Porównanie metod konstrukcji diagramu Woronoja

Bartosz Hanc, Jakub Pawlina

3 stycznia 2023

Spis treści

0.1 Część techniczna

Projekt został wykonany w środowisku Jupyter Notebook w języku Python z wykorzystaniem dostarczonego na laboratoriach narzędzia graficznego. Wszystkie dostępne funkcjonalności programu zostały opisane w notatniku Jupyter, natomiast ich uruchomienie jest możliwe poprzez uruchomienie odpowiedniej komórki w notatniku. Do implementacji samych algorytmów wykorzystano jedynie bibliotekę standardową Pythona.

0.1.1 Wprowadzanie danych wejściowych

Danymi wejściowymi jest lista punktów reprezentowana przez pary typu `(float, float)`. Oprócz bezpośredniego wpisania listy punktów możliwe jest zadawanie punktów za pomocą myszki, korzystając z interfejsu graficznego. Wprowadzone w taki sposób dane można następnie zapisać do pliku `.json` poprzez uruchomienie odpowiedniej komórki. Możliwe jest następnie wczytanie danych wejściowych z pliku `.json` korzystając z funkcji `loadPoints("name.json")` przez podanie nazwy pliku znajdującego się w tym samym folderze co notatnik Jupyter. Dodatkowo istnieje również opcja wygenerowania n losowych punktów należących do zadanego obszaru płaszczyzny $[a; b] \times [a; b]$ poprzez wywołanie funkcji `genRndPoints(n,a,b)`.

0.1.2 Wizualizacja wyników

Notatnik Jupyter zawiera również zaimplementowane funkcje `showResults1(points)` oraz `showResults2(points)` wizualizujące wyniki działania odpowiednio pierwszego i drugiego zaimplementowanego algorytmu.

Dostępna jest również interaktywna wizualizacja algorytmu prezentująca graficznie kolejne etapy jego działania. Wizualizację można uruchomić poprzez uruchomienie odpowiedniej komórki w notatniku.

0.2 Opis problemu

Diagramem Woronoja generowanym przez zbiór punktów $S := \{p_1, ..., p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy podział płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na obszary H_1,...,H_n parami rozłączne, takie że dla każdego H_i zachodzi $\forall_{p \in H_i} : d(p, p_i) = \min \{d(p, p_j) \,|\, p_j \in S\}$, gdzie $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ jest metryką na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch różnych algorytmów wyznaczających diagram Woronoja zadanej chmury punktów na płaszczyźnie euklidesowej.

0.3 Konstrukcja diagramu Woronoja jako grafu dualnego do triangulacji Delaunay'a wyznaczonej algorytmem Bowyera–Watsona

0.3.1 Opis algorytmu

Jako jedną z dwóch wymaganych metod konstrukcji diagramów Woronoja wybrano metodę konstrukcji korzystającą z dualności między triangulacją Delaunay'a, a diagramem Woronoja. Schemat postępowania jest wówczas następujący: wyznaczamy najpierw triangulację Delaunay'a chmury punktów, a następnie na jej podstawie tworzymy krawędzie diagramu Woronoja. Do wyznaczenia triangulacji Delaunay'a wykorzystano algorytm Bowyera–Watsona. Ideę zaproponowanej metody można przedstawić w postaci elementarnego pseudokodu*:

```
funkcja BowyerWatson:
    points := lista zadanych punktów
    triangles := pusty zbiór trójkątów triangulacji

    Znajdź super-prostokąt pokrywający całkowicie chmurę punktów.
    Dodaj do triangles dwa super-trójkąty powstałe z podziału
    super-prostokąta jedną z jego przekątnych.

    Dla każdego punktu p z points:
        Znajdź wszystkie trójkąty T, takie że okrąg opisany na T zawiera
        punkt p i dodaj je do zbioru badTriangles.

        Znajdź krawędzie wielokąta, który powstałby po usunięciu trójkątów
        z badTriangles i dodaj je do zbioru polygon.

        Usuń z triangles wszystkie trójkąty znajdujące się w badTriangles.

        Dokonaj triangulacji powstałej wielokątnej wnęki polygon.

    Usuń z triangles wszystkie trójkąty, które zawierają wierzchołek
    super-trójkąta.

    Oblicz diagram Woronoja jako graf dualny do triangulacji Delaunaya
    zawartej w triangles.
```

Dokładny opis implementacji w języku Python poszczególnych fragmentów powyższego pseudokodu został opisany poniżej.

- **Wykorzystane struktury danych**
  - Wejściowe punkty są przechowywane w liście `points`, która zawiera pary typu `(float,float)` określające współrzędne kolejnych punktów
  - Struktura `triangles` przechowuje trójki postaci `(int,int,int)` określające wierzchołki trójkąta jako indeksy punktów w liście `points`. Struktura `triangles` została zaimplementowana jako pythonowy `set()`.

*Przedstawiony pseudokod z niewielkimi modyfikacjami został zaczerpnięty z artykułu „Bowyer–Watson algorithm" na Wikipedii.

– Struktura `edges` przechowuje pary typu key-value, gdzie kluczami są pary typu `(int,int)` określające krawędź triangulacji jako indeksy punktów w liście `points`, natomiast wartościami są zbiory zawierające trójkąty, które zawierają krawędź będąca kluczem. Trójkąty te są reprezentowane tak jak w strukturze `triangles` tj. w postaci trójek typu `(int,int,int)`. Struktura `edges` została zaimplementowana jako pythonowy słownik.

- **Konstrukcja superprostokąta pokrywającego chmurę punktów.** Superprostokąt obliczamy poprzez znalezienie maksymalnej i minimalnej współrzędnej x i y chmury punktów, obliczenie wielkości $l := \max(|y_{\max} - y_{\min}|, |x_{\max} - x_{\min}|)$, a następnie odpowiednio dodanie i odjęcie l do/od $x_{\max}$, $y_{\max}$ i $x_{\min}$, $y_{\min}$. Parametr l określa wielkość obszaru, do którego ograniczamy obliczany diagram Woronoja.

- **Poszukiwanie trójkątów, których okrąg opisany zawiera dany punkt p.** Dla każdego trójkąta $T(A, B, C)$ znajdującego się aktualnie w zbiorze `triangles` obliczamy współrzędne (S_x, S_y) środka okręgu opisanego na nim, korzystając ze wzorów

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{D}\left[(A_x^2 + A_y^2)(B_y - C_y) + (B_x^2 + B_y^2)(C_y - A_y) + (C_x^2 + C_y^2)(A_y - B_y)\right] \\ S_y &= \frac{1}{D}\left[(A_x^2 + A_y^2)(C_x - B_x) + (B_x^2 + B_y^2)(A_x - C_x) + (C_x^2 + C_y^2)(B_x - A_x)\right] \end{aligned},$$

gdzie $D := 2[A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)]$ oraz promień tego okręgu korzystając ze wzoru

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

gdzie a, b, c to długości boków trójkąta, a $s := \frac{1}{2}(a + b + c)$. Jeśli odległość punktu p od środka $\texttt{centre}(A, B, C)$ jest mniejsza lub równa R to dodajemy trójkąt $T(A, B, C)$ do zbioru `badTriangles` (`badTriangles` jest implementowany jako pythonowy `set()`). Równość sprawdzana jest przez warunek $|\texttt{dist}(p, \texttt{centre}) - R| < \texttt{err}$, gdzie `err` to tolerancja dla zera.

- **Poszukiwanie krawędzi wielokątnej wnęki.** Dla każdego trójkąta $T(A, B, C)$ znajdującego się w zbiorze `badTriangles` przypisujemy $a, b, c = (A, B), (B, C), (C, A)$, a następnie dla każdej krawędzi e z (a, b, c) obliczamy moc zbioru $(\texttt{edges}[e] \cap \texttt{badTriangles}) - \{T\}$ (ponieważ $\#\texttt{edges}[e] \leq 2$ oraz złożoność znalezienia części wspólnej $s \cap t$ to $O(\min(\#s, \#t))$, a złożoność znalezienia różnicy $s - t$ to $O(\#s)$, więc obliczenie mocy zbioru w powyższy sposób zajmuje $O(1)$ operacji). Jeśli moc powyższego zbioru wynosi 0 to dana krawędź e nie jest krawędzią wspólną żadnych dwóch trójkątów ze zbioru `badTriangles`, czyli jest krawędzią poszukiwanego wielokąta i dodajemy ją do zbioru krawędzi `polygon` (`polygon` jest implementowany jako pythonowy `set()`)

- **Usuwanie nieprawidłowych trójkątów.** Dla każdego trójkąta $T(A, B, C)$ znajdującego się w zbiorze `badTriangles` przypisujemy $a, b, c = (A, B), (B, C), (C, A)$. Usuwamy T ze zbioru `triangles` korzystając z metody `.remove()` (o złożoności czasowej $O(1)$), a następnie aktualizujemy strukturę `edges`: dla każdej krawędzi e z (a, b, c) usuwamy trójkąt T ze zbioru $\texttt{edges}[e]$ korzystając z metody `.remove()` i jeśli po usunięciu zbiór ten jest pusty usuwamy klucz e ze słownika `edges` korzystając z metody `del` (o złożoności $O(1)$).

- **Triangulacja wielokątnej wnęki.** Dla każdej krawędzi $e = (q, r)$ ze zbioru `polygon` dodajemy do zbioru `triangles` trójkąt $T(p, q, r)$ i aktualizujemy strukturę `edges`: przypisujemy $a, b, c = (p, q), (q, r), (r, p)$, a następnie dla każdej krawędzi e z (a, b, c) wykonujemy:

  – jeśli klucz e istnieje już w `edges` (sprawdzamy to w $O(1)$, korzystając z metody `.get()`) to dodajemy do zbioru $\texttt{edges}[e]$ trójkąt $T(p, q, r)$;

  – jeśli klucz e nie istnieje, to go tworzymy i wstawiamy do pustego zbioru $\texttt{edges}[e]$ trójkąt $T(p, q, r)$.

- **Usuwanie trójkątów zawierających wierzchołek początkowego supertrójkąta.** Dla każdego trójkąta $T(A, B, C)$ znajdującego się w zbiorze `triangles` sprawdzamy, czy A lub B lub C są wierzchołkami supertrójkąta. Jeśli tak to dodajemy T do zbioru `toRemove`. Następnie dla każdego trójkąta T ze zbioru `toRemove` usuwamy T ze zbioru `triangles` korzystając z metody `.remove()`.
- **Obliczenie diagramu Woronoja dualnego do wyznaczonej triangulacji Delaunay'a.** Diagram Woronoja jest reprezentowany przez listę `voronoi` zawierającą krawędzie go tworzące. Dla każdej krawędzi e będącej kluczem w `edges` przypisujemy `Ts` $=$ `edges`$[e] \cap$ `triangles` ($O(1)$). Jeśli #`Ts` $= 2$ to krawędź e jest krawędzią wspólną dwóch trójkątów $T_1(A_1, B_1, C_1)$, $T_2(A_2, B_2, C_2)$ zatem do listy `voronoi` dodajemy krawędź [`centre`(A_1, B_1, C_1), `centre`(A_1, B_2, C_2)]. Jeśli #`Ts` $= 1$ to krawędź e należy do otoczki wypukłej chmury punktów i krawędź diagramu Woronoja jest fragmentem prostej prostopadłej do e. W celach wizualizacji możemy jednak utworzyć w tym przypadku krawędź pomiędzy trójkątem T_1 z `Ts` i trójkątem T_2 zawierającym wierzchołek supertrójkąta, przy czym oba trójkąty T_1 i T_2 znajdują się w zbiorze `edges`$[e]$.

Ze względu na przeszukiwanie wszystkich trójkątów w strukturze `triangles` w celu utworzenia zbioru `badTriangles` złożoność czasowa opisanego algorytmu wynosi $O(n^2)$, gdzie n to liczba wprowadzonych punktów. Taki sposób znajdowania nieprawidłowych trójkątów jest jednak bardzo czytelny w kodzie w języku Python i wymaga istotnie mniej implementacji. Sama procedura przekształcania triangulacji Delaunay'a w dualny do niej diagram Woronoja jest realizowana w czasie liniowym.

0.3.2 Wydajność zaimplementowanego algorytmu

Złożoność czasowa zaimplementowanego algorytmu wynosi $O(n^2)$. W Tabeli 1 zebrano uśrednione czasy działania programu (bez wizualizacji) dla wygenerowanych losowo zbiorów punktów o coraz większej liczności. Testy przeprowadzono na komputerze z procesorem Intel Core i5-8600k 3.60 GHz i systemem operacyjnym Windows 11. Dla $n < 1000$ program oblicza diagram Woronoja w rozsądnym czasie, jednak ze względu na odbiegającą od wzorcowej złożoność nie może zostać wykorzystany do przetwarzania bardzo dużych chmur punktów. Jednocześnie ze względu na krótką i przejrzystą implementację nadaje się do wizualizacji algorytmu służącej objaśnieniu działania algorytmu.

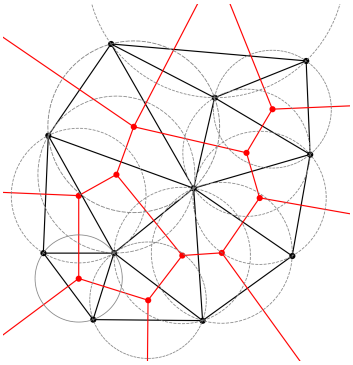
Liczba punktów n	Czas [s]
10	0.002
50	0.013
100	0.047
500	1.08
1000	4.24
1500	9.57

Tabela 1: Czasy działania programu dla losowo wygenerowanych zbiorów punktów

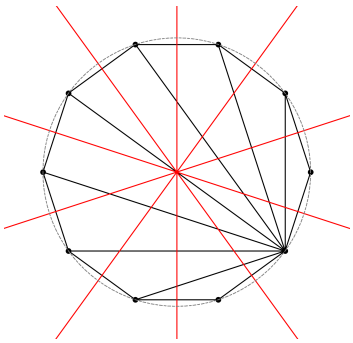
0.3.3 Graficzna prezentacja wyników działania algorytmu

Na Rysunku 1 przedstawiono wygenerowane wizualizacje wyznaczonych diagramów Woronoja dla trzech różnych zbiorów punktów. Czarne punkty oznaczają wprowadzoną chmurę punktów, czarne krawędzie to krawędzie triangulacji, czerwone punkty to środki okręgów opisanych na trójkątach z triangulacji, natomiast czerwone krawędzie to krawędzie diagramu Woronoja.

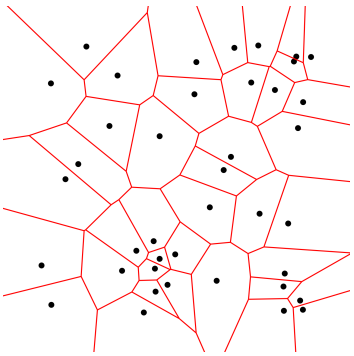
Zaimplementowany algorytm przetestowano na różnych zbiorach punktów. W szczególności sprawdzono, czy w przypadku zbioru punktów, dla których więcej niż 3 z nich leżą na jednym okręgu nie występują problemy związane z testem przynależności do koła opisanego. Nie stwierdzono występowania żadnych problemów i jak widać na zamieszczonym przykładzie: dla 10-kąta foremnego triangulacja Delaunay'a i diagram Woronoja zostały wyznaczone poprawnie.



(a) Wprowadzony za pomocą myszki zbiór punktów



(b) Zbiór punktów będący 10-kątem foremnym

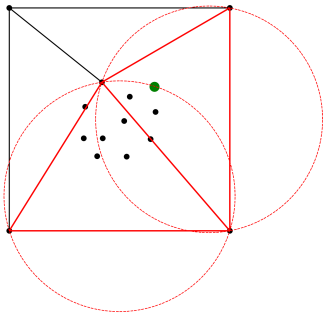


(c) Zbiór 40 wygenerowanych losowo punktów

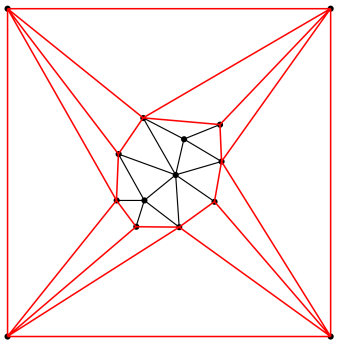
Rysunek 1: Wizualizacja diagramu Woronoja dla trzech różnych zbiorów punktów

0.3.4 Wizualizacja etapów działania algorytmu

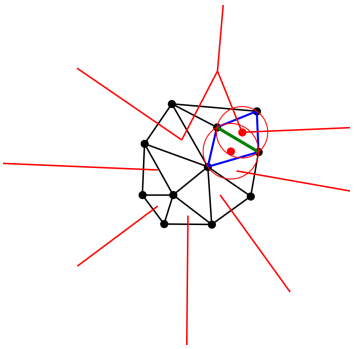
Pierwsza część wizualizacji prezentuje algorytm wyznaczania triangulacji Delaunay'a zadanej chmury punktów, natomiast druga – przekształcenie uzyskanej triangulacji w dualny do niej diagram Woronoja. Na Rysunku 2 zamieszczono wybrane fragmenty wizualizacji algorytmu wraz z opisem.



(a) Znalezienie trójkątów, których okręgi opisane zawierają aktualnie rozpatrywany punkt zaznaczony kolorem zielonym



(b) Usunięcie trójkątów zawierających wierzchołek początkowego superprostokąta



(c) Utworzenie krawędzi diagramu Woronoja przez połączenie środków okręgów opisanych na trójkątach triangulacji posiadających wspólny bok

Rysunek 2: Wybrane fragmenty wizualizacji etapów algorytmu

0.4 Aproksymacyjny algorytm brute force

0.4.1 Opis algorytmu

Jako drugą metodę zaimplementowano algorytm brute force wyznaczający w przybliżony sposób wieloboki Woronoja dla zadanej chmury punktów. Algorytm wprowadza na płaszczyźnie dyskretną kratę $\mathbb{Z}_+^2$ i dla każdego punktu kratowego znajduje punkt z zadanej chmury, dla którego odległość (w sensie metryki euklidesowej) jest minimalna. Algorytm zaimplementowany w języku Python jest niezwykle krótki, dlatego zamieszczono go poniżej w całości.

```
def ApproxVoronoi(points, N): # O(n*N^2)
    n = len(points)
    P = [i for i in range(n)]
    mx, my = min(points, key=lambda x: x[0])[0], min(points, key=lambda x: x[1])[1]
```

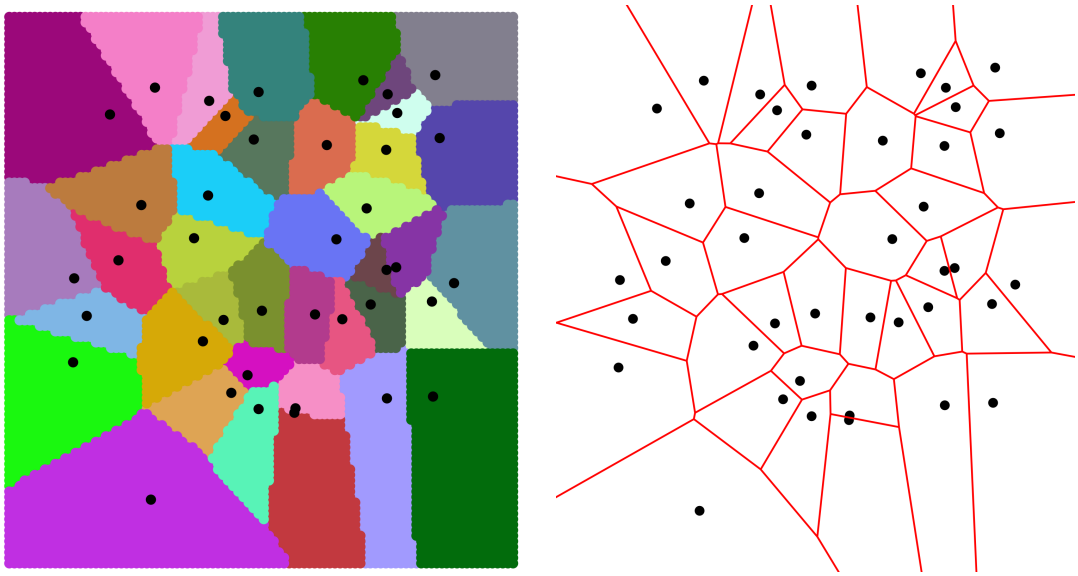
```
    Mx, My = max(points, key=lambda x: x[0])[0], max(points, key=lambda x: x[1])[1]
    a = .15 * max(Mx - mx, My - my)
    mx -= a
    my -= a
    Mx += a
    My += a
    hx, hy = (Mx - mx) / N, (My - my) / N
    grid = [[min(P, key=lambda x: d(points[x], (mx+i*hx, my+j*hy))) for j in
             range(N)] for i in range(N)]

    return grid, mx, my, hx, hy
```

Krata jest reprezentowana przez tablicę dwuwymiarową `grid`$[N][N]$, której wartościami są indeksy punktów z zadanej chmury `points`. Liczba naturalna N^2 określa liczbę punktów kratowych i jednocześnie wpływa bezpośrednio na dokładność wyznaczonego podziału. Obszar, dla którego wprowadzana jest krata, jest ograniczany do prostokąta $((m_x, m_y), (m_x, M_y), (M_x, M_y), (M_x, m_y))$, gdzie m_x, m_y, M_x, M_y to odpowiednio przeskalowane minimalne i maksymalne współrzędne punktów zadanej chmury. Odległość między sąsiednimi punktami kratowymi wynosi wówczas $h_x = (M_x - m_x)/N$ (w poziomie) i $h_y = (M_y - m_y)/N$ (w pionie). Złożoność czasowa działania tego algorytmu to $O(nN^2)$, czyli dla ustalonej liczby punktów kratowych jest liniowa względem wielkości wprowadzonej chmury punktów.

0.4.2 Graficzna prezentacja wyników działania algorytmu

Na Rysunku 3 przedstawiono wygenerowaną za pomocą algorytmu aproksymacyjnego dla 10^4 punktów kratowych wizualizację diagramu Woronoja dla 40 losowo wygenerowanych punktów oraz diagram dokładny wyznaczony opisanym wcześniej algorytmem Bowyera–Watsona.



Rysunek 3: Przybliżony diagram Woronoja 40 losowych punktów wyznaczony algorytmem aproksymacyjnym dla 10^4 punktów kratowych oraz diagram dokładny wyznaczony algorytmem Bowyera–Watsona