第三章 多维随机变量及其分布

毛雪峰

上海大学理学院数学系

12月21日~12月30日

内容介绍

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随机变量,由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维随机变量.

3.1.2 二维随机变量分布函数定义

设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数x,y二元函数:

 $F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\}$ 是 $P\{X \le x, Y \le y\}$ 称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称随机变量X和Y的联合分布函数.

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随 机变量,由它们构成的一个向量(X, Y),叫做二维随机向量或二维 随机变量.

条件分布

3.1.1 二维随机变量的定义

设随机试验E的样本空间为S,设X和Y是定义在样本空间S上的随 机变量,由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维 随机变量.

3.1.2 二维随机变量分布函数定义

设(X,Y)是二维随机变量,对于任意实数x,y二元函数:

 $F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \stackrel{\stackrel{\stackrel{\scriptstyle \iota}{}}{=} \iota \iota \iota \iota}{=} P\{X \le x, Y \le y\}$ 称为二维随机变量(X,Y)的分布函数,或称随机变量X和Y的联合 分布函数.

3.1.3 随机点(X, Y)落在矩形区域的概率

$$P\{x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2).$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

$$x_1$$

$$x_2$$

$$x$$

3.1.4 联合分布函数F(x,y)的性质

- **①** F(x,y)是变量x和y的不减函数,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; (2)对于任意固定的x,当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于 任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即 F(x,y)关于x右连续,关于y也右连续.
- 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2,$ 下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0.$

3.1.4 联合分布函数F(x,y)的性质

相互独立的随机变量

3.1.4 联合分布函数 *F*(x, y)的性质

- ① F(x,y)是变量x和y的不减函数,即

3.1.4 联合分布函数 F(x, y) 的性质

- **⑤** F(x,y)是变量x和y的<mark>不减函数</mark>,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$;
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- ③ F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即F(x,y) 关 于x右连续, 关于y也右连续.
- **③** 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2,$ 下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0$.

3.1.4 联合分布函数 F(x, y) 的性质

- **①** F(x,y)是变量x和y的不减函数,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; (2)对于任意固定的x,当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- ③ F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即F(x,y)关于x右连续,关于y也右连续.
- ① 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2,$ 下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0.$

3.1.4 联合分布函数 F(x, y)的性质

- **①** F(x,y)是变量x和y的<mark>不减函数</mark>,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; (2)对于任意固定的x,当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于 任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- ③ F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即F(x,y)关于x右连续,关于y也,右连续.
- ③ 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2,$ 下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0.$

3.1.4 联合分布函数 F(x, y) 的性质

- **①** F(x,y)是变量x和y的<mark>不减函数</mark>,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; (2)对于任意固定的x,当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于 任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- **③** F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即 F(x,y) 关于x右连续, 关于y也右连续.
- ① 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0$.

3.1.4 联合分布函数 F(x, y) 的性质

- **①** F(x,y)是变量x和y的不减函数,即 (1)对于任意固定的y,当 $x_2 > x_1$ 时, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$; (2)对于任意固定的x,当 $y_2 > y_1$ 时, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.
- ② $0 \le F(x,y) \le 1$, $F(-\infty,-\infty) = 0$, $F(\infty,\infty) = 1$. 并且对于 任意固定的 $x,y,F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$.
- ③ F(x+0,y) = F(x,y), F(x,y+0) = F(x,y), 即 F(x,y) 关于x右连续, 关于y也右连续.
- **③** 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), x_1 < x_2, y_1 < y_2$,下述不等式成立: $F(x_2, y_2) F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) F(x_1, y_2) \ge 0$.

315 室勘刑 二维随机 变量

- **定义** 如果二维随机变量(*X*, *Y*)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(*X*, *Y*)是离散型的随机变量.
- ② 设 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$,是二维离散型随机变量(X, Y)的所有可能取值.
- **◎** $\exists P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \, \bigcup p_{ij} \geq 0, \, \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$
- 称 $P{X = x_i, Y = y_j} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量(X, Y)的分布律, 或称随机变量X和Y的联合分布.

● **定义** 如果二维随机变量(X, Y)全部可能取到的值是有限对 或可列无限多对,则称(X, Y)是<mark>离散型的随机变量</mark>.

相互独立的随机变量

- 定义 如果二维随机变量(*X*, *Y*)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(*X*, *Y*)是离散型的随机变量.
- ② 设 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots,$ 是二维离散型随机变量(X, Y)的所有可能取值.
- ③ 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, 则 p_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$
- ③ 称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量(X, Y)的分布律, 或称随机变量X和Y的联合分布.

- 定义 如果二维随机变量(*X*, *Y*)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(*X*, *Y*)是离散型的随机变量.
- ② 设 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$,是二维离散型随机变量(X, Y)的所有可能取值.
- ③ 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, 则 p_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$
- ④ $\pi P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量(X, Y)的分布律, 或称随机变量X和Y的联合分布.

- **定义** 如果二维随机变量(*X*, *Y*)全部可能取到的值是有限对或可列无限多对,则称(*X*, *Y*)是离散型的随机变量.
- ② 设 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$,是二维离散型随机变量(X, Y)的所有可能取值.
- ③ 记 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, 则 p_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$
- **③** 称 $P{X = x_i, Y = y_j} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$ 为二维随机变量(X, Y)的分布律, 或称随机变量X和Y的联合分布.

3.1.6 二维离散型随机变量分布的表格表示法

3.1.6 二维离散型随机变量分布的表格表示法

Y	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂		Xi	
<i>y</i> ₁	<i>p</i> ₁₁			p_{i1}	
y ₂	<i>p</i> ₁₂	p_{22}	• • •	p_{i2}	• • •
:	:	÷	÷	:	:
y_j	p_{1j}	p_{2j}	• • •	p_{ij}	
:	:	:	:		:

例3.1.1

设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能的取一个值另一个随机变量Y在1 $\sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求(X,Y)的分布律.

解: 対 $\forall i = 1, 2, 3, 4, j \leq i$,由乘法定理得 $P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{74} = \frac{1}{47}$ 王县(X = X)的公东律先

设随机变量X在1,2,3,4四个整数中等可能的取一个值另一个随 机变量Y在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求(X, Y)的分布律.

相互独立的随机变量

解: 对 \forall *i* = 1,2,3,4,*j* ≤ *i*, 由乘法定理得 $P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ 于是(X, Y)的分布律为

Y	1	2	3	4
1	1 4	1 8	1 12	<u>1</u> 16
2	0	<u>1</u> 8	12	1 16
3	0	Ŏ	<u>1</u> 12	16 16 16 1 16
4	0	0	Ö	1 <u>0</u> 16

3.1.7 离散型随机变量 X和 Y的联合分布函数的计算公式

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} p_{ij}.$$

3.1.8 连续型二维随机变量的定义

若二维随机变量(X, Y)的分布函数F(x,y),如果存在<u>非负可积</u>函数f(x,y),使得对于任意x, y有 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v) du dv$,则称(X, Y)是连续型的二维随机变量,函数f(x,y)称为二维随机变量(X, Y)的概率密度,或称为随机变量X和Y的联合概率密度.

相互独立的随机变量

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} p_{ij}.$$

3.1.7 离散型随机变量X和Y的联合分布函数的计算公式

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} p_{ij}.$$

3.1.8 连续型二维随机变量的定义

若二维随机变量(X,Y)的分布函数F(x,y),如果存在非负可积函 数f(x,y), 使得对于任意x,y有 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(\overline{u,v)} du dv$, 则称(X,Y)是连续型的二维随机变量,函数f(x,y)称为二维随机 变量(X,Y)的概率密度,或称为随机变量X和Y的联合概率密度.

3.1.9 联合概率密度的性质

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1$
- 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

● 若f(x,y)在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1$
- ③ 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

④ 若f(x,y)在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1.$
- ③ 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy.$$

④ 若f(x,y)在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

3.1.9 联合概率密度的性质

- 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1.$$

③ 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy.$$

④ 若f(x,y)在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

3.1.9 联合概率密度的性质

- 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1.$$

③ 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

3.1.9 联合概率密度的性质

- 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(\infty, \infty) = 1.$$

③ 设G是xOy平面上的区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

若f(x,y)在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

推论3.1.10

若f(x,y)在点(x,y)处连续,则当 Δx , Δy 很小时, $P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x \Delta y.$

证明:
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{\frac{1}{\Delta x \Delta y}}{\frac{1}{\Delta x \Delta y}} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) 在点(x, y) 处连续,则当 \(\Delta x, \Delta y \) 很小时, $P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$$$

推论3.1.10

证明:: $\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$ $= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$ $= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) 在点(x, y) 处连续,则当 \Delta x, \Delta y 很小时,<math>P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$

```
证明: \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}
= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]
= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi \text{in}, P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \\ \Delta x \Delta y.
```

若f(x,y)在点(x,y)处连续,则当 Δx , Δy 很小时, $P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$.

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$
$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta x \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

 $=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$. 因此若f(x,y)在点(x,y)处连续,则当 Δx , Δy 很小时 $P(x < X < y + \Delta y) < Y < y + \Delta y$ $\sim f(x,y) \Delta y \Delta y$

 $A \cap \{1, P\{x < X \leq x + \Delta x, y < T \leq y + \Delta y\} \approx I(x, y) \Delta x \Delta y$

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) 在点(x, y) 处连续,则当 \Delta x, \Delta y 很 A b b, P\{x < x < x + \Delta x, y < y < y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

条件分布

推论3.1.10

 $P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \oplus \text{点}(x, y) \oplus \text{边}(x, y) \oplus \text{odd}(x, y)$$

$$| A | D | P\{x < x \le x + \Delta x, y < y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \triangle x \Delta y.$$

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x, y) \triangleq f(x, y) \triangleq f(x, y) \\ \Phi(x, y) \triangleq f(x, y) \triangleq f(x, y) \\ \Phi(x, y)$$

两个随机变量的函数的分布

 $P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y.$

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duration}$$

证明::
$$\lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\begin{subarray}{c} \Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+ \end{subarray}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{因此若} f(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y). \quad \text{Duta} F(x, y) \\ \Phi(x) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x$$

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ i.e.} \end{cases}$$

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

解子:
$$F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, & 其他 \end{cases} = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s} (1-e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, &$$

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \ 0, &$$
其他.

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y < X\}$.

解: $F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s} (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} (1 - e^{-2x}) (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

解:
$$F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
 $= \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $= \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s} (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

 $-J_0$ c [-0]_{1y} J_y $-J_0$ 0 J_y $-\frac{3}{3}$.

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \\ 0,$$
 其他.

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

解:
$$F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, &$$
 其他
$$= \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, &$$
 其他

 $=\begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s}(1-e^{-y})ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{if the.} \end{cases} = \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-y})ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{if the.} \end{cases}$

设 $G = \{(x,y)|y \le x, x,y \in \mathbb{R}\}$,则 $P\{Y \le X\} = \iint f(x,y) dx dy = \int_0^\infty \int_v^\infty 2e^{-(2x+y)} dx dy$

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \ 0, &$$
其他.

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

開子:
$$F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s} (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

 $G = \{(x, y) | y \le x, x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ } \exists P \{ Y \le X \} = \iint_{G} f(x, y) dxdy = \iint_{G} f(x, y)$

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

解子:
$$F(x,y) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y f(s,t) ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \int_0^x \int_0^y 2e^{-(2s+t)} ds dt, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2s} (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} (1 - e^{-2x}) (1 - e^{-y}) ds, x, y > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

 $G=\{(x,y)|y\leq x,x,y\in\mathbb{R}\}$,則 $P\{Y\leq X\}=\iint f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_v^\infty 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}dxdy$

 $=\int_0^\infty e^{-y}[-e^{-2x}]|_v^\infty dy = \int_0^\infty e^{-3y} dy = \frac{1}{3}$

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

→□▶→□▶→□▶→□ → ○○○

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \ 0, &$$
其他.

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

←□▶←□▶←□▶←□▶ □ ∅

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \\ 0,$$
其他.

(1)求分布函数F(x,y); (2)求概率 $P\{Y \le X\}$.

设随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} Ce^{-x^2y}, x \geq 1, y \geq 0, \ 0, & ext{其他.} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}: 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} C e^{-x^{2}y} dy dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{-C}{x^{2}} (e^{-x^{2}y})|_{0}^{\infty} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^{2}} dx = C.$$

$$P\{X^{2}Y > 1\} = \iint_{Y > \frac{1}{x^{2}}} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} (-\frac{1}{x^{2}} e^{-x^{2}y})|_{\frac{1}{x^{2}}}^{\infty} dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^{2}} e^{-1} dx = e^{-1}.$$

设随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} \mathsf{Ce}^{-x^2y}, x \geq 1, y \geq 0, \ 0, &$$
其他.

解:
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} Ce^{-x^{2}y} dy dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{-C}{x^{2}} (e^{-x^{2}y})|_{0}^{\infty} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{C}{x^{2}} dx = C.$$

$$P\{X^{2}Y > 1\} = \iint_{Y > \frac{1}{x^{2}}} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} (-\frac{1}{x^{2}} e^{-x^{2}y})|_{\frac{\infty}{x^{2}}}^{\infty} dx$$

设随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} Ce^{-x^2y}, x \geq 1, y \geq 0, \ 0, \end{cases}$$
其他.

解:
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} Ce^{-x^{2}y} dydx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{-C}{x^{2}} (e^{-x^{2}y})|_{0}^{\infty} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^{2}} dx = C.$$

$$P\{X^{2}Y > 1\} = \iint_{Y > \frac{1}{x^{2}}} f(x, y) dxdy = \int_{1}^{\infty} (-\frac{1}{x^{2}} e^{-x^{2}y})|_{\frac{\infty}{x^{2}}}^{\infty} dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}} e^{-1} dx = e^{-1}.$$

设随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} Ce^{-x^2y}, x \geq 1, y \geq 0, \ 0, &$$
其他.

解:
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} Ce^{-x^{2}y} dy dx$$

 $= \int_{1}^{\infty} \frac{-C}{x^{2}} (e^{-x^{2}y})|_{0}^{\infty} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^{2}} dx = C.$
 $P\{X^{2}Y > 1\} = \iint_{y > \frac{1}{x^{2}}} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} (-\frac{1}{x^{2}}e^{-x^{2}y})|_{\frac{1}{x^{2}}}^{\infty} dx$
 $= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}} e^{-1} dx = e^{-1}.$

设随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} C\mathrm{e}^{-x^2y}, x \geq 1, y \geq 0, \ 0, \end{cases}$$
 其他.

解:
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} \int_{0}^{\infty} C e^{-x^{2}y} dy dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{-C}{x^{2}} (e^{-x^{2}y})|_{0}^{\infty} dx = \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^{2}} dx = C.$$

$$P\{X^{2}Y > 1\} = \iint_{y > \frac{1}{x^{2}}} f(x, y) dx dy = \int_{1}^{\infty} (-\frac{1}{x^{2}} e^{-x^{2}y})|_{\frac{1}{x^{2}}}^{\infty} dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{2}} e^{-1} dx = e^{-1}.$$

Outline

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

二维随机变量

相互独立的随机变量

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

- ② 关于X的边缘分布律 $\rho_{i.} = \sum_{i}^{\infty} \rho_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)有分布函数F(x,y), X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X \le \infty, Y \le y\} = F(\infty, y),$

 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X, Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为P{ $X = x_i$, $Y = y_i$ } = $p_{i,i}$, $i,j = 1,2,\cdots$,则

- 美于X的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$
- ② 关于X的边缘分布律 $p_{i.} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$

二维随机变量

设二维随机变量(X,Y)有分布函数F(x,y),X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$.则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)有分布函数F(x,y), X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

$$F_{Y}(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$$

 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X, Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合分布律为P{ $X = x_i$, $Y = y_i$ } = $p_{i,i}$, $i, j = 1, 2, \cdots$,则

- ① 关于X的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$.
- ② 关于X的边缘分布律 $p_{i.} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$

3.2.1 边缘分布函数

一维随机变量

设二维随机变量(X, Y)有分布函数F(x,y), X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 则有

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$

 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别称为二维随机变量(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X, Y)中X和Y都是离散型随机变量,并且联合分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{i,j}, i, j = 1, 2, \cdots, 则$

- ① 关于X的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i < x} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$
- ② 关于X的边缘分布律 $p_{i.} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$

一维随机变量

3.2.1 边缘分布函数

设二维随机变量(X,Y)有分布函数F(x,y), X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$.则有

相互独立的随机变量

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$

 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分 布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X,Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合 分布律为 $P{X = x_i, Y = y_i} = p_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, 则$

- **①** 关于X的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum \sum p_{ii}$. $x_i < x_i = 1$

二维随机变量

设二维随机变量(X,Y)有分布函数F(x,y),X和Y都是随机变量, 各自也有分布函数,将它们分别记为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$.则有

相互独立的随机变量

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x, \infty),$$

 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < \infty, Y \le y\} = F(\infty, y).$

 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别称为二维随机变量(X, Y)关于X和Y的边缘分 布函数.

3.2.2 离散型随机变量的边缘分布

设二维随机变量(X, Y)中X和Y都是离散型随机变量, 并且联合 分布律为 $P{X = x_i, Y = y_i} = p_{i,i}, i, j = 1, 2, \dots, 则$

- **③** 关于X的边缘分布函数为 $F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$.
- ② 关于X的边缘分布律 $p_{i.} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$

例3.2.1

一整数N等可能地在 $1, 2, 3, \cdots, 10$ 等10个值中取一个 值.设D = D(N)是能整除N的正整数的个数, F = F(N)是能整 除N的素数的个数. 试写出D和F的联合分布律.并求边缘分布律.

相互独立的随机变量

例3.2.1

二维随机变量

一整数N等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 等10个值中取一个 值.设D = D(N)是能整除N的正整数的个数, F = F(N)是能整 除N的素数的个数, 试写出D和F的联合分布律,并求边缘分布律, 解: 样本空间及D, F的取值情况如下表:

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
D				_					_	
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

得D, F的联合分布律和边缘分布律为

二维随机变量

一整数N等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 等10个值中取一个值.设D=D(N)是能整除N的正整数的个数, F=F(N)是能整除N的素数的个数. 试写出D和F的联合分布律. 并求边缘分布律. 解: 样本空间及D, F的取值情况如下表:

相互独立的随机变量

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

得D,F的联合分布律和边缘分布律为

л О	1	2	3	4	$P{F=j}$					
0	1 10	0	0	0	1 10					
1	0	<u>4</u> 10	2 10 2	1 10	<u>7</u> 10					
2	0	0	<u>2</u> 10	10 3 10	10 2 10					
$P\{D=i\}$	1 10	<u>4</u> 10	<u>2</u> 10	<u>3</u> 10	1					

两个随机变量的函数的分布

3.2.3 连续型随机变量(X, Y)的边缘概率密度

设(X,Y)的概率密度为f(x,y),则

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt \right] ds$$

由此可知X是连续型随机变量并且其概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy,$$

称 $f_X(X)$ 为(X, Y)关于X的边缘概率密度.

3.2.3 连续型随机变量(X, Y)的边缘概率密度

设(X, Y)的概率密度为f(x, y),则

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x [\int_{-\infty}^\infty f(s, t) dt] ds,$$

由此可知X是连续型随机变量并且其概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

称 $f_X(x)$ 为(X,Y)关于X的边缘概率密度.

二维随机变量

设随机变量X和Y具有联合概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 6, & x^2 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$
 求边缘概率密

相互独立的随机变量

度 $f_X(x), f_Y(y).$

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

相互独立的随机变量

(1)确定常数k. (2)求 $P\{X < 1, Y < 3\}$. (3)求 $P\{X < 1.5\}$.

(4)求 $P{X + Y < 4}.$

```
\mathbf{M}:(1) \pm 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6 - x - y) dy dx
```

设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

相互独立的随机变量

(1)确定常数k. (2)求 $P\{X < 1, Y < 3\}$. (3)求 $P\{X < 1.5\}$.

(4)
$$求$$
P{*X* + Y ≤ 4}.

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6 - x - y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y - xy - \frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6 - 2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.

(2) $P{X < 1, Y < 3} = \int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx = \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{7}{2} - x dx =$

 $= \int_0^{1.5} \int_2^4 \frac{1}{8} (6 - x - y) dy dx = \frac{1}{8} \int_0^{1.5} (6 - 2x) dx = \frac{27}{32}$

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求 $P\{X < 1, Y < 3\}$. (3)求 $P\{X < 1.5\}$.

$$(4)$$
求 $P{X + Y \leq 4}.$

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dxdy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dydx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8} (6-x-y) dydx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{0}^{4} \frac{1}{8} (6-x-y) dydx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{8}$.

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求PX < 1, Y < 3 $\}$. (3)求PX < 1.5 $\}$.

(4)
$$求$$
P{*X* + Y ≤ 4}.

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

(1)确定常数k. (2)求 $P\{X < 1, Y < 3\}$. (3)求 $P\{X < 1.5\}$.

(4)求 $P{X + Y < 4}.$

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{2}^{4} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{32}$.

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

(4)求 $P{X + Y < 4}.$

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{2}^{4} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{32}$.

4 日 > 4 周 > 4 目 > 4 目 >

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{2}^{4} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{32}$.
(4) $P\{X + Y \le 4\} = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4-x} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \int_{0}^{2} -\frac{x^{2}}{16} -\frac{x}{2} + \frac{3}{4} dx = \frac{1}{3}$.

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$(4)$$
求 $P{X + Y \leq 4}.$

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{2}^{4} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{32}$.
(4) $P\{X + Y \le 4\} = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4-x} \frac{1}{8} (6-x-y) dy dx = \int_{0}^{2} -\frac{x^{2}}{16} -\frac{x}{2} + \frac{3}{4} dx = \frac{1}{3}$.

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

相互独立的随机变量

(4)求 $P{X + Y < 4}.$

解:(1)由1 =
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4} k(6-x-y) dy dx$$

= $k \int_{0}^{2} (6y-xy-\frac{y^{2}}{2})|_{2}^{4} dx = k \int_{0}^{2} (6-2x) dx = 8k$. $\therefore k = \frac{1}{8}$.
(2) $P\{X < 1, Y < 3\} = \int_{0}^{1} \int_{2}^{3} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1} \frac{7}{2} - x dx = \frac{3}{8}$.
(3) $P\{X < 1.5\} = P\{X < 1.5, -\infty < y < \infty\}$
= $\int_{0}^{1.5} \int_{2}^{4} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{1}{8} \int_{0}^{1.5} (6-2x) dx = \frac{27}{32}$.
(4) $P\{X + Y \le 4\} = \int_{0}^{2} \int_{2}^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \int_{0}^{2} -\frac{x^{2}}{16} -\frac{x}{2} + \frac{3}{4} dx = \frac{1}{3}$.

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$ $\mathfrak{R}(X,Y)$ 为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二<mark>维正态分布</mark>,记为

 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 求(X, Y)的边缘概率密度.

M: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma^2\sigma^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma^2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma^2})^2 - (1-\rho^2) \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma^2}$

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$

称(X, Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,记为 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. 求(X, Y)的边缘概率密度.

$$\widetilde{\mathbb{H}} \colon \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - (1-\rho^2) \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

例3.2.4

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

攻二维随机受量(X, Y)的概率密度方
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$

称(
$$X, Y$$
)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,记为

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$
. 求 (X,Y) 的边缘概率密度.

解:
$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - (1-\rho^2) \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \qquad \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1-\rho^{2}}} e^{-\frac{(x-\mu_{1})^{2}}{2\sigma_{1}^{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^{2})}(\frac{y-\mu_{2}}{\sigma_{2}}-\rho\frac{x-\mu_{1}}{\sigma_{1}})^{2}} dy$$

$$=\frac{1}{2-1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2-1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
. If $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

同理可得
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_2^2}} e^{-\frac{V-Y^2}{2\sigma_2^2}}, Y \in N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

攻二维随机受量(X, Y)的概率密度方
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$

$$\mathfrak{R}(X,Y)$$
为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布,记为

$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$
. 求 (X,Y) 的边缘概率密度.

解:
$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - (1-\rho^2) \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \qquad \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_s}e^{-\frac{(N-\mu_1)}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2-\tau_s}}e^{-\frac{(N-\mu_1)}{2\sigma_1^2}}$$
. $\forall X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可得
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, Y \in N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

反二维随机变重(X,Y)的概率密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$
其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$ 称(X,Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,记为 (X,Y) $\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$ 求(X,Y)的边缘概率密度. 解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - (1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$ $\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$ 令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 dy$

 $= \frac{1}{2\pi\sigma_{t}} e^{-\frac{(x-\mu_{1})^{2}}{2\sigma_{1}^{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^{2}}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2-\epsilon}} e^{-\frac{(x-\mu_{1})^{2}}{2\sigma_{1}^{2}}}. \quad \exists IX \sim N(\mu_{1}, \sigma_{1}^{2})$

相互独立的随机变量

二维随机变量

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

反二维随机受重(X, Y)的概率密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$
其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数,且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1.$ 称(X, Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,记为 (X, Y) $\sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$ 求(X, Y)的边缘概率密度. 解: $\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} = (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - (1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$ $\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$ 令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$
 即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 同理可得 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, Y \in N(\mu_2, \sigma_2^2).$

一维随机变量

3.2.4 二维正态分布的边缘分布

•
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, -\infty < x < \infty.$$

•
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, -\infty < y < \infty.$$

3.2.5 联合分布与边缘分布的关系

- 二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,并且不依赖于参数 ρ . 对于给定的 μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 , 不同的 ρ 对应不同的二维正态分布, 但它们的边缘分布都一样.
- 随机变量**X**和**Y**的联合分布≠ 关于**X**和关于**Y**的边缘分布.

Outline

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{ij}}, i = 1, 2, \cdots$$

相互独立的随机变量

同样对于固定的i,若 $P{X = x_i} > 0$,则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i}}, j = 1, 2, \dots$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量Y的条件分布律.

设(X, Y)是二维离散型随机变量,对于固定

的j,若 $P{Y = y_i} > 0$,则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{ij}}, i = 1, 2, \cdots$$

相互独立的随机变量

为在 $Y = y_i$ 条件下随机变量X的条件分布律.

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i}}, j = 1, 2, \cdots$$

设(X, Y)是二维离散型随机变量,对于固定

的j,若 $P{Y = y_i} > 0$,则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{ij}}, i = 1, 2, \dots$$

相互独立的随机变量

为在 $Y = y_i$ 条件下随机变量X的条件分布律.

同样对于固定的i,若 $P{X = x_i} > 0$,则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i}}, j = 1, 2, \cdots$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量Y的条件分布律.

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据积累的资料知道(X, Y)具有分布律:

	1		
1			

(1)求在X = 1的条件下, Y的条件分布律; (2)求在Y = 0的条件下, X的条件分布律.

$$\Re: (1)P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.03}{0.045} = \frac{2}{3};$$

 $P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{0.01}{0.045} = \frac{2}{9}; P\{Y = 2|X = 1\} = \frac{0.005}{0.045} = \frac{1}{9}.$

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的,其一是 紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓 紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据 积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y	0				$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.840 0.060 0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在X = 1的条件下, Y的条件分布律; (2)求在Y = 0的条件 下,X的条件分布律.

**$$\mathbf{\tilde{H}}$$
:(1)** $P\{Y = 0 | X = 1\} = \frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.03}{0.045} = \frac{2}{3};$

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的,其一是 紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓 紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据 积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

Y	0	•	_		$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.840 0.060 0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在X = 1的条件下, Y的条件分布律; (2)求在Y = 0的条件 下,X的条件分布律.

解:(1)
$$P{Y = 0|X = 1} = \frac{P{X=1,Y=0}}{P{X=1}} = \frac{0.03}{0.045} = \frac{2}{3};$$

二维随机变量

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的,其一是 紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓 紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据 积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

相互独立的随机变量

Y	0	•	_		$P\{Y=j\}$
0	0.840 0.060 0.010	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在**X** = **1**的条件下, **Y**的条件分布律; **(2)**求在**Y** = **0**的条件 下,X的条件分布律.

解:(1)
$$P{Y = 0|X = 1} = \frac{P{X=1,Y=0}}{P{X=1}} = \frac{0.03}{0.045} = \frac{2}{3};$$

 $P\{Y=1|X=1\} = \frac{0.01}{0.045} = \frac{2}{9}; P\{Y=2|X=1\} = \frac{0.005}{0.045}$

在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是 紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点. 以X表示由机器人紧固的螺栓 紧固得不良的数目,以Y表示由机器人焊接的不良焊点的数目.据 积累的资料知道(X,Y)具有分布律:

相互独立的随机变量

Y	0	•	_		$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.840 0.060 0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1)求在X = 1的条件下, Y的条件分布律; (2)求在Y = 0的条件 下,X的条件分布律.

$$\Re: (1)P\{Y=0|X=1\} = \frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}} = \frac{0.03}{0.045} = \frac{2}{3};$$

$$P\{Y=1|X=1\} = \frac{0.01}{0.045} = \frac{2}{6}; P\{Y=2|X=1\} = \frac{0.005}{0.045} = \frac{1}{9}.$$

相互独立的随机变量

例3.3.2

二维随机变量

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止.设<math>X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X, Y)的联合分布律为

1 LF 7 = 7 = 7 9 0

二维随机变量

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

相互独立的随机变量

 \mathbf{M} : 由题意(\mathbf{X}, \mathbf{Y})的联合分布律为

 $P\{X = m, Y = n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \dots; m = 1, 2, \dots, n-1.$

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

相互独立的随机变量

解: 由题意(X, Y)的联合分布律为

 $P{X = m, Y = n} = p^{2}(1-p)^{n-2}, n = 2, 3, \dots; m = 1, 2, \dots, n-1.$

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止.设<math>X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

$$\overline{P}\{X=m,Y=n\}=p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

$$= m$$
 $= \sum_{n=m+1} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=m+1} p^{2}(1-p)^{n}$

$$p = \frac{p^{2}(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \cdots$$

$$P{Y = n} = \sum_{i} P{X = m, Y = n} = \sum_{i} p^{2} (1 - p)^{n-1}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$$
 于是条件分布律为

当
$$n = 2, 3, \cdots$$
时, $P\{X = m | Y = n\} = \frac{P\{Y = p\}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中

当
$$m = 1, 2, \cdots$$
时, $P\{Y = n | X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$,其中

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止.设<math>X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

相互独立的随机变量

$$\overline{P}\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\mathbb{Z}P\{X=m\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\cdots$$

$$P\{Y = n\} = \sum_{n=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$m=1$$

= $(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$,于是条件分布律)

当
$$n = 2, 3, \dots$$
时, $P\{X = m | Y = n\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中

当
$$m = 1, 2, \cdots$$
时, $P\{Y = n | X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$, 其中

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止,设X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

$$\overline{P}\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\mathbb{Z}P\{X=m\} = \sum_{\substack{n=m+1\\ p\geq (d-p)^{m-1}}}^{\infty} P\{X=m, Y=n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$= \frac{p^{2}(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \cdots.$$

$$P{Y = n} = \sum P{X = m, Y = n} = \sum p^{2}(1 - p)^{n-1}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$$
 ,. 于是条件分布律为

当
$$n = 2, 3, \cdots$$
时, $P\{X = m | Y = n\} = \frac{p(1-p)}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止,设X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律,

$$\overline{P}\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

$$-\frac{1}{1-(1-p)} - p(1-p) , m-1, 2, \cdots$$

$$P{Y = n} = \sum_{m=1}^{n-1} P{X = m, Y = n} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$$
 . 于是条件分布律为

当
$$m = 1, 2, \dots$$
时, $P\{Y = n | X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$,其中 $n = m+1, m+2, \dots$

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止.设<math>X表示首次击中目标所进行的射击次数,Y表示总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解: 由题意(X, Y)的联合分布律为

$$\overline{P}\{X=m, Y=n\} = p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots; m=1,2,\cdots,n-1.$$

$$P{Y = n} = \sum_{m=1}^{n-1} P{X = m, Y = n} = \sum_{m=1}^{n-1} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n=2,3,\cdots$$
. 于是条件分布律为

当 $n = 2, 3, \cdots$ 时, $P\{X = m|Y = n\} = \frac{p(1-p)}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$,其中 $m-1, \dots, n-1$

当 $m = 1, 2, \cdots$ 时, $P\{Y = n | X = m\} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{pq^{m-1}} = pq^{n-m-1}$,其中 $n = m+1, m+2, \dots$

一射手进行射击,击中目标的概率为p(0 ,射击直至击中目标两次为止. 设X表示首次击中目标所进行的射击次数, Y表示 总共进行的射击次数,试求X和Y的联合分布律及条件分布律,

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$ 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\} \text{ 分积为果无意 } \lor$

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x, y),关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给定y,对 $\forall \varepsilon > 0$,对 $\forall x$,考虑条件概

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$.

率
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$$
,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{y}^{y + \varepsilon} f(s, t) dt\right] ds}{\int_{y}^{y + \varepsilon} f_{Y}(t) dt} \qquad \text{当}\varepsilon 很小时,$$
$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds}{\varepsilon f_{Y}(t)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s, y)}{f_{Y}(t)} ds.$$

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$.

相互独立的随机变量

$$\mathbb{P}\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\}, \mathcal{P}\{y < Y \leq y + \varepsilon\} > 0,$$
则有
$$P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{y}^{y + \varepsilon} f(s, t) dt\right] ds}{\int_{y}^{y + \varepsilon} f_{\gamma}(t) dt} \qquad \qquad \text{当}\varepsilon \mathbb{R} \wedge \text{bt},$$

$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds}{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s, y)}{f_{\gamma}(y)} ds.$$

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数":

相互独立的随机变量

率
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$$
,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} [\int_{y}^{y + \varepsilon} f(s, t) dt] ds}{\int_{y}^{y + \varepsilon} f(t) dt} \qquad \qquad \text{当}\varepsilon 很小时,$$
$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds}{\varepsilon f(t)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s, y)}{f(t)} ds.$$

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

相互独立的随机变量

设(X,Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给

率
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$$
,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} [\int_{y}^{y + \varepsilon} f(s, t) dt] ds}{\int_{y}^{y + \varepsilon} f(t) dt} \qquad \qquad \text{当}\varepsilon 很小时,$$
$$\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds}{\varepsilon f(t)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s, y)}{f(t)} ds.$$

二维随机变量

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $P\{Y \le y\} \bigcap \{X = x\}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x, y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$.

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给定y, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $\forall x$, 考虑条件制

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给定y,对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $\forall x$,考虑条件概

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \le y\} \bigcap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给 定y,对∀ε > 0, 对∀x,考虑条件概

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \le y\} \bigcap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给 定y,对∀ε > 0, 对∀x,考虑条件概

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \le y\} \bigcap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给 定y,对∀ε > 0, 对∀x,考虑条件概 $x = P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给定y,对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $\forall x$,考虑条件概

率
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$$
,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有
$$P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$$

 $=\frac{\int_{-\infty}^{x}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(s,t)dt]ds}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_{Y}(t)dt}$ 当 ε 很小时,

 $\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{f(s,y)ds}{f(v,v)}}{\varepsilon f(v,v)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s,y)}{f(v,v)} ds$.

二维随机变量

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \le y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x, y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给 定*v*,对∀ ε > 0, 对∀x,考虑条件概 率 $P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有 $P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}}$ $=\frac{\int_{-\infty}^{\mathsf{x}}[\int_{y}^{y+\varepsilon}f(\mathsf{s},t)dt]d\mathsf{s}}{\int_{y}^{y+\varepsilon}f_{\mathsf{Y}}(t)dt}\qquad \text{ if } A \text{ if } A$

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \le y\} \cap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x,y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 给 定*v*,对∀ ε > 0, 对∀x,考虑条件概 率 $P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有 $P\{X \leq x | y < Y \leq y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y + \varepsilon\}}$

对连续型变量(X, Y)及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有 $P\{X = x\} = P\{Y = y\} = 0$. 因此不能直接用条件概率公式引入"条件分布函数": $\frac{P\{Y \leq y\} \bigcap \{X = x\}}{P\{X = x\}}$ 分母为零无意义.

合理的定义方式

设(X, Y)的概率密度为f(x, y), 关于Y的边缘概率密度为 $f_{Y}(y)$. 给定y,对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $\forall x$,考虑条件概率 $P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\}$,设 $P\{y < Y \le y + \varepsilon\} > 0$,则有 $P\{X \le x | y < Y \le y + \varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y + \varepsilon\}}{P\{y < Y \le y + \varepsilon\}}$ $= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{y}^{y + \varepsilon} f(s, t) dt\right] ds}{\int_{y}^{y + \varepsilon} f_{Y}(t) dt} \qquad \text{当}\varepsilon$ 很小时, $\approx \frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(s, y) ds}{\varepsilon f_{Y}(y)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(s, y)}{f_{Y}(y)} ds.$

$$f_{X|Y}(x|y) \stackrel{\mathbb{E} \chi}{=} \frac{f(x,y)}{f_{Y}(y)}$$

3.3.2 条件概率密度的定义

设f(x,y)和 $f_Y(y)$ 分别为二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度和关于Y的边缘概率密度,若对于固定的y, $f_Y(y) > 0$,则称

$$f_{X|Y}(x|y) \stackrel{\hat{\mathbb{Z}}}{=} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在Y = y的条件下X的条件概率密度.

3.3.3 条件分布函数的定义

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_{Y}(y)} dx$ 为在 Y = y的条件下X的条件分布函数, 记为 $P\{X \leq x|Y=y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$. 即 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y=y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_{Y}(y)} dx.$

3.3.2 条件概率密度的定义

设f(x,y)和 $f_{Y}(y)$ 分别为二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度和 关于Y的边缘概率密度, 若对于固定的y, $f_Y(y) > 0$, 则称

$$f_{X|Y}(x|y) \stackrel{\stackrel{\stackrel{\sim}{=}}{=}}{=} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为在Y = y的条件下X的条件概率密度.

3.3.3 条件分布函数的定义

称 $\int_{-\infty}^{\mathbf{X}} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\mathbf{X}} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx$ 为在 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ 的条件下 \mathbf{X} 的条件 分布函数, 记为 $P\{X \leq x | Y = y\}$ 或 $F_{X|Y}(x|y)$. 即 $F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx.$

设G是平面上的有界区域,其面积为A. 若二维随机变量(X, Y)具 有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} rac{1}{A}, & (x,y) \in G, \\ 0, & ext{其他}, \end{cases}$$
则称 (X,Y) 在 G 上服

相互独立的随机变量

从均匀分布.现设二维随机变量(X, Y)在圆域 $x^2 + y^2 \le 1$ 上服从 均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解: 由已知
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{\pi}, & \forall y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$
 且有边缘概率密度
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, |y| \leq 1, \end{cases}$$

有
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

设G是平面上的有界区域,其面积为A. 若二维随机变量(X, Y)具 有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x,y) \in G, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$
 则称 (X,Y) 在 G 上服

相互独立的随机变量

从均匀分布.现设二维随机变量(X, Y)在圆域 $x^2 + y^2 \le 1$ 上服从 均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

$$\underline{\underline{M}}$$
: 由已知 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 且有边缘概率密度

$$\underline{\underline{M}}$$
: 由已知 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且有边缘概率密度
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, |y| \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当|y| < 1时,

ョ
$$|y| < 1$$
時,
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{Y}(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

Outline

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

两个随机变量的函数的分布

设F(x,y)及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X, Y)是离散型随机变量时, X, Y 相互独立等价于 对于(X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_i) 有

$$P{X = x_i, Y = y_j} = P{X = x_i}P{Y = y_j}.$$

(2) 若(X, Y) 是连续型随机变量, f(x, y), $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X, Y相互独立 \iff $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上几乎处处成立

两个随机变量的函数的分布

设F(x,y)及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数 及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},\$$

 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$

即 则称随机变量X和Y是相互独立的.

(1) 若(X,Y)是离散型随机变量时, X,Y 相互独立等价于 对 于(X,Y) 的所有可能取值 (x_i,y_i) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

设F(x,y)及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X, Y)是离散型随机变量时, X, Y 相互独立等价于 对于(X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_i) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

(2) 若(X, Y)是连续型随机变量, f(x, y), $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度,则

X, Y相互独立 $\iff f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上几乎处处成立

设F(x,y)及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},\$$

 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$

即 $F(x,y) = F_X(x)$ 则称随机变量X和 Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

(1) 若(X, Y)是离散型随机变量时, X, Y 相互独立<u>等价于</u> 对于(X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_i) 有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$$

(2) 若(X, Y)是连续型随机变量, f(x,y), $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度,则

即

设F(x,y)及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

相互独立的随机变量

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},\$$

 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$

则称随机变量X和Y是相互独立的.

3.4.2 随机变量相互独立的等价刻画

- (1) 若(X, Y)是离散型随机变量时, X, Y 相互独立<u>等价于</u> 对于(X, Y) 的所有可能取值 (x_i, y_j) 有
 - $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}.$
- (2) 若(X, Y)是连续型随机变量, f(x, y), $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别为(X, Y)的概率密度和边缘概率密度,则
- X, Y相互独立 \iff $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上几乎处处成立.

相互独立的随机变量

例3.4.1

若(X, Y)是离散型随机变量,并且具有分布律

	1	
1/6	1/3	1/2

试问:X和Y是否相互独立.

解: :
$$P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\}$$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{1}{6} = P\{X = 0\}P\{Y = 2\},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{1}{3} = P\{X = 1\}P\{Y = 2\}.$$
: Y和又相互独立

◆ロ → ◆母 → ◆ き → も ● りゅう

相互独立的随机变量

例3.4.1

若(X, Y)是离散型随机变量,并且具有分布律

X X	0	1	$P\{Y=j\}$	
1	1/6	1/3	1/2	
2	1/6	1/3	1/2	
$P\{X=i\}$	1/3	2/3	1	

试问:X和Y是否相互独立.

解: :
$$P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\};$$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{1}{6} = P\{X = 0\}P\{Y = 2\},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{1}{3} = P\{X = 1\}P\{Y = 2\}.$$
: X和Y相互独立.

例3.4.2

设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y) = egin{cases} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, x > 0, y > 0, \ 0, &$$
其他.

相互独立的随机变量

试问X和Y是否独立?

解:

$$f_{X}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \int_{0}^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dy = 2e^{-2x}, x > 0 \end{cases}$$

$$f_{Y}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} 0, y \leq 0 \\ \int_{0}^{\infty} 2e^{-(2x+y)} dx = e^{-y}, y > 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = f_{X}(x) f_{Y}(y), \quad \text{故 X 和 Y 相 互 独 立}.$$

两个随机变量的函数的分布

二维正态随机变量(X,Y), 随机变量X和Y独立的刻画

设(X, Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,则其概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

X和 Y相 互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~10时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人同时到达的时间相互独立,求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

二维正态随机变量(X,Y),随机变量X和Y独立的刻画

设(X, Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,则其概率密度为

密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

X和Y相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~10时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人同时到达的时间相互独立,求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

二维正态随机变量(X,Y),随机变量X和Y独立的刻画

设(X, Y)为服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布,则其概率密度为

密度为
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

X和Y相互独立的充要条件是参数 $\rho = 0$.

Example

一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~10时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人同时到达的时间相互独立,求他们到达办公室的时间相差不超过5分钟(1/12小时)的概率.

作业

① 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

② 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, x^2 \le y \le 1, \\ 0, & \text{#d.} \end{cases}$$

(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密度 $f_{Y|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$,并求 $P\{Y > 1/4|X = 1/2\}$.

作业

● 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

② 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, x^2 \le y \le 1, \\ 0, & \text{#th} \end{cases}$$

(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$,并求 $P\{Y \ge 1/4|X = 1/2\}$.

作业

二维随机变量

设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

② 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, x^2 \le y \le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1)确定常数c. (2)求边缘概率密度. (3)求条件概率密 度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$,并求 $P\{Y \ge 1/4|X = 1/2\}$.

n维随机变量的定义

设E是一个随机试验,它的样本空间是S,设 X_1, X_2, \cdots, X_n 是定义在S上的随机变量,由它们构成的一个n维向量(X_1, X_2, \cdots, X_n)叫做n-维随机向量或n-维随机变量.

n维随机变量的分布函数

对于任意n个实数 x_1, x_2, \dots, x_n, n 元函数

 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\} \Re$ 为n维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数或称随机变 $= X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合分布函数.

相互独立的随机变量

n维连续型随机变量和其概率密度函数的定义

若存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,使得对于任意实 数 X_1, X_2, \cdots, X_n 有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 (X_1,X_2,\cdots,X_n) 的概率密度函数.

相互独立的随机变量

n维随机变量的边缘分布函数

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n-维随机变量 (X_1, X_2, \cdots, X_n) 的分布函数,则 (X_1, X_n, \cdots, X_n) 关于 X_1 、 (X_1, X_2) 的<mark>边缘分布函数</mark>分别为 $F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \cdots, \infty), F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty).$

n维随机变量的边缘概率密度

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n-维随机变量 (X_1, X_2, \cdots, X_n) 的概率密度,则 (X_1, X_n, \cdots, X_n) 关于 X_1 、 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为 $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n,$ $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n.$

n维随机变量的边缘分布函数

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n-维随机变量 (X_1, X_2, \cdots, X_n) 的分布函数, 则 (X_1, X_n, \cdots, X_n) 关于 X_1 、 (X_1, X_2) 的边缘分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \cdots, \infty), F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty).$

n维随机变量的边缘概率密度

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是n-维随机变量 (X_1, X_2, \cdots, X_n) 的概率密度, 则 (X_1, X_n, \cdots, X_n) 关于 X_1 、 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为 $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n,$ $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n$

相互独立的随机变量

相互独立的定义

若对于所有的 x_1, x_2, \cdots, x_n 有 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$,则称 X_1, X_2, \cdots, X_n 是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

 $egin{aligned} & \psi_{F_1,F_2,F} & \& \chi 为 随机 变量(X_1,X_2,\cdots,X_m), (Y_1,Y_2,\cdots,Y_n) \\ & \pi(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n) 的 分布函数, 若对于所有 \\ & \text{的} x_1,x_2,\cdots,x_m; y_1,y_2,\cdots,y_n & F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ & F(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n) & F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ & \text{Property of the property of the property$

重要定理

设 (X_1, X_2, \cdots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) 相互独立,则 $X_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 和 $Y_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 相互独立.又若h, g是连续函数,则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

若对于所有的
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$
有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$,则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设
$$F_1$$
, F_2 , F 依次为随机变量(X_1 , X_2 , ..., X_m), (Y_1 , Y_2 , ..., Y_n) 和(X_1 , ..., X_n , Y_1 , ..., Y_n)的分布函数, 若对于所有的 X_1 , X_2 , ..., X_m ; Y_1 , Y_2 , ..., Y_n 有 $F(X_1, X_2, ..., X_m, Y_1, Y_2, ..., Y_n) = F_1(X_1, X_2, ..., X_m)F_2(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ 则称随机变量(X_1 , X_2 , ..., X_m)和(Y_1 , Y_2 , ..., Y_n)是相互独立的.

若对于所有的
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$
有 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$,则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的.

多维随机变量间的相互独立性

设 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m), (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 和 $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ 的分布函数, 若对于所有 的 $X_1, X_2, \cdots, X_m; V_1, V_2, \cdots, V_n$ 有 $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) F_2(y_1, y_2, \dots, y_n),$ 则称随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 是相互独立的.

重要定理

设 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 相互独立, 则 X_i ($i = 1, 2, \dots, m$)和 Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$)相互独立. 又若h, g是 连续函数,则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

Outline

- 1 二维随机变量
- 2 边缘分布
- 3 条件分布
- 4 相互独立的随机变量
- 5 两个随机变量的函数的分布

两个随机变量的函数的分布

Z = X + Y的分布

- Z = X + y为连续型随机变量
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \overline{AX} \overline
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ (a).
- (♣)和(♠)称为fx和fy的卷积公式,记为fx*fy

Z = X + Y的<u>分</u>布

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y) dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \underline{X} <u>若X和Y相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- (♣)和(♠)称为fy和fy的卷积公式,记为fy*fy.

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y) dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \underline{XX} <u>若X和Y相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ ()
- (♣)和(♠)称为f_v和f_v的卷积公式,记为f_v*f_v

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \underline{X} <u>X</u>和 <u>Y</u>相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- (♣)和(♠)称为f_v和f_v的卷积公式,记为f_v*f_v

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y) dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \overline{AX} 和 Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- (♣)和(♠)称为f_√和f_√的卷积公式,记为f_√*f_√

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y) dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \underline{X} <u>X</u>和 <u>Y</u>相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- (♣)和(♠)称为fx和fx的卷积公式,记为fx*fx

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx$.
- \underline{X} <u>X</u>和 <u>Y</u>相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (\$\infty\$)
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ (\spadesuit)
- (♣)和(♠)称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式,记为 f_X*f_Y

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y) dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- $\overline{A}X$ 和 Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(X)$, $f_Y(Y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ (\spadesuit).
- (♣)和(♠)称为f_x和f_y的卷积公式,记为f_x*f_y

- Z = X + y为连续型随机变量
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$
- 或则 $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z x) dx$.
- \underline{X} <u>X</u>和 <u>Y</u>相互独立</u>,设(X, Y)关于X, Y的边缘分布密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$ (4)
- $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ (\spadesuit).
- (♣)和(♠)称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式,记为 f_X*f_Y .

设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们服从N(0,1)分布,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

 $\vec{x}Z = X + Y$ 的概率密度.

- 设X, Y相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则Z = X + Y服从正态分布且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

设**X**和**Y**是两个相互独立的随机变量. 它们服从**N**(0,1)分布,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$
 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

般的结论

- 设X, Y相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则Z = X + Y服从正态分布且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

设**X**和**Y**是两个相互独立的随机变量. 它们服从**N**(0,1)分布,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$
 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

- 设X, Y相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则Z = X + Y服从正态分布且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

设**X**和**Y**是两个相互独立的随机变量. 它们服从**N**(0,1)分布,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$
 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

- 设X, Y相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则Z = X + Y服从正态分布且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

设**X**和**Y**是两个相互独立的随机变量. 它们服从**N**(0,1)分布,其概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$
 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

- 设X, Y相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则Z = X + Y服从正态分布且 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

- ① 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$, 又设随机变量Y在(-1,1)服从均匀分布,且X和Y相互独立,求Z = X + Y的概率密度.
- ② 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联连接,设 R_1 , R_2 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0, & \text{#th.} \end{cases}$$

求总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

- **①** 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty,$ 又设随机变量Y在(-1,1)服从均匀分布,且X和Y相互独立,求Z = X + Y的概率密度.
- ② 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联连接,设 R_1 , R_2 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0, &$$
其他

求总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

- **①** 设随机变量X服从柯西分布,其概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty,$ 又设随机变量Y在(-1,1)服从均匀分布,且X和Y相互独立,求Z = X + Y的概率密度.
- ② 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联连接,设 R_1 , R_2 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} rac{10-x}{50}, 0 \le x \le 10, \\ 0,$$
 其他.

求总电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

相互独立的随机变量

- $F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 P\{N > z\} = 1 P\{X > z, Y > z\};$
- 若X, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且

$M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设X, Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 设 $M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\},$ 则

- $F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\};$
 - $F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 P\{N > z\} = 1 P\{X > z, Y > z\})$
- 若X, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且

$M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设X, Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 设 $M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}, 则$

- $F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\};$
- $F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 P\{N > z\} = 1 P\{X > z, Y > z\}$
- 若X, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且 $F_M(z) = 1 [1 F_Y(z)][1 F_Y(z)].$

设X, Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 设 $M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}, 则$

- $F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\};$
- $F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 P\{N > z\} = 1 P\{X > z, Y > z\};$
- 若X, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且 $F_N(z) = 1 [1 F_X(z)][1 F_Y(z)].$

$M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设X, Y是两个随机变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$. 设 $M = \max\{X, Y\}, N = \min\{X, Y\}, 则$

•
$$F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\};$$

•
$$F_N(z) = P(\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\};$$

• 若
$$X$$
, Y相互独立, 则 $F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$ 并且 $F_N(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$

设系统L由两个相互独立的子系统 L_1 , L_2 连接而成,连接的方式分别为(i)串联,(ii)并联,(ii)备用(当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 开始工作).设 L_1 , L_2 的寿命分别为X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, x > 0, \\ 0, x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_{\mathsf{Y}}(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 且 $\alpha \neq \beta$. 试分别就以上三种连接方式写出L的寿命Z的概率密度.

- ① 设随机变量X和Y分别在(-1,0)和(0,1)上服从均匀分布,又设X和Y相互独立,求Z = X + Y的概率密度以及 $U = \max\{X,Y\}$ 的分布函数.
- ② 设随机变量 X_1 和 X_2 独立同分布于N(0,1), 求 $Y = X_1^2 + X_2^2$ 概率密度函数.
- ③ 设X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

或Z = X - Y的概率密度和 $T = \min\{X, Y\}$ 的概率密度

- ① 设随机变量X和Y分别在(-1,0)和(0,1)上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求Z = X + Y的概率密度以及 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.
- ② 设随机变量 X_1 和 X_2 独立同分布于N(0,1),求 $Y = X_1^2 + X_2^2$ 概率密度函数.
- ③ 设X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

求Z = X - Y的概率密度和 $T = min\{X, Y\}$ 的概率密度

- 设随机变量X和Y分别在(-1,0)和(0,1)上服从均匀分布,又 设X和Y相互独立, 求Z = X + Y的概率密度以 及 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.
- ② 设随机变量 X_1 和 X_2 独立同分布于N(0,1), 求 $Y = X_1^2 + X_2^2$ 概 率密度函数.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, &$$
其他.

- ① 设随机变量X和Y分别在(-1,0)和(0,1)上服从均匀分布,又设X和Y相互独立, 求Z = X + Y的概率密度以及 $U = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.
- ② 设随机变量 X_1 和 X_2 独立同分布于N(0,1), 求 $Y = X_1^2 + X_2^2$ 概率密度函数.
- ◎ 设X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, x > 0, y > 0, \\ 0, &$$
其他.

求Z = X - Y的概率密度和 $T = \min\{X, Y\}$ 的概率密度.

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X, Y)的概率密度和边缘概率密度分别为f(x,y), $f_X(x)$, $f_Y(y)$,若存在一点(x_0 , y_0),使得 $f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)f_Y(y_0)$,

课堂练习2 选择题

设二维随机变量(X, Y) ~
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 < 1\\ 0, \quad \text{其他.} \end{cases}$$

则X与Y为()

(A)独立同分布的随机变量 (B) 独立不同分布的随机变量 (C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X, Y)的概率密度和边缘概率密度分别为 $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$,若存在一点(x_0,y_0),使得 $f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)f_Y(y_0)$,则X和Y不相互独立(__).

课堂练习2 选择题

设二维随机变量(X, Y)
$$\sim f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 < 1\\ 0, & 其他. \end{cases}$$

则X与Y为(

- (A)独立同分布的随机变量 (B)独立不同分布的随机变量
- (C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

课堂练习1 判断题

设二维随机变量(X, Y)的概率密度和边缘概率密度分别为 $f(x,y),f_X(x),f_Y(y)$,若存在一点(x_0,y_0),使得 $f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)f_Y(y_0)$,则X和Y不相互独立(__).

课堂练习2选择题

设二维随机变量(
$$X, Y$$
) $\sim f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 < 1, \\ 0, \quad \text{其他.} \end{cases}$

则X与Y为()

- (A)独立同分布的随机变量 (B)独立不同分布的随机变量
- (C)不独立同分布的随机变量(D) 不独立也不同分部的随机变量

● 设二元随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ 其他}. \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_{Y}(y)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

	Y				· 求 Z = X + Y 的分布律.
		0.1	0.2		水乙一入十一的力和件.
	1			0.4	

① 设二元随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_Y(y)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

● 设二元随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, \quad \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_Y(y)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

● 设二元随机变量(X, Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y) =$$

$$\begin{cases} 1, |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, \quad$$
其他.

求边缘概率密度 $f_{Y}(y)$ 和条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

为 -	Y	-1	Ŭ	1	求 $Z = X + Y$ 的分布律
	0	0.1	0.2	0	
	1	0	0.3	0.4	

课堂练习!

设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, 0 < x < 10, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{ 其他}. \end{cases}$$

设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{#.} \end{cases}$$

求Z = X + Y概率密度...

设以表示某一推销员一天花费在汽油上的款项(以美元计),以Y表示推销员一天所得的补贴(以美元计),已知X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25} \frac{20-x}{x}, 10 < x < 20, \frac{x}{2} < y < x, \\ 0, & \text{#d.} \end{cases}$$

- (1)求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 问X和Y是否相互独立?
- (2)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|X)$.
- (3)求x = 12 时,Y的条件概率密度.
- (4) 求条件概率 $P\{Y \ge 8 | X = 12\}$.

设以表示某一推销员一天花费在汽油上的款项(以美元计),以Y表示推销员一天所得的补贴(以美元计),已知X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25} \frac{20-x}{x}, 10 < x < 20, \frac{x}{2} < y < x, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

- (1)求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,问X和Y是否相互独立?
- (2)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|X)$.
- (3)求x = 12 时,Y的条件概率密度.
- (4) 求条件概率 $P\{Y \ge 8 | X = 12\}$.

对某种电子装置的输出测量了5次,得到结果 为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 .设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布,即概率密度为

$$f_X(x) = egin{cases} rac{x}{4}e^{-rac{x^2}{8}}, x > 0, \ 0, \end{cases}$$
其他.

(1)求 $Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 的分布函数. (2)求 $P\{Z > 4\}$.

① 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 当给定X = x时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, & \text{ i.e. } \end{cases}$$

- (1)求X和Y的联合概率密度f(x,y). (2)求边缘密度 $f_Y(y)$,并画出图形. (3)求 $P\{X > Y\}$
- ② 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, -0.5)$, 求X + Y的概率密度函数.

① 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 当给定X = x时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = egin{cases} x, 0 < y < rac{1}{x}, \\ 0, \end{cases}$$
其他.

- (1)求X和Y的联合概率密度f(x,y). (2)求边缘密度 $f_Y(y)$,并画出图形. (3)求 $P\{X > Y\}$
- ② 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, -0.5)$, 求X + Y的概率密度函数.

② 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 当给定X = x时, 随机变量Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) =$$
$$\begin{cases} x, 0 < y < \frac{1}{x}, \\ 0, \end{cases}$$
其他.

- (1)求X和Y的联合概率密度f(x,y). (2)求边缘密度 $f_Y(y)$,并画出图形. (3)求 $P\{X > Y\}$
- ② 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, -0.5)$, 求X + Y的概率密度函数.

二维随机变量

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度f(x, y),则 $Z = \stackrel{\vee}{\rightarrow}$ 、Z = XY仍为连续型随机变量,其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx, \tag{1}$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx.$$
 (2)

若X, Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,则(1),(2)两式可分别化为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx.$$

二维随机变量

设(X, Y)是二维连续型随机变量,它具有概率密度f(x, y),则 $Z = \frac{Y}{X}$ 、Z = XY仍为连续型随机变量,其概率密度分别为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx, \tag{1}$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx.$$
 (2)

若X, Y相互独立,设(X, Y)关于X, Y的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,则(1),(2)两式可分别化为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx.$$

Example

某公司提供一种地震保险,保险费Y的概率密度为

保险赔付X的概率密度为

$$g(x) = egin{cases} rac{1}{5} \mathrm{e}^{-rac{x}{5}}, x > 0, \ 0, &$$
其他,

设X与Y相互独立,求 $Z = \frac{Y}{X}$ 的概率密度.

① 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, & \text{ i.e. } \end{cases}$$

求Z = Y/X的概率密度.

② 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{ i.e.} \end{cases}$$

分别求(1)Z = X + Y, (2)Z = XY的概率密度

● 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

求Z = Y/X的概率密度.

② 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{ 其他.} \end{cases}$$

分别求(1)Z = X + Y.(2)Z = XY的概率密度.

● 设随机变量X, Y相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0, \\ 0, \end{cases}$$
 其他.

求Z = Y/X的概率密度.

② 设随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, 0 < x < 10, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{#.} \end{cases}$$

分别求(1)Z = X + Y,(2)Z = XY的概率密度.

Example

设随机变量X, Y相互独立,且分别服从参数为 α , θ ; β , θ 的 Γ 分布(分 别记成 $X \sim \Gamma(\alpha, \theta), Y \sim \Gamma(\beta, \theta)$). X, Y的概率密度分别为

$$f_X(x) = egin{cases} rac{1}{ heta^{lpha}\Gamma(lpha)} x^{lpha-1} \mathrm{e}^{-rac{x}{ heta}}, x \geq 0, \ 0, & ext{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = egin{cases} rac{1}{ heta^eta\Gamma(eta)} y^{eta-1} \mathrm{e}^{-rac{Y}{ heta}}, y \geq 0, \ 0, \qquad \qquad eta > 0, heta > 0. \end{cases}$$

试证明Z = X + Y服从参数为 $\alpha + \beta$, θ 的Γ分 布,即 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\theta)$.