《拓扑学》学习笔记

Practice makes perfect.

作者：张博涵

组织：张博涵

起著重庄赤奋若

版本：August 13, 2022

Github 地址：www.github.com/BHanZhang

摄于 2022 年 07 月 28 日 河南省 洛阳市 *with my my*

目录

第一部分

点集拓扑

第 1 章 拓扑空间

1.1 拓扑空间，开集

定义 1.1 (拓扑空间，开集)

设 X 为一个集合 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}(X)$（把 $\mathscr{F}$ 中的元素称为 X 中的 **开集**），满足：

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$
2. U, V 是开集，那么 $U \cap V$ 是开集
3. $U_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个 **拓扑**，$(X, \mathscr{F})$ 为一个 **拓扑空间**。

注： 有时候这样写："设 X 为拓扑空间"，这就意味着"X 为一个集合，且规定了 X 上的一个拓扑（指定了那些子集为开集）"。

注： 这里第二点可以更换为"有限个开集的交仍为开集"，这样的定义也与我们熟知的开集的性质相一致。

例 1.1（欧氏拓扑） 对于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，$\mathscr{F} = \{\mathbb{R}^n\text{在通常意义下的开集}, \emptyset\}$ 构成一个拓扑空间。

证： 验证其为拓扑空间，就是要验证三条：

1. 第一条显然成立：$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathscr{F}$；
2. 设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，要证 $U \cap V$ 为开集。任取 $x_0 \in U \cap V$，就有：
   (a). $x_0 \in U$，有 $\exists \delta_1$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_1) \subset U$
   (b). $x_0 \in V$，有 $\exists \delta_2$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_2) \subset V$
   择 $\delta \in \min(\delta_1, \delta_2)$，有 $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U \cap V$，那么 $U \cap V$ 是开集；
3. 任取 $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$，则必 $\exists \alpha_0 \in I\ s.t.\ x_0 \in U_{\alpha_0}$，则 $\exists \delta\ s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$，于是 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

□

例 1.2（平凡拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **平凡拓扑**。

例 1.3（离散拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **离散拓扑**。

注： 以上两个例子说明，对于同一个集合，我们可以定义不同的拓扑，拓扑并不是唯一的，可以证明，平凡拓扑是 X 上最弱的拓扑，离散拓扑是 X 上最强的拓扑[1]。

通过以后的学习可以知道，平凡拓扑具有较为"刚性"的拓扑结构，而离散拓扑具有较为"柔性"的拓扑结构。

定义 1.2 (度量空间)

设 X 为一个集合，$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下三条：

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$

[1] 如果 X, Y 是 T 上的两个拓扑，且 $X \subset Y$ 那么就称拓扑 X **弱** 于拓扑 Y，反之拓扑 Y **强** 于拓扑 X。

那么就称 X,ρ 为一个 **度量空间** ，ρ 为 X 上的一个 **度量** 。

例 1.4（度量空间诱导的拓扑） 设 (X,ρ) 为一个度量空间，定义 X 上开集 U 为：

$$x_0 \in U \iff \forall x_0 \in U, \exists \delta > 0,\ s.t.\ B(x_0,\delta) \subset U$$

定义拓扑 $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 给出了 X 上的一个拓扑（称之为 **度量 ρ 诱导的拓扑** ）。

注： 这个例子说明了度量可以诱导拓扑，"赋范出度量，天然诱拓扑"。

例 1.5（$\mathbb{R}$ 上连续函数空间上的连续度量诱导的拓扑） 定义 $X = C([a,b])$ 上的连续度量 ρ：

$$\rho : C([a,b]) \times C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longmapsto \rho(f,g) := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

此时 ρ 诱导了 $C([a,b])$ 上的一个拓扑。

例 1.6 (除了"最大"和"最小"的拓扑之外，还存在"适中"的拓扑) 设 $X = \{0,1\}$，$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ 是一个拓扑，$(X,\mathscr{F})$ 是一个拓扑空间。

1.2 更多的拓扑空间与子空间拓扑

定义 1.3 (子空间拓扑)

设 X 是一个拓扑空间，$Y \subset X$ 为 X 的一个子集，则 Y 上可以如下定义一个拓扑结构：

$$\mathscr{F} = \{U \cap Y | U \subset_{open} X\}$$

则 $\mathscr{F}$ 定义了 Y 上的一个拓扑空间结构，此结构成为 X 在 Y 上诱导的拓扑，或称 Y 被赋予 **子空间拓扑** 。

证： 取大集合为小集合即可，证明显然。 □

例 1.7（n 维单位球面） n 维单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^n$ 赋予欧氏拓扑，其中 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x|| = 1\}$。

例 1.8（谈开集一定要说是在哪个拓扑的意义下是开集） 设 $[0,1) \subset \mathbb{R}$，赋予 $[0,1)$ 子空间拓扑，因为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集，$(\frac{1}{2},1)$ 也是 $\mathbb{R}$ 中开集，那么有以下结论成立：

- $[0,\frac{1}{2}) := (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cap [0,1)$ 是开集。
- $(\frac{1}{2},1) := (\frac{1}{2},1) \cap [0,1)$ 是开集。

正如我们在 $\mathbb{R}$ 中所规定的那样，上述两个例子分别应该不为开集和为开集，但是在子空间拓扑的意义下均为开集。这就说明了谈开集一定要说在哪个拓扑的意义下是开集。

定义 1.4 (连续性)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall\, U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是 **连续的** 。即连续映射到达域原像为开集。

例 1.9（离散拓扑为原像集的映射一定是连续映射） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，是 X 上的离散拓扑，

假设 $f : X \longrightarrow Y$，那么对于 $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U) \subset X$ 而 X 的所有子集都是开集（因为 X 的拓扑 $\mathscr{F}$ 是离散拓扑）。因此我们得知：**X 上的任意映射都是连续的**。

例 1.10（平凡拓扑上的连续映射只能到平凡拓扑） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，是 X 上的平凡拓扑，

设 Y 为一个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 为一个连续映射，$f(X) := \{f(x)|x \in X\} \subset Y$（此处 $f(X)$ 作为子空间赋予子空间拓扑），则 $f: X \longrightarrow f(X)$ 仍是连续映射。下断言：$f(X)$ **在子空间拓扑下只能为平凡拓扑空间**。

假设 $f(X)$ 不是平凡拓扑空间，那么[2]$\exists U \sqsubset f(X)$，并且 $U \neq \emptyset$ 且为 $f(X)$ 中开集，即 $f^{-1}(U) \subset_{open} X$。

但是 X 中开集只有两种可能，即 X 和 $\emptyset$，因为 $f: X \longrightarrow f(X)$ 是满射，因此 U 中的任何一点都有原像（但是原像不一定唯一），因此 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$。因此 $f^{-1}(U) = X$。因此 $f(X) = U \sqsubset f(X)$ 相矛盾，因此：若 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，则 $f(X)$ 一定为平凡拓扑空间。

1.3 开集的反面，闭集

定义 1.5 (闭集)

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$，如果 $X \backslash F$ 是 X 中开集，则 F 称为 X 中的 **闭集** 。♣

根据开集的性质 (定义1.1) 可立马得到闭集的性质：

命题 1.1 (闭集的性质)

1. $\emptyset, X$ 是闭集
2. F, G 是闭集，那么 $F \cup F$ 是闭集
3. $F_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集。

♠

1.3.1 闭集之刻画

定义 1.6 (极限点)

设 X 是一个拓扑空间，$A \subset X$，$\forall p \in X$，若 $\forall$ 包含 p 的开集 U 都有：

$$(U \backslash \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

则称 p 为 A 的一个 **极限点** 。而将集合 $\overline{A} = A \cup \{A\text{的极限点}\}$ 称为 A 的 **闭包** 。♣

例 1.11(欧式空间中有理点的极限点集为欧氏空间) $X = \mathbb{R}^3$，A 是 X 中的有理点(即 $A \in \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{Q}\}$)，那么 X 就是 A 的极限点集。

例 1.12（欧式空间中整数点的极限点集为空集） $X = \mathbb{R}^3$，$A = \mathbb{Z}$，那么 A 的极限点集为 $\emptyset$。

例 1.13（点集的极限点） 设 $X = \{0, 1\}$，$\mathscr{F} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ 则 X 的子集 A 有以下两种情况：

1. $A = \{0\}$:
   - 0 :$\forall$ 包含 $\{0\}$ 的开集 U，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 :$\forall$ 包含 $\{1\}$ 的开集 $U = \{0, 1\}$（只有这一个），$(U \backslash \{1\}) \cap A \neq \emptyset$，说明 1 是 A 的极限点。

   因此 1 为 $A = \{0\}$ 的极限点。
2. $A = \{1\}$:
   - 0 : 取包含 $\{0\}$ 的开集 $U = \{0\}$，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 : 包含 $\{1\}$ 的 X 中开集 $U = \{0, 1\}$，$(U \backslash \{1\}) \cap A = \emptyset$，说明 1 也不是 A 的极限点。

[2]这里符号 $\sqsubset$ 表示真被包含。

命题 1.2 (闭集的等价刻画)

设 X 为拓扑空间，$A\subset X$ 则：

$$A\text{是闭集} \iff \overline{A}=A$$

证： [$\Rightarrow$] 设 A 是闭集，要证 $\overline{A}=A$，显然 $A\subset\overline{A}$，下只需证 $\overline{A}\subset A$，即证 $X\backslash A\subset X\backslash\overline{A}$，因此对于 $p\in X\backslash A$ 都有 $p\in X\backslash\overline{A}$，因此即证：$\forall p\notin A$，$p$ 不是 A 的极限点。

事实上，A 闭集 $\Rightarrow X\backslash A$ 开集 $\iff \exists$ 开集 $U\subset A\backslash A, p\in U \Rightarrow (U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset \Rightarrow p$ 不是 A 的极限点。

[$\Leftarrow$] 设 $\overline{A}=A$，要证 A 是闭集。只要证 $X\backslash A$ 是开集，即：

$$\forall p\in X\backslash A, \exists\text{开集}U,\ s.t.\ p\in U\subset X\backslash A$$

由于 $p\notin A\Rightarrow p\notin\overline{A}$，则 p 不为 A 的极限点。因此 $\exists$ 开集 $U\subset X(p\in U)\ s.t.\ (U)\cap A=(U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset$，即 $p\in U\subset X\backslash A$ □

推论 1.1

$\overline{A}$ 为一个闭集。

证： 只要证 $X\backslash\overline{A}$ 为开集。由于 $\forall p\in X\backslash\overline{A}, p\text{不为}A\text{的极限点}$ 则 $\exists$ 开集 $U\subset X\ s.t.\ p\in U$ 且由于 $p\notin A$ 则 $U\cap A=(U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset$

则 $p\in U\subset X\backslash A$

则 $\forall q\in U$，U 为包含 q 的开集，又由于 $U\cap A=\emptyset$，因此 q 不是 A 的极限点，所以 $q\notin\overline{A}$，故 $U\subset X\backslash\overline{A}$。

因此 $X\backslash\overline{A}$ 为开集。 □

推论 1.2

$$\overline{A}=\bigcap_{F\supset_{closed}A}F$$

注： 由上推论可以知道，任何一个包含 A 的闭集都包含 $\overline{A}$，而根据 $\overline{A}=A\cup\{A\text{的所有极限点}\}$。因此 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小的闭集。

证： [$\supset$]: 由于 $\overline{A}\supset_{closed}A$，那么必然可以取到 $F_0=_{closed}\overline{A}$，此时 $\displaystyle\bigcap_{F\supset_{closed}A}F=F_0\cap\left(\bigcap_{F_0\neq F\supset_{closed}A}F\right)\subset A$。

[$\subset$]: 只要证 $\forall F\supset_{closed}A$ 都有 $F\supset\overline{A}$，即证 $X\backslash F\subset X\backslash\overline{A}$。

只要证 $\forall x\notin F, x$ 不为 A 的极限点。

事实上，F 是闭集，根据命题1.2可知 $F=\overline{F}\Rightarrow x\notin\overline{F}$，因此 x 不为 F 的极限点，而 $F\supset A$ 因此得证。 □

命题 1.3 (闭包运算的性质)

1. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
2. $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

证： 额，不知道什么高级方法，于是采用土办法就好了。

1. 只需要证明 $A\cup B$ 的极限点和 A 的极限点或 B 的极限点一致就好，事实上我们有如下的推理[3]：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cup B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cup B,\exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cup B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cup((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{或}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，或}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

2. 只需要证明 $A\cap B$ 的极限点就是 A 的极限点和 B 的极限点就好，事实上：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cap B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cap B,\exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cap((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\Longrightarrow ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{且}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，且是}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

这一部分不是等号的问题主要出现在倒数第二步，因为两个非空集合的交不一定非空，而两个非空集合的并，一定非空。 □

例 1.14（上命题第二部分不能取等） 若 $A=[0,1),B=(1,2]$ 那么 $\overline{A\cap B}=\emptyset\sqsubset\{1\}=\overline{A}\cap\overline{B}$

例 1.15（单点集不一定是闭集，稠密） 设 $X=\{0,1\}$，$\mathscr{F}=\{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，于是拓扑空间的闭集就是直接取 $\mathscr{F}$ 在 X 中的补集，即 $\{\{1\},\emptyset,\{0,1\}\}$，对比之后明显可以看出来 $A=\{0\}$ 不是闭集（其他几个都是既开又闭）。根据我们前面例1.13的经验，$\{0\}$ 的极限点是 1，因此 $\overline{A}=A\cup\{A\text{的极限点}\}=\{0,1\}=X$。即取了闭包之后就取到全集，这种现象我们称之为**稠密**。

1.3.2 稠密

定义 1.7 (稠密)

设 X 为一个拓扑空间，$A\subset X$，若 $\overline{A}=X$ 则称 A 在 X 中 **稠密**。如果 $Y\subset X$ 是 X 的拓扑子空间，如果还有 Y 的拓扑子空间 $Z\subset Y$ 那么我们分别记：

$\overline{Z_Y}$ ：Z 在 Y 中取闭包。

$\overline{Z_X}$ ：Z 在 X 中取闭包。

♣

注： 之所以会在不同背景集合中取闭包，最本质是因为某集合在不同背景集合中的极限点是不一样的。

例 1.16（同一集合在不同背景集合中取闭包不相一致） 设 $X=\mathbb{R},Y=(0,2),Z=(0,1)$ 于是取闭包：$\overline{Z_X}=[0,1],\overline{Z_Y}=(0,1]$

例 1.17（有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中稠密） 因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的极限点集为实数集 $\mathbb{R}$，因此 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$。

那么很自然就产生疑问，是否取闭包的运算和子空间拓扑存在很多联系？这就是下面命题所解决的：

命题 1.4

设 X 是拓扑空间，Y 是 X 的拓扑子空间，Z 是 Y 的拓扑子空间。我们有：

$$\overline{Z_Y}=\overline{Z_X}\cap Y$$

♠

证： 验证这一问题，仍然从土方法走：

[3]这里会利用到集合运算的分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 和 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[⊂] 即证 $\forall x \in \overline{Z_Y}$, $s.t.\ x \in \overline{Z_X} \cap Y$，首先因为 $x \in \overline{Z_Y}$，因此 $x \in Y$ 于是只需证 $x \in \overline{Z_Y}$:

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 Y 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 X 中的极限点。事实上 $\forall x$ 在 X 中的开邻域 V，有：对于 X 在 Y 中的去心开邻域 $((V \cap Y)\backslash\{x\})$ 有：

$$\begin{aligned} &((V \cap Y)\backslash\{x\}) \cap Z \\ =&((V\backslash\{x\}) \cap Z) \cap Y \\ \subset& (V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset \end{aligned}$$

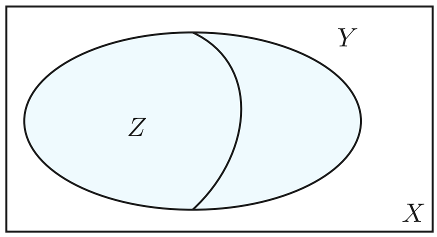

图 1.1: 命题 1.4 之集合关系图

[⊃] 即证 $\forall x \in \overline{Z_X} \cap Y$, $s.t.\ x \in \overline{Z_Y}$，首先明显有 $x \in Y$ 于是仍分类讨论：

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 X 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 Y 中的极限点。事实上，任意在 Y 中的包含 x 的开集，由子空间拓扑，不妨设之为 $V \cap Y$，其中 $V \subset_{open} X (x \in V)$，因为 x 为 Z 在 X 中的极限点，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset$，又由于 $x \in Y$，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \cap Y = (V \cap (Y\backslash\{x\})) \cap Z \neq \emptyset$

□

更进一步，我们问以下的问题：

问题 1.1 设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset X$，问：$F \cap U$ 是否在 U 中稠密？

答案是否定的，因为如果偷鸡取 $U = X\backslash F$ 这件事就算寄了。于是为了排除这个情况，我们必须要求 U 是开集。如下命题：

命题 1.5

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset_{open} X$ 是 X 且赋予子空间拓扑，则 $F \cap U$ 在 U 中稠密。

证： 要证 $\overline{(F \cap U)_U} = U$ 根据命题1.4，即要证 $\overline{(F \cap U)_U} \cap U = U$，即要证 $U \subset \overline{(F \cap U)_X}$。

即对 $\forall x \in U$ 要证 $x \in \overline{(F \cap U)_X}$。则分两类讨论：

1. $x \in F \cap U$ 显然成立
2. $x \notin F \cap U$，又由于 F 在 X 中稠密，那么 x 是 F 的极限点，任取 X 中开集 $V(x \in V)$，由于 U 是 X 中开集，因此 $V \cap U$ 也是 X 中开集，因为 x 是 F 的极限点，所以有：

$$\begin{aligned} &((V \cap U)\backslash\{x\}) \cap F \neq \emptyset \\ \iff& (V\backslash\{x\}) \cap (F \cap U) \neq \emptyset \end{aligned}$$

□

注： 这里做一个小小小的总结，一个开集的闭包是闭集，也就是说闭集包括了这个开集中的所有的元素和这个开集的全部极限点，因此在这个开集中取任何点列其极限点均在这个集合的闭包里（闭集也一样，

闭集的闭包为其自己)。因此我们知道闭集中"闭"的含义是**闭集关于取极限运算是封闭的!**。

1.3.3 集合之解体

为了更好说话，引入以下概念:

定义 1.8 (内点，外点，边界点)

设 X 为一个拓扑空间，$A \subset X$ 定义:

- 定义 A 的 **内点集**：$int(A) := \{p \in A | \exists X 中开集 V(p \in V), V \subset A\}$
- 定义 A 的 **外点集**：$ext(A) := \{p \notin A | \exists X 中开集 V(p \in V), V \subset X \backslash A\} \iff int(X \backslash A)$
- 定义 A 的 **边界点集**：$\partial(A) := \{p \in X | \forall p 的开邻域 V, V \cap A \neq \emptyset . V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset\}$

♣

注: 根据以上定义，我们显然有:

$$X = int(A) \sqcup ext(A) \sqcup \partial(A)$$

例 1.18 (一些显然的例子)

1. 设 $A = [0,1) \subset \mathbb{R}$ 那么: $\partial(A) = \{0,1\}, int(A) = (0,1)\,, ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
2. (a). 设 $A = (0,1) \subset [0,1)$ 那么: $\partial(A) = \{0\}, int(A) = (0,1)\,, ext(A) = \emptyset$
   (b). 设 $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ 那么: $\partial(A) = \{0,1\}, int(A) = (0,1)\,, ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
3. 设 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 于是:
   (a). $\partial(D) = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
   (b). $int(D) = D$
   (c). $ext(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

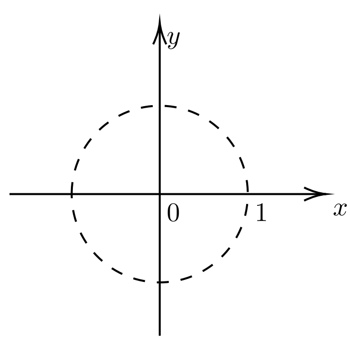

图 1.2: 例 1.18.3 之拓扑空间 D

4. 设 $A = [0,1] \subset \mathbb{R}^2$，此时 $\partial(A) = A, int(A) = \emptyset, ext(A) = X \backslash A$

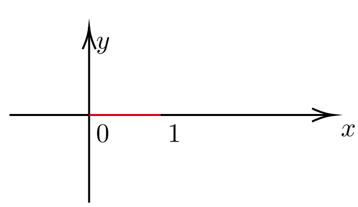

图 1.3: 例 1.18.4 之拓扑空间 A

1.4 拓扑空间的砖头—拓扑基

定义 1.9 (拓扑基)

设 X 是拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是一个由一些 X 中开集构成的集族，如果对 $\forall X$ 中开集 U，U 均可表为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并，则称 $\mathcal{B}$ 构成了 X 的一个 **拓扑基** 。

例 1.19（$\mathbb{R}^1$ 中的欧氏拓扑可以有不同的拓扑基） 很明显，$\mathbb{R}^1$ 有一个拓扑基为 $\mathcal{B} = \{(a,b)|a < b\}$。令 $\mathcal{B}' = \{(a,b)|a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$，则 $\mathcal{B}'$ 也是 $\mathbb{R}^1$ 的一个拓扑基。

证： $\forall U \subset_{open} \mathbb{R}^1, \forall p \in U$，则存在 $a < p < b$ 使得 $(a,b) \subset U$，从而由有理数集的稠密性可知，$\exists (a_p, b_p) \in \mathcal{B}'$，$s.t.\ p \in (a_p, b_p) \subset U$ 即 $U = \bigcap\limits_{p\in U}(a_p, b_p)$。 □

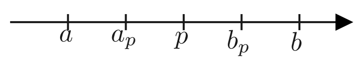

图 1.4: 例 1.19 之数轴

注： 由此可见，一个拓扑空间可以有诸多拓扑基，但是一个拓扑基是否唯一确定一个拓扑空间呢？答案是肯定的，这个结论将由以下讨论给出。

了解了定义，我们就需要探究一个拓扑基 $\mathcal{B}$ 之所以为拓扑基的等价条件。很明显，由拓扑基我们可以知道拓扑基的必要条件，如下面这个命题：

命题 1.6

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基，那么：

TB1 . $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{B}} U = X$

TB2 . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}\ s.t.\ U_1 \cap U_2$ 可以表示为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并。

证： 显然。 □

这个命题反过来也是正确的，即有以下的命题：

命题 1.7

设 X 为一个集合，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个由一些子集构成的集族，若 $\mathcal{B}$ 满足以上 TB1 、 TB2 两条，则 $\mathcal{B}$ 必为 X 上某个拓扑 $\mathscr{F}$ 的拓扑基。而且，$\mathscr{F}$ 是唯一的，称之为由拓扑基 $\mathcal{B}$ **生成** 的拓扑。

证： 定义 $\mathscr{F} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{B}$中若干元素之并$\} = \{\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha | U_\alpha \in \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\}$，我们所要证明的是以下两点：

1. $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个拓扑。事实上，我们有：
   (a). $\emptyset, X \in \mathscr{F}$（显然，由定义和条件 TB1 可以保证。）
   (b). $\mathscr{F}$ 对于任意并封闭是显然的（因为就是这样定义的。）
   (c). 对于 $\forall \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha, \bigcup\limits_{\beta\in J} V_\beta \in \mathscr{F}$，其中 $U_\alpha, V_\beta \in \mathcal{B}, \forall \alpha \in I, \beta \in J$ 那么有：

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta\in J} V_\beta\right) = \bigcap_{\alpha,\beta}(U_\alpha \cap V_\beta) \in \mathscr{F}$$

2. $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathscr{F}$ 上的一个拓扑基。

根据定义可知 $\mathcal{B}$ 也确实为拓扑 $\mathscr{T}$ 上的一个拓扑基。从构造来看，我们并没有规定在拓扑基 $\mathcal{B}$ 中的并是哪些，因此 $\mathscr{T}$ 是唯一的，因此命题得证。 □

例 1.20（$\mathbb{R}^2$ 的另一拓扑基） 明显来看，欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中的开球的全体构成的集合是 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基，根据我们在度量空间中所积攒的经验，$\mathbb{R}^2$ 中的开球和邻域是等价的，很自然的我们可以考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的开矩体的全体构成的集合 $\mathcal{B}' = \{(a,b)\times(c,d) | a<b, c<d\}\cup\{\emptyset\}$：

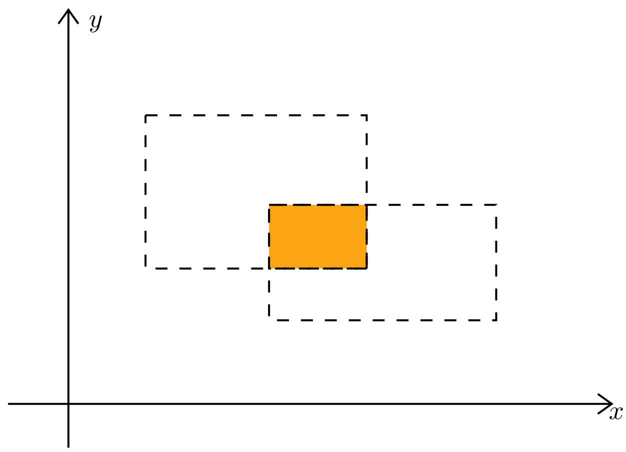

图 1.5: 例 1.20 之开矩体

很明显 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上某拓扑的拓扑基。

为了更好地描述两个拓扑基之间的关系，以便更加方便地研究两个拓扑基生成的拓扑空间之间的关系，我们对拓扑基引入如下的定义：

定义 1.10 (拓扑基之间的等价)

设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 是 **等价** 的，若：

1. $\forall U \in \mathcal{B}, p \in U$, 都 $\exists U' \in \mathcal{B}'$, $s.t.\ p \in U' \subset U$
2. $\forall V \in \mathcal{B}', p' \in V'$, 都 $\exists V \in \mathcal{B}'$, $s.t.\ p \in V \subset V'$

♣

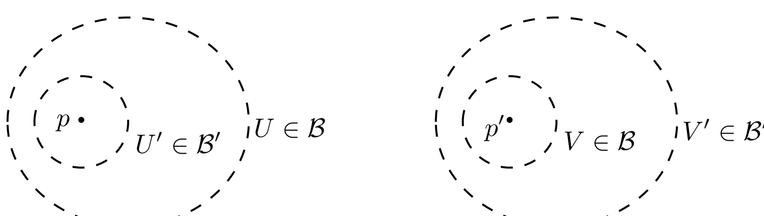

图 1.6: 定义 1.10 之说明

命题 1.8

设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，且 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 等价，则 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathscr{T}$ 与 $\mathcal{B}'$ 生成的拓扑 $\mathscr{T}'$ 相同。 ♠

证： 证明很简单，$\forall U \in \mathscr{T} \Rightarrow U = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha, U_\alpha \in \mathcal{B}$，又因为两个拓扑基等价，则有：

$$\forall U_\alpha, \forall p \in U_\alpha \Rightarrow \exists V_p \in \mathcal{B}',\ s.t.\ p \in V_p \subset U_\alpha$$

即：$U_\alpha = \bigcup_{p\in U_\alpha} V_p \in \mathscr{F}'$，即 $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \mathscr{F}'$，则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$

同理，$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$，因此 $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ □

为了更好的使用以上拓扑基的等价条件，我们可以篡改 TB2 为以下的 TB2'：

TP2' . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall p \in U_1 \cap U_2, \exists U_p \in \mathcal{B},\ s.t.\ p \in U_p \subset U_1 \cap U_2$

证： 这个的验证也十分显然。 □

第 2 章 连续映射

研究点集拓扑的主要动机就是从更加一般的观点来定义连续性、紧性和连通性。下面三章就是在做这个工作。这一章，先研究一般的连续映射[1]。

2.1 连续映射

2.1.1 连续映射与其等价刻画

首先，我们重申连续性的定义：

定义 2.1 (连续映射)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是**连续映射**。

我们有下面这俩显然的命题：

命题 2.1 (连续映射之复合是连续映射)

设 X,Y,Z 是三个拓扑空间，定义连续映射 $f : X \longrightarrow Y$，$g : X \longrightarrow Y$，则 $gf : X \longrightarrow Z$ 是连续映射。

证： 对于 $\forall U \subset_{open} Z$，我们有 $(g \cdot f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$，由于 g 是连续映射，则 $g^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集; 又由 f 是连续映射，所以 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 X 中开集。 □

命题 2.2 (连续映射之限制是连续映射)

设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，$A \subset X$ 并赋予 A 以子空间拓扑，那么 $f|_A : A \longrightarrow Y$ 是连续映射。

证： $\forall U \subset_{open} Y$, 因为赋予 A 以子空间拓扑，所以有 $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$

又由于 f 是 $X \longrightarrow Y$ 的连续映射，所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集，所以 $A \cap f^{-1}(U)$ 就为 A 中开集。□

命题 2.3 (连续映射之嵌入是连续映射)

设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，像集 $f(X)$ 赋予子空间拓扑，则 $f : X \longrightarrow f(X)$ 也是连续映射。

证： $\forall f(X)$ 中开集，由于子空间拓扑，则可设其形如 $U \cap f(X), U \subset_{open} Y$，那么自然有：

$$f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \subset_{open} X$$

因此得证。 □

例 2.1（拓扑上的恒等变换是连续映射） 设 X 为拓扑空间，X 上的恒等映射：

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x$$

[1] 值得强调的是，在尤承业老师的《基础拓扑学》中 36 页提到，除此之外还有**可数性**、**分离性**，以之来弥补拓扑空间的一些不足。这些也贯穿在这几章中出现。

这个映射显然是个连续映射。

例 2.2（拓扑上的嵌入映射是连续映射） 设 X 为拓扑空间，$A \subset X$ 并赋予子空间拓扑，那么映射：

$$\mathrm{i}_A : A \longrightarrow X$$

$$a \longmapsto a$$

这个映射显然也是个连续映射。

例 2.3（constant map 是连续映射） 设 X 为拓扑空间，Y 是一个单点集，那么映射

$$f : X \longrightarrow Y$$

是一个连续映射。

为了更好地刻画连续映射，我们有连续映射的以下等价命题：

命题 2.4

下列命题等价：

1. $f : Z \longrightarrow Y$ 是连续映射。
2. $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 是开集。
3. 设 $\mathcal{B}$ 为 Y 的一个拓扑基，$\forall U \in \mathcal{B}, f^{-1}(U)$ 是开集。
4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, A \subset X$
5. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}), \forall B \subset Y$
6. $\forall F \subset_{closed} Y, f^{-1}(F)$ 是闭集。

注： 以上命题说明了对于一个连续映射，开集的原像是开集，闭集的原像是闭集。并且对于其拓扑基也是适用的。

证： 下面开始着手证明这个命题，我们采取循环的办法进行证明：

[2 $\Rightarrow$ 3]：显然的。

[3 $\Rightarrow$ 4]：$\forall y \in f(\overline{A})$ 要证 $y \in \overline{f(A)}$。那么对与 $\forall y = f(x), x \in \overline{A}$ 作以下讨论：

(a). $x \in A$，此时 $y \in f(A) \subset \overline{f(A)}$，显然成立。

(b). $x \notin A$，这时就说明 x 是 A 的一个极限点。那么我们再对到达域进行讨论：

I. $y \in f(A)$，此时的证明依旧是显然的。

II. $f(x) = y \notin f(A)$，此时要证 y 为 $f(A)$ 的一个极限点。如上图，$\forall U \subset_{open} \mathcal{B}(y \in U)$，

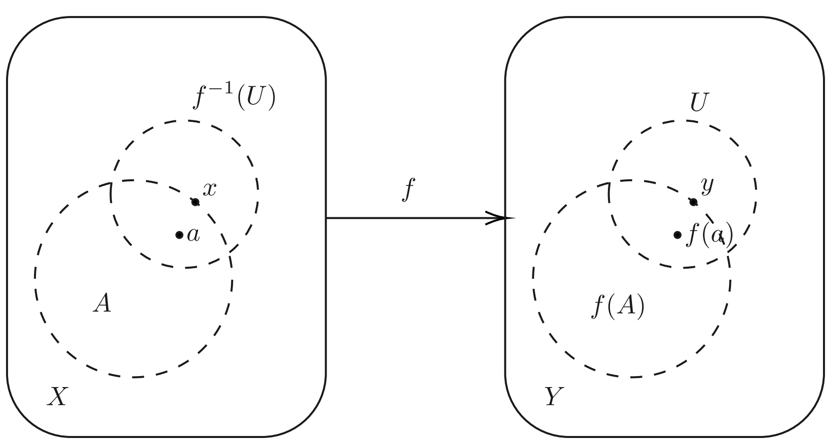

图 2.1: 命题 2.3 之证明图示

由 2 可知 $f^{-1}(U)$ 是开集，又由于 $x \in f^{-1}(U)$ $s.t.$ $f(x) = y \in U$，因此 $x \in f^{-1}(U)$。另外由于 $\exists x \in f^{-1}(U)$，则有：

$$(f^{-1}(U)\backslash\{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

这说明除了 x 外，$\exists a \in (f^{-1}(U)) \cap A$，即 $f(a) \in U, f(a) \in f(A)$，因此 $U \cap f(A) \neq \emptyset$，又由于 $y \notin f(A)$，即 $(U\backslash\{y\}) \cap f(A) \neq \emptyset$，因此 y 是 $f(A)$ 的极限点。

[$4 \Rightarrow 5$]：直接在 4 中取 $A = f^{-1}(B)$，那么立马有：

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = B \subset \overline{B}$$

因此两边作用 f^{-1} 则得证。

[$5 \Rightarrow 6$]：$\forall F \subset_{closed} Y$，根据 5，然后由于 F 是闭集，所以 $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F)$，而这一等式的反向是自然成立的，所以有 $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$。因此 $f^{-1}(F)$ 是闭集。

[$6 \Rightarrow 2$]：任取 $U \subset_{open} Y$，注意到 $f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(Y\backslash U) = X$，这里的无交并是因为 f 是映射。因此立马可以得到

$$f^{-1}(U) = X\backslash f^{-1}(Y\backslash U)$$

由于 $f^{-1}(Y\backslash U)$ 是闭集，因此 $f^{-1}(U) = X\backslash f^{-1}(Y\backslash U)$ 是开集。

□

2.1.2 拓扑空间中的极限与 Hausdorff[2]空间

研究连续性，是和极限密不可分的，下面开始定义极限。

定义 2.2 (极限)

设 X 是一个拓扑空间，$\{x_n\} \subset X$ 是 X 内的一个序列，如果对于 $\forall U \subset_{open} X (x \in U), \exists N, s.t. \forall n > N, x_n \in U$，则把 $x \in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个 **极限** 。

♣

注： 以上之所以说定义出来的极限是“一个”极限。是因为由此定义出的极限不唯一，其根本在于拓扑空间 X 中的点不一定可以分离，也就是所谓的**分离性**不一定存在。下面给出一个例子来说明这点。

例 2.4（定义2.2中定义出的极限并不唯一） 设 $X = \{0,1\}, \mathscr{F} = \{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，设 $x_n = 0, n = 1,2,\cdots$，因此：$\lim\limits_n x_n = 0$ 是显然的，并且由于 $U = \{0,1\}$ 是唯一包含 1 的开集，所以 $\lim\limits_n x_n = 1$。因此这个极限有两个值。

这样就非常的不好啊，仔细想来，在 $\mathbb{R}$ 中我们可以有唯一的极限，这是因为 $\mathbb{R}$ 很牛，里面有很多结构，比如有欧氏度量，而且还是全序域，还有线性结构。一般的拓扑空间不能做到极限唯一，肯定是因为其少了什么东西，这种东西就是所谓的**分离性**。增加的方法有很多，比如下面的 T2 分离公理。

定义 2.3 (Hausdorff 空间)

设 X 为一个拓扑空间，如果 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \exists$ 开集 U_1, U_2, $s.t.$ $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，则称 X 为一个 **Hausdorff 空间** [a]。

[a]这也称为拓扑空间 X 满足 T2 **分离公理** 。

♣

[2]费利克斯 · 豪斯多夫（德语：Felix Hausdorff，1868 年 11 月 8 日 − 1942 年 1 月 26 日），德国数学家。他是拓扑学的创始人之一，并且对集合论和泛函分析都贡献不少。他定义和研究偏序集、豪斯多夫空间和豪斯多夫维，证明豪斯多夫极大定理。他以笔名 Paul Mongré 出版哲学和文学作品。

命题 2.5

设 X 为一个 Hausdorff 空间，$\{x_n\} \subset X$ 则若 x_n 的极限存在，则 $\{x_n\}$ 的极限唯一，并记之为 $\lim\limits_n x_n$。

证： 反设 $\lim\limits_n x_n = y_1$ 和 $\lim\limits_n x_n = y_2 \neq y_1$ 同时成立，那么根据定义就 $\exists N = \max\{N_1, N_2\}$ $s.t.$ 对 $\forall n > N, x_n \in U_1$ 和 $x_n \in U_1$ 同时成立，又由于 X 为一个 Hausdorff 空间，则 $x_n \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$，矛盾。□

例 2.5（例2.4中极限不存在的原因） 设 $X = \{0,1\}, \mathscr{F} = \{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，则 $\mathscr{F}$ 不是 Hausdorff 空间。

这是因为取 $y_1 = 0, y_2 = 1$，那么 $y_2 \in \bigcup\limits_{open}$ 只只存在一种情况：$y_2 \in \{0,1\}$，此时 $U \cap \{y_1\} = \emptyset$。

例 2.6（度量空间都是 Hausdorff 空间） 设 (X,ρ) 为一个度量空间，$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，设 $\rho = \rho(x_1,x_2) > 0$，令 $U_1 = B(x_1, \frac{\rho}{2}), U_2 = B(x_2, \frac{\rho}{2})$，那么 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。更加准确一点儿说就是，反设 $x \in U_1 \cap U_2$，

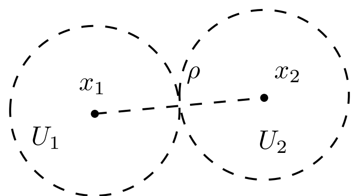

图 2.2: 例 2.6 之图示

$\rho(x_1,x_2) \leq \rho(x_1,x) + \rho(x,x_2) \leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}$，矛盾！

在分析学中，如果一个函数连续，那么说明函数符号和极限号是可以交换的，即极限号可以取到函数里面去。即：

$$f(x)\text{连续} \Rightarrow \lim_{\mathcal{B}} f(x) = f(\lim_{\mathcal{B}} x)$$

命题 2.6

设 X, Y 皆为 Hausdorff 空间，映射 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，$\{x_n\} \subset X, \lim\limits_n x_n = x_0, \lim\limits_n f(x_n) = y_0$，则 $\lim\limits_n f(x_n) = f(\lim\limits_n x_n) \in Y$

证： 这个证明很显然，根据定义，我们只需要证明 $\forall U \subset_{open} Y(f(\lim\limits_n x_n) \in U)$，则 $\exists N, n > N, f(x_n) \in U$。

任取 $U \subset_{open} Y(f(\lim\limits_n x_n) \in U)$，由于 f 是连续映射，所以必然 $\lim\limits_n x_n \in f^{-1}(U) \subset_{open} X$，所以就有：$\exists N,\ s.t.\ n > N, x_n \in f^{-1}(U)$ 即 $f(x_n) \in U$。□

定义 2.4 (同胚)

设 X, Y 是两个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 如果：

1. f 是双射。
2. f 连续。
3. f^{-1} 连续。

那么就称映射 f 为一个 **同胚** （homeomorphism）。

在这个定义中， 2 和 3 真是十分奇怪，怎么会有连续映射的逆映射不连续的呢？下面给出了一个复变函数中的例子来进行说明。

例 2.7（存在连续映射之逆映射不连续） 设映射为：

$$\begin{aligned} f:[0,1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

该映射之逆映射不连续。

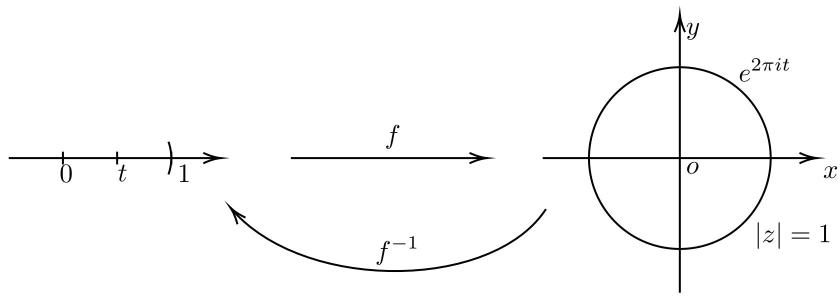

图 2.3: 例 2.7 中的映射

这是为什么呢，很显然，该映射 f 是一个连续映射，但是 f^{-1} 不连续，这是因为从 $t=0$ 按照逆时针走，是 t 自 0 增大的过程，但是若顺时针走动，幅角从 0 突然变到比 2π 小一点点，t 会由 0 瞬间变到 1 的周围，导致不连续的事情发生。

例 2.8（球极投影） 考虑 $S^2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$，北极点为 $P=(0,0,1)$。映射：

$$\begin{aligned} h: S^2\backslash P &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (u,v) \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{R}^2$ 赋予欧氏拓扑，而 $S^2\backslash P$ 赋予子空间拓扑。下面说明映射 h 是一个同胚，需说明三点：

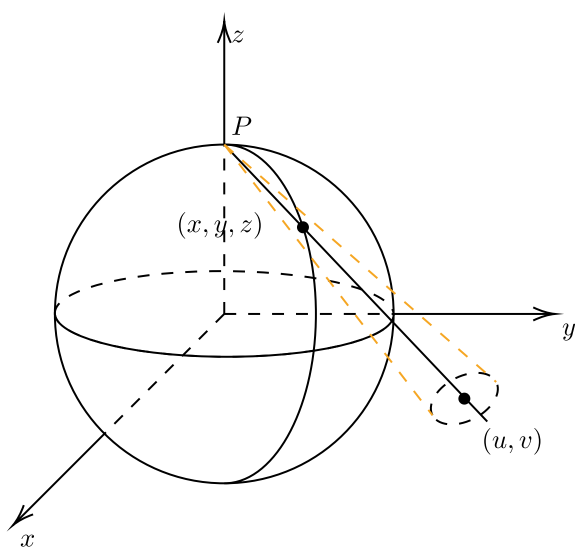

图 2.4: 球极投影

1. 从 h 的构造来看，h 显然是双射。
2. 从 h 的构造来看，h 也是连续映射（把 $S^2\backslash P$ 中的开集映为 $\mathbb{R}^2$ 中的开球）
3. 下说明 h^{-1} 也是连续映射，观察到 $(0,0,1),(x,y,z),(u,v,0)$ 是三点共线，因此 $\exists\lambda\neq 0$，并且有关

系式：

$$\lambda(x,y,z-1)=\lambda(u,v,-1)$$

解出 $x=\lambda u, y=\lambda v, z=1-\lambda$，并考虑 (x,y,z) 在球 $x^2+y^2+z^2$ 上，就有：

$$\lambda^2u^2+\lambda^2v^2+(1-\lambda)^2=1$$

因此同除 $\lambda\neq 0$，得到：

$$\lambda=\frac{2}{u^2+v^2+1}$$

这样就知道了 h^{-1} 应该满足下关系式：

$$\begin{aligned} h^{-1}:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2\backslash\{P\} \\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) \end{aligned}$$

现考虑映射 f：

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right) \end{aligned}$$

很明显 f 是一个连续映射。根据我们的命题2.3可知，h^{-1} 也是连续映射。

2.2 充满整个空间的曲线-Peano[3]曲线

本节将给出一个在分析学、拓扑学中都很重要且著名的例子—Peano 曲线。

例 2.9（Peano 曲线） 设 $f:[0,1]\longrightarrow X$ 是一个连续映射，称之为一个 **曲线** 。其中 X 设定为三角形 $\triangle$（边长为 1），取 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑。按照如下方式对 Peano 曲线进行绘制：

$$f:[0,1]\longrightarrow X$$

f_1 是这副德行（让点“匀速率游走为红色的线”）：

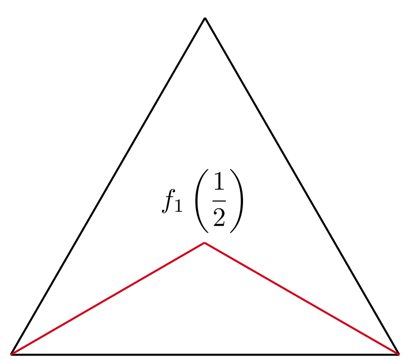

图 2.5: Peano 曲线第一步 f_1

接着，把整个三角形按照中点进行连接起来，这样就形成了 4 个小的并且全等的三角形。然后在每一个三角形里填充 f_1，但是要注意顺序，f_2 如下所示：

[3]朱塞佩 · 皮亚诺（意大利语：Giuseppe Peano；1858 年 8 月 27 日－ 1932 年 4 月 20 日）是意大利数学家、逻辑学家、语言学家。

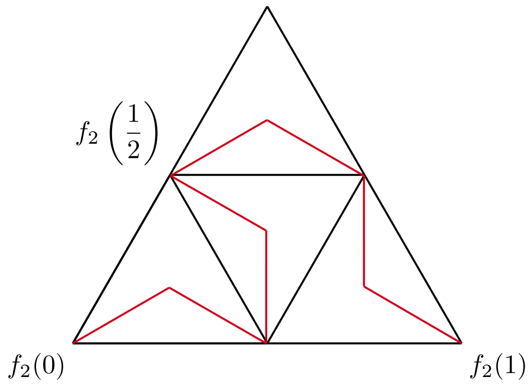

图 2.6: Peano 曲线第二步 f_2

然后对其中每一个小三角形按照如下替换规则进行替换：

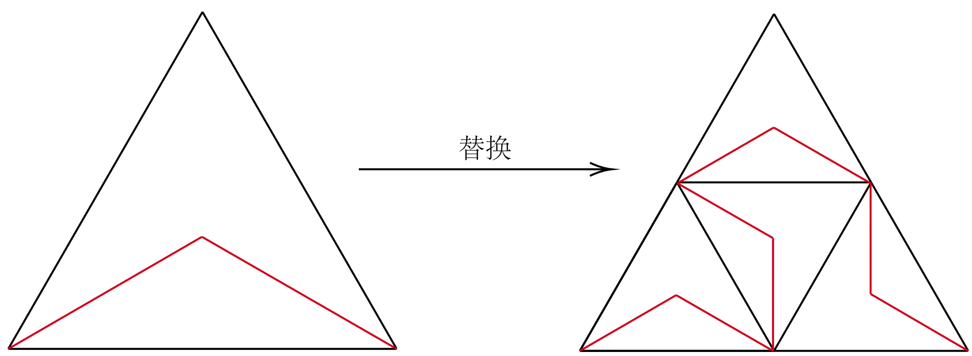

图 2.7: Peano 曲线构筑规则

这样我们就得到了 f_3，以此类推...

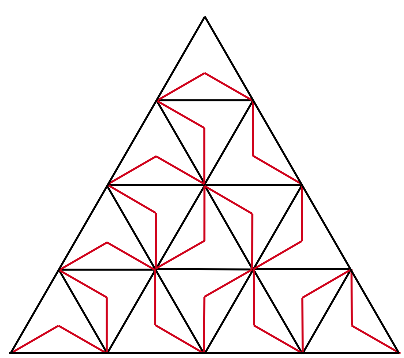

图 2.8: Peano 曲线第三步 f_3

这样一直下去，由于匀速率，f_n 中小三角形的边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$，那么我们有以下断言：

命题 2.7 (Peano 曲线)

1. $f_n : [0,1] \longrightarrow \triangle$ 并且有：$f_n \rightrightarrows: [0,1] \to \triangle$，映射 f 是连续映射，将之称为 Peano **曲线**。
2. $f([0,1]) = \triangle$

证： 我们来一条一条证明：

1. $f(t)$ 是匀速率进行移动，相比较 f_{n+1} 和 f_n，在 f_{n+1} 中的某一点一定要落入比它大四倍的 f_n 中。因此我们有 $||f_{n+1}(t)-f_n(t)|| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$。
   而 f_n 的边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$，这就说明在时刻 t，点一定移动到某个小三角形里，三角形中两点的欧氏距离不超过三角形的边长，即：$\forall m \geq n+1, ||f_m(t)-f_n(t)|| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall t \in [0,1]$。即：
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N,\ s.t.\ \forall n,m > N, ||f_m(t)-f_n(t)|| \leq \varepsilon, \forall t \in [0,1]$$
   因此在 $\mathbb{R}^2$ 中,$\{f_n(t)\}$ 是一致收敛的。那么 f 是一个连续映射。
2. $\forall P \in \triangle, \forall n \in \mathbb{N}$，通过对 $\triangle$ 的边长进行 2^{n-1} 等分，就得到边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 的小三角形。则 P 必然落在一个这样的小三角形里，对于 f_n，必 $\exists t_n, ||f_n(t_n)-P|| < \frac{1}{2^{n-1}}$，根据第一点的议论，我们又有 $\forall m \geq n+1, ||f_m(t)-f_n(t)|| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall t \in [0,1]$，因此：
   $$\begin{aligned} 0 \leq ||f(t_n)-P|| &\leq ||f(t_n)-f_n(t_n)|| + ||f_n(t_n)-P|| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$
   当 $n \to +\infty$ 时，$f(t_n) \to P$，因此 P 为 $f([0,1])$ 的极限点。
   事实上，在欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中，闭区间 $[0,1]$ 是紧集，因此连续映射 f 映射紧集得到的项还是紧集，即欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 的闭集。因此 $P \in f([0,1])$，即 $f([0,1]) = \triangle$。

□

第 3 章 紧性

紧性是一类非常重要的拓扑性质，在分析中，我们常常利用紧性说明一些真理。紧性和集合开闭、连续都有很大的关联。下面我们首先研究紧性，然后在此基础上推广一些概念，使之更加一般。

3.1 开覆盖，紧集，紧子集

定义 3.1 (开覆盖)

设 X 为一个拓扑空间，对于拓扑空间 X 中的一族开集 $\{U_i\}_{i\in I}$，如果

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X$$

那么就把开集族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 称为 X 的一个 **开覆盖** 。 ♣

例 3.1（$\mathbb{R}^3$ 中球面 S^2 的一组开覆盖） 以下开集 U_1, U_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中球面 S^2 的一组开覆盖：

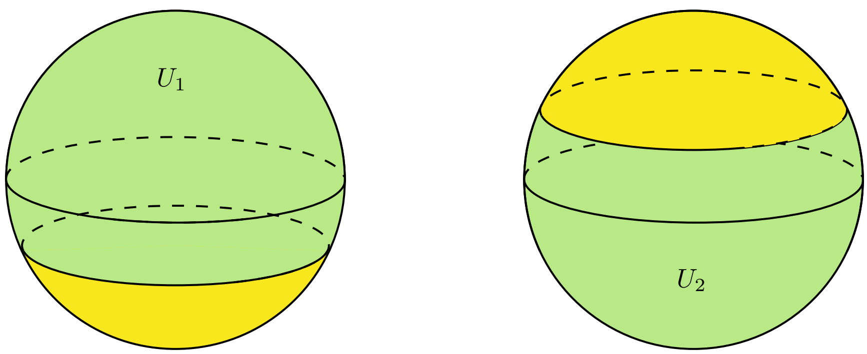

图 3.1: 例 3.1 中的 U_1 与 U_2

即：$S^2 = U_1 \cup U_2$。

定义 3.2 (子覆盖)

若开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 中可以取出一部分开集，记之为 $\{U_j\}_{j\in J}, J\subset I$，且满足 $\bigcup\limits_{j\in J} U_j = X$，则称 $\{U_j\}_{j\in J}$ 为原先开覆盖的一个 **子覆盖** ；若特别地，$|J| < +\infty$，则称之为原先覆盖的一个 **有限子覆盖** 。 ♣

定义 3.3 (紧性)

设 X 为一个拓扑空间，若 $\forall X$ 的开覆盖，存在有限子覆盖，则称 X 是 **紧的** 。 ♣

下面几个例子说明了紧性对于分析学有一些方便的好处。

例 3.2（紧性的好处一：便于操作） 映射 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续，则 $f([a,b])$ 有界。

证： f 连续，则 f 局部有界，则 $\forall x\in[a,b], \exists x$ 的邻域 U_x, $s.t.\ f|_{U_x\cap[a,b]}$ 有界。

由于 $[a,b]$ 是紧集，所以对于任意的 $[a,b]$ 的开覆盖 $\bigcup_{x\in[a,b]} U_x \supset [a,b]$，则 $\exists x_1,\cdots,x_n$, $s.t.$ $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supset [a,b]$，即 $f([a,b])$ 有界。 □

例 3.3（紧性的好处二：可以高枕无忧地做积分（而不用判断其收敛性）） 如果对于 f 在 $\mathbb{R}$ 中区间 X（$X=[a,b)$ or (a,b) or $(a,+\infty)$）进行积分，可能会在边界处出现瑕点，例如广义积分 $\int_a^{\to+\infty} \mathrm{d}x$ 不一定收敛，所以这个符号不能够轻松地写下来。

如果 $f\in C([a,b])$，那么就可以对 f 在 $[a,b]$ 上进行积分运算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，而这个积分必然是收敛的。

注： 积分在拓扑学中有非常大的作用。可以借由积分来定义所谓的**拓扑不变量**。这是拓扑学研究的动机之一。

回忆之前数学分析中的情况，我们是说闭区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集，但是我们的定义是针对拓扑空间 X 来说的，因此差一个子集和子空间拓扑的区别，因此我们需要下面的概念来进行统一：

定义 3.4 (紧子集)

设 X 为一个拓扑空间，$Y\subset X$，如果 Y 在子控件拓扑下是紧的，则称 Y 为 X 的一个 **紧子集** 。 ♣

注： 以下三点相互等价：

1. Y 是紧集。
2. 对 $\forall Y$ 的开覆盖，不妨记为 $\{U_i\cap Y\}_{i\in I}$，其中 $U_i\subset_{open} X$，总可找到有限子覆盖 $U_{i_1}\cap Y, U_{i_2}\cap Y,\cdots,U_{i_n}\cap Y$, $s.t.$ $\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\cap Y = Y$
3. 对 $\forall X$ 中的覆盖 Y 的开子集族 $\{U_i\}_{i\in I}$，可找到 $U_{i_1},U_{i_2},\cdots,U_{i_n}$, $s.t.$ $\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\supset Y$

证： 这显然啊。 □

定理 3.1 (实数集 $\mathbb{R}$ 中的闭集是紧子集)

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ 赋予欧氏拓扑，是 $\mathbb{R}$ 中紧子集。 ♡

注： 首先我们知道，$\mathbb{R}$ 中的闭区间必然是有界的（主要是相对比 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集不一定是有界集（在某个方向一直没有界））。和下面的定理3.2相对应。

证： 任取 $\mathbb{R}$ 中的一族开集 $\{U_i\}_{i\in I}\supset[a,b]$，假设其根本不存在有限子覆盖。那么将这个闭区间 $[a,b]$ 一分为二，记其中的一个为 $[a_1,b_1]$，这个闭区间当然也没有有限子覆盖。这样一直下去，我们就得到一列闭区间族 $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$，里面的任何一个闭区间都不能被 $\{U_i\}_{i\in I}$ 中的有限个开集覆盖。且 $|b_n-a_n| = \frac{1}{2^n}\to 0(n\to+\infty)$。

根据闭区间套定理，$\exists c\in[a_n,b_n]\subset[a,b],\forall n$，但是对于仅仅一个点 c，当然有 $c\in U_{i_0}$。即：

$$\exists N,\ s.t.\ [a_N,b_N]\subset U_{i_0}$$

这与假设矛盾。 □

在这个例子里，$[a,b]$ 明显是闭集，也是 $\mathbb{R}$ 中的紧子集。反之，$\mathbb{R}$ 中的紧子集都长成 $[a,b]$ 这样的德行。不长这样的必然不是紧集，比如 $(0,1]$ 并非紧集[1]。那么自然就会发问：**一般拓扑空间 X 中的紧子集**

[1]这是因为 $\bigcap_{n=2}^{=\infty}(\frac{1}{n},2)\cap(0,1]=(0,1]$

是否都是闭集?

例 3.4（一般拓扑空间中的紧集不一定是闭集） 设 $X = \{0,1\}, \mathscr{F} = \{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$ 对于集合 $Y = \{0\}$，是 X 中紧集，但是并不是闭集（因为 $X \backslash Y = \{1\} \notin \mathscr{F}$ 即不是开集）。

很明显的直觉就是，这个玩意不乖是因为没有 T2 分离公理，所以我们隆重推出以下结论：

命题 3.1 (Hausdroff 空间中的紧集必然是闭集)

设 $Y \subset X$ 是拓扑空间，Y 是紧集，那么如果 X 是 Hausdroff 空间，则 Y 是闭集。

证： 即要证 $\forall x_0 \in X\backslash Y$，找到一个 $Y \subset_{open} X$, $s.t.\ x_0 \in U \subset X\backslash Y$。

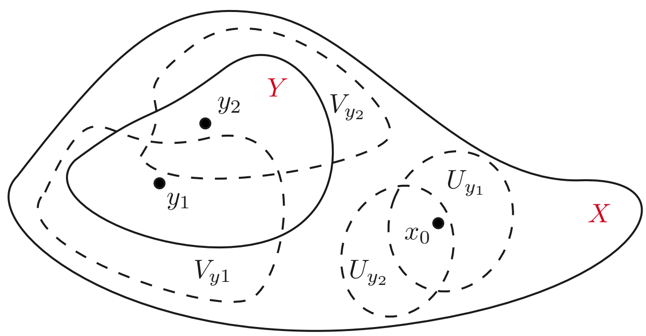

图 3.2: 命题 3.1 之示意图

任取 $x_0 \neq y_1 \in Y$，由于 X 是 Hausdroff 空间，则 $\exists V_{y_1}(y_1 \in V_{y_1}), U_{y_1}(x_0 \in U_{y_1})$, $s.t.\ V_{y_1} \cap U_{y_1} = \emptyset$，又由于 X 是紧集，任取 Y 的一个开覆盖 $\{V_{y_i}\}_i^\infty$ 存在有限子覆盖 $\{V_{y_i}\}_i^n$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \supset Y \tag{3.1}$$

同时取 $U = \bigcap_j U_{y_j}$，则

$$U \cap V_{y_i} = \left(\bigcup_j U_{y_j}\right) \cap V_{j_i} = \emptyset, \forall i$$

因此 $U \subset X\backslash(\bigcup_{i=1}^{n})V_{y_i}$，而又有式3.1，因此 $U \subset X\backslash Y$，得证。

□

命题 3.2 (紧集的闭子集是紧子集)

设 X 是拓扑空间，X 是紧集，若则 $Y \subset X$ 是闭子集，则 Y 是紧集。

证： 取 X 中 Y 的一族开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，即 $\bigcup_{i\in I} U_i \supset Y$，因为 Y 是闭集，所以 $U = X\backslash Y$ 是开集。又由于 X 是紧集，因此有限覆盖 $\{U_{i_j}\}_j^n$ 满足

$$(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}) \cup U = X$$

因此:

$$
\begin{aligned}
Y &= Y \cap X \\
&= Y \cap \left((\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}) \cup U \right) \\
&= (\bigcup_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap Y)) \cup (Y \cap U) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} (U_{i_j} \cap Y)
\end{aligned}
$$

因此 $Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$，得证。 □

定理 3.2 (欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的紧子集必然是有界闭集)

设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集 $\iff$ X 是有界闭集。 ♡

证: 下分两部分来证明:

[$\Rightarrow$]: 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，则 $X \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{\mathbb{R}^n}(0,i)$，则由于其紧性，$\exists n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，$s.t.\ X \subset \bigcap_{j=1}^{+\infty} B_{\mathbb{R}^n}(0,n_j) = B_{\mathbb{R}^n}(0,n_k)$，因此 X 有界；又由于 $\mathbb{R}^n$ 是 Hausdroff 空间，因此 X 闭集，得证。

[$\Leftarrow$]: 利用 闭集套定理 立得，或者利用下一节的 乘积拓扑 的性质。

□

3.2 乘积拓扑

3.2.1 一般般的乘积拓扑

实际上，在分析学中，我们已经接触到一些与乘积拓扑相关的例子。

例 3.5（$\mathbb{R}^2$ 中的闭矩形） 比如集合 $[a,b] \times [c,d] = \{(x,y)|a \le x \le b, c \le y \le d\}$，如下图所示:

例 3.6（$\mathbb{R}^3$ 中的圆柱体） 集合 $S^1 \times [0,1]$，其中 $S^1 = \{(s,y)|x^2+y^2=1,(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$。因此上述集合即为:

$$S^1 \times [0,1] = \{(x,y,z)|x^2+y^2=1, 0 \le z \le 1\}$$

即如下图所示:

例 3.7（轮胎面） $\mathbb{R}^3$ 中的轮胎面 T 赋予子空间拓扑同胚于乘积拓扑 $S^1 \times S^1$，轮胎面 T 如下:

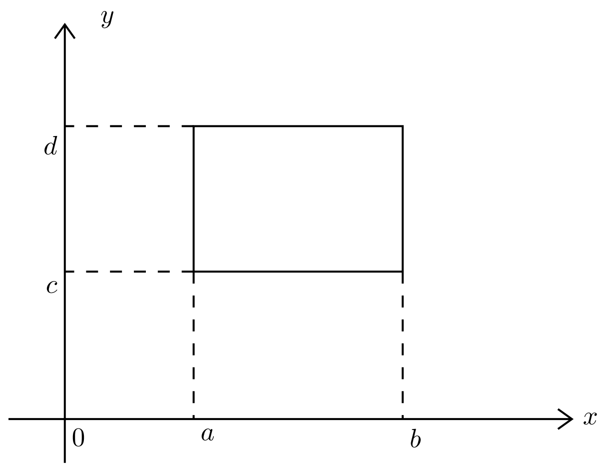

图 3.3: $\mathbb{R}^2$ 上闭矩形

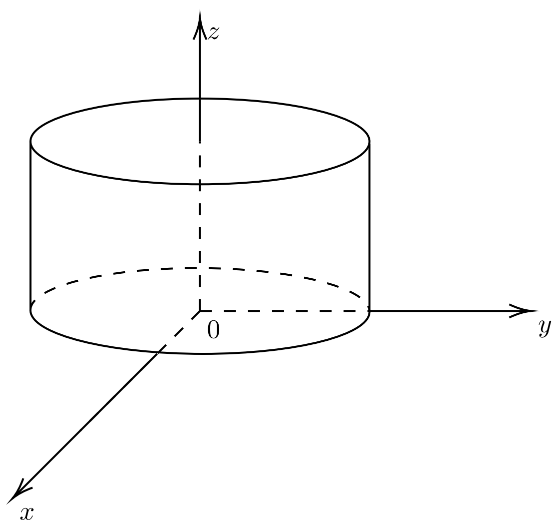

图 3.4: $\mathbb{R}^3$ 上圆柱体

其中 (x,y,z) 可以由两参数 (θ,α) 来决定，取第一个 S^1 为某点 (x,y,z) 向 xoy 平面做投影得到。投影点与 x 轴之夹角为 θ:

在小圆中，建立点 (x,y,z) 与 z 轴之间的夹角为 α:

这样我们可以看出映射 f:

$$
\begin{aligned}
S^1 \times S^1 &\longrightarrow T \\
(e^{i\theta}, e^{i\alpha}) &\longmapsto ((a + r\sin\alpha)\cos\theta, (a + r\sin\alpha)\sin\theta, r\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

这个映射是一个双射，因此是一个同胚。这说明 $S^1 \times S^1 \simeq T$ 。

下面我们给出乘积拓扑的定义:

定义 3.5 (乘积拓扑)

设 X, Y 为两个拓扑空间。定义 $\mathcal{B}$ 为 $X \times Y$ 上的如下子集族

$$\{U \times V | U \subset_{open}, V \subset_{open} Y\}$$

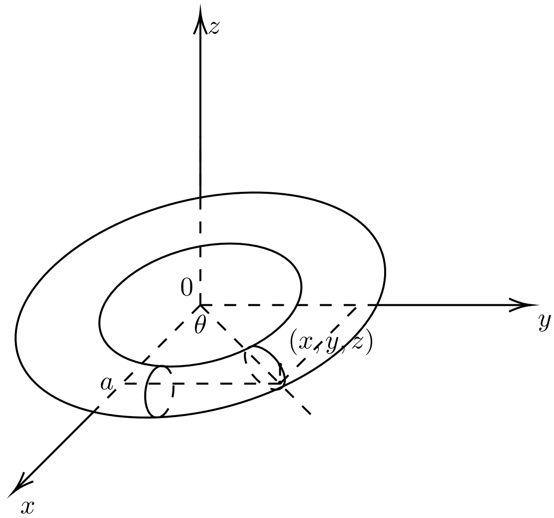

图 3.5: 轮胎面 T

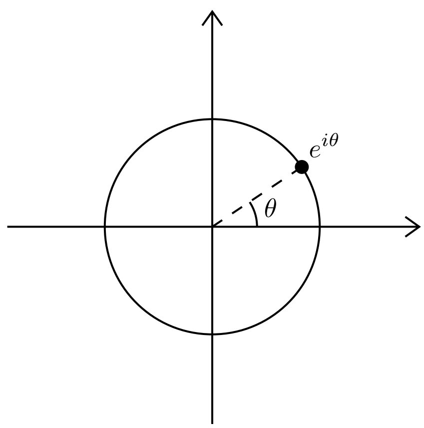

图 3.6: 第一个 S^1 球面

则 $\mathcal{B}$ 生成了 $X \times Y$ 上的一个拓扑，该拓扑称为 $X \times Y$ 上的 **乘积拓扑** 。 ♣

证： 即证明拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成了 $X \times Y$，即证以下两点：

1. $\bigcup\limits_{U \times V \in \mathcal{B}} U \times V = X \times Y$
2. $\forall U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$ 要证 $\forall (x, y) \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2), \exists U_3 \times V_3 \in$ $s.t.$ $x \in U_3 \times V_3 \subset (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$

很显然，第一点是显然的，因此我们只需要验证第二点即可。取 $U_3 \times V_3 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$。即：

$$
\begin{aligned}
(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) &= \{(x, y) | (x, y) \in U_1 \times V_1, (x, y) \in U_2 \times V_2\} \\
&= \{(s, y) | x \in U_1, x \in U_2, y \in V_1, y \in V_2\} \\
&= \{(x, y) | (x, y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)\} \\
&= (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)
\end{aligned}
$$

因此得证。 □

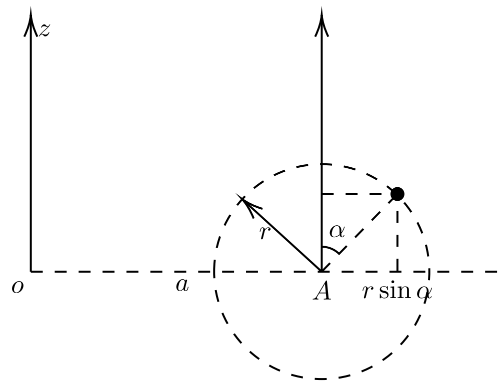

图 3.7: 第二个 S^1 球面

注: 按照上面对于乘积拓扑的定义，我们可以继续定义 n 次乘积的乘积拓扑:

定义 3.6

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个拓扑空间。那么定义他们的乘积拓扑空间为:

$$X_1 \times X_2 \times X_n = (((X_1 \times X_2) \times X_3) \times \cdots) \times) \times X_n$$

例 3.8（n 维欧氏空间中的闭矩体） n 维欧氏空间中的闭矩体:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

例 3.9（轮胎面） 实际上刚刚的例子中直接断言说同胚是不讲道理的，因为我们没有给予两个球面直乘之后的空间一个明确的拓扑结构。下面我们在单位球面 S^1 上考虑两个公转角 θ_1 与 θ_2，那么集合:

$$I_{\theta_1,\theta_2} = \{e^{i\theta} | \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$$

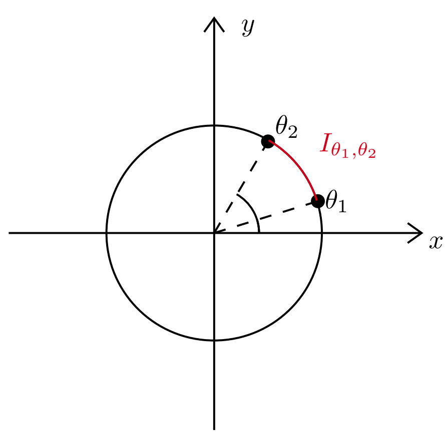

图 3.8: S^1 中的拓扑基

那么 I_{θ_1,θ_2} 为 S^1 的一个拓扑基。且 $\{I_{\theta_1,\theta_2} \times I_{\alpha_1,\alpha_2}\}$ 为 $S^1 \times S^1$ 的一个拓扑基。

3.2.2 乘积空间上的 Universal Property[2]

以上我们根据乘积空间的性质来定义了乘积拓扑空间，下面让我们挖掘更加一般的性质，定义范畴乘积的概念。

3.2.2.1 对于线性空间而言

设 V, W 为域 $\mathbb{K}$ 上的两个向量空间。构造 $V \times W$ 为一个 $\mathbb{K}$-线性空间:

1. $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
2. $\lambda \cdot (v, w) = (\lambda v, \lambda w)$

再定义 $V \times W$ 到线性空间 V, W 的两个投影为:

$$\begin{aligned} \pi_V : V \times W &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto v \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \pi_W : V \times W &\longrightarrow W \\ (v, w) &\longmapsto w \end{aligned}$$

那么 $(V \times W, \pi_V, \pi_W)$ 有如下的 Universal Property ：

对于任何一个线性空间 Z 以及线性映射 $f : Z \longrightarrow V, g : Z \longrightarrow W, \exists! h : Z \longrightarrow V \times W,\ s.t.$ 下列图表可交换:

$$\begin{tikzcd}
 & V \times W \arrow[dl, "\pi_V"'] \arrow[dr, "\pi_W"] \arrow[dd, "\exists! h"] & \\
V & & W \\
 & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

证： 定义映射 h 为:

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow V \times W \\ z &\longmapsto (f(z), g(z)) \end{aligned}$$

这个映射明显满足以上的图表交换条件，现在问题是这个映射是不是唯一的？答案必然是肯定的，假设另有一个线性映射 $\widetilde{h} : Z \longrightarrow V \times W$ 满足图表交换条件，那么我们有:

$$\pi_V \circ \widetilde{h} = f$$

$$\pi_W \circ \widetilde{h} = g$$

那么对于 $\forall z \in Z$，设 $\widetilde{h}(z) = (h_1(z), h_2(z))$，那么由于 π_V 和 π_W 是投影，以及上面的性质有:

$$f(z) = \pi_V(\widetilde{h}(z)) = h_1(z)$$

[2]中译为 **泛性质，有时也称为万有性。范畴论研究泛性质。**

$$g(z) = \pi_W(\widetilde{h}(z)) = h_2(z)$$

因此就是说明 $h(z) = (f(z), g(z)) = (h_1(z), g_1(z)) = \widetilde{h}(z), \forall z \in Z$。因此 $h = \widetilde{h}$。 □

3.2.2.2 对于群而言

设 G, H 是两个群，$G \times H$ 是这两个群的乘积群，定义乘积群中的乘法为：$\forall (g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ 有：$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$，还有这俩自然群同态：

$$\begin{aligned} \pi_1 : G \times H &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \\ \pi_2 : G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\longmapsto h \end{aligned}$$

那么 $(G \times H, \pi_1, \pi_2)$ 有如下的 Universal Property：

对于任何一个群 K 以及线性映射 $f : K \longrightarrow G, g : K \longrightarrow H, \exists!$群同态$h : K \longrightarrow G \times H$, $s.t.$ 下列图表可交换：

$$\begin{tikzcd}
& G \times H \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\exists! h"] & \\
G & & H \\
& K \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

证： 和之前线性空间中一样，对于 $\forall k \in K$，直接取 $h(k) := (f(k), g(k))$ 即可。 □

3.2.2.3 对于与拓扑空间而言

设 X, Y 是两个拓扑空间，$X \times Y$ 是其乘积拓扑空间，定义映射：

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \\ \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

引理 3.1

上定义的 π_1 和 π_2 是连续映射。 ♡

证： 只需证明映射 π_1 是连续映射即可，任取 $U \subset_{open} X$，那么其关于 π_1 的逆像为 $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$，这是开集。 □

引理 3.2

设 X,Y,Z 为仨拓扑空间，$X\times Y$ 为乘积拓扑空间，对于 $\forall f:Z\longrightarrow X\times Y$ 有：

$$f\text{连续} \iff \pi_1\circ f,\pi_2\circ f\text{连续}$$

证： 证明其充分必要即可：

[$\Rightarrow$]：由于 f 是连续映射以及引理3.1可知 π_1 和 π_2 也是连续映射。得证。

[$\Leftarrow$]：要证：$\forall$ 开集 $W\subset X\times Y, f^{-1}(W)$ 是开集。只要证 $\forall U\subset_{open} X, V\subset_{open} Y, f^{-1}(U\times V)$ 是开集。事实上：

$$\begin{aligned}f^{-1}(U\times V)&=\{z\in Z|f(z)=(\pi_1\circ f(z),\pi_2\circ f(z))\in U\times V\}\\&=\{z\in Z|\pi_1\circ f(z)\in U,\pi_2\circ f(z)\in V\}\\&=(\pi_1\circ f)^{-1}(U)\cap(\pi_2\circ f)^{-1}(V)\end{aligned}$$

这是开集，因此得证。

□

3.2.2.4 范畴与范畴的乘积

定义 3.7 (范畴)

一个 **范畴** （ category ）$\mathcal{C}$ 是指下面的数据：

1. 一些被称为 **对象** （ object ） 的东西所组成的集合 $\mathcal{O}b(\mathcal{C})$。
2. 一些被称为 **态射** （ morphism ） 的东西所组成的集合 $\mathcal{H}om(\mathcal{C})$。
3. 映射：

$$\begin{aligned}s(\textit{ source }):\mathcal{H}om(\mathcal{C})&\longrightarrow\mathcal{O}b(\mathcal{C})\\f&\longmapsto s(f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t(\textit{ target }):\mathcal{H}om(\mathcal{C})&\longrightarrow\mathcal{O}b(\mathcal{C})\\f&\longmapsto t(f)\end{aligned}$$

对于 $\forall f\in\mathcal{H}om(\mathcal{C}),s(f)=X,t(f)=Y$，记 $f:X\longrightarrow Y$，记 $\hom_{\mathcal{C}}(X,Y):=\{f\in\mathcal{H}om(\mathcal{C})|s(f)=X,t(f)=Y\}$

4. 态射的 **复合** $\circ$ （ composition ）：

$$\begin{aligned}\circ:\hom(X,Y)\times\hom(Y,Z)&\longrightarrow\hom(X,Z)\\(f,g)&\longmapsto g\circ f\end{aligned}$$

满足下列运算律：

1. **结合律** ：$\forall X,Y,Z,W$ 满足关系：

$$X\xrightarrow{\quad f\quad}Y\xrightarrow{\quad g\quad}Z\xrightarrow{\quad h\quad}W$$

有：

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$$

2. **恒等态射** ：$\forall X\in\mathcal{O}b(\mathcal{C}),\exists\, 1_X\ :X\longrightarrow X,\ s.t.\ \forall f:X\longrightarrow Y;g:Z\longrightarrow X$ 有 $f\circ 1_X=$

$f, 1_X \circ g = g$，并且恒等态射是唯一的。♣

定义 3.8 (态射的同构)

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，X, Y 为 (C) 中的两个对象，如果 $\exists$ 两个态射 $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow X\ s.t.\ f \circ g = 1_Y, g \circ f = 1_X$，那么称 X 与 Y 是 **同构的** 。♣

例 3.10（域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间范畴） 节3.2.2.1中所叙述的 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ 是 **域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间范畴** 。

例 3.11（群范畴） 节3.2.2.2中所叙述的 Grp 是 **群范畴** 。

例 3.12（拓扑空间范畴） 节3.2.2.3中所叙述的 Top 是 **拓扑空间范畴** 。

定义 3.9 (范畴乘积)

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，$x_1, X_2 \in \mathcal{O}b\mathcal{C}$，$X_1$ 与 X_2 的 **乘积** 是指如下数据：

1. $Y \in \mathcal{O}b((\mathcal{C}))$，其中记 $Y = X_1 \times X_2$
2. $\pi_1 : Y \longrightarrow X_1, \pi_2 : Y \longrightarrow X_2$，满足以下 Universal Property：
   $\exists Z \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$ 以及 $f : Z \longrightarrow X_1, g : Z \longrightarrow X_2, \exists!$ 态射 $h : Z \longrightarrow Y,\ s.t.$ 下列图表交换：

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\exists! h"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

♣

注： 如果 X_1 与 X_2 的乘积存在，则其在同构下唯一。假设 $(Y', \pi_1' : Y' \longrightarrow X_1, \pi_2' : Y' \longrightarrow X_2)$ 也满足以上 Universal Property：

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, shift left, "l"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& Y' \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[ur, "\pi_2'"'] \arrow[uu, shift left, "h"] &
\end{tikzcd}$$

那么 $h \circ h : Y' \longrightarrow Y'$

$$\begin{tikzcd}
& Y' \arrow[dl, "\pi_1'"'] \arrow[dr, "\pi_2'"] \arrow[dd, shift right=2, "1_{Y'}"'] \arrow[dd, shift left=2, "l \circ h"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& Y' \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[ur, "\pi_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

根据图很容易得到：

$$\pi_1' \circ (l \circ h) = (\pi_1' \circ l) \circ h = \pi_1 \circ h = \pi_1'$$

就得到：

$$1_{Y'} = l \circ h$$

类似可以得到：

$$h \circ l = 1_Y$$

因此就是说 Y' 和 Y 是同构的。

结论 对于拓扑空间 X_1, X_2，令 $X_1 \times X_2$ 为其乘积拓扑空间，我们已经证明 $(X_1 \times X_2, \pi_1, \pi_2)$ 为 X_1, X_2 在拓扑空间中的乘积。

3.2.3 乘积拓扑与紧性

引理 3.3

设 X 为一个拓扑空间，设 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基，则：

$$X\text{紧} \iff \forall\text{一族}\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{B}, \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\text{覆盖}X\text{，则}\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\text{存在有限子覆盖}$$

♡

证： 必要性是显然的，下只需证明充分性。

任取 X 的开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$，使得：

$$\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha = X$$

而由于 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基，就有：$V_\alpha = \bigcup_{U_{\alpha i}\in\mathcal{B}} U_{\alpha i}$，根据条件。就知道 $\exists U_{\alpha_1 i_1}, U_{\alpha_2 i_2}, \cdots, U_{\alpha_n i_n} \in \{U_{\alpha i}\}$, $s.t.\ \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j i_j} = X$，其中 $U_{\alpha_j i_j} \subset V_{\alpha_j}$，因此 $\bigcup_{j=1}^{n} V_j = X$。 □

命题 3.3 (紧集的直积集是紧集)

设 X, Y 是紧集，那么 $X \times Y$ 也是紧集。

♠

证： 任取 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $X \times Y$ 的一组开覆盖，任取 $x \in X$，作为单点集 $\{x\}$ 与 X 的乘积拓扑空间 $\{x\} \times Y \simeq Y$，而且由于 Y 是紧集得知 $\{x\} \times Y$ 也是紧集。

那么任取 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 $\{x\}\times Y$ 的开覆盖，那么其必存在有限子覆盖 $\{U_\alpha^x \times V_\alpha^x\}_{\alpha=1}^{n_x}$，令：

$$U^x = \bigcap_{j=1}^{n_x} U_j^x \subset_{open} X$$

那么

$$\bigcup_{x\in X} U^x = X$$

又由于 X 是紧集，因此 $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n\ s.t.\ X \subset \bigcup_{i=1}^{n} U^{x_i}$，那么再对 Y 做类似的事情，就得到一列乘积集合 $\{\{U_j^{x_i} \times V_j^{x_i}\}_{j=1}^{n_{x_i}}\}_{i=1}^{m}$，并且每一行 $U^{x_i}\times Y \subset \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} U_j^{x_i} \times V_j^{x_i}$，满足：

$$X\times Y \subset \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} U_j^{x_i}\times V_j^{x_i}$$

右侧乘积集合的个数是有限的，因此 $X\times Y$ 是紧集。 □

3.2.4 紧性与连续映射

命题 3.4 (紧性是一个拓扑不变量)

设 X 是紧集，$f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，那么 $f(X)$ 也是紧集。 ♠

注： 本命题的意思是**紧性在连续映射的作用下被保持**。也就是说，对于两个同胚的拓扑空间而言，这两个拓扑空间同具有紧性或者同不具有紧性。**紧性是一个拓扑不变量!**

证： 对于 $\forall f(X)$ 的一组开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}, U_\alpha \subset_{open} Y$，那么 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ 为 X 的一组开覆盖。由于 X 是紧集，因此 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,\ s.t.\ X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$，即：$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$。 □

推论 3.1

紧空间上的连续实值函数有界，并可以取到最值。 ♡

证： 设 X 是紧集，$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续映射，根据上命题3.4可知 $f(X)$ 是紧集，根据定理3.2可知 $f(X)$ 是有界闭集，下设 $S = \sup f(X), s = \inf f(X)$，由于 $f(X)$ 是闭集，集合的上确界和下确界都可在集合中取到。因此 $S, s \in f(X)$。 □

3.2.5 更多的紧性

定义 3.10 (极限点紧性)

设 X 为拓扑空间，如果 X 中的任意无限子集都有极限点，就称 X 是 **极限点紧**[a]的。

[a]By Munkers：在拓扑学早期，这种紧性被称为 **紧致性** 。如同我们在数学分析中证明的一样，不过在这里我们需要区分紧支集、紧致性、紧性、列紧性。 ♣

命题 3.5

紧性蕴含极限点紧性。

证： 设 X 是紧集，任取无限集合 $A\subset X$，假设 A 没有极限点，即：

$$\forall x\in X,\exists U_x\subset_{open} X,\ s.t.\ (U_x\backslash\{x\})\cap A=\emptyset$$

即 U_x 中最多只有 A 中的一个点。另一方面，由于 X 的紧性可以知道，任取 X 的一个开覆盖 $\{U_x\}_{x\in X}\supset X$，总存在有限子覆盖 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}=X\supset A$$

而上式左侧是有限并，每一个集合中做多只有 A 的一个点，所以左侧最多只有 A 集合中的 n 个点；右侧包含无限子集 A，因此有 A 中的无限多个点，这就矛盾！ □

例 3.13（极限点紧性与紧性不等价） 正整数集 $\mathbb{Z}_+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 上赋予离散拓扑；$Y=\{0,1\}$ 上赋予平凡拓扑，其直积集 $\mathbb{Z}_+\times Y$ 赋予乘积拓扑的条件下是极限点紧集，而非紧集。

证： 对于 $\forall\emptyset\neq A\subset\mathbb{Z}_+\times Y$，若 $(n,1)\in A$，那么 $(n,1)$ 是 A 的极限点。因此之当然是极限点紧集。但是其并非紧集，比如对于一组开集族 $\{\{n\}\times Y\}_{n=1,2,\cdots}$ 显然是 $\mathbb{Z}_+\times Y$ 的一组开覆盖，但是其并没有一个有限子覆盖。

□

定义 3.11 (列紧性)

设 X 为一个拓扑空间，如果对于 X 中的任何一个无限点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 都有收敛子列，就称 X 是一个 **列紧集** 。

命题 3.6

列紧性蕴含极限点紧性。

证： 对于列紧集 X 取任何无限集合 $A\subset X$，任取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 A 的一个点列，x_n 互不相同。则 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, $s.t.\ x_{n_k}\to x_0(k\to+\infty)$，因此 x_0 为 A 的极限点，因此 X 是极限点紧集。 □

例 3.14（列紧性与极限点紧性不等价） 对于实数集 $\mathbb{R}$，赋予 **右拓扑** ：$\mathscr{F}=\{(a,+\infty)|a\in\mathbb{R}\}\cup\emptyset$，明显 $(\mathbb{R},\mathscr{F})$ 是极限点紧集[3]。但是 $(\mathbb{R},\mathscr{F})$ 并非列紧集。

证： 直接取点列为 $x_n=-n,n\in\mathbb{N}$，假设其有收敛子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $s.t.\ x_{n_k}\to x_0(k\to+\infty)$，即：

$$\forall U\subset_{open}\mathbb{R}(x_0\in U),\exists N,\ s.t.\ \forall k>N,x_{n_k}\in U$$

但是实际上 $\forall U\subset_{open}\mathbb{R}$，都可以写成 $U=(a,+\infty),a<x_0$，那么必然存在 M, $s.t.\ \forall k>M,x_{n_k}<a,x_{n_k}\notin U$。 □

定理 3.3

在度量空间中，紧性、极限点紧性、列紧性互相等价。

[3]这是因为：任取 $\emptyset\neq A\subset\mathbb{R}$。设 $x_0\in A$，则 x_0-1 是 A 的一个极限点，这是因为此时 $\forall U\subset_{open}\mathbb{R}U$ 可以表示为 $(x,+\infty),x<x_0-1$，此时有：

$$x_0\in(U\backslash\{x_0-1\})\cap A\neq\emptyset$$

第 4 章 连通性

在这一节，我们要再引入另一个拓扑不变量，即连通性，连通性在复分析中有很高的出场率。

4.1 连通性与连通分支

4.1.1 连通性

为了考虑一个集合的连通性，我们先来考虑一集合不连通是一个什么情况。

定义 4.1 (连通性)

设 X 是一个拓扑空间，如果 X 可以被分解为两个非空开集的直和，就称 X 是 **不连通** 的。即：

$$X = U \sqcup V, U \subset_{open} X, V \subset_{open} X; U, V \neq \emptyset$$

♣

注: 由此可以看出，我们说一个集合是不连通的，是可以把它分解成两个独立的部分，这两个部分是既开又闭，因此每一个部分中的点、极限点都只被限定在这个部分之中，任何一个部分的点从该部分往任何地方跑，都不可以直接到达另一个部分。

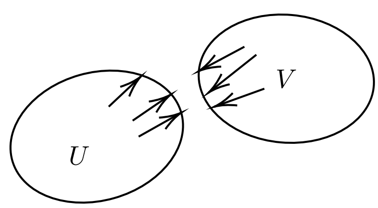

图 4.1: 集合 $X = U \sqcup V$ 是不连通的

例 4.1 (ℝ 中不是不连通的例子) 设集合 $X = [0, 2]$ 赋予之欧氏拓扑空间的子空间拓扑，X 是不是不连通的，这是因为 $X = [0, 2] = [0, 1) \sqcup [1, 2]$，其中比如 $[0, 1)$ 并非是子空间意义下的闭集（从而 $[1, 2]$ 也不是子空间意义下的开集）。对于其他的分解也都是这种情况。

例 4.2 (ℝ 中不连通的例子) 设集合 $X = [0, 1) \cup (1, 2]$，那么 $X = ((-1, 1) \cap X) \sqcup ((1, 3) \cap X)$，在子空间拓扑下两侧集合都是开集和闭集，因此 X 在子空间拓扑意义下是不连通的。

例 4.3 (圆扣掉两个点就不连通了) 设 $X = S^1 \backslash \{P, Q\} = (\{x < 0\} \cap X) \sqcup (\{x > 0\} \cap X)$，因此其是不连通的。

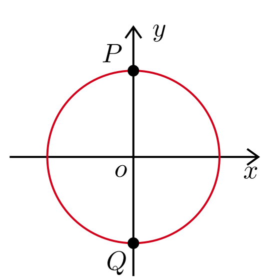

图 4.2: 例 4.3 中的 $X = S^1 \backslash \{P, Q\}$

4.2 道路连通性

第 5 章 商空间

第二部分

代数拓扑

第 6 章 基本群

第三部分

微分流形

第 7 章 微分流形

7.1 流形的定义与例

第四部分

杂七杂八

第 8 章 符号说明

本讲义有以下符号说明，便于我自己看不明白的时候过来回顾一下（

8.1 符号说明

1. $O \subset_{open} X$ 的含义是 O 是 X 的开子集。
2. $F \subset_{closed} X$ 的含义是 F 是 X 的闭子集。
3. $F =_{closed} X$ 的含义是 F 和 X 相等，且均为闭集。
4. 所有的弯体（比如 $\subset$）变直之后就表示更加强的区分效果（比如 $\sqsubset$，表示真被包含）。
5. 所有的包含采用类似 $\subset$ 的符号，若出现 $\subseteq$（一般不会），表示同一意思。

8.2 语法说明

1. 数学逻辑语言同国际标准。
2. 外加一些张氏古代汉语和标准中式英语（虽然掺杂一些少量标准英式英语）。

索　　引