

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Mechanika klasyczna</b>	<b>11</b>
1.1	Przestrzeń i czas	11
1.1.1	Podstawowe działania na wektorach	11
1.1.2	Zasady dynamiki Newtona	12
1.2	Ruch pocisków	13
1.2.1	Rzut ukośny z pominięciem oporów powietrza	13
1.2.2	Opór powietrza	16
1.2.3	Tarcie	18
1.3	Pęd i moment pędu	19
1.3.1	Zasada zachowania pędu	19
1.3.2	Zderzenia	19
1.3.3	Rakiety	20
1.3.4	Środek masy	21
1.3.5	Moment pędu	22
1.3.6	Zasada zachowania momentu pędu	22
1.4	Energia	23
1.4.1	Twierdzenie P-EK	23
1.4.2	Siły zachowawcze i energia potencjalna	24
1.4.3	Jednowymiarowe układy zachowawcze	25
1.4.4	Potencjał układu wielu cząstek	25
1.4.5	Siły centralne	25
1.5	Teoria grawitacji Newtona	26
1.5.1	Doświadczenia Cavendisha i von Jolly'ego	26
1.5.2	Zasada równoważności	27
1.5.3	Prawa Keplera i reguła Titiusa-Bodego	27
1.5.4	Pole grawitacyjne	28
1.5.5	Energia pola grawitacyjnego	29
1.6	Statyka	29
1.6.1	Równowaga a potencjał	29
1.6.2	Powierzchnie ekwipotencjalne	29
1.7	Równania Lagrange'a	30
1.7.1	Podstawy rachunku wariacyjnego	30
1.7.2	Rachunek wariacyjny w mechanice	30
1.7.3	Mnożniki Lagrange'a i siły reakcji więzów	32
1.8	Zagadnienie ruchu dwóch ciał	33
1.8.1	Całka pól	35
1.8.2	Rozważania energetyczne	35
1.8.3	Zagadnienie Keplera	35
1.8.4	Wektor Rungego-Lenza	37

1.9	Mechanika w nieinercjalnych układach odniesienia . . . . .	38
1.9.1	Przyspieszenie bez obrotu . . . . .	38
1.9.2	Obroty . . . . .	39
1.9.3	II zasada dynamiki w obracającym się układzie odniesienia . . . . .	40
1.10	Bryła sztywna . . . . .	41
1.10.1	Całkowity moment pędu i energia kinetyczna bryły sztywnej . . . . .	41
1.10.2	Tensor bezwładności . . . . .	42
1.10.3	Osie główne bezwładności . . . . .	44
1.10.4	Kąty Eulera . . . . .	46
1.11	Drgania . . . . .	49
1.11.1	Prawo Hooke’a . . . . .	49
1.11.2	Ruch harmoniczny prosty . . . . .	50
1.11.3	Drgania tłumione . . . . .	51
1.11.4	Drgania wymuszone . . . . .	52
1.11.5	Rezonans . . . . .	53
1.11.6	Twierdzenie Fouriera . . . . .	54
1.11.7	Transformacja Laplace’a . . . . .	55
1.11.8	Oscylatory sprzężone . . . . .	58
1.11.9	Krzywe Lissajous . . . . .	62
1.12	Fale w ośrodkach sprężystych . . . . .	63
1.12.1	Jednowymiarowe równanie falowe . . . . .	63
1.12.2	Metoda separacji zmiennych . . . . .	64
1.12.3	Fale tłumione . . . . .	65
1.12.4	Rozwiązanie równania falowego dla struny o skończonej długości zamocowanej z obu stron . . . . .	66
1.12.5	Przenoszenie energii . . . . .	67
1.12.6	Interferencja . . . . .	67
1.12.7	Dudnienia . . . . .	68
1.12.8	Efekt Dopplera . . . . .	68
1.13	Szczególne teorie względności . . . . .	69
1.13.1	Postulaty . . . . .	69
1.13.2	Układ odniesienia . . . . .	70
1.13.3	Czasoprzestrzeń . . . . .	71
1.13.4	Transformacja Galileusza . . . . .	71
1.13.5	Transformacja Lorentza . . . . .	72
1.13.6	Czterowektory i czteroskalary . . . . .	72
1.13.7	Transformacja Lorentza jako obrót . . . . .	73
1.13.8	Interwał czasoprzestrzenny . . . . .	74
1.13.9	Dylatacja czasu i skrócenie Lorentza . . . . .	74
1.13.10	Pozorne obrazy szybko poruszających się obiektów . . . . .	76

1.13.11	Relatywistyczny wzór na dodawanie prędkości . . . . .	77
1.13.12	Relatywistyczny efekt Dopplera . . . . .	79
1.13.13	Czas własny cząstki materialnej . . . . .	80
1.13.14	Obrót Thomasa–Wignera . . . . .	81
1.13.15	Dynamika relatywistyczna . . . . .	84
1.13.16	Zderzenia . . . . .	86
1.13.17	Siła . . . . .	88
1.13.18	Czterotensory . . . . .	91
1.13.19	STW i Elektrodynamika . . . . .	92
<b>2</b>	<b>Termodynamika</b>	<b>95</b>
2.1	Termodynamika fenomenologiczna . . . . .	95
2.1.1	Prawa gazowe . . . . .	95
2.1.2	Wzór barometryczny . . . . .	96
2.1.3	Para nasycona i wilgotność . . . . .	97
2.1.4	Ciepło właściwe i przemiany fazowej . . . . .	97
2.1.5	Zasada bilansu cieplnego . . . . .	97
2.2	Termodynamika statystyczna . . . . .	98
2.2.1	Podstawowy wzór kinetycznej teorii gazów . . . . .	98
2.2.2	Kinetyczna interpretacja temperatury . . . . .	98
2.2.3	Zasada ekwipartycji energii . . . . .	98
2.3	Zasady termodynamiki . . . . .	99
2.4	Izoprocesy gazu doskonałego . . . . .	99
2.4.1	Procesy odwracalne . . . . .	99
2.4.2	Procesy kwazistatyczne . . . . .	99
2.4.3	Izoprocesy . . . . .	100
2.5	Entropia . . . . .	101
2.5.1	Zmiana entropii w przemianie gazu doskonałego . . . . .	101
2.6	Procesy cykliczne . . . . .	102
2.7	Sprężyste i termiczne własności ciał stałych i cieczy . . . . .	104
2.7.1	Współczynniki rozszerzalności . . . . .	104
2.7.2	Prawo Hooke’a . . . . .	106
2.7.3	Heat equation* . . . . .	106
2.7.4	Płyny . . . . .	107
<b>3</b>	<b>Elektrodynamika</b>	<b>108</b>
3.1	Elektrostatyka . . . . .	108
3.1.1	Prawo Coulomba . . . . .	108
3.1.2	Własności przewodników . . . . .	115
3.1.3	Kondensatory . . . . .	115
3.1.4	Energia pola elektrycznego . . . . .	117

3.1.5	Dipol elektryczny . . . . .	117
3.1.6	Pola elektryczne w materii . . . . .	118
3.1.7	Równanie Poissona i Laplace’a . . . . .	121
3.1.8	Warunki brzegowe w elektrostatyce . . . . .	121
3.1.9	Metoda obrazów . . . . .	122
3.1.10	Metoda inwersji . . . . .	131
3.1.11	Inwersja w dwóch wymiarach i funkcja prądu . . . . .	143
3.2	Magnetostatyka . . . . .	146
3.2.1	Siła Lorentza . . . . .	146
3.2.2	Prądy . . . . .	146
3.2.3	Prawo Biota–Savarta . . . . .	147
3.2.4	Prawo Gaussa . . . . .	149
3.2.5	Magnetyczny potencjał wektorowy . . . . .	150
3.2.6	Energia pola magnetycznego . . . . .	151
3.2.7	Pola magnetyczne w materii . . . . .	151
3.2.8	Warunki brzegowe w magnetostatyce . . . . .	152
3.3	Stacjonarne równania Maxwella . . . . .	153
3.3.1	Siły działające na dielektryki i magnetyki . . . . .	155
3.4	Elektrodynamika . . . . .	157
3.4.1	Prawo Ohma . . . . .	157
3.4.2	Prawo Childa–Langmuira . . . . .	158
3.4.3	Siła elektromotoryczna . . . . .	159
3.4.4	Ciepło Joula . . . . .	159
3.4.5	Indukcja elektromagnetyczna . . . . .	159
3.4.6	Indukcyjność . . . . .	161
3.4.7	Prawo Ampere’a–Maxwella . . . . .	164
3.4.8	Równania Maxwella . . . . .	164
3.4.9	Warunki brzegowe w elektrodynamice . . . . .	165
3.4.10	Twierdzenie Poyntinga i zasada zachowania momentu pędu . . . . .	165
3.4.11	Lagranżjan dla cząstki naładowanej w polu elektromagnetycznym . . . . .	166
3.5	Fale elektromagnetyczne . . . . .	169
3.5.1	Fale płaskie . . . . .	169
3.5.2	Fale elektromagnetyczne w materii . . . . .	171
3.5.3	Notacja wskazowa . . . . .	172
3.5.4	Falowody . . . . .	172
3.5.5	Wnęki rezonansowe . . . . .	174

<b>4</b>	<b>Podstawy teorii obwodów</b>	<b>176</b>
4.1	Elementy obwodów . . . . .	176
4.1.1	Prawa Kirchhoffa . . . . .	176
4.2	Liniowe obwody rezystancyjne . . . . .	178
4.2.1	Analiza układu typu mostek . . . . .	178
4.2.2	Mostek jako czwórnik. Reciprocity theorem. . . . .	179
4.3	Obwody prądu zmiennego . . . . .	180
4.3.1	Obwody RC, RL . . . . .	180
4.3.2	Obwód RLC . . . . .	182
4.3.3	Impedancja . . . . .	184
4.3.4	Moc w obwodach zasilanych napięciem sinusoidalnym . . . .	185
4.3.5	Impedancja operatorowa . . . . .	186
4.3.6	Analiza wykorzystująca złożenie krótkich impulsów . . . .	187
<b>5</b>	<b>Optyka</b>	<b>189</b>
5.1	Optyka geometryczna . . . . .	189
5.1.1	Zjawiska odbicia i załamania . . . . .	189
5.1.2	Zwierciadła . . . . .	193
5.1.3	Soczewki . . . . .	194
5.2	Optyka falowa . . . . .	194
5.2.1	Doświadczenie Younga . . . . .	194
5.2.2	Siatka dyfrakcyjna . . . . .	195
5.2.3	Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie . . . . .	196
5.2.4	Interferencja w cienkich warstwach . . . . .	197
5.2.5	Polaryzacja . . . . .	199
5.3	Promieniowanie termiczne . . . . .	199

## Wybrane tożsamości trygonometryczne

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
- $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
- $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$
- $\tan x + \cot y = \frac{\cos(x - y)}{\cos x \sin y}$
- $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$
- $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x + y) \sin(x - y)$
- $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
- Podstawienie uniwersalne  $t = \tan \frac{x}{2}$ 
  - $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
  - $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

---

## Wzór Taylora

- $f(x) \approx f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$
  - $f(x, y) \approx f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2$
-

### Przydatne przybliżenia dla małych $x$

- $\sin x \approx x$
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\tan x \approx \sin x \approx x$
- $\cot x \approx \frac{1}{x}$
- $(1+x)^n \approx 1 + nx$
- $e^x \approx 1 + x$

### Wzór Eulera

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

### Funkcje hiperboliczne

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$
- $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$
- $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$

### Średnia całkowa

- $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

### Pochodne

- $(af)' = af'$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $g[f(x)] = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$

- $(f^{-1})' = (f')^{-1}$
- $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

### Tożsamości wektorowe

- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$
- $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

### Operator nabła

- $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
- $\nabla(kf) = k\nabla f$
- $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
- $\nabla(\frac{f}{g}) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
- $\nabla \cdot (k\mathbf{A}) = k\nabla \cdot \mathbf{A}$
- $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla f$
- $\nabla \cdot (\frac{\mathbf{A}}{f}) = \frac{f(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla f}{f^2}$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\nabla \times (k\mathbf{A}) = k\nabla \times \mathbf{A}$
- $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$
- $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

### Kąt bryłowy

- $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$

---

## Podstawowe twierdzenia analizy wektorowej

1. Podstawowe twierdzenie gradientów

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi(b) - \varphi(a)$$

2. Twierdzenie Stokesa

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_\ell \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

3. Twierdzenie Gaussa–Ostrogradskiego

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

4. Twierdzenie dotyczące pól bezwirowych

- $\nabla \times \mathbf{A} = 0$  w całej przestrzeni
- $\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  nie zależy od drogi pomiędzy punktami  $a$  i  $b$
- $\oint_\ell \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$  dla dowolnego zamkniętego konturu  $\ell$
- $\mathbf{A} = -\nabla \varphi$ , gdzie  $\varphi$  jest pewnym polem skalarnym

5. Twierdzenie dotyczące pól o zerowej dywergencji

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  w całej przestrzeni
- $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  nie zależy od wyboru powierzchni całkowania  $\mathcal{S}$  przy zadanym konturze
- $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  dla dowolnej powierzchni zamkniętej  $\mathcal{S}$
- $\mathbf{B} = \nabla \times \Phi$ , gdzie  $\Phi$  to tzw. potencjał wektorowy



## Różne układy współrzędnych

### 1. Współrzędne kartezjańskie $(x, y, z)$

- Element długości

$$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

- Element objętości

$$dV = dx dy dz$$

- Gradient

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

- Dywergencja

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotacja

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} \\ & + \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

- Laplasjan

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

### 2. Współrzędne cylindryczne $(s, \phi, z)$

- Element długości

$$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$$

- Element objętości

$$dV = s d\phi ds dz$$

- Gradient

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

- Dywergencja

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{s} \frac{\partial(sA_s)}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotacja

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{s}} \\ &+ \left( \frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &+ \frac{1}{s} \left( \frac{\partial(sA_\phi)}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

- Laplasjan

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

### 3. Współrzędne sferyczne $(r, \theta, \phi)$

- Element długości

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

- Element objętości

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

- Gradient

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

- Dywergencja

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

- Rotacja

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}$$

- Laplasjan

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

# 1 Mechanika klasyczna

*I have not been able to discover the cause of those properties of gravity from phenomena, and I frame no hypotheses; for whatever is not deduced from the phenomena is to be called a hypothesis, and hypotheses, whether metaphysical or physical, whether of occult qualities or mechanical, have no place in experimental philosophy.*

Sir Isaac Newton

Jednostka	Symbol	Wielkość fizyczna
metr	m	długość
sekunda	s	czas
kilogram	kg	masa
mol	mol	liczność materii
amper	A	natężenie prądu elektrycznego
kelwin	K	temperatura termodynamiczna
kandela	cd	światłość

Tabela 1: Jednostki podstawowe układu SI

## 1.1 Przestrzeń i czas

Podstawową rolę w opisywaniu jakichkolwiek zjawisk fizycznych pełnią dwa parametry: wektor wodzący  $\mathbf{r}$  wyznaczający położenie danego punktu w przestrzeni oraz czas  $t$ . W mechanice klasycznej (za Newtonem) przyjmujemy, że czas jest globalnym, uniwersalnym parametrem, który zmienia się jednakowo dla wszystkich obserwatorów.

### 1.1.1 Podstawowe działania na wektorach

Niech dane będą dwa wektory  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$  i  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ .

- dodawanie wektorów

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = [a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3]$$

- mnożenie wektora przez skalar

$$k\mathbf{a} = [ka_1, ka_2, ka_3]$$

- iloczyn wektorowy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$$

- iloczyn skalarny

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

- różniczkowanie wektorów

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \dot{a}_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha + a_\alpha \frac{d\hat{\mathbf{e}}_\alpha}{dt} \right)$$

We współrzędnych kartezjańskich  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{a}_x \hat{\mathbf{x}} + \dot{a}_y \hat{\mathbf{y}} + \dot{a}_z \hat{\mathbf{z}}$$

### 1.1.2 Zasady dynamiki Newtona

- I. Istnieją takie układy odniesienia (nazywane układami inercjalnymi), w których gdy siła wypadkowa działająca na ciało wynosi zero to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
- II. W inercjalnych układach odniesienia siła wypadkowa działająca na ciało jest równa pierwszej pochodnej pędu tego ciała po czasie.

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}.$$

- III. Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą o wartości  $F$  to również ciało B działa na ciało A siłą o takiej samej wartości, tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie.

## 1.2 Ruch pocisków

Następne rozważania będą dotyczyć punktów materialnych. *Punktem materialnym nazywamy ciało obdarzone masą, którego objętość możemy pominąć.* Jeżeli masa ciała  $m$  jest stała oraz siła wypadkowa działająca na nie nie jest funkcją czasu  $\mathbf{F} = 0$ , wówczas korzystając z II zasady dynamiki łatwo możemy znaleźć równanie ruchu tego ciała, tj. funkcję  $\mathbf{r}(t)$ . W układzie współrzędnych kartezjańskich mamy

$$\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z] = m[\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}],$$

skąd przez całkowanie otrzymujemy

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{F_x}{2m}t^2 + v_x(0)t + x(0) \\y(t) &= \frac{F_y}{2m}t^2 + v_y(0)t + y(0) \\z(t) &= \frac{F_z}{2m}t^2 + v_z(0)t + z(0).\end{aligned}$$

### 1.2.1 Rzut ukośny z pominięciem oporów powietrza

Zajmiemy się teraz problemem rzutu ukośnego w jednorodnym polu grawitacyjnym, w którym na ciało działa jedynie siła ciężkości  $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{y}}$ . Problem ten jest w istocie problemem dwuwymiarowym, więc przyjmując kartezjański układ współrzędnych z osią  $y$  zwróconą w górę i korzystając z poprzednich wyników mamy

$$\begin{aligned}x(t) &= v_x(0)t + x(0) \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_y(0)t + y(0).\end{aligned}$$

Przyjmijmy następujące, ogólne warunki początkowe: ciało znajduje się początkowo w punkcie  $x = 0$ ,  $y = h_0$ , prędkość początkowa ciała ma wartość  $v_0$ , wektor prędkości początkowej jest nachylony pod kątem  $\theta$  do poziomu. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \theta t \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + h_0.\end{aligned}$$

Wyznaczając z pierwszego równania  $t$  i podstawiając do drugiego równania otrzymujemy równanie trajektorii pocisku  $y(x)$

$$y(x) = h_0 + x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2.$$

Zasięg rzutu  $Z$  możemy znaleźć rozwiązując równanie kwadratowe  $y(Z) = 0$

$$Z = v_0 \cos \theta \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh_0}}{g},$$

dla  $h_0 = 0$  otrzymujemy znaną postać  $Z = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$ . Kąt  $\theta_{\max}$ , dla którego zasięg jest maksymalny obliczamy rozwiązując równanie  $\frac{dZ(\theta)}{d\theta}|_{\theta_{\max}} = 0$ , skąd otrzymujemy

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{2gh_0 + v_0^2}}{\sqrt{2gh_0 + 2v_0^2}},$$

dla  $h_0 = 0$  otrzymujemy oczywiście  $\theta_{\max} = 45^\circ$ .

### Trafienie w linię zbocza

Rozpatrzmy następujący problem: armata ustawiona na wysokości  $h_0 = 0$  wystrzeliwuje pociski z prędkością początkową  $v_0$  pod dowolnym kątem z zakresu  $(0^\circ, 90^\circ)$ . Znaleźć współrzędne punktu trafienia  $(x_1, y_1)$  w linię zbocza daną równaniem  $Y(x) = (x - x_0) \tan \beta$ . Równanie toru pocisku ma postać

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2.$$

Współrzędne punktu trafienia muszą spełniać oba równania, tj.  $y(x_1) = Y(x_1) = y_1$ . Mamy zatem

$$\frac{gx_1^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} + x_1(\tan \beta - \tan \theta) - x_0 \tan \beta = 0$$

oraz

$$y_1 = (x_1 - x_0) \tan \beta.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymujemy

$$x_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g} \left( \tan \theta - \tan \beta + \sqrt{(\tan \beta - \tan \theta)^2 + \frac{2gx_0 \tan \beta}{v_0^2 \cos^2 \theta}} \right).$$

### Obwiednia trajektorii pocisków

Rozpatrzmy następujący problem: fontanna jest zbudowana z punktowego źródła znajdującego się w początku układu współrzędnych, wystrzeliwującego wodę z jednakową prędkością  $v_0$  we wszystkich kierunkach  $(0^\circ; 180^\circ)$ . Należy znaleźć kształt

fontanny. Równanie trajektorii fragmentu wody wystrzelonego pod kątem  $\theta$  ma postać

$$y(x) = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2.$$

Rozpatrzmy punkt o współrzędnych  $(x_\alpha, y_\alpha)$ . Aby sprawdzić, czy możliwe jest aby fragment wody trafił w ten punkt należy rozwiązać równanie

$$y_\alpha = x_\alpha \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_\alpha^2.$$

względem  $\theta$ . Korzystając z tożsamości  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$  i podstawiając  $u = \tan \theta$  możemy przepisać to równanie do postaci

$$\frac{gx_\alpha^2}{2v_0^2} u^2 - x_\alpha u + \left( y_\alpha + \frac{g}{2v_0^2} \right) = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej  $u$ . Równanie to posiada rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy gdy  $\Delta \geq 0$ , zatem

$$\begin{aligned} \Delta &= x_\alpha^2 - \frac{4gx_\alpha^2}{2v_0^2} \left( y_\alpha + \frac{g}{2v_0^2} \right) \geq 0 \\ y_\alpha &\leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_\alpha^2}{2v_0^2}. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wyznacza obszar, w którym znajdują się punkty o współrzędnych  $x_\alpha, y_\alpha$ , do których trafiają fragmenty wody. Konturem tego obszaru jest parabola

$$y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Jest to zarówno szukany kształt fontanny oraz obwiednia trajektorii pocisków wystrzelonych z jednakowymi szybkościami.

Obwiednię trajektorii pocisków możemy również znaleźć tak jak w kursach analizy matematycznej. Istotnie jeśli zapiszemy trajektorię pocisku jako

$$F(u, x, y) = f_u(x, y) = 0,$$

gdzie  $u$  jest pewnym parametrem (np. kątem wystrzału) to obwiednią wszystkich trajektorii będzie zbiór punktów  $E$

$$E = \left\{ (x, y) : f_u(x, y) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \right\}.$$

Dla naszego problemu mamy

$$F(\theta, x, y) = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} - y = 0,$$

skąd otrzymujemy warunek

$$\partial_\theta F = \sec^2 \theta \left( x - \frac{gx^2}{v_0^2} \tan \theta \right) = 0.$$

Z powyższego zatem  $\tan \theta = v_0^2/gx$  i  $\sec^2 \theta = 1 + v_0^4/g^2x^2$ , skąd

$$E = \left\{ (x, y) : y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0} \right\}.$$

**Zadanie.** W wierzchołkach  $n$ -kąta foremnego znajdują się pociski balistyczne. Pocisku w wierzchołku  $k$  jest ciągle naprowadzany na pocisk w wierzchołku  $k+1$  tak, że pociski gonią się nawzajem. Bok wielokąta ma długość  $l$ , natomiast szybkość każdego pocisku wynosi  $v$ . Wyznacz drogę  $s$  jaką przebędzie każdy z pocisków do chwili spotkania.

*Rozwiązanie.*

Niech  $t$  oznacza czas po jakim pociski się spotkają. Droga jaką każdy pocisk przebędzie do spotkania wynosi po prostu  $s = vt$ . Prędkość względna wzdłuż boku łączącego dwa kolejne pociski wynosi  $v_{\text{wzg}} = v - v \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right)$ , gdzie  $\theta = \pi \frac{n-2}{2}$  jest kątem wewnętrznym  $n$ -kąta foremnego. Czas  $t$  wynosi zatem  $t = \frac{l}{v_{\text{wzg}}}$ , a zatem

$$s = vt = \frac{vl}{v_{\text{wzg}}} = \frac{l}{1 + \cos \left( \pi \frac{n-2}{n} \right)}.$$

### 1.2.2 Opór powietrza

Siłę oporu powietrza możemy w ogólny sposób zapisać jako  $\mathbf{F}_{\text{op}} = -f(v)\hat{\mathbf{v}}$ , gdzie  $v$  jest szybkością ciała. Dla niewielkich szybkości możemy skorzystać ze wzoru Taylora i przybliżyć funkcję  $f$ :  $f(v) = bv + cv^2$  (czynimy tu założenie, że dla zerowej szybkości siła oporu również jest zerowa). Człon liniowy  $bv$  opisuje opór lepki, na ogół proporcjonalny do lepkości ośrodka i rozmiarów pocisku.

#### Liniowy opór powietrza

Zajmiemy się analizą ruchu pocisku poddanego działaniu siły ciężkości  $-mg\hat{\mathbf{y}}$  i liniowej siły oporu  $-b\mathbf{v}$ . Korzystając z drugiej zasady dynamiki mamy

$$m[\ddot{x}, \ddot{y}] = -mg[0, 1] - b[\dot{x}, \dot{y}].$$



Otrzymujemy więc dwa niezależne równania różniczkowe:

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{b}{m}\dot{y},$$

które możemy łatwo rozwiązać przez separację zmiennych i całkowanie

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{b}{m} \int dt$$

$$\int \frac{d\dot{y}}{g + \frac{b}{m}\dot{y}} = - \int dt$$

$$\ln \dot{x} + C_1 = -\frac{b}{m}t$$

$$\frac{m}{b} \ln \left| g + \frac{b}{m}\dot{y} \right| + C_2 = -t,$$

gdzie  $C_1, C_2$  to stałe całkowania równe odpowiednio  $C_1 = -\ln \dot{x}(0)$  oraz  $C_2 = -\frac{m}{b} \ln |g + \frac{b}{m}\dot{y}(0)|$ .

$$\ln \left( \frac{\dot{x}}{\dot{x}(0)} \right) = -\frac{b}{m}t$$

$$\ln \left( \frac{g + \frac{b}{m}\dot{y}}{g + \frac{b}{m}\dot{y}(0)} \right) = -\frac{b}{m}t,$$

skąd ostatecznie

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0)e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{mg}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) + \dot{y}(0)e^{-\frac{b}{m}t}.$$

### Rzut ukośny z liniowym oporem powietrza

Całkując wyprowadzone powyżej wzory na  $\dot{x}(t)$  i  $\dot{y}(t)$  oraz zakładając następujące warunki początkowe:  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ ,  $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$ , otrzymujemy

$$x(t) = v_0 \tau \cos \theta (1 - e^{-t/\tau})$$

$$y(t) = -g\tau t + (g\tau^2 + v_0 \tau \sin \theta) (1 - e^{-t/\tau}),$$

gdzie wprowadzono parametr  $\tau = \frac{m}{b}$  o wymiarze czasu. Wyznaczając z pierwszego równania  $t$  i podstawiając do drugiego równania otrzymujemy równanie trajektorii pocisku

$$y(x) = \frac{v_0 \sin \theta + g\tau}{v_0 \cos \theta} x + g\tau^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \theta} \right).$$

Aby wyliczyć zasięg należałoby rozwiązać równanie  $y(Z) = 0$ , jest to jednak równanie przestępne, którego rozwiązanie analityczne nie istnieje.

### 1.2.3 Tarcie

Siła tarcia jest kolejnym przykładem (obok siły oporu powietrza) tzw. siły dysypatywnej, tj. siły o niezerowej rotacji. Wyróżniamy dwa rodzaje tarcia: tarcie statyczne i dynamiczne. Własności  $T_{\text{stat}}$ :

1. Wartość  $T_{\text{stat}}$  jest niezależna od wielkości pola powierzchni styku ciał.
2. Wartość  $T_{\text{stat}}$  jest wprost proporcjonalna do siły nacisku z jaką jedno ciało działa na drugie.

Maksymalna wartość siły tarcia statycznego wynosi  $\mu_s N$ , gdzie  $\mu_s$  jest współczynnikiem tarcia statycznego. W ogólności zachodzi zatem  $T_{\text{stat}} \leq \mu_s N$ . Własności  $T_{\text{dyn}}$ :

1. Wartość  $T_{\text{dyn}}$  jest niezależna od wielkości pola powierzchni styku ciał.
2. Wartość  $T_{\text{dyn}}$  jest wprost proporcjonalna do siły nacisku z jaką jedno ciało działa.
3. Wartość  $T_{\text{dyn}}$  jest niezależna od szybkości z jaką porusza się ciało.

Wartość siły tarcia dynamicznego wynosi  $T_{\text{dyn}} = \mu_k N$ , gdzie  $\mu_k$  jest współczynnikiem tarcia dynamicznego. Dla typowych powierzchni zachodzi  $\mu_k < \mu_s$ . Siłę tarcia dynamicznego można zapisać jako  $\mathbf{T} = -\mu |\mathbf{N}| \hat{\mathbf{v}}$ , gdzie  $\mathbf{v}$  jest prędkością ciała.

### Warunek braku poślizgu

Niech  $A$  oznacza punkt styku dwóch ciał 1 i 2. Ciało 1 nie ślizga się po ciele 2 wtedy i tylko wtedy, gdy prędkość liniowa punktu  $A$  obu ciał jest równa tj.  $\mathbf{v}_1(A) = \mathbf{v}_2(A)$ . Oczywiście prędkość punktu  $A$  możemy rozłożyć w następujący sposób

$$\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}_{\text{SM}} + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{SA},$$

gdzie  $S$  oznacza środek masy ciała, a  $\mathbf{v}_{\text{SM}}$  jest prędkością środka masy.

## 1.3 Pęd i moment pędu

Mechaniczny pęd zdefiniowany jest jako  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

### 1.3.1 Zasada zachowania pędu.

Rozważmy układ  $N$  punktów materialnych oddziałujących na siebie siłami spełniającymi III zasadę dynamiki. Niech  $\mathbf{P}$  oznacza całkowity pęd układu. Różniczkując otrzymujemy

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha}.$$

Wypadkową siłę  $\mathbf{F}_{\alpha}$  działającą na cząstkę o indeksie  $\alpha$  możemy rozłożyć na dwie składowe:

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\text{zew}\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\beta\alpha},$$

gdzie  $\mathbf{F}_{\text{zew}\alpha}$  jest zewnętrzną siłą działającą na cząstkę o indeksie  $\alpha$ , a  $\mathbf{F}_{\beta\alpha}$  jest siłą z jaką cząstka o indeksie  $\beta \neq \alpha$  działa na cząstkę o indeksie  $\alpha$ . Ponieważ jednak zakładamy, że siły z jakimi cząstki oddziałują między sobą spełniają III zasadę dynamiki zatem zachodzi  $\mathbf{F}_{\beta\alpha} = -\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ , a więc

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\text{zew}\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}_{\beta\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\text{zew}\alpha} + 0 = \mathbf{F}_{\text{zew}}.$$

Widzimy zatem, że siła zewnętrzna działająca na układ cząstek jest równa pochodnej całkowitego pędu tego układu. W szczególności, gdy  $\mathbf{F}_{\text{zew}} = 0$  to  $\mathbf{P} = \text{const}$ . Otrzymujemy zatem zasadę zachowania pędu (ZZP).

#### Zasada zachowania pędu

Jeżeli na układ cząstek nie działa siła zewnętrzna, wówczas całkowity pęd mechaniczny układu jest stały.

### 1.3.2 Zderzenia

Oczywistym zjawiskiem ilustrującym ZZP są zderzenia. Wyróżniamy dwa rodzaje zderzeń:

1. zderzenia elastyczne – energia kinetyczna jest zachowana
2. zderzenia nieelastyczne – energia kinetyczna nie jest zachowana.

## Jednowymiarowe zderzenie 2 ciał

Rozpatrzmy teraz szczególny problem jednowymiarowego, elastycznego zderzenia 2 punktów materialnych o masach  $m_1$  i  $m_2$  niech  $\mathbf{v}_1 = [v_1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [v_2, 0, 0]$  oznaczają początkowe prędkości cząstek, a  $\mathbf{u}_1 = [u_1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{u}_2 = [u_2, 0, 0]$  końcowe prędkości cząstek. Z ZZP i założenia, że zderzenie jest elastyczne mamy

$$\begin{aligned}m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2.\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem  $u_1$  i  $u_2$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\u_2 &= \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}\end{aligned}$$

## Elastyczne zderzenie niecentralne

Jako kolejny szczególny problem rozpatrzmy elastyczne zderzenie niecentralne cząstek o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Niech  $\mathbf{v}_1 = [v_1, 0, 0]$ ,  $\mathbf{v}_2 = [0, 0, 0]$  oznaczają prędkości początkowe cząstek. Niech  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  oznaczają prędkości końcowe cząstek,  $\psi$  niech oznacza kąt między wektorami  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$ . Z ZZP i założenia, że zderzenie jest elastyczne mamy

$$\begin{aligned}m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 \\m_1 v_1^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2\end{aligned}$$

Podnosząc pierwsze równanie do kwadratu mamy

$$\begin{aligned}m_1^2 v_1^2 &= m_1^2 u_1^2 + 2m_1 m_2 u_1 u_2 \cos \psi + m_2^2 u_2^2 \\m_1 v_1^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2.\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem  $u_1$  i  $u_2$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1}{\sqrt{4m_1 m_2 \cos^2 \psi + (m_1 - m_2)^2}} \\u_2 &= \frac{2m_1 v_1 \cos \psi}{\sqrt{4m_1 m_2 \cos^2 \psi + (m_1 - m_2)^2}}.\end{aligned}$$

### 1.3.3 Rakiety

Podstawowym narzędziem do ilościowej analizy ruchu rakiety jest ogólne równanie ruchu dla układu o zmiennej masie, zwane równaniem Mieszczerzkiego. Niech  $M(t)$

oznacza funkcję masy rakiety od czasu. Niech  $\mathbf{v}$  oznacza prędkość rakiety, a  $\mathbf{u}$  oznacza prędkość wylatujących fragmentów. Niech  $\mathbf{P}$  oznacza pęd rakiety. Zachodzi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t + dt) &= [M(t) + dM][\mathbf{v}(t) + d\mathbf{v}] - \mathbf{u} dM \\ &= \mathbf{P}(t) + [\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}] dM + M(t) d\mathbf{v}\end{aligned}$$

zatem

$$d\mathbf{P} = \mathbf{P}(t + dt) - \mathbf{P}(t) = M(t) d\mathbf{v} + (\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}) dM = \mathbf{F}_{\text{zew}} dt,$$

gdzie  $\mathbf{F}_{\text{zew}}$  oznacza zewnętrzną siłę działającą na rakietę. Otrzymujemy zatem **równanie Mieszczerskiego**

$$\mathbf{F}_{\text{zew}} = M(t)\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\dot{M}.$$

Zauważmy, że wyrażenie  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  jest prędkością z jaką wylatuje paliwo w układzie odniesienia związanym z rakietą. Wprowadzając wektor  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  możemy zapisać równanie Mieszczerskiego w bardziej zwartej postaci

$$\mathbf{F}_{\text{zew}} = M(t)\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\kappa}\dot{M}.$$

### Wzór Ciołkowskiego-Moore'a

W warunkach próżni i braku grawitacji możemy przyjąć  $\mathbf{F}_{\text{zew}} = 0$ . Rozpatrując ruch jednowymiarowy możemy zapisać równanie Mieszczerskiego w postaci

$$M(t)\dot{v} = -\kappa\dot{M}.$$

Zakładając, że  $\dot{v} = \dot{u}$ , tj. paliwo jest wyrzucane z szybkością proporcjonalną do szybkości rakiety w danej chwili, mamy  $\kappa = \text{const}$  zatem wykonując elementarne całkowanie otrzymujemy **wzór Ciołkowskiego-Moore'a**

$$v(t) = \kappa \ln \left( \frac{M(0)}{M(t)} \right).$$

### 1.3.4 Środek masy

Środek masy układu  $N$  punktów materialnych definiujemy jako punkt o położeniu  $\mathbf{R}$  danym wzorem

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}}.$$

Dla ciągłych rozkładów masy wzór ten przechodzi we wzór całkowy

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}.$$

### Twierdzenie o ruchu SM

Środek masy układu porusza się w taki sposób, jakby cała masa układu była skupiona tylko w tym punkcie, a wszystkie siły działające na ten układ działały na środek masy.

### Lista położeń SM

1.  *cienki jednorodny pręt*: przyjmując środek u. współrzędnych w środku geometrycznym pręta mamy  $\mathbf{R} = [0, 0, 0]$
2.  *jednorodny stożek o wysokości  $h$* : przyjmując środek u. współrzędnych w środku podstawy stożka i oś  $z$  pokrywającą się z osią symetrii stożka mamy  $\mathbf{R} = [0, 0, h/4]$
3.  *jednorodna półkula o promieniu  $R$* : przyjmując środek u. współrzędnych w środku podstawy półkuli i oś  $z$  prostopadłą do podstawy mamy  $\mathbf{R} = [0, 0, 3R/8]$
4.  *jednorodna półsfera o promieniu  $R$* : przyjmując środek u. współrzędnych w środku podstawy półsfery i oś  $z$  prostopadłą do podstawy mamy  $\mathbf{R} = [0, 0, R/2]$
5.  *jednorodna trójkątna płyta*: SM znajduje się w punkcie przecięcia środkowych

### 1.3.5 Moment pędu

Dla pojedynczej cząstki  $m$  moment pędu  $\ell$  definiujemy jako  $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym cząstki w dowolnie wybranym układzie odniesienia,  $\mathbf{p}$  jest momentem pędu cząstki. Różniczkując powyższy wzór otrzymujemy  $\dot{\ell} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{\Gamma}$ , gdzie  $\mathbf{\Gamma}$  nazywamy momentem siły.

### 1.3.6 Zasada zachowania momentu pędu

Rozważmy układ  $N$  cząstek oddziałujących na siebie siłami centralnym spełniającymi III zasadę dynamiki. Założenie to gwarantuje nam, że  $\mathbf{\Gamma}_{\alpha\beta} = -\mathbf{\Gamma}_{\beta\alpha}$ . Niech  $\mathbf{L}$  oznacza całkowity moment pędu układu. Zachodzi

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\ell}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{\Gamma}_{\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{\text{zew}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{\Gamma}_{\beta\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{\text{zew}}$$

Widzimy, że zewnętrzny moment siły działający na układ jest równy pochodnej całkowitego momentu pędu układu. W szczególności gdy  $\mathbf{\Gamma}_{\text{zew}} = 0$  to  $\mathbf{L} = \text{const.}$  Otrzymujemy zatem zasadę zachowania momentu pędu (ZZMP).

**Zasada zachowania momentu pędu**

Jeżeli na układ cząstek nie działa zewnętrzny moment siły, wówczas całkowity moment pędu układu jest stały.

**1.4 Energia**

Energia jest wielkością określającą zdolność do wykonania pracy.

**1.4.1 Twierdzenie P-EK**

Pracę  $W$  definiujemy jako całkę krzywoliniową

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Istnieje wiele różnych typów energii. Przypuszczalnie najbardziej podstawowym jest energia kinetyczna  $T$ , która dla pojedynczej cząstki o masie  $m$  poruszającej się z szybkością  $v$  jest zdefiniowana jako

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Udowodnimy teraz podstawowe twierdzenie, tzw. twierdzenie P-EK. Korzystając z definicji pracy i II zasady dynamiki mamy

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B m \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{v_A}^{v_B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = T(B) - T(A)$$

lub w postaci różniczkowej

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

**Twierdzenie P-EK**

Zmiana energii kinetycznej między dwoma punktami na trajektorii cząstki jest równa pracy wykonanej przez wypadkową siłę działającą na cząstkę na drodze między tymi punktami

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Jeśli  $\mathbf{F} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}$  to wygodna w obliczeniach jest poniższa równość

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \left( \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \right) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{\alpha} \left( \int_A^B \mathbf{F}_{\alpha} \cdot d\mathbf{r} \right) = \sum_{\alpha} W_{\alpha}.$$

### 1.4.2 Siły zachowawcze i energia potencjalna

Dla pewnej grupy sił możliwe jest zdefiniowanie odpowiadającej im energii potencjalnej. Siły, dla których jest to możliwe nazywamy siłami zachowawczymi. Siła jest zachowawcza wtedy i tylko wtedy gdy spełnia poniższe dwa warunki.

- I. *warunek zachowawczości siły  $\mathbf{F}$ :  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .*
- II. *warunek zachowawczości siły  $\mathbf{F}$ :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , tj. siła  $\mathbf{F}$  zależy jawnie jedynie od położenia ciała*

W przypadku, gdy siła działająca na ciało jest siłą zachowawczą możemy zdefiniować funkcję  $U(\mathbf{r})$  o wymiarze energii (energię potencjalną), która ma tę własność, że inna funkcja o wymiarze energii  $E$  (energia mechaniczna) zdefiniowana jako  $E = T + U$  jest stała, tj.  $\dot{E} = 0$ , inaczej  $E$  jest zachowana w czasie. Energia potencjalna jest zdefiniowana jako

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}',$$

gdzie  $\mathcal{O}$  jest punktem odniesienia. Z I warunku zachowawczości wynika, że siłę zachowawczą można zapisać jako  $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$ . W ogólności siły które spełniają I warunek zachowawczości ale nie spełniają II nazywamy siłami potencjalnymi, gdyż możemy zdefiniować dla nich funkcję  $U(\mathbf{r}, t)$  w ogólności zależną od położenia  $\mathbf{r}$  i czasu taką, że  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Funkcję  $U$  nazywamy potencjałem. Tylko wtedy, gdy potencjał zależy jawnie jedynie od położenia nazywamy go energią potencjalną. Z powyższego wynika, że warunki zachowawczości siły  $\mathbf{F}$  można równoważnie sformułować w postaci: *siła  $\mathbf{F}$  jest zachowawcza wtedy i tylko wtedy, gdy jest potencjalna i jej potencjał zależy jawnie jedynie od położenia.*

### Potencjał zależny jawnie od czasu

Rozpatrzmy siłę potencjalną  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ , której potencjał zależy jawnie od czasu. Wykażemy, że w takim przypadku  $\dot{E} = \partial U / \partial t$ . Istotnie

$$dU(\mathbf{r}, t) = \nabla U(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt = -\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt.$$

Z tw. P-EK mamy natomiast  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dT$  zatem

$$dU(\mathbf{r}, t) = -dT + \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt,$$

skąd otrzymujemy tezę

$$\dot{E} = \frac{d(T + U)}{dt} = \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$



### 1.4.3 Jednowymiarowe układy zachowawcze

W układach jednowymiarowych wyrażenie na energię mechaniczną układu ma postać  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ , przy czym  $x$  nie musi być współrzędną kartezjańską, a współczynnik  $m$  jest równy masie cząstki tylko dla układu kartezjańskiego. Dla takich układów możemy podać pełne rozwiązanie równania ruchu korzystając tylko z prawa zachowania energii. Mamy bowiem

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)}$$

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Otrzymana całka zależy od konkretnej postaci funkcji  $U(x)$ . Co ważne nawet gdy nie potrafimy znaleźć analitycznego rozwiązania takiej całki zawsze możemy obliczyć ją numerycznie.

### 1.4.4 Potencjał układu wielu cząstek

Potencjał układu  $N$  oddziałujących cząstek możemy obliczyć ze wzoru

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta},$$

gdzie  $U_{\alpha\beta}$  jest energią potencjalną oddziaływania cząstek o indeksach  $\alpha$  i  $\beta$ . Jako przykład obliczymy energię potencjalną układu 3 ciał o masach  $m_1, m_2, m_3$  i ładunkach  $q_1, q_2, q_3$  umieszczonych w wierzchołkach trójkąta o bokach  $a_{12}, a_{23}, a_{31}$

$$U_{\alpha\beta} = -\frac{Gm_\alpha m_\beta}{a_{\alpha\beta}} + \frac{kq_\alpha q_\beta}{a_{\alpha\beta}}, \quad \text{przy czym } a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}.$$

Z powyższego otrzymujemy

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} U_{\alpha\beta} = -G \left( \frac{m_1 m_2}{a_{12}} + \frac{m_2 m_3}{a_{23}} + \frac{m_3 m_1}{a_{31}} \right) + k \left( \frac{q_1 q_2}{a_{12}} + \frac{q_2 q_3}{a_{23}} + \frac{q_3 q_1}{a_{31}} \right).$$

### 1.4.5 Siły centralne

Przyjmując, że centrum siły znajduje się w początku układu współrzędnych siłę centralną definiujemy jako

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}.$$

Jeśli  $f(\mathbf{r}) = f(r)$  to wówczas siła  $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$  jest siłą centralną sferycznie symetryczną. Udowodnimy teraz następujące twierdzenie: *siła centralna jest zachowawcza wtedy i tylko wtedy gdy jest sferycznie symetryczna*. Z warunków zachowawczości wynika, że wystarczy pokazać, że siła centralna jest potencjalna wtedy i tylko wtedy gdy jest sferycznie symetryczna, gdyż z definicji od razu spełniony jest II warunek zachowawczości. Należy udowodnić dwie implikacje.

1. *Jeśli  $\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$  jest potencjalna to  $f(\mathbf{r}) = f(r)$*

Korzystając ze wzoru na rotację we współrzędnych sferycznych mamy

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{r} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

ale z założenia wiemy, że  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , zatem

$$\frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0,$$

skąd  $f(\mathbf{r}) = f(r)$ , co kończy pierwszą część dowodu.

2. *Jeśli  $f(\mathbf{r}) = f(r)$  to  $\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$  jest potencjalna*

Ponownie korzystając ze wzoru na rotację we współrzędnych sferycznych mamy

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

ale z założenia wiemy, że  $\frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} = 0$  i  $\frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0$ , zatem  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , co kończy dowód.

## 1.5 Teoria grawitacji Newtona

### Prawo powszechnego ciążenia (Newton, 1687)

Dowolne dwa ciała punktowe obdarzone masą przyciągają się siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}}.$$

### 1.5.1 Doświadczenia Cavendisha i von Jolly'ego

1. *Eksperyment Cavendisha (1798)*. Cavendish użył specjalnie skonstruowanej wagi skręceń. Był to drewniany pręt o długości  $l = 1.8\text{ m}$  zawieszony na drucie, na którego końcach były ołowiane kule o masach  $m = 0.78\text{ kg}$  każda.

Dwie ołowiane kule o masach  $M = 158 \text{ kg}$  zostały umieszczone w ich pobliżu. Na skutek oddziaływania grawitacyjnego małe kule zbliżyły się to dużych, tak, że w w stanie równowagi

$$\kappa\phi = \frac{GMml}{a^2}.$$

Mierząc odległość  $a$  między środkami kul i wychylenie kątowne  $\phi$  oraz wyznaczając współczynnik  $\kappa$  (np. mierząc okres drgań wahadła torsyjnego) Cavendish wyznaczył stałą  $G$ .

## 2. Eksperyment Philipa von Jolly'ego (1831).

### 1.5.2 Zasada równoważności

Znając II zasadę dynamiki oraz prawo powszechnego ciążenia naturalnie nasuwa się pytanie czy współczynniki występujące w obu wzorach, które nazywamy masami są sobie równoważne, tj. czy masa bezwładna (związana z bezwładnością ciała) jest równoważna masie grawitacyjnej (związanej z grawitacyjnym oddziaływaniem ciał). Rozważmy zatem dwa ciała puszczane z pewnej wysokości w pobliżu ziemi

$$m_1 a_1 = \frac{GMm_1^*}{R^2}, \quad m_2 a_2 = \frac{GMm_2^*}{R^2},$$

skąd

$$\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = \frac{m_1^*}{m_2^*}.$$

Ponieważ doświadczalnie z niezwykłą dokładnością sprawdzono, że wszystkie ciała puszczane w pobliżu Ziemi przy pominięciu oporów powietrza spadają z takim samym przyspieszeniem  $a_1 = a_2 = g$ , więc mamy  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^*}{m_2^*}$ , skąd wnioskujemy  $m_1 = m_1^*$  i  $m_2 = m_2^*$ .

### 1.5.3 Prawa Keplera i reguła Titiusa-Bodego

#### Prawa Keplera

- I. Planety poruszają się po orbitach eliptycznych, a w jednym z ognisk tej elipsy znajduje się Słońce.
- II. Prędkość polowa planety jest stała.
- III. Stosunek sześciąt pól wielkich orbit dwóch dowolnych planet jest równy stosunkowi kwadratów ich okresów obiegu.

*Reguła Titiusa-Bodego.* W niezłym przybliżeniu średnie odległości planet od Słońca wyrażone w jednostkach astronomicznych (au) spełniają

$$R_m[\text{au}] = 0.4 + 0.3m \quad m = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32.$$

### Prędkości kosmiczne

I. Prędkość kosmiczna  $v_I = \sqrt{gR_Z}$

II. Prędkość kosmiczna  $v_{II} = \sqrt{2gR_Z}$

#### 1.5.4 Pole grawitacyjne

Pole grawitacyjne opisujemy za pomocą pola wektorowego  $\mathbf{g}$ , które definiujemy jako stosunek siły grawitacyjnej  $\mathbf{F}$  działającej na niewielką masę próbną  $m$  do wartości tej masy

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Wektor  $\mathbf{g}$  nazywamy natężeniem pola grawitacyjnego. Pole  $\mathbf{g}$  spełnia zasadę superpozycji i jest to fakt doświadczalny tj. pole grawitacyjne wytworzone przez  $N$  mas punktowych jest sumą pól wytworzonych przez poszczególne masy

$$\mathbf{g} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{g}_\alpha.$$

Dla ciągłych rozkładów mas mamy analogicznie

$$\mathbf{g} = -G \int_{\ell} \frac{\lambda \mathbf{R}}{\mathcal{R}^3} d\ell \cong -G \int_S \frac{\sigma \mathbf{R}}{\mathcal{R}^3} dS \cong -G \int_V \frac{\rho \mathbf{R}}{\mathcal{R}^3} dV,$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  to odpowiednio liniowa, powierzchniowa i objętościowa gęstość masy.

### Prawo Gaussa

Strumień pola grawitacyjnego przez dowolną powierzchnię zamkniętą  $\mathcal{S}$  jest równy całkowitej masie znajdującej się w objętości  $\mathcal{V}$  ograniczonej przez powierzchnię  $\mathcal{S}$  pomnożonej przez  $-4\pi G$

$$\Phi_g = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{a} = -4\pi G M = -4\pi G \int_{\mathcal{V}} \rho dV.$$

- *Pole wewnątrz jednorodnej planety kulistej.* Rozpatrzmy jednorodną planetę kulistą o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Chcemy znaleźć pole grawitacyjne w całej przestrzeni. Zgodnie z prawem Gaussa

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} & \text{dla } r \geq R \\ -\frac{GM}{R^3} \mathbf{r} & \text{dla } r \leq R \end{cases}$$

- *Pole wewnątrz kulistej wnęki wydrążonej w jednorodnej planecie kulistej.* Rozpatrzmy kuliste wydrążenie w jednorodnej planecie kulistej o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Niech  $\mathbf{r}_{OI}$  oznacza wektor o początku w środku kulistej planety i końcu w środku wnęki. Łatwo pokazać z prawa Gaussa i z zasady superpozycji, że wewnątrz wnęki

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{R^3} \mathbf{r}_{OI},$$

a zatem pole jest jednorodne.

### 1.5.5 Energia pola grawitacyjnego

Można pokazać, że pole grawitacyjne posiada energię o gęstości objętościowej równej

$$\varkappa_g = \frac{g^2}{8\pi G}.$$

Korzystając z tego faktu można pokazać, że minimalna energia, jaką powinna posiadać wiązka super lasera Gwiazdy Śmierci, aby zniszczyć jednorodną planetę o masie  $M$  i promieniu  $R$  wynosi  $3GM^2/5R$ , co dla planety podobnej do Ziemi (Alderaan) daje około  $2.2 \cdot 10^{24}$  J.

## 1.6 Statyka

### Warunki równowagi

1. zerowanie się sił  $\sum \mathbf{F}_\alpha = 0$
2. zerowanie się momentów sił  $\sum \mathbf{\Gamma}_\alpha = 0$

#### 1.6.1 Równowaga a potencjał

W układach jednowymiarowych z potencjałem  $U(x)$  położenia równowagi są wyróżnione równaniem  $U'(x) = 0$ . Aby sprawdzić, czy jest to położenie równowagi trwałe, czy chwiejnej należy sprawdzić, czy druga pochodna  $U''(x)$  jest w tym punkcie większa, czy mniejsza od zera. Dla potencjałów trójwymiarowych  $U(\mathbf{r})$  postępujemy analogicznie. Położenia równowagi są wyróżnione równaniem  $\nabla U = 0$ . Natomiast sprawdzenie czy jest to położenie trwałe, czy chwiejne polega na sprawdzeniu czy odpowiednie składniki laplasjanu  $\nabla^2 U$  są większe, czy mniejsze od zera.

#### 1.6.2 Powierzchnie ekwipotencjalne

Jeżeli dla wybranej powierzchni wektor siły  $\mathbf{F}$  jest prostopadły do niej dla całej tej powierzchni to wybrana powierzchnia jest powierzchnią ekwipotencjalną. Przykładowo: powierzchnia wody, powierzchnia idealnego przewodnika.

## 1.7 Równania Lagrange’a

### 1.7.1 Podstawy rachunku wariacyjnego

Rachunek wariacyjny zajmuje się z problemem poszukiwania krzywej, dla której pewna wielkość dana w postaci całki jest stacjonarna. W elementarnym rachunku różniczkowym warunkiem, aby funkcja  $f(x)$  miała minimum lub maksimum w jakimś punkcie jest zerowanie się w tym punkcie pochodnej. Ten warunek nie gwarantuje istnienia ekstremum, gdyż na pewnym przedziale funkcja może być stała i wówczas dla wszystkich punktów z tego przedziału  $f'(x) = 0$ . Jeśli  $f'(x_0) = 0$  to w ogólności mówimy, że  $x_0$  jest *punktem stacjonarnym* funkcji  $f$ , tj. infinitezymalne przemieszczenie  $dx$  nie zmienia wartości funkcji  $df = f(x_0 + dx) - f(x_0) = 0$ . W przypadku rachunku wariacyjnego jest podobnie. Mamy całkę postaci

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y'(x), y(x), x) dx.$$

Szukamy krzywej  $y(x)$  dla której  $S$  jest stacjonarna, tj. takiej dla której infinitezymalna zmiana jej kształtu nie zmienia wartości  $S$ .

### Twierdzenie Eulera-Lagrange’a

Całka  $S$  jest stacjonarna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja podcałkowa  $f$  spełnia równanie (Eulera-Lagrange’a)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Dla większej liczby zmiennych zależnych, tj. gdy  $f = f(y'_1, \dots, y'_n, y_1, \dots, y_n, x)$  całka  $S$  jest stacjonarna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnionych jest  $n$  równań Eulera-Lagrange’a

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha}.$$

### 1.7.2 Rachunek wariacyjny w mechanice

Zmienną niezależną w mechanice jest oczywiście czas  $t$ . Zmiennymi zależnymi jest w ogólności  $n$  funkcji  $q_\alpha(t)$  będących współrzędnymi określającymi położenie poszczególnych części układu, czyli jego *konfigurację*. Te  $n$  funkcji określają krzywą w  $n$  wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej (np. dla pojedynczej cząstki poruszającej się w trzech wymiarach krzywa ta to po prostu trajektoria cząstki). Krzywa ta jest oczywiście wyznaczona przez II zasadę dynamiki, jednak okazuje się, że można ją w sposób równoważny określić jako krzywą, dla której pewna całka jest stacjonarna. Mówi o tym zasada Hamiltona.

**Zasada Hamiltona**

Ruch układu mechanicznego poruszającego się pomiędzy konfiguracjami  $\{q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}\}$  i  $\{q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)}\}$  w przedziale czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$  ma tę własność, że działanie  $S$  zdefiniowane jako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt ,$$

jest stacjonarne.

Funkcję  $\mathcal{L}$  nazywamy lagranżjanem i w mechanice klasycznej definiujemy jako  $\mathcal{L} = T - U$  (lagranżjan musi być wypisany w inercjalnym układzie odniesienia). W ogólności należy zwrócić uwagę, aby energię kinetyczną wypisywać w postaci

$$T = \sum_{\beta} \frac{m_{\beta}}{2} (\dot{x}_{\beta}^2 + \dot{y}_{\beta}^2 + \dot{z}_{\beta}^2) ,$$

gdzie sumowanie po  $\beta$  oznacza po prostu sumowanie po wszystkich cząstkach tworzących układ, a  $x_{\beta}, y_{\beta}, z_{\beta}$  są współrzędnymi kartezjańskimi cząstki  $\beta$ . Następnie, po wyborze  $s$  dogodnych współrzędnych uogólnionych  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ , zapisać wyrażenia na

$$\begin{aligned} x_{\beta} &= x_{\beta}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) , \\ y_{\beta} &= y_{\beta}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) , \\ z_{\beta} &= z_{\beta}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \end{aligned}$$

dla wszystkich cząstek  $\beta$  i podstawić je do wyrażenia na  $T$ . Analogicznie postępujemy dla  $U$ . Jeśli w powyższej relacji między współrzędnymi kartezjańskimi, a współrzędnymi uogólnionymi nie występuje explicite czas, wówczas takie współrzędne uogólnione nazywamy *współrzędnymi naturalnymi*.

Z zasady Hamiltona i tw. Eulera-Lagrange'a wynika, że funkcja  $\mathcal{L}$  musi spełniać  $n$  równań (w mechanice nazywanych równaniami Lagrange'a)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} .$$

Współrzędne  $q_{\alpha}(t)$  to tzw. *współrzędne uogólnione*, tj. niezależne od siebie wielkości, które jednoznacznie określają konfigurację układu, inaczej są to takie parametry rzeczywiste opisujące ruch układu mechanicznego, że nie musimy nakładać na nie dodatkowych warunków opisujących powierzchnię ruchu. Następujące twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego (swobodnego lub nieswobodnego) układu holonomicznego, w którym występują jedynie siły potencjalne.

Dla dowolnego układu holonomicznego o  $n$  stopniach swobody, w którym siły niebędące siłami reakcji więzów są siłami potencjalnymi o pełnym potencjale  $U$ , ruch układu jest opisany przez  $n$  równań Lagrange'a postaci

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

gdzie  $\mathcal{L} = T - U$  jest lagranżjanem układu.

### Słowniczek pojęć

- *liczba stopni swobody* – liczba niezależnych *kierunków*, w których układ może się poruszać
- *układ holonomiczny* – układ o  $n$  stopniach swobody, który można jednoznacznie opisać za pomocą  $n$  współrzędnych uogólnionych
- *współrzędne uogólnione* – takie parametry rzeczywiste opisujące ruch układu mechanicznego, że nie musimy nakładać na nie dodatkowych warunków opisujących powierzchnię ruchu
- *współrzędna cykliczna* – współrzędna  $q_i$ , taka, że lagranżjan nie zależy od niej
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha}$  – współrzędna  $\alpha$  siły uogólnionej
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}$  – współrzędna  $\alpha$  pędu uogólnionego

Zarówno uogólniona siła oraz uogólniony pęd nie muszą mieć koniecznie wymiaru odpowiednio siły [N] i pędu [kg·m/s].

### 1.7.3 Mnożniki Lagrange'a i siły reakcji więzów

W większości problemów mechanicznych interesuje nas przede wszystkim wyznaczenie  $s$  funkcji  $q_\alpha(t)$ . Wówczas powyższe twierdzenie niesamowicie upraszcza nasze rozważania, gdyż nie musimy zajmować się siłami reakcji więzów. Istnieją jednak problemy, w których potrzebne nam jest obliczenie sił reakcji więzów. W takich problemach możemy skorzystać z równań Lagrange'a I rodzaju. Niech  $\{x_1, \dots, x_n\}$  oznacza zbiór współrzędnych określających konfigurację układu, ale nie będący zbiorem współrzędnych uogólnionych. Niech  $f(x_1, \dots, x_n)$  oznacza funkcję (równanie więzów) taką, że  $f = \text{const.}$  tj.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \dot{x}_n = 0.$$



Wówczas lagranżjan wypisany w naszych współrzędnych  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$  spełnia  $n$  równań Lagrange’a I rodzaju

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\alpha},$$

gdzie  $\lambda$  jest mnożnikiem Lagrange’a, dla którego zachodzi

$$R_\alpha = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_\alpha},$$

tzn. współrzędna  $\alpha$  uogólnionej siły reakcji więzów jest równa mnożnikowi Lagrange’a pomnożonemu przez odpowiednią pochodną cząstkową funkcji  $f$ .

**Uwaga.** W niektórych przypadkach powierzchni ruchu układu nie da się opisać w postaci jednej funkcji  $f(x_1, \dots, x_n) = \text{const.}$ , ale da się ją opisać jako układ  $k$ -równań

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= \text{const.} \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= \text{const.} \\ &\vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) &= \text{const.} \end{aligned}.$$

Wówczas lagranżjan wypisany w naszych współrzędnych spełnia  $n$  równań Lagrange’a I rodzaju

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha}.$$

gdzie  $\lambda_\beta$  jest mnożnikiem Lagrange’a stowarzyszonym z wiązaniem  $f_\beta$ . Współrzędna  $\alpha$  uogólnionej siły reakcji więzów wynosi w takim przypadku

$$R_\alpha = \sum_{\beta=1}^k \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_\alpha}.$$

## 1.8 Zagadnienie ruchu dwóch ciał

Rozważmy układ mechaniczny składający się z mas punktowych  $m_1$  i  $m_2$  oddziałujących na siebie siłą o potencjale  $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , tj. potencjale siły centralnej, gdzie  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  są położeniami mas  $m_1, m_2$  w pewnym inercjalnym układzie odniesienia o początku  $\mathcal{O}$ . Niech  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , wówczas  $U = U(r)$ . Niech  $\mathbf{R}$  oznacza położenie CM układu. Zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 &= (m_1 + m_2) \mathbf{R}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}\end{aligned}$$

Założmy, że układ jest odizolowany (nie znajduje się w żadnym zewnętrznym polu). Wówczas z tw. o ruchu SM wiemy, że  $\dot{\mathbf{R}} = \text{const}$ . W szczególności w układzie SM  $\dot{\mathbf{R}} = 0$ . Wypiszmy zatem lagranżjan układu w inercjalnym układzie odniesienia związanym ze SM

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(r).$$

Korzystając ze wzorów na  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  mamy zatem

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r),$$

gdzie  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  to masa zredukowana. Zauważmy, że otrzymany lagranżjan jest lagranżjanem zagadnienia pojedynczego ciała  $m$  umieszczonego w polu o potencjale  $U(r)$ . Zredukowaliśmy więc problem 2-ciałowy do problemu 1-ciałowego. Z ZZMP wynika, że ciała będą poruszały się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora początkowego momentu pędu układu. Tory cząstek będą więc krzywymi płaskimi. Oczywistym wyborem współrzędnych będą zatem współrzędne biegunowe w płaszczyźnie prostopadłej do wektora początkowego momentu pędu układu. Mamy zatem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Pozostaje rozwiązać równania ruchu dla problemu 1-ciałowego z lagranżjanem danym powyższym równaniem.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = \ell,$$

gdzie  $\ell$  jest początkowym momentem pędu układu.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = -\frac{dU(r)}{dr} = m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = m \ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3}.$$

Otrzymujemy zatem równanie różniczkowe, które pozwala wyznaczyć  $r(t)$  dla konkretnej postaci funkcji  $U(r)$ , a zatem pozwala również wyznaczyć trajektorię  $r(\varphi)$ . Istotnie bowiem

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left( \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right) \left[ \left( \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right) \right] = \left( \frac{\ell}{m r^2} \frac{d}{d\varphi} \right) \left[ \left( \frac{\ell}{m r^2} \frac{d}{d\varphi} \right) \right].$$

Podstawiając  $x = \frac{1}{r}$  mamy

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{x} \right) = \left( \frac{\ell x^2}{m} \frac{d}{d\varphi} \right) \left[ \frac{\ell x^2}{m} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{x} \right) \right] = \left( \frac{\ell x^2}{m} \frac{d}{d\varphi} \right) \left[ -\frac{\ell}{m} x'(\varphi) \right] \\ &= -\frac{\ell^2 x^2}{m^2} x''(\varphi)\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy równanie różniczkowe

$$-\frac{m}{\ell^2} \frac{dU(x)}{dx} = x''(\varphi) + x(\varphi),$$

pozwalające wyznaczyć trajektorię  $r(\varphi)$  dla konkretnej postaci funkcji  $U(r)$ .

### 1.8.1 Całka pól

Infinityzalna powierzchnia zakreślana przez wektor wodzący cząstki  $m$  w czasie  $dt$  wynosi

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

skąd otrzymujemy  $\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \ell/2m = \text{const.}$  Jest to tzw. całka pól znana jako II prawo Keplera. Zauważmy, że II prawo Keplera jest niezależne od jawnej postaci siły z jaką oddziałują na siebie cząstki, wystarczy, że jest to centralna siła zachowawcza.

### 1.8.2 Rozważania energetyczne

Energia mechaniczna w układzie SM wynosi

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{ef}}(r),$$

gdzie  $U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$ . Ruch radialny cząstki  $r(t)$  odpowiada zatem jednowymiarowemu ruchowi cząstki  $m$  w polu o potencjale  $U_{\text{ef}}(r)$ .

### 1.8.3 Zagadnienie Keplera

Rozwiążemy teraz wyprowadzone równanie różniczkowe dla ważnego zagadnienia, kiedy  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ , gdzie  $\alpha > 0$ . Otrzymujemy wówczas następujące równanie różniczkowe

$$\frac{m\alpha}{\ell^2} = x''(\varphi) + x(\varphi),$$

którego rozwiązanie jest trywialne

$$x(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = B \cos(\varphi + \delta) + \frac{m\alpha}{\ell^2}$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{\frac{m\alpha}{\ell^2} + B \cos(\varphi + \delta)}.$$

Stałą  $B$  można wyznaczyć zauważając, że z rozważań energetycznych wynika, iż dla  $\dot{r} = 0$ , tj. dla  $\frac{\ell}{mr^2}r'(\varphi_0) = 0$  zachodzi

$$\frac{\ell^2}{2m}x^2 - \alpha x - E = 0,$$

skąd mamy

$$x(\varphi_0) = \frac{m\alpha}{\ell^2} \pm \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{\ell^4} + \frac{2Em}{\ell^2}}.$$

Jednocześnie

$$r'(\varphi_0) = \frac{B \sin(\varphi_0 + \delta)}{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2} + B \cos(\varphi_0 + \delta)\right)^2} = 0,$$

skąd  $\varphi_0 = -\delta + k\pi$ . Otrzymujemy zatem

$$B = \sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{\ell^4} + \frac{2Em}{\ell^2}}.$$

Równanie trajektorii można zatem zapisać jako

$$r(\varphi) = \frac{f}{1 + e \cos(\varphi + \delta)},$$

gdzie

$$f = \frac{\ell^2}{m\alpha}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}.$$

Równanie to opisuje krzywe stożkowe. Rozpatrzmy 3 przypadki.

1.  $E < 0$ . Wówczas z ostatniego wzoru widzimy, że  $e < 1$ , a zatem równanie trajektorii opisuje elipsę, a w szczególności dla  $E = -\frac{m\alpha^2}{2\ell^2}$  okrąg. Z geometrii analitycznej możemy obliczyć półosie wielką i małą.

$$a = \frac{f}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$b = \frac{f}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Możemy również obliczyć okres obiegu  $T$ , gdyż z całki pól mamy  $A = \pi ab = \frac{\ell T}{2m}$ , skąd

$$T = \frac{\pi \alpha \sqrt{m}}{\sqrt{2|E|^3}}.$$

2.  $E = 0$ . Wówczas z ostatniego wzoru widzimy, że  $e = 1$ , a zatem równanie trajektorii opisuje parabolę.
3.  $E > 0$ . Wówczas z ostatniego wzoru widzimy, że  $e > 1$ , a zatem równanie trajektorii opisuje hiperbolę.

#### 1.8.4 Wektor Rungego-Lenza

Uzasadnimy, że wektor (*Rungego-Lenza*)  $\mathbf{A}$  zdefiniowany jako

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r},$$

jest stały w zagadnieniu Keplera. Z ZZMP  $\dot{\mathbf{L}} = 0$ . Dodatkowo oczywiście całkowita energia mechaniczna  $E = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} - \frac{\alpha}{r}$  jest zachowana ( $\dot{E} = 0$ ). Obliczmy pochodną  $\dot{\mathbf{A}}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{L}} + \dot{\mathbf{v}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r} \\ &= \dot{\mathbf{v}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}$$

Z reguły BAC-CAB mamy

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{r}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r}$$

Zauważmy, że  $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{p^2}{2m} \right) = \frac{d}{dt} \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right)$ , zatem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right) - m\mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r} - \mathbf{r} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha}{r} \right) \\ &= -m\mathbf{v}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}$$

Z II zasady dynamiki

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{1}{m} \nabla U(r).$$

Oczywiście  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ , zatem obliczając gradient we współrzędnych sferycznych otrzymujemy

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{mr^3}.$$

Oczywiście  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ , zatem

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -m\mathbf{v} \left( -\frac{\alpha r^2}{mr^3} \right) - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r} = \mathbf{v} \frac{\alpha}{r} - \mathbf{v} \frac{\alpha}{r} = 0,$$

co kończy dowód. Wprowadzamy również tzw. *eccentricity vector*  $\boldsymbol{\epsilon}$  zdefiniowany jako

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{A}.$$

Nazwa odzwierciedla fakt, iż  $|\boldsymbol{\epsilon}| = e$ . Istotnie

$$|\boldsymbol{\epsilon}|^2 = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\alpha^2} \left( \alpha^2 + (\mathbf{v} \times \mathbf{L})^2 - 2\alpha \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) \right).$$

Wektory  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{L}$  są prostopadłe, zatem  $(\mathbf{v} \times \mathbf{L})^2 = p^2 L^2 / m^2$ . Jednocześnie zachodzi

$$2\alpha \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{L}) = \frac{2\alpha}{mr} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{2\alpha L^2}{mr},$$

zatem widzimy

$$|\boldsymbol{\epsilon}| = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2} \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \right)} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = e.$$

Oczywiście  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$ , czyli  $\boldsymbol{\epsilon}(t_1) = \boldsymbol{\epsilon}(t_2)$ .

## 1.9 Mechanika w nieinercjalnych układach odniesienia

Zasady dynamiki Newtona obowiązują jedynie w szczególnej klasie układów odniesienia – układach inercjalnych. W niektórych problemach jednak wygodniej jest wprowadzić układ nieinercjalny.

### 1.9.1 Przyspieszenie bez obrotu

Rozważmy inercjalny układ odniesienia  $\mathcal{S}_0$  oraz inny układ  $\mathcal{S}$ . Niech  $\mathbf{r}_s$  oznacza wektor łączący początki tych układów. Załóżmy, że względem układu  $\mathcal{S}_0$   $\ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{A}$ . Przypuśćmy teraz, że obserwujemy pewne zjawisko mechaniczne, np. na cząstkę  $m$  działa siła  $\mathbf{F}$ . Niech  $\mathbf{r}$  oznacza jej wektor wodzący w układzie  $\mathcal{S}_0$ , a  $\mathbf{r}'$  w układzie  $\mathcal{S}$ . Zachodzi oczywiście  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$ . W układzie  $\mathcal{S}_0$  spełniona jest oczywiście z założenia II zasada dynamiki, tj.  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ . Zróżniczkujemy teraz wyrażenie na  $\mathbf{r}'$ . Otrzymujemy

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{A}.$$

Widzimy więc, że w układzie  $\mathcal{S}$  nadal możemy posługiwać się II zasadą dynamiki, pod warunkiem, że uwzględnimy dodatkowy człon o charakterze siły, zwany *siłą bezwładności*  $\mathbf{F}_b = -m\mathbf{A}$ .

### 1.9.2 Obroty

Założmy, że mamy dwa układy odniesienia  $\mathcal{S}$  i  $\mathcal{S}_0$  o wspólnym początku. Zakładamy, że układ  $\mathcal{S}_0$  jest układem inercyjnym, natomiast układ  $\mathcal{S}$  obraca się względem niego z prędkością kątową  $\boldsymbol{\Omega}$ . Niech  $(d/dt)_{\mathcal{S}_0}$  oznacza różniczkowanie w układzie  $\mathcal{S}_0$ , a  $(d/dt)_{\mathcal{S}}$  różniczkowanie w układzie  $\mathcal{S}$ . Dla dowolnego wektora  $\mathbf{e}$  nieruchomego względem  $\mathcal{S}$ , tj. takiego dla którego

$$\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = 0,$$

zachodzi oczywisty związek

$$\left(\frac{d\mathbf{e}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}.$$

Rozpatrzmy teraz dowolny wektor  $\mathbf{a}$ . Chcemy znaleźć zależność pomiędzy pochodną  $\mathbf{a}$  po czasie w tych dwóch układach. Rozłożmy wektor  $\mathbf{a}$  na trzy ortogonalne wektory jednostkowe  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$  nieruchome względem  $\mathcal{S}$

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}.$$

W układzie  $\mathcal{S}$  zachodzi

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\mathcal{S}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{a}_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha},$$

natomiast w układzie  $\mathcal{S}_0$  zachodzi

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} &= \sum_{\alpha=1}^3 \dot{a}_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{e}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{a}_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \times \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \dot{a}_{\alpha} \hat{\mathbf{e}}_{\alpha} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że operator różniczkowania po czasie w układzie  $\mathcal{S}$  wiąże się z operatorem różniczkowania po czasie w układzie  $\mathcal{S}_0$  poprzez wzór

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{S}_0} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\Omega} \times\right].$$

### 1.9.3 II zasada dynamiki w obracającym się układzie odniesienia

W celu uproszczenia obliczeń przyjmijmy  $\mathbf{\Omega} = \text{const}$ . W układzie  $\mathcal{S}_0$  oczywiście spełniona jest II zasada dynamiki

$$\mathbf{F} = m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{S}_0}.$$

W układzie  $\mathcal{S}$  natomiast zachodzi (przyjmijmy, że kropka oznacza pochodną w układzie  $\mathcal{S}$ )

$$\left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)_{\mathcal{S}_0} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)_{\mathcal{S}} + \mathbf{\Omega} \times \right] [\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}] = \ddot{\mathbf{r}} + 2(\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Mamy zatem

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - 2m\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Widzimy więc, że w obracającym się układzie odniesienia nadal możemy posługiwać się II zasadą dynamiki pod warunkiem, że uwzględnimy dodatkowe człony o charakterze siły:

1. siłę odśrodkową  $\mathbf{F}_{\text{odś}} = -m\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$
2. siłę Coriolisa  $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$

### Spadek swobodny i metoda kolejnych przybliżeń

Przeprowadźmy dokładniejszą analizę spadku swobodnego w pobliżu powierzchni Ziemi. Pomijając siłę odśrodkową i opory powietrza równanie ruchu ma postać (ponownie przyjmujemy, że kropka oznacza różniczkowanie w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}},$$

gdzie  $\mathbf{\Omega} \approx \frac{2\pi}{24\text{h}}$ , a  $\mathbf{r}$  jest wektorem wodzącym w układzie współrzędnych kartezjańskich, którego początek  $\mathcal{O}$  jest wybrany tak, że prosta przechodząca przez  $\mathcal{O}$  i środek Ziemi tworzy kąt  $\theta$  z wektorem  $\mathbf{\Omega}$ , oś  $z$  leży na tej prostej, a oś  $y$  jest styczna do powierzchni Ziemi i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez  $z$  i  $\mathbf{\Omega}$ . Mamy zatem

$$[\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}] = [0, 0, -g] - [0, 2\Omega \sin \theta, 2\Omega \cos \theta] \times [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}],$$

skąd otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\Omega(\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -2\Omega \dot{x} \cos \theta \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega \dot{x} \sin \theta.\end{aligned}$$



Przybliżone rozwiązanie takiego układu równań różniczkowych można znaleźć korzystając z *metody kolejnych przybliżeń*. Istotnie ponieważ  $\Omega$  jest małe, więc w zerowym przybliżeniu możemy całkowicie ją pominąć i otrzymujemy rozwiązanie 0-go rzędu (przyjmujemy w ogólności następujące warunki brzegowe:  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ ,  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $z(0) = h$ )

$$\begin{aligned}x^0(t) &= 0 \\y^0(t) &= 0 \\z^0(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Następnie podstawiamy rozwiązania 0-go rzędu do wyjściowego układu równań

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\Omega(\dot{y}^0 \cos \theta - \dot{z}^0 \sin \theta) = 2\Omega g t \sin \theta \\ \ddot{y} &= -2\Omega \dot{x}^0 \cos \theta = 0 \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega \dot{x}^0 \sin \theta = -g,\end{aligned}$$

co po rozwiązaniu daje nam przybliżenie 1-go rzędu

$$\begin{aligned}x^1(t) &= \frac{1}{3}\Omega g t^3 \sin \theta \\ y^1(t) &= 0 \\ z^1(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Widzimy, że otrzymaliśmy coś innego niż w przybliżeniu 0-go rzędu. Oczywiście procedurę tę można kontynuować i otrzymać przybliżenie  $n$ -tego rzędu, jednak już przybliżenie 1-go rzędu pozwala stwierdzić, że tor ciała w spadku swobodnym będzie odchyłał się nieznacznie na wschód. Możemy oszacować również wartość tego odchylenia

$$\Delta x \approx \frac{1}{3}\Omega \sin \theta \sqrt{\frac{8h^3}{g}}.$$

## 1.10 Bryła sztywna

### 1.10.1 Całkowity moment pędu i energia kinetyczna bryły sztywnej

Wyznamy całkowity moment pędu  $\mathbf{L}$  bryły sztywnej względem pewnego inercyjnego układu odniesienia o początku  $\mathcal{O}$ . Niech  $\mathbf{r}_\alpha$  oznacza położenie fragmentu bryły o indeksie  $\alpha$  względem układu  $\mathcal{O}$ . Niech  $\mathbf{R}$  oznacza położenie SM bryły względem układu  $\mathcal{O}$ . Niech  $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}$ . Zachodzi

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_{\alpha}) \times (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha}).$$

Zauważmy, że z definicji położenia SM zachodzi

$$\mathbf{R} \sum_{\alpha} m_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}'_{\alpha} + \mathbf{R}),$$

skąd

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = 0 \quad \text{i różniczkując} \quad \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} = 0.$$

Niech  $M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \right) \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} \\ &= \mathbf{R} \times M \dot{\mathbf{R}} + \sum_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} = \mathbf{L}_{\text{SM}} + \mathbf{L}_{\text{wzgl}}. \end{aligned}$$

Pierwszy człon opisuje ruch SM względem układu  $\mathcal{O}$ , natomiast drugi człon opisuje ruch względem SM. Analogicznie wyznaczmy całkowitą energię kinetyczną  $T$  bryły sztywnej.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \dot{\mathbf{R}})^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'^2_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}'^2_{\alpha} = T_{\text{SM}} + T_{\text{wzgl}}. \end{aligned}$$

Ponownie widzimy, że pierwszy człon opisuje energię kinetyczną SM, a drugi człon opisuje energię kinetyczną względem SM. Widzimy zatem, że ruch SM i ruch względem SM całkowicie się separują. Jest to tzw. twierdzenie Königa.

### 1.10.2 Tensor bezwładności

Rozpatrzmy bryłę obracającą się wokół pewnej osi z prędkością kątową  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ , gdzie składowe  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  są składowymi w inercjalnym układzie odniesienia, w którym wybraliśmy układ współrzędnych kartezjańskich. Obliczmy moment pędu bryły.

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}.$$

Oczywiście  $\mathbf{r}_{\alpha}$  są nieruchome względem nieinercjalnego układu odniesienia związanego z bryłą, zatem w układzie inercjalnym zachodzi  $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}$ . Mamy zatem

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}).$$

Rozpiszmy to wyrażenie w inercyjnym układzie odniesienia.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \{\omega_x \sum_{\alpha} m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) - \omega_y \sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha} - \omega_z \sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha}\} \\ \{\omega_y \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) - \omega_z \sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha} - \omega_x \sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}\} \\ \{\omega_z \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) - \omega_x \sum_{\alpha} m_{\alpha}x_{\alpha}z_{\alpha} - \omega_y \sum_{\alpha} m_{\alpha}y_{\alpha}z_{\alpha}\} \end{bmatrix}.$$

Powyższe wyrażenie może zostać zapisane prościej jako

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega},$$

gdzie  $\mathbf{I}$  nazywamy tensorem bezwładności, którego element  $I_{\mu\nu}$  wyraża się wzorem

$$I_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{\mu\nu} r_{\alpha}^2 - \mu_{\alpha} \nu_{\alpha}), \quad \text{gdzie} \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu = \nu \\ 0 & \text{dla } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Dla ciągłych rozkładów masy mamy

$$I_{\mu\nu} = \int_V \varrho (\delta_{\mu\nu} r^2 - \mu\nu) dV.$$

Zauważmy, że  $\mathbf{I}$  jest macierzą symetryczną, gdyż z powyższego wzoru od razu widać, że  $I_{\mu\nu} = I_{\nu\mu}$ . Współczynniki  $I_{\mu\mu}$ , dla których  $\mu = \nu$  nazywamy *momentami bezwładności*, natomiast pozostałe nazywamy *momentami dewiacyjnymi*. Z powyższego wynika, że w ogólności jeśli bryła obraca się wokół pewnej osi to wektory momentu pędu i prędkości kątowej nie są równoległe, do czego byliśmy przyzwyczajeni we wstępnym kursie fizyki.

Wyznamy tensory (lub momenty) bezwładności następujących brył:

- *Solid cube*. Obierzmy układ współrzędnych kartezjańskich, którego środek pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych sześcianu, a osie są równoległe do odpowiednich krawędzi. Wówczas

$$I_{\mu\mu} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{M}{a^3} (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{6} Ma^2$$

$$I_{\mu\nu} = 0,$$

skąd

$$\mathbf{I} = \frac{1}{6} Ma^2 \mathbf{1}_3.$$

Zauważmy, że z powyższego wynika, że dowolna oś przechodząca przez środek sześcianu jest osią główną i dla obrotów wokół niej  $\lambda = \frac{1}{6} Ma^2$ , gdyż  $\mathbf{1}_3 \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}$ .

- *Skeleton cube*. Analogicznie ze względu na symetrię mamy ( $m$  oznacza tu masę pojedynczego pręta)

$$I_{\mu\mu} = 8m \cdot \left( \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) + 4m \cdot \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{14}{3}ma^2$$

$$I_{\mu\nu} = 0,$$

skąd

$$\mathbf{I} = \frac{14}{3}ma^2\mathbf{1}_3.$$

- *Trójkątna płyta o bokach  $a, b, c$* . Wyznamy moment bezwładności  $\lambda$  dla obrotów wokół prostej prostopadłej do płaszczyzny płyty i przechodzącej przez SM (punkt przecięcia środkowych). Korzystając ze scaling rule, własności addytywności i twierdzenia Steinera mamy

$$\lambda = \frac{1}{16}\lambda + \frac{3}{16}\lambda + \frac{1}{36}M(s_A^2 + s_B^2 + s_C^2),$$

skąd

$$\lambda = \frac{1}{27}M(s_A^2 + s_B^2 + s_C^2) = \frac{1}{36}M(a^2 + b^2 + c^2).$$

### 1.10.3 Osie główne bezwładności

Oś, która ma tę własność, że dla obrotów wokół niej  $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$  nazywamy osią główną. Trzy prostopadłe osie główne tworzą tzw. układ bryły. Z powyższego wynika, że tensor bezwładności obliczony w układzie bryły musi być diagonalny, tzn. w układzie bryły

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

gdzie współczynniki  $\lambda$  nazywamy *głównymi momentami bezwładności*. Układ bryły jest układem nieinercyjnym, gdyż jest związany sztywno z obracającą się bryłą. Istnieje ważne twierdzenie gwarantujące istnienie osi głównych zawsze, twierdzenie o istnieniu osi głównych.

#### **Twierdzenie o istnieniu osi głównych**

Dla dowolnej bryły i dowolnego punktu  $P$  istnieją trzy prostopadłe osie główne przechodzące przez  $P$ .

W ogólnym przypadku, aby znaleźć osie główne musimy rozwiązać równanie  $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}$  względem  $\boldsymbol{\omega}$ . Równanie to można przekształcić do postaci, którą nazywamy równaniem własnym

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{1}_3)\boldsymbol{\omega} = 0,$$

gdzie  $\mathbf{1}_3$  oznacza macierz jednostkową  $3 \times 3$ . Takie równanie ma nietrywialne rozwiązanie tylko wtedy, gdy  $\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}_3) = 0$ . Wyznaczając zatem współczynniki  $\lambda$  z równania charakterystycznego i dla każdego z nich obliczając  $\boldsymbol{\omega}$ , który wyznacza jedną z osi głównych znajdujemy układ osi głównych. Dla brył symetrycznych możemy skorzystać z lematu.

*Symetria bryły względem dowolnych dwóch płaszczyzn współrzędnych gwarantuje, że tensor bezwładności będzie diagonalny.*

### Twierdzenia dotyczące momentów bezwładności

1. *Twierdzenie Steinera.* Niech  $I_{\mu\nu}^{(\text{SM})}$  oznacza składową tensora bezwładności obliczonego w układzie, którego początek pokrywa się ze SM bryły  $M$ . Niech  $I_{\mu\nu}$  oznacza składową tensora bezwładności obliczonego w układzie, którego osie są równoległe do poprzedniego układu, a jego środek jest przesunięty względem SM o wektor  $[\eta_x, \eta_y, \eta_z]$ . Zachodzi

$$I_{\mu\nu} = I_{\mu\nu}^{(\text{SM})} + M (\delta_{\mu\nu} \eta^2 - \eta_\mu \eta_\nu) .$$

2. *Addytywność.* Moment bezwładności jest wielkością addytywną.
3. *Perpendicular axis theorem.* Dla płaskich obiektów (np. cienki krążek) zachodzi

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} .$$

4. *Stretch rule.* Rozciągnięcie ciała równoległe do osi obrotu, będącej osią główną nie zmienia głównego momentu bezwładności względem tej osi.
5. *Scaling rule.* Jeśli  $\mathbf{I}$  oznacza tensor bezwładności danej bryły wyznaczony w układzie współrzędnych o początku w środku masy ciała, a  $\mathbf{I}^*$  tensor bezwładności bryły powstałej przez przeskalowanie pierwotnej bryły w skali  $f$  to zachodzi  $\mathbf{I}^* = f^5 \mathbf{I}$ . Dla obiektów płaskich (dwuwymiarowych) mamy oczywiście  $\mathbf{I}^* = f^4 \mathbf{I}$ , gdyż grubość nie jest skalowana, a dla obiektów jednowymiarowych  $\mathbf{I}^* = f^3 \mathbf{I}$ .

### Energia kinetyczna obracającej się bryły

Energia kinetyczna  $T$  obracającej się bryły jest dana wzorem

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} ,$$

co w układzie bryły daje  $T = \frac{1}{2} (\lambda_1 \omega_1^2 + \lambda_2 \omega_2^2 + \lambda_3 \omega_3^2)$ .

### 1.10.4 Kąty Eulera

Euler zaproponował świetną metodę określenia orientacji bryły sztywnej w *układzie przestrzennym* (tj. układzie inercjalnym o stałej orientacji w przestrzeni) za pomocą trzech kątów  $(\varphi, \theta, \psi)$ . Motywacją takiego opisu ruchu bryły jest fakt, że energia kinetyczna bryły ma w układzie bryły najprostszą postać, a kąty Eulera (opisujące orientację bryły w inercjalnym układzie przestrzennym w niezwykle jasny sposób) pozwalają na całkiem proste rozłożenie  $\boldsymbol{\omega}$  na składowe w układzie bryły. Istotnie zachodzi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} = & \hat{\mathbf{e}}_1(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) + \hat{\mathbf{e}}_2(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \\ & + \hat{\mathbf{e}}_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta),\end{aligned}$$

gdzie  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  są wersorami w układzie bryły. Energia kinetyczna wirującej bryły jest zatem dana wyrażeniem

$$\begin{aligned}T = & \frac{1}{2} \lambda_1 (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi)^2 \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2\end{aligned}$$

W celu uproszczenia obliczeń poniżej zajmujemy się tylko przypadkiem tzw. *bąka symetrycznego*, dla którego  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , wówczas

$$\boldsymbol{\omega} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \dot{\varphi} \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \dot{\theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)$$

oraz rozkładając  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  w układzie przestrzennym  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 &= \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi \cos \theta - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\hat{\mathbf{x}} \sin \varphi + \hat{\mathbf{y}} \cos \varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{x}} \cos \varphi \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta.\end{aligned}$$

Korzystając z powyższego możemy zapisać moment pędu bąka symetrycznego ( $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ ) w układzie przestrzennym za pomocą kątów Eulera

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = & \hat{\mathbf{x}} \left( -\lambda_2 \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - \lambda_2 \dot{\theta} \sin \varphi + \lambda_3 \omega_3 \cos \varphi \sin \theta \right) \\ & + \hat{\mathbf{y}} \left( -\lambda_2 \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \cos \theta + \lambda_2 \dot{\theta} \cos \varphi + \lambda_3 \omega_3 \sin \varphi \sin \theta \right) \\ & + \hat{\mathbf{z}} \left( \lambda_2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \lambda_3 \omega_3 \cos \theta \right).\end{aligned}$$

Wyrażenie na energię kinetyczną można natomiast uprościć do postaci

$$T = \frac{1}{2} \lambda_2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

## Ruch swobodny

Przeanalizujemy najpierw ruch bąka, na który nie działa żaden zewnętrzny moment siły. W takim przypadku  $\mathcal{L} = T$  i z równań Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} L_z &= \text{const} \\ \lambda_2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \lambda_3 \dot{\varphi} \omega_3 \sin \theta &= \lambda_2 \ddot{\theta} \\ \lambda_3 \omega_3 &= \text{const}. \end{aligned}$$

Wybierając oś  $z$  w taki sposób, aby pokrywała się ona z wektorem  $\mathbf{L}$  mamy

$$\begin{aligned} L_z &= L = (\lambda_2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \lambda_3 \omega_3 \cos \theta) \\ L_x &= 0 \\ L_y &= 0, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\lambda_2 \dot{\theta} (\tan \varphi + \cot \varphi) = 0,$$

zatem  $\theta = \text{const}$ , a więc

$$\dot{\varphi} (\lambda_2 \dot{\varphi} \cos \theta - \lambda_3 \omega_3) = 0.$$

Widzimy zatem, że  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , a więc również  $\dot{\psi} = \text{const}$  i bąk w ogólności wiruje z szybkością  $\dot{\psi}$  wokół własnej osi, która nachylona pod stałym kątem  $\theta$  do osi  $z$  wykonuje precesję z szybkością

$$\dot{\varphi} = \frac{\lambda_3 \omega_3}{\lambda_2 \cos \theta}.$$

Zauważmy, że wartość szybkości precesji możemy zapisać również jako

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\lambda_2} = \frac{\lambda_3 \dot{\psi}}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cos \theta}.$$

## Ruch w zewnętrznym polu

W przypadku ruchu w zewnętrznym polu do lagranżjanu trzeba dodać człon związany z energią potencjalną  $U$ . W jednorodnym polu grawitacyjnym  $U(\theta) = MgR \cos \theta$ , zatem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \lambda_2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \lambda_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - MgR \cos \theta.$$

Z równań Lagrange'a mamy wówczas

$$\begin{aligned} L_z &= \text{const} \\ \lambda_2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \lambda_3 \dot{\varphi} \omega_3 \sin \theta + MgR \sin \theta &= \lambda_2 \ddot{\theta} \\ \lambda_3 \omega_3 &= \text{const}. \end{aligned}$$

- *Regularna precesja.* W przypadku regularnej precesji, czyli dla  $\theta = \text{const} \neq 0$  mamy  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , a więc również  $\dot{\psi} = \text{const}$ , zatem otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\dot{\varphi}^2 \cos \theta - \lambda_3\dot{\varphi}\dot{\psi} + MgR = 0$$

którego rozwiązania są dane poprzez wzory

$$\dot{\varphi} = \frac{\lambda_3\dot{\psi}}{2(\lambda_2 - \lambda_3) \cos \theta} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(\lambda_2 - \lambda_3)MgR \cos \theta}{\lambda_3^2\dot{\psi}^2}} \right].$$

Jeśli  $\theta = \frac{\pi}{2}$  to ścisłym rozwiązaniem jest

$$\dot{\varphi} = \frac{MgR}{\lambda_3\dot{\psi}}.$$

Dla  $\lambda_3\dot{\psi} \gg 2\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)MgR \cos \theta}$  możemy natomiast przybliżyć wyrażenie z pierwiastkiem

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\lambda_3\omega_3}{2\lambda_2 \cos \theta} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2\lambda_2 MgR \cos \theta}{\lambda_3^2\omega_3^2} \right) \right],$$

co daje nam dwa rozwiązania

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{MgR}{\lambda_2\dot{\psi}} \quad \text{oraz} \quad \dot{\varphi}_2 \approx \frac{\lambda_3\dot{\psi}}{(\lambda_2 - \lambda_3) \cos \theta}.$$

- *Przypadek ogólny.* W ogólnym przypadku z  $L_z = \text{const}$  mamy

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\lambda_2 \sin^2 \theta}$$

oraz wiemy, że  $L_3 = \text{const}$ . W polu o potencjale  $U(\theta)$  energia mechaniczna  $E = T + U$  jest oczywiście zachowana i wynosi

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{1}{2}\lambda_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\lambda_3\omega_3^2 + U(\theta) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_2\dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\lambda_2 \sin^2 \theta} + U(\theta), \end{aligned}$$

gdzie  $\tilde{E} = E - \lambda_3\omega_3^2/2 = \text{const}$ . Ruch zenitalny  $\theta(t)$  jest zatem taki jak ruch jednowymiarowego układu w polu o potencjale  $U_{\text{ef}}(\theta)$

$$U_{\text{ef}}(\theta) = U(\theta) + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\lambda_2 \sin^2 \theta}.$$



Zauważmy, że całki ruchu  $\tilde{E}$ ,  $L_3$ ,  $L_z$  są jednoznacznie wyznaczone przez warunki początkowe  $\theta_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\varphi}_0$ ,  $\dot{\psi}_0$ .

Rozwiążemy teraz powyższe zagadnienie dla następujących warunków początkowych:  $\dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ ,  $\theta_0 \neq 0$ , a  $\dot{\psi}_0$  jest ekstremalnie duże w porównaniu z pozostałymi parametrami. Z takimi warunkami początkowymi mamy do czynienia w przypadku standardowego pokazu z żyroskopem. Całki ruchu są równe odpowiednio

$$L_3 = \lambda_3 \dot{\psi}_0, \quad L_z = \lambda_3 \dot{\psi}_0 \cos \theta_0.$$

Efektywna energia potencjalna wynosi zatem

$$U_{\text{ef}}(\theta) = MgR \cos \theta + \frac{\lambda_3^2 \dot{\psi}_0^2}{2\lambda_2} \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}.$$

Okazuje się, że dla ekstremalnie dużych  $\dot{\psi}_0$  (w granicy  $\dot{\psi}_0 \rightarrow \infty$ ) funkcja ta jest niezwykle dobrze przybliżana w całej swojej dziedzinie przez początkowe (do 2-go rzędu) wyrazy rozwinięcia Taylora wokół punktu  $\theta = \theta_0$

$$U_{\text{ef}}(\theta) \approx U_{\text{ef}}(\theta_0) - MgR \sin \theta_0 (\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} k (\theta - \theta_0)^2,$$

gdzie

$$k = \frac{\lambda_3^2 \dot{\psi}_0^2}{\lambda_2} - MgR \cos \theta_0.$$

Rozwiązując  $\lambda_2 \ddot{\theta} = -\frac{dU_{\text{ef}}}{d\theta}$  otrzymujemy

$$\theta(t) = \frac{\lambda_2 MgR \sin \theta_0}{\lambda_3^2 \dot{\psi}_0^2} (\cos \omega_{\text{nut}} t - 1) + \theta_0,$$

gdzie

$$\omega_{\text{nut}} \approx \frac{\lambda_3 \dot{\psi}_0}{\lambda_2}.$$

Zauważmy, że dla niezwykle dużych  $\dot{\psi}_0$  amplituda nutacji jest niezwykle mała.

## 1.11 Drgania

### 1.11.1 Prawo Hooke'a

Energia potencjalna sprężyny jest wprost proporcjonalna do kwadratu jej wychyleń z położenia równowagi  $U(x) = \alpha(x - x_0)^2$ , gdzie  $x_0$  jest położeniem równowagi.

Przyjmujemy, że stała  $\alpha > 0$  jest równa  $k/2$ , gdzie  $k$  nazywamy współczynnikiem sprężystości  $[\frac{N}{m}]$ . W istocie poniższe rozważania są bardzo ogólne, gdyż wiele układów w przybliżeniu małych wychyleń z położenia równowagi wykonuje drgania harmoniczne, tj. drgania sprężyny o potencjale proporcjonalnym do kwadratu wychylenia. Istotnie jeśli  $U(x)$  jest dowolną funkcją taką, że dla pewnego  $x_0$  zachodzi  $U'(x_0) = 0$ , wówczas ze wzoru Taylora dla małych wychyleń  $\Delta x = x - x_0$  mamy

$$U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Układ wykonuje więc drgania analogiczne do drgań sprężyny o współczynniku sprężystości  $k = U''(x_0)$ .

### 1.11.2 Ruch harmoniczny prosty

Rozwiążemy teraz równanie ruchu swobodnego oscylatora harmonicznego. Wskazujemy energię potencjalną tak, że  $x_0 = 0$ . Lagranżjan takiego oscylatora ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Z równań Lagrange'a mamy zatem

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t).$$

Rozwiązanie takiego równania jest trywialne jednak można zapisać je w różny sposób

$$\begin{aligned} x(t) &= B_1 e^{j\omega t} + B_2 e^{-j\omega t} = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \\ &= A \cos(\omega t - \delta) = \operatorname{Re} \{ A' e^{j\omega t} \}, \end{aligned}$$

gdzie pomiędzy stałymi zachodzą następujące związki

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \delta &= \arctan \frac{C_1}{C_2} \\ A' &= A e^{-j\delta} \\ C_2 &= B_1 + B_2 \\ C_1 &= j(B_1 - B_2). \end{aligned}$$

### 1.11.3 Drgania tłumione

Rozwiążemy teraz zagadnienie tłumionego oscylatora harmonicznego. Rozważmy ciało poruszające się w jednym wymiarze pod wpływem siły sprężystości, na które działa również liniowa siła oporu  $-b\dot{x}$ . Równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - b\dot{x} \\ \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $\beta = b/2m$ . Wprowadźmy operator różniczkowy  $D$  zdefiniowany jako

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2.$$

Równanie ruchu tłumionego oscylatora harmonicznego możemy zatem zapisać jako  $Dx = 0$ . Metodą przewidywań zgadujemy, że rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Podstawiając to rozwiązanie do równania ruchu otrzymujemy

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Jeśli tylko  $\omega_0^2 \neq \beta^2$  to otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania  $Dx = 0$ , gdyż wiemy, że ogólne rozwiązanie liniowego równania różniczkowego 2-go rzędu ma dokładnie dwie stałe, więc

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

jest na pewno rozwiązaniem ogólnym. Dla  $\beta = \omega_0$  (tłumienie krytyczne) rozwiązaniem jest funkcja  $x(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\beta t}$ , jednak nie jest to szczególnie interesujący przypadek.

1. *Słabe tłumienie*  $\beta < \omega_0$ . Korzystając ze wzoru Eulera mamy

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t - \delta) \quad \text{gdzie} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

2. *Silne tłumienie*  $\beta > \omega_0$ .

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right).$$

Dla drgań słabo tłumionych definiujemy logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln \left( \frac{A(t)}{A\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)} \right) = \ln \left( e^{\frac{2\pi\beta}{\omega}} \right) = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

### 1.11.4 Drgania wymuszone

Ogólne równanie ruchu oscylatora wymuszonego siłą  $F(t)$  ma postać

$$Dx(t) = \frac{1}{m}F(t) = f(t).$$

Łatwo sprawdzić, że  $D(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Dx_1 + a_2Dx_2$ , więc  $D$  jest *liniowym* operatorem różniczkowym. Z teorii równań różniczkowych wiemy, że rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego postaci  $Dx = f(t)$ , gdzie  $D$  jest dowolnym liniowym operatorem różniczkowym ma postać  $x(t) = x_j(t) + x_s(t)$ , gdzie  $x_j$  jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego  $Dx = 0$ , a  $x_s$  jest dowolnym rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego. W ogólnym przypadku, korzystając z wyników poprzedniego zadania, mamy

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) + x_s(t).$$

### Wymuszenie sinusoidalne

Ważnym szczególnym przypadkiem jest wymuszenie sinusoidalne  $F_0 \sin \Omega t$ , dzięki któremu poprzez twierdzenie Fouriera znamy rozwiązanie dla dowolnego okresowego wymuszenia. Zgadujemy rozwiązanie szczególne

$$x_s(t) = A \sin(\Omega t - \delta).$$

Podstawiając to rozwiązanie do równania ruchu otrzymujemy

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}$$

$$\delta = \arctan \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Rozwiązanie ogólne dla wymuszenia sinusoidalnego ma więc postać

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} \sin \left( \Omega t - \arctan \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) + e^{-\beta t} \left( C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right).$$

Jeśli  $\beta \neq 0$  to po odpowiednio długim czasie człon  $x_j$  zanika i w *stanie ustalonym*  $x(t) = x_s(t) = A \sin(\Omega t - \delta)$ . Jeśli natomiast  $\beta = 0$  to

$$x(t) = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \Omega^2|} \sin \Omega t + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t.$$

### 1.11.5 Rezonans

W stanie ustalonym amplituda drgań jest dana wzorem

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}.$$

Funkcja ta ma maksimum, które możemy znaleźć rozwiązując równanie  $A' = 0$ , skąd otrzymujemy

$$\Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{i} \quad A_{\text{rez}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

### Szerokość połówkowa

Szerokość połówkową  $\Delta\Omega$  definiujemy jako  $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2|$ , gdzie  $\Omega_1, \Omega_2$  są rozwiązaniami równania  $A^2(\Omega) = \frac{1}{2}A_{\text{rez}}^2$ . Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2 \pm 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Często interesuje nas przypadek bardzo słabego tłumienia  $\beta \ll \omega_0$ . Wówczas  $\Omega_{\text{rez}} \approx \omega_0$ . Potraktujmy  $\Omega_{1,2}$  jako funkcję  $\beta$ . Dla małych  $\beta$  możemy ją przybliżyć korzystając ze wzoru Taylora

$$\Omega_{1,2}(\beta) \approx \omega_0 \pm \beta,$$

skąd otrzymujemy, że dla bardzo słabego tłumienia  $\Delta\Omega \approx 2\beta$ . Definiujemy również współczynnik dobroci  $Q$ , który określa *smukłość* piku rezonansowego

$$Q = \frac{\Omega_{\text{rez}}}{\Delta\Omega}.$$

Dla bardzo słabego tłumienia  $Q \approx \omega_0/2\beta$ .

### Rezonans mocy średniej

Pokażemy, że rezonans średniej mocy  $\langle P \rangle$  zachodzi ściśle dla  $\Omega = \omega_0$ . Istotnie w stanie ustalonym

$$P(t) = \frac{F(t) dx}{dt} = F(t)\dot{x}(t) = -\Omega A F_0 \cos \Omega t \sin(\Omega t - \delta).$$

Z definicji średniej całkowej

$$\langle P \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} P(t) dt = \frac{1}{2} \Omega A F_0 \sin \delta = m\beta A^2 \Omega^2.$$

Mamy zatem funkcję

$$\langle P \rangle(\Omega) = \frac{\beta \Omega^2 F_0^2 / m}{4\beta^2 \Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2} ,$$

której maksimum znajdujemy przez rozwiązanie równania  $\langle P \rangle'(\Omega_{\text{Prez}}) = 0$ , skąd  $\Omega_{\text{Prez}} = \omega_0$ .

#### 1.11.6 Twierdzenie Fouriera

##### Twierdzenie Fouriera

Dowolną okresową funkcję  $f(t)$  spełniającą warunki Dirichleta można przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] ,$$

gdzie

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt .$$

Jeśli mamy równanie różniczkowe postaci  $Dx = f(t)$ , gdzie  $f(t)$  można przedstawić w postaci szeregu Fouriera, wówczas jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( C_1 e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t - \delta_n) + B_n \sin(n\omega t - \delta_n)] ,$$

gdzie

$$A_n^2 = \frac{a_n^2}{4\beta^2 n^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2}$$

$$B_n^2 = \frac{b_n^2}{4\beta^2 n^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - n^2 \omega^2)^2}$$

$$\delta_n = \arctan \frac{2\beta n \omega}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2} .$$

### 1.11.7 Transformacja Laplace'a

W ogólnym przypadku w rozwiązaniu równania różniczkowego  $Dx = f(t)$  dla nieokresowej funkcji  $f(t)$  może nam pomóc transformacja Laplace'a  $\mathcal{L}$ . Transformatę (wynik transformacji) Laplace'a  $F(s)$  funkcji  $f(t)$  określonej dla  $t \in \langle 0; \infty \rangle$  definiujemy jako

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt ,$$

gdzie  $s$  jest w ogólności zmienną zespoloną. Nie każda funkcja  $f(t)$  posiada transformatę Laplace'a, gdyż całka w powyższym wzorze nie jest w ogólności zbieżna. Przekształcenie Laplace'a ma pewne bardzo wygodne własności, które można użyć przy rozwiązywaniu równań różniczkowych.

#### Podstawowe własności

1. *Liniowość.* Transformacja Laplace'a jest transformacją liniową. Istotnie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} &= \int_0^{\infty} (a_1 f_1 + a_2 f_2) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} a_1 f_1 e^{-st} dt + \int_0^{\infty} a_2 f_2 e^{-st} dt \\ &= a_1 \int_0^{\infty} f_1 e^{-st} dt + a_2 \int_0^{\infty} f_2 e^{-st} dt \\ &= a_1 \mathcal{L}\{f_1\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2\} \end{aligned}$$

2. *Twierdzenie o transformacie pochodnej.* Obliczmy transformatę funkcji  $g(t) = \frac{df}{dt}$ . Mamy

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt ,$$

skąd przez całkowanie przez części otrzymujemy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} d(f(t)e^{-st}) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt .$$

Zakładając, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$  otrzymujemy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) .$$

Widzimy zatem, że w dziedzinie  $s$  różniczkowanie po czasie zamienia się w dzielenie przez parametr  $\tau = \frac{1}{s}$  o charakterze czasu, a zatem równania różniczkowe zmieniają się w równania algebraicznej zmiennej  $F(s)$ . Dla drugiej

pochoďnej mamy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - \dot{f}(0).$$

### Transformaty Laplace'a najczęściej spotykanych funkcji

1.  $\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s}$
2.  $\mathcal{L}\{at^n\} = \frac{an!}{s^{n+1}}$  gdzie  $n = 0, 1, 2, \dots$
3.  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
4.  $\mathcal{L}\{\delta_{\text{Dirac}}(t-a)\} = e^{-as}$
5.  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6.  $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.  $\mathcal{L}\{\sin(\omega t + \delta)\} = \frac{\omega \cos \delta + s \sin \delta}{s^2 + \omega^2}$
8.  $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$
9.  $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$
10.  $\mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

### Transformacja odwrotna

Jeśli  $F(s)$  jest transformatą funkcji  $f(t)$ , wówczas  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ . W wielu przypadkach (np. przy rozwiązywaniu liniowych obwodów elektrycznych) spotykamy się z funkcjami wymiernymi postaci

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_ms^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0},$$

gdzie  $m < n$ . Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy  $Q(s) = A(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$ , tj. wielomian  $Q$  posiada  $n$  pojedynczych pierwiastków  $p_1, \dots, p_n$ . Wówczas funkcję  $F(s)$  możemy rozłożyć na ułamki proste

$$F(s) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{k_\alpha}{s-p_\alpha}.$$



Dla takiej postaci łatwo jest znaleźć transformację odwrotną

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_{\alpha}}\right\},$$

ale z listy na początku strony wiemy, że  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ , zatem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{e^{at}\}\} = e^{at},$$

skąd

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha} e^{p_{\alpha} t}, \quad k_{\alpha} = \lim_{s \rightarrow p_{\alpha}} (s - p_{\alpha}) F(s).$$

Jako przykład rozwiążemy równanie  $Dx(t) = f(t)$  dla  $\beta = 0$  i  $f(t)$  danej wzorem

$$f(t) = \begin{cases} F_0/m & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}.$$

Oczywiście w tym przypadku transformacja Laplace'a jest overkilliem, gdyż rozwiązanie szczególne jest trywialne do znalezienia  $x_s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , ale chodzi tylko o ilustrację metody. Korzystając z transformacji Laplace'a mamy

$$\mathcal{L}\{Dx(t)\} = (s^2 + \omega_0^2)X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_0}{ms},$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , skąd

$$X(s) = \frac{x(0)s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{F_0/m}{s(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}.$$

Korzystając z listy od razu możemy napisać transformację odwrotną dwóch pierwszych członów

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_0/m}{s(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}\right\}.$$

Zauważmy, że ostatni człon ma postać funkcji wymiernej, o której mówiliśmy wcześniej. Mamy zatem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_0/m}{s(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}\right\} = \sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha} e^{p_{\alpha} t},$$

gdzie  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -j\omega_0$ ,  $p_3 = j\omega_0$ ,  $k_1 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ ,  $k_2 = k_3 = -\frac{F_0}{2m\omega_0^2}$ , skąd

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F_0/m}{s(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)} \right\} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) ,$$

zatem ostatecznie

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) .$$

### 1.11.8 Oscylatory sprzężone

Zajmiemy się teraz układami drgającymi o wielu stopniach swobody. Najprostszym mechanicznym przedstawicielem takiego układu jest układ składający się z dwóch mas  $m_1$  i  $m_2$  oraz trzech sprężyn o współczynnikach sprężystości  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Sprężyna  $k_2$  łączy dwa ciała ze sobą, natomiast pozostałe sprężyny łączą masy z nieruchomymi ściankami. Niech  $l_\alpha$  oznacza długość swobodną sprężyny o współczynniku  $k_\alpha$ . Niech  $L_\alpha$  oznacza długość sprężyny w położeniu równowagi układu. Zachodzi

$$k_1(L_1 - l_1) = k_2(L_2 - l_2) = k_3(L_3 - l_3) .$$

Niech  $x_1$ ,  $x_2$  oznaczają przesunięcia mas z położenia równowagi. Lagranżjan układu ma postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1}{2} (x_1 + L_1 - l_1)^2 \\ &\quad - \frac{k_2}{2} (x_2 + L_2 - x_1 - l_2)^2 - \frac{k_3}{2} (L_3 - x_2 - l_3)^2 \\ &= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2} - \frac{k_3 x_2^2}{2} + \mathcal{L}_0 , \end{aligned}$$

gdzie  $\mathcal{L}_0$  jest pewnym stałym członem. Z równań Lagrange'a mamy zatem

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -(k_2 + k_3)x_2 + k_2 x_1 . \end{aligned}$$

Jest to zatem układ równań różniczkowych sprzężonych. Metoda rozwiązywania opiera się na zauważeniu, że można go przedstawić w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{k}\mathbf{x} ,$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Kluczowe jest to, że macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{k}$  są symetryczne. Rozwiązanie szczególne zgadujemy

$$\mathbf{x}_s = \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{j\omega t} \\ \alpha_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_n = A_n e^{-j\delta_n}.$$

Ponieważ jednak wszystkie wykonywane operacje są liniowe więc równie dobrze możemy posługiwać się rozwiązaniem zespolonym

$$\mathbf{z}_s = \boldsymbol{\alpha} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} e^{j\omega t},$$

a dopiero później brać część rzeczywistą. Podstawiając szczególne rozwiązanie zespolone do macierzowego równania ruchu mamy

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\alpha} = 0.$$

Równanie to nazywamy uogólnionym równaniem własnym. Ma ono nietrywialne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0.$$

Równanie to pozwala wyznaczyć *częstości własne* układu, tj. częstości, z którymi układ wykonuje drgania czysto sinusoidalne (tzw. *mod normalny*). Macierze  $\mathbf{k}$  i  $\mathbf{M}$  mogą być w ogólności macierzami  $n \times n$ , macierz  $\mathbf{x}$  jest w ogólności macierzą kolumnową  $n$ , gdzie  $n$  odpowiada liczbie stopni swobody układu. Po znalezieniu częstości własnych podstawiamy je do równania własnego i dla każdego modu normalnego znajdujemy zależności pomiędzy współczynnikami  $\alpha$ , co pozwala nam zapisać rozwiązanie w  $m$ -tym modzie normalnym jako

$$\mathbf{x}^{(m)} = A_m \begin{bmatrix} c_1^{(m)} \\ c_2^{(m)} \\ \vdots \\ c_n^{(m)} \end{bmatrix} \cos(\omega_m t - \delta_m),$$

gdzie  $A_m$  i  $\delta_m$  są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków początkowych. Rozwiązanie ogólne ma wtedy postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} + \dots$$

W naszym problemie macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{k}$  są macierzami  $2 \times 2$ . Łatwo możemy w tym prostym przypadku znaleźć wyznacznik macierzy (dla macierzy większych niż  $3 \times 3$  lepiej korzystać z komputera)

$$\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) \end{bmatrix},$$

skąd

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}) = (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = 0.$$

Rozwiązując takie równanie kwadratowe zmiennej  $\omega^2$  otrzymujemy dwa rozwiązania ( $\omega$  musi być większa od 0)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_2(k_1 + k_2) + m_1(k_2 + k_3) \pm \sqrt{\Delta}}{2m_1 m_2}, \quad \text{gdzie}$$

$$\Delta = [m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3).$$

W celu uproszczenia obliczeń rozpatrzmy przypadek szczególny  $m_1 = m_2 = m$  i  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ . Wówczas

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1. *Pierwszy mod normalny*  $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$ . Z równania własnego mamy

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0,$$

skąd otrzymujemy  $\alpha_1^{(1)} = -\alpha_2^{(1)} = A_1 e^{-j\delta_1}$ , zatem

$$\mathbf{x}^{(1)} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1).$$

2. *Drugi mod normalny*  $\omega_2 = \sqrt{k/m}$ . Z równania własnego mamy

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{bmatrix} = 0,$$

skąd otrzymujemy  $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = A_2 e^{-j\delta_2}$ , zatem

$$\mathbf{x}^{(2)} = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2).$$

Ogólne rozwiązanie ma więc postać

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2),$$

czyli

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \\ x_2(t) &= -A_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \end{aligned}$$

### Coupled oscillators in a physically meaningful context. Model trójatomowej cząsteczki liniowej (np. CO<sub>2</sub>)

Rozpatrzmy model cząsteczki CO<sub>2</sub> jako masy punktowe  $m$ ,  $M$  i  $m$  połączone sprężynami o współczynnikach sprężystości  $k$ . Załóżmy, że na układ nałożono więzy, tak, że jego ruch jest jednowymiarowy. Chcemy znaleźć częstości własne tego układu. Niech  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  oznaczają wychylenia poszczególnych cząstek z położenia równowagi.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2.$$

Z równań Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + kx_2 \\ M\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 + kx_3 \\ m\ddot{x}_3 &= kx_2 - kx_3, \end{aligned}$$

co można zapisać jako

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{k}\mathbf{x},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} &= \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} . \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy  $\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}$  jest równy

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{M}) = \omega^2(k - \omega^2 m) [\omega^2 M m - k(M + 2m)] = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{k \left( \frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right)}.$$

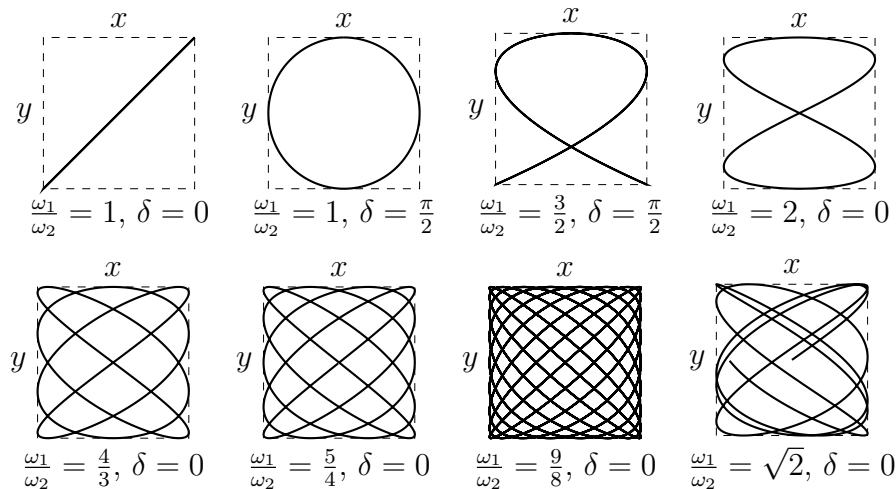
Częstość  $\omega_1 = 0$  odpowiada ruchowi całego układu ze stałą prędkością zatem nie jest interesująca, gdyż członu związanego z takim ruchem można się pozbyć przechodząc do układu SM.

### 1.11.9 Krzywe Lissajous

Krzywa Lissajous to krzywa płaska dana w postaci parametrycznej jako

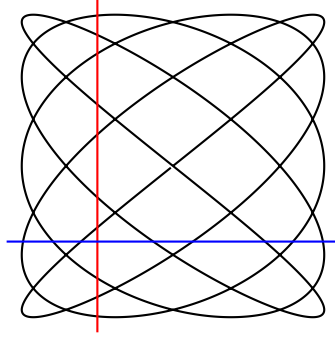
$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \delta), \quad y(t) = B \sin \omega_2 t.$$

Jest to więc krzywa zakreślana przez punkt materialny wykonujący drgania harmoniczne w dwóch prostopadłych kierunkach. Poniżej zamieszczam przykłady krzywych dla  $A = B$  i różnych stosunków  $\omega_1/\omega_2$ .



Rysunek 1: Wybrane krzywe Lissajous

Krzywe są zamknięte tylko wtedy, gdy stosunek  $\omega_1/\omega_2$  jest liczbą wymierną. Stosunek ten można wyznaczyć z rysunku korzystając z następującej metody: rysujemy dwie proste równoległe odpowiednio do osi  $x$  i  $y$  tak aby przecinały one krzywą w punktach różnych od przecięć krzywej ze sobą, a następnie zliczamy punkty przecięcia narysowanych prostych z krzywą Lissajous.



Rysunek 2: Metoda wyznaczania stosunku  $\omega_1/\omega_2 = \textcolor{red}{n}/\textcolor{blue}{n}$  z rysunku

## 1.12 Fale w ośrodkach sprężystych

### 1.12.1 Jednowymiarowe równanie falowe

Fala (jednowymiarowa) to matematycznie rozwiązanie równania falowego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

gdzie  $f = f(z, t)$  jest funkcją opisującą kształt fali w danej chwili, a  $c$  jest prędkością rozchodzenia fali wzdłuż osi  $z$ .

Wyprowadzimy jednowymiarowe równanie falowe rozpatrując drgania poprzeczne naprężonej struny. Zakładamy, że wychylenia struny  $f(z, t)$  są niewielkie tak, że naprężenie  $T$  struny jest takie samo w każdym jej punkcie, a sama struna jest cały czas prawie równoległa do osi  $z$ . Niech  $\mu$  oznacza gęstość liniową struny. Rozpatrzmy fragment struny o masie  $\mu \sqrt{df^2 + dz^2} \approx \mu dz$ . Z II zasady dynamiki mamy

$$\begin{aligned} F_z &= T \cos(\phi + d\phi) - \cos \phi \approx 0 \\ F_y &= T \sin(\phi + d\phi) - T \sin \phi \\ &= T(\sin \phi \cos d\phi + \sin d\phi \cos \phi - \sin \phi) \approx T \cos \phi d\phi \approx T d\phi, \end{aligned}$$

oraz

$$F_y = \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} dz = T \frac{\partial \phi}{\partial z} dz.$$

Jednocześnie dla małych  $\phi \approx \tan \phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ , zatem

$$\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

co, po podstawieniu  $c = \sqrt{T/\mu}$  daje dokładnie równanie falowe w jednym wymiarze.

Udowodnimy teraz, że dowolne rozwiązanie powyższego równania falowego ma postać

$$f(z, t) = \alpha(z - ct) + \beta(z + ct),$$

gdzie  $\alpha, \beta$  są pewnymi funkcjami. Zauważmy, że funkcja  $\alpha$  opisuje niezmienny się w czasie kształt  $\alpha(z, 0) = \alpha_0(z)$  poruszający się w stronę większych  $z$  z prędkością  $c$ . Istotnie dla  $t = 0$  kształt fali jest opisany funkcją  $\alpha(z)$ , ale  $\alpha(z - c \cdot 0) = \alpha((z + ct) - ct)$ , zatem widzimy, iż po czasie  $t$  punkt należący do fali o współrzędnych  $(z, \alpha(z))$  przesunął się o odległość  $ct$  w prawo. Wprowadźmy zmienne

$$\eta = z + ct, \quad \xi = z - ct.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = c \frac{\partial}{\partial \eta} - c \frac{\partial}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

zatem równanie falowe możemy przepisać do postaci

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \right) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2},$$

skąd otrzymujemy, iż w nowych zmiennych  $(\eta, \xi)$  równanie falowe ma postać

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Oznaczmy  $\frac{\partial f}{\partial \xi} = h(\eta, \xi)$ , wówczas

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0,$$

czyli  $h = h(\xi)$ . Analogicznie, oznaczając  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = g(\eta, \xi)$ , otrzymujemy  $g = g(\eta)$ , skąd

$$f(z, t) = \int h(\xi) d\xi + \int g(\eta) d\eta = \alpha(\xi) + \beta(\eta) = \alpha(z - ct) + \beta(z + ct).$$

### 1.12.2 Metoda separacji zmiennych

Podobnie jak inne równania różniczkowe cząstkowe, również równanie falowe można próbować rozwiązać *metodą separacji zmiennych*. Istotnie sprawdźmy, czy istnieją rozwiązania równania falowego postaci

$$f(z, t) = \Psi(z)\Phi(t).$$



Podstawiając to wyrażenie do równania falowego otrzymujemy

$$\Psi(z) \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = c^2 \Phi(t) \frac{d^2 \Psi}{dz^2},$$

czyli

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \frac{c^2}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2}.$$

Zauważmy teraz, że lewa strona jest równa pewnej funkcji  $G(t)$ , a prawa pewnej funkcji  $F(z)$ . Aby powyższa równość zachodziła dla dowolnych  $z, t$  musimy mieć

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} = \frac{c^2}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = -\omega^2,$$

gdzie  $\omega$  jest pewną stałą. Otrzymujemy zatem układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \omega^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi &= 0 \end{aligned}.$$

Oznaczając  $k := \omega/c$  otrzymujemy oczywiście

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ \Psi(z) &= C \sin kz + D \cos kz \end{aligned}.$$

Funkcja  $f(z, t) = \Phi(t)\Psi(z)$  spełnia zatem równanie falowe dla  $\Phi, \Psi$  danych powyżej. Nie jest to jednak rozwiązanie ogólne, gdyż w ogólności nie spełnia warunków brzegowych (tj. zadania wartości funkcji dla określonych  $z_1, z_2, \dots$ ) ani warunków początkowych (tj. zadania kształtu  $f(z, 0) = f_0(z)$  i początkowych prędkości  $\frac{\partial f}{\partial t}(z, 0) = \dot{f}_0(z)$ ). Okazuje się jednak, iż dla konkretnych problemów powyższe rozwiązanie pozwala skonstruować rozwiązanie ogólne.

### 1.12.3 Fale tłumione

Zanim przejdziemy do rozwiązywania zagadnienia fal w strunie o skończonej długości, podamy równanie falowe z liniowym członem tłumiącym. Istotnie zakładając, iż siła oporu działająca na strunę (np znajdującą się w lepkim ośrodku) jest wprost proporcjonalna do  $\frac{\partial f}{\partial t}$  otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

gdzie  $\gamma$  jest współczynnikiem oporu i będziemy oznaczać  $2\beta := \gamma/\mu$ .

### 1.12.4 Rozwiązanie równania falowego dla struny o skończonej długości zamocowanej z obu stron

Jak łatwo sprawdzić metoda separacji zmiennych dla równania falowego z tłumieniem daje rozwiązanie (które będziemy oznaczać przez  $f_n(z, t)$ )

$$f_n(z, t) = (a_n \sin k_n z + b_n \cos k_n z) e^{-\beta t} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t),$$

gdzie  $\omega_n = \sqrt{k_n^2 c^2 - \beta^2}$ . Dla struny o długości  $L$  zamocowanej z obu stron warunkiem brzegowym jest  $f(0, t) = f(L, t) = 0$ . Powyższa funkcja spełnia ten warunek, jeśli tylko  $b_n = 0$  i  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Widzimy, zatem, że funkcja

$$f_n(t) = e^{-\beta t} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t)$$

spełnia równanie falowe i warunki brzegowe. Nie spełnia jednak w ogólności warunków początkowych. Zauważmy jednak, że ze względu na liniowość równania falowego również funkcja

$$f(z, t) = e^{-\beta t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t)$$

spełnia równanie falowe, przy jednoczesnym spełnieniu warunków brzegowych  $f(0, t) = f(L, t) = 0$ . Ta funkcja pozwala nam jednak spełnić warunki początkowe przy odpowiednim wyborze współczynników  $A_n, B_n$ . Istotnie dla  $t = 0$

$$f(z, 0) = f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right).$$

Dowolną sensowną funkcję  $f_0(z)$  określoną w  $[0; L]$  można jednak przedstawić w tej postaci, na mocy twierdzenia Fouriera. Współczynniki  $B_n$  są dane wzorem

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz.$$

Analogicznie mamy

$$\dot{f}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n A_n - \beta B_n) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right),$$

skąd

$$A_n = B_n \frac{\beta}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \dot{f}_0(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz,$$

gdzie

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \beta^2}.$$

Oczywiście zakładamy tutaj, iż  $\frac{\pi c}{L} > \beta$ .

### 1.12.5 Przenoszenie energii

Fale mechaniczne przenoszą energię bez transportu energii. Moc fali sinusoidalnej można obliczyć korzystając ze wzoru  $P = F_y \frac{\partial y}{\partial t}$ , skąd mamy

$$P = T \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

co dla fali sinusoidalnej  $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$  daje

$$P = -Tk\omega A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta) = -\mu c\omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta).$$

Wartość średnia z  $|P|$  wynosi

$$\langle |P| \rangle = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 A^2,$$

a natężenie fali  $I$

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 A^2.$$

### 1.12.6 Interferencja

Ponieważ rozwiązaniami równania falowego w postaci sinusoidalnej są funkcje  $\psi_{++}$ ,  $\psi_{--}$ ,  $\psi_{+-}$ ,  $\psi_{-+}$  i jest to równanie liniowe, więc również superpozycje tych funkcji są rozwiązaniami równania falowego. Dodając do siebie dowolne trzy z wymienionych funkcji dostajemy jedną z tych funkcji, nie jest to więc interesujący przypadek. Dodając do siebie wszystkie funkcje otrzymujemy  $\psi = 0$  co również nie jest interesujące. Interesujące natomiast są sumy (przyjmujemy, że dla wszystkich funkcji  $A$ ,  $\delta$ ,  $\omega$  i  $k$  są takie same):

$$\begin{aligned} \psi_{++} + \psi_{+-} &= 2A \cos(kx + \delta) \cos \omega t \\ \psi_{++} + \psi_{-+} &= 2A \cos kx \cos(\omega t + \delta) \\ \psi_{--} + \psi_{+-} &= 2A \cos kx \cos(\omega t - \delta) \\ \psi_{--} + \psi_{-+} &= 2A \cos(kx - \delta) \cos \omega t \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli  $\delta = 0$  to wszystkie te sumy dają wyrażenie  $2A \cos kx \cos \omega t$ . Fale opisane tymi równaniami to tzw. *fale stojące*. Ich cechą jest to, że się nie poruszają, tzn. są punkty  $x$  dla których  $y(t) = 0$ . Dla  $\delta = 0$  te punkty wyznacza równanie  $\cos kx = 0$ , zatem są to punkty o współrzędnej  $x$  równej  $\lambda/4$ ,  $3\lambda/4$ , ... . W strunie o długości  $L$  zamocowanej po obu stronach mogą zatem powstać fale stojące o długościach

$$\lambda_n = \frac{2L}{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

W strunie (pręcie) zamocowanej tylko z jednej strony mogą powstać fale stojące o długościach

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 1.12.7 Dudnienia

Fale stojące są przykładem tzw. interferencji w przestrzeni, ale istnieje również interferencja w czasie. Rozpatrzmy złożenie drgań  $x_1(t) = A \sin \omega_1 t$  i  $x_2(t) = A \sin \omega_2 t$

$$x_1 + x_2 = 2A \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) = A(t) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right).$$

Ponieważ  $I \propto A^2$ , więc obliczmy  $A^2(t)$

$$A^2(t) = 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) = 2A^2 + 2A^2 \cos\{(\omega_1 - \omega_2)t\}.$$

Częstość  $\omega_{\text{mod}} = \omega_1 - \omega_2$  nazywamy częstością modulacji głośności (modulacji dudnień).

### 1.12.8 Efekt Dopplera

Zjawisko Dopplera polega na pozornej zmianie częstotliwości odbieranej fali na skutek wzajemnego ruchu obserwatora lub/i źródła. Częstotliwość  $f'$  odbierana przez obserwatora jest dana wzorem

$$f' = f \left( \frac{c_{\text{ef}} + v_o \cos \theta_o}{c_{\text{ef}} - v_z \cos \theta_z} \right),$$

gdzie  $c_{\text{ef}}$  jest efektywną prędkością dźwięku (prędkością dźwięku modyfikowaną składową prędkości wiatru wzdłuż odcinka łączącego obserwatora ze źródłem)

$$c_{\text{ef}} = c + \mathbf{v}_{\text{wind}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{zo},$$

$v_o$  jest szybkością obserwatora,  $v_z$  jest prędkością źródła,  $\theta_o$  jest kątem między wektorem prędkości obserwatora a odcinkiem łączącym obserwatora ze źródłem,  $\theta_z$  jest kątem między wektorem prędkości źródła a odcinkiem łączącym obserwatora ze źródłem.

## 1.13 Szczególna teoria względności

*The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.*

Hermann Minkowski

### 1.13.1 Postulaty

Przed rozważeniem głównych idei szczególnej teorii względności Einsteina–Poincarégo–Lorentza przedyskutujmy podstawowe idee oraz poglądy ontologiczne, które leżą u fundamentów klasycznej mechaniki, a które zwykle przyjmujemy intuicyjnie.

- *Ciągłość czasu i przestrzeni.* Zarówno w mechanice nierelatywistycznej, jak i relatywistycznej zakładamy, iż przestrzeń oraz czas mają budowę ciągłą.
- *Względność przestrzeni.* W mechanice nierelatywistycznej zauważamy, iż pojęcie położenia danego obiektu  $A$  nie ma sensu, jeżeli nie podamy obiektu  $B$  względem którego określamy owo położenie.
- *Absolutność czasu.* W mechanice nierelatywistycznej przyjmujemy, iż czas jest absolutnym i uniwersalnym parametrem, który zmienia się jednakowo dla wszystkich obserwatorów inercjalnych.
- *Jednorodność czasu i przestrzeni.* Zarówno w mechanice nierelatywistycznej, jak i relatywistycznej zakładamy, iż czas i przestrzeń są jednorodne, tzn. nie istnieją wyróżnione położenia, ani chwile czasu.

*Zasada względności.* Już Galileusz zapostulował niemożliwość odróżnienia dwóch inercjalnych układów odniesienia za pomocą jakichkolwiek doświadczeń mechanicznych. Oznacza to, że zakładamy, iż prawa mechaniki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia w ich zwyczajnej formie. Einstein rozszerzył owy postulat proponując, iż wszystkie prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Z zasady względności wynika, iż jeśli ciało  $A$  porusza się względem ciała  $B$  z prędkością  $\mathbf{V}$  to z perspektywy ciała  $A$ , ciało  $B$  porusza się z prędkością  $-\mathbf{V}$ . Istotnie gdyby tak nie było, wówczas istniałby pewien wyróżniony kierunek w przestrzeni, za pomocą którego moglibyśmy odróżnić dwa układy inercjalne. Obserwacja ta jest słuszna zarówno w mechanice nierelatywistycznej, jak i w STW.

Mechanika nierelatywistyczna wraz z wymienionymi wcześniej założeniami zakłada również, iż oddziaływania rozchodzą się w sposób natychmiastowy. Istotnie chociażby siła z jaką przyciągają się dwa masywne ciała zależy jedynie od aktualnego położenia tych ciał. Z doświadczenia wynika jednak, iż istnieje graniczna prędkość rozchodzenia się oddziaływań równa prędkości światła w próżni

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Prędkość ta jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Z tego względu w STW postulujemy absolutność prędkości światła w próżni. Szczególna teoria względności opiera się zatem na dwóch postulatach:

- *Zasada względności.* Wszystkie prawa fizyki są nieimiennicze we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.
- *Absolutność prędkości światła.* Graniczna prędkość rozchodzenia się oddziaływań jest jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia i równa prędkości światła w próżni  $c$ .

### 1.13.2 Układ odniesienia

*Układem odniesienia* nazywamy punkt  $O$  wybrany w taki sposób, iż jest on nieruchomy względem pewnego ciała  $A$  wraz z układem współrzędnych kartezjańskich  $(x_1, x_2, x_3)$  o początku  $O$  i sposobem mierzenia czasu  $t$ .

Zastanówmy się, w jaki sposób w danym układzie odniesienia mierzymy owe parametry. Istotnie potrzeba nam do tego nieskończenie wielu pomocników wyposażonych w zsynchronizowane zegary. W każdym punkcie  $(x_p, y_p, z_p)$  umieszczamy pomocnika wyposażonego w zegar, który wcześniej został zsynchronizowany ze wszystkimi innymi zegarami (np. poprzez przesłanie sygnału świetlnego). Jeśli pewne zdarzenie zajdzie w  $(x, y, z)$  to pomocnik umieszczony w tym punkcie zarejestruje je natychmiast w pewnej chwili  $t$ . Porozumiewając się następnie ze wszystkimi pomocnikami możemy ustalić, iż w punkcie  $(x, y, z)$  w chwili  $t$  zaszło dane zdarzenie. Taki sposób pomiaru niweluje problemy związane ze skończoną prędkością światła, a tym samym opóźnieniem między rzeczywistą chwilą wystąpienia danego zdarzenia, a chwilą, w której obserwator umieszczony z dala od tego zdarzenia je zarejestruje.

Synchronizację zegarów można również przeprowadzić w inny sposób. Główny obserwator  $O$  wzywa swoich pomocników do siebie, gdzie wszyscy synchronizują swoje zegary, a następnie każdy z pomocników udaje się na przydzieloną mu pozycję, poruszając się bardzo wolno (w granicy nieskończenie wolno). Istotnie wówczas

różnica między wskazaniem zegara głównego obserwatora, a pomocnika oddalonego od niego o  $r$  wynosi

$$\Delta t = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{r}{\beta c} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right) = 0,$$

czyli zegary są zsynchronizowane.

### 1.13.3 Czasoprzestrzeń

*Czasoprzestrzeń* definiujemy jako zbiór wszystkich możliwych punktów  $(x_1, x_2, x_3, ct)$  mierzonych w danym inercjalnym układzie odniesienia  $S$ , przy czym będziemy czasami oznaczać  $x_4 := ct$ . Dowolny punkt w czasoprzestrzeni nazywamy *zdarzeniem*. Zdarzenie to dowolny „efekt” występujący w rzeczywistości fizycznej, któremu jednoznacznie można przypisać położenie  $\mathbf{x}$  i chwilę wystąpienia  $ct$ . Wielkość

$$x := (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, x_4)$$

nazywamy *czterowektorem położenia* zdarzenia w czasoprzestrzeni. Krzywą  $x(t) = (\mathbf{x}(t), ct)$  określaną przez punkt w czasoprzestrzeni nazywamy *linią świata*.

### 1.13.4 Transformacja Galileusza

Interesującym nas zagadnieniem jest znalezienie transformacji  $\Lambda$  takiej, że

$$x' = \Lambda x,$$

gdzie  $x'$  jest czterowektorem położenia danego zdarzenia mierzonym względem inercjalnego układu odniesienia poruszającego się względem  $S$  z prędkością  $[V, 0, 0]$ . W mechanice nierelatywistycznej transformacją tą (dla *standardowego pchnięcia galileuszowskiego*) jest transformacja Galileusza

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo się jednak przekonać nie spełnia ona postulatu o absolutności prędkości światła. Okazuje się, że prawidłową transformacją jest transformacja Lorentza, jednak jak się przekonamy dla  $V \ll c$  przechodzi ona w transformację Galileusza, zatem dla typowych prędkości na Ziemi transformacja Galileusza jest wystarczającym i niezwykle dogodnym przybliżeniem.

### 1.13.5 Transformacja Lorentza

Jako punkt wyjścia do STW przyjmijmy wzory transformacyjne transformacji Lorentza. Nie będziemy tutaj przedstawiać różnorodnych możliwych heurystycznych lub innych wyprowadzeń owych wzorów. Przedstawimy je po prostu jako punkt wyjścia do dalszych rozważań. Niech  $(x_1, x_2, x_3, ct)$  oznaczają współrzędne pewnego zdarzenia w pewnym inercjalnym układzie odniesienia  $S$ , a  $(x'_1, x'_2, x'_3, ct')$  współrzędne tego zdarzenia w układzie  $S'$ . Zakładamy tutaj oczywiście, zgodnie z zasadą względności, że jeśli dane zdarzenie zaszło w  $S$  to musiało również zajść w  $S'$ .

Rozważmy tzw. *standardowe pchnięcie lorentzowskie*, tj. zakładamy, iż osie przestrzenne układów  $S$  i  $S'$  są równoległe i tak samo skierowane, w chwili  $t = 0$  zachodzi  $t' = 0$  i  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$  oraz układ  $S'$  porusza się względem  $S$  wzdłuż osi  $x_1$  ze stałą prędkością  $[V, 0, 0]$ , wówczas zależność między współrzędnymi czasoprzestrzennymi dowolnego zdarzenia w  $S$  i  $S'$  ma postać

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

gdzie zachodzą związki

$$\beta(V) := \frac{V}{c}, \quad \gamma(V) := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(V)}}.$$

Wynik ten możemy zapisać w bardziej zwarty sposób jeśli wprowadzimy tzw. *macierz standardowego pchnięcia*  $\Lambda$

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{bmatrix},$$

wówczas  $x' = \Lambda x$ . Łatwo sprawdzić, iż dla  $V \ll c$  mamy  $\beta \approx 0$  i  $\gamma \approx 1$  zatem  $\Lambda \approx \Lambda_0$ . Okazuje się, że dowolną transformację Lorentza możemy przedstawić jako złożenie przestrzennego obrotu osi  $(x_1, x_2, x_3)$  i standardowego pchnięcia w pewnym kierunku  $\mathbf{e}$ .

### 1.13.6 Czerowektory i czteroskalary

Wprowadziliśmy już czerowektor położenia  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . W ogólności czerowektorem  $q$  nazywamy zespół czterech wielkości  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$ , które przy przechodzeniu do poruszających się, inercjalnych układów odniesienia transformują się



tak jak czterowektor położenia, tj.

$$q' = \Lambda q.$$

Definiujemy iloczyn dwóch czterowektorów  $p$  i  $q$  jako wielkość

$$p \cdot q := p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_4 q_4.$$

Wielkość, która jest niezmiennicza względem transformacji Lorentza nazywamy *skalarem lorentzowskim* (lub *czteroskalarem*). Iloczyn dowolnych dwóch czterowektorów jest skalarą lorentzowskim. Istotnie dowolną transformację Lorentza można przedstawić jako przestrzenny obrót i standardowe pchnięcie w pewnym kierunku. Przestrzenny obrót oczywiście nie zmienia wartości iloczynu dwóch czterowektorów, gdyż (jak łatwo sprawdzić) obrót w przestrzeni 3D nie zmienia iloczynu skalarnego dwóch wektorów  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{q}$ . Pozostaje zatem pokazać, iż standardowe pchnięcie nie zmienia wartości iloczynu dwóch czterowektorów. Istotnie mamy

$$\begin{aligned} p' \cdot q' &= \gamma^2 (q_1 - \beta q_4)(p_1 - \beta p_4) + q_2 p_2 + q_3 p_3 - \gamma^2 (q_4 - \beta q_1)(p_4 - \beta p_1) \\ &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_4 q_4 = p \cdot q. \end{aligned}$$

Często, aby udowodnić, iż dana wielkość  $k$  jest czterowektorem korzystamy z *reguły ilorazowej*:

- Niech  $k$  oznacza zespół pewnych czterech wielkości  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ , a  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  czterowektor położenia. Jeśli  $\psi := k \cdot x$  jest czteroskalarem, to  $k$  jest czterowektorem.
- Niech  $p, q$  będą pewnymi czterowektorami. Jeśli w każdym inercjalnym układzie odniesienia  $p = \lambda q$  dla pewnej stałej  $\lambda$ , to we wszystkich inercjalnych układach odniesienia  $\lambda = \lambda'$ , czyli  $\lambda$  jest skalarą lorentzowskim.

Zauważmy, że dla dowolnego czterowektora  $q$  zachodzi

$$\frac{q_1 - q'_1}{q_4 + q'_4} = \frac{q_1(1 - \gamma) + \gamma \beta q_4}{q_4(1 + \gamma) - \gamma \beta q_1} = \frac{\beta \gamma}{1 + \gamma} = \frac{V}{c + \sqrt{c^2 - V^2}}$$

### 1.13.7 Transformacja Lorentza jako obrót

Zauważmy, iż transformacja Lorentza  $\Lambda$  jest pewnego rodzaju obrotem w czasoprzestrzeni  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Istotnie ponieważ zawsze  $\gamma(V) > 1$ , więc możemy wprowadzić kąt  $\psi(V)$  zdefiniowany jako

$$\cosh \psi = \gamma(V),$$

skąd od razu mamy

$$\sinh \psi = \sqrt{\cosh^2 \psi - 1} = \sqrt{\gamma^2(V) - 1} = \beta(V)\gamma(V)$$

oraz

$$\tanh \psi = \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} = \beta(V).$$

Parametr ten nazywamy *pospiesznością* (z ang. – *rapidity*). Macierz standardowego pchnięcia możemy zapisać więc jako

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh \psi & 0 & 0 & -\sinh \psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \psi & 0 & 0 & \cosh \psi \end{bmatrix}.$$

Dla porównania wypiszmy macierz przestrzennego obrotu  $\mathbf{R}$  osi  $(x, z)$  wokół  $y$  o kąt  $\psi$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}.$$

Widzimy, iż pomiędzy tymi wzorami występuje silna analogia.

### 1.13.8 Interwał czasoprzestrzenny

Podobnie jak zwykle obroty osi  $(x, y, z)$  w trójwymiarowej przestrzeni nie zmieniają infinitezymalnej długości  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ , również w czasoprzestrzeni  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  interwał czasoprzestrzenny  $ds$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

jest czteroskalarem. Istotnie korzystając z transformacji Lorentza mamy

$$\begin{aligned} ds'^2 &= dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - dx_4'^2 \\ &= \gamma^2(dx_1 - \beta dx_4)^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - \gamma^2(dx_4 - \beta dx_1)^2 \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = ds^2 \end{aligned}$$

### 1.13.9 Dylatacja czasu i skrócenie Lorentza

- *Dylatacja czasu.* Rozważmy zdarzenie  $Z$  w danym punkcie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , rozpoczynające się w chwili  $t_p$  i kończące w chwili  $t_k$  w układzie odniesienia  $S$ . Czas trwania tego zdarzenia w  $S$  wynosi zatem

$$\Delta t_0 := t_k - t_p.$$

Rozpatrzmy teraz to samo zdarzenie z perspektywy układu  $S'$  powiązanego z  $S$  standardowym pchnięciem lorentzowskim. Zgodnie z transformacją Lorentza, z punktu widzenia  $S'$ ,  $Z$  rozpoczęło się w chwili

$$t'_p = \gamma \left( t_p - \frac{Vx_1}{c^2} \right)$$

i zakończyło w chwili

$$t'_k = \gamma \left( t_k - \frac{Vx_1}{c^2} \right).$$

Względem  $S'$  zdarzenie  $Z$  trwało więc

$$\Delta t' := t'_k - t'_p = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \Delta t_0.$$

Z tego powodu poruszające się zegary będą się spóźniać.

- *Skrócenie Lorentza.* Rozpatrzmy pręt umieszczony na osi  $x_1$  i poruszający się względem układu  $S$  z prędkością  $V$ . Załóżmy, iż w chwili  $t$  współrzędne końców pręta to  $(x_1^A, 0, 0)$  i  $(x_1^B, 0, 0)$ . Długość pręta mierzona w układzie  $S$  wynosi więc

$$L := x_1^B - x_1^A.$$

Rozważmy teraz układ  $S'$  powiązany z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością  $V$ . Oczywiście w tym układzie odniesienia pręt jest nieruchomy, zatem w chwili  $t$  współrzędne jego końców są dane przez

$$x_1^{A'} = \gamma(x_1^A - Vt), \quad x_1^{B'} = \gamma(x_1^B - Vt).$$

Długość spoczywającego pręta wynosi zatem

$$L_0 = x_1^{B'} - x_1^{A'} = \gamma L,$$

skąd otrzymujemy, iż długość poruszającego się pręta wynosi

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < L_0.$$

Jak łatwo pokazać jeśli pręt o długości spoczynkowej  $L_0$  porusza się z prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x_1$  i jest nachylony pod kątem  $\theta_0$  do osi  $x_1$  w układzie odniesienia, w którym jest stacjonarny to w układzie odniesienia, w którym się porusza

$$L = L_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \frac{1}{\gamma^2} \cos^2 \theta_0} = L_0 \sqrt{1 + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 + \tan^2 \theta}},$$

przy czym

$$\tan \theta = \gamma \tan \theta_0.$$

- *Względność równoczesności.* Rozważmy dwa zdarzenia  $A, B$ , które w układzie  $S$  zachodzą odpowiednio w punktach  $(d, 0, 0)$  i  $(-d, 0, 0)$  równocześnie w chwili  $t = d/c$ . Wyznamy miejsca tych zdarzeń i chwile ich wystąpienia w układzie  $S'$  powiązanym z  $S$  standardowym pchnięciem lorentzowskim z prędkością  $-V$ . Zgodnie z transformacją Lorentza mamy

$$\begin{aligned} x'_A &= \gamma(-V) \left( d + \frac{Vd}{c} \right), & t'_A &= \gamma(-V) \left( \frac{d}{c} + \frac{Vd}{c^2} \right) \\ x'_B &= \gamma(-V) \left( -d + \frac{Vd}{c} \right), & t'_B &= \gamma(-V) \left( \frac{d}{c} - \frac{Vd}{c^2} \right) \end{aligned} .$$

Widzimy, iż pomimo faktu równoczesności zdarzeń  $A$  i  $B$  w układzie  $S$ , w układzie  $S'$  zdarzenia te nie są równoczesne. Jedno poprzedza drugie o

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = \frac{2\gamma V d}{c^2} .$$

#### 1.13.10 Pozorne obrazy szybko poruszających się obiektów

Rozważmy pręt o długości spoczynkowej  $L_0$  poruszający się wzdłuż osi  $x_1$  z prędkością  $V$ . Niech  $O(\xi, \eta)$  oznacza punkt, w którym znajduje się obserwator. Oczywiście zgodnie ze wzorem na skrócenie Lorentza **dokładne pomiary** (wykonane np. przez nieskończenie wielu pomocników  $O$ ) **pokażą, iż w układzie obserwatora  $O$  długość pręta wynosi  $L_0/\gamma(V)$** . Obserwator **zobaczy** jednak co innego. Istotnie to, co zobaczy to światło docierające do  $O$ . Niech  $\chi_A(t)$  oznacza położenie  $x_1$  końca  $A$  pręta, a  $\chi_B(t)$  położenie końca  $B$ . Oczywiście zachodzi

$$\chi_B - \chi_A = \frac{L_0}{\gamma(V)} .$$

Obserwator zobaczy pręt o długości  $L_0/\gamma + \Delta L$ , gdzie  $\Delta L$  jest dane przez

$$\sqrt{\eta^2 + (\xi - \chi_A)^2} = \beta^{-1}(V)\Delta L + \sqrt{\eta^2 + \left( \xi - \chi_A - \frac{L_0}{\gamma} - \Delta L \right)^2} .$$

Dla  $\eta \approx 0$  i pręta zbliżającego się do obserwatora ( $\xi > \chi_B + \Delta L$ ) otrzymujemy

$$\Delta L = \frac{L_0}{\gamma(V)} \frac{1}{\beta^{-1}(V) - 1} ,$$

skąd

$$L_{\text{app}} = \frac{L_0}{\gamma} + \Delta L = L_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > L_0 .$$

Z kolei dla pręta oddalającego się od obserwatora mamy

$$0 = \beta^{-1} \Delta L + \frac{L_0}{\gamma} + \Delta L,$$

skąd

$$L_{\text{rec}} = L_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

### 1.13.11 Relatywistyczny wzór na dodawanie prędkości

Rozważmy cząstkę poruszającą się w układzie  $S$  z prędkością

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3] := \left[ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right].$$

Chcemy znaleźć wyrażenie na prędkość cząstki  $\mathbf{v}'$  w układzie  $S'$  powiązanym z  $S$  standardowym pchnięciem lorentzowskim z prędkością  $V$ . Oczywiście w układzie  $S'$  mamy

$$\mathbf{v}' = \left[ \frac{dx'_1}{dt'}, \frac{dx'_2}{dt'}, \frac{dx'_3}{dt'} \right],$$

gdzie zgodnie z transformacją Lorentza mamy

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \gamma(dx_1 - V dt) \\ dx'_2 &= dx_2 \\ dx'_3 &= dx_3 \\ dt' &= \gamma \left( dt - \frac{V dx_1}{c^2} \right) \end{aligned},$$

zatem

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 - V}{1 - \frac{V v_1}{c^2}} \\ v'_2 &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_2}{1 - \frac{V v_1}{c^2}} \\ v'_3 &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_3}{1 - \frac{V v_1}{c^2}} \end{aligned}.$$

Zauważmy przy tym, iż w granicy  $c \rightarrow \infty$  otrzymujemy klasyczny wzór na składanie prędkości

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 - V \\ v'_2 &= v_2 \\ v'_3 &= v_3 \end{aligned}.$$

## Włóczenie Fresnela

Jako niezwykle piękne zastosowanie uzyskanych wzorów na relatywistyczne dodawanie prędkości rozważmy dwa układy odniesienia  $S$  i  $S'$ , przy czym układ  $S'$  jest powiązany z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością  $\pm V$ . Załóżmy, że względem  $S'$  pewien sygnał propaguje z prędkością  $[c/n, 0, 0]$ , gdzie  $n \geq 1$ . Wówczas, zgodnie z relatywistycznym wzorem na dodawanie prędkości, względem  $S$  sygnał ten propaguje wzdłuż osi  $x_1$  z szybkością

$$v = \frac{\frac{c}{n} \pm V}{1 \pm \frac{V}{cn}} = \frac{c}{n} \pm fV,$$

gdzie  $f$  nazwiemy historycznie *współczynnikiem włóczenia Fresnela* i oczywiście

$$f = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 \pm \frac{\beta}{n}},$$

gdzie  $\beta = V/c$ . Dla  $V \ll c$  mamy oczywiście

$$f \approx 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Jeśli zidentyfikujemy teraz propagujący sygnał jako światło biegnące w wodzie (o współczynniku załamania światła  $n$ ), która względem układu laboratoryjnego ( $S$ ) porusza się z prędkością  $\pm V$  to otrzymujemy niezwykle proste wyjaśnienie doświadczenia Fizeau.

## Trzy układy odniesienia i pospieszność

Rozważmy trzy inercjalne układy odniesienia  $S, S', S''$ . Układ  $S'$  jest powiązany z  $S$  standardowym pchnięciem lorentzowskim z prędkością  $V_1$ . Natomiast układ  $S''$  jest powiązany z  $S'$  standardowym pchnięciem z prędkością  $V_2$ . Chcemy znaleźć prędkość  $V$  standardowego pchnięcia, z jakim powiązany jest układ  $S''$  z  $S$ . Z relatywistycznego wzoru na dodawanie prędkości mamy oczywiście

$$V_2 = \frac{V - V_1}{1 - \frac{VV_1}{c^2}},$$

skąd otrzymujemy

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}.$$

Zauważmy, iż jeśli wprowadzimy pospieszności  $\psi, \psi_1, \psi_2$  to mamy

$$\tanh \psi = \frac{V}{c}, \quad \tanh \psi_1 = \frac{V_1}{c}, \quad \tanh \psi_2 = \frac{V_2}{c},$$

skąd

$$\tanh \psi = \frac{\tanh \psi_1 + \tanh \psi_2}{1 + \tanh \psi_1 \tanh \psi_2} = \tanh(\psi_1 + \psi_2),$$

zatem

$$\psi = \psi_1 + \psi_2.$$

### 1.13.12 Relatywistyczny efekt Dopplera

Rozpatrzmy źródło  $Z$  poruszające się wzdłuż osi  $x_1$  z prędkością  $V$ , które emituje w kierunku obserwatora  $O$  falę świetlną  $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ . Wektor falowy  $\mathbf{k}$  jest skierowany zgodnie z odcinkiem  $ZO$  i tworzy kąt  $\theta$  z osią  $x_1$ . Wprowadźmy czterowektor falowy

$$k := \left( \mathbf{k}, \frac{\omega}{c} \right).$$

Taka wielkość jest czterowektorem, gdyż faza fali  $\phi = k \cdot x$  z całą pewnością jest czteroskalarem. W układzie odniesienia obserwatora  $S$  mamy zatem

$$k_4 = \frac{\omega}{c}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}, \quad k_1 = |\mathbf{k}| \cos \theta.$$

W układzie  $S'$  powiązanym z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością  $V$  mamy natomiast

$$k'_4 = \frac{\omega_0}{c} = \gamma(k_4 - \beta k_1) = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta),$$

skąd

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}.$$

Wzór ten opisuje relatywistyczny efekt Dopplera dla światła, który objawia się zmianą częstotliwości (koloru) docierającego do obserwatora światła, gdy źródło się porusza. W szczególnym przypadku dla  $\cos \theta = \pm 1$  (tj.  $\theta = 0$  lub  $\theta = \pi$ ) otrzymujemy

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \mp \beta},$$

gdzie minus odpowiada sytuacji, gdy źródło zbliża się do obserwatora, a plus – gdy się od niego oddala. Zauważmy, iż relatywistyczny efekt Dopplera występuje nawet dla  $\theta = \frac{\pi}{2}$  w przeciwieństwie do klasycznego odpowiednika tego efektu. Dla tej wartości kąta i  $V = 0.2c$  otrzymujemy

$$\Delta\omega := \omega_0 - \omega = \omega_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \approx 0.02 \omega_0$$

### 1.13.13 Czas własny cząstki materialnej

Rozważmy cząstkę poruszającą się względem układu  $S$  z prędkością

$$\mathbf{v} = \left[ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right].$$

Zdefiniujmy wielkość  $d\tau$

$$c^2 d\tau^2 = \frac{c^2 dt^2}{\gamma^2(|\mathbf{v}|)} = dt^2 \left\{ c^2 - \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right\} = -ds^2,$$

ponieważ interwał czasoprzestrzenny  $ds$  jest czteroskalarem, więc tak zdefiniowana wielkość również jest czteroskalarem. Wielkość tą nazywamy *czasem własnym cząstki materialnej*.

#### Czteroprędkość.

Czas własny posłuży nam do zdefiniowania czterowektora prędkości (*czteroprędkości*). Istotnie ponieważ  $dx$  jest czterowektorem i  $d\tau$  jest czteroskalarem, więc (oznaczając  $|\mathbf{v}| = v$ )

$$u := \frac{dx}{d\tau} = (\gamma(v)\mathbf{v}, \gamma(v)c)$$

jest czterowektorem. Korzystając zatem z faktu, iż dowolny czterowektor transformuje się zgodnie z transformacją Lorentza możemy alternatywnie wyprowadzić relatywistyczny wzór na dodawanie prędkości. Istotnie mamy

$$u'_4 = \gamma(u_4 - \beta u_1),$$

gdzie  $\gamma$  bez argumentu  $\gamma()$  oznacza  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , skąd

$$\gamma(v') = \gamma\gamma(v) \left( 1 - \frac{Vv_1}{c^2} \right).$$

Z powyższego zatem

$$\begin{aligned} u'_1 &= \gamma(v')v'_1 = \gamma(u_1 - \beta u_4) = \gamma\gamma(v)(v_1 - V) \\ u'_2 &= \gamma(v')v'_2 = u_2 = \gamma(v)v_2 \\ u'_3 &= \gamma(v')v'_3 = u_3 = \gamma(v)v_3 \end{aligned},$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 - V}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} \\ v'_2 &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_2}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} \\ v'_3 &= \frac{1}{\gamma} \frac{v_3}{1 - \frac{Vv_1}{c^2}} \end{aligned},$$



w zgodzie z wcześniej wyprowadzonymi wzorami.

Poniżej podamy kilka użytecznych związków. Z definicji czteroprędkości mamy od razu

$$u \cdot u = \frac{1}{1 - \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{c^2}} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - c^2) = -c^2.$$

Ponieważ wiemy, że iloczyn dowolnych dwóch czterowektorów jest czteroskalarą, więc w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia  $u \cdot u = -c^2$ . Rozpatrzmy teraz iloczyn dwóch różnych czterowektorów  $u_1 = \gamma_1(\mathbf{v}, c)$  i  $u_2 = \gamma_2(\mathbf{w}, c)$

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= \gamma_1 \gamma_2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - c^2) = -c^2 \frac{c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\sqrt{(c^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - c^2(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2}} \\ &= \frac{-c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c^2}} \right)^2}} = \frac{-c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{wzg}}^2}{c^2}}} = -\gamma_{\text{wzg}} c^2. \end{aligned}$$

#### 1.13.14 Obrót Thomasa–Wignera

Rozważmy trzy cząstki  $A, B, C$ . Cząstka  $B$  porusza się względem cząstki  $A$  wzdłuż prostej  $AB$  z prędkością  $v$ . Natomiast cząstka  $C$  porusza się względem cząstki  $B$  wzdłuż prostej prostopadłej do  $AB$  z prędkością  $v'$ . Chcemy wyznaczyć prędkość  $\mathbf{u}$  cząstki  $C$  względem  $A$ . Z relatywistycznego wzoru na dodawanie prędkości mamy

$$\begin{aligned} u'_{\parallel} &= \frac{u_{\parallel} - v}{1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}} = 0 \\ u'_{\perp} &= \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\perp}}{1 - \frac{u_{\parallel} v}{c^2}} = v' \end{aligned},$$

skąd otrzymujemy

$$u_{\parallel} = v, \quad u_{\perp} = \frac{v'}{\gamma},$$

gdzie  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ . Cząstka  $C$  porusza się zatem względem cząstki  $A$  z szybkością

$$u = \sqrt{v^2 + v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{c^2}},$$

wzdłuż prostej  $AC$  nachylonej pod kątem

$$\theta = \arctan \frac{v'}{\gamma v}$$

do prostej  $AB$ . Wyznamy teraz prędkość  $\mathbf{w}$  cząstki  $A$  względem  $C$ . Względem  $C$  cząstka  $B$  porusza się z prędkością  $-v'$  wzdłuż prostej prostopadłej do  $AB$ , natomiast  $A$  porusza się względem  $B$  z prędkością  $-v$  wzdłuż  $AB$ . Z relatywistycznego wzoru na dodawanie prędkości mamy zatem

$$\begin{aligned} w'_{\parallel} &= \frac{1}{\gamma'} \frac{w_{\parallel}}{1 + \frac{w_{\perp} v'}{c^2}} = -v \\ w'_{\perp} &= \frac{w_{\perp} + v'}{1 + \frac{w_{\perp} v'}{c^2}} = 0 \end{aligned} ,$$

skąd otrzymujemy

$$w_{\parallel} = -\frac{v}{\gamma'} , \quad w_{\perp} = -v' ,$$

gdzie  $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$ . Cząstka  $A$  porusza się zatem względem cząstki  $C$  z szybkością

$$w = \sqrt{v^2 + v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{c^2}} = u ,$$

wzdłuż prostej  $CA$  nachylonej pod kątem

$$\theta' = \arctan \frac{\gamma' v'}{v}$$

do prostej prostopadłej do  $BC$ . Widzimy więc, że w ogólności  $\theta \neq \theta'$ , ale prędkość cząstki  $C$  względem  $A$  mierzona wzdłuż prostej  $AC$  jest równa prędkości cząstki  $A$  względem  $C$  mierzonej wzdłuż prostej  $CA$ . Obrót o kąt  $\phi$  zdefiniowany jako

$$\phi := \theta' - \theta = \arctan \frac{\gamma' v'}{v} - \arctan \frac{v'}{\gamma v} ,$$

nazywamy *obrotom Wignera*. Możemy podać bardziej eleganckie wyrażenie na kąt  $\phi$ . Istotnie

$$\tan \phi = \frac{\frac{\gamma' \beta'}{\beta} - \frac{\beta'}{\gamma \beta}}{1 + \frac{\gamma' \beta'^2}{\gamma \beta^2}} = \frac{\beta \beta' (\gamma \gamma' - 1)}{\beta^2 \gamma + \beta'^2 \gamma'^2} ,$$

ale  $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$ , zatem

$$\tan \phi = \frac{\beta \beta' (\gamma \gamma' - 1)}{\gamma + \gamma' - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}} = \frac{\beta \beta' \gamma \gamma'}{\gamma + \gamma'} .$$

Dla  $v' = \delta v' \ll 1$  mamy

$$\tan \theta = \frac{\delta v'}{\gamma v} \approx \theta , \quad \tan \theta' = \frac{\delta v'}{v \sqrt{1 - \frac{\delta v'^2}{c^2}}} \approx \frac{\delta v'}{v} \approx \theta' ,$$

skąd

$$\delta\phi \approx \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta v'}{v}.$$

Jeśli dodatkowo chcemy wyrazić  $\delta\phi$  tylko przez wielkości mierzone w układzie  $A$  to musimy podstawić  $\delta v' = \gamma \delta v$  i otrzymujemy

$$\delta\phi = (\gamma-1) \frac{\delta v}{v} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v \delta v}{c^2}.$$

Zauważmy również, że w granicy  $\delta v' \ll 1$  kąt  $\delta\phi$  jest równy różnicy kątów pod jakimi prosta  $AC$  jest nachylona do prostej  $AB$  odpowiednio względem układu  $A$  i  $B$ .

### Obrót wektora

Rozważmy teraz cztery cząstki  $A, B, C, D$ , przy czym cząstka  $D$  również porusza się względem  $B$  prostopadłe do  $AB$  z prędkością  $v'$  i wektor  $CD$  jest równoległy do prostej  $AB$  (względem  $B$ ). Niech

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = t \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} x = L \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = t \end{array} \right.$$

będą odpowiednio współrzędnymi czasoprzestrzennymi zdarzeń polegających na przecięciu prostej  $y = 0$  przez cząstki  $C, D$  mierzonych w układzie  $B$  (przyjmujemy tutaj oś  $x$  pokrywającą się z prostą  $AB$  i oś  $y$  prostopadłą do niej). Ponieważ zakładamy, że wektor  $CD$  jest równoległy do  $AB$ , więc cząstki oczywiście przetną ową prostą w tej samej chwili. Zgodnie z transformacją Lorentza w układzie  $A$  zdarzenia te zaszły natomiast w

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma vt \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \gamma t \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(L + vt) \\ y' = 0 \\ z' = 0 \\ t' = \gamma(t + vL/c^2) \end{array} \right. .$$

Składowe wektora  $CD$  w układzie  $A$  wynoszą zatem

$$L_{\parallel} = \Delta x' - v \Delta t' = \gamma L \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{L}{\gamma}, \quad L_{\perp} = \frac{v'}{\gamma} \Delta t' = \frac{vv' L}{c^2},$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, iż prędkości cząstek  $C, D$  względem  $A$  wynoszą  $[v, v'/\gamma]$ . Z powyższego widzimy zatem, że względem  $A$  wektor  $CD$  jest nachylony do prostej

$AB$  pod kątem  $\tilde{\phi}$  równym

$$\tan \tilde{\phi} = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{vv'}{c^2} = \gamma\beta\beta',$$

a jego długość wynosi

$$L' = \sqrt{L_{\perp}^2 + L_{\parallel}^2} = L\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\gamma'^2}}.$$

Z powyższego widzimy, że wektor  $CD$  równoległy do  $AB$  względem układu odniesienia  $B$ , nie jest równoległy do  $AB$  w układzie odniesienia  $A$ . Jednakże kąt, o jaki jest obrócony, nie jest równy kątowi Wignera. Jak łatwo sprawdzić, jeśli w układzie  $B$  wektor  $CD$  tworzy kąt  $\alpha$  z prostą  $AB$ , to w układzie  $A$  tworzy on kąt

$$\tan \tilde{\phi} = \gamma \tan \alpha + \gamma\beta\beta'$$

z prostą  $AB$ .

### 1.13.15 Dynamika relatywistyczna

Poprzednie rozważania dotyczyły głównie kinematyki relatywistycznej. Teraz przejdziemy do opisu zagadnień dynamicznych.

#### Pojęcie masy w STW

Masę  $m$  cząstki materialnej definiujemy jako czteroskalar, który w układzie spoczynkowym danej cząstki jest równy jej klasycznej masie (którą będziemy także nazywać *masą spoczynkową*).

#### Pęd relatywistyczny

Zdefiniowaliśmy już pojęcie masy w STW jako pewnego czteroskalara oraz czteropędkości  $u$ , naturalnym będzie więc zdefiniowanie *czteropędu* cząstki materialnej, jako iloczynu tych wielkości (oczywiście odpowiednia reguła ilorazowa gwarantuje nam, że iloczyn czteroskalara i czterowektora jest czterowektorem)

$$p = mu = (\gamma(v)m\mathbf{v}, \gamma(v)mc) .$$

Zauważmy tutaj, że składowa przestrzenna czteropędu (będziemy ją również nazywać *trójpędem*  $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$ ) jest równa klasycznemu pędowi  $m\mathbf{v}$  jedynie w granicy  $\gamma \rightarrow 1$ . Czteropęd jest niezwykle użytecznym pojęciem, gdyż okazuje się, że w układzie izolowanym spełniona jest zasada zachowania czteropędu, przy czym całkowity czteropęd  $P$  jest po prostu sumą czteropędów poszczególnych cząstek

materialnych.

**Zasada zachowania czteropędu (czterowektora energii–pędu)**

Jeżeli układ cząstek materialnych jest izolowany, wówczas całkowity czteropęd  $P$  układu jest stały (względem danego układu odniesienia).

**Definicja energii relatywistycznej**

Energię relatywistyczną  $E$  cząstki materialnej o czteropędzie  $p = (\mathbf{p}, p_4)$  definiujemy jako składową czasową czteropędu  $p$  pomnożoną przez prędkość światła w próżni

$$E := cp_4 = \gamma(v)mc^2$$

Przy takiej definicji energii relatywistycznej możemy zapisać

$$p = (\mathbf{p}, \gamma(v)mc) = \left( \gamma(v)m\mathbf{v}, \frac{E}{c} \right).$$

Z tego powodu czteropęd nazywamy również *czterowektorem energii–pędu*. Pokażemy teraz, że tak zdefiniowana  $E$  odpowiada klasycznej energii kinetycznej cząstki o prędkości  $v$ . Istotnie korzystając z rozwinięcia Taylora dla małych  $v/c$  mamy

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Człon stały  $mc^2$  nazywamy *energiją spoczynkową* cząstki materialnej. Istotnie jeśli  $v = 0$  to zgodnie z definicją  $E_0 = mc^2$ . W mechanice klasycznej stała ta nie ma znaczenia, jednak w STW energia jest w pewien sposób określona absolutnie, gdyż tylko dla takiej postaci  $E$  czterowektor energii–pędu jest czterowektorem, czyli prawo zachowania czteropędu jest niezmiennicze względem transformacji Lorentza. Często przydatne są następujące użyteczne związki

$$p \cdot p = -(mc)^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{E^2}{c^2}$$

$$\boldsymbol{\beta} := \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}c}{E}$$

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Dla dowolnych dwóch czterowektorów energii–pędu  $p_a = (\mathbf{p}_a, E_a/c)$  i  $p_b = (\mathbf{p}_b, E_b/c)$  zachodzi

$$p_a \cdot p_b = m_a m_b u_a \cdot u_b = -m_a m_b \gamma_{\text{wzg}} c^2,$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{\text{wzg}} = \frac{\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b}{1 - \frac{\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b}{c^2}}.$$

Zdefiniujmy również *relatywistyczną energię kinetyczną*  $T$  jako wielkość

$$T := E - E_0 = E - mc^2 = (\gamma(v) - 1)mc^2.$$

Korzystając z rozwinięcia Taylora możemy zapisać

$$T \approx \frac{1}{2}mc^2\beta^2 + \frac{3}{8}mc^2\beta^4 + \frac{5}{16}mc^2\beta^6 \dots$$

### 1.13.16 Zderzenia

Zasada zachowania czterowektora energii–pędu pozwala rozwiązywać zagadnienia dotyczące zderzeń relatywistycznych cząstek materialnych. Najłatwiej takie zadania rozwiązywać w *układzie środka czteropędu*, który definiujemy jako układ odniesienia, w którym całkowity trójpęd układu wynosi 0, tj.

$$P = (\mathbf{0}, P_4).$$

Jeśli w pewnym układzie odniesienia  $S$  całkowity czteropęd układu wynosi

$$P = (\mathbf{P}, P_4),$$

to układ środka czteropędu  $S'$  jest powiązany z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathbf{P}}{P_4} = \frac{\mathbf{P}_c}{E}.$$

### Zderzenie centralne

Jako przykład rozwiążmy zagadnienie sprężystego, centralnego zderzenia dwóch cząstek relatywistycznych o masach  $m$  i  $M$ , przy czym przed zderzeniem w układzie laboratoryjnym  $S$  cząstka  $M$  spoczywa, a cząstka  $m$  porusza się z prędkością  $\boldsymbol{\beta} = [\beta, 0, 0]$ , gdzie przyjmujemy oś  $x$  pokrywającą się z prostą łączącą obie cząstki. W układzie  $S$  całkowity czteropęd układu wynosi

$$P = \left( \frac{mc\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}} + Mc \right).$$

Układ środka czteropędu  $S'$  jest powiązany z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością

$$\mathfrak{P} = \frac{m\boldsymbol{\beta}}{m + M\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

W tym układzie odniesienia  $\mathbf{P}' = 0$ , zatem przed zderzeniem cząstki poruszają się z trójpędami

$$\mathbf{p}'_m = \frac{Mc\mathfrak{P}}{\sqrt{1-\mathfrak{P}^2}} = -\mathbf{p}'_M = \mathbf{p}'$$

oraz po zderzeniu  $\mathbf{p}''_m = -\mathbf{p}''_M = \mathbf{p}''$ . Jednocześnie z zachowania czasowej składowej całkowitego czteropędu układu mamy

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2c^2} + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2c^2} = \sqrt{\mathbf{p}''^2 + m^2c^2} + \sqrt{\mathbf{p}''^2 + M^2c^2}.$$

Ponieważ funkcja  $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$  jest różnowartościowa, więc wnioskujemy, że  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}''|$ . Ponieważ zakładamy, że zderzenie jest centralne, więc z powyższego wynika  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}''$ . Ostatecznie zatem trójpędy cząstek po zderzeniu wynoszą (w układzie  $S'$ )

$$\mathbf{p}''_m = -\frac{Mc\mathfrak{P}}{\sqrt{1-\mathfrak{P}^2}} = -\mathbf{p}''_M.$$

W układzie  $S'$  czterowektor energii-pędu cząstki  $M$  po zderzeniu wynosi zatem

$$p''_M = \left( \frac{Mc\mathfrak{P}}{\sqrt{1-\mathfrak{P}^2}}, \frac{Mc}{\sqrt{1-\mathfrak{P}^2}} \right),$$

zatem w układzie laboratoryjnym  $S$  trójpęd cząstki  $M$  po zderzeniu wynosi

$$\mathbf{p}_M = \frac{2Mc\mathfrak{P}}{1-\mathfrak{P}^2},$$

co odpowiada prędkości

$$\mathbf{v}_M = \frac{2\mathfrak{P}c}{1+\mathfrak{P}^2},$$

gdzie

$$\mathfrak{P} = \frac{m\beta}{m + M\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dla  $m = M$  mamy

$$\mathfrak{P} = \frac{\beta}{1 + \sqrt{1-\beta^2}}, \quad 1 + \mathfrak{P}^2 = \frac{2}{1 + \sqrt{1-\beta^2}},$$

skąd

$$\mathbf{v}_M = \beta c$$

czyli cząstka  $M$  ma po zderzeniu dokładnie prędkość uderzającej w nią cząstki  $m$ . Jednocześnie wówczas z zachowania czteropędu w układzie  $S$  mamy

$$\frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m\mathbf{v}_m}{\sqrt{1-\frac{v_m^2}{c^2}}} + \frac{M\mathbf{v}_M}{\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}} = \frac{m\mathbf{v}_m}{\sqrt{1-\frac{v_m^2}{c^2}}} + \frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

czyli  $\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ .

### Zderzenie niecentralne

Rozpatrzmy teraz z kolei sprężyste zderzenie niecentralne dwóch cząstek o jednakowej masie  $m$ . Załóżmy, iż przed zderzeniem w układzie odniesienia  $S$  jedna z cząstek spoczywa, a druga porusza się z prędkością  $\mathbf{v} = [v, 0, 0]$ . Natomiast po zderzeniu cząstki poruszają się po torach nachylonych do siebie pod kątem  $\Psi$ . Znając energie relatywistyczne cząstek  $E, E'$  po zderzeniu (w układzie  $S$ ) chcemy wyznaczyć kąt  $\Psi$ . Z zasady zachowania czterowektora energii-pędu mamy (poniżej kładę  $c = 1$ )

$$\begin{aligned}\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} &= E + E' - m \\ \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} &= \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{m\mathbf{w}}{\sqrt{1-w^2}}\end{aligned}$$

Podnosząc drugie równanie obustronnie do kwadratu i korzystając z

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}}, \quad E' = \frac{m}{\sqrt{1-w^2}}, \quad \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = E + E' - m$$

otrzymujemy

$$(E + E' - m)^2 - m^2 = E^2 + E'^2 - 2m^2 + 2\sqrt{(E^2 - m^2)(E'^2 - m^2)} \cos \Psi,$$

skąd

$$\cos \Psi = \sqrt{\frac{(E - m)(E' - m)}{(E + m)(E' + m)}}.$$

Zauważmy, iż w granicy nierelatywistycznej (tj.  $c \rightarrow \infty$ ) otrzymujemy oczywiście  $\Psi = \frac{\pi}{2}$ , co jest zgodne z klasycznymi rozważaniami.

### 1.13.17 Siła

Po zdefiniowaniu czteropędu (czterowektora energii-pędu) jako wielkości

$$p = (\gamma(v)m\mathbf{v}, \gamma(v)mc) = (\mathbf{p}, E/c)$$

naturalnym sposobem zdefiniowania czterowektora siły (*czterosiły*)  $K$  będzie

$$K := \frac{dp}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp}{dt} = \left( \gamma(v) \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{\gamma(v)}{c} \frac{dE}{dt} \right) = \left( \gamma(v) \mathbf{F}, \frac{\gamma(v)}{c} \frac{dE}{dt} \right),$$



gdzie wielkość  $\mathbf{F}$  nazywamy *trójsiłą*. Aby wyznaczyć wzory transformacyjne dla  $\mathbf{F}$  mierzonej w danym punkcie  $\mathbf{x}$ , przy standardowym pchnięciu z prędkością  $V$  zauważmy, że

$$\begin{aligned} F'_1 &= \frac{dp'_1}{dt'} = \frac{\gamma dp_1 - \gamma\beta dp_4}{\gamma dt - \gamma\frac{Vdx_1}{c^2}} = \frac{F_1 - \frac{\beta}{c} \frac{dE}{dt}}{1 - \beta v_1/c} \\ F'_2 &= \frac{dp'_2}{dt'} = \frac{dp_2}{\gamma dt - \gamma\frac{Vdx_1}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(V)} \frac{F_2}{1 - \beta v_1/c} \\ F'_3 &= \frac{dp'_3}{dt'} = \frac{dp_3}{\gamma dt - \gamma\frac{Vdx_1}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(V)} \frac{F_3}{1 - \beta v_1/c} \end{aligned} .$$

Ważne jest zaznaczenie, iż w przypadku siły Lorentza możemy zapisać

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) ,$$

gdzie  $\mathbf{F}$  jest zdefiniowaną powyżej trójsiłą. Oczywiście ponieważ  $dp$  jest czterowektorem i czas własny  $d\tau$  jest czteroskalarem, więc tak zdefiniowana czterosiła z całą pewnością jest czterowektorem. Zauważmy jednocześnie, że z definicji energii relatywistycznej mamy

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 .$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy zatem

$$E \frac{dE}{d\tau} = c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} + c^4 m \frac{dm}{d\tau} ,$$

co możemy zapisać jako

$$-mc^2 \frac{dm}{d\tau} = -\gamma(v) mc^2 \frac{dm}{dt} = K \cdot p .$$

Ponieważ w ogólności  $K \cdot p \neq 0$ , więc masa cząstki może zmieniać się w czasie, jeśli na cząstkę działa pewna czterosiła. Podkreślimy, iż fakt, że masa cząstki może się zmieniać nie ma nic wspólnego z jej niezmienniczością względem transformacji Lorentza. W szczególności jednak kiedy  $K \cdot p = 0$  (np. dla sił elektromagnetycznych) wówczas  $\frac{dm}{dt} = 0$ . Ponieważ  $K \cdot p$  jest czteroskalarem, więc ma tę samą wartość we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, w szczególności w układzie spoczynkowym cząstki  $p = (\mathbf{0}, mc)$ , zatem

$$K \cdot p = m \frac{dE}{dt} ,$$

gdzie  $\frac{dE}{dt}$  jest zmianą energii relatywistycznej cząstki w jej spoczynkowym układzie odniesienia. Dla sił, które nie zmieniają masy cząstki mamy tożsamość

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} ,$$

czyli dla takich sił czterowektor siły ma postać

$$K = (\gamma(v)\mathbf{F}, \gamma(v)\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}) .$$

W takim przypadku możemy również zapisać

$$\mathbf{F} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m\mathbf{v}}{c^2} \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} .$$

Zauważmy, że z powyższego

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv}{dt} \left( 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) = \frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} ,$$

zatem możemy również zapisać

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) .$$

Dla sił niezmiennających masy cząstki (np. dla sił elektromagnetycznych) zachodzi

$$\mathbf{F} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma^3 \beta \boldsymbol{\beta} m \frac{dv}{dt} .$$

Zauważmy w szczególności, iż dla ruchu po okręgu o promieniu  $R$  mamy po prostu  $F_{\text{doś}} = \gamma m v^2 / R$ . Zatem dla ruchu elektronu po okręgu w polu magnetycznym  $B$  z prędkością relatywistyczną promień orbity wynosi

$$R = \frac{\gamma m v}{e B} .$$

Jako przykład rozważmy ruch cząstki materialnej o masie stałej  $m$  w płaszczyźnie  $xy$  pod wpływem stałej trójsiły  $\mathbf{F} = [F, 0, 0]$  (może to być np. siła działająca na ładunek w stałym, jednorodnym polu elektrycznym), jeśli  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\mathbf{p}(0) = [p_{xo}, p_{yo}, 0]$ . Ponieważ

$$\mathbf{F} = [F, 0, 0] = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left[ \frac{dp_x}{dt}, \frac{dp_y}{dt}, \frac{dp_z}{dt} \right] ,$$

zatem

$$p_x(t) = Ft + p_{xo}, \quad p_y(t) = p_{yo}, \quad p_z(t) = 0 .$$

Jednocześnie mamy

$$p_x(t) = \frac{mv_x(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}, \quad p_y(t) = \frac{mv_y(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}},$$

skąd, podnosząc oba wyrażenia do kwadratu i dodając

$$\frac{v^2(t)}{c^2} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2} = \frac{(Ft + p_{xo})^2 + p_{yo}^2}{m^2 c^2 + (Ft + p_{xo})^2 + p_{yo}^2}.$$

Wprowadzając wielkość  $E_o^2/c^2 := p_{xo}^2 + p_{yo}^2 + m^2 c^2$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{c(Ft + p_{xo})}{\sqrt{\frac{E_o^2}{c^2} + Ft(Ft + 2p_{xo})}} \\ v_y(t) &= \frac{p_{yo}c}{\sqrt{\frac{E_o^2}{c^2} + Ft(Ft + 2p_{xo})}}. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku  $p_{xo} = p_{yo} = 0$  otrzymujemy

$$v_x(t) = \frac{Fct}{\sqrt{m^2 c^2 + F^2 t^2}},$$

zauważmy, że dla  $t \rightarrow \infty$  otrzymujemy  $v_x(t) = c$ . Z kolei w granicy nierelatywistycznej ( $c \rightarrow \infty$ ) mamy  $v_x(t) = Ft/m$ . Ruch taki nazywamy *ruchem hiperbolicznym*. Istotnie całkując mamy

$$x(t) = \sqrt{\frac{c^4}{\alpha^2} + c^2 t^2},$$

gdzie  $\alpha := F/m$  i przyjąłem  $x(0) = c^2/\alpha$ . Równanie to opisuje oczywiście hiperbole w układzie współrzędnych  $(x, t)$ .

### 1.13.18 Czterotensory

Czterotensor  $T$  (drugiego rzędu) definiujemy jako zespół szesnastu liczb  $T_{ij}$ , które przy zmianach układu odniesienia transformują się zgodnie z

$$T' = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} & T'_{14} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} & T'_{24} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} & T'_{34} \\ T'_{41} & T'_{42} & T'_{43} & T'_{44} \end{bmatrix} = \Lambda T \tilde{\Lambda} = \Lambda \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \tilde{\Lambda},$$

gdzie  $\Lambda$  jest macierzą standardowego pchnięcia, a  $\tilde{\Lambda}$  jest macierzą transponowaną do  $\Lambda$ , tj. dla elementów macierzy  $\lambda_{ij}$  i  $\tilde{\lambda}_{ji}$  zachodzi

$$\lambda_{ij} = \tilde{\lambda}_{ji}.$$

Własności transponowania macierzy

- Jeśli  $\Lambda$  jest macierzą symetryczną (tj.  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ ) wówczas

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda.$$

- Jeśli  $\Lambda$  jest macierzą kwadratową to

$$\det \tilde{\Lambda} = \det \Lambda.$$

Iloczyn skalarny czterotensora  $T$  i czterowektora  $q$  definiujemy jako

$$\begin{aligned} T \cdot q &:= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11}q_1 + T_{12}q_2 + T_{13}q_3 + T_{14}q_4 \\ T_{21}q_1 + T_{22}q_2 + T_{23}q_3 + T_{24}q_4 \\ T_{31}q_1 + T_{32}q_2 + T_{33}q_3 + T_{34}q_4 \\ T_{41}q_1 + T_{42}q_2 + T_{43}q_3 + T_{44}q_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Okazuje się, że przy takiej definicji  $p = T \cdot q$  jest czterowektorem.

### 1.13.19 STW i Elektrodynamika

Okazuje się, że dla pola elektromagnetycznego możemy zdefiniować *tensor pola elektromagnetycznego*  $\mathcal{F}$ , który transformuje się zgodnie z regułą  $\mathcal{F}' = \Lambda \mathcal{F} \tilde{\Lambda}$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & cB_3 & -cB_2 & -E_1 \\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -E_2 \\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że tensor pola elektromagnetycznego jest antysymetryczny ( $\mathcal{F}_{ij} = -\mathcal{F}_{ji}$ ) oraz z powyższego

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \cdot u &= \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & cB_3 & -cB_2 & -E_1 \\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -E_2 \\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma(v) \{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_1 + E_1\} \\ \gamma(v) \{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_2 + E_2\} \\ \gamma(v) \{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_3 + E_3\} \\ \frac{\gamma(v)}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix} = \gamma(v) \left( \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}, \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right) .\end{aligned}$$

Założmy, że ładunek cząstki  $q$  jest czteroskalarem, czyli  $q\mathcal{F} \cdot u$  jest czterowektorem

$$q\mathcal{F} \cdot u = \gamma(v)q \left( \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}, \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right) .$$

Zauważmy, że składowa przestrzenna  $q\mathcal{F} \cdot u$  jest równa wyrażeniu na trójsiłę Lorentza pomnożonemu przez  $\gamma$ , natomiast część przestrzenna jest równa zmianie energii relatywistycznej cząstki pomnożonej przez  $\gamma/c$ . Istotnie, ponieważ z doświadczenia wynika, iż siła Lorentza nie zmienia masy cząstki, więc zachodzi dla niej

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} ,$$

gdzie przez  $\mathcal{E}$  oznaczam energię relatywistyczną cząstki. Jednocześnie trójsiła wynosi  $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})$  zatem

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} .$$

Widzimy zatem, że czterowektor  $q\mathcal{F} \cdot u$  ma postać czterowektora siły Lorentza

$$K = q\mathcal{F} \cdot u = \gamma(v)q \left( \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}, \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right) .$$

Wyraziliśmy więc jedno z praw elektrodynamiki w postaci relatywistycznie niezmienniczej. Aby wyznaczyć składowe siły  $K'$  w układzie odniesienia  $S'$  powiązanym z  $S$  standardowym pchnięciem z prędkością  $V$  musimy znać transformacje pól  $\mathbf{E}'$  i  $\mathbf{B}'$ . Korzystając z tego, że  $\mathcal{F}$  jest czterotensorem mamy

$$\mathcal{F}' = \Lambda \mathcal{F} \Lambda ,$$

gdzie skorzystaliśmy, z własności  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$  dla macierzy symetrycznych. Z powyższego mamy zatem

$$\begin{bmatrix} 0 & cB'_3 & -cB'_2 & -E'_1 \\ -cB'_3 & 0 & cB'_1 & -E'_2 \\ cB'_2 & -cB'_1 & 0 & -E'_3 \\ E'_1 & E'_2 & E'_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma cB_3 - \beta\gamma E_2 & -\gamma cB_2 - \beta\gamma E_3 & -E_1 \\ -\gamma cB_3 + \beta\gamma E_3 & 0 & cB_1 & \beta\gamma cB_3 - \gamma E_2 \\ \gamma cB_2 + \gamma\beta E_3 & -cB_1 & 0 & -\beta\gamma cB_2 - \gamma E_3 \\ E_1 & -\beta\gamma cB_3 + \gamma E_2 & \gamma\beta cB_2 + \gamma E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy transformacje pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ . Oznaczając  $(x, y, z)$  zamiast  $(1, 2, 3)$  mamy

Transformacje pól  $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]$  i  $\mathbf{B} = [B_x, B_y, B_z]$  przy standardowym pchnięciu lorentzowskim z prędkością  $V$  mają postać

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & cB'_x &= cB_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta cB_z) & cB'_y &= \gamma(cB_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta cB_y) & cB'_z &= \gamma(cB_z - \beta E_y) \end{aligned} ,$$

gdzie  $\beta = V/c$  i  $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$ .

Podkreślmy tutaj, że transformacje te odnoszą się do pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  mierzonych w danym punkcie  $\mathbf{x}$  względem  $S$  (tj. w punkcie  $\mathbf{x}'$  względem  $S'$ ).

Łatwo pokazać prostym rachunkiem, iż  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  oraz  $E^2 - c^2 B^2$  są czteroskalarami.

Relatywistyczny lagranżjan dla cząstki naładowanej poruszającej się w polach  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ma postać

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - q(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) ,$$

gdzie  $m$  jest niezmienniczą i zachowaną masą cząstki.

## 2 Termodynamika

*Nature, in providing us with combustibles on all sides, has given us the power to produce, at all times and in all places, heat and the impelling power which is the result of it. To develop this power, to appropriate it to our uses, is the object of heat-engines.*

Nicolas Léonard Sadi Carnot

<i>Nazwa</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wartość</i>
stała Avogadra	$N_A$	$6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
stała Boltzmannna	$k_B$	$1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
stała Faradaya	$F$	$96\,485 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
stała gazowa	$R$	$8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
stała Stefana-Boltzmannna	$\sigma$	$5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Tabela 2: Wybrane stałe fizykochemiczne

### 2.1 Termodynamika fenomenologiczna

Opis fenomenologiczny zajmuje się związkami między makroskopowymi wielkościami ( $p, V, T$ ) charakteryzującymi układ jako całość. Na gruncie termodynamiki fenomenologicznej nie wyprowadzamy opisywanych dalej praw z bardziej podstawowych zasad dynamiki. Traktujemy je jako fakty doświadczalne.

#### Słowniczek pojęć

1. *funkcja stanu* – funkcja zależna wyłącznie od aktualnych parametrów układu
2. *równowaga termodynamiczna* – stan, w którym wszystkie makroskopowe parametry układu oraz funkcje stanu są stałe w czasie
3. *temperatura* – dowolna funkcja będąca bijekcją określona na klasie układów będących w równowadze termodynamicznej

#### 2.1.1 Prawa gazowe

W XIX w. Clapeyron sformułował równanie stanu gazu doskonałego na podstawie 3 empirycznych praw odkrytych wcześniej.

### Postulaty dotyczące gazu doskonałego

- I. Cząsteczki gazu są punktami materialnymi.
- II. Pomiedzy cząsteczkami nie występują żadne oddziaływania poza momentami ich zderzeń między sobą lub ściankami naczynia.
- III. Zderzenia cząsteczek są elastyczne.

Równanie Clapeyrona stosuje się również dobrze do gazów rzeczywistych w temperaturach wyższych od temperatury krytycznej i przy niezbyt wysokich ciśnieniach. Wówczas prawdziwe są zależności:

- 1. Prawo Boyle'a  $(pV)_T = \text{const.}$
- 2. Prawo Charlesa  $\left(\frac{p}{T}\right)_V = \text{const.}$
- 3. Prawo Gay-Lussaca  $\left(\frac{V}{T}\right)_p = \text{const.}$

oraz w ogólności spełnione jest **równanie Clapeyrona** (równanie stanu gazu doskonałego)

$$pV = nRT.$$

W przypadku mieszaniny  $L$  różnych gazów spełniających RSGD zachodzi

$$pV = \sum_{\alpha=1}^L n_{\alpha}RT, \quad \text{gdzie}$$

$p, V, T$  oznaczają parametry całej mieszaniny. Jest to równoważne **prawu Daltona**:  $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$  tzn. ciśnienie wypadkowe jest sumą ciśnień parcyjnych. Można o tym myśleć w następujący sposób: ponieważ gazy doskonałe ze sobą nie oddziałują, więc cząsteczki tych gazów *nie widzą* się nawzajem, a zatem uśredniona siła z jaką cząsteczki danego gazu uderzają o ścianki naczynia jest taka sama, jaka byłaby w tych samych warunkach przy nieobecności cząsteczek innych gazów.

#### 2.1.2 Wzór barometryczny

Zakładając, że powietrze tworzące atmosferę ziemską możemy traktować jak gaz doskonały o masie molowej  $\mu$  i stałej temperaturze  $T$  możemy wyprowadzić teoretyczną zależność ciśnienia atmosferycznego od wysokości  $h$  nad poziomem morza (wzór barometryczny). Z RSGD mamy

$$p(h) = \frac{\rho(h)}{\mu}RT.$$



Rozpatrzmy warstwę atmosfery na wysokości  $h$  nad poziomem morza o grubości  $dh$ . Ponieważ warstwa ta znajduje się w równowadze, więc musi zachodzić

$$p + dp + \rho(h)g dh = p ,$$

skąd otrzymujemy

$$dp = -\rho(h)g dh = -\frac{\mu g}{RT}p dh .$$

Wykonując elementarne całkowanie i przyjmując  $p(0) = p_0$  otrzymujemy

$$p(h) = p_0 \exp \left\{ -\frac{\mu g}{RT}h \right\} .$$

### 2.1.3 Para nasycona i wilgotność

**Para nasycona** – para pozostająca w równowadze termodynamicznej ze swoją cieczą. Jej ciśnienie ma w danej temperaturze maksymalną wartość i nie zmienia się przy zmianie objętości. Zwiększenie objętości w stałej temperaturze powoduje parowanie cieczy bez zmiany ciśnienia, a zmniejszenie objętości skraplanie cieczy bez zmiany ciśnienia. Wrzenie cieczy następuje w takiej temperaturze, w której ciśnienie pary nasyconej nad tą cieczą jest równe ciśnieniu zewnętrznemu. Para nasycona nie spełnia praw gazów doskonałych.

**Wilgotność bezwzględna**  $w_b$  definiujemy jako stosunek masy pary wodnej do objętości gazu.

### 2.1.4 Ciepło właściwe i przemiany fazowej

1. Ciepło właściwe  $c$  definiujemy jako  $c = \frac{\delta Q}{mdT}$
2. Ciepło molowe  $C$  definiujemy jako  $C = \mu c$ , gdzie  $\mu$  jest masą molową
3. Ciepło topnienia (krzepnięcia) definiujemy jako  $l = \pm \frac{\delta Q}{m}$
4. Ciepło parowania (skraplania) definiujemy jako  $r = \pm \frac{\delta Q}{m}$

Ogrzewanie ciał stałych i cieczy zwykle przeprowadzamy przy ciśnieniu normalnym 1013.25 hPa i wówczas w dużym zakresie temperatur ciepło właściwe tych substancji jest stałe. Ciepło właściwe gazów zależy od typu przemiany jakiej podlega gaz.

### 2.1.5 Zasada bilansu cieplnego

Suma ilości ciepła przekazywanego przez ciała układu jest równa energii  $dE$  przekazywanej z zewnątrz

$$\delta Q = dE .$$

## 2.2 Termodynamika statystyczna

### 2.2.1 Podstawowy wzór kinetycznej teorii gazów

Przyjmując wypisane postulaty dot. gazu doskonałego wyprowadzimy równanie wiążące makroskopowe parametry z wielkościami mikroskopowymi. Rozpatrzmy sześcienny zbiornik o boku  $\ell$ . Wewnątrz zbiornika znajduje się gaz doskonały składający się z  $N$  cząsteczek, każda o masie  $m$ . Uśredniona po liczbie odbić siła z jaką pojedyncza cząstka działa na ściankę wynosi

$$F_{\alpha}^{(x)} = m \frac{\Delta v_{\alpha}^{(x)}}{\tau} = \frac{2mv_{\alpha}^{(x)}}{\tau},$$

gdzie  $\tau$  jest czasem pomiędzy kolejnymi odbiciami tj.  $\tau = \ell/v_{\alpha}^{(x)}$ . Sumując po wszystkich cząstkach otrzymujemy więc

$$F = \frac{m}{\ell} \sum_{\alpha=1}^N (v_{\alpha}^x)^2 = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{\ell},$$

gdzie wprowadziliśmy  $\langle v_x^2 \rangle = \frac{(v_1^{(x)})^2 + (v_2^{(x)})^2 + \dots + (v_N^{(x)})^2}{N}$ . Ciśnienie wywierane na ściankę naczynia wynosi więc

$$p = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{\ell^3} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}.$$

Ponieważ żaden z kierunków  $x, y, z$  nie jest wyróżniony, więc możemy przyjąć  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ . Jednocześnie zauważmy, że zachodzi  $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$ , zatem otrzymujemy

$$p = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V} = \frac{2N}{3V} \langle K \rangle.$$

### 2.2.2 Kinetyczna interpretacja temperatury

Temperatura bezwzględna  $T$  jest wielkością wprost proporcjonalną do średniej energii kinetycznej cząstek. Dla gazu doskonałego

$$T = \frac{2}{3k_B} \langle K \rangle.$$

### 2.2.3 Zasada ekwipartycji energii

Na każdy stopień swobody cząstki przypada taka sama średnia energia równa  $k_B T/2$ , skąd całkowita energia wewnętrzna gazu, którego cząsteczka ma  $i$  stopni swobody wynosi

$$U = \frac{Nik_B T}{2} = \frac{inRT}{2}.$$

## 2.3 Zasady termodynamiki

### 0 zasada termodynamiki.

Istnieje funkcja stanu  $\beta$ , którą nazywamy temperaturą, taka że jeżeli układ A jest w równowadze termicznej z układem B, wówczas wartość funkcji  $\beta$  jest taka sama dla obu tych układów.

### I zasada termodynamiki.

Istnieje funkcja stanu  $U$ , którą nazywamy energią wewnętrzną, taka że różnica elementarnego ciepła  $\delta Q$  dostarczonego do układu i elementarnej pracy  $\delta W$  wykonanej przez układ jest różniczką zupełną tej funkcji

$$dU = \delta Q - \delta W.$$

### II zasada termodynamiki.

Sformułowanie Kelvina-Plancka:

*It is impossible to devise a cyclically operating device, the sole effect of which is to absorb energy in the form of heat from a single thermal reservoir and to deliver an equivalent amount of work.*

## 2.4 Izoprocesy gazu doskonałego

### 2.4.1 Procesy odwracalne

Proces nazywamy odwracalnym, gdy za pomocą różniczkowej zmiany otoczenia można wywołać proces do niego odwrotny tj. przebiegający po tej samej drodze w kierunku przeciwnym.

### 2.4.2 Procesy kwazistatyczne

Mówiąc o izoprocesach gazu doskonałego chcemy opisać dynamikę zmian stanu układu jakim jest gaz doskonały. Zauważmy jednak, że podane wcześniej na gruncie termodynamiki fenomenologicznej aksjomatyczne prawa (gazowe i Clapeyrona) opisują stany równowagi termodynamicznej – statykę układu jakim jest gaz doskonały. Z tego powodu są raczej domeną *termostatyki* niż termodynamiki. Zmieniając stan układu nie możemy mieć pewności, że w każdej chwili przy przejściu między stanami  $A$ ,  $B$  parametry  $(p, V, T)$  są dobrze ustalone (mogą być np. pewnymi polami skalarnymi). Z pewnością natomiast w punktach  $A$  i  $B$  po odpowiednio długim czasie ustalą się stany równowagi i wówczas będziemy mogli użyć opisanych praw. Chcąc jednak za ich pomocą opisać dynamikę procesu musimy przeprowadzić ów proces kwazistatycznie – bardzo powoli (w granicy nieskończenie wolno),

aby w każdej chwili mógł ustalić się stan równowagi. Takimi procesami zajmujemy się poniżej.

### 2.4.3 Izoprocesy

#### 1. Przemiana izochoryczna ( $V = \text{const}$ )

- (a) Z I zasady termodynamiki  $\delta Q = dU$
- (b) Ponieważ  $\Delta V = 0$ , więc  $W=0$
- (c) Definiujemy izochoryczne ciepło molowe

$$C_V = \frac{\delta Q}{n dT} = \frac{dU}{n dT}.$$

#### 2. Przemiana izobaryczna ( $p = \text{const}$ )

- (a) Z I zasady termodynamiki  $\delta Q = nC_V dT + p dV$
- (b) Ponieważ  $p = \text{const}$ , więc  $W = \int p dV = p\Delta V$
- (c) Definiujemy izobaryczne ciepło molowe

$$C_p = \frac{\delta Q}{n dT} = \frac{dU + p dV}{n dT} = C_V + \frac{p}{n} \frac{d}{dT} \left( \frac{nRT}{p} \right) = C_V + R.$$

#### 3. Przemiana izotermiczna ( $T = \text{const}$ )

- (a) Z I zasady termodynamiki  $\delta Q = p dV$
- (b) Ponieważ  $T = \text{const}$ , więc  $p = p(V) = nRT \frac{1}{V}$ , skąd

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

- (c) Ponieważ temperatura się nie zmienia nie można zdefiniować analogicznego ciepła molowego (w pewnym sensie  $C_T = \infty$ ).

#### 4. Przemiana adiabatyczna ( $\delta Q = 0$ )

- (a) Z I zasady termodynamiki  $dU = nC_V dT = -p dV$ . Z RSGD mamy natomiast  $p dV + V dp = nR dT$ . Z powyższego mamy więc

$$p dV - nR dT = p dV + \frac{R}{C_V} p dV = -V dp,$$

czyli wprowadzając współczynnik Laplace'a  $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$  otrzymujemy

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p},$$

skąd uzyskujemy tzw. równanie Poissona

$$pV^\kappa = \text{const}.$$

Równoważnie możemy napisać  $TV^{\kappa-1} = \text{const}$  lub  $p^{1-\kappa}T^\kappa = \text{const}$ .

(b) Ponieważ  $dU = -\delta W$ , więc

$$W = -\Delta U = nC_V(T_1 - T_2) = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\kappa - 1}.$$

(c) Ponieważ układ jest w osłonie adiabatycznej nie można zdefiniować analogicznego ciepła właściwego (w pewnym sensie  $C_Q = 0$ ).

(d) Obliczmy zmianę entropii  $\Delta S$  w przemianie adiabatycznej

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1},$$

ale z równania Poissona  $T_2/T_1 = (V_1/V_2)^{\kappa-1}$ , zatem

$$\Delta S = (\kappa - 1)nC_V \ln \frac{V_1}{V_2} - nR \ln \frac{V_1}{V_2} = nR \ln \frac{V_1}{V_2} - nR \ln \frac{V_1}{V_2} = 0,$$

z tego powodu przemiana adiabatyczna gazu doskonałego jest nazywana również *przemianą izentropową*.

## 2.5 Entropia

Dla procesów odwracalnych zachodzących quasistatycznie entropię  $S$  definiujemy jako pewną funkcję stanu, której różniczka zupełna wynosi

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

### 2.5.1 Zmiana entropii w przemianie gazu doskonałego

Rozpatrzmy pewną przemianę gazu doskonałego przedstawioną w przestrzeni  $T-V$  jako przejście między punktami  $A(T_A, V_A) \rightarrow B(T_B, V_B)$ . Dla gazu doskonałego mamy

$$dS = \frac{dU + p dV}{T} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

Zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie ma postać

$$\left[ \frac{nC_V}{T}, \frac{nR}{V} \right] \cdot [dT, dV] = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Zmiana entropii w rozpatrywanym procesie jest więc równa całce krzywoliniowej w przestrzeni  $T - V$

$$\Delta S = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Łatwo sprawdzić jednak, że  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ , zatem z twierdzenia dotyczącego pól bezwirowych wiemy, że owa całka nie zależy od krzywej po jakiej poruszamy się między punktami  $A$  i  $B$ , co jest w pewien sposób oczywiste gdyż  $S$  musi być funkcją stanu. Wybierając krzywą będącą fragmentem prostokąta o bokach równoległych do osi układu współrzędnych mamy

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}.$$

Powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnej przemiany gazu doskonałego, nawet takiej, której nie da się jednoznacznie przedstawić (poza oczywiście punktami  $A$ ,  $B$ ) w przestrzeni  $V - T$ , gdyż np. temperatura nie musi być jednakowa w każdym punkcie gazu. W szczególności obliczmy zmianę entropii podczas rozprężania gazu doskonałego do próżni zakładając, że zwiększył on swoją objętość  $P$ -krotnie

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_A}{T_A} + nR \ln \frac{PV_A}{V_A} = Nk_B \ln P = k_B \ln(P^N).$$

## 2.6 Procesy cykliczne

**Proces cykliczny** – proces, w którym gaz roboczy po wykonaniu pełnego cyklu wraca do stanu początkowego. Energia wewnętrzna w takim cyklu nie może się zmienić, gdyż jest ona funkcją stanu.

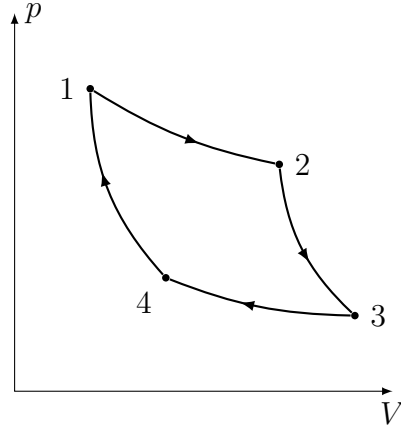
**Cykl Carnota** – idealny teoretyczny proces cykliczny składający się z 4 izoprze-mian gazu doskonałego: rozprężania izotermicznego (1–2) i adiabatycznego (2–3) oraz sprężania izotermicznego (3–4) i adiabatycznego (4–1). Wyznacza granicę sprawności maszyn cieplnych.

Praca wykonana w całym cyklu wynosi

$$W = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nC_V(T_2 - T_3) + nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} + nC_V(T_4 - T_1),$$

ale  $T_1 = T_2$  i  $T_3 = T_4$  oraz  $T_2V_2^{\kappa-1} = T_3V_3^{\kappa-1}$  i  $T_1V_1^{\kappa-1} = T_4V_4^{\kappa-1}$ , skąd

$$\frac{T_2}{T_3} = \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \frac{T_1}{T_4} = \left( \frac{V_4}{V_1} \right)^{\kappa-1},$$



Rysunek 3: Silnik Carnota w przestrzeni  $p - V$

zatem z powyższego  $V_3/V_2 = V_4/V_1$ , czyli  $V_2/V_1 = V_3/V_4$ . Oznaczając  $T_1 = T_2 = T_H$  i  $T_3 = T_4 = T_L$  otrzymujemy

$$W = nR(T_H - T_L) \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Ciepło przekazywane jest tylko w przemianach (1-2) i (3-4) i wynosi odpowiednio

$$Q_{1-2} = W_{1-2} = nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \quad \text{gdyż } V_2 > V_1,$$

$$Q_{3-4} = W_{3-4} = nRT_L \ln \frac{V_4}{V_3} < 0 \quad \text{gdyż } V_4 < V_3.$$

Definiując sprawność  $\eta$  silnika jako stosunek

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{in}}},$$

gdzie  $Q_{\text{in}} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} : \forall_{\alpha} Q_{\alpha} > 0$ , otrzymujemy

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{nR(T_H - T_L) \ln \frac{V_2}{V_1}}{nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

### Twierdzenie Carnota

- I. Sprawność dowolnego silnika cieplnego pobierającego izotermicznie ciepło ze zbiornika o temperaturze  $T_H$  i oddającego izotermicznie ciepło do zbiornika o temperaturze  $T_L$  nie może być większa od sprawności silnika Carnota pracującego między tymi temperaturami.
- II. Wszystkie silniki odwracalne (czynnikiem roboczym **nie musi** być gaz doskonały) pobierające izotermicznie ciepło ze zbiornika o temperaturze  $T_H$  i oddające izotermicznie ciepło do zbiornika o temperaturze  $T_L$  mają jednakową sprawność równą sprawności silnika Carnota pracującego między tymi temperaturami.

Cykl Carnota można prowadzić w kierunku przeciwnym i wtedy urządzenie działa jako maszyna chłodząca. Definiując wówczas wielkości

$$\xi_{\text{cool}} = \frac{|Q_{\text{cold}}|}{|W|}$$
$$\xi_{\text{heat}} = \frac{|Q_{\text{hot}}|}{|W|},$$

można pokazać, że analogicznie dla dowolnej chłodziarki zachodzi

$$\xi_{\text{cool}} \leq \frac{T_L}{T_H - T_L}$$
$$\xi_{\text{heat}} \leq \frac{T_H}{T_H - T_L},$$

gdzie  $Q_{\text{cool}} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} : \forall_{\alpha} Q_{\alpha} > 0$ , a  $Q_{\text{heat}} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} : \forall_{\alpha} Q_{\alpha} < 0$ .

## 2.7 Sprężyste i termiczne własności ciał stałych i cieczy

### 2.7.1 Współczynniki rozszerzalności

1. Dla ciał stałych definiujemy współczynnik rozszerzalności liniowej jako

$$\lambda = \frac{1}{\ell_0} \frac{d\ell}{dT},$$

gdzie  $d\ell/\ell_0$  jest względną zmianą długości spowodowaną przyrostem temperatury o  $dT$ .



2. Dla ciał stałych i cieczy definiujemy również współczynnik rozszerzalności objętościowej jako

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dT},$$

gdzie  $dV/V_0$  jest względną zmianą objętości spowodowaną przyrostem temperatury o  $dT$ .

3. Dla ciał izotropowych zachodzi  $\alpha = 3\lambda$ . Istotnie rozpatrzmy prostopadłościan o krawędziach  $x, y, z$ . Jeśli krawędzie wydłużą się odpowiednio o  $dx, dy$  i  $dz$  to zmiana objętości wyniesie

$$\begin{aligned} dV &= (x + dx)(y + dy)(z + dz) - xyz \\ &= xyz + xydz + xzdy + yzdx - xyz, \end{aligned}$$

skąd podstawiając  $dx = \lambda x dT, dy = \lambda y dT$  i  $dz = \lambda z dT$  otrzymujemy

$$dV = 3xyz\lambda dT = 3\lambda V_0 dT,$$

skąd  $\alpha = 3\lambda$ .

4. Dla gazów definiujemy współczynnik rozszerzalności objętościowej przy stałym ciśnieniu

$$\alpha_p = \frac{1}{V_0} \left( \frac{dV}{dT} \right)_p$$

oraz współczynnik prężności termicznej gazu przy stałej objętości

$$\beta_V = \frac{1}{p_0} \left( \frac{dp}{dT} \right)_V,$$

gdzie  $p_0, V_0$  oznaczają odpowiednio ciśnienie i objętość danego gazu w temperaturze  $T_0 = 273 \text{ K}$ . Dla gazów doskonałych zachodzi

$$\left( \frac{dV}{dT} \right)_p = \frac{nR}{p} = \frac{V_0}{T_0} \quad \text{oraz} \quad \left( \frac{dp}{dT} \right)_V = \frac{nR}{V} = \frac{p_0}{T_0},$$

skąd

$$\alpha_p = \beta_V = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273 \text{ K}}.$$

### 2.7.2 Prawo Hooke’a

Zależność między wydłużeniem pręta  $\Delta l$ , a działającą na niego siłą  $F$  jest dana w postaci

$$\Delta l = \frac{F l_0}{Y S},$$

gdzie  $l_0$  jest długością swobodną pręta,  $S$  polem przekroju poprzecznego, a  $Y$  to moduł Younga. Dla dwóch połączonych prętów o długościach swobodnych  $l_1, l_2$  i przekrojach  $S_1, S_2$  oraz modułach Younga  $Y_1, Y_2$  zachodzi

$$\Delta l = F \frac{l_1 Y_2 S_2 + l_2 Y_1 S_1}{Y_1 Y_2 S_1 S_2}.$$

### 2.7.3 Heat equation\*

Przepływ ciepła w nieskończonym ośrodku o współczynniku przewodzenia ciepła  $\kappa$  opisywany jest równaniem Fouriera

$$\oint_S -\nabla T(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{P}{\kappa},$$

gdzie  $T(\mathbf{r})$  jest polem skalarnym opisującym rozkład temperatury w przestrzeni, a  $P$  mocą ciepła przepływającego przez pewną zamkniętą powierzchnię  $S$ . Za-uważmy, że jest to analogiczne równanie do prawa Gaussa w elektrostatyce. Istotnie wprowadzając pole  $\mathbf{E} = -\nabla T$  mamy oczywiście

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{oraz} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\kappa},$$

gdzie  $\varrho$  jest gęstością mocy w  $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$ . Pole  $\mathbf{E}$  można rozumieć jako pole generowane przez *ładunki* – punktowe źródła ciepła. Wszelkie zagadnienia dotyczące rozkładu temperatury w przestrzeni dla różnych rozkładów źródeł można zatem rozwiązywać analogicznie jak w elektrostatyce. W szczególności znając rozwiązanie elektrostatyczne dla danego problemu możemy podać rozwiązanie jego termodynamicznego odpowiednika. Ciekawe są tutaj problemy dające się rozwiązać metodą obrazów. Jako przykład możemy podać rozkład temperatury w nieskończonej przestrzeni o współczynniku przewodzenia  $\kappa$ , w której umieściliśmy punktowe źródło ciepła o mocy  $P$ . Mamy

$$\mathbf{E} = \frac{P}{4\pi\kappa r^3} \mathbf{r},$$

skąd przyjmując  $T(r \rightarrow \infty) = 0$  otrzymujemy

$$T(\mathbf{r}) = \frac{P}{4\pi\kappa r}.$$

### 2.7.4 Płyny

Płyn to każda substancja, która charakteryzuje się łatwością zmieniania wzajemnego położenia elementów nawet dla niewielkich sił.

#### **Prawo Pascala**

Ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane równomierne na wszystkie części płynu oraz ścianki naczynia.

#### **Prawo Archimedesesa**

Na ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu równa co do wartości ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.

Ciśnienie hydrostatyczne zależy tylko od wysokości słupa cieczy nad danym punktem i wynosi  $\rho gh$ .

Napięcie powierzchniowe  $\sigma$  definiujemy jako stosunek siły stycznej do powierzchni cieczy i długości konturu tej cieczy

$$\sigma = \frac{F}{l}.$$

Zakrzywiona powierzchnia cieczy wytwarza ciśnienie  $\Delta p$  dane wzorem Younga-Laplace'a

$$\Delta p = \sigma \frac{dA}{dV},$$

gdzie  $dA$  jest zmianą powierzchni cieczy spowodowaną zmianą jej objętości o  $dV$ . Dla sferycznej bańki o promieniu  $R$  i grubości powłoki  $h \ll R$  mamy  $\Delta p = 4\sigma/R$ .

Dla płynu doskonałego (nieściśliwego i nielepkiego), prawdziwe jest, że podczas jego przepływu  $Sv = \text{const}$  (rów. ciągłości). Jeżeli przepływ płynu doskonałego jest ustalony i bezwirowy to spełnione jest równanie Bernoulliego

$$p_{\text{zew}} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}.$$

Jeśli  $E$  oznacza energię mechaniczną układu o zmiennej masie, a  $v_{\text{out}}$  szybkość chwilową ubywającej masy  $dm$  to zachodzi

$$dE + \frac{1}{2}v_{\text{out}}^2 dm = 0.$$

## 3 Elektrodynamika

*I was at first almost frightened when I saw such mathematical force made to bear upon the subject, and then wondered to see that the subject stood it so well.*

Michael Faraday

Nazwa	Symbol	Wartość
Prędkość światła w próżni	$c$	$299\,792\,458\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Stała magnetyczna	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{N} \cdot \text{A}^2$
Stała elektryczna	$\epsilon_0$	$\frac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^7\,\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$
Stała grawitacji	$G$	$6.674 \cdot 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Stała Plancka	$h$	$6.626 \cdot 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}$

Tabela 3: Wybrane stałe uniwersalne

### 3.1 Elektrostatyka

Zasadnicze własności ładunku elektrycznego:

1. Istnieją dwa rodzaje ładunków elektrycznych, które nazywamy ładunkami *dodatnimi* i *ujemnymi*.
2. Globalny ładunek elektryczny jest zachowany (prawo globalnego zachowania ładunku elektrycznego).
3. Lokalny ładunek elektryczny jest zachowany (prawo lokalnego zachowania ładunku).
4. Ładunek elektryczny jest skwantowany, występuje tylko w dyskretnych porcjach będących całkowitymi wielokrotnościami ładunku elementarnego  $e$ .

#### 3.1.1 Prawo Coulomba

##### Prawo Coulomba

Siła oddziaływania dwóch dowolnych ciał punktowych obdarzonych ładunkiem jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{\mathcal{R}^3} \mathcal{R}.$$

Definiujemy pole elektryczne  $\mathbf{E}$  jako stosunek siły elektrycznej  $\mathbf{F}$  działającej na niewielki ładunek próbny  $q$  do wartości tego ładunku. Pole elektryczne wytwarzane przez punktowy **stacjonarny** ładunek  $Q$  jest więc dane wzorem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{kQ}{r^3} \mathbf{r}.$$

Pole  $\mathbf{E}$  spełnia zasadę superpozycji i jest to fakt doświadczalny tj. pole elektryczne utworzone przez  $N$  ładunków punktowych jest sumą pól utworzonych przez poszczególne ładunki

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_{\alpha}.$$

Dla ciągłych rozkładów ładunków mamy analogicznie

$$\mathbf{E} = k \int_{\ell} \frac{\lambda \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} d\ell \cong k \int_S \frac{\sigma \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} dS \cong k \int_V \frac{\rho \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} dV,$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  to odpowiednio liniowa, powierzchniowa i objętościowa gęstość ładunku. Korzystając z powyższych wzorów obliczmy  $\mathbf{E}$  dla następujących rozkładów:

1. Pole elektryczne w punkcie znajdującym się na osi obręczy o promieniu  $R$  jednorodnie naładowanej z gęstością  $\lambda$  w odległości  $z$  od jej środka

$$\mathbf{E} = k \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} (z\hat{\mathbf{z}} + R\hat{\mathbf{s}}) d\phi = \frac{2\pi Rk\lambda z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

2. Pole elektryczne w punkcie znajdującym się na osi cienkiego krążka o promieniu  $R$  jednorodnie naładowanego z gęstością  $\sigma$  w odległości  $z$  od jej środka

$$\mathbf{E} = k \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma}{(s^2 + z^2)^{3/2}} (s\hat{\mathbf{s}} + z\hat{\mathbf{z}}) s d\phi ds = \frac{\sigma \hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

Zauważmy przy tym, że dla  $R \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3. Pole elektryczne w punkcie znajdującym się na symetralnej pręta o długości  $L$  naładowanego jednorodnie z gęstością  $\lambda$  w odległości  $x$  od jego środka

$$\mathbf{E} = k \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}) dy = \frac{\lambda L \hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{x^2 + L^2/4}}$$

Zauważmy przy tym, że dla  $L \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{\mathbf{x}}.$$

4. Pole elektryczne w punkcie znajdującym się na prostej prostopadłej do płaszczyzny cienkiej płyty kwadratowej o boku  $a$  naładowanej jednorodnie z gęstością  $\sigma$ , przechodzącej przez środek geometryczny kwadratu, w odległości  $z$  od niego

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= k\sigma \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{y}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy \\ &= \frac{\sigma \hat{\mathbf{z}}}{\pi \epsilon_0} \arctan \left\{ \frac{a^2}{2z\sqrt{2a^2 + 4z^2}} \right\}.\end{aligned}$$

### Prawo Gaussa

Dla dowolnego rozkładu ładunków (nawet rozkładów niestacjonarnych, którymi nie zajmujemy się w elektrostatyce) zachodzi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Korzystając z twierdzenia Greena możemy podać równoważną postać prawa Gaussa

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0},$$

gdzie  $Q_{\text{tot}}$  jest całkowitym ładunkiem zawartym w przestrzeni ograniczonej powierzchnią zamkniętą  $\mathcal{S}$ . Korzystając z prawa Gaussa łatwo podać rozwiązanie  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  dla szczególnych, symetrycznych rozkładów:

1. Pole elektryczne jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $R$  i ładunku całkowitym  $Q$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} kQ\mathbf{r}/R^3 & \text{dla } r < R \\ kQ\mathbf{r}/r^3 & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

2. Pole elektryczne jednorodnie naładowanego z gęstością  $\rho$  nieskończonego cylindra o promieniu  $R$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2\pi k\rho\mathbf{s} & \text{dla } s < R \\ 2\pi k\rho R^2\mathbf{s}/s^2 & \text{dla } s \geq R \end{cases}$$

3. Pole elektryczne jednorodnie naładowanej z gęstością  $\sigma$  nieskończonej płaskiej powierzchni

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma \hat{\mathbf{n}}}{2\epsilon_0}$$

4. Pole elektryczne dwóch jednorodnie naładowanych z gęstościami odpowiednio  $\sigma$  i  $-\sigma$  nieskończonych, płaskich powierzchni w odległości  $w$  od siebie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma \hat{\mathbf{n}}}{\epsilon_0} \quad \text{między płytami i } 0 \text{ w pozostałym obszarze.}$$

5. Pole elektryczne w obszarze przekrywania się dwóch kul naładowanych jednorodnie z gęstościami odpowiednio  $\rho$  i  $-\rho$ .

Rozpatrzmy dowolny punkt  $P$  w obszarze przenikania. Z zasady superpozycji  $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_+(P) + \mathbf{E}_-(P)$ , gdzie z prawa Gaussa

$$\mathbf{E}_+(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{\mathcal{O}_+ P} \quad \text{i} \quad \mathbf{E}_-(P) = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{\mathcal{O}_- P},$$

gdzie  $\mathcal{O}_\pm$  to środek odpowiedniej kuli. Mamy zatem

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\rho}{\epsilon_0} (\overrightarrow{\mathcal{O}_+ P} - \overrightarrow{\mathcal{O}_- P}) = -\frac{\rho \mathbf{d}}{3\epsilon_0},$$

gdzie  $d$  jest odległością między środkami kul, a  $\mathbf{d}$  to wektor łączący środek ujemnej kuli z dodatnią. Widzimy, że w obszarze przenikania pole elektryczne jest jednorodne.

W elektrostatyce  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , istotnie łatwo pokazać (np. korzystając ze wzorów na rotację we wsp. sferycznych, przy czym umieszczamy ładunek w punkcie  $\mathbf{R} \neq 0$  tj. nie w środku u. współrzędnych), że dla ładunku punktowego jest to prawda, ale z zasady superpozycji wynika, że pole elektryczne dowolnego rozkładu ładunków jest sumą wektorową pól elektrycznych wytwarzanych przez ładunki elementarne, zatem dla dowolnego statycznego pola  $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^N (\nabla \times \mathbf{E}_\alpha) = 0.$$

Z twierdzenie o polach bezwirowych wiemy więc, że istnieje funkcja  $\varphi$  taka, że  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ , funkcję tą nazywamy potencjałem pola elektrycznego i można ją obliczyć korzystając ze wzoru

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}.$$

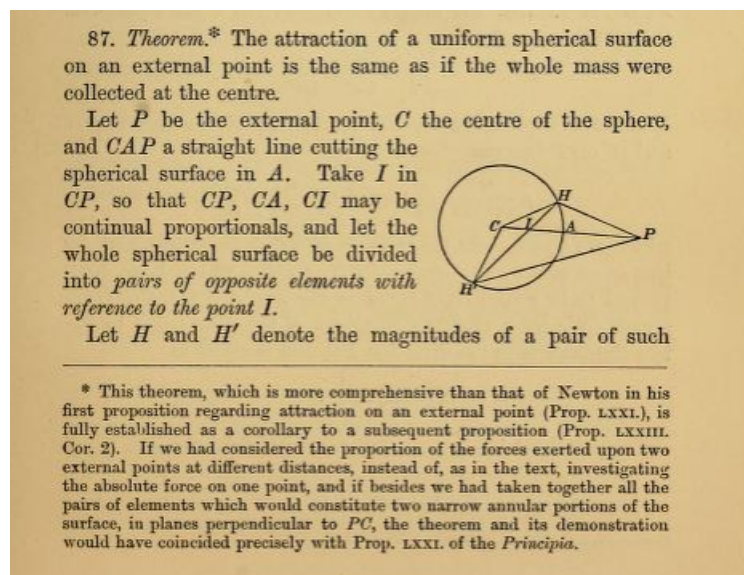
Dla ładunku punktowego przyjmując  $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$  otrzymujemy z powyższego

$$\varphi(r) = \frac{kQ}{r}.$$

Przy obliczaniu  $\varphi(\mathbf{r})$  dla zadanego pola  $\mathbf{E}$  warto pamiętać, że z twierdzenia o polach bezwirowych całka w powyższym wzorze nie zależy od wyboru krzywej

między skrajnymi punktami, warto więc wybierać krzywe tak, aby rachunki były jak najprostsze. Potencjał  $\varphi$  również spełnia zasadę superpozycji tj. potencjał zlokalizowanego układu ładunków jest sumą potencjałów ładunków go tworzących. Należy jednak uważać przy nieskończonych rozkładach ładunków, gdyż wówczas przyjęcie  $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$  prowadzi do sprzeczności, więc nie możemy naiwnie sumować (całkować) wzoru na potencjał ładunku punktowego. Poniżej zamieszczam ciekawe zadanie polegające na przybliżonym wyznaczeniu potencjału generowanego przez zlokalizowany, ciągły układ ładunków.

***Geometrical Investigations regarding Spherical Conductors*** by William Thomson Lord Kelvin (*Reprint of papers on electrostatics and magnetism*)



Rysunek 4: Page 57. from Thomson's *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*



elements, situated respectively at the extremities of a chord  $HH'$ ; and let  $\omega$  denote the magnitude of the solid angle subtended by either of these elements at the point  $I$ .

We have (§ 85),

$$H = \frac{\omega \cdot IH^2}{\cos CHI}, \text{ and } H' = \frac{\omega \cdot IH'^2}{\cos CH'I}.$$

Hence, if  $\rho$  denote the density of the surface (§ 69), the attractions of the two elements  $H$  and  $H'$  on  $P$  are respectively

$$\rho \frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{IH^2}{PH^2}, \text{ and } \rho \frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{IH'^2}{PH'^2}.$$

Now the two triangles  $PCH$ ,  $HCI$  have a common angle at  $C$ , and, since  $PC:CH::CH:CI$ , the sides about this angle are proportional. Hence the triangles are similar; so that the angles  $CPH$  and  $CHI$  are equal, and

$$\frac{IH}{HP} = \frac{CH}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

In the same way it may be proved, by considering the triangles  $PCH'$ ,  $H'CI$ , that the angles  $CPH'$  and  $CH'I$  are equal, and that

$$\frac{IH'}{H'P} = \frac{CH'}{CP} = \frac{a}{CP}.$$

Hence the expressions for the attractions of the elements  $H$  and  $H'$  on  $P$  become

$$\rho \frac{\omega}{\cos CHI} \cdot \frac{a^2}{CP^2}, \text{ and } \rho \frac{\omega}{\cos CH'I} \cdot \frac{a^2}{CP^2},$$

which are equal, since the triangle  $HCH'$  is isosceles; and, for the same reason, the angles  $CPH$ ,  $CPH'$ , which have been proved to be respectively equal to the angles  $CHI$ ,  $CH'I$ , are equal. We infer that the resultant of the forces due to the two elements is in the direction  $PC$ , and is equal to

$$2\omega \cdot \rho \cdot \frac{a^2}{CP^2}.$$

To find the total force on  $P$ , we must take the sum of all

\* From this we infer that the ratio of  $IH$  to  $HP$  is constant, whatever be the position of  $H$  on the spherical surface, a well-known proposition.—(Thomson's *Euclid*, VI. Prop. G.)

**Zadanie.** Dany jest prostopadłościan o wymiarach  $2a \times a \times a$  jednorodnie naładowany z gęstości ładunku  $-\rho$  (ładunek ten jest ujemny). Na jednej z jego dłuższych krawędzi znajduje się bardzo cienka rurka, w której porusza się niewielka kulka o masie  $m$  i ładunku  $q$  (ładunek ten jest dodatni). Kulka wykonuje oscylacje wokół środka krawędzi sześcianu o amplitudzie dużo mniejszej niż  $a$ . Cały układ znajduje się w nieważkości. Wyznacz okres oscylacji kulki.

*Rozwiązanie.*

Rozpatrzmy sześcian o boku  $2a$  jednorodnie naładowany z gęstością ładunku  $\rho$ . Obierzmy kartezjański układ współrzędnych, którego środek pokrywa się ze środkiem symetrii sześcianu, a osie są równoległe do odpowiednich krawędzi sześcianu. Potencjał w punkcie  $P(0, 0, \delta)$  wynosi (dla ustalenia uwagi przyjmijmy  $q > 0$ , a więc  $\rho < 0$ )

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{-k|\rho|}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \delta)^2}} dx dy dz \\ &= -k|\rho| \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a f(\delta) dx dy dz .\end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru Taylora możemy przybliżyć  $f(\delta)$  dla małych  $\delta$  wokół 0

$$\begin{aligned}f(\delta) &\approx f(0) + f'(0)\delta + \frac{1}{2}f''(0)\delta^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\delta - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\delta^2 .\end{aligned}$$

Zauważmy, że wprowadzając funkcję  $g(x, y, z)$

$$g(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

mamy  $f'(0) = g$  i  $f''(0) = -\frac{\partial g}{\partial z}$ . Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= \varphi(0) - k|\rho|\delta \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a g dz dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2}k|\rho|\delta^2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\partial g}{\partial z} dz dx dy .\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że drugi człon jest równy 0, gdyż

$$\int_{-a}^a \frac{z}{(A + z^2)^{3/2}} dz = - \left[ \frac{1}{\sqrt{A + z^2}} \right]_{-a}^a = 0 ,$$

otrzymujemy zatem potencjał swobodnego oscylatora harmonicznego. Obliczmy zatem całkę

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\partial g}{\partial z} dz dx dy = \frac{4\pi}{3} .$$

Z powyższego więc

$$\varphi(\delta) = \varphi(0) + \frac{1}{2} \frac{4\pi k|\rho|}{3} \delta^2 .$$

Z symetrii i zasady superpozycji potencjałów wynika, że przyczynki do  $\varphi$  od każdego z prostopadłościanów o wymiarach  $2a \times a \times a$  są takie same i równe  $\varphi/4$ , zatem energia potencjalna  $U(\delta)$  cząstki w naszym zadaniu wynosi

$$U(\delta) = U(0) + \frac{1}{2} \frac{k|\rho|\pi q}{3} \delta^2 = U(0) + \frac{1}{2} K \delta^2.$$

Jest to energia potencjalna swobodnego oscylatora harmonicznego o okresie  $T$  równym

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{\pi k|q\rho|}} = 2\pi \sqrt{\frac{12m\epsilon_0}{|q\rho|}}.$$

### 3.1.2 Własności przewodników

1. Wewnątrz przewodnika potencjał jest stały, więc  $\mathbf{E} = 0$ .
2. Wewnątrz przewodnika  $\rho = 0$ .
3. Na powierzchni przewodnika potencjał jest stały, a pole elektryczne może mieć jedynie składową normalną do tej powierzchni w danym punkcie.
4. Pole elektryczne ma nieciągłość na powierzchni przewodnika, potencjał jest jednak ciągły.
5. Nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni przewodnik.

### 3.1.3 Kondensatory

Jeśli na dwóch odizolowanych przewodnikach umieścimy ładunki odpowiednio  $Q$  i  $-Q$  to różnica potencjałów między przewodnikiem naładowanym dodatnio, a przewodnikiem naładowanym ujemnie:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}$$

jest proporcjonalna do  $Q$ . Stałą proporcjonalności nazywamy *pojemnością* układu

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Obliczmy pojemności następujących układów o wysokiej symetrii:

1. Kondensator płaski wykonany z dwóch równoległych płaszczyzn o identycznym kształcie i polu powierzchni  $A$  umieszczonych w odległości  $w \ll \sqrt{A}$  od siebie.

Możemy z dobrym przybliżeniem przyjąć, że jeśli płaszczyzny te są naładowane jednorodnie z gęstościami odpowiednio  $\sigma$  i  $-\sigma$  to

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma \hat{\mathbf{n}}}{\epsilon_0} \quad \text{między płytami i } 0 \text{ w pozostałym obszarze.}$$

Z powyższego zatem

$$U = - \int_w^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma w}{\epsilon_0} = \frac{Qw}{\epsilon_0 A},$$

skąd

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{w}.$$

2. Układ koncentrycznych powłok kulistych o promieniach  $a$  i  $b$  ( $b > a$ ) i naładowanych odpowiednio ładunkami  $Q$  i  $-Q$ . Z prawa Gaussa

$$\mathbf{E} = \begin{cases} kQ\mathbf{r}/r^3 & \text{dla } a \leq r \leq b \\ 0 & \text{w pozostałym obszarze} \end{cases}.$$

Z powyższego zatem

$$U = - \int_b^a \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ(b-a)}{ab},$$

skąd

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}.$$

Zauważmy przy tym, że dla  $b \gg a$  otrzymujemy

$$C = 4\pi\epsilon_0 a.$$

3. Układ koncentrycznych, długich powłok walcowych o promieniach  $a$  i  $b$ , naładowanych z gęstościami odpowiednio  $\lambda$  i  $-\lambda$ . Z prawa Gaussa mamy

$$\mathbf{E}(s) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}} \quad \text{dla } a < s < b,$$

skąd

$$U = - \int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} ds = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Definiując pojemność na jednostkę długości  $\mathcal{C}$  otrzymujemy

$$\mathcal{C} = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

### 3.1.4 Energia pola elektrycznego

Jeśli w pewnym obszarze istnieje pole  $\mathbf{E}$  to w tym obszarze zgromadzona jest energia o gęstości

$$\varkappa_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Korzystając z gęstości energii możemy obliczyć energię jaka była potrzebna do stworzenia pewnego rozkładu ładunków. Rozpatrzmy prosty przykład jednorodnie naładowanej kuli o promieniu  $R$  i całkowitym ładunku  $Q$ :

$$\varkappa_e = \begin{cases} \epsilon_0 k^2 Q^2 r^2 / 2R^6 & \text{dla } r < R \\ \epsilon_0 k^2 Q^2 / 2r^4 & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

$$W = \int_0^\infty \varkappa_e(r) dr = \frac{3kQ^2}{5R}.$$

Taki sposób liczenia energii działa dobrze do ciągłych rozkładów ładunków. Zauważmy jednak, że obliczenie w ten sposób energii potrzebnej do stworzenia układu składającego się z pojedynczego elektronu daje

$$W_{\text{electron}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty.$$

### 3.1.5 Dipol elektryczny

Dipolem elektrycznym nazywamy układ dwóch ładunków  $q$  i  $-q$  znajdujących się w ustalonej odległości  $d$  od siebie. Gdy  $d > 0$  dipol taki nazywamy *dipolem fizycznym* i dla odległości  $r \gg d$  pole takiego dipola możemy przybliżyć polem tzw. *dipola idealnego*. Rozpatrzmy dipol fizyczny składający się z dwóch ładunków  $q$ ,  $-q$  w odległości  $d$  od siebie. Obierzmy układ współrzędnych kartezjańskich, którego oś  $z$  pokrywa się z osią dipola, a środek ze środkiem dipola. Układ jest zlokalizowany, więc potencjał  $\varphi(\mathbf{r})$  możemy obliczyć jako sumę:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_+ + \varphi_- = kq \left( \frac{1}{\mathcal{R}_+} + \frac{1}{\mathcal{R}_-} \right).$$

Łatwo zauważyć, że

$$\mathcal{R}_\pm = \sqrt{r^2 + d^2/4 \mp rd \cos \theta},$$

gdzie  $\theta$  jest kątem zenitalnym. Dla  $r \gg d$  możemy przybliżyć

$$\mathcal{R}_\pm \approx \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta} = r \sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta},$$

korzystając z rozwinięcia Taylora 1-go rzędu mamy zatem

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right),$$

czyli

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad \text{dla } r \gg d.$$

Dipolem idealnym nazywamy układ, dla którego powyższy wzór jest prawdziwy dla każdego  $r$ . Powyżej wprowadziliśmy elektryczny moment dipolowy  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ . Mając potencjał możemy obliczyć natężenie pola  $\mathbf{E}$  generowanego przez idealny dipol

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Jeśli idealny dipol  $\mathbf{p}$  umieścimy w zewnętrznym polu  $\mathbf{E}$  to można pokazać, że: posiada on energię  $W$

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E},$$

działa na niego moment siły  $\boldsymbol{\Gamma}$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

oraz siła  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

### 3.1.6 Pola elektryczne w materii

Jeśli kawałek dielektryka umieścimy w zewnętrznym polu  $\mathbf{E}$  to wewnątrz dielektryka indukuje się wiele małych dipoli, skierowanych zgodnie z kierunkiem pola – materiał zostaje spolaryzowany. Definiujemy wektor polaryzacji elektrycznej  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}$$

określający elektryczny moment dipolowy na jednostkę objętości substancji. Ponieważ w materiale pojawia się wiele małych dipoli to indukuje się również pewien ładunek, który nazywamy *związany*. Jego gęstość objętościowa i powierzchniowa wynoszą odpowiednio

$$\rho_{\text{zw}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{\text{zw}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Pole elektryczne wytwarzane przez spolaryzowaną materię jest więc takie, jak od ładunku związanego o gęstości powierzchniowej  $\sigma_{\text{zw}}$  i objętościowej  $\rho_{\text{zw}}$ . Jeśli w

pewnej przestrzeni znajdują się zarówno ładunki związane i ładunki swobodne, które razem generują wypadkowe pole  $\mathbf{E}$  to z prawa Gaussa mamy

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_{\text{sw}} + \rho_{\text{zw}} = \rho_{\text{sw}} - \nabla \cdot \mathbf{P},$$

zatem wprowadzając wektor  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  (przesunięcia elektrycznego) mamy

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{sw}}.$$

Z tw. Greena możemy podać równoważną postać

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{sw}},$$

gdzie  $Q_{\text{sw}}$  jest całkowitym swobodnym, tj. niezwiązanym z materią dielektryka, ładunkiem zawartym w przestrzeni ograniczonej powierzchnią zamkniętą  $\mathcal{S}$ . Równanie to nie jest żadnym nowym prawem, a jedynie sprytnym podzieleniem gęstości ładunku na część swobodną i związaną z polaryzowaną materią. Zauważmy jednocześnie, że powyższe równanie nie wyznacza pola  $\mathbf{D}$  jednoznacznie, gdyż znamy tylko jego dywergencję, natomiast rotacja (w elektrostatyce) wynosi

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P},$$

co w ogólności jest różne od 0 i musimy znać jawną postać  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ , aby wyznaczyć pole  $\mathbf{D}$ .

## Dielektryki liniowe

Dla izotropowych i jednorodnych dielektryków liniowych zachodzi

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

gdzie  $\mathbf{E}$  jest **wypadkowym** polem elektrycznym pochodzącym zarówno od ładunków swobodnych jak i związanej materii, a  $\chi_e$  to tzw. *podatność elektryczna*. W takim przypadku zachodzi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}.$$

## Zadania.

1. Znaleźć pole  $\mathbf{E}$  pochodzące od jednorodnie spolaryzowanej kuli o polaryzacji  $\mathbf{P}$ .

W przypadku jednorodnie spolaryzowanej kuli mamy tak naprawdę do czynienia z dwiema kulami ładunku, które się przenikają. Korzystając z wyników zadania o dwóch przekrywających się kulach mamy

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{d},$$

w środku kuli i pole idealnego dipola umieszczonego na zewnątrz. Moment dipolowy wynosi

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \mathbf{d} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P}.$$

Mamy zatem

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\mathbf{P}/3\epsilon_0 & \text{wewnątrz kuli} \\ \mathbf{E}_{\text{dip}} & \text{na zewnątrz kuli} \end{cases}.$$

2. *Kula wykonana z jednorodnego, izotropowego i liniowego dielektryka o podatności  $\chi$  została umieszczona w jednorodnym zewnętrznym polu  $\mathbf{E}_0$ . Znaleźć natężenie pola.*

Polaryzacja kuli będzie jednorodna, zatem

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}$$

oraz mamy

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{in}},$$

skąd otrzymujemy

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \left( \frac{3}{\chi + 3} \right) \mathbf{E}_0.$$

Na zewnątrz mamy natomiast

$$\mathbf{E}_{\text{out}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 + \frac{|\mathbf{P}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

gdzie

$$|\mathbf{P}| = \frac{4}{3}\pi R^3 |\mathbf{P}| = \left( \frac{\chi}{\chi + 3} \right) 4\pi\epsilon_0 R^3 |\mathbf{E}_0|.$$

W granicznym przypadku, w którym dielektryk przechodzi w przewodnik tj.  $\chi \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = 0$$

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_0 + \frac{R^3}{r^3} |\mathbf{E}_0| (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$



### 3.1.7 Równanie Poissona i Laplace’a

Podstawiając  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  do prawa Gaussa otrzymujemy tzw. równanie Poissona

$$\nabla^2\varphi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0,$$

będące naszym centralnym zainteresowaniem w elektrostatyce, gdyż jego rozwiązaniem dla zadanego rozkładu  $\rho(\mathbf{r})$  jest potencjał elektryczny. Jeśli w interesującym nas obszarze  $\rho = 0$ , wówczas otrzymujemy równanie Laplace’a

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

#### **Twierdzenie o jednoznaczności**

Rozwiązanie równania Poissona w pewnym obszarze  $\mathcal{V}$  jest określone jednoznacznie, jeśli podana jest wartość rozwiązania  $\varphi$  na powierzchni  $\mathcal{S}$  będącej brzegiem obszaru  $\mathcal{V}$ , przy czym dopuszczalne jest, aby w  $\mathcal{V}$  znajdowały się *wyspy* o ile  $\varphi$  jest zadane również na wszystkich powierzchniach je ograniczających.

### 3.1.8 Warunki brzegowe w elektrostatyce

Niech  $\mathcal{S}$  oznacza brzeg pewnego obszaru  $\mathcal{V}$ . Wówczas warunki brzegowe na powierzchni  $\mathcal{S}$  mają postać:

- $E_{\text{nad}}^{\parallel} - E_{\text{pod}}^{\parallel} = 0$
- $D_{\text{nad}}^{\perp} - D_{\text{pod}}^{\perp} = \sigma_{\text{sw}},$

gdzie indeksy *nad* i *pod* oznaczają, że bierzemy odpowiednio składowe równoległe lub prostopadłe do powierzchni  $\mathcal{S}$  tuż nad lub tuż pod tą powierzchnią. Dla izotropowego, jednorodnego i liniowego ośrodka o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon$  umieszczonego w próżni, dla którego  $\sigma_{\text{sw}} = 0$ , zachodzi

$$\frac{\partial\varphi_o}{\partial n} = \epsilon \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}, \quad \varphi_i = \varphi_o.$$

Jeśli  $\mathcal{S}$  jest brzegiem przewodnika to drugi warunek możemy zapisać jako

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\mathcal{S}},$$

gdzie  $\hat{\mathbf{n}}$  jest wektorem normalnym do  $\mathcal{S}$ . Siła na jednostkę powierzchni działająca na  $\mathcal{S}$  wynosi

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma}{2}(\mathbf{E}_{\text{nad}} + \mathbf{E}_{\text{pod}}),$$

siła na jednostkę objętości działająca na  $\mathcal{V}$  wynosi

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

### 3.1.9 Metoda obrazów

Na tw. o jednoznaczności opiera się jedna z najładniejszych metod rozwiązywania równania Poissona w szczególnych przypadkach. Metoda ta działa w ogólności, nie tylko w elektrostatyce. Wystarczy bowiem zgadnąć funkcję  $\varphi$ , która spełnia wszystkie warunki brzegowe, a twierdzenie o jednoznaczności gwarantuje nam, że jest to właściwe (i jedyne) rozwiązanie. Często okazuje się, że dany układ jest w pewnym sensie równoważny układowi złożonemu ze skończonej liczby ładunków punktowych.

#### Zadania

1. Ładunek punktowy umieszczony nad nieskończoną przewodzącą płaszczyzną

Jedynymi warunkami brzegowymi są tutaj:  $\varphi(x, y, 0) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$  i ładunek  $q$  umieszczony w  $(0, 0, d)$ . Warunki te można spełnić umieszczając ładunek obrazowy  $-q$  w  $(0, 0, -d)$ . Wówczas potencjał dla  $z > 0$  spełnia wszystkie warunki brzegowe i nie zmieniliśmy rozkładu dla  $z > 0$ , zatem z tw. o jednoznaczności jest to właściwy potencjał. Potencjał dla  $z > 0$  ma więc postać

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}}.$$

Dla  $z < 0$  oczywiście  $\varphi = 0$ . Gęstość powierzchniowa indukowanego ładunku wynosi natomiast

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{-qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Siła działająca na  $q$  wynosi

$$\mathbf{F}(d) = -\frac{kq^2}{4d^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

Energia takiego układu wynosi więc

$$U = - \int_{\infty}^d F_z(z') \cdot dz' = -\frac{kq^2}{4d}.$$

2. Ładunek punktowy umieszczony między dwiema prostopadłymi półpłaszczyznami

Warunkami brzegowymi są:  $\varphi(0, y, z) = 0$ ,  $\varphi(x, 0, z) = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$  oraz ładunek  $q$  umieszczony w  $(b, a, 0)$ . Łatwo sprawdzić, że potencjał

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\varsigma_1} - \frac{1}{\varsigma_2} + \frac{1}{\varsigma_3} - \frac{1}{\varsigma_4} \right),$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \\ \varsigma_2 &= \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2} \\ \varsigma_3 &= \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2} \\ \varsigma_4 &= \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2},\end{aligned}$$

spełnia zadane warunki brzegowe, zatem z tw. o jednoznaczności jest to właściwy potencjał. Jest to oczywiście potencjał generowany przez układ czterech ładunków  $q, -q, q, -q$  umieszczonych w wierzchołkach prostokąta o bokach  $2a$  i  $2b$ . Siła działająca na ładunek  $q$  wynosi

$$\mathbf{F}(b, a) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[ \hat{\mathbf{x}} \left( \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left( \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

Energia układu wynosi natomiast

$$\begin{aligned}U &= - \int_{\infty}^x F_x(x', \infty) dx' - \int_{\infty}^y F_y(x, y') dy' \\ &= - \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).\end{aligned}$$

Okazuje się, że skończoną liczbę ładunków obrazowych można uzyskać tylko dla półpłaszczyzn ustawionych pod kątem  $\alpha$  takim, że  $\pi = n\alpha$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Liczba potrzebnych ładunków obrazowych wynosi wówczas  $2\pi/\alpha - 1$ .

3. Ładunek punktowy umieszczony nad półprzestrzenią wypełnioną dielektrykiem o podatności  $\chi$

Zakładając liniowy, jednorodny i izotropowy dielektryk warunki brzegowe na powierzchni granicznej mają postać

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0^+} = (1 + \chi) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0^-}, \quad \varphi(x, y, 0^+) = \varphi(x, y, 0^-),$$

gdzie równości zachodzą dla wszystkich  $x, y$ . Poszukajmy rozwiązań w postaci superpozycji potencjałów ładunków punktowych

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}},$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}},$$

gdzie  $\varphi_1$  określa potencjał dla  $z > 0$ , a  $\varphi_2$  dla  $z < 0$ . Z warunku ciągłości potencjału mamy

$$q + q' = q'',$$

natomiast z drugiego warunku mamy

$$q - q' = (1 + \chi)q'',$$

skąd otrzymujemy

$$q' = -\left(\frac{\chi}{\chi + 2}\right)q, \quad q'' = \left(\frac{2}{\chi + 2}\right)q.$$

Dla podanych wartości ładunków  $q'$  i  $q''$  powyższy potencjał spełnia wszystkie warunki brzegowe (łącznie z  $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$ ), zatem z tw. o jednoznaczności jest to właściwy potencjał. Możemy zatem wyznaczyć rozkład  $\sigma_{zw}(\mathbf{r})$  ładunku na powierzchni dielektryka

$$\sigma_{zw}(x, y) = -\epsilon_0 \left( \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0+} - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0-} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\chi}{\chi + 2} \right) \frac{-qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Siła działająca na ładunek wynosi natomiast

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\chi}{\chi + 2}\right) \frac{kq^2}{4d^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

#### 4. Dwie przewodzące rury

Rozpatrzmy dwie nieskończone przewodzące rury o promieniach  $a$ , których środki są oddalone o  $2d$ . Pierwsza rura ma potencjał  $-V_0$  względem pewnego punktu odniesienia, a druga  $+V_0$ . Pokażemy, że takie powierzchnie ekwipotencjalne można uzyskać dla układu dwóch naładowanych nici  $-\lambda$  i  $+\lambda$  oddalonych o  $2b$  oraz wyznaczmy odpowiednie  $\lambda$  i  $b$ . Istotnie rozpatrzmy dwie naładowane nici. Przyjmując początek układu współrzędnych w

połowie między nimi z osią  $z$  skierowaną prostopadłe do wyznaczonej przez nie płaszczyzny mamy

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_+}{C} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_-}{C} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{s_-}{s_+}.$$

Jednocześnie

$$s_{\pm} = \sqrt{(y \mp b)^2 + z^2},$$

zatem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(y+b)^2 + z^2}{(y-b)^2 + z^2}.$$

Musimy znaleźć rozwiązanie równania

$$K = \frac{(y+b)^2 + z^2}{(y-b)^2 + z^2},$$

gdzie  $K = \exp(4\pi\epsilon_0 V_0/\lambda)$ . Przekształcając otrzymujemy

$$y^2 - 2b \left( \frac{K+1}{K-1} \right) y + b^2 + z^2 = 0.$$

Równanie okręgu ma postać

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - R^2 + z^2 = 0.$$

Porównując te wyrażenia otrzymujemy

$$y_0 = b \left( \frac{K+1}{K-1} \right) = b \coth \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}$$

$$R = \sqrt{y_0^2 - b^2}.$$

Znając  $R = a$  i  $y_0 = d$  możemy wyznaczyć  $b$  i  $\lambda$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\cosh^{-1}(d/a)}$$

$$b = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

Potencjał w całej przestrzeni wynosi więc

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{V_0}{2 \cosh^{-1}(d/a)} \ln \left\{ \frac{(y + \sqrt{d^2 - a^2})^2 + z^2}{(y - \sqrt{d^2 - a^2})^2 + z^2} \right\}.$$

## 5. Przewodzący, cienki dysk

Chcemy wyznaczyć gęstość powierzchniową ładunku  $\sigma$  na cienkim metalowym dysku o promieniu  $R$  umieszczonym w pustej przestrzeni, na którym utrzymywany jest stały potencjał  $V_0$  (lub dysk naładowany jest całkowitym ładunkiem  $Q$ ). Oczywiście ze względu na symetrię  $\sigma$  może zależeć tylko od współrzędnej radialnej  $s$ .

Udowodnimy następujące twierdzenie: rozkład ładunku na powierzchni odosobnionego, metalowego dysku naładowanego ładunkiem  $Q$  jest taki, że infitezymalny ładunek  $dq = \sigma dS$  znajdujący się w punkcie  $X$  na powierzchni dysku jest równy ładunkowi znajdującemu się w punkcie przecięcia prostej prostopadłej do płaszczyzny dysku przechodzącej przez  $X$  z naładowaną jednorodnie z gęstością powierzchniową  $\sigma_0 = Q/4\pi R^2$  sferą, której kołem wielkim jest ów dysk. Istotnie rozpatrzmy dowolny punkt  $P$  na kole wielkim  $AB$  naładowanej sfery oraz dowolną cięciwę  $CD$  sfery zawierającą  $P$ . Infitezymalny ładunek zgromadzony w  $C$  i  $D$  wynosi odpowiednio

$$dq_C = \sigma_0 dS_C, \quad dq_D = \sigma_0 dS_D,$$

gdzie  $dS_C$ ,  $dS_D$  są infitezymalnymi fragmentami powierzchni sfery otaczającymi odpowiednio punkt  $C$  i  $D$ . W granicy zachodzi

$$\frac{dS_C}{dS_D} = \frac{PC^2}{PD^2}.$$

Rozpatrzmy teraz osobną sytuację, w której mamy cienki dysk  $AB$  naładowany w taki sposób, że  $dq_{C'} = dq_C$  i  $dq_{D'} = dq_D$ , gdzie  $C'$ ,  $D'$  są rzutami prostokątnymi punktów  $C$ ,  $D$  na koło wielkie  $AB$ . Oczywiście całkowity ładunek dysku wynosi wówczas  $Q$ . Pole elektryczne w punkcie  $P$  pochodzące od ładunków  $dq_{C'}$  i  $dq_{D'}$  wynosi

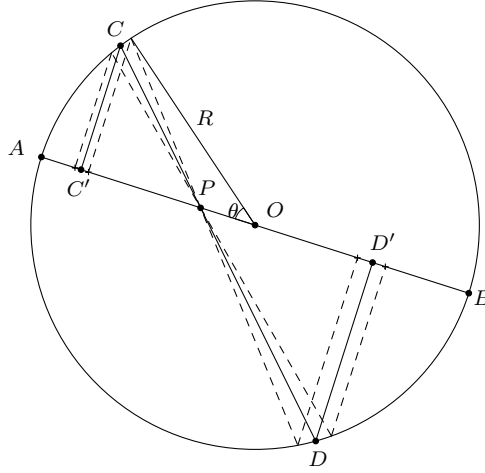
$$\frac{k\sigma_0 dS_C}{C'P^2} - \frac{k\sigma_0 dS_D}{D'P^2} = k\sigma_0 dS_D \left( \frac{PC^2}{PD^2 \cdot C'P^2} - \frac{1}{D'P^2} \right).$$

Z podobieństwa trójkątów  $\Delta C'CP$  i  $\Delta D'DP$  mamy

$$\frac{C'P}{CP} = \frac{D'P}{DP},$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{k\sigma_0 dS_C}{C'P^2} - \frac{k\sigma_0 dS_D}{D'P^2} = k\sigma_0 dS_D \left( \frac{PC^2}{PD^2 \cdot C'P^2} - \frac{1}{D'P^2} \right) = 0.$$



Rysunek 5: Konstrukcja poszukiwanego rozkładu  $\sigma$

Powtarzając konstrukcję dla wszystkich punktów dysku (po obu jego stronach) otrzymujemy  $\mathbf{E}(P) = 0$ , ale punkt  $P$  wybraliśmy dowolnie, zatem dla każdego punktu  $P$  należącego do dysku  $\mathbf{E}(P) = 0$ , więc potencjał wewnątrz dysku jest stały. Zauważmy jednak, że w ten sposób spełniliśmy wszystkie warunki brzegowe zagadnienia metalowego dysku naładowanego ładunkiem  $Q$  i umieszczonego w pustej przestrzeni tj. potencjał w obszarze dysku jest stały, a całkowity ładunek wynosi  $Q$ . Z tw. o jednoznaczności skonstruowany rozkład jest zatem poszukiwanym rozkładem dla metalowego dysku. Pozostaje wyznaczyć  $\sigma(C')$ . Mamy

$$\sigma(C') dS_{C'} = \sigma_0 dS_C$$

oraz

$$dS_{C'} = dS_C \frac{CC'}{R} = dS_C \frac{\sqrt{R^2 - OC'^2}}{R}.$$

Z powyższego otrzymujemy zatem

$$\sigma(C') = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - OC'^2}} = \frac{Q}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - OC'^2}}$$

po każdej stronie dysku. Oznaczając  $OC' = s$  mamy

$$\sigma(s) = \frac{Q}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Potencjał  $V_0$  możemy znaleźć wykonując elementarne całkowanie. Przyjmując  $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$  mamy

$$V_0 = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma(s)}{s} s \, ds \, d\phi = \frac{Q}{8\epsilon_0 R},$$

zatem

$$\sigma(s) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

Pojemność metalowego dysku o promieniu  $R$  wynosi z powyższego

$$C_{\text{disc}} = \frac{Q}{V_0} = 8\epsilon_0 R,$$

jednocześnie pojemność metalowej sfery o promieniu  $R$  wynosi

$$C_{\text{sphere}} = \frac{Q}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 R V_0}{V_0} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Stosunek tych pojemności wynosi

$$\frac{C_{\text{sphere}}}{C_{\text{disc}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ten stosunek został wyznaczony doświadczalnie przez H. Cavendisha, który otrzymał wartość 1.57.

## 6. Przewodząca wydłużona sferoida

Metoda obrazów jest niezwykle elementarnym, acz potężnym narzędziem. Można jednak odnieść wrażenie, iż poza typowymi układami, które znajdziemy w każdym podręczniku nie ma ona większych zastosowań. Poniżej przedstawiamy mało popularny układ, który daje się rozwiązać bez zaawansowanych metod matematycznych. Rozpatrzmy metalową powłokę w kształcie elipsoidy obrotowej danej równaniem

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie zakładamy  $a \geq b$ , tzn. elipsoida jest wydłużona. Niech  $A, B$  oznaczają ogniska tej elipsoidy. Załóżmy, że rozpatrywany przewodnik został umieszczony w próżni z dala od innych ładunków i jest na nim utrzymywany potencjał  $V_0$  względem nieskończoności. Wyznamy potencjał w dowolnym punkcie na zewnątrz elipsoidy. W myśl metody obrazów rozpatrzmy inny układ, w którym dany jest odcinek  $AB$  naładowany jednorodnie z gęstością



liniową ładunku  $\lambda$ . Pokażemy, że dla takiego układu powierzchnie ekwipotencjalne są wydłużonymi elipsoidami obrotowymi. Istotnie rozpatrzmy dowolny punkt  $S \in AB$  oraz dowolny punkt  $P \notin AB$ . Przyczynek do potencjału w punkcie  $P$  od punktu  $S$  wynosi

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{SP},$$

gdzie  $dx$  jest infinitezymalnym fragmentem odcinka  $AB$ . Z tw. Stewarta w trójkącie  $\triangle APB$  mamy natomiast

$$SP = \frac{1}{\sqrt{AB}} \sqrt{(AB-x)(AP^2 - ABx) + BP^2x},$$

gdzie  $x = AS$ . Z powyższego zatem

$$V(P) = \frac{\lambda\sqrt{AB}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{AB} \frac{dx}{\sqrt{(AB-x)(AP^2 - ABx) + BP^2x}}.$$

Wynikiem powyższej całki jest

$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{AP + BP + AB}{AP + BP - AB} \right\}.$$

Powierzchnie ekwipotencjalne są dane równaniem  $V(P) = V_0$ , skąd po przekształceniach otrzymujemy

$$AP + BP = AB \coth \left\{ \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} \right\} = \text{const.}$$

Zbiór punktów przestrzeni, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów  $A, B$  jest stała to wydłużona elipsoida obrotowa. Potencjał w dowolnym punkcie  $P$  na zewnątrz przewodzącej elipsoidy danej równaniem (6) jest więc taki jak od naładowanego jednorodnie z gęstością  $\lambda$  odcinka  $AB$ . Aby wyznaczyć równoważną gęstość  $\lambda$  przypomnijmy, że dla dowolnego punktu  $P$  należącego do elipsoidy obrotowej  $AP + BP = 2a$  oraz  $AB^2 = 4(a^2 - b^2)$ . Z powyższego zatem

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\tanh^{-1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\log \left\{ \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right\}}.$$

Całkowity ładunek zgromadzony na powierzchni przewodnika wynosi zatem

$$Q = \lambda \cdot AB = \frac{8\pi\epsilon_0 V_0 \sqrt{a^2 - b^2}}{\log \left\{ \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right\}},$$

skąd pojemność takiego układu to

$$C = \frac{8\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 - b^2}}{\log \left\{ \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right\}}.$$

Powyżej pokazaliśmy, że potencjał w dowolnym punkcie  $P$  na zewnątrz przewodzącej, utrzymywanej pod potencjałem  $V_0$  (lub równoważnie naładowanej ładunkiem  $Q = CV_0$ ), wydłużonej elipsoidy obrotowej o ogniskach  $A$ ,  $B$  i półosiach  $a$ ,  $b$  wynosi

$$V(P) = \frac{V_0}{\log \left\{ \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right\}} \log \left\{ \frac{AP + BP + AB}{AP + BP - AB} \right\}.$$

Wyznamy teraz gęstość powierzchniową ładunku zgromadzonego na powierzchni elipsoidy w dowolnym punkcie  $P$ , jeśli jej całkowity ładunek wynosi  $Q$ . Z prawa Gaussa mamy oczywiście

$$\sigma(P) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{P+},$$

gdzie  $\partial/\partial n$  oznacza różniczkowanie wzdłuż prostej normalnej do powierzchni przewodnika w punkcie  $P$ . Niech  $X$  oznacza punkt na zewnątrz przewodzącej elipsoidy, taki że odcinek  $PX$  jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do elipsoidy w punkcie  $P$ . Wówczas

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{P+} = \lim_{X \rightarrow P+} \frac{V(X) - V(P)}{PX}.$$

Oznaczmy  $\angle APB = 2\gamma$ . Z tw. cosinusów w trójkątach  $\triangle BPX$  i  $\triangle APX$  oraz własności stycznej do elipsy mamy

$$\begin{aligned} BX &= \sqrt{PX^2 + BP^2 + 2PX \cdot BP \cos \gamma}, \\ AX &= \sqrt{PX^2 + BP^2 + 2PX \cdot AP \cos \gamma}. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $PX = \varepsilon$ . Dla małych  $\varepsilon$  z rozwinięcia Taylora mamy

$$\begin{aligned} BX &\approx BP + \varepsilon \cos \gamma, \\ AX &\approx AP + \varepsilon \cos \gamma. \end{aligned}$$

Z powyższego zatem

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{P+} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \log \left\{ \frac{2a + AB + 2\varepsilon \cos \gamma}{2a - AB + 2\varepsilon \cos \gamma} \cdot \frac{2a - AB}{2a + AB} \right\}.$$

Dla małych  $\varepsilon$  z rozwinięcia Taylora mamy

$$\log \left\{ \frac{2a + AB + 2\varepsilon \cos \gamma}{2a - AB + 2\varepsilon \cos \gamma} \cdot \frac{2a - AB}{2a + AB} \right\} \approx \frac{-4AB \cos \gamma}{4a^2 - AB^2} \varepsilon,$$

skąd

$$\sigma(P) = \frac{Q}{4\pi b^2} \cos \left\{ \frac{1}{2} \sphericalangle APB \right\}.$$

Przy odrobinie algebraicznego wysiłku można również pokazać, iż w bardziej analitycznym ujęciu powyższą gęstość ładunku w punkcie  $(x, y, z)$  należącym do elipsoidy danej równaniem (1) można zapisać jako

$$\sigma(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi ab^2} \left( \frac{z^2}{a^4} + \frac{x^2 + y^2}{b^4} \right)^{-1/2},$$

co jest szczególnym przypadkiem słynnego wyniku dla przewodzącej elipsoidy o półosiach  $a, b, c$ :

$$\sigma(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi abc} \left( \frac{z^2}{a^4} + \frac{x^2}{b^4} + \frac{y^2}{c^4} \right)^{-1/2}.$$

### 3.1.10 Metoda inwersji

#### Definicja inwersji

Niech dana będzie sfera  $\Omega : (O, a)$ . *Inwersję względem sfery  $\Omega$*  definiujemy jako przekształcenie, które każdemu punktowi  $P \neq O$  w przestrzeni przypisuje punkt  $P^*$  leżący na półprostej  $\overrightarrow{OP}$  taki, że

$$|OP| \cdot |OP^*| = a^2.$$

#### Własności inwersji

Poniżej podaję bez dowodu kilka najważniejszych własności inwersji. Oznaczam  $O$  – środek inwersji,  $a$  – promień inwersji.

1. Płaszczyzny i sfery przechodzą na płaszczyzny lub sfery.
2. Obrazem inwersyjnym sfery  $\omega : (S, r)$  nieprzechodzącej przez  $O$  jest sfera  $\omega^* : (S^*, r^*)$  nieprzechodząca przez  $O$  taka, że

$$|OS^*| = \frac{a^2}{|OS|^2 - r^2} |OS|,$$

$$r^* = \frac{a^2}{|OS|^2 - r^2} r.$$

3. Inwersja zachowuje kąty między płaszczyznami, między sferami oraz między płaszczyznami i sferami.
4. Dla dowolnych dwóch nieprzecinających się sfer istnieje sfera inwersyjna taka, że po inwersji względem niej sfery te są współśrodkowe.

#### Przekształcenie Kelvina

Niech  $\varphi(A)$  oznacza potencjał elektryczny generowany przez pewien zlokalizowany układ ładunków w punkcie  $A$ . Niech  $\varphi^*(A^*)$  oznacza potencjał generowany przez obraz tego układu w inwersji względem sfery o środku  $O$  i promieniu  $a$ , tj. obrazem ładunku  $\delta q$  umieszczonego w punkcie  $B$  jest ładunek  $\delta q^* = \delta q \frac{a}{|OB|}$  umieszczony w punkcie  $B^*$ , gdzie  $A^*$ ,  $B^*$  są obrazami punktów  $A$ ,  $B$  w tej inwersji. Wówczas zachodzi

$$\varphi(A) = \frac{a}{|OA|} \varphi^*(A^*).$$

*Dowód.*

Niech dane będą punkty  $A$ ,  $B$  oraz sfera inwersyjna o środku  $O$  i promieniu  $a$ . Jeśli w punkcie  $B$  umieścimy ładunek  $q$  to potencjał w punkcie  $A$  wyniesie

$$\varphi(A) = \frac{kq}{|AB|}.$$

Niech  $A^*$ ,  $B^*$  oznaczać obrazy punktów  $A$ ,  $B$  w inwersji względem sfery  $(O, a)$ . Jeśli w punkcie  $B^*$  umieścimy ładunek  $q^* = q \frac{a}{|OB|}$  to potencjał w punkcie  $A^*$  wyniesie

$$\varphi^*(A^*) = \frac{kq^*}{|A^*B^*|}.$$

Z podobieństwa trójkątów  $OAB$  i  $OA^*B^*$  mamy

$$|A^*B^*| = |AB| \frac{a^2}{|OA||OB|},$$

zatem

$$\varphi^*(A^*) = \frac{kq \frac{a}{|OB|}}{|AB| \frac{a^2}{|OA||OB|}} = \frac{|OA|}{a} \frac{kq}{|AB|} = \frac{|OA|}{a} \varphi(A).$$

Ponieważ zgodnie z zasadą superpozycji potencjał generowany przez dowolny zlokalizowany układ ładunków elektrycznych można zapisać jako sumę potencjałów generowanych przez ładunki  $\delta q$  go tworzące, a stosunek  $\varphi^*/\varphi$  dla ładunku punktowego nie zależy od położenia tego ładunku, więc dla dowolnego  $\varphi$  generowanego przez zlokalizowany układ ładunków zachodzi

$$\varphi(A) = \frac{a}{|OA|} \varphi^*(A^*),$$

co kończy dowód.

[Rygorystyczny dowód wymaga w istocie więcej uwagi przy przechodzeniu od dyskretnych do ciągłych rozkładów ładunku (patrz np.: *Kelvin transformation and inverse multipoles in electrostatics*).]

Jeśli w układzie występują przewodniki, na których powierzchni  $\mathcal{S}$  potencjał wynosi  $V_0$  to po inwersji względem sfery  $(O, a)$  potencjał w punkcie  $A^*$  znajdującym się na powierzchni  $\mathcal{S}^*$  będącej obrazem powierzchni  $\mathcal{S}$  wynosi  $\varphi^*(A^*) = aV_0/|OA^*|$ . Umieszczając jednak ładunek  $q = -aV_0/k$  w  $O$  powodujemy wyzerowanie potencjału na  $\mathcal{S}^*$ . Z tego względu znając rozkład ładunku na izolowanym przewodniku  $\mathcal{S}$  na którym utrzymywany jest potencjał  $V_0$ , możemy przez inwersję względem sfery  $(O, a)$  znaleźć rozkład ładunku na uziemionym przewodniku  $\mathcal{S}^*$  będącym obrazem  $\mathcal{S}$ , do którego zbliżono ładunek  $-q$  znajdujący się w  $O$  (ta własność sprawia, że metoda inwersji jest mocnym narzędziem!).

Jeśli  $V_0 = 0$  to dla każdego punktu  $A^* \in \mathcal{S}^*$ :  $\varphi^*(A^*) = 0$ , zatem obrazem uziemionego przewodnika jest uziemiony przewodnik.

Jeśli  $\lambda, \sigma, \rho$  oznaczają parametry wyjściowego układu, a  $\lambda^*, \sigma^*, \rho^*$  jego obrazu w inwersji o środku  $O$  i promieniu  $a$  to zachodzi

$$\frac{\lambda^*(P^*)}{\lambda(P)} = \frac{|OP|}{a}, \quad \frac{\sigma^*(P^*)}{\sigma(P)} = \frac{|OP|^3}{a^3}, \quad \frac{\rho^*(P^*)}{\rho(P)} = \frac{|OP|^5}{a^5}.$$

Istotnie stosunek ładunków wynosi  $\delta q^*/\delta q = a/OP$ , a różniczkowa długość skaluje się jak  $a^2/OP^2$ , zatem  $\lambda^*/\lambda = \delta q^* dl / \delta q dl^* = OP/a$ . Analogicznie mamy dla  $\sigma$  i  $\rho$ , gdyż wówczas różniczkowa powierzchnia i objętość skalują się odpowiednio jak  $(dl^*/dl)^2$  i  $(dl^*/dl)^3$ .

Nietrudno również pokazać, że zachodzi

$$-\frac{\partial \phi'}{\partial n} \Big|_{P'} = -\frac{a^3}{OP'^3} \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_P + \frac{a}{OP'^2} \phi(P) \cos \vartheta,$$

gdzie  $\hat{\mathbf{n}}$  jest wersorem normalnym do pewnej płaszczyzny (lub jej obrazu), a  $\vartheta$  jest kątem ostrym między  $\hat{\mathbf{n}}$  a wektorem  $\overrightarrow{OP'}$ .

## Zadania

1. Ładunek umieszczony nad nieskończoną płaszczyzną

Rozpatrzmy punktowy ładunek elektryczny  $-q$  umieszczony w odległości  $d$  od nieskończonej uziemionej płaszczyzny metalowej. Zadanie to można rozwiązać metodą obrazów, jak pokazaliśmy wcześniej. Teraz rozwiążemy ten problem korzystając z metody inwersji.

Kluczowe będzie dla nas (teraz, jak i w dalszych zadaniach) rozwiązanie zagadnienia metalowej sfery o promieniu  $R$ , na której utrzymywany jest stały potencjał  $V_0$  (względem nieskończoności). Wówczas potencjał w dowolnym punkcie wewnątrz wynosi  $V_0$ , a na zewnątrz jest taki jak od punktowego ładunku  $4\pi\epsilon_0 V_0 R$  umieszczonego w środku sfery. Istotnie wynika to z metody obrazów.

Możemy teraz rozwiązać pierwotny problem. Niech  $O$  oznacza punkt, w którym umieszczony jest ładunek  $-q$ . Niech odległość ładunku od płaszczyzny wynosi  $d$ . Rozkład ładunku na płaszczyźnie jest taki, że w dowolnym jej punkcie  $P$  generuje potencjał  $kq/OP$ . Dokonajmy inwersji tej płaszczyzny względem sfery  $(O, d)$ . Obrazem inwersyjnym płaszczyzny będzie sfera o promieniu  $d/2$  przechodząca przez  $O$  i styczna do pierwotnej płaszczyzny. Potencjał na tej sferze będzie wynosił  $V_0 = kq/d$ . Wiemy jednak jakie jest rozwiązanie dla sfery, na której utrzymywany jest stały potencjał: w dowolnym punkcie wewnątrz wynosi  $V_0 = kq/d$ , a na zewnątrz jest taki jak od punktowego ładunku  $2\pi\epsilon_0 V_0 d = q/2$ . Dokonując ponownie inwersji otrzymujemy więc, że potencjał powyżej płaszczyzny jest taki jak od ładunku  $-q$  umieszczonego w  $O$  i ładunku  $q$  umieszczonego w punkcie będącym odbiciem symetrycznym  $O$  względem płaszczyzny. Natomiast w dowolnym punkcie  $P$  poniżej płaszczyzny potencjał wynosi

$$-\frac{kq}{|OP|} + \frac{d}{|OP|} V_0 = 0.$$

Reszta obliczeń (siły, energii układu) znajduje się już w sekcji *Metoda obrazów* dlatego nie będziemy ich tu powtarzać.

## 2. Ładunek punktowy i sfera

Analogicznie możemy rozwiązać następujące zagadnienie. Rozpatrzmy ładunek elektryczny  $-q$  umieszczony w punkcie  $O$  oraz uziemioną, metalową sferę o środku  $S$  i promieniu  $R$  ( $|OS| > R$ ). Dokonajmy inwersji układu względem sfery  $(O, r)$ . Obrazem inwersyjnym uziemionej sfery będzie sfera  $\omega : (S^*, R^*)$  taka, że

$$OS^* = \frac{r^2}{OS^2 - R^2} OS, \quad R^* = \frac{r^2}{OS^2 - R^2} R,$$

której potencjał jest stały i wynosi  $kq/r$ . Możemy wyznaczyć teraz zarówno potencjał w całej przestrzeni, jak i rozkład ładunku na powierzchni.

- *Obliczenie potencjału.* Znamy rozwiązanie zagadnienia metalowej sfery  $(S^*, R^*)$  utrzymywanej pod stałym potencjałem  $V_0$ . Na zewnątrz będzie

on taki jak od punktowego ładunku  $q^* = qR^*/r$  umieszczonego w  $S^*$ . Dokonując ponownie inwersji wiemy więc, że potencjał na zewnątrz uziemionej sfery będzie sumą potencjałów wytwarzanych przez ładunek  $-q$  w  $O$  i ładunek  $q' = q^*r/OS^*$  umieszczony w punkcie  $S'$  na półprostej  $OS$  takim, że  $OS' \cdot OS^* = r^2$ . Podstawiając otrzymujemy

$$q' = q \frac{R^*}{OS^*} = q \frac{R}{OS}, \quad OS' = \frac{r^2}{OS^*} = OS - \frac{R^2}{OS}.$$

Wewnątrz sfery natomiast będzie wynosił  $kq/r$ , zatem wewnątrz uziemionej sfery potencjał wynosi

$$-\frac{kq}{OP} + \frac{r}{OP} \frac{kq}{r} = 0.$$

Znaleźliśmy zatem układ ładunków obrazowych w bardzo metodyczny sposób i bez żadnego zgadywania. Przechodząc do bardziej analitycznego opisu i wybierając środek układu współrzędnych w środku uziemionej sfery oraz oznaczając  $OS = d$  otrzymujemy

$$\varphi = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{R}{\sqrt{r^2 d^2 + R^4 - 2R^2 rd \cos \theta}} \right),$$

gdzie  $\theta = \angle OSP$ .

- *Obliczenie gęstości powierzchniowej ładunku.* Za pomocą inwersji znaleźliśmy układ ładunków obrazowych, więc dalsze obliczenia możemy przeprowadzić analogicznie do metody obrazów. W szczególności gęstość indukowanego ładunku można znaleźć przez różniczkowanie tak jak w sekcji *Metoda obrazów*. Pokażemy jednak jak znaleźć ten rozkład znając rozkład dla sfery utrzymywanej pod stałym potencjałem, co jest o wiele prostsze. W dowolnym punkcie  $P^*$  sfery utrzymywanej pod stałym potencjałem gęstość ładunku jest jednakowa i wynosi

$$\sigma^*(P^*) = \frac{q^*}{4\pi R^{*2}} = \frac{q}{4\pi r^3} \frac{OS^2 - R^2}{R}.$$

W punkcie  $P$  na powierzchni uziemionej sfery gęstość ładunku wynosi więc

$$\sigma(P) = \frac{r^3}{OP^3} \sigma^*(P^*) = \frac{q}{4\pi R} \frac{OS^2 - R^2}{OP^3}.$$

Oczywiście możemy to zamienić na wyrażenie analityczne

$$\sigma(\theta) = \frac{-q}{4\pi R} \frac{R^2 - d^2}{(d^2 - 2Rd \cos \theta + R^2)^{3/2}},$$

jednak jest pewien urok w tym bardziej syntetycznym opisie.

- *Sila działająca na ładunek* wynosi

$$F(d) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rd}{(d^2 - R^2)^2}.$$

- *Energia układu* wynosi więc

$$U = - \int_{\infty}^d F(x) dx = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{x}{(x^2 - R^2)^2} dx = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^2 - d^2}.$$

- *Zmienione warunki brzegowe.* Jeśli pierwotna sfera nie jest uziemiona tylko utrzymywany jest na niej potencjał  $V_0$  to do układu ładunków obrazowych wystarczy dodać ładunek  $q''$  umieszczony w  $S$ , taki, że

$$q'' = \frac{V_0 R}{k}.$$

Potencjał wewnątrz sfery wynosi wówczas oczywiście  $V_0$ .

Jeśli zamiast sprecyzowania  $\varphi$  na sferze, zadany jest całkowity ładunek  $Q$  na niej to układ ładunków obrazowych jest identyczny jak powyżej, ale  $V_0$  jest wyznaczone przez równanie

$$q' + q'' = Q.$$

### 3. Dwie stykające się sfery (*Total charge*)

Rozpatrzmy dwie stykające się sfery metalowe o równych promieniach  $R$ , na których utrzymywany jest potencjał  $V_0$ . Chcemy znaleźć całkowity ładunek wyindukowany w tym układzie. Niech  $O$  oznacza punkt styczności sfer. Dokonując inwersji układu względem sfery ( $O, x = 2R$ ) otrzymujemy dwie równoległe uziemione płaszczyzny w odległości  $4R$  od siebie i punktowy ładunek  $-q = -4\pi\epsilon_0 V_0 x$  w połowie między nimi. Układ ładunków obrazowych to nieskończone ciągi ładunków po obu stronach o wartościach  $+q, -q, +q, \dots$  umieszczone w odległościach  $2x, 4x, 6x, \dots$  od ładunku punktowego. Dokonując ponownie inwersji otrzymujemy ciąg ładunków punktowych dla każdej z tych sfer. Wartości tych ładunków wynoszą odpowiednio  $q/2, -q/4, q/6, \dots$ . Całkowity ładunek wyindukowany na obu sferach wynosi więc

$$Q = 2q \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \right) = q \ln 2 = 8\pi\epsilon_0 V_0 R \ln 2.$$

### 4. Dwie sfery przecinające się pod kątem prostym (*Total charge*)



Rozpatrzmy przewodnik utworzony z połączenia dwóch sfer  $(A, a)$  i  $(B, b)$  w taki sposób, że przecinają się one pod kątem prostym. W punkcie  $O$  takim, że  $OA = c$ ,  $OB = d$  umieszczono punktowy ładunek elektryczny  $-q$ , a przewodnik uziemiono. Chcemy znaleźć całkowity ładunek wyindukowany na tym przewodniku. Dokonajmy inwersji układu względem sfery  $(O, r)$ . Obrazem dwóch przecinających się pod kątem prostym sfer  $(A, a)$  i  $(B, b)$  będą dwie przecinające się pod kątem prostym sfery  $(A^*, a^*)$  i  $(B^*, b^*)$  takie, że

$$OA^* = c^* = \frac{r^2 c}{c^2 - a^2} = \eta c, \quad a^* = \frac{r^2 a}{c^2 - a^2} = \eta a$$

$$OB^* = d^* = \frac{r^2 d}{d^2 - b^2} = \gamma d, \quad b^* = \frac{r^2 b}{d^2 - b^2} = \gamma b,$$

na których potencjał będzie stały i równy  $V_0 = kq/r$ . Rozwiążmy zatem zagadnienie dwóch sfer przecinających się pod kątem prostym, na których utrzymywany jest stały potencjał  $V_0$ . Zauważmy, że umieszczając ładunki punktowe  $q_1^* = qa^*/r$ ,  $q_2^* = qb^*/r$  i  $q_3^* = -qa^*b^*/r\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}$  odpowiednio w punktach  $A^*$ ,  $B^*$  i przecięciu  $C^*$  odcinka  $A^*B^*$  z prostą przechodzącą przez punkty przecięć okręgów otrzymujemy taką właśnie powierzchnię ekwipotencjalną, zatem jest to układ ładunków obrazowych. Dokonując ponownie inwersji otrzymujemy zatem trzy ładunki punktowe  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ . Poszukiwany całkowity ładunek wynosi zatem  $Q = q_1 + q_2 + q_3$ . Podstawiając otrzymujemy

$$q_1 = q \frac{a^*}{c^*} = q \frac{a}{c}$$

$$q_2 = q \frac{b^*}{d^*} = q \frac{b}{d}$$

$$q_3 = -q \frac{a^* b^*}{e^* \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}},$$

gdzie z twierdzenia Stewarta w trójkącie  $A^*B^*O$  mamy

$$e^* = \frac{\sqrt{c^{*2}b^{*2} + d^{*2}a^{*2} - a^{*2}b^{*2}}}{\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}}.$$

skąd

$$q_3 = -q \frac{\eta \gamma ab}{\sqrt{\eta^2 \gamma^2 b^2 c^2 + \eta^2 \gamma^2 a^2 d^2 - \eta^2 \gamma^2 a^2 b^2}} = -q \frac{ab}{\sqrt{b^2 c^2 + a^2 d^2 - a^2 b^2}}.$$

Ostatecznie zatem

$$Q = q \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{d} - \frac{ab}{\sqrt{b^2 c^2 + a^2 d^2 - a^2 b^2}} \right).$$

### 5. Inwersja liniowego potencjału

Rozpatrzmy obszar jednorodnego pola elektrycznego  $\mathbf{E}_0$  (np. wewnątrz bardzo dużego kondensatora płaskiego). Chcemy znaleźć obraz tego układu w inwersji względem sfery  $(O, r)$ . Korzystając z dowolności w wyborze punktu odniesienia możemy napisać

$$\varphi(P) = E_0 |OP| \cos \theta ,$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między prostą  $OP$ , a linią pola  $\mathbf{E}_0$ , wówczas oczywiście  $\varphi(O) = 0$ . Po inwersji względem sfery  $(O, r)$  otrzymujemy więc

$$\varphi^*(A^*) = \frac{r^3 E_0 \cos \theta}{|OA^*|^2} ,$$

a więc otrzymujemy pole dipola  $\mathbf{p}^* = 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_0 r^3$  umieszczonego w  $O$ .

### 6. Metalowa kula w jednorodnym polu elektrycznym

Rozpatrzmy uziemioną metalową kulę o promieniu  $R$ , umieszczoną w bardzo dużym kondensatorze płaskim tj. w obszarze jednorodnego pola elektrycznego  $\mathbf{E}_0$ . Niech  $O$  oznacza punkt na powierzchni kuli leżący jednocześnie na linii zewnętrznego pola elektrycznego będącej osią symetrii kuli. Dokonajmy inwersji układu względem sfery  $(O, r)$ . Obrazem metalowej sfery będzie nieskończona uziemiona płaszczyzna w odległości  $OS^* = r^2/2R$  od  $O$ . Obrazem okładek kondensatora będzie natomiast idealny dipol  $\mathbf{p}^* = 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E}_0$  umieszczony w  $O$  (przyjmujemy  $\varphi(O) = 0$ ). Musimy teraz rozwiązać zagadnienie dipola umieszczonego nad nieskończoną uziemioną płaszczyzną. Z metody obrazów wynika, że pole elektryczne nad płaszczyzną będzie takie jak od rzeczywistego dipola i dipola obrazowego  $-\mathbf{p}^*$  umieszczonego w punkcie  $X^*$  na półprostej  $OS^*$  takim, że  $2OS^* = OX^*$ . Dokonując ponownie inwersji otrzymujemy więc, że pole na zewnątrz kuli będzie złożeniem pola  $\mathbf{E}_0$  i pola idealnego dipola  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^* r^3 / OX^{*3}$  umieszczonego w punkcie  $X$  takim, że  $OX = r^2 / OX^* = r^2 / 2OS^* = R$ , czyli w środku metalowej kuli. Podstawiając otrzymujemy

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* \frac{r^3}{OX^{*3}} = 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \frac{r^6}{OX^{*3}} = 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}_0 R^3 .$$

Pole elektryczne na zewnątrz kuli wynosi więc

$$\mathbf{E}(\mathcal{R}) = \mathbf{E}_0 + \frac{R^3}{\mathcal{R}^3} E_0 (2 \cos \theta \hat{\mathcal{R}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) .$$

Zauważmy, że wynik jest zgodny z tym dla dielektryka w granicy  $\chi \rightarrow \infty$ .

7. *Spherical bowl/ half plane/ disc with point charge (knowing the distribution on a thin disc) (distribution)*

*Spherical bowl.* Jednym z najciekawszych zastosowań inwersji jest obliczenie gęstości powierzchniowej ładunku wyindukowanego po każdej ze stron metalowej uziemionej miski będącej fragmentem sfery, do której zbliżono punktowy ładunek  $-q$  tak, że znajduje się on w obszarze sfery, której częścią jest miska. Niech  $O$  oznacza punkt, w którym znajduje się ładunek. Dokonując inwersji układu względem sfery  $(O, r)$  otrzymujemy metalowy dysk, na którym utrzymywany jest stały potencjał  $V_0 = kq/r$ . Rozkład ładunku po każdej stronie tego dysku w dowolnym punkcie  $P^*$  wynosi (jak pokazaliśmy w sekcji *Metoda obrazów*)

$$\sigma^*(P^*) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^*P^* \cdot P^*B^*}},$$

gdzie  $A^*B^*$  jest dowolną cięciwą dysku przechodzącą przez  $P^*$ . Wybierając cięciwę będącą średnicą  $A^*B^*$  dysku otrzymujemy, że gęstość powierzchniowa po każdej stronie w dowolnym punkcie  $P$  na powierzchni miski wynosi

$$\sigma(P) = \frac{r^3}{OP^3} \sigma^*(P^*) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{OP^2} \frac{\sqrt{OA \cdot OB}}{\sqrt{PA \cdot PB}},$$

gdzie  $A, B$  są punktami przecięcia brzegu miski z płaszczyzną wyznaczoną przez  $O, P$  i środek sfery, z której wycięto miskę. Niech  $C$  oznacza biegun miski, tj. punkt na jej powierzchni, którego odległość od dowolnego punktu na brzegu jest stała i wynosi  $c$ . Poprowadźmy okrąg  $(C, c)$ . Okrąg ten przechodzi oczywiście przez  $A$  i  $B$  oraz przecina  $OA$  i  $PB$  odpowiednio w punktach  $B'$  i  $A'$ .

Z potęgi punktu  $O$  względem okręgu  $(C, c)$  mamy

$$OA \cdot OB' = OC^2 - c^2,$$

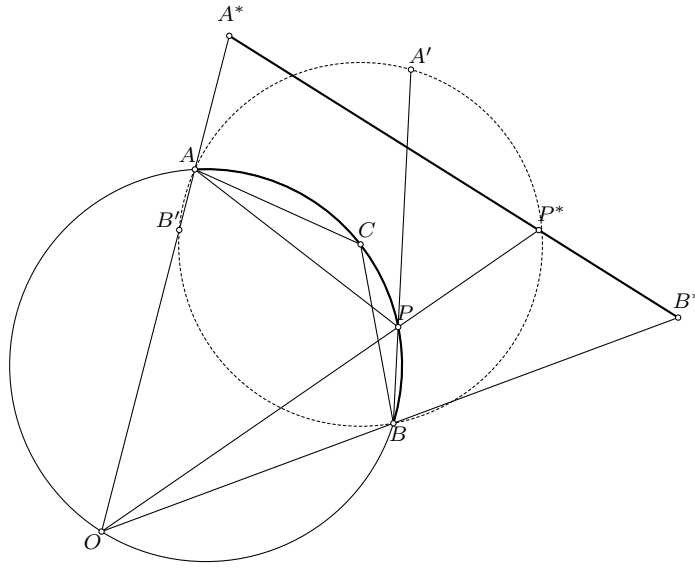
natomiast z potęgi punktu  $P$  względem tego okręgu mamy

$$PB \cdot PA' = c^2 - CP^2.$$

Łatwo udowodnić, że  $OB' = OB$  i  $PA' = PA$ , zatem otrzymujemy

$$\sigma(P) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{OP^2} \frac{\sqrt{OC^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - CP^2}}.$$

*Half plane.* Możemy również wyznaczyć rozkład ładunku na nieskończonej półpłaszczyźnie, do której zbliżono punktowy ładunek  $-q$  leżącej w tej samej



Rysunek 6: Inwersja sferycznej miski

płaszczyźnie w odległości  $d$  od brzegu metalowej półpłaszczyzny. Niech  $O$  oznacza punkt, w którym znajduje się ładunek. Dokonajmy inwersji układu względem sfery  $(O, d)$ . Obrazem inwersyjnym półpłaszczyzny będzie metalowy dysk o promieniu  $d/2$ , na którym utrzymywany jest stały potencjał  $V_0 = kq/r$ . Niech  $C^*$  oznacza środek dysku. Gęstość ładunku po każdej stronie dysku w dowolnym punkcie  $P^*$  wynosi

$$\sigma^*(P^*) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{d^2/4 - C^*P^{*2}}}.$$

Gęstość powierzchniowa po obu stronach w dowolnym punkcie  $P$  półpłaszczyzny wynosi więc

$$\sigma(P) = \frac{1}{\pi^2} \frac{qd}{OP^2} \frac{1}{\sqrt{OP^2 - PC^2}},$$

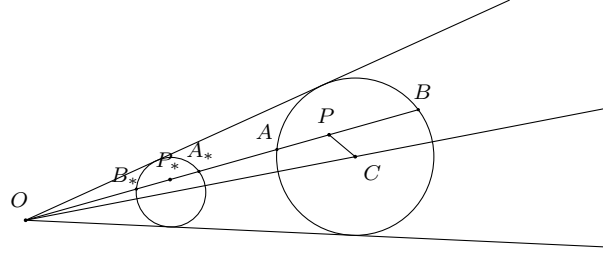
gdzie  $C$  jest odbiciem symetrycznym  $O$  względem brzegu półpłaszczyzny. Zamieniając to wyrażenie na analityczne otrzymujemy

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{d}{y}} \frac{q}{x^2 + (y + d)^2}.$$

Całkowity ładunek wyindukowany po obu stronach półpłaszczyzny wynosi

$$Q = 2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \sigma(x, y) dx dy = q.$$

*Disc.* Możemy również wyznaczyć rozkład ładunku na cienkim uziemionym



Rysunek 7: Inwersja dysku

dysku (Rysunek 7), do którego zbliżono ładunek punktowy  $-q$  w płaszczyźnie dysku. Niech  $O$  oznacza punkt, w którym znajduje się ładunek. Niech  $R$  oznacza promień uziemionego dysku. Dokonajmy inwersji układu względem sfery  $(O, r)$ . Obrazem inwersyjnym dysku będzie inny dysk, na którym utrzymywany jest stały potencjał  $V_0 = kq/r$ . Gęstość ładunku po każdej stronie dysku w dowolnym punkcie  $P^*$  wynosi

$$\sigma^*(P^*) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^*P^* \cdot B^*P^*}},$$

gdzie  $A^*B^*$  jest dowolną cięciwą dysku przechodzącą przez  $P^*$ . Wybierając cięciwę tak aby należała do półprostej  $OP^*$  i dokonując ponownie inwersji otrzymujemy

$$\sigma(P) = \frac{r^3}{OP^3} \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{\sqrt{OA \cdot OB}}{\sqrt{PA \cdot PB}} \frac{OP}{r^2} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{OP^2} \frac{\sqrt{OA \cdot OB}}{\sqrt{PA \cdot PB}},$$

gdzie punkty  $A, B, P, A^*, B^*, P^*$  leżą na półprostej  $OP$ . Z potęgi punktu  $O$  względem okręgu  $(C, R)$  mamy

$$OA \cdot OB = OC^2 - R^2,$$

natomiast z potęgi punktu  $P$  względem tego okręgu

$$PA \cdot PB = (R - CP)(R + CP) = R^2 - CP^2,$$

gdzie  $C$  jest środkiem uziemionego dysku. Ostatecznie zatem gęstość ładunku po każdej stronie dysku w dowolnym punkcie  $P$  wynosi

$$\sigma(P) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{OP^2} \frac{\sqrt{OC^2 - R^2}}{\sqrt{R^2 - CP^2}}.$$

W bardziej analitycznym opisie, oznaczając  $OC = d$ ,  $CP = s$ ,  $\angle OCP = \phi$  dostajemy

$$\sigma(s, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{s^2 + d^2 - 2sd \cos \phi} \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{\sqrt{R^2 - s^2}}.$$

8. Wyznaczyć potencjał nienaładowanego, cienkiego metalowego dysku o promieniu  $a$  wokół którego znajduje współśrodekowa z nim cienka pętla o promieniu  $b$  naładowana jednorodnie ładunkiem  $Q$

Korzystając z wcześniejszych wyników możemy zapisać gęstość powierzchniową indukowanego ładunku po każdej stronie jako

$$\sigma(s) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \frac{\lambda b}{2\pi^2} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2 - s^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{s^2 + b^2 - 2sb \cos \phi} d\phi,$$

gdzie  $\lambda = Q/2\pi b$ . Oczywiście gęstość powierzchniowa ładunku wyindukowanego na skutek układu ładunków jest równa sumie gęstości ładunków wyindukowanych na skutek poszczególnych ładunków. Wykonując całkowanie otrzymujemy

$$\sigma(s) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \frac{Q}{2\pi^2} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{(b^2 - s^2)\sqrt{a^2 - s^2}}.$$

Ponieważ metalowy dysk był nienaładowany więc  $V_0$  jest dane przez równanie

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma(s) s ds d\phi = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$4\epsilon_0 V_0 a - \frac{Q}{\pi} \arctan \left\{ \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right\} = 0,$$

zatem

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \arctan \left\{ \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right\}.$$

Dla  $b = a + \epsilon$ , gdzie  $0 < \epsilon \ll a$ , w zerowym przybliżeniu mamy

$$V_0 \approx \frac{Q}{8\epsilon_0 a}.$$

### 3.1.11 Inwersja w dwóch wymiarach i funkcja prądu

Rozważmy dwuwymiarowy układ elektryczny tj. układ, dla którego potencjał  $\varphi = \varphi(x, y)$  spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Ze względu na zasadę superpozycji każdy taki potencjał  $\varphi(x, y)$  można przedstawić jako sumę potencjałów generowanych przez pojedyncze „ładunki punktowe”. Potencjał od ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w punkcie  $A = (x_0, y_0)$  wynosi oczywiście

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right\},$$

gdzie  $m$  jest pewną stałą. W syntetycznym ujęciu mamy

$$\varphi(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{AP} \right\}.$$

Dowolny potencjał dwuwymiarowy spełniający równanie Laplace'a (w obszarze poza punktami umiejscowienia ładunków) możemy zapisać zatem jako

$$\varphi(P) = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{A_i P} \right\}.$$

W inwersji względem okręgu  $(O, \mathcal{R})$ , w której każdy ładunek punktowy w punkcie  $A$  przechodzi na ładunek o tej samej wartości umieszczony w punkcie  $A'$  takim, że  $OA \cdot OA' = \mathcal{R}^2$  mamy

$$\varphi'(P') = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{A'_i P'} \right\} = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m OA_i OP}{\mathcal{R}^2 A_i P} \right\}.$$

Zauważmy, że wyrażenie to możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \varphi'(P') &= \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{A_i P} \right\} - \frac{\sum q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{OP} \right\} + \text{const.} \\ &= \varphi(P) - \frac{\sum q_i}{2\pi\epsilon_0} \log \left\{ \frac{m}{OP} \right\} + \text{const.} \end{aligned}$$

W takim razie jeżeli krzywa  $\ell$  jest krzywą stałego potencjału pod wpływem ładunków  $q_1, q_2, \dots$  w punktach  $A_1, A_2, \dots$ , to obraz  $\ell'$  tej krzywej w inwersji względem okręgu  $(O, \mathcal{R})$  jest krzywą stałego potencjału pod wpływem ładunków  $q_1, q_2, \dots$  w punktach  $A'_1, A'_2, \dots$  oraz ładunku  $-\sum q_i$  w punkcie  $O$ .

**Funkcja prądu.** W przypadku dwuwymiarowym możemy zdefiniować funkcję  $\psi(x, y)$ , którą nazywamy funkcją prądu, taką że

$$\mathbf{E}(x, y) = \nabla \times [0, 0, \psi(x, y)] = \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{\mathbf{y}},$$

Zauważmy, że z powyższego od razu wynika

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Oczywiście dla krzywej  $\ell$ , dla której  $\psi = \text{const.}$  mamy  $\nabla \psi \perp \ell$  tj. wektor  $\nabla \psi$  jest prostopadły w każdym punkcie do  $\ell$ . Jednocześnie zachodzi

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

zatem dla krzywej  $\ell$ , dla której  $\psi = \text{const.}$  mamy  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , gdzie  $\partial/\partial n$  oznacza różniczkowanie wzdłuż prostej prostopadłej do  $\ell$  w danym punkcie. Analogicznie ze względu na zasadę superpozycji  $\psi$  generowane przez układ ładunków jest równe sumie funkcji prądu generowanych przez poszczególne ładunki. Dla ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w punkcie  $(x_0, y_0)$  mamy

$$\psi(x, y) = \frac{q\phi}{2\pi\epsilon_0} + \psi_0,$$

gdzie  $\phi$  jest kątem między półprostą równoległą do osi  $x$  o początku w punkcie  $(x_0, y_0)$  i wektorem  $[x - x_0, y - y_0]$ , a  $\psi_0$  jest dowolną stałą. W ujęciu syntetycznym

$$\psi(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} |\sphericalangle OAP|,$$

gdzie  $O$  jest dowolnym punktem  $O \neq A$  na pewnej półprostej  $p$  o początku w punkcie  $A$ . Dowolną funkcję prądu możemy zatem zapisać jako

$$\psi(P) = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} |\sphericalangle OA_i P|.$$

W inwersji względem okręgu  $(O, \mathcal{R})$ , w której każdy ładunek punktowy w punkcie  $A$  przechodzi na ładunek o tej samej wartości umieszczony w punkcie  $A'$  takim, że  $OA \cdot OA' = \mathcal{R}^2$  mamy zatem

$$\psi'(P') = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} |\sphericalangle OA'_i P'| = \sum \frac{q_i}{2\pi\epsilon_0} (\pi - |\sphericalangle OA_i P| - |\sphericalangle A'_i OP'|).$$

Zauważmy, że to wyrażenie możemy zapisać jako

$$\psi'(P') = -\psi(P) + \frac{\sum q_i}{2\pi\epsilon_0} |\sphericalangle XOP| + \text{const.} \quad ,$$



gdzie  $X$  jest dowolnym punktem  $X \neq O$  na pewnej półprostej  $p$  o początku w punkcie  $O$ . W takim razie jeżeli krzywa  $\ell$  jest krzywą, dla której  $\psi = \text{const.}$  pod wpływem ładunków  $q_1, q_2, \dots$  w punktach  $A_1, A_2, \dots$ , to obraz  $\ell'$  tej krzywej w inwersji względem okręgu  $(O, \mathcal{R})$  jest krzywą stałej funkcji prądu pod wpływem ładunków  $q_1, q_2, \dots$  w punktach  $A'_1, A'_2, \dots$  oraz ładunku  $-\sum q_i$  w punkcie  $O$ .

Zauważmy jeszcze, że

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\ell = \psi(B) - \psi(A),$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym do krzywej  $\ell$  w danym punkcie, natomiast  $A, B \in \ell$  są pewnymi skrajnymi punktami tej krzywej.

Powyższe rozważania będą nam przydatne do wykazania, iż w przypadku dwuwymiarowym opór rezystora, do którego przyłożono symetrycznie dwie jednakowe elektrody jest równy oporowi jego obrazu inwersyjnego. Istotnie rozważmy dwuwymiarowy (tj. bardzo płaski) rezystor do którego przyłożono jednakowe niewielkie elektrody w taki sposób, że układ posiada pewną oś symetrii  $p$ . Opór takiego układu wynosi oczywiście

$$R = \frac{1}{\sigma w} \frac{|\varphi(A) - \varphi(B)|}{|\psi(C) - \psi(D)|},$$

gdzie  $\sigma$  to konduktywność,  $w$  jest grubością rezystora,  $A \in \ell_1, B \in \ell_2$  są pewnymi punktami odpowiednio na pierwszej i drugiej elektrodzie ( $\ell_1, \ell_2$  oznaczają krzywe wyznaczające kształt elektrod), natomiast  $C, D$  są punktami przecięcia  $p$  z brzegiem  $\ell_3$  przewodnika. Ze względu na symetrię osiową zachodzi

$$\sum q_i = 0,$$

gdzie  $q_i$  są ładunkami wyindukowanymi na elektrodach. W takim razie opór rezystora będącego obrazem inwersyjnym  $\ell_3$  do którego przyłożono elektrody  $\ell'_1, \ell'_2$  wynosi

$$R' = \frac{1}{\sigma w} \frac{|\varphi'(A') - \varphi'(B')|}{|\psi'(C') - \psi'(D')|} = R,$$

gdzie ostatnia równość wynika wprost z wyprowadzonych wcześniej wzorów transformacyjnych na  $\varphi'$  i  $\psi'$  oraz obserwacji  $\sum q_i = 0$ .

## 3.2 Magnetostatyka

### 3.2.1 Siła Lorentza

Na ładunek  $q$  poruszający się z prędkością  $\mathbf{v}$  w polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B}$  działa siła Lorentza

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

W obecności pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  wzór ten ma ogólną postać

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Zauważmy, że jeśli  $\mathbf{E} = 0$  to siła Lorentza jest zawsze prostopadła do  $\mathbf{v}$ , zatem jej praca na dowolnej drodze jest równa 0.

### 3.2.2 Prądy

Natężenie prądu  $I$  płynącego przez przewodnik definiujemy jako ładunek przepływający przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostkowym czasie

$$I = \dot{q} = nSev_u,$$

gdzie  $n$  to koncentracja elektronów,  $v_u$  to tzw. prędkość unoszenia. Wprowadzamy również pojęcia liniowej, powierzchniowej i objętościowej gęstości prądu

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

gdzie  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  to odpowiednio liniowa, powierzchniowa i objętościowa gęstość ładunku. Siła magnetyczna działająca odpowiednio na prąd liniowy, powierzchniowy i objętościowy wynosi

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int_{\ell} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \cong \int_S (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) dS \cong \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV.$$

W magnetostatyce zajmujemy się tylko stacjonarnymi rozkładami prądów (tak jak w elektrostatyce zajmowaliśmy się tylko stacjonarnymi rozkładami ładunków). Przez prąd stacjonarny rozumiemy ciągły, nieprzerwany przepływ ładunku, który nigdzie się nie gromadzi, inaczej

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

### 3.2.3 Prawo Biota–Savarta

Prądy stacjonarne wytwarzają pole magnetyczne dane prawem Biota–Savarta

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \frac{d\mathbf{l} \times \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} dS \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathcal{R}}{\mathcal{R}^3} dV .$$

Pola magnetyczne spełniają zasadę superpozycji i jest to fakt doświadczalny tj. pole magnetyczne pochodzące od kilku rozkładów prądów jest równe sumie pól pochodzących od poszczególnych rozkładów.

#### Prawo Ampère’a

Dla dowolnego rozkładu prądów stacjonarnych zachodzi

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} .$$

Z tw. Stokesa możemy podać równoważną postać prawa Ampère’a

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{tot}} ,$$

gdzie  $I_{\text{tot}}$  jest całkowitym natężeniem prądu przepływającym przez powierzchnię  $\mathcal{S}$  rozpiętą na konturze  $\ell$ . Korzystając z prawa Biota–Savarta lub prawa Ampère’a możemy obliczyć  $\mathbf{B}$  dla różnych rozkładów:

1. *Pole magnetyczne na osi pętli, w której płynie prąd o natężeniu  $I$ , w odległości  $z$  od jej środka*

Z prawa Biota–Savarta mamy

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rz\hat{\mathbf{s}} + R^2\hat{\mathbf{z}}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} .$$

2. *Pole magnetyczne na prostej prostopadłej do prostoliniowego przewodnika  $AB$  o długości  $|AB| = L$  w punkcie  $P$  odległym o  $s$  od  $AB$  takim, że  $\angle PAB = \theta_1$  i  $\angle PBA = \theta_2$*

Z prawa Biota–Savarta mamy

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-s \cot \theta_2}^{+s \cot \theta_1} \frac{s \hat{\phi}}{(s^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \hat{\phi} .$$

Dla  $\theta_1 \rightarrow 0$  i  $\theta_2 \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} .$$

3. Pole magnetyczne w punkcie  $P$  na osi ciasno nawiniętego solenoidu o promieniu  $a$ , długości  $L$ ,  $n$  zwojach na jed. długości, w odległości  $z_0$  od końcowej pętli.

Korzystając z wyniku dla pojedynczej pętli mamy

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 a^2 n I}{2} \frac{dl}{(z_0^2 + 2z_0 l + l^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}},$$

skąd

$$\mathbf{B}(P) = \int_0^L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}}{2} \left( \frac{z_0 + L}{\sqrt{(z_0 + L)^2 + a^2}} - \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + a^2}} \right).$$

4. Znaleźć indukcję magnetyczną w środku  $k$ -kąta foremnego. Dany jest promień  $R$  okręgu wpisanego w wielokąt.

Przyczynek od pojedynczego boku wynosi

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{n}}}{4\pi R} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

gdzie  $\hat{\mathbf{n}}$  jest wersorem normalnym do płaszczyzny  $k$ -kąta. Całkowite pole wynosi zatem

$$\mathbf{B} = k\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0 k I \hat{\mathbf{n}}}{4\pi R} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

5. Znaleźć indukcję w punkcie na osi obracającego się dysku naładowanego z gęstością  $\sigma$  w odległości  $z$  od środka dysku.

Z definicji prądu powierzchniowego mamy

$$\mathbf{K} = \sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = \sigma \omega s \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Z prawa Biota–Savarta

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(z) &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^s \frac{z \hat{\mathbf{s}} + s^2 \hat{\mathbf{z}}}{(s^2 + z^2)^{3/2}} s \, ds \, d\phi \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega \hat{\mathbf{z}}}{2} \left( \frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right). \end{aligned}$$

6. Pole magnetyczne w odległości  $s$  od osi cienkiego, nieskończonego przewodu prostoliniowego

Zauważmy, że z symetrii wynika, że  $\mathbf{B}$  może mieć jedynie składową azymutalną. Z prawa Ampere’a mamy zatem

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

7. Pole magnetyczne wytwarzane przez prąd powierzchniowy  $K\hat{\mathbf{x}}$  płynący po płaszczyźnie  $XY$

Zauważmy, że ze względu na nieskończoność powierzchni  $\mathbf{B}$  może mieć tylko składową  $y$ -ową. Z prawa Ampere'a mamy zatem

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 K \hat{\mathbf{y}} & \text{dla } z > 0 \\ +\frac{1}{2}\mu_0 K \hat{\mathbf{y}} & \text{dla } z < 0 \end{cases}.$$

8. Pole magnetyczne nieskończenie długiego solenoidu

Z prawa Ampere'a mamy

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 K \hat{\mathbf{z}}.$$

9. Znaleźć pole magnetyczne wytwarzane przez bardzo cienki pół nieskończony jednorodny magnes walcowy o magnetycznym momencie dipolowym na jednostkę długości  $\alpha$

Niech  $O$  oznacza jeden z końców magnesu, drugi znajduje się oczywiście w nieskończoności. Przyjmijmy układ współrzędnych cylindrycznych  $(s, \phi, z)$  o środku  $O$  i osi  $z$  równoległej do magnesu. Przyczynek  $d\mathbf{B}$  do pola magnetycznego w punkcie  $\mathbf{r} = s\hat{\mathbf{s}} + z\hat{\mathbf{z}}$  od infinitezimalnego dipola  $dm = \alpha dz'$  znajdującego się w  $(0, 0, z')$  wynosi

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \alpha dz'}{4\pi[s^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \left( \hat{\mathbf{s}} \frac{3s(z' - z)}{s^2 + (z - z')^2} + \hat{\mathbf{z}} \frac{-2(z - z')^2 - s^2}{s^2 + (z - z')^2} \right).$$

Całkowite pole magnetyczne wynosi więc

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{z'=0}^{z'=-\infty} d\mathbf{B} = \frac{-\mu_0 \alpha}{4\pi(s^2 + z^2)^{3/2}} (\hat{\mathbf{s}}s + \hat{\mathbf{z}}z) = -\frac{\mu_0 \alpha}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Widzimy więc, że jest to pole monopola magnetycznego o ładunku magnetycznym  $\alpha$ .

### 3.2.4 Prawo Gaussa

#### Prawo Gaussa

Dywergencja indukcji magnetycznej jest zawsze równa 0

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Z tw. Greena możemy podać równoważną postać

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

### 3.2.5 Magnetyczny potencjał wektorowy

Wiemy, że w ogólności  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Z tw. o polach bezźródłowych wynika z tego, iż istnieje funkcja  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  taka, że

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Funkcję  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  nazywamy magnetycznym potencjałem wektorowym. Z prawa Amperę'a w magnetostatyce zachodzi

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J},$$

gdzie  $\nabla^2 \mathbf{A} := \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}}$ . Okazuje się, że zawsze możemy wybrać  $\mathbf{A}$  w taki sposób, że  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Istotnie jeśli  $\mathbf{A}$  jest magnetycznym potencjałem wektorowym dla pola  $\mathbf{B}$  to potencjał  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ , gdzie  $f$  jest pewnym polem skalarnym, również jest potencjałem wektorowym dla pola  $\mathbf{B}$ . Z powyższego jednak

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f,$$

ale oczywiście zawsze możemy wybrać  $f$  w taki sposób, że  $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ . W takim razie mamy

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J},$$

skąd dla prądów dążących do 0 w nieskończoności

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} dV \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathcal{R}} dS.$$

- Dla jednorodnego pola magnetycznego

$$\mathbf{B}(s, \phi, z) = B \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{A}(s, \phi, z) = \frac{1}{2} s B \hat{\phi}.$$

- Dla pola generowanego przez hipotetyczny monopol magnetyczny o ładunku magnetycznym  $q_m$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi}.$$

- Dla pola generowanego przez nieskończony prostoliniowy przewód z prądem o natężeniu  $I$

$$\mathbf{B}(s, \phi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad \mathbf{A}(s, \phi, z) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{s}{a} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

gdzie  $a$  jest pewną stałą.

- Dla pola generowanego przez idealny dipol magnetyczny  $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$  umieszczony w środku układu współrzędnych

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad \mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Główną zaletą używania magnetycznego potencjału wektorowego jest fakt, iż dla prądów dążących do 0 w nieskończoności całki wyznaczające  $\mathbf{A}$  są łatwiejsze do obliczenia niż bezpośrednie całkowanie  $d\mathbf{B}$ .

### 3.2.6 Energia pola magnetycznego

Jeśli w pewnym obszarze istnieje pole magnetyczne  $\mathbf{B}$ , to w tym obszarze zgromadzona jest energia o gęstości

$$\varkappa_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

### 3.2.7 Pola magnetyczne w materii

Jeśli kawałek substancji magnetycznej umieścimy w zewnętrznym polu magnetycznym to substancja ta stanie się namagnesowana. Miarą tego namagnesowania jest wektor magnetyzacji  $\mathbf{M}$  określający magnetyczny moment dipolowy na jednostkę objętości substancji. Pole magnetyczne wytwarzane przez substancję o magnetyzacji  $\mathbf{M}$  jest takie jak od prądu objętościowego  $\mathbf{J}_{zw}$  i powierzchniowego  $\mathbf{K}_{zw}$  danych wzorami

$$\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{K}_{zw} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

Z prawa Ampere'a mamy wówczas

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M},$$

skąd wprowadzając wektor natężenia pola magnetycznego  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$  otrzymujemy

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sw}.$$

Analogicznie jak w elektrostatyce  $\mathbf{J}_{sw}$  oznacza rozkład prądów swobodnych, tj. niezwiązanych z materią substancji magnetycznej. Powyższe równanie nie wyznacza  $\mathbf{H}$  jednoznacznie, gdyż w przeciwieństwie do  $\mathbf{B}$  jego dywergencja nie jest w ogólności równa 0 i musimy ją wyznaczyć znając  $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

### Ośrodki liniowe

Dla ośrodków liniowych, jednorodnych i izotropowych zachodzi

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest wypadkowym natężeniem pola magnetycznego pochodzącym zarówno od  $\mathbf{J}_{zw}$  i  $\mathbf{J}_{sw}$ , a  $\chi_m$  to tzw. podatność magnetyczna. W liniowym ośrodku mamy, zatem

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H},$$

gdzie  $\mu$  jest względną przenikalnością magnetyczną ośrodka.

#### 3.2.8 Warunki brzegowe w magnetostatyce

Niech  $\mathcal{S}$  oznacza brzeg pewnego obszaru  $\mathcal{V}$ . Wówczas warunki brzegowe na powierzchni  $\mathcal{S}$  mają postać

- $B_{nad}^\perp - B_{pod}^\perp = 0$
- $H_{nad}^\parallel - H_{pod}^\parallel = K_{sw},$

gdzie indeksy *nad* i *pod* oznaczają, że bierzemy odpowiednio składowe równoległe lub prostopadłe do  $\mathcal{S}$  tuż nad lub tuż pod tą powierzchnią.



### 3.3 Stacjonarne równania Maxwella

Elektrostatyka opisuje pole elektryczne pochodzące od stacjonarnych rozkładów ładunku, natomiast magnetostatyka opisuje pola magnetyczne od stacjonarnych rozkładów prądów. Cała elektrostatyka opiera się na dwóch faktach doświadczalnych: prawie Coulomba i zasadzie superpozycji. Cała magnetostatyka z kolei opiera się na prawie Biota–Savarta i zasadzie superpozycji. Najbardziej eleganckim sformułowaniem elektro- i magnetostatyki jest jednak oparcie się na równaniach opisujących rotację i dywergencję pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ . Sformułowanie to jest zawarte w postaci czterech stacjonarnych równań Maxwella

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Równania te (wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi) pozwalają znaleźć stacjonarne pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  dla dowolnych stacjonarnych rozkładów, nie mówią jednak nic o oddziaływaniu ładunków elektrycznych z tymi polami. Trzeba je więc uzupełnić o wzór na siłę Lorentza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Powyższe pięć równań jest równoważnym sformułowaniem elektro- i magnetostatyki.

Jeśli w zagadnieniu nie występują swobodne ładunki lub prądy to cztery równania Maxwella możemy przepisać do postaci

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}$$

które uzupełnione o równania materiałowe

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}\end{aligned}$$

wyznaczają pola generowane przez spolaryzowane i namagnesowane substancje. Zauważmy niesamowitą symetrię tych równań. Istotnie stosując podstawienia

$$\mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}, \quad \mathbf{P} \mapsto \mu_0 \mathbf{M}, \quad \epsilon_0 \mapsto \mu_0$$

możemy zamienić problem elektryczny na równoważny problem magnetyczny, natomiast stosując podstawienia odwrotne: problem magnetyczny na elektryczny. Korzystając z tych podstawień możemy podać rozwiązania następujących problemów.

### Zadania.

1. Znaleźć indukcję  $\mathbf{B}$  wytwarzaną przez idealny dipol magnetyczny  $\mathbf{m}$  umieszczony w środku układu współrzędnych zgodnie z osią  $z$

Pole elektryczne idealnego dipola elektrycznego jest dane wzorem

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

W problemie tym nie występują ładunki swobodne, a polaryzacja  $\mathbf{P}$  jest zerowa w dowolnym punkcie poza początkiem układu współrzędnych, gdzie ma osobliwość. Stosując podstawienia  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P} \mapsto \mu_0 \mathbf{M}$ ,  $\epsilon_0 \mapsto \mu_0$  otrzymujemy więc, że natężenie pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  dipola wynosi

$$\mathbf{H}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 |\mathbf{m}|}{4\pi\mu_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Wykorzystując równanie materiałowe  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$  oraz fakt, że  $\mathbf{M} = 0$  w dowolnym punkcie różnym od  $\mathbf{0}$  otrzymujemy

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 |\mathbf{m}|}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Dipol magnetyczny posiada w zewnętrznym polu  $\mathbf{B}$  energię  $W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ , działa na niego siła  $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$  i moment siły  $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ .

2. Znaleźć indukcję  $\mathbf{B}$  w dowolnym punkcie  $X$  jednorodnie namagnesowanej kuli o magnetyzacji  $\mathbf{M}$

W przypadku jednorodnie spolaryzowanej kuli mamy

$$\mathbf{E}(X) = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

W problemie tym nie występują ładunki swobodne, a polaryzacja jest dana. Stosując podstawienia  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P} \mapsto \mu_0 \mathbf{M}$ ,  $\epsilon_0 \mapsto \mu_0$  otrzymujemy więc, że natężenie pola magnetycznego w punkcie  $X$  jednorodnie namagnesowanej kuli wynosi

$$\mathbf{H}(X) = -\frac{1}{3} \mathbf{M}.$$

Indukcja pola magnetycznego wynosi więc

$$\mathbf{B}(X) = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}.$$

Zauważmy, że ponieważ jednorodnie namagnesowana kula odpowiada prądowi  $\mathbf{J} = 0$  wewnątrz kuli i  $\mathbf{K} = M \sin \theta \hat{\phi}$  na powierzchni, więc możemy podać rozwiązanie dla sfery o promieniu  $R$  naładowanej z jednorodną gęstością ładunku  $\sigma$  obracającej się z prędkością  $\omega$ . Istotnie podstawiając  $M = \sigma\omega R$  otrzymujemy

$$\mathbf{B}(X) = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega.$$

### 3.3.1 Siły działające na dielektryki i magnetyki

Wyciągając dielektryk z kondensatora lub rdzeń magnetyczny z cewki energia układu zmienia się o wykonaną pracę. W przypadku, gdy na kondensatorze utrzymywane jest stałe napięcie lub stały prąd w cewce, siła  $F$  działająca na materiał spełnia równanie

$$dW = -F dx + dW_{\mathcal{E}},$$

gdzie  $W = \int_V \varkappa dV$ , a  $W_{\mathcal{E}}$  jest energią wydatkowaną przez źródło napięcia lub prądu. Dla kondensatora mamy

$$W = \frac{1}{2}C(x)U^2, \quad dW_{\mathcal{E}} = U dq = U^2 dC,$$

skąd otrzymujemy

$$F_C = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{dx} + U^2 \frac{dC}{dx} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{dx}.$$

Dla cewki mamy natomiast

$$W = \frac{1}{2}L(x)I^2, \quad dW_{\mathcal{E}} = U dq = I^2 dL,$$

skąd otrzymujemy

$$F_L = -\frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx} + I^2 \frac{dL}{dx} = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx} = \frac{dW_L}{dx}.$$

### Zadania.

1. Dwie długie współosiowe cylindryczne metalowe rury o promieniach  $a$  i  $b$  ustawione są pionowo w zbiorniku z dielektrycznym olejem o gęstości  $\varrho$  i podatności  $\chi$ . Napięci między rurami wynosi  $U$ . Na jaką wysokość podniesie się poziom oleju między rurami.

Siła elektryczna działająca na ciecz wynosi

$$F_C = \frac{dW}{dx},$$

gdzie  $x$  jest wysokością cieczy między rurami, a  $W$  energią zmagazynowaną w polu elektrycznym kondensatora. Mamy

$$W = \int_{V_1} \varkappa_1 dV + \int_{V_2} \varkappa_2 dV ,$$

gdzie

$$\varkappa_1 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 , \quad \varkappa_2 = \frac{1}{2}\epsilon_0(1 + \chi)E^2 .$$

Zgodnie z wcześniej wyprowadzonym wzorem

$$E = \frac{U}{s \ln(b/a)} ,$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\epsilon_0 U^2}{2 \ln^2(b/a)} \int_x^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{s^2} s ds d\phi dz \\ &+ (1 + \chi) \frac{\epsilon_0 U^2}{2 \ln^2(b/a)} \int_0^x \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{s^2} s ds d\phi dz \\ &= \frac{\pi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} (L - x) + (1 + \chi) \frac{\pi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} x . \end{aligned}$$

Z powyższego zatem

$$F_C = -\frac{\pi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} + (1 + \chi) \frac{\pi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} = \frac{\pi \chi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} .$$

Siła ta nie zależy od poziomu cieczy  $x$ . W stanie równowagi mamy

$$\frac{\pi \chi \epsilon_0 U^2}{\ln(b/a)} = \varrho g \pi (b^2 - a^2) x_0 ,$$

skąd ostatecznie

$$x_0 = \frac{\epsilon_0 \chi U^2}{\varrho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)} .$$

## 3.4 Elektrodynamika

### 3.4.1 Prawo Ohma

Aby mógł płynąć prąd elektryczny na ładunki musi działać wypadkowa siła. Dla większości materiałów gęstość prądu  $\mathbf{J}$  jest wprost proporcjonalna do siły działającej na jednostkowy ładunek. W przewodniku siłą działającą na ładunki jest siła Lorentza  $\mathbf{f} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . W większości przypadków drugi człon można pominąć i wówczas otrzymujemy prawo Ohma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{E},$$

gdzie  $\sigma$  to tzw. konduktywność materiału, a  $\varrho$  to rezystywność materiału. W przypadku stacjonarnym w przewodniku  $\mathbf{E} = 0$ . Zauważmy, że dla doskonałego przewodnika  $\sigma \rightarrow \infty$  również gdy płynie przez niego prąd  $\mathbf{J}$  to  $\mathbf{E} = 0$ , a zatem  $\varphi = \text{const}$ . W praktyce metale są na tyle dobrymi przewodnikami, że możemy traktować je jako doskonałe. W przeciwieństwie do nich oporniki zrobione są z materiałów słabo przewodzących. Jeśli dany jest ośrodek o pewnej konduktywności otaczający dwa przewodniki, to natężenie prądu płynącego między elektrodami jest wprost proporcjonalne do napięcia między nimi. Stałą proporcjonalności nazywamy rezystancją

$$R = \frac{U}{I}.$$

**Twierdzenie.** Niech  $\mathcal{V}$  będzie jednorodnym, izotropowym obszarem o konduktywności  $\sigma$  otaczającym dwa przewodniki  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ . Wówczas iloczyn pojemności układu  $C$  i jego rezystancji  $R$  wynosi

$$RC = \frac{\epsilon_0}{\sigma}.$$

Istotnie z prawa Ohma mamy

$$I = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

gdzie  $\mathcal{S}$  jest dowolną powierzchnią zamkniętą, wewnątrz której znajduje się tylko jeden z przewodników. Z prawa Gaussa natomiast mamy

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Z powyższego

$$RC = \frac{U}{I} \frac{Q}{U} = \frac{Q}{I} = \frac{\epsilon_0}{\sigma}.$$

1. Rezystancja opornika o stałym przekroju poprzecznym o polu  $S$  i długości  $l$ .

$$R = \varrho \frac{l}{S}.$$

2. Rezystancja układu składającego się z dwóch długich współśrodkowych wałków o promieniach  $a$ ,  $b$  i długości  $l$ .

$$R = \varrho \frac{\ln(b/a)}{2\pi l}.$$

### 3.4.2 Prawo Childa–Langmuira

W diodzie próżniowej elektrony wyparowują z gorącej uziemionej katody o potencjale równym 0 i przemieszczają się ruchem przyspieszonym przez przerwę w kierunku anody, na której utrzymywany jest potencjał  $V$ . Chmura elektronów poruszających się w przerwie szybko się powiększa, aż pole na powierzchni katody zostanie zredukowane do 0. Od tego momentu między płytami płynie stały prąd. Chcemy wyznaczyć zależność  $I(V)$ . W stanie stacjonarnym potencjał między elektrodami jest wyznaczony przez jednowymiarowe równanie Poissona

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0.$$

Gęstość  $\rho(x)$  możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru

$$I = n(x)Seu(x) = \rho(x)Su(x),$$

gdzie  $S$  jest powierzchnią elektrody, a  $u(x)$  jest prędkością dryfu elektronów w odległości  $x$  od katody. Z prawa zachowania energii

$$\frac{1}{2}mu^2(x) - e\varphi(x) = -e\varphi(0) + \delta T \approx -e\varphi(0),$$

gdzie  $\delta T$  jest energią kinetyczną, jaką posiadają elektrony w związku z ich wyparowaniem z powierzchni katody. Z powyższego zatem

$$\rho(x) = -\frac{I}{S}\sqrt{\frac{m}{2e}}(\varphi(x) - \varphi(0))^{-1/2}.$$

Warunkami brzegowymi są  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(d) = V$  i  $\varphi'(0) = 0$ , zatem mamy

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \alpha\varphi^{-1/2}(x),$$

skąd przez elementarne całkowanie otrzymujemy

$$\varphi(x) = \left(\frac{9\alpha}{4}\right)^{2/3} x^{4/3},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Z powyższego zatem

$$\varphi(d) = V = I^{2/3} \left( \frac{9\sqrt{m}}{4\epsilon_0 S \sqrt{2e}} \right)^{3/2} d^{4/3},$$

czyli

$$I(V) = \left( \frac{4\epsilon_0 S}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \right) V^{3/2}.$$

### 3.4.3 Siła elektromotoryczna

Siłę elektromotoryczną (SEM) definiujemy jako różnicę potencjałów między biegunami ogniwa w przypadku ogniwa otwartego. Równoważnie jest to całka krzywoliniowa z siły działającej na jednostkowy ładunek w źródle SEM

$$\mathcal{E} = \int_{B_-}^{B_+} \frac{\mathbf{F}_{\text{source}}}{q} \cdot d\mathbf{l} = \int_{B_-}^{B_+} \mathbf{f}_{\text{source}} \cdot d\mathbf{l}$$

### 3.4.4 Ciepło Joula

W wyniku przepływu prądu elektrycznego na oporniku wydzielą się ciepło o mocy

$$P = \frac{U dq}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

### 3.4.5 Indukcja elektromagnetyczna

Będziemy oznaczać  $\Phi$  – strumień  $\mathbf{B}$  przez powierzchnię  $\mathcal{S}$ . Jeśli prostokątny obwód jest wyciągany z obszaru jednorodnego pola magnetycznego  $B$  ze stałą szybkością  $v$  w taki sposób, że jego bok  $ab$ ,  $|ab| = w$  jest równoległy do brzegu tego obszaru to na ładunki w odcinku  $ab$  działa siła Lorentza  $qvB$ . Indukowana SEM jest zatem równa

$$\mathcal{E} = \int_0^w vB dx = vBw.$$

Wynik ten możemy zapisać również przy użyciu strumienia  $\mathbf{B}$ , gdyż  $\Phi = Bwx$  i  $\dot{x} = v$ , zatem

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Powyższe równanie można stosować również do nieprostokątnych obwodów poruszających się w dowolnych kierunkach w niejednorodnym polu (obwody nie muszą nawet zachowywać swoich kształtów!). Jest to tzw. reguła strumienia. Należy jednak pamiętać, że SEM indukowana w obwodzie może być dwojakiego pochodzenia tj. może być generowana przez siłę Lorentza działającą na poruszające się w przewodniku ładunki lub przez wirowe pole elektryczne generowane na skutek lokalnej zmiany indukcji magnetycznej. Reguła strumienia łączy te dwa przypadki pod postacią jednego wzoru, jednak w niektórych układach istnieje niejednoznaczność co do wyboru fikcyjnego obwodu dla którego obliczamy  $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$  (np. dynamo Faraday’a, doświadczenia Heringa i Cullwicka). Wówczas można skorzystać z reguły Cartera („The Electromagnetic Field In Its Engineering Applications” (1968), G.W. Carter).

#### **Reguła Cartera**

Reguła strumienia daje prawidłowe wyrażenie na SEM mierzoną przez galwanometr w dowolnym układzie, jeśli tylko fikcyjny (lub rzeczywisty) obwód  $\ell$  użyty do obliczenia  $\oint_{\ell} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$  został wybrany w taki sposób, iż jego fragment zawarty w poruszającej się części układu porusza się wraz z tą częścią w taki sam sposób i w żadnym momencie ruchu nie następuje skokowa zmiana strumienia magnetycznego przechodzącego przez  $\ell$ .

#### **Prawo Faraday’a**

W 1831 r. Michael Faraday opublikował wyniki serii eksperymentów, z których ideę trzech można opisać następująco.

- *Eksperyment 1.* Przemieszczamy pętlę z drutu w niejednorodnym polu magnetycznym. W pętli płynie prąd elektryczny.
- *Eksperyment 2.* Przesuwamy magnes przy nieruchomej pętli. W pętli płynie prąd elektryczny.
- *Eksperyment 3.* Pętla i magnes pozostają w spoczynku. Zmieniamy natomiast indukcję pola magnetycznego. W pętli płynie prąd elektryczny.

Pierwszy eksperyment jest przykładem SEM indukowanej przez siłę Lorentza. Zauważmy jednak, że przyczyną powstawania SEM w 2. i 3. eksperymencie nie może być siła Lorentza, gdyż obwód się nie porusza. Okazuje się, że zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne.



**Prawo Faraday’a**

W ogólnym przypadku rotacja pola elektrycznego wynosi

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

**Reguła Lenza**

Natura nie znosi zmiany strumienia magnetycznego.

**Indukowane pole elektryczne**

Odkrycie Faraday’a mówi nam, że istnieją dwa rodzaje pól elektrycznych: pola bezpośrednio związane z istnieniem ładunków elektrycznych i pola elektryczne związane ze zmianami pól magnetycznych. Pierwsze możemy obliczyć (w przypadku stacjonarnym) z prawa Coulomba, drugie z prawa Faraday’a.

**3.4.6 Indukcyjność**

Założmy, że mamy dwie nieruchome, przewodzące pętle. Powiedzmy teraz, że natężenie prądu w pierwszej pętli wynosi  $I_1$ . Wówczas strumień pola magnetycznego (wytworzanego przez pierwszą pętlę) przez pierwszą pętlę wynosi  $\Phi_1$ , a przez drugą  $\Phi_{12}$ . Te strumienie są wprost proporcjonalne do  $I_1$ , co wynika z prawa Biota-Savarta. Istotnie mamy

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{\ell_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\ell_2} \oint_{\ell_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathcal{R}}.$$

Indukcyjność własną  $L_1$  pętli 1 definiujemy jako

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1}$$

Indukcyjność wzajemną pętli 1 i 2 definiujemy jako

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

Analogicznie mamy

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2}, \quad M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}.$$

Z powyższego zachodzi

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{\mathcal{R}}.$$

Jest to wzór Neumanna.

- Dla solenoidu mamy oczywiście

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

gdzie  $N$  jest liczbą zwojów,  $S$  – polem przekroju poprzecznego solenoidu,  $l$  – długością solenoidu.

- Dla układu dwóch współśrodkowych solenoidów o promieniach  $a, b$  ( $b > a$ ) i długościach  $l_a, l_b$  ( $l_b \gg l_a$ ) i liczbie zwojów  $N_a, N_b$

$$M = \frac{\mu_0 N_a N_b \pi a^2}{l_b}.$$

Chcemy teraz wyznaczyć energię zmagazynowaną w takim układzie, gdy natężenie prądu w pętli 1 wynosi  $I_1$ , a w pętli 2  $I_2$ . Mamy

$$dW = U_1 dq_1 + U_2 dq_2,$$

ale z prawa Faraday’a

$$U_i = \frac{d\Phi_i}{dt} + \frac{d\Phi_{ji}}{dt},$$

zatem

$$\begin{aligned} dW &= I_1 d\Phi_1 + I_1 d\Phi_{21} + I_2 d\Phi_2 + I_2 d\Phi_{12} \\ &= (L_1 I_1 + M_{12} I_2) dI_1 + (L_2 I_2 + M_{21} I_1) dI_2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że to wyrażenie ma postać  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ , gdzie

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2] = [L_1 I_1 + M_{12} I_2, L_2 I_2 + M_{21} I_1], \quad d\mathbf{l} = [dI_1, dI_2].$$

Energia  $W$  będzie zatem równa całce krzywoliniowej w przestrzeni  $(I_1, I_2)$ . Zauważmy jednak, że  $W$  nie powinno zależeć od drogi w przestrzeni  $(I_1, I_2)$ , czyli rotacja  $\mathbf{F}$  powinna być równa 0, skąd

$$\frac{\partial}{\partial I_2}(L_1 I_1 + M_{21} I_2) - \frac{\partial}{\partial I_1}(L_2 I_2 + M_{12} I_1) = 0,$$

zatem  $M_{12} = M_{21}$ , będziemy więc oznaczać  $M_{12} = M_{21} = M$ . Wybierając krzywą w postaci fragmentu prostokąta o bokach równoległych do osi  $I_1, I_2$  otrzymujemy

$$W = \int_0^{I_1} F_1(I'_1, 0) dI'_1 + \int_0^{I_2} F_2(I_1, I'_2) dI'_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2.$$

Oczywiście dla pojedynczej pętli wzór ten redukuje się do znanego wyrażenia

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Zauważmy, że  $W$  można też obliczyć jako

$$W = \int_V \varkappa_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV,$$

ponieważ  $\varkappa_m$  jest ściśle nieujemne, zatem  $W \geq 0$ , czyli

$$\frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 \geq 0.$$

dla każdego  $I_1, I_2$ . Traktując lewą stronę jako wyrażenie kwadratowe zmiennej  $I_1$  musi zatem zachodzić

$$\Delta = I_2^2(M^2 - L_1L_2) \leq 0,$$

skąd

$$M^2 \leq L_1L_2.$$

### Zadanie.

*Dane są trzy cewki (1,2,3), każda o indukcyjności własnej  $L$ . Indukcyjność wzajemna w parach (1,2) i (2,3) także wynosi  $L$ . Wykaż, że indukcyjność wzajemna w parze (1,3) również wynosi  $L$ .*

Wyznamy energię zmagazynowaną w układzie, gdy w cewkach płyną prądy o natężeniach odpowiedni  $I_1, I_2, I_3$ . Oznaczmy  $L_{13} = L_{31} = M$ . Mamy

$$\begin{aligned} dW &= dI_1 (LI_1 + LI_2 + MI_3) + dI_2 L(I_1 + I_2 + I_3) + dI_3 (MI_1 + LI_2 + LI_3) \\ &= F_1 dI_1 + F_2 dI_2 + F_3 dI_3. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że w przestrzeni  $(I_1, I_2, I_3)$  zachodzi  $\nabla \times [F_1, F_2, F_3] = 0$ . Wybierając krzywą całkowania będącą fragmentem prostopadłościanu otrzymujemy

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{I_1} F_1(I'_1, 0, 0) dI'_1 + \int_0^{I_2} F_2(I_1, I'_2, 0) dI'_2 + \int_0^{I_3} F_3(I_1, I_2, I'_3) dI'_3 \\ &= \frac{1}{2}L(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) + L(I_1I_2 + I_2I_3) + MI_1I_3. \end{aligned}$$

Oczywiście tak jak poprzednio  $W \geq 0$  dla dowolnych  $I_1, I_2, I_3$ , zatem

$$I_1^2 + 2\left(I_2 + \frac{M}{L}I_3\right)I_1 + (I_2^2 + 2I_2I_3 + I_3^2) \geq 0,$$

dla dowolnych  $I_1, I_2, I_3$ , skąd

$$\Delta = I_3 \left( \frac{M}{L} - 1 \right) \left( 2I_2 + I_3 + \frac{M}{L} I_3 \right) \leq 0.$$

Jedyną możliwością, aby powyższe równanie było spełnione dla dowolnych  $I_2, I_3$  jest  $M = L$ , co kończy dowód.

### 3.4.7 Prawo Ampere’a–Maxwella

Rozpatrzmy ponownie prawo Ampere’a. Zauważmy, że biorąc obustronnie dywergencję otrzymujemy

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Widzimy, że lewa strona jest tożsamościowo równa 0, natomiast prawa wynosi 0 tylko dla prądów stacjonarnych. Maxwell poprawił prawo Ampere’a dodając człon  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

dzięki czemu wzięcie obustronnie dywergencji powadzi nas do równania ciągłości, gdyż  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ . Dzięki tej poprawce teoria jest pełna, równanie ciągłości jest jej konsekwencją, a nie dodatkowym założeniem oraz istnieje w niej piękna symetria: tak jak zmienne pole magnetyczne generuje wirowe pole elektryczne, tak też zmiana pola elektrycznego indukuje pole magnetyczne.

### 3.4.8 Równania Maxwella

Całą klasyczną elektrodynamikę można sformułować za pomocą pięciu równań. Cztery równania Maxwella wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi pozwalają nam wyznaczyć pola  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  dla dowolnych rozkładów ładunków i prądów, natomiast wzór na siłę Lorentza opisuje oddziaływanie ładunków z tymi polami.

#### Równania Maxwella

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

#### Siła Lorentza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

W przypadku ośrodków materialnych wygodniejszą w użyciu postacią równań Maxwella jest

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{sw}} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{sw}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned},$$

gdzie  $\rho_{\text{sw}}$ ,  $\mathbf{J}_{\text{sw}}$  to odpowiednio gęstość objętościowa ładunku swobodnego (niezwiązanego z materią ośrodka) i gęstość prądu swobodnego. Równania te musimy uzupełnić związkami materiałowymi

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

### 3.4.9 Warunki brzegowe w elektrodynamice

W elektrodynamice warunki brzegowe mają identyczną postać jak odpowiednie warunki w elektro- i magnetostatyce tj.

$$\begin{aligned}E_{\text{nad}}^{\parallel} &= E_{\text{pod}}^{\parallel}, & D_{\text{nad}}^{\perp} - D_{\text{pod}}^{\perp} &= \sigma_{\text{sw}} \\ B_{\text{nad}}^{\perp} &= B_{\text{pod}}^{\perp}, & H_{\text{nad}}^{\parallel} - H_{\text{pod}}^{\parallel} &= K_{\text{sw}}\end{aligned}.$$

### 3.4.10 Twierdzenie Poyntinga i zasada zachowania momentu pędu

Rozważmy obszar  $\mathcal{V}$ , w którym znajdują się niezerowe ładunki. Elementarna praca wykonana przez siłę Lorentza nad tymi ładunkami wynosi

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{V}} \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV \cdot \mathbf{v} dt,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{V}} dV \left( \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right).$$

Korzystając z tożsamości  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$  otrzymujemy zatem

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

skąd

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{\mathcal{V}} dV \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right).$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{dW}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} .$$

Jest to tzw. twierdzenie Poyntinga, gdzie wektor  $\mathbf{S} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  nazywamy wektorem Poyntinga. Z powyższego widzimy, iż całka powierzchniowa z  $\mathbf{S}$  po powierzchni zamkniętej ograniczającej pewien obszar  $\mathcal{V}$  jest równa zmianie energii tego obszaru w czasie, inaczej energii wpływającej lub wypływającej z tego obszaru w jednostkowym czasie.

Jeśli w pewnym obszarze istnieją pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  to w tym obszarze zmagazynowany jest moment pędu o gęstości

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\wp}_{\text{em}} = \mathbf{r} \times (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) ,$$

gdzie  $\boldsymbol{\wp} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}$  jest gęstością pędu pola EM, a  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Całkowity moment pędu wynosi zatem

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{mech}} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\ell}_{\text{em}} dV$$

i tak zmodyfikowany moment pędu spełnia klasyczne zasady zachowania.

### 3.4.11 Lagranżjan dla cząstki naładowanej w polu elektromagnetycznym

Rozpatrzmy punktową cząstkę naładowaną o ładunku  $e$  i masie  $m$  umieszczoną w obszarze pola elektrycznego  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  i pola magnetycznego  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Chcemy wyznaczyć trajektorię cząstki  $\mathbf{r}(t)$  dla zadanych warunków początkowych  $\mathbf{r}(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ . Zgodnie z II zasadą dynamiki oraz wzorem na siłę Lorentza mamy

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] .$$

W wielu zagadnieniach wygodniej jest jednak posługiwać się formalizmem Lagrange'a. Chcemy zatem znaleźć funkcję  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ , taką że równania Lagrange'a odtwarzają powyższe równanie. Okazuje się, że funkcja

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(V - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$$

spełnia ten warunek, przy

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .$$

Jako przykład rozpatrzmy poniższe zadanie.

Jeden koniec sztywnego, nieważkiego pręta o długości  $l$  jest przymocowany do punktu  $(0, 0, 0)$ , zaś do drugiego końca przymocowano niewielką kulkę o masie  $m$  i ładunku  $q$ . Cały układ znajduje się w nieważkości w jednorodnym polu magnetycznym  $\mathbf{B} = [0, 0, B]$  skierowanym pionowo do góry. Początkowo kulka znajduje się w punkcie  $(l, 0, 0)$  i ma prędkość  $\mathbf{v}_0 = [0, 0, v]$  skierowaną pionowo do góry. Wyznacz maksymalną współrzędną  $z$  osiąganą przez kulkę w trakcie jej ruchu.

**Rozwiązanie.** W rozwiązaniu skorzystamy z formalizmu Lagrange’a. Lagrangian punktowej cząstki o masie  $m$  i ładunku  $q$  w polu elektromagnetycznym  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ma postać

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - q(V - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}),$$

gdzie  $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial_t \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . W naszym zadaniu oczywiście  $V = 0$  i  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}Br \sin \theta \hat{\phi}$ . Ponieważ ruch cząstki jest ograniczony do powierzchni sfery o promieniu  $l$ , więc naturalnym wyborem współrzędnych uogólnionych są kąty  $\theta$  i  $\phi$  zdefiniowane jako

$$x = l \sin \theta \cos \phi, \quad y = l \sin \theta \sin \phi, \quad z = l \cos \theta.$$

Lagrangian ma zatem postać

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{qBl^2}{2}\dot{\phi} \sin^2 \theta.$$

Do rozwiązania zadania wystarczy nam znajomość dwóch całek ruchu dla powyższego układu. Istotnie, ponieważ składowa magnetyczna siły Lorentza nie wykonuje pracy, więc w dowolnym momencie ruchu

$$\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = \text{const.}$$

Jednocześnie zauważmy, że z powyższej postaci lagrangianu wynika, iż współrzędna  $\phi$  jest cykliczna, zatem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \frac{qBl^2}{2} \sin^2 \theta = \text{const.}$$

Oznaczmy powyższe całki ruchu odpowiednio przez  $\mathcal{E}$  i  $J$ . Korzystając z warunków początkowych mamy oczywiście  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$  i  $J = \frac{1}{2}qBl^2$ . Jednocześnie przypomnijmy, że  $z = l \cos \theta$  i  $\dot{z} = -\dot{\theta}l \sin \theta$ . Z (5) mamy zatem

$$\dot{\phi} = \frac{qB}{2ml^2} \frac{z^2}{\sin^2 \theta},$$

co po podstawieniu do (4) daje

$$\dot{z}^2 l^2 = v^2 l^2 - v^2 z^2 - \left( \frac{qB}{2m} \right)^2 z^4.$$

Maksymalne  $z$  musi odpowiadać  $\dot{z} = 0$ , zatem

$$z_m = \frac{m\sqrt{2}}{qB} \sqrt{-v^2 + \sqrt{v^4 + \left( \frac{qBlv}{m} \right)^2}}.$$

Zauważmy, że  $z_m \leq l$ , istotnie,  $v^4 + \frac{q^2 B^2 l^2 v^2}{m^2} \leq (v^2 + \frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2})^2$ , przy czym równość zachodzi tylko dla  $\frac{q^2 B^2 l^2}{2m^2} = 0$ .



### 3.5 Fale elektromagnetyczne

W obszarze wolnym od jakichkolwiek ładunków i prądów równania Maxwella mają postać

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}.$$

Stosując operator rotacji do równań z pierwszej kolumny mamy

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}\end{aligned},$$

skąd otrzymujemy dwa trójwymiarowe równania falowe

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}\end{aligned}.$$

Z równań Maxwella wynika więc, iż w pustej przestrzeni mogą istnieć fale elektromagnetyczne poruszające się z szybkością

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

równą szybkości światła w próżni. Sensowne wydaje się więc przyjąć, iż światło jest falą elektromagnetyczną.

#### 3.5.1 Fale płaskie

Rozpatrzmy najprostsze nietrywialne rozwiązanie powyższych trójwymiarowych równań falowych w postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned},$$

gdzie  $f$  jest pewną funkcją, natomiast  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  to stałe. Fale takie nazywamy falami płaskimi, gdyż w każdej chwili wektory  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są jednakowe w obrębie dowolnej płaszczyzny prostopadłej do wektora falowego  $\mathbf{k}$ . Podstawiając te rozwiązania do równań falowych otrzymujemy zależność łączącą  $\mathbf{k}$  i  $\omega$  dla fal płaskich

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}.$$

Na stałe  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  należy jednak nałożyć dodatkowe warunki tak, aby powyższe rozwiązania spełniały pierwotne równania Maxwella. Istotnie każde rozwiązanie równań Maxwella spełnia powyższe równania falowe, ale twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż fala rozchodzi się wzdłuż osi  $z$  tj.  $\mathbf{k} = [0, 0, k]$ . Wówczas rozwiązania mają postać

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \mathbf{E}_0 f(kz - \omega t) \\ \mathbf{B}(z, t) &= \mathbf{B}_0 f(kz - \omega t)\end{aligned}.$$

Z równań  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  i  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  otrzymujemy

$$E_0^z \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad B_0^z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

skąd ze względu na fakt iż równania te muszą obowiązywać dla wszystkich  $z$ ,  $t$  otrzymujemy  $E_0^z = B_0^z = 0$ , zatem fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Prawo Faraday'a i prawo Ampere'a–Maxwella dają ten sam warunek w postaci

$$[-E_0^y, E_0^x, 0] \frac{\partial f}{\partial z} = -[B_0^x, B_0^y, 0] \frac{\partial f}{\partial t},$$

ale oczywiście

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial z},$$

zatem otrzymujemy

$$B_0^x = -\frac{1}{c} E_0^y, \quad B_0^y = \frac{1}{c} E_0^x,$$

co możemy zapisać jako

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0.$$

Widzimy więc, iż dla płaskiej fali elektromagnetycznej kierunki drgań pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są wzajemnie prostopadłe i prostopadłe do wektora falowego  $\mathbf{k}$  oraz amplitudy drgań spełniają

$$\frac{E_0}{B_0} = c.$$

Wektor  $\hat{\mathbf{p}}$  zdefiniowany jako

$$\hat{\mathbf{p}} := \frac{\mathbf{E}_0}{E_0}$$

nazywamy wektorem polaryzacji fali płaskiej. Oczywiście zachodzi  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ .

Natężeniem  $I$  fali elektromagnetycznej nazywamy średnią moc fali przechodzącą przez jednostkową powierzchnię równoległą do czoła fali równą średniej z wektora Poyntinga

$$I := \frac{1}{\mu_0} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left\langle \hat{\mathbf{k}} E_0^2 f^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \right\rangle \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \langle f^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle$$

### 3.5.2 Fale elektromagnetyczne w materii

W przypadku materii pod nieobecność swobodnych ładunków i prądów równania Maxwella mają postać

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} .$$

W przypadku jednorodnego, izotropowego i liniowego ośrodka związki materiałowe między wektorami  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  mają postać

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad ,$$

co po podstawieniu daje

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} .$$

Analogicznie równania te implikują fale elektromagnetyczne o identycznych cechach jak w pustej przestrzeni, ale poruszające się z szybkością

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad ,$$

gdzie  $n := \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$  jest bezwymiarowym współczynnikiem załamania światła w danym ośrodku. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ I &= \frac{1}{\mu v} E_0^2 \langle f^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle \end{aligned}$$

### 3.5.3 Notacja wskazowa

Rozważmy falę elektromagnetyczną szczególnej postaci

$$\mathbf{E}(z, t) = \check{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(z, t) = \check{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)},$$

gdzie wprowadziliśmy notację wskazową (z ang. *phasor*), w której definiujemy wskaźy  $\check{\mathbf{E}}_0, \check{\mathbf{B}}_0$  jako

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}}_0 &= e_x e^{i\xi} \hat{\mathbf{x}} + e_y e^{i\eta} \hat{\mathbf{y}} + e_z e^{i\zeta} \hat{\mathbf{z}} = \check{e}_x \hat{\mathbf{x}} + \check{e}_y \hat{\mathbf{y}} + \check{e}_z \hat{\mathbf{z}} \\ \check{\mathbf{B}}_0 &= b_x e^{i\alpha} \hat{\mathbf{x}} + b_y e^{i\beta} \hat{\mathbf{y}} + b_z e^{i\gamma} \hat{\mathbf{z}} = \check{b}_x \hat{\mathbf{x}} + \check{b}_y \hat{\mathbf{y}} + \check{b}_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

gdzie  $e_x, e_y, e_z, b_x, b_y, b_z, \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$  są pewnymi stałymi należącymi do  $\mathbb{R}$ . Aby powyższa fala spełniała równania Maxwella musi zachodzić

$$e_z = b_z = 0$$

oraz

$$b_x e^{i\alpha} = -\frac{1}{c} e_y e^{i\eta}, \quad b_y e^{i\beta} = \frac{1}{c} e_x e^{i\xi}.$$

Wówczas taka „zespolona fala” spełnia równania Maxwella, przy czym oczywiście rzeczywista fala jest dana przez części rzeczywiste powyższych wyrażeń na  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ . Falę taką nazywamy monochromatyczną falą płaską. Posługujemy się postacią zespoloną, gdyż znacznie upraszcza ona operacje algebraiczne w przeciwieństwie do jawnego używania funkcji trygonometrycznych.

Zauważmy, że powyższe wyrażenia opisują nie tylko fale liniowo spolaryzowane (gdy  $\eta = \xi$ ), ale również w ogólniejszym przypadku fale spolaryzowane eliptycznie. Istotnie dla ustalonego  $z$  mamy

$$E_x(t) = e_x \cos(\omega t + \delta - \eta), \quad E_y(t) = e_y \cos(\omega t + \delta - \xi),$$

gdzie  $\delta = -kz$ .

Rozpatrywanie jedynie spolaryzowanych liniowo monochromatycznych fal płaskich jest wystarczająco ogólne, gdyż niemal dowolną liniowo spolaryzowaną falę płaską można przedstawić jako „sumę” takich fal o różnych częstościach i odpowiadających im różnych amplitudach.

### 3.5.4 Falowody

Falowodem nazywamy nieskończoną, prostoliniową „rurę” o stałym przekroju poprzecznym, której przekrój poprzeczny jest jednospójnym obszarem ograniczonym  $D$ , na którego brzegu  $\partial D$  warunki brzegowe dla pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  mają postać

$$E_{\parallel} = 0, \quad B_{\perp} = 0,$$

gdzie  $\parallel$  oznacza składową styczną do powierzchni falowodu, a  $\perp$  składową prostopadłą. Warunki te są równoważne ze stwierdzeniem, iż ścianki falowodu są wykonane z doskonałego przewodnika.

Poszukujemy zatem rozwiązań równań Maxwella

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, & \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, & \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}, & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned},$$

które spełniają warunki brzegowe  $B_\perp = 0$ ,  $E_\parallel = 0$  na powierzchni (wewnętrznej) falowodu. Będziemy poszukiwali rozwiązań szczególnej postaci

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \check{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \check{\mathbf{B}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}}_0(x, y) &= \check{e}_x(x, y) \hat{\mathbf{x}} + \check{e}_y(x, y) \hat{\mathbf{y}} + \check{e}_z(x, y) \hat{\mathbf{z}} \\ \check{\mathbf{B}}_0(x, y) &= \check{b}_x(x, y) \hat{\mathbf{x}} + \check{b}_y(x, y) \hat{\mathbf{y}} + \check{b}_z(x, y) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned},$$

przy czym na razie zakładamy, iż  $\check{e}(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$  i  $\check{b}(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ . Podstawiając powyższe wyrażenia do praw Faraday'a i Ampere'a–Maxwella można wyrazić  $\check{e}_x$ ,  $\check{e}_y$ ,  $\check{b}_x$ ,  $\check{b}_y$  za pomocą  $\check{e}_z$ ,  $\check{b}_z$  wzorami

$$\begin{aligned} \check{e}_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial \check{e}_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial \check{b}_z}{\partial y} \right) \\ \check{e}_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial \check{e}_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial \check{b}_z}{\partial x} \right) \\ \check{b}_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial \check{b}_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \check{e}_z}{\partial y} \right) \\ \check{b}_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial \check{b}_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial \check{e}_z}{\partial x} \right) \end{aligned},$$

przy czym składowe  $\check{e}_z$ ,  $\check{b}_z$  spełniają równania

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \check{e}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \check{e}_z}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \check{e}_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 \check{b}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \check{b}_z}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \check{b}_z &= 0 \end{aligned}.$$

Jednocześnie można sprawdzić, iż prawa Gaussa nie nakładają żadnych dodatkowych warunków na  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ . W takim razie, aby zaproponowane szczególne rozwiązanie  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  spełniało równania Maxwella wystarczy, aby były spełnione powyższe dwa równania, czyli właściwie sprowadziliśmy zagadnienie do poszukiwania rozwiązań równania różniczkowego cząstkowego

$$\frac{\partial^2 \check{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \check{f} = 0,$$

gdzie  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C}$ . Równanie takie nazywamy równaniem Helmholtza. Założymy teraz, że

$$\check{e}_z(x, y) = e_z(x, y)e^{i\eta}, \quad \check{b}_z(x, y) = b_z(x, y)e^{i\zeta},$$

gdzie  $e_z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  i  $b_z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ , natomiast  $\eta$  i  $\zeta$  to pewne stałe. Przy takim założeniu szukamy rzeczywistych rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) e_z &= 0 \\ \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) b_z &= 0 \end{aligned},$$

przy warunkach brzegowych  $E_{\parallel} = 0$ ,  $B_{\perp} = 0$  na powierzchni falowodu.

- jeśli  $e_z \equiv 0$  to mówimy o falach TE (z ang. *transverse electric*)
- jeśli  $b_z \equiv 0$  to mówimy o falach TM (z ang. *transverse magnetic*)
- jeśli  $e_z \equiv 0$  i  $b_z \equiv 0$  to mówimy o falach TEM (z ang. *transverse electromagnetic*)

### 3.5.5 Wnęki rezonansowe

Wnęka rezonansowa to zamknięta komora wykonana z doskonałego przewodnika, na której powierzchni (wewnętrznej) warunki brzegowe mają postać analogiczną do falowodu tj.

$$E_{\parallel} = 0, \quad B_{\perp} = 0.$$

Poszukujemy zatem rozwiązań równań Maxwella spełniających te warunki brzegowe. Będziemy poszukiwali rozwiązań szczególnej postaci (fal stojących)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \check{\mathbf{E}}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \check{\mathbf{B}}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}.$$

Wówczas z równań Maxwella mamy

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \check{\mathbf{E}}_0 &= 0, & \nabla \times \check{\mathbf{E}}_0 &= i\omega \check{\mathbf{B}}_0 \\ \nabla \cdot \check{\mathbf{B}}_0 &= 0, & \nabla \times \check{\mathbf{B}}_0 &= \frac{-i\omega}{c^2} \check{\mathbf{E}}_0 \end{aligned}.$$

Ponieważ drugie równanie w pierwszym wierszu od razu implikuje  $\nabla \cdot \check{\mathbf{B}}_0 = 0$ , więc podstawiając wyrażenie na  $\check{\mathbf{B}}_0$  do prawa Ampere’a–Maxwella otrzymujemy, iż warunkiem aby zaproponowane rozwiązanie spełniało równania Maxwella jest

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \check{\mathbf{E}}_0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \check{\mathbf{E}}_0 \\ \nabla \cdot \check{\mathbf{E}}_0 = 0 \\ \check{\mathbf{B}}_0 = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \check{\mathbf{E}}_0 \end{array} \right. ,$$

zatem właściwie cała matematyka sprowadza się do rozwiązania równania Helmholtza

$$\Delta \check{\mathbf{E}}_0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \check{\mathbf{E}}_0 ,$$

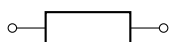
przy warunkach brzegowych  $E_{\parallel} = 0$ ,  $B_{\perp} = 0$  na powierzchni (wewnętrznej) wnęki, przy czym dodatkowo na rozwiązanie  $\check{\mathbf{E}}_0$  należy nałożyć warunek  $\nabla \cdot \check{\mathbf{E}}_0 = 0$ .

## 4 Podstawy teorii obwodów

### 4.1 Elementy obwodów

W poniższych notatkach zajmujemy się głównie obwodami złożonymi z liniowych, skupionych elementów pasywnych  $R$ ,  $L$ ,  $C$  oraz źródeł prądowych i napięciowych. Dowolny dwójnik jest jednoznacznie określony poprzez podanie zależności pomiędzy napięciem  $U(t)$  przyłożonym pomiędzy jego zaciskami, a natężeniem prądu  $I(t)$  przepływającego przez niego. Dla skupionych, liniowych elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  zależności te wyglądają następująco:

1. dla rezystora:  $U(t) = RI(t)$



2. dla cewki indukcyjnej:  $U(t) = L\dot{I}$



3. dla kondensatora:  $\dot{U} = \frac{1}{C}I(t) = SI(t)$ .



#### 4.1.1 Prawa Kirchhoffa

Podstawowymi prawami, z których korzystamy w analizie obwodów elektrycznych są prawa Kirchhoffa będące wygodnym sformułowaniem odpowiednio równania ciągłości oraz faktu, że dla stałych w czasie pól magnetycznych rotacja pola elektrycznego wynosi 0 (obwody zawierające indukcyjność wymagają osobnej dyskusji).

##### I. Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK)

Algebraiczna suma natężeń prądów przepływających przez węzeł jest równa 0.

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha}(t) = 0.$$

##### II. Napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK)

Algebraiczna suma sił elektromotorycznych i przyrostów napięć w dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa 0.

$$\sum_{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha}(t) + \sum_{\beta} U_{\beta}(t) = 0.$$



## Połączenia elementów

Wielkość zastępcza dla szeregowego połączenia:

- rezystorów:  $R_z = \sum R_\alpha$
- cewek indukcyjnych:  $L_z = \sum L_\alpha$
- kondensatorów:  $C_z^{-1} = \sum C_\alpha^{-1}$ .

Wielkość zastępcza dla równoległego połączenia:

- rezystorów:  $R_z^{-1} = \sum R_\alpha^{-1}$
- cewek indukcyjnych:  $L_z^{-1} = \sum L_\alpha^{-1}$
- kondensatorów:  $C_z = \sum C_\alpha$ .

## Połączenie równoległe źródeł napięciowych

Rzeczywiste źródło napięciowe możemy modelować jako szeregowe połączenie idealnego źródła SEM  $\mathcal{E}$  oraz rezystancji wewnętrznej  $r$ . Rozważmy połączenie równoległe  $n$  źródeł napięciowych. Chcemy wyznaczyć zastępczą SEM i zastępczy opór takiego układu. Niech  $u$  oznacza napięcie na zaciskach zastępczego źródła,  $i$  natężenie prądu przepływającego przez zastępcze źródło. Z PPK i NPK mamy

$$i = \sum_{\alpha=1}^n i_\alpha,$$
$$U = \mathcal{E}_\alpha - i_\alpha r_\alpha \quad \text{dla każdego } \alpha.$$

Z powyższego mamy zatem

$$i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathcal{E}_\alpha}{r_\alpha} - U \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{r_\alpha},$$

skąd

$$U = \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathcal{E}_\alpha}{r_\alpha} \right) \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{r_\alpha} \right)^{-1} - i \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{r_\alpha} \right)^{-1}$$

Niech  $\mathcal{E}$  oznacza zastępczą SEM, a  $r$  oznacza zastępczą rezystancję wewnętrzną. Zachodzi

$$U = \mathcal{E} - ir.$$

Porównując ostatnie dwa wzory otrzymujemy

$$r^{-1} = \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha^{-1}, \quad \mathcal{E} = r \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mathcal{E}_\alpha}{r_\alpha}.$$

## 4.2 Liniowe obwody rezystancyjne

W poniższym paragrafie rozpatrujemy obwody złożone jedynie z rezystorów. Poza prostymi szeregowo-równoległymi połączeniami oporników, dla których rozwiązanie obwodu nie sprawia większej trudności istnieją również inne układy, których nie można zredukować do takich połączeń. Oczywistym przykładem jest układ typu mostek. Istnieje wiele twierdzeń które pomagają w analizie takich układów, a jak przekonamy się w paragrafie dotyczącym transformacji Laplace'a twierdzenia te pozwalają rozwiązać praktycznie dowolny obwód zawierający elementy  $R$ ,  $L$ ,  $C$  z niemal dowolnym wymuszeniem  $u(t)$ . Najważniejszym ogólnym twierdzeniem, na którym opiera się wiele mniejszych twierdzeń to tzw. **zasada superpozycji**:

Jeżeli w danej części sieci elektrycznej dopuszczalne są zbiory natężeń prądów i napięć  $\{i_1(t), \dots, u_1(t), \dots\}$  oraz  $\{i'_1(t), \dots, u'_1(t), \dots\}$  to dopuszczalny jest również zbiór  $\{i_1(t) + i'_1(t), \dots, u_1(t) + u'_1(t), \dots\}$ .

### Twierdzenie o zamianie dwójnika

Dowolny dwójnik, tj. układ posiadający dwa wyjścia A i B jest równoważny pojedynczemu rezystorowi  $R$  spełniającemu warunek  $R = \frac{u_{AB}}{i_A}$ , gdzie  $u_{AB}$  jest napięciem pomiędzy zaciskami A i B, a  $i_A$  jest natężeniem prądu wpływającego do wejścia A.

### Twierdzenie o zamianie trójkąta

Dowolny trójkąt, tj. układ posiadający trzy wyjścia A, B, C jest równoważny połączeniu w gwiazdę odpowiednich trzech rezystorów  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ .

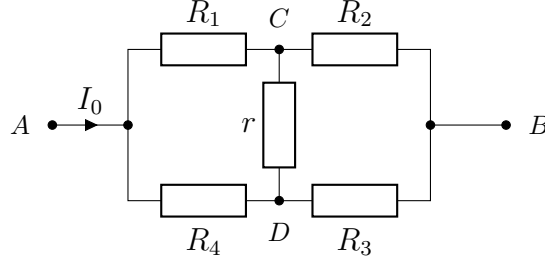
### Transformacja gwiazda-trójkąt

Połączenie rezystorów  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{13}$  w trójkąt jest równoważne połączeniu rezystorów  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  w gwiazdę, gdzie

$$R_\alpha = \frac{R_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

#### 4.2.1 Analiza układu typu mostek

Rozważmy układ typu mostek zbudowany z 5 rezystorów  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  i  $r$ . Założmy, że układ ten podłączamy do źródła prądowego  $I_0$ , tak, że natężenie prądu



wpływającego do mostka wynosi  $I_0$ . Chcemy wyznaczyć natężenie prądu  $i$  płynącego przez rezystor  $r$ . Z PPK i NPK mamy

$$\begin{aligned} I_0 &= i_1 + i_2 \\ i_2 &= i_3 + i \\ i_4 &= i_1 + i \\ i_4 R_4 + i r &= i_3 R_3 \\ i r + i_2 R_2 &= i_1 R_1. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$i = \frac{I_0}{K} (R_2 R_4 - R_1 R_3),$$

gdzie

$$K = (R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + r(R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Zauważmy, że jeśli  $R_1 R_3 = R_2 R_4$  to  $i = 0$ . Mówimy, że wówczas mostek jest zrównoważony.

#### 4.2.2 Mostek jako czwórnik. Reciprocity theorem.

Wyznamy teraz rezystancję zastępczą pomiędzy punktami  $AB$  i  $CD$ . Korzystając z transformacji gwiazda-trójkąt łatwo pokazać, że

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + r} + \left( \frac{1}{R_2 + \frac{r R_1}{R_1 + R_4 + r}} + \frac{1}{R_3 + \frac{r R_4}{R_1 + R_4 + r}} \right)^{-1} \\ &= \frac{r R_{12} R_{34} + R_1 R_2 R_{34} + R_3 R_4 R_{12}}{K}, \end{aligned}$$

gdzie  $R_{\mu\nu} = R_\mu + R_\nu$ . Natomiast dla  $CD$

$$R_{CD} = \frac{r R_{14} R_{23}}{K}.$$

**Reciprocity theorem.** Jeżeli do węzła  $A$  wpływa prąd  $I_0$  to napięcie  $U_{CD}$  wynosi

$$U_{CD} = ir = \frac{I_0 r}{K} (R_2 R_4 - R_1 R_3).$$

Wyznamy teraz napięcie  $U_{AB}$ , gdy do węzła  $C$  wpływa prąd  $I_0$ . Wówczas napięcie  $U_{CD}$  wynosi

$$U_{CD} = I_0 R_{CD} = \frac{r I_0}{K} R_{14} R_{23}.$$

Przez rezystor  $R_2$  płynie więc prąd

$$I_2 = \frac{U_{CD}}{R_{23}} = \frac{r I_0}{K} R_{14},$$

a przez rezystor  $R_1$

$$I_1 = \frac{U_{CD}}{R_{14}} = \frac{r I_0}{K} R_{23}.$$

Napięcie  $U_{AB}$  wynosi zatem

$$\begin{aligned} U_{AB} &= I_2 R_2 - I_1 R_1 = \frac{I_0 r}{K} (R_2 (R_1 + R_4) - R_1 (R_2 + R_3)) \\ &= \frac{I_0 r}{K} (R_2 R_4 - R_1 R_3). \end{aligned}$$

Udowodniliśmy zatem tzw. *reciprocity theorem*:

Jeżeli do węzła  $A$  mostka wpływa prąd  $I_0$ , a z węzła  $B$  wypływa i wówczas napięcie między punktami  $CD$  wynosi  $U$ , to jeżeli do węzła  $C$  wpływa prąd  $I_0$ , a z  $D$  wypływa, to napięcie między  $AB$  również wyniesie  $U$ .

Twierdzenie to jest w istocie prawdziwe nie tylko dla mostka, ale również dla dowolnego czwórnika.

## 4.3 Obwody prądu zmiennego

### 4.3.1 Obwody RC, RL

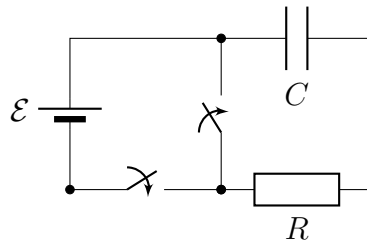
Rozpatrzmy poniższe obwody. Wyznamy dla nich przebiegi  $I(t)$ .

Dla obwodu RC z odłączonym źródłem SEM zachodzi

$$-R\dot{Q} = \frac{1}{C}Q,$$

skąd przez elementarne całkowanie otrzymujemy, przy warunku brzegowym  $Q(0) = CU_0$

$$Q(t) = CU_0 e^{-t/RC} \quad \text{ i } \quad I(t) = \dot{Q} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/RC}.$$



Rysunek 8: Obwód RC.

Energia zgromadzona w kondensatorze maleje zgodnie ze wzorem

$$W_C(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{1}{2}CU_0^2 e^{-2t/RC} = W_C(0)e^{-2t/RC},$$

jednocześnie na rezystorze wydzielą się ciepło

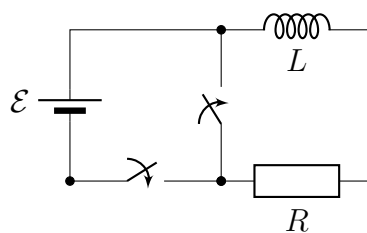
$$W_R(t) = \int_0^t I^2(t')R dt' = W_C(0) (1 - e^{-2t/RC}).$$

Dla obwodu RC z podłączonym źródłem SEM zachodzi

$$\mathcal{E} - R\dot{Q} - \frac{1}{C}Q = 0.$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe, którego rozwiązanie z warunkiem  $Q(0) = 0$  ma postać

$$Q(t) = \mathcal{E}C (1 - e^{-t/RC}), \quad \text{czyli} \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}.$$



Rysunek 9: Obwód RL.

Dla obwodu RL z odłączonym źródłem SEM zachodzi

$$-IR = L\dot{I},$$

skąd przez elementarne całkowanie otrzymujemy, przy warunku brzegowym  $I(0) = I_0$

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L}.$$

Energia zgromadzona w cewce maleje zgodnie ze wzorem

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 e^{-2Rt/L} = W_L(0) e^{-2Rt/L},$$

jednocześnie na rezystorze wydzielą się ciepło

$$W_R(t) = \int_0^t I^2(t') R dt' = W_L(0) (1 - e^{-2Rt/L}).$$

Dla obwodu RL z podłączonym źródłem SEM zachodzi

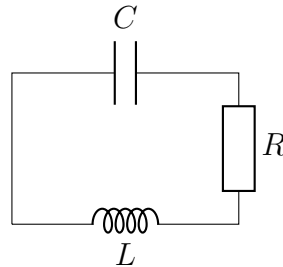
$$\mathcal{E} - IR - L\dot{I} = 0.$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe, którego rozwiązanie z warunkiem brzegowym  $I(0) = 0$  ma postać

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

#### 4.3.2 Obwód RLC

Rozpatrzmy poniższy obwód składający się z idealnego opornika, cewki i kondensatora. Z NPK otrzymujemy równanie różniczkowe



Rysunek 10: Obwód RLC

$$\ddot{I} + 2\beta\dot{I} + \omega_0^2 I = 0,$$

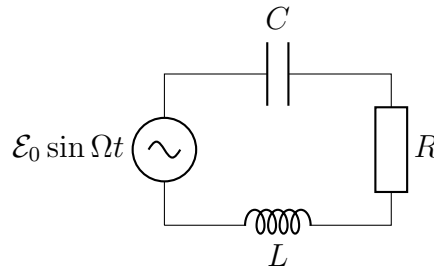
gdzie  $2\beta = R/L$  i  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Jest to oczywiście równanie tłumionego oscylatora harmonicznego. Rozwiązaniem w przypadku słabego tłumienia  $\beta < \omega_0$  jest

$$I(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t - \delta),$$

gdzie  $A$  i  $\delta$  są stałymi wyznaczanymi przez warunki początkowe, a  $\omega$  wynosi

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

## Obwód RLC z wymuszeniem sinusoidalnym



Rysunek 11: Obwód RLC z wymuszeniem sinusoidalnym

Rozpatrzmy obwód przedstawiony na schemacie zawierający źródło SEM  $\mathcal{E}_0 \sin \Omega t$ . Z NPK otrzymujemy

$$\ddot{I} + 2\beta\dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L} \cos \Omega t = f_0 \cos \Omega t,$$

gdzie analogicznie  $2\beta = R/L$  i  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe, o którym mówiliśmy w przypadku wymuszonego oscylatora harmonicznego. Rozwiązanie stacjonarne tego równania ma postać (patrz sekcja *Drgania wymuszone*)

$$I_s(t) = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} \cos \left( \Omega t - \arctan \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right).$$

Korzystając z tożsamości  $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$  i  $\arctan(u) + \arctan(1/u) = \pi/2$  otrzymujemy

$$I_s(t) = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} \sin \left( \Omega t + \arctan \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega} \right).$$

Podstawiając wyrażenia na  $f_0$ ,  $\beta$  i  $\omega_0$  otrzymujemy

$$I_s(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}} \sin \left( \Omega t - \arctan \frac{X_L + X_C}{R} \right),$$

gdzie wprowadziliśmy reaktancję indukcyjną  $X_L = \Omega L$  i pojemnościową  $X_C = -1/\Omega C$ . Oczywiście jest to rozwiązanie szczególne równania różniczkowego, ale jest ono dla nas najbardziej interesujące, gdyż jeśli tylko  $R \neq 0$  to po odpowiednim czasie rozwiązanie jednorodne zanika i w stanie stacjonarnym  $I(t) = I_s(t)$ .

## Rezonans

Podobnie jak dla układów mechanicznych, również tutaj mamy do czynienia ze zjawiskiem rezonansu. Jeśli układ jest podłączony do źródła napięcia sinusoidalnego to mówimy o tzw. rezonansie prądów. Obliczmy częstość rezonansową. W stanie ustalonym amplituda natężenia prądu  $A$  wynosi

$$A(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/\Omega C)^2}},$$

skąd rozwiązując równanie  $I'(\omega_{\text{rez}}) = 0$  otrzymujemy

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad A_{\text{rez}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Widzimy, że w przypadku rezonansu prądu w obwodzie RLC częstość rezonansowa jest równa ściśle częstości drgań własnych układu  $\omega_0$ .

### 4.3.3 Impedancja

Aby znaleźć rozwiązanie stacjonarne dowolnego układu złożonego z elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  przy wymuszeniu sinusoidalnym nie musimy wcale rozwiązywać skomplikowanych układów równań różniczkowych. Istotnie okazuje się, że dla takich obwodów możemy wprowadzić wielkość zespoloną  $\mathcal{Z}$  nazywaną impedancją, taką, że zależność między amplitudą zespoloną  $\mathcal{I}$  natężenia prądu, a amplitudą zespoloną  $\mathcal{U}$  napięcia w stanie stacjonarnym na każdym z elementów można zapisać jako

$$U_0 e^{i\delta} = \mathcal{U} = \mathcal{I} \mathcal{Z} = I_0 e^{i\psi} \mathcal{Z}.$$

W stanie stacjonarnym przy wymuszeniu  $\sin \Omega t$  lub  $\cos \Omega t$  napięcie i natężenie prądu na danym elemencie są dane przez odpowiednio część urojoną lub rzeczywistą wyrażen

$$I_0 e^{i\delta} e^{i\Omega t}, \quad U_0 e^{i\psi} e^{i\Omega t}.$$

Dla elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  mamy odpowiednio

$$\mathcal{Z}_R = R, \quad \mathcal{Z}_L = iX_L = i\omega L, \quad \mathcal{Z}_C = iX_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Impedancje można dodawać tak jak rezystancje w liniowych obwodach rezystancyjnych. Zamiast rozwiązywać układ równań różniczkowych możemy rozwiązać układ równań algebraicznych aby znaleźć zespolone amplitudy  $\mathcal{I}$  i  $\mathcal{U}$  we wszystkich gałęziach obwodu. Dla obwodów prądu przemiennego w stanie stacjonarnym możemy stosować wszystkie narzędzia analizy liniowych obwodów rezystancyjnych



jeśli tylko posługujemy się zespolonymi wielkościami  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{Z}$ . Jeśli  $\mathcal{Z}$  jest impedancją zastępczą układu podłączonego do napięcia sinusoidalnego  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , to amplituda zespolona natężenia prądu płynącego przez źródło wynosi

$$I_0 e^{i\delta} = \mathcal{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{Z}}.$$

Jednocześnie mamy

$$I_0 e^{i\delta} = I_0 (\cos \delta + i \sin \delta)$$

oraz

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{Z} \mathcal{Z}^*} \mathcal{Z}^* = \frac{\mathcal{E}_0}{|\mathcal{Z}|^2} \mathcal{Z}^*.$$

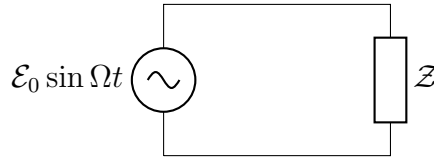
Porównując te wyrażenia możemy zapisać wyrażenia na amplitudę  $I_0$  i przesunięcie fazowe  $\delta$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{|\mathcal{Z}|}, \quad \tan \delta = \frac{\operatorname{Im}\{\mathcal{Z}^*\}}{\operatorname{Re}\{\mathcal{Z}^*\}}.$$

Natężenie prądu płynącego przez źródło w stanie stacjonarnym wynosi wówczas

$$I_s(t) = \operatorname{Im}\{\mathcal{I}_0 e^{i\omega t}\} = I_0 \sin(\omega t + \delta) = \frac{\mathcal{E}_0}{|\mathcal{Z}|} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\mathcal{Z}^*\}}{\operatorname{Re}\{\mathcal{Z}^*\}}\right)$$

#### 4.3.4 Moc w obwodach zasilanych napięciem sinusoidalnym



Rysunek 12: Obwód zasilany napięciem sinusoidalnym

Rozpatrzmy dowolny obwód złożony z idealnych elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  zasilany napięciem sinusoidalnym  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ . Niech  $\mathcal{Z}$  oznacza impedancję zastępczą tego obwodu. Chwilowa moc wydzielana na elemencie  $\mathcal{Z}$  w stanie stacjonarnym wynosi

$$P(t) = I(t)U_0 \sin \omega t = I_0 U_0 \sin(\omega t - \delta) \sin \omega t.$$

Obliczmy moc średnią  $\langle P \rangle$  wydzielaną na  $\mathcal{Z}$  w jednym okresie  $T = 2\pi/\omega$

$$\langle P \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P(t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \delta.$$

### Wartość skuteczna

Niech  $X(t)$  będzie funkcją okresową o okresie  $T$ . Wartość skuteczną funkcji  $X(t)$  definiujemy jako

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt}.$$

Obliczmy wartości  $I_{\text{rms}}$  i  $U_{\text{rms}}$  dla powyższego przykładu. Mamy

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{rms}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Średnią moc wydzielaną na  $\mathcal{Z}$  możemy wówczas zapisać jako

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 |\mathcal{Z}| \frac{\text{Re}\{\mathcal{Z}^*\}}{|\mathcal{Z}|} = I_{\text{rms}}^2 \text{Re}\{\mathcal{Z}\}.$$

### 4.3.5 Impedancja operatorowa

Pojęcie impedancji można uogólnić na wymuszenia nieokresowe jeśli tylko dla danego wymuszenia  $U(t)$  istnieje transformata Laplace'a  $\mathcal{U}(s) = \mathcal{L}\{U(t)\}$ . Metoda ta pozwala sprowadzić rozwiązywanie układu równań różniczkowych do rozwiązywania układu równań algebraicznych. Co ważne metoda ta pozwala znaleźć ogólne rozwiązanie, a nie tylko rozwiązanie stacjonarne jak w przypadku opisanej powyżej metody symbolicznej. Wprowadzając *impedancję operatorową*  $\mathcal{Z}(s)$  możemy dokonać transformacji dowolnego obwodu złożonego z liniowych, skupionych dwójników. Poniżej przedstawiono transformacje elementów  $R$ ,  $L$  i  $C$ .

1. *Transformacja rezystora.* Dla rezystora mamy

$$U(t) = I(t)R,$$

zatem dokonując transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$\mathcal{U}(s) = \mathcal{I}(s)R,$$

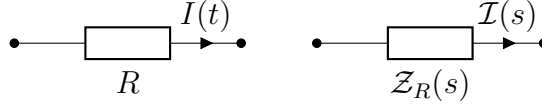
skąd

$$\mathcal{Z}_R(s) = R.$$

Obrazem rezystora w transformacji Laplace'a jest więc ten sam rezystor.

2. *Transformacja cewki.* Dla cewki indukcyjnej mamy

$$U(t) = L \frac{dI}{dt},$$



Rysunek 13: Transformacja rezystora

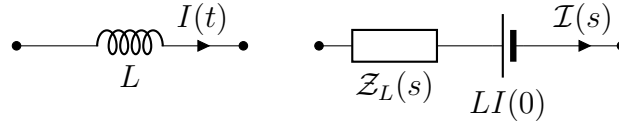
zatem dokonując transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$\mathcal{U}(s) = sL\mathcal{I}(s) - LI(0),$$

skąd

$$\mathcal{Z}_L(s) = sL.$$

Obrazem cewki w transformacji Laplace'a jest więc szeregowe połączenie impedancji  $\mathcal{Z}_L(s)$  i źródła SEM  $\mathcal{E}_L = LI(0)$ .



Rysunek 14: Transformacja cewki

3. *Transformacja kondensatora.* Dla kondensatora mamy

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C}I,$$

zatem dokonując transformacji Laplace'a otrzymujemy

$$\mathcal{U}(s) = \frac{1}{sC}\mathcal{I}(s) + \frac{U(0)}{s},$$

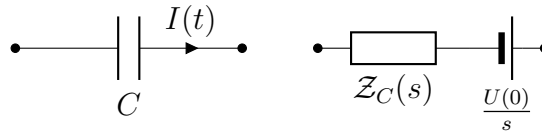
skąd

$$\mathcal{Z}_C(s) = \frac{1}{sC}.$$

Obrazem kondensatora w transformacji Laplace'a jest więc szeregowe połączenie impedancji  $\mathcal{Z}_C(s)$  i źródła SEM  $\mathcal{E}_C = -U(0)/s$ .

#### 4.3.6 Analiza wykorzystująca złożenie krótkich impulsów

Niech dany będzie pewien obwód złożony z idealnych elementów R, L, C. Aby znaleźć odpowiedź  $I(t)$  tego układu na dowolne wymuszenie  $V(t)$  często w pierwszym



Rysunek 15: Transformacja kondensatora

kroku możemy przeanalizować odpowiedź owego układu na wymuszenie impulsowe  $\delta(t)$  zdefiniowane następująco

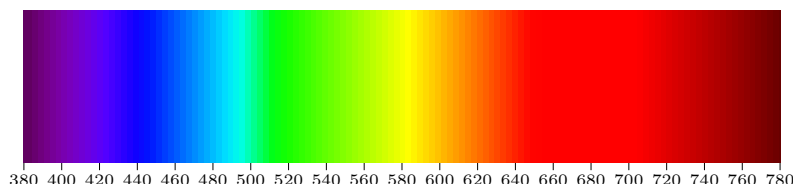
$$\delta(t) = \begin{cases} V_0 & \text{dla } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{dla } t > \Delta t \end{cases},$$

gdzie  $\Delta t$  jest wielkością bardzo małą. Ponieważ dowolne wymuszenie  $V(t)$  można uważać za superpozycję wielu impulsów, powstające prądy będą kombinacją liniową odpowiednich prądów *impulsowych*. Należy tutaj pamiętać, że dla czasów znacznie mniejszych od stałych czasowych kondensatora i cewki, ładunek (a zatem również napięcie) na kondensatorze nie zmienia się, a w przypadku cewki natężenie prądu płynącego przez nią pozostaje bez zmian. Dla czasów znacznie mniejszych od odpowiednich stałych czasowych kondensatory można więc zastąpić źródłami napięciowymi, a cewki źródłami prądowymi.

## 5 Optyka

*It was not observation but theory which led me to this result which experience then confirmed.*

Augustin-Jean Fresnel



### 5.1 Optyka geometryczna

Bezwzględny współczynnik załamania światła w danym ośrodku  $n$  definiujemy jako

$$n = \frac{c}{v},$$

gdzie  $v$  jest prędkością światła w tym ośrodku. Okazuje się, że występuje zależność  $v = v(\omega)$  (tzw. zjawisko *dyspersji*). Dla typowych materiałów optycznych  $v \propto 1/\omega$ .

#### 5.1.1 Zjawiska odbicia i załamania

##### Prawo odbicia

Promień padający, odbity i normalna do powierzchni padania leżą w jednej płaszczyźnie, a kąt padania jest równy kątowi odbicia.

##### Prawo Snelliusa

Promień padający, załamany i normalna do powierzchni padania leżą w jednej płaszczyźnie, a stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy względnemu współczynnikowi załamania światła

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_\beta}{n_\alpha}.$$

#### Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia

Z prawa Snella wynika, że jeśli  $n_\beta > n_\alpha$  to  $\alpha > \beta$ . Wynika stąd, że istnieje taki graniczny kąt  $\beta_{\text{gr}}$ , że  $\alpha = \pi/2$ . Z prawa Snella mamy wówczas  $n_\beta/n_\alpha = \sin \frac{\pi}{2} / \sin \beta_{\text{gr}}$ , skąd

$$\beta_{\text{gr}} = \arcsin \frac{n_\alpha}{n_\beta}.$$

### Zasada Fermata

Promień świetlny poruszający się w danym ośrodku między punktami  $A$ ,  $B$  ma tę własność, że droga optyczna

$$ct = \int_A^B n(\mathbf{r}) dl$$

jest stacjonarna.

W powyższym wzorze  $dl$  to fragment tzw. *drogi geometrycznej*, a  $n(\mathbf{r})$  jest polem skalarnym opisującym współczynnik załamania światła w danym obszarze. Takie sformułowanie zasady Fermata pozwala w prosty sposób rozwiązywać zadania polegające na znalezieniu trajektorii biegu promienia świetlnego w ośrodku o zmiennym współczynniku załamania. Poniżej zamieszczam trzy zadania.

### Zadania.

1. Na ośrodek przezroczysty o współczynniku załamania zależnym od  $y$ , w punkcie  $y = 0$ , pod kątem prostym pada promień światła. Jaka powinna być postać funkcji  $n(y)$ , aby wewn. ośrodka promień biegł po paraboli  $y(x) = \alpha x^2$ ? Przyjmij  $n(0) = n_0$ .

*Rozwiązanie.*

Rozpatrzmy warstwę ośrodka na wysokości  $y$  i grubości  $dy$ . Czas  $dt$  potrzebny światłu na przebycie tej warstwy wynosi

$$dt = \frac{\sqrt{dy^2 + dx^2}}{c/n(y)}.$$

Całkowity czas  $t$  potrzebny światłu na przebycie odległości  $\Delta y = y_B - y_A$  wynosi

$$ct = \int_{y_A}^{y_B} n(y) \sqrt{x'(y)^2 + 1} dy = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{F}(x(y), x'(y), y) dy.$$

Zgodnie z zasadą Fermata światło przebywa drogę z  $A$  do  $B$  po trajektorii  $y(x)$ , dla której czas  $t$  potrzebny na jej przebycie jest stacjonarny. Z rachunku wariacyjnego wiemy, że aby wielkość dana w postaci powyższej całki była stacjonarna, funkcja podcałkowa  $\mathcal{F}$  musi spełniać równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \frac{d}{dy} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'}.$$

Ponieważ  $\partial\mathcal{F}/\partial x = 0$ , zatem

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x'} = n(y) \frac{x'(y)}{\sqrt{x'(y)^2 + 1}} = n(y) \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \text{const} = p.$$

Z powyższego równania możemy z jednej strony znaleźć trajektorię  $y(x)$  dla danego  $n(y)$  poprzez rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(y)}{p^2} - 1},$$

lub wyznaczyć funkcję  $n(y)$  dla znanej trajektorii  $y(x)$  przez przekształcenie powyższego równania

$$n(y) = p\sqrt{y'(x)^2 + 1}.$$

W naszym zadaniu  $y'(x) = 2\alpha x = 2\sqrt{\alpha y}$ , zatem otrzymujemy

$$n(y) = n_0\sqrt{1 + 4\alpha y}.$$

## Pewne uogólnienia

Drogę optyczną  $ct$  możemy również zapisać w innym układzie współrzędnych. Prawdopodobnie najbardziej przydatnym z nich jest układ współrzędnych biegunowych  $(r, \phi)$

$$ct = \int_A^B n(r, \phi) \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2}.$$

Jeżeli rozpatrujemy przypadek, w którym gęstość optyczna zmienia się radialnie, wówczas przeprowadzając analogicznie obliczenia, możemy wyznaczyć ogólne rów. różniczkowe, którego rozwiązanie dla danej postaci  $n(r)$  jest trajektorią światła w tym ośrodku (we wsp. biegunowych)

$$\frac{dr}{d\phi} = r\sqrt{\frac{n^2(r)}{P^2}r^2 - 1}.$$

2. *Na ośrodek przezroczysty o współczynniku załamania zależnym od  $y$ , w punkcie  $y = a$ , pod kątem prostym pada promień światła. Jaka powinna być postać funkcji  $n(y)$ , aby wewn. ośrodka promień biegł po sinusoidzie  $y(x) = a \cos mx$ ? Przyjmij, że  $n(a)$  jest znane.*

*Rozwiązanie.*

Różniczkując otrzymujemy

$$y'(x) = -ma \sin mx$$

$$y'(x)^2 = m^2 a^2 \sin^2 mx = m^2 a^2 (1 - \cos^2 mx) = m^2 a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

Z poprzednich rozważań mamy zatem

$$n(y) = p \sqrt{m^2 a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) + 1} = n(a) \sqrt{m^2 (a^2 - y^2) + 1}.$$

$$\text{Odp.: } n(y) = n(a) \sqrt{m^2 (a^2 - y^2) + 1}.$$

3. *Dana jest przezroczysta kula o promieniu  $R$  umieszczona w powietrzu  $n_0 \approx 1$ . Współczynnik załamania światła w tej kuli zmienia się radialnie zgodnie ze wzorem*

$$n(r) = \frac{R + a}{r + a}.$$

*Na kulę pod kątem  $\alpha$  pada promień świetlny. Wyznacz najmniejszą odległość  $d$  tego promienia od środka kuli.*

*Rozwiązanie.*

Ponieważ  $\frac{dr}{d\phi}|_{r=d} = 0$ , zatem

$$0 = d \sqrt{\frac{n^2(d)}{P^2} d^2 - 1} \implies n(d) = \frac{P}{d}.$$

Pozostaje wyznaczyć wielkość zachowaną podczas ruchu promienia świetlnego w rozważanym ośrodku –  $P$  (można mówić o optycznej całce ruchu  $P$ ). Z równań Lagrange'a mamy

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi'} = n(r) \frac{r^2 \phi'(r)}{\sqrt{1 + r^2 \phi'(r)^2}} = n(r) \frac{r^2 d\phi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2}} = P.$$

Zauważmy, że  $\frac{rd\phi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2}} = \sin \beta(r)$ , zatem

$$n(R) R \sin \beta(R) = p \quad \text{oraz z prawa Snella} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta(R)} = \frac{n(R)}{1}.$$

Mamy  $n(R) = 1$ , zatem  $\sin \beta(R) = \sin \alpha$ , więc  $P = R \sin \alpha$ , skąd otrzymujemy

$$\frac{R + a}{d + a} = \frac{R}{d} \sin \alpha.$$

$$\text{Odp.: } d = \frac{aR \sin \alpha}{a + R(1 - \sin \alpha)}.$$



### 5.1.2 Zwierciadła

W ogólności będziemy oznaczać  $F$  – ognisko zwierciadła,  $G$  – środek optyczny zwierciadła, tj. punkt przecięcia zwierciadła z jego płaszczyzną symetrii. Definiujemy ogniskową zwierciadła  $f$  jako odległość  $f = |GF|$ .

**Zwierciadła sferyczne.** Zwierciadłem sferycznym nazywamy wycinek sfery pokryty materiałem odbijającym promienie świetlne. Jeśli materiał odbijający znajduje się na wewnętrznej części sfery wówczas jest to *zwierciadło wklęsłe*, w przeciwnym wypadku jest to *zwierciadło wypukłe*. W konstrukcjach przyjmujemy, że dla zwierciadła sferycznego  $f = \pm R/2$ , gdzie  $R$  jest promieniem sfery, z której zostało wycięte zwierciadło. W rzeczywistości przybliżenie to jest dobre tylko dla promieni przyosiowych, dla których możemy pominąć wpływ *aberracji sferycznej*. Istotnie nietrudno pokazać, że promień równoległy do osi optycznej biegnący w odległości  $d$  od niej po odbiciu przetnie oś optyczną w punkcie  $F'$  takim, że

$$|GF'| = f^* = 2f - \frac{f}{\sqrt{1 - d^2/4f^2}},$$

gdzie  $|f| = R/2$ . Dla  $2f \gg d$  otrzymujemy oczywiście  $f^* \approx f$ . Równanie zwierciadła sferycznego ma postać

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f},$$

gdzie  $x$  jest położeniem przedmiotu,  $y$  położeniem obrazu. Powiększenie obrazu  $p$  definiujemy jako

$$p = \left| \frac{y}{x} \right|.$$

**Wzór Newtona.** Niech  $x_1, x_2$  oznaczać odpowiednio odległość  $F$  od przedmiotu oraz obrazu. Wówczas zachodzi

$$x_1 = x - f, \quad x_2 = y - f, \quad xy = fx + fy,$$

skąd otrzymujemy

$$x_1 x_2 = (x - f)(y - f) = xy - xf - yf + f^2 = f^2.$$

**Zwierciadła paraboliczne.** Zwierciadłem parabolicznym nazywamy paraboloidę obrotową pokrytą materiałem odbijającym promienie świetlne. W ogólności ogniskowa  $f$  zwierciadła powstałego przez obrót wokół osi  $Y$  krzywej będącej wykresem funkcji parzystej  $y(x)$  wynosi

$$f = y(x) + \frac{x}{2} \left( \frac{1}{y'(x)} - y'(x) \right).$$

Dla  $y = ax^2$ , otrzymujemy

$$f = \frac{1}{4a},$$

zatem widzimy, że dla zwierciadła parabolicznego istotnie wiązka promieni równoległych do osi optycznej skupia się w jednym punkcie  $\mathcal{F}$ .

*Zasada odwracalności biegu promieni.* Zawsze możemy odwrócić bieg promienia świetlnego zamieniając obraz z przedmiotem rzeczywistym.

### 5.1.3 Soczewki

Soczewka to ciało przezroczyste ograniczone dwiema sferami o promieniach  $r_1$  i  $r_2$ . Dla soczewek cienkich i pomijając aberrację sferyczną mamy

$$Z = \frac{1}{f} = \left( \frac{n}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

gdzie analogicznie  $f$  jest odległością między ogniskiem soczewki  $F$ , a jej środkiem optycznym  $\mathcal{G}$ . Dla soczewek cienkich i pomijając aberrację sferyczną wiązka promieni równoległych padających na soczewkę skupiającą pod kątem  $\vartheta$  do osi optycznej jest skupiana w punkcie  $F'$  leżącym na prostej przechodzącej przez  $F$  i prostopadłej do osi optycznej takim, że

$$|FF'| = f \tan \vartheta.$$

Równanie soczewki ma postać

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f},$$

gdzie  $x$  jest położeniem przedmiotu,  $y$  położeniem obrazu.

## 5.2 Optyka falowa

Optykę geometryczną możemy stosować w przypadkach, kiedy wymiary wszelkich obiektów (soczewek, pryzmatów itp.) są o wiele większe od długości fali światła użytego w doświadczeniu. Eksperymentem ilustrującym falową naturę światła jest doświadczenie Younga.

### 5.2.1 Doświadczenie Younga

W doświadczeniu Younga mamy ekran z dwiema niewielkimi szczelinami  $S_1$  i  $S_2$ , w których znajdują się koherentne i zgodne w fazie źródła  $F_1$  i  $F_2$ , które emitują monochromatyczne światło (w rzeczywistym eksperymencie Young użył dodatkowego

ekranu z pojedynczą szczeliną umieszczonego wcześniej). Na odległym ekranie obserwujemy wówczas tzw. prążki interferencyjne. Drgania pola elektrycznego fal świetlnej generowanych przez źródła  $F_1$  i  $F_2$  wynoszą  $E_0 \sin \omega t$  z dokładnością do przesunięcia fazowego. Drgania pól elektrycznych fal w punkcie o współrzędnej kątowej  $\vartheta$  na położonym daleko ekranie wynoszą odpowiednio

$$E_1 = E_0 \sin \omega t \quad \text{ i } \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + k\Delta s),$$

gdzie  $\Delta s$  jest różnicą dróg geometrycznych dwóch promieni. Jeśli ekran jest bardzo daleko możemy przyjąć

$$\Delta s = d \sin \vartheta,$$

gdzie  $d$  jest odległością między szczelinami. Maksymalne wzmocnienie fal (interferencja konstruktywna) znajdzie oczywiście gdy

$$(\text{max}) \quad \delta = k\Delta s = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

natomiast całkowite wygaszenie fal znajdzie, gdy

$$(\text{min}) \quad \delta = k\Delta s = 2\pi m + \pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Z powyższego otrzymujemy, że położenia kątowe maksimów  $\vartheta_{\text{max}}$  oraz minimów  $\vartheta_{\text{min}}$  są dane wzorami

$$\vartheta_{\text{max}} = \arcsin \frac{m\lambda}{d} \quad \text{ oraz } \quad \vartheta_{\text{min}} = \arcsin \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d}.$$

### 5.2.2 Siatka dyfrakcyjna

Siatka dyfrakcyjna to układ wielu  $N$  równoległych niewielkich szczelin umieszczonych w równych odległościach  $d$  od siebie. Położenia kątowe maksimów (ale nie minimów) są takie same jak w doświadczeniu Younga. Jeśli światło pada na siatkę pod kątem  $\beta$ , to wówczas

$$\delta = kd(\sin \vartheta + \sin \beta).$$

Obliczmy natężenie światła  $I(\vartheta)$  na daleko położonym ekranie, gdy na siatkę pada prostopadle światło monochromatyczne. Potrzebne są nam do tego następujące fakty.

1. Natężenie światła jest wprost proporcjonalne do średniej z kwadratu wypadkowego pola elektrycznego

$$I \propto \langle E_{\text{tot}}^2 \rangle.$$

2. Dla źródeł koherentnych, aby obliczyć wypadkowe natężenie światła obliczamy najpierw wypadkowe natężenie pola elektrycznego, a następnie uśredniamy je, zgodnie z punktem pierwszym.
3. Dla źródeł niekoherentnych obliczamy najpierw średnie natężenia światła, a następnie je sumujemy.

Będziemy oznaczać  $A^2 = \langle E_{\text{tot}}^2 \rangle$ . Źródła są koherentne, zatem obliczmy najpierw  $E_{\text{tot}}$

$$E_{\text{tot}} = \sum_{\alpha=0}^{N-1} E_0 \sin(\omega t + \alpha\delta) = E_0(P \sin \omega t + Q \cos \omega t),$$

gdzie  $\delta = kd \sin \vartheta$  oraz

$$P = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \cos(\alpha\delta) \quad \text{ i } \quad Q = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \sin(\alpha\delta).$$

Z powyższego mamy zatem

$$A^2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} E_{\text{tot}}^2 dt = \frac{1}{2} E_0^2 (P^2 + Q^2).$$

Dla  $\delta = 0$ , tj. dla centralnego maksimum  $\vartheta = 0$  mamy  $A^2(0) = E_0^2 N^2 / 2$ . Dla  $\vartheta \in (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$  mamy z kolei

$$A^2(\vartheta) = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2 \left( \frac{N\delta}{2} \right) \csc^2 \left( \frac{\delta}{2} \right),$$

skąd, przyjmując  $I(0) = I_0$ , otrzymujemy

$$I(\vartheta) = \frac{I_0}{N^2} \sin^2 \left( \frac{Nkd \sin \vartheta}{2} \right) \csc^2 \left( \frac{kd \sin \vartheta}{2} \right), \quad \vartheta \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

### 5.2.3 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

W doświadczeniu Younga i siatce dyfrakcyjnej zakładaliśmy, że szczeliny są niezwykle małe, jednak w rzeczywistości mają one skończone rozmiary. Rozpatrzmy szczelinę o szerokości  $D$ . Możemy przeanalizować obraz powstający na położonym daleko ekranie, gdy na szczelinę pada prostopadłe światło monochromatyczne korzystając ze wzoru na natężenie światła dla siatki dyfrakcyjnej. Istotnie podstawiając  $d = D/(N-1)$  mamy

$$\begin{aligned} I(\vartheta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{I_0}{N^2} \sin^2 \left( \frac{Nkd \sin \vartheta}{2} \right) \csc^2 \left( \frac{kd \sin \vartheta}{2} \right) \\ &= I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie  $\beta(\vartheta) = \frac{1}{2}kD \sin \vartheta$ . Z powyższego widzimy, że minima występują dla

$$(\min) \quad \beta = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

czyli dla punktów o położeniu kątowym

$$\vartheta_{\min} = \arcsin \frac{m\lambda}{D}.$$

#### 5.2.4 Interferencja w cienkich warstwach

Gdy fala monochromatyczna poruszająca się w pewnym ośrodku  $n$  odbija się od ośrodka o większej gęstości optycznej  $n' > n$ , wówczas jej faza zmienia się o  $\pi$ . Rozpatrzmy światło monochromatyczne padające prostopadle na cienką warstwę (np. oleju) o grubości  $w$  i gęstości optycznej  $n$ . Będziemy mieli wówczas do czynienia z interferencją. Istotnie jeśli drganie pola elektrycznego padającego światła wynosi  $E_0 \sin \omega t$ , to po odbiciu od górnej strony warstwy mamy  $E_1 = E_0 \sin(\omega t + \pi)$ , natomiast po przejściu przez warstwę i odbiciu od dolnej strony warstwy mamy  $E_2 = E_0 \sin(\omega t + 2kw)$ , gdzie  $k = 2\pi n/\lambda$ , a  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Różnica faz wynosi zatem

$$\delta = 2kw - \pi.$$

Maksymalne wzmocnienie nastąpi oczywiście gdy  $\delta = 2m\pi$ , czyli

$$2w_{\max} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{n},$$

a całkowite wygaszenie, gdy  $\delta = 2\pi m + \pi$ , czyli

$$2w_{\min} = m \frac{\lambda}{n}.$$

**Zadanie.** Na płytkę szklaną o grubości  $100.25 \lambda$  pada prostopadle promień światła laserowego, którego długość fali wewnątrz płytki wynosi  $\lambda$ . Gdy światło o natężeniu  $I$  pada na powierzchnię styku powietrze-szkło lub szkło-powietrze, wiązka przechodząca będzie miała natężenie  $rI$  (dla pewnego ustalonego  $0 < r < 1$ ), zaś odbita:  $(1 - r)I$ . Wyznacz natężenie wiązki przechodzącej przez płytkę i wiązki odbitej od płytki. Przyjmij, że szkło nie pochłania światła.

*Rozwiązanie.*

Ponieważ źródłem padającego światła jest laser, więc światło jest monochromatyczne. Niech pole elektryczne padającego światła będzie dane wzorem

$$E_{\text{pad}} = E_0 \sin \omega t.$$

Pole elektryczne światła odbitego od płytki będzie superpozycją pól elektrycznych promieni świetlnych odbitych kolejno od górnej i dolnej powierzchni płytki. Ponieważ te drgania (pola elektrycznego) są koherentne, zatem aby obliczyć wypadkowe natężenie światła musimy najpierw obliczyć wypadkowe pole elektryczne (nie możemy dodawać natężeń światła). Ponieważ  $I \sim E^2$ , więc amplituda pola elektrycznego promienia po przejściu przez granicę powietrze-szkło wyniesie  $\sqrt{r}E_0$ , a promienia odbitego  $\sqrt{1-r}E_0$ . Wprowadźmy parametr  $l = \sqrt{1-r}$ . Pole elektryczne promienia odbitego od górnej powierzchni od strony powietrza wynosi

$$lE_0 \sin(\omega t + \pi) = lE_0 \sin(\phi + \pi).$$

Pole elektryczne  $n$ -tego promienia wychodzącego z płytki po górnej stronie po  $n$  odbiciach od dolnej powierzchni płytki wynosi

$$E_n = rl^{2n-1}E_0 \sin(\phi + n\delta),$$

gdzie  $\delta = \frac{4\pi}{\lambda}h$  ( $h$  - grubość płytki). Istotnie amplituda pola elektrycznego promienia po przejściu przez granicę powietrze-szkło wynosi  $\sqrt{r}E_0$ , każde odbicie mnoży ją przez czynnik  $l$ , a odbić tych jest zawsze nieparzyste wiele, dodatkowo przy przejściu ponownym przez granicę szkło-powietrze należy ją pomnożyć przez czynnik  $\sqrt{r}$ . Wypadkowe pole elektryczne światła odbitego od płytki wynosi więc

$$E_{\text{tot}} = lE_0 \sin(\phi + \pi) + rE_0 [l \sin(\phi + \delta) + l^3 \sin(\phi + 2\delta) + \dots].$$

Podstawiając  $h = \lambda/4$  otrzymujemy  $\delta = \pi$  zatem

$$E_{\text{tot}} = -lE_0 \sin \phi + rE_0 \sin \phi [(-l - l^5 - l^9 - \dots) + (l^3 + l^7 + \dots)].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe sumie dwóch szeregów geometrycznych, które z łatwością można obliczyć

$$E_{\text{tot}} = -lE_0 \sin \phi + rE_0 \sin \phi \frac{-l}{1+l^2} = -E_0 \sin \phi \frac{2l}{1+l^2}.$$

Amplituda pola elektrycznego światła odbitego wynosi zatem

$$E_0 \frac{2l}{1+l^2}.$$

Natężenie światła odbitego jest więc równe

$$I_o = I \frac{4l^2}{(1+l^2)^2} = 4I \frac{1-r}{(2-r)^2}.$$

Oczywiście ze względu na zachowanie energii natężenie światła przechodzącego przez płytkę jest równe

$$I_p = I - I_o = I - 4I \frac{1-r}{(2-r)^2}.$$

### 5.2.5 Polaryzacja

Światło jest falą poprzeczną, tj. kierunki drgań wektorów  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  są prostopadłe do wektora falowego  $\mathbf{k}$ . Fala płasko spolaryzowana to fala, w której kierunek drgań  $\mathbf{E}$  leży w każdej chwili w tej samej płaszczyźnie. Typowe źródła światła nie emitują fal płaskich, tylko tzw. *fale niespolaryzowane*, których płaszczyzny drgań są zorientowane przypadkowo wokół  $\mathbf{k}$ .

#### Płytki polaryzujące

W płytce polaryzującej istnieje charakterystyczny kierunek polaryzacji. Płytkę przepuszcza tylko te fale, dla których kierunki drgań  $\mathbf{E}$  są równoległe do kierunku polaryzacji. Jeśli  $I_0$  oznacza natężenie światła spolaryzowanego liniowo padającego na polaryzator w taki sposób, że płaszczyzny polaryzacji fali i polaryzatora tworzą kąt  $\theta$  to zgodnie z **prawem Malusa** natężenie światła po przejściu przez polaryzator wynosi

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Jeśli na polaryzator skierujemy światło niespolaryzowane o natężeniu  $I_0$  to niezależnie od ustawienia osi polaryzatora  $I = I_0/2$ .

#### Polaryzacja przez odbicie

Jeśli na materiał o gęstości optycznej  $n$  skierujemy światło będące złożeniem dwóch fal płaskich o prostopadłych polaryzacjach: w płaszczyźnie wyznaczonej przez promień padający i normalną do płaszczyzny padania (tzw. polaryzacja  $p$ ) oraz w płaszczyźnie prostopadłej (tzw. polaryzacja  $s$ ), to doświadczalnie stwierdzono, że istnieje kąt  $\alpha_B$  (*kąt Brewstera*), taki, że promień odbity ma tylko polaryzację  $s$  oraz promień załamany jest prostopadły to promienia odbitego. Z prawa Snella mamy więc

$$\tan \alpha_B = \frac{n}{n_0}.$$

### 5.3 Promieniowanie termiczne

Przy rozchodzeniu się fal EM przenoszona jest energia. Natężenie światła izotropowego źródła punkowego o mocy  $P_s$  w odległości  $r$  od niego wynosi

$$I(r) = \frac{P_s}{4\pi r^2}.$$

## Model ciała doskonale czarnego

Rozgrzane do wysokich temperatur ciała są źródłami światła widzialnego (np. żarówki wolframowe). Wszystkie ciała emitują promieniowanie termiczne do otoczenia (niekoniecznie w spektrum widzialnym) oraz je absorbują w każdej temperaturze większej od 0 K. Gdy dwa ciała znajdują się w równowadze termicznej szybkość emicji  $P_e$  jest równa szybkości absorpcji  $P_a$ .

Ciało doskonale czarne pochłania całkowicie padające nań promieniowanie. Niewielki otwór dużej wnęki, której wewnętrzne ścianki pokryto sadzą jest modelem ciała doskonale czarnego.

### Prawo Stefana-Boltzmannna

Całkowita emisja energetyczna  $R = \int_0^\infty R(\lambda) d\lambda$  (gdzie  $R(\lambda)$  jest mocą na jednostkę powierzchni wypromieniowywaną przez ciało w postaci fali EM o długości z przedziału  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ ) ciała doskonale czarnego jest wprost proporcjonalna do czwartej potęgi jego temperatury

$$R = \sigma T^4.$$

### Prawo Plancka

Zgodnie z prawem Plancka moc na jednostkę powierzchni wypromieniowywana przez ciało doskonale czarne w postaci fali EM o długości fali z zakresu  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  wynosi

$$R(\lambda) = \frac{8\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

### Prawo Wiena

Korzystając z prawa Plancka możemy wyznaczyć długość fali o maksymalnej mocy promieniowania

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

gdzie  $b \approx 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$  jest tzw. stałą Wiena.