Zadanie 8.

Liczby rzeczywiste x, y, z, a, b, c spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy \end{cases}.$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Rozwiązanie. Zdefiniujmy macierze $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_\mathbf{3}$

$$\boldsymbol{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz wektory $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$. Zadany w treści układ równości możemy wówczas zapisać jako

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_3 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_3 \boldsymbol{x} \end{cases}. \tag{$\star$}$$

Zdefiniujmy macierz $\boldsymbol{R}$ następująco

$$\boldsymbol{R} := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że zachodzi $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_3$, gdzie $\boldsymbol{I}_3$ oznacza macierz jednostkową wymiaru 3×3. W takim razie, korzystając z łączności mnożenia macierzy, układ równań ($\star$) jest równoważny

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{R}^T)(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}) \end{cases}.$$

Definiując macierze $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{Q}_3$

$$\boldsymbol{Q}_1 := \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3\sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_2 := \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{R}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_3 := \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{R}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

oraz wektory $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f & g & h \end{pmatrix}^T := \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}^T := \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$, możemy zapisać powyższy układ równań jako

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{u} \end{cases}.$$

Dodając wszystkie równania stronami i rozpisując pierwsze i drugie równanie otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{cases} f^2 = u^2 \\ f^2 - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}h^2 + \sqrt{3}gh = u^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 + \sqrt{3}vw \\ f^2 + g^2 - h^2 = u^2 + v^2 - w^2 \end{cases},$$

skąd

$$\begin{cases} f^2 = u^2 \\ g^2 - h^2 = v^2 - w^2 \\ gh = vw \end{cases}.$$

Pokażemy, że dwie ostatnie równości implikują $g^2 = v^2$ i $h^2 = w^2$. Istotnie z trzeciej równości wynika $(gh)^2 - (vw)^2 = 0$. Jednocześnie zauważmy, że

$$2(gh)^2 - 2(vw)^2 = (g^2 - v^2)(h^2 + w^2) + (g^2 + v^2)(h^2 - w^2),$$

zatem mamy

$$\begin{cases} g^2 - h^2 = v^2 - w^2 \\ (g^2 - v^2)(h^2 + w^2) + (g^2 + v^2)(h^2 - w^2) = 0 \end{cases},$$

skąd

$$(g^2 - v^2)(h^2 + w^2 + g^2 + v^2) = (h^2 - w^2)(h^2 + w^2 + g^2 + v^2) = 0\,,$$

czyli $g^2 = v^2$ i $h^2 = w^2$ (lub $h = w = g = v = 0$, ale wówczas podane równości także zachodzą). Pokazaliśmy zatem, iż $f^2 = u^2$, $g^2 = v^2$, $h^2 = w^2$, zatem

$$\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{f} = f^2 + g^2 + h^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\,,$$

ale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \end{aligned}\quad ,$$

skąd

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \qquad \blacksquare$$