Bartosz Hanc

Projekt z przedmiotu *Równania różniczkowe i różnicowe*

Sformułowanie słabe problemu i jego dyskretyzacja

Przydzielone równanie różniczkowe to problem odkształcenia sprężystego postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0\,, \tag{1}$$

dla funkcji $E(x)$ zdefiniowanej jako

$$E(x) := \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0;1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1;2] \end{cases}\,, \tag{2}$$

gdzie poszukiwana funkcja $u : [0;2] \mapsto \mathbb{R}$ spełnia warunki brzegowe

$$u(2) = 0\,, \quad u'(0) + u(0) = 10\,. \tag{3}$$

Niech $V := \{v(x) : [0;2] \mapsto \mathbb{R} \,|\, v(2) = 0\}$. Mnożąc równanie (1) przez pewną funkcję $v \in V$ i całkując przez części mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{[0;2]} v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Eu'\right)\mathrm{d}x = vEu'\Big|_0^2 - \int\limits_{[0;2]} Ev'u'\,\mathrm{d}x \\ &= -E(0)v(0)(10 - u(0)) - \int\limits_{[0;2]} Ev'u'\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Sformułowanie słabe ma więc postać

$$\begin{aligned} &u(2) = 0 \\ &\forall_{v\in V} : -E(0)v(0)u(0) + \int\limits_{[0;2]} Ev'u'\,\mathrm{d}x = -10E(0)v(0) \end{aligned} \tag{5}$$

Zdefiniujmy i–tą funkcję bazową $v_i(x) : [0;2] \mapsto \mathbb{R}$ jako

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}\,, \tag{6}$$

gdzie $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, a $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ są punktami podziału odcinka $[0;2]$ ($x_0 = 0$, $x_n = 2$). W rozwiązaniu numerycznym przyjmiemy, iż podział ten jest jednorodny tj.

$$\forall_{i\in\{0,...,n-1\}} : x_{i+1} - x_i = \delta x = \frac{2}{n}\,, \tag{7}$$

wówczas $x_{-1} = -\delta x$ i $x_{n+1} = 2 + \delta x$. Niech $V_n = \mathrm{Lin}\{v_0, v_1, ..., v_n\} \subset V$. Przybliżając

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i v_i(x)\,, \quad u'(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i v_i'(x)\,, \tag{8}$$

otrzymujemy z (5) układ równań liniowych postaci

$$\forall_{i\in\{0,1,...,n-1\}} : \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{ij} = l_i\,, \tag{9}$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \phi(v_i, v_j) - E(0)v_i(0)v_j(0)\,, \\ l_i &= -10E(0)v_i(0) \end{aligned} \tag{10}$$

oraz zdefiniowaliśmy odwzorowanie $\phi : V_n \times V_n \mapsto \mathbb{R}$ jako

$$\phi(v_i, v_j) = \int\limits_{[0;2]} E(x)v_i'v_j'\,\mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

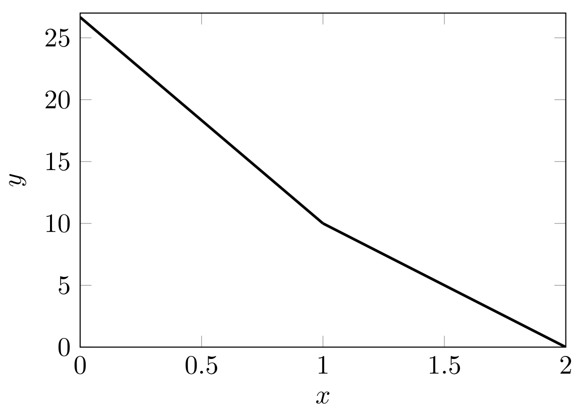
Wyprowadzony powyżej układ równań został rozwiązany numerycznie przy użyciu języka programowania Julia.

Rozwiązanie analityczne

Łatwo sprawdzić, iż rozwiązaniem równania (1) z zadanymi warunkami brzegowymi jest funkcja

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{50}{3}x + \frac{80}{3} & \text{dla } x \in [0;1] \\ -10x + 20 & \text{dla } x \in (1;2] \end{cases}\,. \tag{12}$$

Na Rysunku 1 zamieszczono wykres powyższego rozwiązania w celu porównania go z rozwiązaniem uzyskanym numerycznie.



Rysunek 1: Wykres rozwiązania równania $(E(x)u')' = 0$ dla warunków brzegowych $u(2) = 0$, $u'(0) + u(0) = 10$