

1 Probabilistyka

1.1 Zmienne losowe

Zmienna losowa to formalnie odwzorowanie ze zbioru zdarzeń elementarnych Ω tj. zbioru atomowych wyników doświadczenia losowego w zbiór $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathcal{X}$. Jest to zatem funkcja, która przyporządkowuje zdarzeniom losowym wartość liczbową. Każda zmienna losowa opisuje więc zmienną w klasycznym sensie, której wartości pochodzi z pewnego rozkładu. Rozkład ten jest zadany jednoznacznie przez funkcję $F : \mathbb{R}^n \mapsto [0; 1]$ taką, że

$$F(\mathbf{x}) := \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n),$$

którą nazywa się dystrybucją (ang. **cumulative distribution function**). Każdy rozkład zmiennej losowej można jednoznacznie opisać za pomocą dystrybucji. W przypadku zmiennych losowych dyskretnych tj. takich których zbiór wartości jest zbiorem przeliczalnym, możemy wprowadzić funkcję masy prawdopodobieństwa (ang. **probability mass function**) $p : \mathcal{X} \mapsto [0; 1]$, która spełnia warunek unormowania

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} p(\mathbf{x}) = 1.$$

W przypadku zmiennych losowych ciągłych istnieje z kolei funkcja gęstości prawdopodobieństwa (ang. **probability density function**) $p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ taka, że

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(\mathbf{x}') d^n \mathbf{x}'.$$

Wartością oczekiwaną dowolnej funkcji $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ zmiennej losowej $\mathbf{x} \sim p$ nazywamy wielkość $\mathbb{E}[\mathbf{f}] \in \mathbb{R}^m$ zdefiniowaną jako

$$\mathbb{E}[\mathbf{f}] := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}.$$

Macierzą kowariancji funkcji zmiennej losowej definiujemy jako wartość oczekiwaną macierzy

$$\mathbb{E}[(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)(\mathbf{f} - \mathbf{m}_f)^T]$$

gdzie $\mathbf{m}_f = \mathbb{E}[\mathbf{f}]$. Elementy diagonalne macierzy kowariancji nazywamy **wariancjami**, a elementy pozadiagonalne – **kowariancjami**.

1.2 Transformacja zmiennych losowych

Jeśli mamy dwie zmienne losowe $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{y} \sim p_y$ oraz $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \sim p_x$ takie, że istnieje różniczkowalne i

odwracalne odwzorowanie $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ spełniające $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ i $\Psi = \Phi^{-1}$ to zachodzi

$$p_y(\mathbf{y}) = J(\mathbf{y}) p_x(\Psi(\mathbf{y})),$$

gdzie $J := \det \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}} \right]$ jest wyznacznikiem jacobianu odwzorowania Ψ .

1.3 Rozkłady łączne i warunkowe

Rozważmy zmienną losową $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ pochodzącą z rozkładu p_z . Wówczas

$$p_x(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} p_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d^m \mathbf{y}$$

oraz

$$p_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) p_y(\mathbf{y})$$

1.4 Liczby losowe w komputerze

1.5 Monte Carlo

1.6 KDE

2 Problemy regresji

2.1 Regresja liniowa

2.2 Regresja bayesowska

2.3 Regresja kwantylowa

2.4 Regresja GAM

2.5 Regresja procesem gaussowskim

3 Problemy klasyfikacji

3.1 Klasyfikacja niezbalansowana

3.2 Klasyfikator k Nearest Neighbors

3.3 Klasyfikator bayesowski

3.4 Regresja logistyczna

3.5 Regresja softmax

4 Problemy nienadzorowane

4.1 Redukcja wymiarowości

4.2 Klasteryzacja

5 Drzewa decyzyjne

5.1 Boosting

5.2 Bagging

6 Uczenie głębokie

6.1 MLP

6.2 CNN

6.3 Maszyna Boltzmanna

6.4 Autoenkodery

6.5 DDPM

6.6 GAN

6.7 Transformer

A Praktyka