线性方程组
$AX=B$ 的数值解法

李颖　　电话：15000114526

QQ：153844033

Email: yinglotus@shu.edu.cn

目录

- 向量和矩阵简介
- 向量和矩阵的性质

预备知识

- 线性方程组
- 线性方程组的直接解法
  - 高斯消去法
  - 矩阵三角分解法
- 线性方程组的迭代法
  - 雅可比迭代
  - 高斯-赛德尔迭代
  - 收敛性
- 本章总结

向量和矩阵简介

向量

n 维实数向量是 n 个实数的有序集合，

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

- 行向量和列向量
- 向量的运算
  - 加、数乘、点积 $\quad \boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

  - 线性组合 $\quad c\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{Y}$
  - 范数

$$\|\boldsymbol{X}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

向量和矩阵简介

向量代数

$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$ 是 n 维向量，a 和 b 为实数

交换律 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}$

结合律 $(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z})$

标量分配律 $(a+b)\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{X}$

向量分配律 $a(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=a\boldsymbol{X}+a\boldsymbol{Y}$

标量结合律 $a(b\boldsymbol{X})=(ab)\boldsymbol{X}$

向量和矩阵简介

矩阵

矩阵是数字按行列分布的矩形数组

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}=(a_{ij})=[a_{ij}] \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)
$$

$$
\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}
$$

向量和矩阵简介

矩阵的行向量

$A=(a_{ij})$ 的行构成一个向量，即矩阵的行向量

$$V_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$A=(a_{ij})=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=(V_1,V_2,\cdots,V_m)^{\mathrm{T}}$$

向量和矩阵简介

矩阵的列向量

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的列构成一个向量，即矩阵的列向量

$$\boldsymbol{C}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}},\qquad (j=1,2,...,n)$$

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{C}_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_n)$$

向量和矩阵简介

矩阵加与数乘

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$　　$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$　　$\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{d}$为实数

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Longleftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$c\boldsymbol{A}=(ca_{ij})_{m\times n}$$

$$c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{B}=(ca_{ij}+db_{ij})_{m\times n}$$

向量和矩阵性质

矩阵加与数乘

$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ $\boldsymbol{B}_{m\times n}$ $\boldsymbol{C}_{m\times n}$ a和b为实数

交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

标量分配律 $(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}$

向量分配律 $a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$

标量结合律 $a(b\boldsymbol{A})=(ab)\boldsymbol{A}$

向量和矩阵性质

矩阵乘

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} \qquad \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times p}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,p)$$

向量和矩阵性质

特殊矩阵

- 零矩阵 $\mathbf{0}=(0)_{m\times n}$
- 单位矩阵

$$\boldsymbol{I}_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad \text{(Kronecker delta)}$$

向量和矩阵性质

矩阵乘

A, B, C 为矩阵，　c为实数

结合律　$(AB)C = A(BC)$

单位矩阵　$IA = AI = A$

左分配律　$A(B+C) = AB + AC$

右分配律　$(A+B)C = AC + BC$

标量结合律　$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

向量和矩阵性质

矩阵的逆

如果存在一个矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 满足

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 是非奇异的或可逆的。

如果矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 不存在，则称 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 是奇异矩阵。

向量和矩阵性质

行列式

矩阵 $A_{n\times n}$ 的行列式为

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

代数余子式

M_{ij} 为余子式

向量和矩阵性质

（书上P89）

定理3.4　设A是N ×N方阵，下列命题是等价的。

给定任意N ×1矩阵B,线性方程组AX=B有唯一解

⟺ 矩阵A是非奇异的（即A^{-1}存在）

⟺ 方程组AX=0有唯一解 X=0

⟺ det(A)≠0

向量和矩阵性质

行列式和矩阵逆的Matlab实现

例 3.11 使用 MATLAB 和推论(25)中的逆矩阵法，分别求解例 3.6 中的线性方程组。

解：首先通过证明 $\det(A)\neq 0$（参见定理 3.4），验证 A 是非奇异矩阵。

```
>>A=[0.125 0.200 0.400;0.375 0.500 0.600;0.500 0.300 0.000];
>>det(A)
ans=
    -0.0175
```

然后根据推论(25)，可得到 $AX=B$ 的解是 $AX=B$，$X=A^{-1}B$。

```
>>X=inv(A)*[2.3 4.8 2.9]'
X=
    4.0000
    3.0000
    3.0000
```

可通过检查 $AX=B$ 来验证此结果。

```
>>B=A*X
B=
    2.3000
    4.8000
    2.9000
```

$$\boxed{\begin{bmatrix}0.125 & 0.200 & 0.400\\0.375 & 0.500 & 0.600\\0.500 & 0.300 & 0.000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.3\\4.8\\2.9\end{bmatrix}}$$

线性方程组

n元方程组的一般表示：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

矩阵表示：$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组直接解法

线性方程组直接解法：

在假定没有舍入误差的情况下，利用Gauss消元或矩阵分解，经过有限次运算可以求得方程组“准确解”的方法。

如消元法及其派生方法

线性方程组直接解法

三角形方程组的解法

三角形方程组包括上三角形方程组和下三角形方程组，是最简单的线性方程组之一。

上三角方程组的一般形式是：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = .. \\
\qquad\qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

其中$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\ldots\ldots, n)$

线性方程组直接解法

三角形方程组的解法

系数矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为上三角形或下三角形矩阵

$$\det(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

上三角形方程组的解法： 回代法

从最后一个方程入手，先解出 $x_n=b_n/a_{nn}$，然后按方程由后向前的顺序，从方程中依次解出 $x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$。这样就完成了上三角方程组的求解过程。这个过程被称为回代过程。

线性方程组直接解法

回代法计算过程　　（上三角形方程组的解法）

若 $a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\dots,n)$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \qquad (k = n-1, n-2, \dots, 1)$$

上三角线性方程组直接解法

返回变量　　函数名　　参数表

```
function X=backsub(A,b)
%Input—A is an n×n upper- triangular nonsingullar matrix
%          ---b is an n×1 matrix
%Output—X is the solution to the system AX=b
n=length(b);
X=zeros(n,1);
X(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
   X(i)=(b(i)-A(i,i+1:n)* X(i+1:n))/A(i,i);
end
```

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k) / a_{ii}$$

$$i = n-1, \cdots, 1$$

A的第i行、第$i+1$到n列元素构成的行向量

上三角线性方程组

上三角形方程组的解法　　回代法

例题

$$
\begin{cases}
4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20 \\
\quad -2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -7 \\
\qquad\qquad 6x_3 + 5x_4 = 4 \\
\qquad\qquad\qquad 3x_4 = 6
\end{cases}
$$

上三角线性方程组

上三角形方程组的解法　　回代法

程序 3.1(回代)　用回代法求解上三角线性方程组 $AX=B$，必须满足系数矩阵的对角元素非零。首先计算 $x_N=b_N/a_{NN}$，然后利用如下表达式：

$$x_k=\frac{b_k-\sum_{j=k+1}^{N}a_{kj}x_j}{a_{kk}}\quad \text{其中}\ k=N-1,\ N-2,\ \cdots,\ 1$$

```
function X=backsub(A,B)
%Input   - A is an n x n upper-triangular nonsingular matrix
%        - B is an n x 1 matrix
%Output  - X is the solution to the linear system AX = B
%Find the dimension of B and initialize X
n=length(B);
X=zeros(n,1);
X(n)=B(n)/A(n,n);
for k=n-1:-1:1
   X(k)=(B(k)-A(k,k+1:n)*X(k+1:n))/A(k,k);
end
```

上三角线性方程组

上机

- P97 1-3

下三角线性方程组

下三角方程的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

下三角方程的解：

$$\begin{cases} x_1 = b_1 / a_{11} \\ x_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k) / a_{ii} \qquad (i = n\text{-}1, n\text{-}2, \cdots, 1) \end{cases}$$

一般方程组如何解?

直接解法:　　Gauss 消去法

- **Gauss**消元法是目前计算机上常用于求低阶稠密系数矩阵方程组的有效方法
- **Gauss**消元法的特点就是通过消元将一般线性方程组的求解问题转化为三角方程组的求解问题。

Gauss 消去法

线性方程组的增广矩阵

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}] = \left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

增广矩阵可完整表示线性方程组

Gauss 消去法

初等变换

下列变换后的线性方程组等价：

- 交换变换：对调方程组的两行
- 比例变换：用非零常数乘以方程组的某行
- 置换变换：方程组的某行乘以一非零常数后，加到另一行上

主元

系数矩阵A中的元素a_{rr}用来消去 $a_{kr},\ k=r+1,r+2,\ldots,n$

称a_{rr}为第r个主元，相应的行成为主元行。

Gauss 消去法

Gauss消元法的求解过程,可大致分为两个阶段:

- 把原方程组化为上三角形方程组, 称之为"消元"过程;
- 用逆次序逐一求出上三角方程组的解,称之为"回代"过程。

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\
2x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 28 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\
-3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6
\end{cases}
$$

Gauss 消去法

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 13 \\ 2x_1 + 4x_3 + 3x_4 = 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

解：增广矩阵为

$$\begin{array}{l} \text{pivot} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = -3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

用行 1 消去列 1 中对角线下的元素。将行 1 作为**主元行**，元素 $a_{11} = 1$ 作为**主元**。用行 1 乘以常数 m_{k1}，再被行 k 减，$k = 2,3,4$。结果如下：

$$\begin{array}{l} \\ \text{pivot} \rightarrow \\ m_{32} = 1.5 \\ m_{42} = -1.75 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{-4} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

用行 2 消去列 2 中对角线下的元素。将行 2 作为主元行，用行 2 乘以常数 m_{k2}，再被行 k 减，$k = 3,4$。结果如下：

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{pivot} \rightarrow \\ m_{43} = -1.9 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-5} & -7.5 & -35 \\ 0 & 0 & 9.5 & 5.25 & 48.5 \end{array}\right]$$

Gauss 消去法

最后用行 3 乘以常数 $m_{43}=-1.9$，再被行 4 减，结果是上三角线性方程组的增广矩阵，表示如下：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7.5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right] \tag{11}$$

用回代法求解矩阵(11)，可得到

$$x_4=2,\qquad x_3=4,\qquad x_2=-1,\qquad x_1=3$$

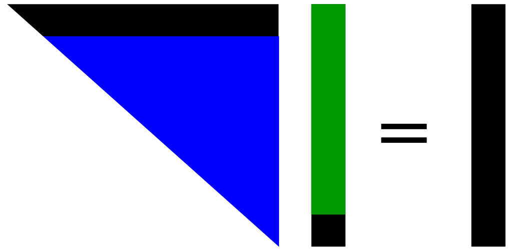
■

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ 2x_1+4x_3+3x_4=28 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+x_4=20 \\ -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4=13 \\ -4x_2+2x_3-5x_4=2 \\ -5x_3-7.5x_4=-35 \\ -9x_4=-18 \end{cases}$$

Gauss 消去法

考虑一般 $\boldsymbol{n}$ 阶线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{\text{矩阵形式}} \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}$$



高斯消去法的主要思路：

将系数矩阵$\boldsymbol{A}$化为上三角矩阵，然后回代求解。

记

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{n\times n} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = (b_j^{(1)})_{n\times 1} = \boldsymbol{B}$$

即 $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ $\quad b_j^{(1)} = b_j$

Gauss 消去法

第一步：消去第一列

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$ ，计算$m_{i1} = -a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \quad (i = 2, ..., n)$

依次将增广矩阵的 第 i 行 $+ m_{i1} \times$ 第 1 行，得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & & A^{(2)} & & B^{(2)} \end{array}\right]$$

其中 $\boxed{\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} + m_{i1} b_1^{(1)} \end{aligned}}$

$(i, j = 2, ..., n)$

第二步：消去第二列

设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ，计算$m_{i2} = -a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \quad (i = 3, ..., n)$

依次将上述矩阵的 第 i 行 $+ m_{i2} \times$ 第 2 行，得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & A^{(3)} & & B^{(3)} \end{array}\right]$$

其中 $\boxed{\left\{\begin{aligned} a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} \\ b_i^{(3)} &= b_i^{(2)} + m_{i2} b_2^{(2)} \end{aligned}\right.}$

$(i, j = 3, ..., n)$

Gauss 消去法

第 k 步：消去第 k 列

设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算 $m_{ik} = -a_{ik}^{(k)} \big/ a_{kk}^{(k)}$　$(i = k+1, \ldots, n)$

计算 $\boxed{\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} + m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} + m_{ik} b_k^{(k)} \end{aligned}}$　$(\, i = k+1, k+2, \ldots, n \,)$

依此类推，直到第 n-1 步，原方程化为

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

回代求解：

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \big/ a_{nn}^{(n)} \\ x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) \Big/ a_{ii}^{(i)} \end{cases}$$　$(\, i = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1 \,)$

Gauss 消去法

求解全过程包括两个步骤：消元和回代

1 顺序消元 $k=1,2,\cdots,n-1;\ i=k+1,k+2,\cdots,n$

$$(1)\ m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$$

$$(2)\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)},\quad j=k+1,k+2,\cdots,n$$

$$(3)\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)}$$

2 回代求解

$$x_n=b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$$

$$x_k=(b_k^{(k)}-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j)/a_{kk}^{(k)},\quad (k=n-1,n-2,\cdots,1)$$

Gauss 消去法

```
function X=gauss(A,b)
%Input—A is an n×n nonsingullar matrix
%          ---b is an n×1 matrix
%Output—X is the solution to the system AX=b
[n n]=size(A);  % 确定A的维数
X=zeros(n,1);
for k=1:n-1
    for i=k+1:n              % 消元过程
        m=A(i,k)/ A(k,k);  % A(k,k) ≠0
        A(i,k+1:n)= A(i,k+1:n)-m*A(k,k+1:n);
        b(i)= b(i)-m*b(k);
    end
end
X=backsub(A, b);          %回代求解
```

Gauss 消去法

执行上例的MATLAB程序文件中的代码。

A=[1 2 3;2 3 4;1 3 2]

B=[6;9;6]

X=GAUSS(A,B)

Gauss 消去法

消元法是解线性方程组的基本方法，具有计算简单的优点，但有时由于主元过小，使得计算结果严重失真, 实际中常采用选主元高斯消元法。

例:讨论下面方程组的解法

$$\begin{cases} 0.0001x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

假设求解是在**四位浮点**十进制数的计算机上进行

解:本题用机器数系表示为

$$\begin{cases} 0.1000\times10^{-3}\,x_1 + 0.1000\times10^{1}\,x_2 = 0.1000\times10^{1} \\ 0.1000\times10^{1}\,x_1 + 0.1000\times10^{1}\,x_2 = 0.2000\times10^{1} \end{cases}$$

$a_{11}=0.0001$, $m_{21}=a_{21}/a_{11}=1/0.0001=10^4$, **消元得**

$$\begin{cases} 0.1000\times10^{-3}\,x_1 + 0.1000\times10^{1}\,x_2 = 0.1000\times10^{1} \\ \qquad -0.1000\times10^{5}\,x_2 = -0.1000\times10^{5} \end{cases}$$

$a_{22}^{(2)}= 0.1000\times10^{1} - 10^4\times 0.1000\times10^{1}$

$= 0.00001\times10^{5} - 0.1000\times10^{5}$ (对阶计算)

$= -\ 0.1000\times10^{5}$

主元a_{11}过小

Gauss 消去法

- 高斯消去法有效的条件是：$\boxed{a_{kk}^{(k)}} \neq 0$ → 主元

如果某个主元为 0，则可能导致高斯消去法求解失败。

选主元基本思想

用高斯消元法求解线性方程组时,为避免小的主元.在进行第k步消元前,应该在第k列元素$a_{ik}^{(k)}\,(i=k,\cdots,n)$中找出第一个出现的绝对值最大者,例如$\left|a_{i_k k}^{(k)}\right| = \max\limits_{k \le i \le n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$，再把第$i_k$个方程与第$k$个方程组进行交换,使$a_{i_k k}^{(k)}$成为主元.我们称这个过程为选主元.由于只在第k列元素中选主元,通常也称为按列选主元.

Gauss 消去法

如果在第k步消元前,在第k个方程到第n个方程所有的x_k到x_n的系数 $a_{ij}^{(k)}$ $(i=k,\cdots,n;j=k,\cdots,n)$中,找出绝对值最大者,例如:

$$\left|a_{i_k j_k}^{(k)}\right| = \max_{k\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$$

再交换第K,IK两个方程和第K,JK列,使 $a_{i_k j_k}^{(k)}$ 成为主元.

称这个过程为完全选主元.

不论是哪种方式选出主元,而后再按上面介绍的计 算步骤进行消元的计算,一般都称为选主元的高斯消元法.在实际计算中,常用按列选主元的高斯消元法.

Gauss 消去法

选主元

- 选主元，使得 $a_{kk}^{k} \neq 0$ ← 交换行
- 选主元可减小误差

例　使用4位有效数字精度计算 $\begin{cases} 1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414 \\ 24.14x_1 - 1.210x_2 = 22.93 \end{cases}$

$$\boxed{x_1 = x_2 = 1.000}$$

解

$$m_{21} = 24.14/1.133 = 21.31$$

第2行减去第1行乘以21.31可得

$$\begin{cases} 1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414 \\ \qquad\qquad -113.7x_2 = -113.8 \end{cases}$$

利用回代法，得 $\boxed{x_2 = 1.001 \qquad x_1 = 0.9956}$

Gauss 消去法

选主元

- 选主元可减小误差

例 使用4位有效数字精度计算
$$\begin{cases} 24.14x_1 - 1.210x_2 = 22.93 \\ 1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = x_2 = 1.000}$$

解 $m_{21} = 1.133/24.14 = 0.04693$

第2行减去第1行乘以0.04693可得

$$\begin{cases} 24.14x_1 - 1.210x_2 = 22.93 \\ \qquad\qquad 5.3381x_2 = 5.338 \end{cases}$$

利用回代法，得 $\boxed{x_2 = 1.000 \qquad x_1 = 1.000}$

Gauss 消去法

选主元策略

将绝对值最大元素移到主对角线上

列主元Gauss消去法

- 偏序选主元策略

  检查主对角线下方第p列元素，确定行k:

$$|a_{kp}| = \max\{|a_{pp}|, |a_{(p+1)p}|, \cdots, |a_{np}|\}$$

若$k>p$, 则

交换第k, p行

- 按比例偏序选主元策略 — 减少传播误差

  搜索主对角线下方第p-n行绝对值最大元素

$$s_r = \max\{|a_{rp}|, |a_{r(p+1)}|, \cdots, |a_{rn}|\}, \quad (r = p, p+1, \cdots, n)$$

$$\frac{|a_{kp}|}{s_k} = \max\left\{\frac{|a_{pp}|}{s_p}, \frac{|a_{(p+1)p}|}{s_{p+1}}, \cdots, \frac{|a_{np}|}{s_n}\right\}$$

若$k>p$, 则

交换第k, p行

Gauss 消去法

列主元高斯消去法比普通高斯消去法要多一些比较运算，但比普通高斯消去法稳定。

现在我们再用列主元法解前面例子

$$\begin{cases} 0.0001x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

假设求解是在四位浮点十进制数的计算机上进行

将两个方程对调，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ 0.0001x_1+x_2=1 \end{cases}$$

消元，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ (1-0.0001)\ x_2=1 \end{cases}$$

在四位浮点十进制数的计算机上,上式为

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ (0.1000\times 10^1-0.00001\ \times 10^1x_2=1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

解得： $x_1=1$， $x_2=1$

Gauss 消去法

例 用列主元消去法解方程组

$$\begin{cases} -0.002x_1+2x_2+2x_3 = 0.4 \\ x_1+0.78125x_2 = 1.3816 \\ 3.996x_1+5.5625x_2+4x_3=7.4178 \end{cases}$$

解 第一次消元对

$$[A^{(1)}\,|b^{(1)}]=\left(\begin{array}{ccc|c} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ \boxed{3.996} & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{array}\right)$$

因列主元素为$a_{31}^{(1)}$, 故先作行交换$E_1\ E_3$, 然后进行消元计算可得

$$[A^{(2)}\,|b^{(2)}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & -0.61077 & -1.0010 & -0.47471 \\ 0 & \boxed{2.0029} & 2.0020 & 0.40371 \end{array}\right)$$

Gauss 消去法

第二次消元对$[A^{(2)}|b^{(2)}]$,因列主元素为$a_{32}^{(2)}$,故先作行交换E_2E_3,然后进行消元计算可得

$$[A^{(3)}|b^{(3)}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & 2.0029 & 2.0020 & 0.40371 \\ 0 & 0 & -0.39050 & -0.35160 \end{array}\right]$$

由此回代, 得

$$x=(1.9272,-0.69841,0.90038)^T$$

与精确解$x=(1.9273,-0.69850,0.90042)^T$比较误差较小。

Gauss 消去法

全主元Gauss消去法

如果在第k步消元前,在第k个方程到第n个方程所有的x_k到x_n的系数 $a_{ij}^{(k)}$ $(i, j=k,k+1,\ldots,n)$中,找出绝对值最大者,

$$\left|a_{i_k j_k}^{(k)}\right| = \max_{k\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$$

再交换第k, i_k两个方程和第k, j_k列, 使 $a_{i_k j_k}^{(k)}$ 成为主元.

Gauss 消去法

全主元高斯消去法

- 全主元高斯消去法：

第 k 步消元时选 $A^{(k)}$ 中绝对值最大的元素为主元，即

① 先选取全主元：$|a_{i_k j_k}^{(k)}| = \max\limits_{k\le i,j\le n}\left\{|a_{ij}^{(k)}|\right\} \neq 0$

② if $i_k \neq k$ then 交换第 k 行和第 i_k 行；

if $j_k \neq k$ then 交换第 k 列和第 j_k 列；

③ 消元

列交换改变了 x_i 的顺序，须记录交换次序，解完后再换回来。

全主元高斯消去法具有很好的稳定性，但选全主元比较费时，故在实际计算中很少使用。

Gauss 消去法

病态情况

- 如果存在矩阵B, 当矩阵B和A中元素的微小变化使得 $X = A^{-1}B$ 变化很大时，矩阵A称为病态矩阵
- 如果矩阵A称为病态矩阵，称方程组

$$AX = B$$

为病态方程组。

Gauss 消去法

Matlab 实现

例 3.19 (a) 使用 MATLAB 构造例 3.16 中的增广矩阵;(b) 使用 max 命令求系数矩阵 A 第 1 列中绝对值最大的元素;(c) 将增广矩阵(11)分解成系数矩阵 U 和常数矩阵 Y,形成上三角线性方程组 $UX=Y$。

解:

(a)

```
>> A=[1 2 1 4;2 0 4 3;4 2 2 1;-3 1 3 2];
>> B=[13 28 20 6]';
>> Aug=[A B]
   Aug=
         1  2  1  4  13
         2  0  4  3  28
         4  2  2  1  20
        -3  1  3  2  6
```

(b) 在下面的 MATLAB 显示中,a 是矩阵 A 第 1 列中绝对值最大的元素,j 是行数。

```
>>[a,j]=max(abs(A(1:4,1)))
a=
   4
j=
   3
```

(c) 设 Augup = [U | Y]是增广矩阵(11)中的上三角矩阵。

```
>> Augup=[1 2 1 4 13;0 -4 2 -5 2;0 0 -5 -7.5 -35;0 0 0 -9 -18];
>> U=Augup(1:4,1:4)
U=
   1.0000  2.0000  1.0000   4.0000
    0     -4.0000  2.0000  -5.0000
    0      0      -5.0000  -7.5000
    0      0       0       -9.0000
```

```
>> Y=Augup(1:4,5)
Y=
    13
     2
   -35
   -18
```

Gauss 消去法

程序 3.2(上三角变换和回代过程) 为构造 $AX=B$ 的解，首先将增广矩阵$[A|B]$变换成上三角矩阵，再执行回代过程。

```
function X = uptrbk(A,B)
%Input  - A is an N x N nonsingular matrix
%       - B is an N x 1 matrix
%Output - X is an N x 1 matrix containing the solution to AX=B.
%Initialize X and the temporary storage matrix C
    [N N]=size(A);
    X=zeros(N,1);
    C=zeros(1,N+1);
%Form the augmented matrix:Aug=[A|B]
    Aug=[A B];
for p=1:N-1
   %Partial pivoting for column p
   [Y,j]=max(abs(Aug(p:N,p)));
   %Interchange row p and j
   C=Aug(p,:);
   Aug(p,:)=Aug(j+p-1,:);
   Aug(j+p-1,:)=C;
if Aug(p,p)==0
   'A was singular.  No unique solution'
   break
end
%Elimination process for column p
   for k=p+1:N
      m=Aug(k,p)/Aug(p,p);
      Aug(k,p:N+1)=Aug(k,p:N+1)-m*Aug(p,p:N+1);
   end
end
%Back Substitution on [U|Y] using Program 3.1
X=backsub(Aug(1:N,1:N),Aug(1:N,N+1));
```

[A B]构造增广矩阵

max 偏序选主元策略

Gauss 消去法

作业

- P107 9

上机

- P108 1
- P109 4

线性方程组的直接解法

- 高斯消去法
- 矩阵三角分解法

三角分解法

矩阵分解法求解线性方程组

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

二、用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

三、用全主元的三角分解$PAQ^T=LU$求解$Ax=b$

四、利用*Cholesky*分解$A=LL^T$求解$Ax=b$

五、利用正交分解$A=QR$求解　$Ax=b$

六、利用矩阵奇异值分解$A=U\Sigma V^T$求解$Ax=b$

七、　三对角方程组的解法

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

非奇异矩阵A可分解为

$$A = LU$$

L为下三角矩阵

U为上三角矩阵

线性方程组

$$AX = B \Leftrightarrow LUX = B$$

$$\Updownarrow$$

$$LY = B$$

$$UX = Y$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

矩阵的三角分解

$$A=\begin{bmatrix}4&3&-1\\-2&-4&5\\1&2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\-2&-4&5\\1&2&6\end{bmatrix}$$

第2行减去第一行的-0.5倍，第3行减去第1行的0.25倍

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.25&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\0&-2.5&4.5\\0&1.25&6.25\end{bmatrix}$$

第3行减去第2行的-0.5倍

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-0.5&1&0\\0.25&-0.5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3&-1\\0&-2.5&4.5\\0&0&8.5\end{bmatrix}$$

倍数放入左边相应位置

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

矩阵的三角分解

$$A=LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_{ij} &= a_{ij}^{(j)} / a_{jj}^{(j)} \\ a_{ik}^{(j+1)} &= a_{ik}^{(j)} - m_{ij} a_{jk}^{(j)} \end{aligned}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　(无行交换变换)

$$AX=B \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{LY=B \qquad UX=Y}$$

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}=[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n} \qquad B=[a_{i(n+1)}^{(1)}]_{n\times 1}$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$Y=[a_{i(n+1)}^{(i)}]_{n\times 1}$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　(无行交换变换)

$$A=[a_{ij}]_{n\times n}=[a_{ij}^{(1)}]_{n\times n} \qquad B=[a_{i(n+1)}^{(1)}]_{n\times 1}$$

Step 1 增广矩阵

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2(n+1)}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n(n+1)}^{(1)} \end{array}\right]$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　(无行交换变换)

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2(n+1)}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n(n+1)}^{(1)} \end{array}\right]$$

Step 2 消去第2行到第n行的x_1，并将m_{r1}存入矩阵$(r,1)$处，即

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2(n+1)}^{(2)} \\ m_{31} & a_{32}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3(n+1)}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{n(n+1)}^{(2)} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_{i1} &= a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \\ a_{ik}^{(2)} &= a_{ik}^{(1)} - m_{i1}a_{1k}^{(1)} \end{aligned}}$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　(无行交换变换)

Step 3 消去第3行到第n行的x_2，并将m_{r2}存入矩阵$(r,2)$处，即

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2(n+1)}^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3(n+1)}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & a_{n(n+1)}^{(3)} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_{i2} &= a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \\ a_{ik}^{(3)} &= a_{ik}^{(2)} - m_{i2}a_{2k}^{(2)} \end{aligned}}$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　　(无行交换变换)

Step j+1

$$m_{ij}=a_{ij}^{(j)}/a_{jj}^{(j)}$$

$$a_{ik}^{(j+1)}=a_{ik}^{(j)}-m_{ij}a_{jk}^{(j)}$$

消去第j+1行到第n行的x_j,

并将m_{rj}存入矩阵(r,j)处;

以此类推, 消去第n行的x_{n-1}后

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ m_{21} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2(n+1)}^{(2)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & a_{3(n+1)}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & a_{nn}^{(n)} & a_{n(n+1)}^{(n)} \end{array}\right]$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

直接分解法解线性方程组　(无行交换变换)

$$LY=B \Rightarrow Y$$

$$UX=Y \Rightarrow X$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$Y=[a_{i(n+1)}^{(i)}]_{n\times 1} \qquad B=[a_{i(n+1)}^{(1)}]_{n\times 1}$$

第一步：求解下三角方程组，向前回代求出

$$\boxed{\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Y}}$$

$$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{LY}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=B$$

$$y_1=b_1$$

向前回代

$$y_k=b_k-\sum_{j=1}^{k-1}m_{kj}y_j \qquad (k=2,3,\cdots,n)$$

第二步：求解上三角方程组，向后回代求出

$$\boxed{UX = Y \Longrightarrow X}$$

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$$

$$UX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Y$$

$$x_n = y_n / a_{nn}$$

向后回代

$$x_k = (y_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j) / a_{kk} \quad (k = n-1, n-2, \cdots, 1)$$

一、利用三角分解$A=LU$求解$Ax=b$

例：用直角三角分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

解：用分解计算公式得

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}=LU.$$

求解 $Ly=(14,18,20)^T \Rightarrow \ y=(14,-10,-72)^T$,

$$Ux=(14,-10,-72)^T \Rightarrow \quad x=(1,2,3)^T.$$

思考1（课后）：

LU分解 和
Gauss消去法
的关系?

LU 分解：高斯消去法的变形

$$A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = L A^{(n)} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}^{(\mathrm{n})} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

GAUSS消去法的矩阵表示

每一步消去过程相当于左乘初等变换矩阵L_k

$$记：\quad A^{(2)} = L_1 A^{(1)}, b^{(2)} = L_1 b^{(1)}$$

其中

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & & 1 & \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{i=2,3,\cdots,n}{m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

GAUSS 消去法的矩阵表示

记： $A^{(3)} = L_2 A^{(2)}$ ， $b^{(3)} = L_2 b^{(2)}$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$$
$$i = 3, 4, \cdots, n$$

$A^{(3)} = L_2 L_1 A^{(1)}$ ， $b^{(3)} = L_2 L_1 b^{(1)}$

GAUSS 消去法计算过程

L_i 与 L_i^{-1}

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ 0 & \cdots & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & -m_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

i列

$$L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ 0 & & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & m_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

i列

$$A^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A^{(1)}$$

$$b^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 b^{(1)}$$

LU形式

$$A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = L A^{(n)} = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & m_{22} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & m_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

思考2:

所有矩阵都可以进行三角分解?

NO!!!

$$A=\begin{bmatrix}1&2&6\\4&8&-1\\-2&3&5\end{bmatrix}$$

并非所有非奇异矩阵均可进行三角分解

引入置换矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2&6\\4&8&-1\\-2&3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\m_{21}&1&0\\m_{31}&m_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{bmatrix}$$

$1=1a_{11}$ $\qquad$ $2=1a_{12}$

$4=m_{21}a_{11}=m_{21}$ $\qquad$ $8=m_{21}a_{12}=4\times 2+a_{22} \Rightarrow a_{22}=0$

$-2=m_{31}a_{11}=m_{31}$

$$\boxed{3=m_{31}a_{12}+m_{32}a_{22}=-2\times 2+m_{32}\times 0=-4}$$

矛盾

二、用列主元的三角分解$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{LU}$求解$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

置换矩阵

置换矩阵的每一行和每一列只有一个元素为1，其它为0

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{k_1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_{k_2}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{E}_{k_n}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

标准基向量 $\boldsymbol{E}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{E}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

二、用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

置换矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E_{k_1}^{\mathrm{T}} & E_{k_2}^{\mathrm{T}} & \cdots & E_{k_n}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

置换矩阵是非奇异的

$$P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$$

矩阵PA是将矩阵A的行按照行$k_1, k_2, \ldots, k_n$调整顺序形成的。

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}E_2^{\mathrm{T}} & E_1^{\mathrm{T}} & E_4^{\mathrm{T}} & E_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

二、用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

矩阵PA的三角分解

$$PA=LU$$

即将矩阵A先进行行交换变换，再三角分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 4 & 8 & -1\\ -2 & 3 & 5\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$PA=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ -2 & 3 & 5\\ 4 & 8 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 7 & 17\\ 0 & 0 & -25\end{bmatrix}$$

二、用列主元的三角分解$PA = LU$求解$Ax = b$

扩展的Gauss消去法解线性方程组

(有行交换变换)

$$AX = B \Longleftrightarrow PAX = PB \Longleftrightarrow LUX = PB$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} LY = PB \\ UX = Y \end{cases}}$$

二、用列主元的三角分解$PA = LU$求解$Ax = b$

例：用列主元三角分解求解Ax=b

$$
其中A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

解： $i_1 = 3, \qquad i_1 \leftrightarrow 1$

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_1A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

二、用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

$$L_1=\begin{bmatrix}1&&&\\ \frac{1}{2}&1&&\\ 0&&1&\\ -\frac{1}{2}&&&1\end{bmatrix}\qquad L_1P_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\ &-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\ &1&-1&2\\ &\frac{7}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$i_2=4,\qquad i_2\leftrightarrow 2$$

$$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad P_2L_1P_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\ &\frac{7}{2}&0&\frac{1}{2}\\ &1&-1&2\\ &-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&&&\\ &1&&\\ &-\frac{2}{7}&1&\\ &\frac{1}{7}&&1\end{bmatrix}\qquad L_2P_2L_1P_1A=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\ &\frac{7}{2}&0&\frac{1}{2}\\ &0&-1&\frac{13}{7}\\ &0&0&\frac{11}{7}\end{bmatrix}=U$$

二、用列主元的三角分解$PA=LU$求解$Ax=b$

$$L_2P_2L_1P_1A=U, \qquad A=P_1^{-1}L_1^{-1}P_2^{-1}L_2^{-1}U=P_1\,L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U$$

令$P=P_2P_1$

$$PA=P_2P_1P_1\,L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U=P_2L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}U, \qquad L=P_2L_1^{-1}P_2\,L_2^{-1}$$

$$PA=LU$$

$$L=P_2L_1^{-1}P_2L_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 0 & 2/7 & 1 & \\ -1/2 & -1/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 3.25 对习题 3.22 中的矩阵 A 使用 MATLAB 命令[L,U,P] = lu(A)。验证 $A = P^{-1}LU$(即证明 $PA = LU$)。

```
>>A=[1 2 6 ;4 8 -1;-2 3 -5];
>>[L,U,P]=lu(A)
L=
     1.0000  0       0
     -0.5000 1.0000  0
     0.2500  0       1.0000
U=
     4.0000 8.0000 -1.0000
     0      7.0000 4.5000
     0      0      6.2500
P=
   0 1 0
   0 0 1
   1 0 0

>>inv(P)*L*U
   1  2 6
   4  8 -1
   -2 3 5
```

■

程序 3.3（*PA* = *LU*：带选主元的分解法） 构造线性方程组 $AX = B$ 的解，其中 A 是非奇异矩阵。

```
function X = lufact(A,B)
%Input   - A is an N x N matrix
%        - B is an N x 1 matrix
%Output  - X is an N x 1 matrix containing the solution to AX = B.
%Initialize X, Y, the temporary storage matrix C, and the row
% permutation information matrix R
   [N,N]=size(A);
   X=zeros(N,1);
   Y=zeros(N,1);
   C=zeros(1,N);
   R=1:N;
for p=1:N-1
%Find the pivot row for column p
   [max1,j]=max(abs(A(p:N,p)));
%Interchange row p and j
   C=A(p,:);
   A(p,:)=A(j+p-1,:);
   A(j+p-1,:)=C;
   d=R(p);
   R(p)=R(j+p-1);
   R(j+p-1)=d;
if A(p,p)==0
   'A is singular.  No unique solution'
   break
end
```

（续前页）

```
%Calculate multiplier and place in subdiagonal portion of A
    for k=p+1:N
        mult=A(k,p)/A(p,p);
        A(k,p) = mult;
        A(k,p+1:N)=A(k,p+1:N)-mult*A(p,p+1:N);
    end
end
%Solve for Y
Y(1) = B(R(1));
for k=2:N
    Y(k)= B(R(k))-A(k,1:k-1)*Y(1:k-1);
end
%Solve for X
X(N)=Y(N)/A(N,N);

   for k=N-1:-1:1
       X(k)=(Y(k)-A(k,k+1:N)*X(k+1:N))/A(k,k);
   end
```

作业

- P119 6

上机

- P120 1
- P120 2
- P121 6

三、用全主元的三角分解$PAQ^T = LU$求解$Ax = b$

$$Ax = b \Leftrightarrow PAQ^T(Qx) = Pb \Rightarrow LU(Qx) = Pb$$

lupqdsv.m

%功能：调用全主元三角分解函数[LU,p,q]=lupqd(A)

%　　求解线性方程组Ax=b。

%解法：PAQ^{-1}=LU，Ax=b←→(PAQ^{-1})(Qx)=Pb

%　　LU(Qx)=Pb，z=Qx，y=Uz

%　　Ly=f=Pb，　f(i)=b(p(i))

%　　Uz=y，z=Qx，x(q(i))=z(i).

%输入：方阵A，右端项b（行或列向量均可）

%输出：解x（行向量）

四、利用Cholesky分解$A=LL^T$求解$Ax=b$

$A\in R^{n\times n}$是对称正定的矩阵，有Cholesky分解式

$A=LL^T$代入原方程　$LL^Tx=b$,可分成两步

(1) 求 解 下 三 角 方 程 组

$$LY=b$$

$$y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k)/l_{ii},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2) 求解上三角方程组

$$L^Tx=Y$$

$$x_i=(y_i-\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k)/l_{ii},\quad (i=n,n-1,\cdots,1)$$

五、利用正交分解$A=QR$求解 $Ax=b$

$Ax=b \Leftrightarrow QRx=b \Leftrightarrow Rx=Q^T b$，于是可分成三步

（1）正交分解 $A=QR$

（2）矩阵乘法 $\bar{b}=Q^T b$

（3）回代求解上三角方程组 $Rx=\bar{b}$

这种方法没有选主元问题，计算稳定，但计算量略大，消元法的计算量大约为 $\frac{1}{3}n^3$，正交分解法的计算量大约为$\frac{2}{3}n^3$。

五、利用正交分解$A=QR$求解 $Ax=b$

(1) $A=QR$

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \cdots \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

(2)计 算$\overline{b}=Q^T b$

$$\overline{b}_k=\sum_{i=1}^{n} q_{ik} b_i, k=1,2,\cdots,n$$

(3)回 代 求 解 $Rx=\overline{b}$

$$\begin{cases} x_n=\overline{b}_n / r_{nn} \\ x_k=(\overline{b}_n-\sum\limits_{j=k+1}^{n} r_{kj} x_j) \Big/ r_{kk} \end{cases}, \quad (k=n-1,\cdots,2,1)$$

六、利用矩阵奇异值分解$A=U\Sigma V^T$求解$Ax=b$

对于$A\in R^{n\times n}$非奇异情况，此时有奇异值分解

$$A=U\Sigma V^T$$

其中U、V为正交阵，$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{pmatrix}$，$\sigma_i>0, i=1,2,\dots,n$

显然 $$A^{-1}=V\Sigma^{-1}U^T=V\,diag(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},\dots,\frac{1}{\sigma_n})U^T$$

于是，求解 $Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$

可化为 $$x=V\,diag(\frac{1}{\sigma_1},\frac{1}{\sigma_2},\dots,\frac{1}{\sigma_n})U^T b$$

七、 三对角方程组的解法

定义1 若n 阶矩阵$A=(a_{ij})$的元素满足:对于$1<p,q<n$的正整数p、q,有$j\geq i+p$及$i\geq j+q$时，$a_{ij}=0$，则A称为带状矩阵．带宽为$w=p+q-1$。

较常见带状矩阵为带宽为3（$p=q=2,w=3$)的矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

A称为三对角矩阵。

系数矩阵为三对角矩阵的线性方程组称为三对角方程组。

三对角线性方程组

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\
 & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}
$$

用矩阵表示　　$Ax = d$

应用追赶法求解三对角线性方程组。追赶法仍然保持LU分解特性,它是一种特殊的LU分解。充分利用了系数矩阵的特点，而且使之分解更简单,得到对三对角线性方程组的快速解法。

定理： 如果带宽为 $w=p+q-1$ 的n阶带状矩阵A有LU分解:$A=LU$，则L是带宽为p的下三角矩阵，U是带宽为q的上三角矩阵。

例：

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1q} & & 0 \\
\vdots & a_{22} & & \ddots & \\
a_{p1} & & \ddots & & a_{n-q+1,n} \\
& \ddots & & \ddots & \vdots \\
0 & & a_{n,n-p+1} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & & & & 0 \\
\vdots & 1 & & & \\
l_{p1} & & \ddots & & \\
& \ddots & & \ddots & \\
0 & & l_{n,n-p+1} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{11} & \cdots & u_{1q} & & 0 \\
& u_{22} & & \ddots & \\
& & \ddots & & u_{n-q+1,n} \\
& & & \ddots & \vdots \\
0 & & & & u_{nn}
\end{bmatrix}
$$

当A为三对角阵,且$|b_1|>|c_1|,|b_i|>|c_i|+|a_i|,(i=1,2,\cdots,n-1)$, $|b_n|>|c_n|$时，A有LU分解展开式

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & r_1 & & & \\ & u_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & r_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

$$b_1 = u_1, \quad c_1 = r_1, \quad a_2 = l_2 u_1$$

$$b_2 = l_2 r_1 + u_2 = l_2 c_1 + u_2, \quad c_2 = r_2,$$

$$a_k = l_k u_{k-1}, \qquad k = 2,3,\cdots,n$$

$$b_k = l_k r_{k-1} + u_k = l_k c_{k-1} + u_k, k = 2,3,\cdots,n$$

$$c_k = r_k, \qquad k = 2,3,\cdots,n-1$$

$$b_1 = u_1, \quad c_1 = r_1, \quad a_2 = l_2 u_1$$

$$b_2 = l_2 r_1 + u_2 = l_2 c_1 + u_2, \quad c_2 = r_2,$$

$$a_k = l_k u_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \cdots, n$$

$$b_k = l_k r_{k-1} + u_k = l_k c_{k-1} + u_k, k = 2, 3, \cdots, n$$

$$c_k = r_k, \qquad k = 2, 3, \cdots, n-1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u_1 = b_1, r_k = c_k (k = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \text{对} k = 2, 3, \cdots, n \\ l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1} \end{array}}$$

追赶法的计算过程分为三步

(1) $A = LU$　　(2) $LY = d$　　(3) $Ux = Y$

求解三对角方程组的追赶法

①计算分解因子阵

$$u_1 = b_1, r_k = c_k (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

对 $k = 2, 3, \cdots, n$

$$l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1}$$

②求解 $LY = d$,

$$y_1 = d_1$$

$$y_k = d_k - l_k y_{k-1} (k = 2, 3, \cdots, n)$$

③求解 $Ux = Y$,

$$x_n = y_n / u_n$$

$$x_k = (y_n - c_k x_{k+1}) / u_k \ (k = n-1, \cdots, 2, 1)$$

线性方程组的迭代解法

迭代法适用于求解大型稀疏的线性方程组，其基本思想是通过构造迭代格式产生迭代序列，由迭代序列来逼近原方程组的解，因此，要解决的基本问题是：

1.如何构造迭代格式

2.迭代序列是否收敛

迭代法则能保持矩阵的稀疏性，具有计算简单，编制程序容易的优点，并在许多情况下收敛较快。故能有效地解一些高阶方程组。

线性方程组的迭代解法

主要知识点

- 雅可比迭代法
- 高斯-塞德尔迭代法
- 迭代法的收敛性及误差估计

先通过一个简单的例子，了解迭代的基本思想。

例：设方程组：

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (20 + 3x_2 - 2x_3)/8 \\ x_2 = (33 - 4x_1 + x_3)/11 \\ x_3 = (36 - 6x_1 - 3x_2)/12 \end{cases}$$

迭代格式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/8 \\ x_2^{(k+1)} = (33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/11 \\ x_3^{(k+1)} = (36 - 6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})/12 \end{cases} \qquad k = 0,1,2,....$$

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 20 \\ x_2^{(0)} = 33 \\ x_3^{(0)} = 36 \end{cases}$$

迭代到第10次, 得到

$$x^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.9998813)^T$$

已知精确解为 $x = (3,2,1)^T$

基本迭代法的格式及收敛性

设有线性代数方程组

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$$

用矩阵表示：　$Ax=b$

A 为系数矩阵，非奇异且设$a_{ii}\neq 0$；b为右端，x为解向量

$A=M+N$　M的逆好求。$Ax=b \Longleftrightarrow (M+N)x=b$

$\Longleftrightarrow Mx=-Nx+b \Longleftrightarrow x=-M^{-1}Nx+M^{-1}b$

$$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+g,\qquad B=-M^{-1}N,g=M^{-1}b$$

基本迭代法的格式及收敛性

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + g, \qquad B = -M^{-1}N, g = M^{-1}b$$

基本迭代法的迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

其中$B \in R^{n\times n}$称为迭代矩阵，g是已知的n维向量，

给定$x^{(0)}$,由迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$

即可产生迭代序列$\{x^{(k)}\}$。

当 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$

对 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ 取极限

得 $x = Bx + g \Leftrightarrow Ax = b$

注：分解A是一个重要问题

例：对线性方程组$Ax=b$，其中$A=\begin{bmatrix}8 & -3 & 2\\ 4 & 11 & -1\\ 6 & 3 & 12\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}20\\ 33\\ 36\end{bmatrix}$

解：将A分解为$A=M+N$, 其中$M=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}, N=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & 0 & -1\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}$

$$Ax=b \Leftrightarrow x=-M^{-1}Nx+M^{-1}b=M^{-1}(b-Nx)$$

$$=\begin{bmatrix}1/8 & 0 & 0\\ 0 & 1/11 & 0\\ 0 & 0 & 1/12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20+3x_2-2x_3\\ 33-4x_1+x_3\\ 36-6x_1-3x_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1=(20+3x_2-2x_3)/8\\ x_2=(33-4x_1+x_3)/11\\ x_3=(36-6x_1-3x_2)/12\end{cases}$$

迭代格式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (20 + 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)})/8 \\ x_2^{(k+1)} = (33 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/11 \\ x_3^{(k+1)} = (36 - 6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)})/12 \qquad k = 0,1,2,.... \end{cases}$$

迭代到第10次, 得到

$$x^{(10)} = (3.000032, 1.999838, 0.9998813)^T$$

已知精确解为 $x = (3,2,1)^T$

迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$

迭代矩阵B=$\begin{bmatrix} 0 & 3/8 & -2/8 \\ -4/11 & 0 & 1/11 \\ -6/12 & -3/12 & 0 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 20/8 \\ 33/11 \\ 36/12 \end{bmatrix}$

定义 基本迭代法$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$产生的迭代序列$\{x^{(k)}\}$，如果对任取初始向量$x^{(0)}$都有$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$，则称此迭代法是收敛的，否则是发散的。

在R^n中，点列的收敛等价于每个分量的收敛。即

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{对} x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T,\\ &\quad x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T \in R^n,\\ &\text{则} \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, (i = 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}}$$

同理，$\left\{A^{(k)}\right\}$的收敛与所选择的范数无关。

若$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), A = (a_{ij})$，

则$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

收敛性分析

x是精确解　　$Ax=b \Leftrightarrow x=Bx+g$

迭代格式为　　$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$

误差向量　　$\varepsilon^{(k)}=x-x^{(k)}=B(x-x^{(k-1)})=B\varepsilon^{(k-1)}$

$$=\cdots=B^k\varepsilon^{(0)}$$

其中$\varepsilon^{(0)}=x-x^{(0)}$是初始误差向量，是一个确定的值

由此，得到结论:对任意初值$x^{(0)}$,

$$迭代序列\left\{x^{(k)}\right\}收敛 \Leftrightarrow B^k \to 0 \qquad (k\to\infty)$$

定理1(迭代法收敛的充要条件)

迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$对任意初始向量$x^{(0)}$都收敛的充分必要条件是$\rho(B) < 1$.

例：用迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

解：

构造迭代格式$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 5 + 2x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3x_1^{(k)} - 5 \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

迭代矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

由$\det(\lambda I - B) = \lambda^2 - 6 = 0$, 得$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$,

$\rho(B) = 2.449 > 1$.由定理1迭代格式不收敛.

引理（特征值上界定理）

设$A\in R^{n\times n}$,对于$\|\ .\ \|_p$,($p=1,2,\infty$)有

$$\rho(A)\le\|A\|_p$$

证明:设λ是A的任一特征值,U为相应的特征向量,

则有$AU=\lambda U$

$$\therefore\|\lambda U\|=|\lambda|\|U\|_p=\|AU\|_p\le\|A\|_p\|U\|_p$$

$$|\lambda|\le\|A\|_p$$

因λ是A的任一特征值,故定理得证.

定理2 (迭代法收敛的充分条件)

如果迭代格式$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$的迭代矩阵B的某一种范数$\|B\|<1$,则此迭代格式收敛.

定理3 如果迭代格式$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$的迭代矩阵B满足$\|B\|<1$，则有如下的误差估计式.

$$\|x^{(k)}-x\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

$$\|x^{(k)}-x\|\le\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

证明：由$x=Bx+g$和$x^{(k)}=Bx^{(k-1)}+g$有

$$x^{(k)}-x=B(x^{(k-1)}-x)$$

$$=B(x^{(k-1)}-x^{(k)})+B(x^{(k)}-x)$$

从而 $\|x^{(k)}-x\|\le\|B\|\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\|+\|B\|\|x^{(k)}-x\|$

$$\therefore\ \|x^{(k)}-x\|\le\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$$

又因为$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$，$x^{(k-1)} = Bx^{(k-2)} + g$

$$\therefore \qquad x^{(k)} - x^{(k-1)} = B(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})$$

$$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| = \left\|B(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})\right\|$$

$$\le \|B\|\left\|(x^{(k-1)} - x^{(k-2)})\right\| \le \cdots \le \|B\|^{k-1}\left\|(x^{(1)} - x^{(0)})\right\|$$

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \le \frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$$

注：(1) $\|B\|$越小，收敛越快.

(2) $\|B\|$接近1时，收敛慢.

迭代终止标准

(1) 绝对误差标准。给出容许误差界ε

当$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_p \le \varepsilon$ 时，$p=1,2,\infty$,终止迭代，

解取为$x \approx x^{(k)}$.

常取$p=\infty$,

$$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty \le \varepsilon \Leftrightarrow \max_i |x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}| \le \varepsilon$$

(2) 相对误差标准。给出容许误差界ε

$$\frac{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \varepsilon$$

(3)给出最大迭代次数 $k_{\max}$

当$k \ge k_{\max}$迭代终止，给出失败信息。

估计迭代次数

由误差估计式$\left\|x^{(k)}-x\right\| \le \dfrac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$估计迭代次数

$$\left\|x^{(k)}-x\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \le \varepsilon \Rightarrow k \ge \frac{\ln\left(\varepsilon \dfrac{1-\|B\|}{\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|}\right)}{\ln\|B\|}$$

渐近收敛速度

由 $\varepsilon^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)}$

$$\|\varepsilon^{(k)}\| \le \|B\|^k \|\varepsilon^{(0)}\| \approx (\rho(B))^k \|\varepsilon^{(0)}\|$$

说明$(\rho(B))^k$表示迭代误差的缩减因子，若希望实际的缩减因子为η（$0<\eta<1$），即$\|\varepsilon^{(k)}\| \le \eta \|\varepsilon^{(0)}\|$.则可令$(\rho(B))^k \le \eta$.

由此，可估计出所需的迭代次数$k \ge \dfrac{\ln \eta}{\ln(\rho(B))}$

η相当于相对误差限，如取$\eta = 10^{-6}$，则有

$$k \ge -\frac{6\ln 10}{\ln(\rho(B))}$$

定义 $R = -\ln(\rho(B))$为迭代格式的渐近收敛速度。

思考：

如何构造迭代矩阵？

两种实用的基本迭代法

- 1、Jacobi迭代法
- 2、Gauss-Seidel迭代法

1、Jacobi 迭代

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}=D-L-U$$

例：$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}=D-L-U$

$$D=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},U=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1、Jacobi 迭代

$$Ax = b \Leftrightarrow (D - L - U)x = b$$

$$\Leftrightarrow Dx = (L + U)x + b$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

于是 $$Ax = b \Leftrightarrow x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$= B_J x + g$$

其中 $$B_J = D^{-1}(L + U),\quad g = D^{-1}b$$

***Jacobi*迭代的矩阵格式**

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g$$

Jacobi迭代矩阵

推导其分量形式

由 $Ax=b \Leftrightarrow (D-L-U)x=b \Leftrightarrow Dx=(L+U)x+b$ 得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{22}x_2 = -a_{21}x_1 \quad -a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \\ a_{nn}x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} \quad + b_n \end{cases}$$

第i个方程除以a_{ii}(i =1, 2, ..., n), 得

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Jacobi迭代的分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} \quad - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)} \quad + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

令：$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$

则 $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g$

这里$B_J = D^{-1}(L+U)$, $g = D^{-1}b$

Jacobi迭代公式（分量形式）

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

*Jacobi*迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + g$$

给出初始向量 $x^{(0)}$，即可得到向量序列：

$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}, \cdots$

若 $x^{(k)} \to x^*$，则x^*是解。

例1：设方程组为
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

试写出其**Jacobi**分量迭代格式以及相应的迭代矩阵，并求解。

解：Jacobi迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-12 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(3 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

故**Jacobi**迭代矩阵为

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^t$, $e=10^{-3}$,
终止准则：$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<e$

范数的定义

$$x^{(14)}=\begin{pmatrix} -3.9997 \\ 2.9998 \\ 1.9998 \end{pmatrix}$$

Jacobi 迭代

例：

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (7 + y - z)/4 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = (15 + 2x - y)/5 \end{cases}$$

Jacobi 迭代过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_k - y_k)/5 \end{cases}$$

给一个初值 $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ 可得解 $(2,4,3)$

表 3.2　求解线性方程组(1)的收敛的雅可比迭代

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
4	1.99062500	3.97656250	3.00000000
5	1.99414063	3.99531250	3.00093750
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1.99999993	3.99999985	2.99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Jacobi 迭代法有时是无效的

$$\begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-15 + y + 5z)/2 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = 7 - 4x + y \end{cases}$$

Jacobi 迭代过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = (-15 + y_k - +5_k)/2 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} = 7 - 4x_k + y_k \end{cases}$$

给一个初值 $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ **则解不收敛。**

Jacobi 迭代法有时是无效的

表 3.3　求解线性方程组(4)的发散的雅可比迭代

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	−1.5	3.375	5.0
2	6.6875	2.5	16.375
3	34.6875	8.015625	−17.25
4	−46.617188	17.8125	−123.73438
5	−307.929688	−36.150391	211.28125
6	502.62793	−124.929688	1202.56836
⋮	⋮	⋮	⋮

Jacobi 迭代法是否收敛？

系数矩阵A应具有严格对角优势，即

$$\left|a_{kk}\right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left|a_{kj}\right|, \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

即矩阵A的主对角线元素的绝对值应大于该行其它元素的绝对值之和。

2、Gauss-Seidel迭代法

例2：设方程组为
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

试写出Gauss-Seidel迭代格式.

解： Gauss-Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-12 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 + x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(3 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代的分量形式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\
\cdots \\
x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}}
\end{cases}
$$

$$
x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii},
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, n
$$

推导Gauss-Seidel 迭代法的矩阵形式

由
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k+1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2 \\ a_{33}x_3^{(k+1)} = -a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

由
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k+1)} - \cdots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k+1)} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ \cdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = -a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n \end{cases}$$

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

$$Dx^{(k+1)} = b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow (D-L)x^{(k+1)} = b + Ux^{(k)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + g$$

Gauss-Seidel迭代矩阵

其中 $B_G = (D-L)^{-1}U,\qquad g = (D-L)^{-1}b$

$$Ax = b \Leftrightarrow (D-L)x = b + Ux$$

Gauss-Seidel迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Gauss-Seidel迭代的矩阵格式

$$x^{(k+1)} = B_G x^{(k)} + g$$

其中$B_G = (D-L)^{-1}U, \qquad g = (D-L)^{-1}g$

给出初始向量 $x^{(0)}$，即可得到向量序列：

$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}, \cdots$

若 $x^{(k)} \rightarrow x^*$，则x^*是解。

Gauss–Seidel 迭代法

```
function X=gseid(A,B,P,delta, max1)
% Input - A is an N x N nonsingular matrix
%       - B is an N x 1 matrix
%       - P is an N x 1 matrix; the initial guess
%       - delta is the tolerance for P
%       - max1 is the maximum number of iterations
% Output - X is an N x 1 matrix: the gauss-seidel
%          approximation to the solution of AX = B
N = length(B);
for k=1:max1
    for j=1:N
        if j==1
            X(1)=(B(1)-A(1,2:N)*P(2:N))/A(1,1);
        elseif j==N
            X(N)=(B(N)-A(N,1:N-1)*(X(1:N-1))')/A(N,N);
        else
            %X contains the kth approximations and P the (k-1)st
            X(j)=(B(j)-A(j,1:j-1)*X(1:j-1)'
                  -A(j,j+1:N)*P(j+1:N))/A(j,j);
        end
    end
    err=abs(norm(X'-P));
    relerr=err/(norm(X)+eps);
    P=X';
        if(err<delta)|(relerr<delta)
            break
        end
end
X=X';
```

Gauss–Seidel 迭代法

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (7 + y - z)/4 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = (15 + 2x - y)/5 \end{cases}$$

Gauss–Seidel 迭代法过程

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_{k+1} + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_{k+1} - y_{k+1})/5 \end{cases}$$

给一个初值 $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,2)$ 可得解 **(2,4,3)**

Gauss–Seidel 迭代法

表 3.4 用于方程组(1)的收敛的高斯－赛德尔迭代

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.75	2.95
2	1.95	3.96875	2.98625
3	1.995625	3.99609375	2.99903125
⋮	⋮	⋮	⋮
8	1.99999983	3.99999988	2.99999996
9	1.99999998	3.99999999	3.00000000
10	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Gauss–Seidel 迭代法收敛速度更快。

收敛准则

一般收敛原则

$$\left.\begin{array}{r}\rho(B_J)<1\Leftrightarrow\\ \|B_J\|<1\Rightarrow\end{array}\right. Jacobi\text{收敛,}$$

$$\left.\begin{array}{r}\rho(B_G)<1\Leftrightarrow\\ \|B_G\|<1\Rightarrow\end{array}\right. \text{Gauss-Seidel收敛}$$

实用准则：由A来直接判断（充分准则）

准则1：A严格对角占优$\Rightarrow$ *Jacobi*迭代法,Gauss-Seidel迭代法收敛

准则2：$\|B_J\|_\infty<1\Rightarrow$ *Jacobi*迭代法,Gauss-Seidel迭代法收敛.

准则3：A 对称正定 $\Rightarrow$ Gauss-Seidel迭代法收敛

准则4：若A是对称正定的，

则$2D-A$是对称正定$\Leftrightarrow$ *Jacobi*迭代法收敛

证明准则1：A严格对角占优 $\Rightarrow$ *Jacobi*迭代法收敛

$\Rightarrow$ Gauss-Seidel迭代法收敛

证明:①*Jacobi*迭代法

$B_J = I - D^{-1}A$,且B_J的元素为

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$$

A严格对角占优,即 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

由 $\rho(B_J) < \|B_J\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$

所以*Jacobi*迭代法收敛.

② $Gauss-Seidel$迭代法

$Gauss-Seidel$迭代法的迭代矩阵为$B_G=(D-L)^{-1}U$.

反证,设B_G有特征值$|\lambda|\geq 1$,

由$B_Gx=\lambda x$,方程组$(\lambda I-B_G)x=0$有非零解,于是有

$$\det(\lambda I-B_G)=\det[\lambda I-(D-L)^{-1}U]=0$$

上式可改写为$\det(D-L)^{-1}\cdot\det((D-L)-\frac{1}{\lambda}U)=0$

已知A严格对角占优,A的对角元非零,

故$\det(D-L)^{-1}\neq 0$, 只有$\det((D-L)-\frac{1}{\lambda}U)=0$

由A严格对角占优可推出$((D-L)-\frac{1}{\lambda}U)$也严格对角占优,

是非奇异阵,应有 $\det((D-L)-\frac{1}{\lambda}U)\neq 0$，与所设矛盾,

故 B_G 的特征值 $|\lambda|<1$,即 $\rho(B_G)<1$, $G-S$ 收敛.

由 A 严格对角占优可推出 $((D-L)-\frac{1}{\lambda}U)$ 也严格对角占优

例： $A=D-L-U=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\1 & 5 & 2\\1 & 1 & 5\end{bmatrix}$ 严格对角占优

当 $|\lambda|\geq 1$ 时, $(D-L)-\frac{1}{\lambda}U=\begin{bmatrix}5 & \frac{2}{\lambda} & \frac{2}{\lambda}\\1 & 5 & \frac{2}{\lambda}\\1 & 1 & 5\end{bmatrix}$ 也严格对角占优

注：对一个任意给定的系数矩阵

1.$Jacobi$迭代法和$Gauss-Seidel$迭代法可能同时收敛，或同时不收敛，或者一个收敛而另一个不收敛。

2.在都收敛的情况下，其收敛的速度也不一定是哪一种一定快。

3.A对称正定,$Gauss-Seidel$一定收敛,但$2D-A$不一定也是对称正定,所以$Jacobi$法未必收敛。例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\text{正定},2D-A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 6 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\text{不正定}$$

$|A|=12+4-15=1$, $|2D-A|=12-4-15=-7$

例:讨论用Gauss-Seidel迭代法求解方程组Ax=b时的收敛性，已知

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\0&4&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

解:

(1)对A：不是严格对角占优的矩阵，无法用充分准则I

(2)考虑充分准则II，计算Jacobi迭代矩阵$B_J=D^{-1}(L+U)=I-D^{-1}A$

$$D=\begin{bmatrix}3&&\\&4&\\&&2\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{可求出}B_J=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \|B_J\|_\infty=1$$

不满足充分准则II，故无法判断。

(3)考虑用定理2的充分条件

先求出Gauss-Seidel迭代矩阵 $B_G=(D-L)^{-1}U$

$$B_G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\|B_G\|_\infty=1$$
$$\|B_G\|_1=\frac{5}{4}$$

不满足定理2的充分条件，故无法判断。

(4)再用定理1的充要条件

$$B_G=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-B_G)=\lambda\cdot(\lambda(\lambda-\frac{1}{3})+\frac{1}{24})=0$$

得到$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\frac{1}{12}(2\pm i\sqrt{2})$

易知$\rho(B_G)=|\lambda_{max}|<1$，故收敛

例:讨论用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法求解方程组$Ax=b$时的收敛性，如果收敛，并比较哪种方法收敛较快，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解:(1)对Jacobi方法，迭代矩阵

$$B_J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(\mathrm{B}_J)=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}<1,$ 故方法收敛。

(2)对Gauss-Seidel方法，迭代矩阵

$$B_G=\left[\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&&\\0&0&\\1&-1/2&0\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}0&0&2/3\\&0&-1/2\\&&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&2/3\\0&0&-1/2\\0&0&11/12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rho(\mathrm{B}_G)=\frac{11}{12}<1,\qquad \text{故方法收敛。}}$$

(3) $\rho(\mathrm{B}_G)=\dfrac{11}{12}<\rho(\mathrm{B}_J)=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

Gauss-Seidel方法比Jacobi方法收敛快。

本章总结

重点：

- 高斯消去法
- 矩阵三角分解法

直接解法

- 雅可比迭代
- 高斯-赛德尔迭代

迭代解法

线性方程组

$AX=B$ 的数值解法

作业：

P96: 3.3.1的1,2,3

P106：3.4.5的1,2,3,4

P129：3.6.5的2

Thank you!