ的一个置信度为p的区间估计, 表明该区间覆盖θ的概率为$1-p$. (✗)

三、(10分) 选择题(请在每个问题后的括号中填入A, B, C或D) 每格2分

1. 设事件A, B, C相互独立, 且$P(A)=P(B)=P(C)=p$. 则$P(A\cup B\cup C)=$(D)

   (A) p^3 (B) $p^2(2-p)$ (C) $p^2(1-p)$ (D) $1-(1-p)^3$

2. 设$F(x)$为随机变量X的分布函数, 则$P\{X=c\}=$(C).

   (A) $F'(c)$ (B) 0 (C) $F(c)-F(c^-)$ (D) $F'(c)dx$

3. 设随机变量X的方差存在, 则使$E\left[(X-a)^2\right]$达到最小的$a=$(B).

   (A) $E(X)^2$ (B) $E(X)$ (C) 0 (D) $\sqrt{D(X)}$

4. 记$f_n(A)$为在n次独立试验中事件A发生的频率, $P(A)$为A发生的概率. Bernoulli的大数定律叙述为: 对$\forall\varepsilon>0$, 有(A).

   (A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|f_n(A)-P(A)|\geq\varepsilon\}=0$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|f_n(A)-P(A)|\geq\varepsilon\}=1$

   (C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon\}=0$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\{f_n(A)-P(A)<\varepsilon\}=1$

5. 对于分布假设检验问题: $H_0:\mathbb{X}\sim F(x)$, 其χ^2检验统计量$K=\sum\limits_{k=1}^r\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}$(B).

   (A) 越大对H_0越有利 (B) 越小对H_0越有利

   (C) 太小或太大对H_0都不利 (D) 太小或太大对H_0都有利

四、(10分) 某产品需经两次检验. 已知该产品首次检验通过的概率是0.6, 在第一次检验通过的条件下第二次检验也能通过的概率是0.9, 而在第一次检验未通过的条件下第二次检验能通过的概率则是0.3. 求:

1. 第二次检验能通过的概率; (5分)

2. 若一产品在第二次检验通过的条件下, 其首次检验时通过的概率. (5分)

1答: 设A为"首次检验通过", B为"第二次检验通过". 样本空间的完备事件组为A和

则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A}) && \textcircled{1} \\ &= 0.6\times 0.9+0.4\times 0.3 && \textcircled{2} \\ &= 0.66 && \textcircled{1} \end{aligned}$$

2答: 在第二次检验通过的条件下，其首次检验时通过的概率为:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} && \textcircled{2} \\ &= \frac{0.6\times 0.9}{0.66} && \textcircled{2} \\ &= \frac{0.54}{0.66} \\ &= \frac{9}{11} = 0.8181818 && \textcircled{1} \end{aligned}$$

五、(15分) 设随机变量X的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x^2} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

1. 求常数C;　(5分)
2. 写出X的分布函数$F(x)$;　(5分)
3. 计算$P\{1\le X\le 2\}$.　(5分)

答:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= C\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}dx && \textcircled{1} \\ &= \frac{C}{2}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_0^{+\infty} && \textcircled{2} \\ &= \frac{C}{2}=1 && \textcircled{1} \end{aligned}$$

得$C=2$.　$\textcircled{1}$

2答: 对于$x\ge 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(u)du && \textcircled{1} \\ &= \int_0^x 2u\mathrm{e}^{-u^2}du && \textcircled{1} \\ &= 1-\mathrm{e}^{-x^2} && \textcircled{2} \end{aligned}$$

所以X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x^2} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad \textcircled{1}$$

3答:

$$P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1)=\mathrm{e}^{-1^2}-\mathrm{e}^{-2^2}=0.3495638$$

六、(15分) 已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x,y\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求:

1. X的边缘概率密度函数$f_X(x)$;　(5分)
2. $X=x$时，Y的条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$;　(5分)
3. X与Y的协方差.　(5分)

1答:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy && \textcircled{1} \\ &= \int_0^1 (x+y)dy && \textcircled{2} \\ &= x+\frac{1}{2} \quad 0\le x\le 1 \end{aligned}$$

2答:

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} && ① \\
&= \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} && ② \\
&= \frac{2(x+y)}{2x+1} \quad 0 \le y \le 1
\end{aligned}
$$

① ①

3答:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{7}{12} \quad ①$$

由分布的对称性, $\mathrm{E}(Y) = \frac{7}{12}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy \\
&= \int_0^1 y\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)dy && ① \\
&= \frac{1}{3} && ①
\end{aligned}
$$

于是

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}$$

① ①

七、(10分) 有一500页的书, 其每页的印刷错误字数相互独立, 且均服从以下分布:

每页错字数X	0	1	2	3
p_k	0.95	0.02	0.02	0.01

利用中心极限定理求解下列题目:

1. 书中错字总数不超过60个的概率; (5分)
2. 书中无错字的页数超过470页的概率. (5分)

1答: 记X_k为第k页的错字数, 则$X_1, \cdots, X_{500}$独立同分布, 且$\mathrm{E}(X_k) = 0.09$, $\mathrm{D}(X_k) = 0.1819$. ① ① 根据中心极限定理, 书中错字总数$\sum_{k=1}^{500} X_k$近似地服从$N(500\times 0.09, 500\times 0.1819)$ (即$N(45, 90.95)$),

$$
\begin{aligned}
P\left\{\sum_{k=1}^{500} X_k \le 60\right\} &\approx \Phi\left(\frac{60-45}{\sqrt{90.95}}\right) && ① \\
&= \Phi(1.5729) && ① \\
&= 0.9421 && ①
\end{aligned}
$$

2答: 记Y为书中无错字的页数, 则$Y \sim b(500, 0.95)$. 根据De Moivre-Laplace中心极限定理, Y近似地服从$N(500\times 0.95, 500\times 0.95\times 0.05)$(即$N(475, 23.75)$), 于是 ① ①

$$
\begin{aligned}
P\{Y > 470\} &\approx 1 - \Phi\left(\frac{470-475}{\sqrt{23.75}}\right) && ① \\
&= 1 - \Phi(-1.0260) = \Phi(1.0260) && ① \\
&= 0.8476 && ①
\end{aligned}
$$

八、(10分) 设简单随机样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$为取自密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} & x \in [0,\theta] \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

的总体. 求

1. θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$; (5分)
2. θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_L$. (5分)

1答:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^\theta \frac{2x^2}{\theta^2} = \frac{2}{3}\theta && ② \\
\theta &= \frac{3}{2}\mathrm{E}(X) && ② \\
\hat{\theta}_M &= \frac{3}{2}\overline{X} && ①
\end{aligned}
$$

2答: 似然函数为:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i & x_1, \cdots, x_n \le \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad ②$$

$$= \begin{cases} \frac{2^n}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i & \theta \ge x_{(n)} \\ 0 & \theta < x_{(n)} \end{cases} \quad ②$$

其中$x_{(n)} = \max(x_1, \cdots, x_n)$. 当$\theta \ge x_{(n)}$时, $L(\theta)$是θ的单调递减函数, 而当$\theta < x_{(n)}$时, $L(\theta) = 0$, 于是$L(\theta)$在$x_{(n)}$处达到最大值, 即得$\hat{\theta}_L = x_{(n)}$, θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_L = X_{(n)}$ ①

九、(10分) 设某种职业的年收入$\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从该种职业人群中随机抽取一组容量为36的样本, 算得样本均值$\bar{x} = 6.5$(万元), 样本标准差$s = 1.0$(万元).

1. 求总体标准差σ的置信度为0.95的区间估计;
2. 在显著性水平$\alpha = 0.05$下, 能否认为该种职业的平均年收入超过了6万元.

1答: 总体标准差σ的置信度为0.95的区间估计为:

$$\left[s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, s\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right] \quad ①$$

$$= \left[\sqrt{\frac{35}{53.2033}}, \sqrt{\frac{35}{20.5694}}\right] \quad ②$$

$$= [0.8111, 1.3044] \quad ②$$

2答: 构造假设:

$$H_0: \mu \le 6 \quad H_1: \mu > 6 \quad ①$$

的拒绝域为:

$t_\alpha(35) = 1.6896$. ①

$$W = \left\{x \middle| \bar{x} > 6 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} \quad ①$$

$T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = 3$. ①

$$= \left\{x \middle| \bar{x} > 6 + \frac{1}{\sqrt{36}} 1.6896\right\} \quad ①$$

$$= \{x | \bar{x} > 6.2816\}$$

由于$\bar{x} = 6.5 \in W$, 因此拒绝H_0, 即可以认为该种职业的平均年收入超过了6万

标准正态分布表

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.02	0.8461	0.8464	0.8466	0.8468	0.8471	0.8473	0.8476	0.8478	0.8480	0.8483
1.03	0.8485	0.8487	0.8490	0.8492	0.8494	0.8497	0.8499	0.8501	0.8504	0.8506
1.57	0.9418	0.9419	0.9420	0.9421	0.9423	0.9424	0.9425	0.9426	0.9427	0.9428
1.58	0.9429	0.9431	0.9432	0.9433	0.9434	0.9435	0.9436	0.9437	0.9439	0.9440
1.64	0.9495	0.9496	0.9497	0.9498	0.9499	0.9500	0.9501	0.9502	0.9503	0.9504
1.65	0.9505	0.9506	0.9507	0.9508	0.9509	0.9510	0.9511	0.9512	0.9513	0.9514

t-分布和χ^2-分布分位点表

α	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
$t_\alpha(35)$	-2.0301	-1.6896	-1.3062	1.3062	1.6896	2.0301
$t_\alpha(36)$	-2.0281	-1.6883	-1.3055	1.3055	1.6883	2.0281
$t_\alpha(37)$	-2.0262	-1.6871	-1.3049	1.3049	1.6871	2.0262
$\chi^2_\alpha(35)$	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033
$\chi^2_\alpha(36)$	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373
$\chi^2_\alpha(37)$	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680

上海大学 2008 ~ 2009 年度 春 季学期试卷

成绩	

课程名: 概率论A　　　课程号: 01014011　　　学分: 3

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、(20分) 填空题(每格2分)

1. 在三次独立试验中, 事件A发生的概率相等. 若已知A至少发生一次的概率等于$\frac{37}{64}$, 则事件A在一次试验中发生的概率为: $\underline{\frac{1}{4}}$; 三次独立试验中A至多发生两次的概率为: $\underline{\frac{63}{64}}$.

2. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x) = Ce^{-|x|}, (-\infty < x < +\infty)$, 则常数$C = \underline{\frac{1}{2}}$; $P\{X>1\} = \underline{\frac{1}{2}e^{-1}}$.

3. 设$(X,Y) \sim N(1,2,4,4,\frac{1}{2})$, 那么$X-Y \sim \underline{N(-1,4)}$; $P\{X>Y\} = \underline{0.3085}$.

4. 设$X \sim U(-1,1)$, 则$E(|X|) = \underline{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{Cov}(X,|X|) = \underline{0}$.

5. 设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots$相互独立, 且$E(X_i)=0, D(X_i)=1$. 根据Chebyshev不等式, $P\left\{\frac{1}{100}\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < \frac{1}{5}\right\} \geq \underline{0.75}$; 由中心极限定理, $P\left\{\frac{1}{100}\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < \frac{1}{5}\right\} \approx \underline{0.9544}$.

$P(|\sum \xi_i| < 20) = P(|\frac{\sum \xi_i - 0}{10}| < \frac{20}{10}) = P(-2 < \frac{\sum \xi_i}{10} < 2) = 2\Phi(2) - 1$

二、(10分) 判别题(请在每个问题后的括号中填入✓或✗. 每小题2分)

1. 如果事件A与B相互独立, 那么$AB = \emptyset$. (✗)

2. 设X为连续型随机变量, 若X与$-X$同分布, 则X的概率密度函数满足: $f(-x) = f(x)$. (✓)

3. 设X, Y均服从正态分布, 则(X,Y)一定服从二维正态分布. (✗)

4. 若随机变量X与Y相互独立, 且方差均存在, 则$D(XY) = D(X)D(Y)$. (✗)

5. 设$X \sim e(\lambda)$, 则概率值$P\{X < E(X)\}$与λ无关. (✓)

三、(10分) 选择题(请在每个问题后的括号中填入A, B, C或D. 每小题2分)

1. 已知$P(A)=0.7$, $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$, 则$P(B-A)=$(B)

   (A) 0.4　(B) 0.1　(C) 0.2　(D) 0.35

2. $F_1(x), F_2(x)$是分布函数, 使$\alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$ 仍为分布函数的α, β可能是(D)

   (A) $\alpha=1, \beta=1$　(B) $\alpha=1.7, \beta=-0.7$

   (C) $\alpha=0.5, \beta=-0.5$　(D) $\alpha=0.3, \beta=0.7$

3. 设X与Y相互独立, 且均服从$(0,1]$上的均匀分布, 则$P\left\{X+Y \leq \frac{6}{5}\right\}=$(A).

   (A) $\frac{17}{25}$　(B) $\frac{8}{25}$　(C) $\frac{16}{25}$　(D) $\frac{9}{25}$

4. $X \sim \pi(\lambda)$, 且满足$D(X) = (E(X))^2$, 则$P\{X \leq 1\}=$(B).

   (A) e^{-2}　(B) $2e^{-1}$　(C) $1-e^{-2}$　(D) $1-e^{-1}$

5. 如果$X_1, X_2, \cdots$相互独立, 且$E(X_i)=0$, $D(X_i)=\sigma^2$. 记$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则对$\forall \varepsilon > 0$, 有(D).

   (A) $\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X}_n| < \varepsilon\right\} = 0$　(B) $\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X}_n| > \varepsilon\right\} = 1$

   (C) $\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X}_n| < \varepsilon\right\} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　(D) $\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X}_n| < \varepsilon\right\} = 1$

四、(10分) 一盒子中装有10个玻璃杯, 其中含有0, 1, 2只次品的概率分别为0.8, 0.1和0.1.

1. (6分) 从盒中随机取两个杯子, 求两个均是正品的概率;

2. (4分) 若已知取到的两只杯子都是正品, 求整箱杯子没有次品的概率.

1答：设A为“取到的两只杯子都是正品”，B_i为“盒子中含有i只次品”$(i=0,1,2)$. 样本空间的完备事件组为$B_0\cup B_1\cup B_2$. 并且

$$P(A|B_0)=1; \quad (1分)$$

$$P(A|B_1)=\frac{C_9^2C_1^0}{C_{10}^2}=\frac{4}{5}; \quad (1分)$$

$$P(A|B_2)=\frac{C_8^2C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}. \quad (1分)$$

$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2) \quad (2分)$$

$$=0.8\times 1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{28}{45}$$

$$=0.9422 \quad (1分)$$

2答：若已知取到的两只杯子都是正品，则整箱杯子没有次品的概率为：

$$P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} \quad (2分)$$

$$=\frac{0.8\times 1}{0.9422}=0.8491 \quad (2分)$$

五、(20分) 设随机变量X的概率密度函数形如$f_X(x)=cg(x)$，其中，

$$g(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0\\ 1-x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

试求：

1. (5分) 常数c;
2. (5分) X的分布函数$F_X(x)$;
3. (5分) $P\left\{|X|\le\frac{1}{2}\right\}$;
4. (5分) $Y=X^{\frac{1}{3}}$的概率密度函数$f_Y(y)$.

1答：因为

以及

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3} \quad (1分+1分)$$

$$=\frac{7}{6} \quad (1分)$$

所以$c=\frac{6}{7}$. (1分)

2答：根据分布函数的定义，

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du=\frac{6}{7}\int_{-\infty}^{x}g(u)du \quad (1分)$$

当$x<-1$时，$F_X(x)=0$; (1分)

当$-1\le x\le 0$时，$F_X(x)=\frac{6}{7}\int_{-1}^{x}(1+u)du=\frac{3}{7}(1+x)^2$; (1分)

当$0<x\le 1$时，$F_X(x)=\frac{6}{7}\int_{-1}^{0}(1+u)du+\frac{6}{7}\int_{0}^{x}\left(1-u^2\right)du$

$$=\frac{1}{7}\left(3+6x-2x^3\right); \quad (1分)$$

当$x>1$时，$F_X(x)=1$; (1分)

3答：

$$P\left\{|X|\le\frac{1}{2}\right\}=F_X\left(\frac{1}{2}\right)-F_X\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (2分)$$

$$=\frac{23}{28}-\frac{3}{28} \quad (1分+1分)$$

$$=\frac{5}{7} \quad (1分)$$

4答：记$y=x^{\frac{1}{3}}$的反函数为$h(y)=y^3$.

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\,|h'(y)| \quad (2分)$$

$$=\begin{cases}\frac{18}{7}y^2\left(1+y^3\right), & -1\le y\le 0 & (1分)\\ \frac{18}{7}y^2\left(1-y^6\right), & 0<y\le 1 & (1分)\\ 0, & 其它 & (1分)\end{cases}$$

六、(20分) 设二维离散型随机变量(X,Y)的分量X取值0和1, 分量Y的取值为: -1, 0和1. 并且已知$P\{X=0,Y=-1\}=0.1$, $P\{X=1,Y=0\}=0.2$, $P\{X=1\}=0.7$, $P\{Y=-1\}=P\{Y=1\}=0.4$.

1. (8分) 求(X,Y)的联合分布律, X和Y的边缘分布律, 并判别X与Y的独立性;
2. (8分) 求$Z=X+Y$的分布律;
3. (4分) 计算$X+Y=1$时, X的条件分布律.

1答: 计算过程及结果如下, 框中每个概率值为1分:

$X\setminus Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.1	$\boxed{0}$	$\boxed{0.2}$	$\boxed{0.3}$
1	$\boxed{0.3}$	0.2	$\boxed{0.2}$	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	$\boxed{0.2}$	0.4	

表 -6

因为$P\{X=0,Y=-1\}=0.1\neq P\{X=0\}P\{Y=-1\}=0.12$(1分), 所以$X$与$Y$不独立(1分).

+2

2答: 计算过程及结果如下, 框中每个数值为1分:

Z	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
p_k	$\boxed{0.1}$	$\boxed{0.3}$	$\boxed{0.4}$	$\boxed{0.2}$

3答: $X+Y=1$时, X的条件分布律为:

$$P\{X=0|X+Y=1\}=\frac{P\{X=0,X+Y=1\}}{P\{X+Y=1\}} \qquad (1分)$$

$$=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{0.4}=0.5 \qquad (1分)$$

$$P\{X=1|X+Y=1\}=\frac{P\{X=1,X+Y=1\}}{P\{X+Y=1\}} \qquad (1分)$$

$$P\{X=1,Y=0\}$$

七、(10分) 考虑一单性种群的繁殖问题. 假设种群当前具有1万个个体, 每个个体繁殖的后代数分布如下:

后代数(个)	0	1	2
概率	0.5	0.3	0.2

假设种群中个体之间是相互独立的. 试用中心极限定理计算下列题目:

1. (5分) 该种群下一代的个数介于6900~7200的概率;
2. (5分) 该种群中那些育有后代的个体数至少为4900的概率.

1答: 设X_i为该种群中第i个个体的后代数($i=1,2,\cdots,10000$), 则$\mathrm{E}(X_i)=0.7$(1分), $\mathrm{D}(X_i)=0.61$(1分). 根据中心极限定理, 种群下一代的个数$\sum\limits_{i=1}^{10000}X_i$近似地服从$N(7000,6100)$. 于是

$$P\left\{6900<\sum_{i=1}^{10000}X_i\le 7200\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{7200-7000}{\sqrt{6100}}\right)-\Phi\left(\frac{6900-7000}{\sqrt{6100}}\right) \qquad (1分)$$

$$=\Phi(2.5607)-\Phi(-1.2804) \qquad (1分)$$

$$=0.9948-0.1003=0.8945 \qquad (1分)$$

2答: 设Y是该种群中具有后代的个体数, 根据De Moivre-Laplace中心极限定理, Y近似地服从$N(5000,2500)$(1分+1分).

$$P\{Y\ge 4900\}\approx 1-\Phi\left(\frac{4900-5000}{\sqrt{2500}}\right) \qquad (1分)$$

$$=1-\Phi(-2)=\Phi(2) \qquad (1分)$$

$$=0.9772 \qquad (1分)$$

上海大学 2008 ~ 2009 年度 冬 季学期试卷

成绩	

课程名: 概率论与数理统计A 课程号: 01014016 学分: 5

应试人声明:

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人________ 应试人学号________ 应试人所在院系________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、(20分) 填空题(每格2分)

1. 一袋中有5个小球, 它们是2个白球和3个黑球. 从中随机取两个球, 则取到一黑一白的概率为 $\frac{3}{5}$. 如果已知其中一个是白球, 则另一个是黑球的概率为: $\frac{6}{7}$.

2. 若$X \sim \pi(1)$, 则$P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-1}$, $P\{X = 1 | X \geq 1\} = \frac{1}{e-1}$ $\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$

3. 设(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)$, 如果X与Y相互独立, 那么 $F(x, +\infty)F(+\infty, y) = F(x, y)$, $F_{X|Y}(x|y) = F(x, +\infty)$.

4. 设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots$相互独立, 且对于每个X_i, $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$, $\mathrm{D}(X_i) = \sigma^2$, 则$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)^2\right) = \sigma^2$; $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$.

5. 已知X, Y独立同分布于$N(0, \sigma^2)$, 那么$\left(\frac{X}{Y}\right)^2 \sim F(1, 1)$; 为使$C(X+Y)^2$服从$\chi^2$分布, 则$C = \frac{1}{2\sigma^2}$.

二、(10分) 判别题(请在每个问题后的括号中填入✓或✗. 每小题2分)

1. 对于事件A和B, 总有$A - B = A\bar{B}$. (✓)

2. 如果随机变量X和Y具有相同的分布, 那么$P\{X = Y\} > 0$. (✗)

3. 如果X和Y均服从正态分布, 则(X, Y)服从二维正态分布. (✗)

4. 如果X与Y的相互独立, 那么$\mathrm{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(Y)}$. (✗)

5. 设$\hat{\theta}_n$是由大小为n的样本构成的估计量, 并满足$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta$, 那么$\hat{\theta}_n$是$\theta$的相合估计. (✗)

三、(10分) 选择题(请在每个问题后的括号中填入A, B, C或D. 每小题2分)

1. 对于$P(A)$, $P(B) > 0$, 如果$P(A|B) = P(B|A)$, 则(B).
   (A) $A = B$ (B) $P(A) = P(B)$ (C) A, B相互独立 (D) A, B互不相容

2. 设$F(x)$为随机向量X的分布函数, 则$P\{X \geq a\}$ =(C).
   (A) $1 - F(a)$ (B) $F(a) - F(a^-)$
   (C) $1 - F(a^-)$ (D) $F(a) - F(-\infty)$

3. X, Y相互独立, 且均服从$b(1, p)$, 则$P\{\min(X, Y) < \max(X, Y)\}$等于(C).
   (A) p^2 (B) 1 (C) $2p(1-p)$ (D) $(1-p)^2$

4. 如果$X_1, \cdots, X_n$相互独立, 且均服从指数分布, 则下列哪个随机变量仍然服从指数分布(D).
   (A) $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (B) $\prod_{i=1}^{n} X_i$ (C) $\max_{1\leq i\leq n}(X_i)$ (D) $\min_{1\leq i\leq n}(X_i)$

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自均匀分布总体$U(0, \theta)$的一组样本, , 则下列哪个估计量不是θ的好估计(A).
   (A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (B) $\max_{1\leq i\leq n}(X_i)$ (C) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (D) $\frac{n+1}{n}\max_{1\leq i\leq n}(X_i)$

四、(10分) 有一批数量非常大的产品, 次品率为p. 现从中取出n件样品进行检验, 如果全部合格, 则这批产品被接收. 但检验过程可能会出差错: 一件次品被误认为是合格品的概率为a, 而一件合格品被误认为是次品的概率为b. 假设各件样品的检验是独立的.

1. (5分) 求这批产品被接收的概率;

2. (5分) 如果这批产品经检验被接收, 求这n件样品确实都是合格品的概率.

1答：设A为“这批产品被接收”，B_i为“n件样品中有i件次品”．样本空间的完备事件组为$B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$．并且

$$P(B_i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i},\ P(A|B_i) = a^i (1-b)^{n-i},\ i = 0, 1, \cdots, n$$

于是

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=0}^{n} P(B_i) P(A|B_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (ap)^i ((1-b)(1-p))^{n-i} \\ &= (ap + (1-b)(1-p))^n \end{aligned}$$

(过程)

$ap+1-b-p+bp$

2答：如果这批产品经检验被接收，则这n件样品确实都是合格品的概率为：

$$\begin{aligned} P(B_0|A) &= \frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} \\ &= \left(\frac{(1-b)(1-p)}{ap + (1-b)(1-p)}\right)^n \end{aligned}$$

五、(20分) 设随机变量X的分布函数为：

$$F(x) = A + B\arctan(x),\ -\infty < x < +\infty$$

试计算

1. (5分) 常数A和B;

2. (5分) X的概率密度函数$f(x)$;

3. (5分) $P\{|X| \le 1\}$;

4. (5分) $Y = X^2$的概率密度$f_Y(y)$.

1答：根据分布函数的性质，

$$F(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B, \quad F(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$$

得$A = \frac{1}{2}$，$B = \frac{1}{\pi}$．

2答：X的概率密度函数为：

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ -\infty < x < +\infty$$

3答：

$$P\{|X| \le 1\} = F(1) - F(-1) = \frac{2}{\pi}\arctan(1) = \frac{1}{2}$$

4答：根据分布函数的定义，Y的分布函数为：

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X^2 \le y\}$$

(i) 如果$y \le 0$，则$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = 0$.

(ii) 如果$y > 0$，则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\} \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{y} \end{aligned}$$

此时

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

六、(10分) 已知(X,Y)的联合分布率为：

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.2	0.3

求X与Y的相关系数.

答：先计算X与Y的边缘分布律：

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.4	0.6

Y	-1	0	1
$p_{\cdot j}$	0.2	0.4	0.4

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.6, \quad \mathrm{D}(X) = 0.24 \\ \mathrm{E}(Y) &= 0.2, \quad \mathrm{E}(Y^2) = 0.6, \quad \mathrm{D}(Y) = 0.6 - 0.2^2 = 0.56 \\ \mathrm{E}(XY) &= -0.1 + 0.3 = 0.2, \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0.2 - 0.6 \times 0.2 = 0.08 \\ \rho_{XY} &= \frac{0.08}{\sqrt{0.24 \times 0.56}} = 0.2182 \end{aligned}$$

公式 公式

七、(10分) 本题是一保险公司关于投保人发生人身重大伤害事故的概率研究以及公司盈利的计算.

1. (5分) 该公司连续记录了n年的数据，其中第i年有N_i人投保，其中有k_i人发生了重大人身伤害事故. 求投保人每年发生重大人身伤害事故的概率p的极大似然估计(假设每个投保人每年是否发生人身伤害事故是相互独立的，并具有相同的概率);

2. (5分) 如果该保险公司已知了从事某种危险职业人员每年发生重大人身伤害事故的概率为$p = 0.005$. 现有5000名此种职业的人员在年初参保，每人交付800元的保费，如果投保人在该年发生重大人身伤害事故，可以获赔10万元. 利用中心极限定理计算保险公司该年在此项业务中盈利超过1百万元的概率.

1答: 第i年发生重大人身伤害事故的人数$X_i \sim b(N_i, p)$, 于是p的似然函数和对数似然函数为:

基本步骤

$X_i \sim b(N_i,p)$

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = k_i\} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{N_i}^{k_i} p^{k_i}(1-p)^{N_i - k_i} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{N_i}^{k_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} k_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(N_i - k_i)} \end{aligned}$$

记$M = \sum_{i=1}^{n} N_i$, $m = \sum_{i=1}^{n} k_i$, 它们分别表示n年投保人总数和发生重大人身伤害事故总人数. 于是,

$$\begin{aligned} L(p) &= \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{N_i}^{k_i}\right) p^{m}(1-p)^{M-m} \\ l(p) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{N_i}^{k_i}\right) + m \ln p + (M-m)\ln(1-p) \end{aligned}$$

$$l'(p) = \frac{m}{p} - \frac{M-m}{1-p} = \frac{m - Mp}{p(1-p)}, \quad l''(p) = -\frac{m}{p^2} - \frac{M-m}{(1-p)^2} < 0$$

令$l'(p) = 0$, 得p的极大似然估计值:

$$\hat{p} = \frac{m}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}$$

2答: 设X为该年发生重大人身伤害事故的人数，那么$X \sim b(5{,}000, 0.005)$, $\mathrm{E}(X) = 25$, $\mathrm{D}(X) = 24.875 \approx 25$. 根据中心极限定理，$X$近似地服从$N(25, 25)$. 记$Y$是保险公司一年的盈利(单位: 百万元), 则

$$Y = 10^{-6} \times (5{,}000 \times 800 - 100{,}000X) = 4 - 0.1X$$

于是，盈利超过1百万元的概率为:

$$\begin{aligned} P\{Y > 1\} &= P\{4 - 0.1X > 1\} = P\{X < 30\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{30-25}{5}\right) = \Phi(1.0) \approx 0.84 \end{aligned}$$

正态近似

或者

$$\begin{aligned} Y &= 4 - 0.1X \overset{\text{近似地}}{\sim} N(1.5, 0.25) \\ P\{Y > 1\} &\approx 1 - \Phi\left(\frac{1-1.5}{0.5}\right) = \Phi(1.0) \approx 0.84 \end{aligned}$$

八、(10分) 设总体$\mathbb{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从该总体中随机抽取一组容量为16的样本，算得样本均值$\bar{x} = 5.3328$, 样本标准差$s = 0.9226$.

1. (5分) 求总体方差σ^2的置信度为0.95的区间估计;

2. (5分) 在显著性水平$\alpha = 0.05$下，能否认为该总体的期望超过5.

1答: 总体方差σ^2的置信度为0.95的区间估计为:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \\ =& \left[\frac{15 \times 0.9226^2}{27.4884}, \frac{15 \times 0.9226^2}{6.2621}\right] \\ =& \left[\frac{12.7679}{27.4884}, \frac{12.7679}{6.2621}\right] \\ =& [0.4645, 2.0389] \end{aligned}$$

2答: 构造假设:

$$H_0:\ \mu \le 5 \quad H_1:\ \mu > 5$$

其拒绝域为:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ x \left| \frac{|\bar{x}-5|}{s}\sqrt{n} > t_\alpha(n-1) \right. \right\} \\ &= \left\{ x \left| \frac{|\bar{x}-5|}{s}\sqrt{n} > 1.7531 \right. \right\} \end{aligned}$$

由于$\frac{|\bar{x}-5|}{s}\sqrt{n} = (5.3328-5)/0.9226 \times 4 = 1.4429 < 1.7531$, 样本观测值$x \notin W$, 因此接受$H_0$, 即在水平0.05下可以认为该总体的期望没有超过5.

标准正态分布表

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830

t-分布和χ^2-分布分位点表

α	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
$t_\alpha(15)$	-2.1314	-1.7531	-1.3406	1.3406	1.7531	2.1314
$t_\alpha(16)$	-2.1199	-1.7459	-1.3368	1.3368	1.7459	2.1199
$t_\alpha(17)$	-2.1098	-1.7396	-1.3334	1.3334	1.7396	2.1098
$\chi^2_\alpha(15)$	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884
$\chi^2_\alpha(16)$	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454
$\chi^2_\alpha(17)$	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910