

Projekt z przedmiotu *Równania różniczkowe i różnicowe*

Sformułowanie słabe problemu i jego dyskretyzacja

Przydzielone równanie różniczkowe to problem odkształcenia sprężystego postaci

$$\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du}{dx} \right) = 0, \quad (1)$$

dla funkcji $E(x)$ zdefiniowanej jako

$$E(x) := \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0; 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1; 2] \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie poszukiwana funkcja $u : [0; 2] \mapsto \mathbb{R}$ spełnia warunki brzegowe

$$u(2) = 0, \quad u'(0) + u(0) = 10. \quad (3)$$

Niech $V := \{v(x) : [0; 2] \mapsto \mathbb{R} \mid v(2) = 0\}$. Mnożąc równanie (1) przez pewną funkcję $v \in V$ i całkując przez części mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0;2]} v(x) \frac{d}{dx} (Eu') dx = vEu' \Big|_0^2 - \int_{[0;2]} Ev'u' dx \\ &= -E(0)v(0)(10 - u(0)) - \int_{[0;2]} Ev'u' dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Sformułowanie słabe ma więc postać

$$u(2) = 0$$

$$\forall v \in V : -E(0)v(0)u(0) + \int_{[0;2]} Ev'u' dx = -10E(0)v(0) \quad (5)$$

Zdefiniujmy i -tą funkcję bazową $v_i(x) : [0; 2] \mapsto \mathbb{R}$ jako

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}, \quad (6)$$

gdzie $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, a $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ są punktami podziału odcinka $[0; 2]$ ($x_0 = 0$, $x_n = 2$). W rozwiązaniu numerycznym przyjmujemy, iż podział ten jest jednorodny tj.

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\} : x_{i+1} - x_i = \delta x = \frac{2}{n}, \quad (7)$$

wówczas $x_{-1} = -\delta x$ i $x_{n+1} = 2 + \delta x$. Niech $V_n = \text{Lin}\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Przybliżając

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i v_i(x), \quad u'(x) \approx \sum_{i=0}^n a_i v'_i(x), \quad (8)$$

otrzymujemy z (5) układ równań liniowych postaci

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{ij} = l_i, \quad (9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \phi(v'_i, v'_j) - E(0)v_i(0)v_j(0), \\ l_i &= -10E(0)v_i(0) \end{aligned} \quad (10)$$

oraz zdefiniowaliśmy odwzorowanie ϕ jako

$$\phi(v_i, v_j) = \int_{[0;2]} E(x) v_i v_j dx. \quad (11)$$

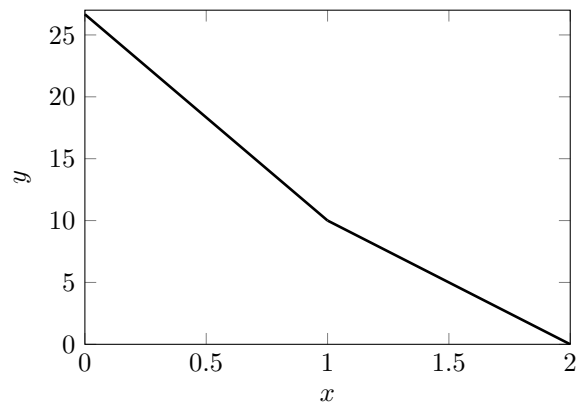
Wyprowadzony powyżej układ równań został rozwiązany numerycznie przy użyciu języka programowania Julia.

Rozwiązanie analityczne

Łatwo sprawdzić, iż rozwiązaniem równania (1) z zadanymi warunkami brzegowymi jest funkcja

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{50}{3}x + \frac{80}{3} & \text{dla } x \in [0; 1] \\ -10x + 20 & \text{dla } x \in (1; 2] \end{cases}. \quad (12)$$

Na Rysunku 1 zamieszczono wykres powyższego rozwiązania w celu porównania go z rozwiązaniem uzyskanym numerycznie.



Rysunek 1: Wykres rozwiązania równania $(E(x)u')' = 0$ dla warunków brzegowych $u(2) = 0$, $u'(0) + u(0) = 10$