《拓扑学》学习笔记

基于庄晓波老师的教学视频 and 一些不知道从哪里来的 idea

作者：张博涵

组织：张博涵

起著重庄赤奋若

版本：August 6, 2022

Github 地址：www.github.com/BHanZhang

摄于 2022 年 07 月 28 日 河南省 洛阳市 *with my my*

目录

第 1 章 拓扑空间

1.1 拓扑空间，开集

定义 1.1 (拓扑空间，开集)

设 X 为一个集合 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}(X)$（把 $\mathscr{F}$ 中的元素称为 X 中的 **开集** ），满足：

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$
2. U, V 是开集，那么 $U \cap V$ 是开集
3. $U_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个 **拓扑** ，$(X, \mathscr{F})$ 为一个 **拓扑空间** 。♣

注： 有时候这样写：“设 X 为拓扑空间”，这就意味着“X 为一个集合，且规定了 X 上的一个拓扑（指定了那些子集为开集）”。

注： 这里第二点可以更换为“有限个开集的交仍为开集”，这样的定义也与我们熟知的开集的性质相一致。

例 1.1（欧氏拓扑） 对于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，$\mathscr{F} = \{\mathbb{R}^n\text{在通常意义下的开集}, \emptyset\}$ 构成一个拓扑空间。

证： 验证其为拓扑空间，就是要验证三条：

1. 第一条显然成立：$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathscr{F}$；
2. 设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，要证 $U \cap V$ 为开集。任取 $x_0 \in U \cap V$，就有：
   (a). $x_0 \in U$ ，有 $\exists \delta_1$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_1) \subset U$
   (b). $x_0 \in V$ ，有 $\exists \delta_2$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_2) \subset V$
   择 $\delta \in \min(\delta_1, \delta_2)$，有 $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U \cap V$，那么 $U \cap V$ 是开集；
3. 任取 $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$，则必 $\exists \alpha_0 \in I\ s.t.\ x_0 \in U_{\alpha_0}$，则 $\exists \delta\ s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ ，于是 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

□

例 1.2（平凡拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **平凡拓扑** 。

例 1.3（离散拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **离散拓扑** 。

注： 以上两个例子说明，对于同一个集合，我们可以定义不同的拓扑，拓扑并不是唯一的，可以证明，平凡拓扑是 X 上最弱的拓扑，离散拓扑是 X 上最强的拓扑[1] 。

通过以后的学习可以知道，平凡拓扑具有较为“刚性”的拓扑结构，而离散拓扑具有较为“柔性”的拓扑结构。

定义 1.2 (度量空间)

设 X 为一个集合，$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下三条：

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$

[1] 如果 X, Y 是 T 上的两个拓扑，且 $X \subset Y$ 那么就称拓扑 X **弱** 于拓扑 Y，反之拓扑 Y **强** 于拓扑 X。

那么就称 X, ρ 为一个 **度量空间** ，ρ 为 X 上的一个 **度量** 。♣

例 1.4（度量空间诱导的拓扑） 设 (X, ρ) 为一个度量空间，定义 X 上开集 U 为:

$$x_0 \in U \iff \forall x_0 \in U, \exists \delta > 0,\ s.t.\ B(x_0, \delta) \subset U$$

定义拓扑 $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 给出了 X 上的一个拓扑（称之为 **度量 ρ 诱导的拓扑** ）。

注： 这个例子说明了度量可以诱导拓扑，“赋范出度量，天然诱拓扑”。

例 1.5（$\mathbb{R}$ 上连续函数空间上的连续度量诱导的拓扑） 定义 $X = C([a, b])$ 上的连续度量 ρ:

$$\begin{aligned} \rho : C([a, b]) \times C([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \rho(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

此时 ρ 诱导了 $C([a, b])$ 上的一个拓扑。

例 1.6 (除了“最大”和“最小”的拓扑之外，还存在“适中”的拓扑) 设 $X = \{0, 1\}$，$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ 是一个拓扑，$(X, \mathscr{F})$ 是一个拓扑空间。

1.2 更多的拓扑空间与子空间拓扑

定义 1.3 (子空间拓扑)

设 X 是一个拓扑空间，$Y \subset X$ 为 X 的一个子集，则 Y 上可以如下定义一个拓扑结构:

$$\mathscr{F} = \{U \cap Y | U \subset_{open} X\}$$

则 $\mathscr{F}$ 定义了 Y 上的一个拓扑空间结构，此结构成为 X 在 Y 上诱导的拓扑，或称 Y 被赋予 **子空间拓扑** 。♣

证： 取大集合为小集合即可，证明显然。□

例 1.7（n 维单位球面） n 维单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^n$ 赋予欧氏拓扑，其中 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x|| = 1\}$。

例 1.8（谈开集一定要说是在哪个拓扑的意义下是开集） 设 $[0, 1) \subset \mathbb{R}$，赋予 $[0, 1)$ 子空间拓扑，因为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集，$(\frac{1}{2}, 1)$ 也是 $\mathbb{R}$ 中开集，那么有以下结论成立:

- $[0, \frac{1}{2}) := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0, 1)$ 是开集。
- $(\frac{1}{2}, 1) := (\frac{1}{2}, 1) \cap [0, 1)$ 是开集。

正如我们在 $\mathbb{R}$ 中所规定的那样，上述两个例子分别应该不为开集和为开集，但是在子空间拓扑的意义下均为开集。这就说明了谈开集一定要说在哪个拓扑的意义下是开集。

定义 1.4 (连续性)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall\, U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是 **连续的** 。即连续映射到达域原像为开集。♣

例 1.9（离散拓扑为原像集的映射一定是连续映射） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，是 X 上的离散拓扑，

假设 $f : X \longrightarrow Y$，那么对于 $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U) \subset X$ 而 X 的所有子集都是开集（因为 X 的拓扑 $\mathscr{F}$ 是离散拓扑）。因此我们得知：**X 上的任意映射都是连续的**。

例 1.10（平凡拓扑上的连续映射只能到平凡拓扑） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，是 X 上的平凡拓扑，

设 Y 为一个拓扑空间，$f : X \longrightarrow Y$ 为一个连续映射，$f(X) := \{f(x)|x \in X\} \subset Y$（此处 $f(X)$ 作为子空间赋予子空间拓扑），则 $f : X \longrightarrow f(X)$ 仍是连续映射。下断言：$f(X)$ **在子空间拓扑下只能为平凡拓扑空间**。

假设 $f(X)$ 不是平凡拓扑空间，那么[2]$\exists U \sqsubset f(X)$，并且 $U \neq \emptyset$ 且为 $f(X)$ 中开集，即 $f^{-1}(U) \subset_{open} X$。

但是 X 中开集只有两种可能，即 X 和 $\emptyset$，因为 $f : X \longrightarrow f(X)$ 是满射，因此 U 中的任何一点都有原像（但是原像不一定唯一），因此 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$。因此 $f^{-1}(U) = X$。因此 $f(X) = U \sqsubset f(X)$ 相矛盾，因此：若 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，则 $f(X)$ 一定为平凡拓扑空间。

1.3 开集的反面，闭集

定义 1.5 (闭集)

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$，如果 $X \backslash F$ 是 X 中开集，则 F 称为 X 中的 **闭集** 。

根据开集的性质 (定义1.1) 可立马得到闭集的性质：

命题 1.1 (闭集的性质)

1. $\emptyset, X$ 是闭集
2. F, G 是闭集，那么 $F \cup F$ 是闭集
3. $F_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集。

1.3.1 闭集之刻画

定义 1.6 (极限点)

设 X 是一个拓扑空间，$A \subset X$，$\forall p \in X$，若 $\forall$ 包含 p 的开集 U 都有：

$$(U \backslash \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

则称 p 为 A 的一个 **极限点** 。而将集合 $\overline{A} = A \cup \{A\text{的极限点}\}$ 称为 A 的 **闭包** 。

例 1.11(欧式空间中有理点的极限点集为欧氏空间) $X = \mathbb{R}^3$, A 是 X 中的有理点(即 $A \in \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{Q}\}$)，那么 X 就是 A 的极限点集。

例 1.12（欧式空间中整数点的极限点集为空集） $X = \mathbb{R}^3$，$A = \mathbb{Z}$，那么 A 的极限点集为 $\emptyset$。

例 1.13（点集的极限点） 设 $X = \{0, 1\}$，$\mathscr{F} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ 则 X 的子集 A 有以下两种情况：

1. $A = \{0\}$:
   - 0 :$\forall$ 包含 $\{0\}$ 的开集 U，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 :$\forall$ 包含 $\{1\}$ 的开集 $U = \{0, 1\}$（只有这一个），$(U \backslash \{1\}) \cap A \neq \emptyset$，说明 1 是 A 的极限点。

   因此 1 为 $A = \{0\}$ 的极限点。
2. $A = \{1\}$:
   - 0 : 取包含 $\{0\}$ 的开集 $U = \{0\}$，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 : 包含 $\{1\}$ 的 X 中开集 $U = \{0, 1\}$，$(U \backslash \{1\}) \cap A = \emptyset$，说明 1 也不是 A 的极限点。

[2]这里符号 $\sqsubset$ 表示真被包含。

命题 1.2 (闭集的等价刻画)

设 X 为拓扑空间，$A\subset X$ 则：

$$A\text{是闭集} \iff \overline{A}=A$$

证： [$\Rightarrow$] 设 A 是闭集，要证 $\overline{A}=A$，显然 $A\subset\overline{A}$，下只需证 $\overline{A}\subset A$，即证 $X\backslash A\subset X\backslash\overline{A}$，因此对于 $p\in X\backslash A$ 都有 $p\in X\backslash\overline{A}$，因此即证：$\forall p\notin A$，$p$ 不是 A 的极限点。

事实上，A 闭集 $\Rightarrow X\backslash A$ 开集 $\iff \exists$ 开集 $U\subset A\backslash A, p\in U\Rightarrow (U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset\Rightarrow p$ 不是 A 的极限点。

[$\Leftarrow$] 设 $\overline{A}=A$，要证 A 是闭集。只要证 $X\backslash A$ 是开集，即：

$$\forall p\in X\backslash A, \exists\text{开集}U,\ s.t.\ p\in U\subset X\backslash A$$

由于 $p\notin A\Rightarrow p\notin\overline{A}$，则 p 不为 A 的极限点。因此 $\exists$ 开集 $U\subset X(p\in U)\ s.t.\ (U)\cap A=(U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset$，即 $p\in U\subset X\backslash A$ □

推论 1.1

$\overline{A}$ 为一个闭集。

证： 只要证 $X\backslash\overline{A}$ 为开集。由于 $\forall p\in X\backslash\overline{A}, p$不为$A$的极限点 则 $\exists$ 开集 $U\subset X\ s.t.\ p\in U$ 且由于 $p\notin A$ 则 $U\cap A=(U\backslash\{p\})\cap A=\emptyset$

则 $p\in U\subset X\backslash A$

则 $\forall q\in U$，U 为包含 q 的开集，又由于 $U\cap A=\emptyset$，因此 q 不是 A 的极限点，所以 $q\notin\overline{A}$，故 $U\subset X\backslash\overline{A}$。

因此 $X\backslash\overline{A}$ 为开集。 □

推论 1.2

$$\overline{A}=\bigcap_{F\supset_{closed}A}F$$

注： 由上推论可以知道，任何一个包含 A 的闭集都包含 $\overline{A}$，而根据 $\overline{A}=A\cup\{A\text{的所有极限点}\}$。因此 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小的闭集。

证： [$\supset$]: 由于 $\overline{A}\supset_{closed}A$，那么必然可以取到 $F_0=_{closed}\overline{A}$，此时 $\displaystyle\bigcap_{F\supset_{closed}A}F=F_0\cap\left(\bigcap_{F_0\neq F\supset_{closed}A}F\right)\subset A$。

[$\subset$]: 只要证 $\forall F\supset_{closed}A$ 都有 $F\supset\overline{A}$，即证 $X\backslash F\subset X\backslash\overline{A}$。

只要证 $\forall x\notin F, x$ 不为 A 的极限点。

事实上，F 是闭集，根据命题1.2可知 $F=\overline{F}\Rightarrow x\notin\overline{F}$，因此 x 不为 F 的极限点，而 $F\supset A$ 因此得证。 □

命题 1.3 (闭包运算的性质)

1. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
2. $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

证： 额，不知道什么高级方法，于是采用土办法就好了。

1. 只需要证明 $A\cup B$ 的极限点和 A 的极限点或 B 的极限点一致就好，事实上我们有如下的推理[3]：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cup B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cup B, \exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cup B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cup((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{或}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，或}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

2. 只需要证明 $A\cap B$ 的极限点就是 A 的极限点和 B 的极限点就好，事实上：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cap B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cap B, \exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cap((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\implies ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{且}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，且是}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

这一部分不是等号的问题主要出现在倒数第二步，因为两个非空集合的交不一定非空，而两个非空集合的并，一定非空。 □

例 1.14（上命题第二部分不能取等） 若 $A=[0,1), B=(1,2]$ 那么 $\overline{A\cap B}=\emptyset\sqsubset\{1\}=\overline{A}\cap\overline{B}$

例 1.15（单点集不一定是闭集，稠密） 设 $X=\{0,1\}$，$\mathscr{F}=\{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，于是拓扑空间的闭集就是直接取 $\mathscr{F}$ 在 X 中的补集，即 $\{\{1\},\emptyset,\{0,1\}\}$，对比之后明显可以看出来 $A=\{0\}$ 不是闭集（其他几个都是既开又闭）。根据我们前面例1.13的经验，$\{0\}$ 的极限点是 1，因此 $\overline{A}=A\cup\{A\text{的极限点}\}=\{0,1\}=X$。即取了闭包之后就取到全集，这种现象我们称之为**稠密**。

1.3.2 稠密

定义 1.7 (稠密)

设 X 为一个拓扑空间，$A\subset X$，若 $\overline{A}=X$ 则称 A 在 X 中 **稠密** 。如果 $Y\subset X$ 是 X 的拓扑子空间，如果还有 Y 的拓扑子空间 $Z\subset Y$ 那么我们分别记：

$\overline{Z_Y}$ ：Z 在 Y 中取闭包。

$\overline{Z_X}$ ：Z 在 X 中取闭包。

♣

注： 之所以会在不同背景集合中取闭包，最本质是因为某集合在不同背景集合中的极限点是不一样的。

例 1.16（同一集合在不同背景集合中取闭包不相一致） 设 $X=\mathbb{R}, Y=(0,2), Z=(0,1)$ 于是取闭包：$\overline{Z_X}=[0,1], \overline{Z_Y}=(0,1]$

例 1.17（有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中稠密） 因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的极限点集为实数集 $\mathbb{R}$，因此 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$。

那么很自然就产生疑问，是否取闭包的运算和子空间拓扑存在很多联系？这就是下面命题所解决的：

命题 1.4

设 X 是拓扑空间，Y 是 X 的拓扑子空间，Z 是 Y 的拓扑子空间。我们有：

$$\overline{Z_Y}=\overline{Z_X}\cap Y$$

♠

证： 验证这一问题，仍然从土方法走：

[3] 这里会利用到集合运算的分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 和 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[$\subset$] 即证 $\forall x \in \overline{Z_Y}$, $s.t.$ $x \in \overline{Z_X} \cap Y$，首先因为 $x \in \overline{Z_Y}$，因此 $x \in Y$ 于是只需证 $x \in \overline{Z_Y}$：

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 Y 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 X 中的极限点。事实上 $\forall x$ 在 X 中的开邻域 V，有：对于 X 在 Y 中的去心开邻域 $((V \cap Y)\backslash\{x\})$ 有：

$$
\begin{aligned}
&((V \cap Y)\backslash\{x\}) \cap Z \\
=&((V\backslash\{x\}) \cap Z) \cap Y \\
\subset& (V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

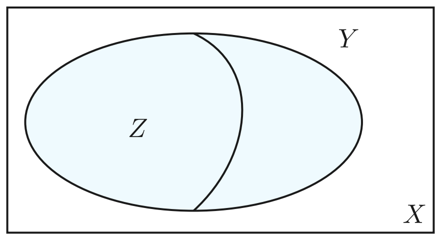

图 1.1: 命题 1.4 之集合关系图

[$\supset$] 即证 $\forall x \in \overline{Z_X} \cap Y$, $s.t.$ $x \in \overline{Z_Y}$，首先明显有 $x \in Y$ 于是仍分类讨论：

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 X 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 Y 中的极限点。事实上，任意在 Y 中的包含 x 的开集，由子空间拓扑，不妨设之为 $V \cap Y$，其中 $V \subset_{open} X (x \in V)$，因为 x 为 Z 在 X 中的极限点，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset$，又由于 $x \in Y$，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \cap Y = (V \cap (Y\backslash\{x\})) \cap Z \neq \emptyset$

□

更进一步，我们问以下的问题：

问题 1.1 设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset X$，问：$F \cap U$ 是否在 U 中稠密？

答案是否定的，因为如果偷鸡取 $U = X\backslash F$ 这件事就算寄了。于是为了排除这个情况，我们必须要求 U 是开集。如下命题：

命题 1.5

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset_{open} X$ 是 X 且赋予子空间拓扑，则 $F \cap U$ 在 U 中稠密。

证： 要证 $\overline{(F \cap U)_U} = U$ 根据命题1.4，即要证 $\overline{(F \cap U)_U} \cap U = U$，即要证 $U \subset \overline{(F \cap U)_X}$。即对 $\forall x \in U$ 要证 $x \in \overline{(F \cap U)_X}$。则分两类讨论：

1. $x \in F \cap U$ 显然成立
2. $x \notin F \cap U$ ，又由于 F 在 X 中稠密，那么 x 是 F 的极限点，任取 X 中开集 $V(x \in V)$，由于 U 是 X 中开集，因此 $V \cap U$ 也是 X 中开集，因为 x 是 F 的极限点，所以有：

$$
\begin{aligned}
&((V \cap U)\backslash\{x\}) \cap F \neq \emptyset \\
\iff& (V\backslash\{x\}) \cap (F \cap U) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

□

1.3.3 集合之解体

为了更好说话，引入以下概念：

定义 1.8 (内点，外点，边界点)

设 X 为一个拓扑空间，$A \subset X$ 定义：

- 定义 A 的 **内点集**： $int(A) := \{p \in A | \exists X 中开集 V (p \in V), V \subset A\}$
- 定义 A 的 **外点集**： $ext(A) := \{p \notin A | \exists X 中开集 V (p \in V), V \subset X \backslash A\} \iff int(X \backslash A)$
- 定义 A 的 **边界点集**： $\partial(A) := \{p \in X | \forall p 的开邻域 V, V \cap A \neq \emptyset. V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset\}$

♣

注： 根据以上定义，我们显然有：

$$X = int(A) \sqcup ext(A) \sqcup \partial(A)$$

例 1.18（一些显然的例子）

1. 设 $A = [0,1) \subset \mathbb{R}$ 那么：$\partial(A) = \{0,1\}, int(A) = (0,1), ext(A) = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$
2. (a). 设 $A = (0,1) \subset [0,1)$ 那么：$\partial(A) = \{0\}, int(A) = (0,1), ext(A) = \emptyset$
   (b). 设 $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ 那么：$\partial(A) = \{0,1\}, int(A) = (0,1), ext(A) = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$
3. 设 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 于是：
   (a). $\partial(D) = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
   (b). $int(D) = D$
   (c). $ext(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

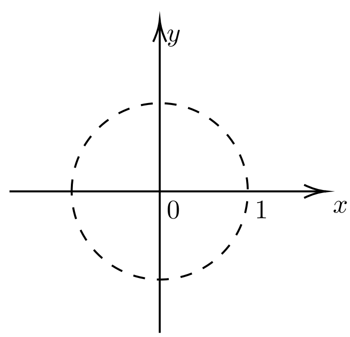

图 1.2: 例 1.18.3 之拓扑空间 D

4. 设 $A = [0,1] \subset \mathbb{R}^2$，此时 $\partial(A) = A, int(A) = \emptyset, ext(A) = X \backslash A$

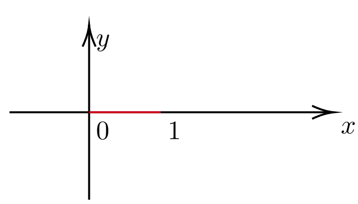

图 1.3: 例 1.18.4 之拓扑空间 A

1.4 拓扑空间的砖头—拓扑基

定义 1.9 (拓扑基)

设 X 是拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是一个由一些 X 中开集构成的集族，如果对 $\forall X$ 中开集 U，U 均可表为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并，则称 $\mathcal{B}$ 构成了 X 的一个 **拓扑基** 。

例 1.19 **（$\mathbb{R}^1$ 中的欧氏拓扑可以有不同的拓扑基）** 很明显，$\mathbb{R}^1$ 有一个拓扑基为 $\mathcal{B} = \{(a,b)|a < b\}$。令 $\mathcal{B}' = \{(a,b)|a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$，则 $\mathcal{B}'$ 也是 $\mathbb{R}^1$ 的一个拓扑基。

证： $\forall U \subset_{open} \mathbb{R}^1, \forall p \in U$，则存在 $a < p < b$ 使得 $(a,b) \subset U$，从而由有理数集的稠密性可知，$\exists (a_p, b_p) \in \mathcal{B}'$, $s.t.\ p \in (a_p, b_p) \subset U$ 即 $U = \bigcap\limits_{p \in U} (a_p, b_p)$。 □

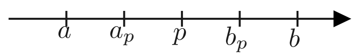

图 1.4: 例 1.19 之数轴

注： 由此可见，一个拓扑空间可以有诸多拓扑基，但是一个拓扑基是否唯一确定一个拓扑空间呢？答案是肯定的，这个结论将由以下讨论给出。

了解了定义，我们就需要探究一个拓扑基 $\mathcal{B}$ 之所以为拓扑基的等价条件。很明显，由拓扑基我们可以知道拓扑基的必要条件，如下面这个命题：

命题 1.6

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基，那么：

TB1 . $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U = X$

TB2 . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}\ s.t.\ U_1 \cap U_2$ 可以表示为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并。

证： 显然。 □

这个命题反过来也是正确的，即有以下的命题：

命题 1.7

设 X 为一个集合，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个由一些子集构成的集族，若 $\mathcal{B}$ 满足以上 TB1 、 TB2 两条，则 $\mathcal{B}$ 必为 X 上某个拓扑 $\mathscr{F}$ 的拓扑基。而且，$\mathscr{F}$ 是唯一的，称之为由拓扑基 $\mathcal{B}$ **生成** 的拓扑。

证： 定义 $\mathscr{F} = \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{B}$中若干元素之并$\} = \{\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha | U_\alpha \in \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\}$，我们所要证明的是以下两点：

1. $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个拓扑。事实上，我们有：
   (a). $\emptyset, X \in \mathscr{F}$（显然，由定义和条件 TB1 可以保证。）
   (b). $\mathscr{F}$ 对于任意并封闭是显然的（因为就是这样定义的。）
   (c). 对于 $\forall \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha, \bigcup\limits_{\beta \in J} V_\beta \in \mathscr{F}$，其中 $U_\alpha, V_\beta \in \mathcal{B}, \forall \alpha \in I, \beta \in J$ 那么有：

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} V_\beta\right) = \bigcap_{\alpha,\beta} (U_\alpha \cap V_\beta) \in \mathscr{F}$$

2. $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathscr{F}$ 上的一个拓扑基。

根据定义可知 $\mathcal{B}$ 也确实为拓扑 $\mathscr{F}$ 上的一个拓扑基。从构造来看，我们并没有规定在拓扑基 $\mathcal{B}$ 中的并是哪些，因此 $\mathscr{F}$ 是唯一的，因此命题得证。 □

例 1.20（$\mathbb{R}^2$ 的另一拓扑基） 明显来看，欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中的开球的全体构成的集合是 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基，根据我们在度量空间中所积攒的经验，$\mathbb{R}^2$ 中的开球和邻域是等价的，很自然的我们可以考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的开矩体的全体构成的集合 $\mathcal{B}' = \{(a,b)\times(c,d)|a<b, c<d\}\cup\{\emptyset\}$：

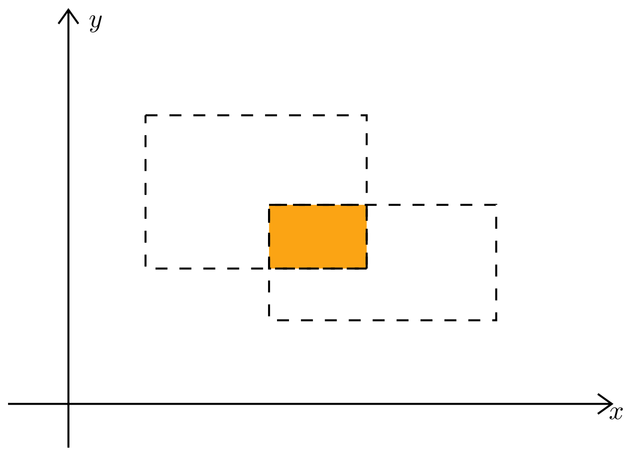

图 1.5: 例 1.20 之开矩体

很明显 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上某拓扑的拓扑基。

为了更好地描述两个拓扑基之间的关系，以便更加方便地研究两个拓扑基生成的拓扑空间之间的关系，我们对拓扑基引入如下的定义：

定义 1.10 (拓扑基之间的等价)

设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 是 **等价** 的，若：

1. $\forall U \in \mathcal{B}, p \in U$, 都 $\exists U' \in \mathcal{B}'$, $s.t.\ p \in U' \subset U$
2. $\forall V \in \mathcal{B}', p' \in V'$, 都 $\exists V \in \mathcal{B}'$, $s.t.\ p \in V \subset V'$

♣

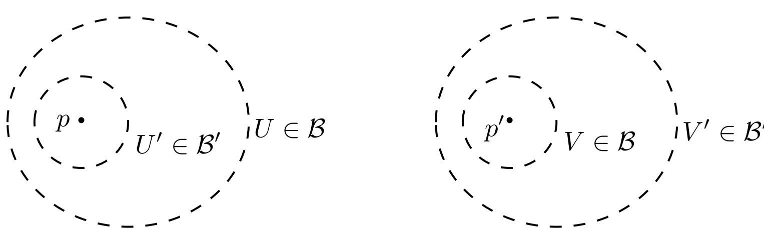

图 1.6: 定义 1.10 之说明

命题 1.8

设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，且 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 等价，则 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathscr{F}$ 与 $\mathcal{B}'$ 生成的拓扑 $\mathscr{F}'$ 相同。 ♠

证： 证明很简单，$\forall U \in \mathscr{F} \Rightarrow U = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha, U_\alpha \in \mathcal{B}$，又因为两个拓扑基等价，则有：

$$\forall U_\alpha, \forall p \in U_\alpha \Rightarrow \exists V_p \in \mathcal{B}',\ s.t.\ p \in V_p \subset U_\alpha$$

即：$U_\alpha = \bigcup\limits_{p \in U_\alpha} V_p \in \mathscr{F}'$，即 $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathscr{F}'$，则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$

同理，$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$，因此 $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ □

为了更好的使用以上拓扑基的等价条件，我们可以篡改 TP2 为以下的 TP2'：

TP2' . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall p \in U_1 \cap U_2, \exists U_p \in \mathcal{B},\ s.t.\ p \in U_p \subset U_1 \cap U_2$

证： 这个的验证也十分显然。 □

第 2 章 连续映射

研究点集拓扑的主要动机就是从更加一般的观点来定义连续性、紧性和连通性。下面三章就是在做这个工作。这一章，先研究一般的连续映射[1]。

2.1 连续映射

2.1.1 连续映射与其等价刻画

首先，我们重申连续性的定义：

定义 2.1 (连续映射)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是**连续映射**。

♣

我们有下面这俩显然的命题：

命题 2.1 (连续映射之复合是连续映射)

设 X, Y, Z 是三个拓扑空间，定义连续映射 $f : X \longrightarrow Y$，$g : X \longrightarrow Y$，则 $gf : X \longrightarrow Z$ 是连续映射。

♠

证： 对于 $\forall U \subset_{open} Z$，我们有 $(g \cdot f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$，由于 g 是连续映射，则 $g^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集；又由 f 是连续映射，所以 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 X 中开集。 □

命题 2.2 (连续映射之限制是连续映射)

设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，$A \subset X$ 并赋予 A 以子空间拓扑，那么 $f|_A : A \longrightarrow Y$ 是连续映射。

♠

证： $\forall U \subset_{open} Y$, 因为赋予 A 以子空间拓扑，所以有 $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$

又由于 f 是 $X \longrightarrow Y$ 的连续映射，所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集，所以 $A \cap f^{-1}(U)$ 就为 A 中开集。□

命题 2.3 (连续映射之嵌入是连续映射)

设 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，像集 $f(X)$ 赋予子空间拓扑，则 $f : X \longrightarrow f(X)$ 也是连续映射。

♠

证： $\forall f(X)$ 中开集，由于子空间拓扑，则可设其形如 $U \cap f(X), U \subset_{open} Y$，那么自然有：

$$f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \subset_{open} X$$

因此得证。 □

例 2.1（拓扑上的恒等变换是连续映射） 设 X 为拓扑空间，X 上的恒等映射：

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto x$$

[1] 值得强调的是，在尤承业老师的《基础拓扑学》中 36 页提到，除此之外还有**可数性**、**分离性**，以之来弥补拓扑空间的一些不足。这些也贯穿在这几章中出现。

这个映射显然是个连续映射。

例 2.2（拓扑上的嵌入映射是连续映射） 设 X 为拓扑空间，$A \subset X$ 并赋予子空间拓扑，那么映射：

$$\mathrm{i}_A : A \longrightarrow X$$
$$a \longmapsto a$$

这个映射显然也是个连续映射。

例 2.3（constant map 是连续映射） 设 X 为拓扑空间，Y 是一个单点集，那么映射

$$f : X \longrightarrow Y$$

是一个连续映射。

为了更好地刻画连续映射，我们有连续映射的以下等价命题：

命题 2.4

下列命题等价：

1. $f : Z \longrightarrow Y$ 是连续映射。
2. $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 是开集。
3. 设 $\mathcal{B}$ 为 Y 的一个拓扑基，$\forall U \in \mathcal{B}, f^{-1}(U)$ 是开集。
4. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, A \subset X$
5. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}), \forall B \subset Y$
6. $\forall F \subset_{closed} Y, f^{-1}(F)$ 是闭集。

注： 以上命题说明了对于一个连续映射，开集的原像是开集，闭集的原像是闭集。并且对于其拓扑基也是适用的。

证： 下面开始着手证明这个命题，我们采取循环的办法进行证明：

[2 ⇒ 3]：显然的。

[3 ⇒ 4]：$\forall y \in f(\overline{A})$ 要证 $y \in \overline{f(A)}$。那么对与 $\forall y = f(x), x \in \overline{A}$ 作以下讨论：

(a). $x \in A$，此时 $y \in f(A) \subset \overline{f(A)}$，显然成立。

(b). $x \notin A$，这时就说明 x 是 A 的一个极限点。那么我们再对到达域进行讨论：

I. $y \in f(A)$，此时的证明依旧是显然的。

II. $f(x) = y \notin f(A)$，此时要证 y 为 $f(A)$ 的一个极限点。如上图，$\forall U \subset_{open} \mathcal{B}(y \in U)$，

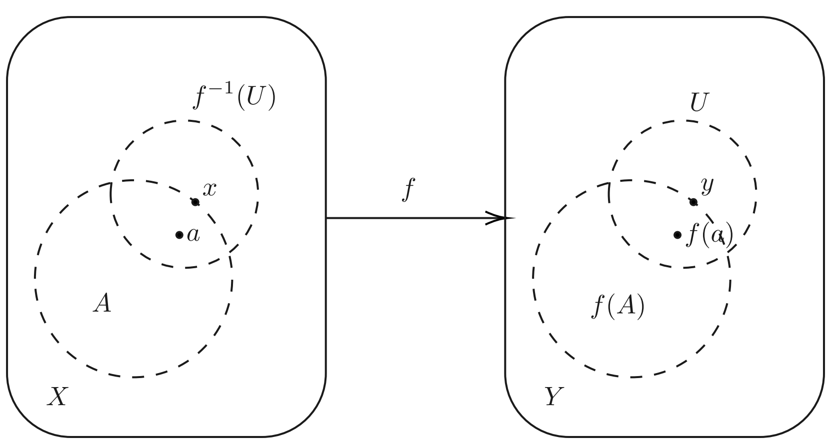

图 2.1: 命题 2.3 之证明图示

由 2 可知 $f^{-1}(U)$ 是开集，又由于 $x \in f^{-1}(U)$ $s.t.$ $f(x) = y \in U$，因此 $x \in f^{-1}(U)$。另外由于 $\exists x \in f^{-1}(U)$，则有：

$$(f^{-1}(U) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

这说明除了 x 外，$\exists a \in (f^{-1}(U)) \cap A$，即 $f(a) \in U, f(a) \in f(A)$，因此 $U \cap f(A) \neq \emptyset$，又由于 $y \notin f(A)$，即 $(U \backslash \{y\}) \cap f(A) \neq \emptyset$，因此 y 是 $f(A)$ 的极限点。

[$4 \Rightarrow 5$]：直接在 4 中取 $A = f^{-1}(B)$，那么立马有：

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = B \subset \overline{B}$$

因此两边作用 f^{-1} 则得证。

[$5 \Rightarrow 6$]：$\forall F \subset_{closed} Y$，根据 5，然后由于 F 是闭集，所以 $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{F}) = f^{-1}(F)$，而这一等式的反向是自然成立的，所以有 $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$。因此 $f^{-1}(F)$ 是闭集。

[$6 \Rightarrow 2$]：任取 $U \subset_{open} Y$，注意到 $f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(Y \backslash U) = X$，这里的无交并是因为 f 是映射。因此立马可以得到

$$f^{-1}(U) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash U)$$

由于 $f^{-1}(Y \backslash U)$ 是闭集，因此 $f^{-1}(U) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash U)$ 是开集。

□

2.1.2 拓扑空间中的极限与 Hausdorff 空间

研究连续性，是和极限密不可分的，下面开始定义极限。

定义 2.2 (极限)

设 X 是一个拓扑空间，$\{x_n\} \subset X$ 是 X 内的一个序列，如果对于 $\forall U \subset_{open} X (x \in U), \exists N, s.t. \forall n > N, x_n \in U$，则把 $x \in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个 **极限** 。♣

注： 以上之所以说定义出来的极限是"一个"极限。是因为由此定义出的极限不唯一，其根本在于拓扑空间 X 中的点不一定可以分离，也就是所谓的**分离性**不一定存在。下面给出一个例子来说明这点。

例 2.4（定义2.2中定义出的极限并不唯一） 设 $X = \{0,1\}, \mathscr{F} = \{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，设 $x_n = 0, n = 1, 2, \cdots$，因此：$\lim\limits_{n} x_n = 0$ 是显然的，并且由于 $U = \{0, 1\}$ 是唯一包含 1 的开集，所以 $\lim\limits_{n} x_n = 1$。因此这个极限有两个值。

这样就非常的不好啊，仔细想来，在 $\mathbb{R}$ 中我们可以有唯一的极限，这是因为 $\mathbb{R}$ 很牛，里面有很多结构，比如有欧氏度量，而且还是全序域，还有线性结构。一般的拓扑空间不能做到极限唯一，肯定是因为其少了什么东西，这种东西就是所谓的**分离性**。增加的方法有很多，比如下面的 T2 分离公理。

定义 2.3 (Hausdorff 空间)

设 X 为一个拓扑空间，如果 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \exists$ 开集 U_1, U_2, $s.t.$ $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，则称 X 为一个 Hausdorff 空间 [a]。

[a] 这也称为拓扑空间 X 满足 T2 **分离公理** 。♣

命题 2.5

设 X 为一个 Hausdorff 空间，$\{x_n\} \subset X$ 则若 x_n 的极限存在，则 $\{x_n\}$ 的极限唯一，并记之为 $\lim\limits_n x_n$。

证： 反设 $\lim\limits_n x_n = y_1$ 和 $\lim\limits_n x_n = y_2 \neq y_1$ 同时成立，那么根据定义就 $\exists N = \max\{N_1, N_2\}$ $s.t.$ 对 $\forall n > N, x_n \in U_1$ 和 $x_n \in U_1$ 同时成立，又由于 X 为一个 Hausdorff 空间，则 $x_n \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$，矛盾。□

例 2.5（例2.4中极限不存在的原因） 设 $X = \{0, 1\}, \mathscr{F} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$，则 $\mathscr{F}$ 不是 Hausdorff 空间。

这是因为取 $y_1 = 0, y_2 = 1$，那么 $y_2 \in \bigcup\limits_{open}$ 只只存在一种情况：$y_2 \in \{0, 1\}$，此时 $U \cap \{y_1\} = \emptyset$。

例 2.6（度量空间都是 Hausdorff 空间） 设 (X, ρ) 为一个度量空间，$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，设 $\rho = \rho(x_1, x_2) > 0$，令 $U_1 = B(x_1, \dfrac{\rho}{2}), U_2 = B(x_2, \dfrac{\rho}{2})$，那么 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$。更加准确一点儿说就是，反设 $x \in U_1 \cap U_2$，

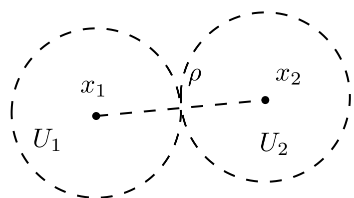

图 2.2: 例 2.6 之图示

$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, x_2) \leq \dfrac{\rho}{2} + \dfrac{\rho}{2}$，矛盾！

在分析学中，如果一个函数连续，那么说明函数符号和极限号是可以交换的，即极限号可以取到函数里面去。即：

$$f(x)\text{连续} \;\Rightarrow\; \lim_{\mathcal{B}} f(x) = f(\lim_{\mathcal{B}} x)$$

命题 2.6

设 X, Y 皆为 Hausdorff 空间，映射 $f : X \longrightarrow Y$ 是连续映射，$\{x_n\} \subset X, \lim\limits_n x_n = x_0, \lim\limits_n f(x_n) = y_0$，则 $\lim\limits_n f(x_n) = f(\lim\limits_n x_n) \in Y$

证： 这个证明很显然，根据定义，我们只需要证明 $\forall U \subset_{open} Y(f(\lim\limits_n x_n) \in U)$，则 $\exists N, n > N, f(x_n) \in U$。

任取 $U \subset_{open} Y(f(\lim\limits_n x_n) \in U)$，由于 f 是连续映射，所以必然 $\lim\limits_n x_n \in f^{-1}(U) \subset_{open} X$，所以就有：$\exists N,\ s.t.\ n > N, x_n \in f^{-1}(U)$ 即 $f(x_n) \in U$。 □

定义 2.4 (同胚)

设 X, Y 是两个拓扑空间，$f : X \longrightarrow Y$ 如果：

1. f 是双射。
2. f 连续。
3. f^{-1} 连续。

那么就称映射 f 为一个 **同胚**（homeomorphism）。

在这个定义中，2 和 3 真是十分奇怪，怎么会有连续映射的逆映射不连续的呢？下面给出了一个复变函数中的例子来进行说明。

例 2.7（存在连续映射之逆映射不连续） 设映射为：

$$
\begin{aligned}
f : [0,1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
t &\longmapsto e^{2\pi i t}
\end{aligned}
$$

该映射之逆映射不连续。

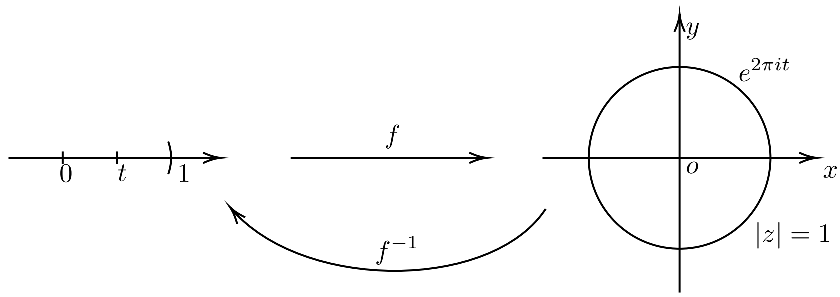

图 2.3: 例 2.7 中的映射

这是为什么呢，很显然，该映射 f 是一个连续映射，但是 f^{-1} 不连续，这是因为从 $t=0$ 按照逆时针走，是 t 自 0 增大的过程，但是若顺时针走动，幅角从 0 突然变到比 2π 小一点点，t 会由 0 瞬间变到 1 的周围，导致不连续的事情发生。

例 2.8（球极投影） 考虑 $S^2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$，北极点为 $P=(0,0,1)$。映射：

$$
\begin{aligned}
h : S^2 \backslash P &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y,z) &\longmapsto (u,v)
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{R}^2$ 赋予欧氏拓扑，而 $S^2\backslash P$ 赋予子空间拓扑。下面说明映射 h 是一个同胚，需说明三点：

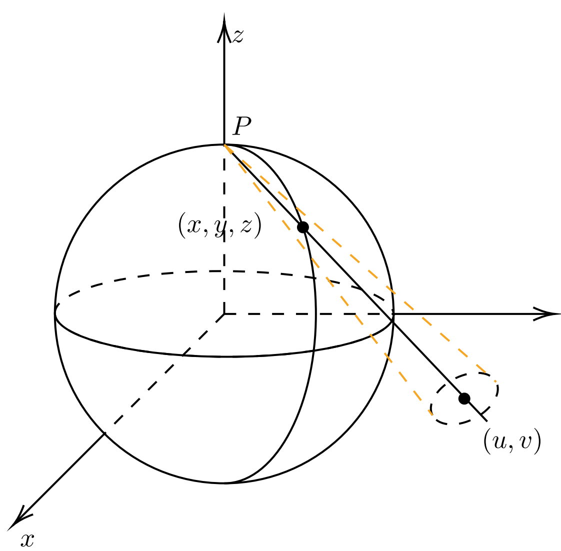

图 2.4: 球极投影

1. 从 h 的构造来看，h 显然是双射。
2. 从 h 的构造来看，h 也是连续映射（把 $S^2\backslash P$ 中的开集映为 $\mathbb{R}^2$ 中的开球）
3. 下说明 h^{-1} 也是连续映射，观察到 $(0,0,1),(x,y,z),(u,v,0)$ 是三点共线，因此 $\exists\lambda \neq 0$，并且有关

系式：

$$\lambda(x,y,z-1)=\lambda(u,v,-1)$$

解出 $x=\lambda u, y=\lambda v, z=1-\lambda$，并考虑 (x,y,z) 在球 $x^2+y^2+z^2$ 上，就有：

$$\lambda^2u^2+\lambda^2v^2+(1-\lambda)^2=1$$

因此同除 $\lambda\neq 0$，得到：

$$\lambda=\frac{2}{u^2+v^2+1}$$

这样就知道了 h^{-1} 应该满足下关系式：

$$\begin{aligned} h^{-1}:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2\backslash\{P\}\\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)\end{aligned}$$

现考虑映射 f：

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (u,v) &\longmapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\frac{2v}{u^2+v^2+1},\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)\end{aligned}$$

很明显 f 是一个连续映射。根据我们的命题2.3可知，h^{-1} 也是连续映射。

2.2 充满整个空间的曲线-Peano[2]曲线

本节将给出一个在分析学、拓扑学中都很重要且著名的例子—Peano 曲线。

例 2.9（Peano 曲线） 设 $f:[0,1]\longrightarrow X$ 是一个连续映射，称之为一个 **曲线** 。其中 X 设定为三角形 $\triangle$（边长为 1），取 $\mathbb{R}^2$ 的子空间拓扑。按照如下方式对 Peano 曲线进行绘制：

$$f:[0,1]\longrightarrow X$$

f_1 是这副德行（让点“匀速率游走为红色的线”）：

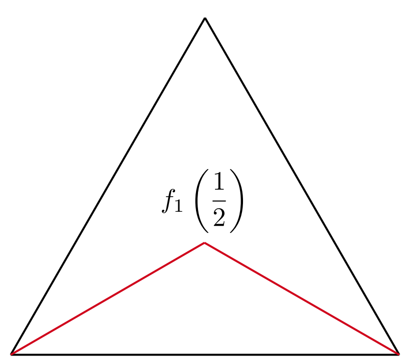

图 2.5: Peano 曲线第一步 f_1

接着，把整个三角形按照中点进行连接起来，这样就形成了 4 个小的并且全等的三角形。然后在每一个三角形里填充 f_1，但是要注意顺序，f_2 如下所示：

[2]朱塞佩 · 皮亚诺（意大利语：Giuseppe Peano；1858 年 8 月 27 日 − 1932 年 4 月 20 日）是意大利数学家、逻辑学家、语言学家。

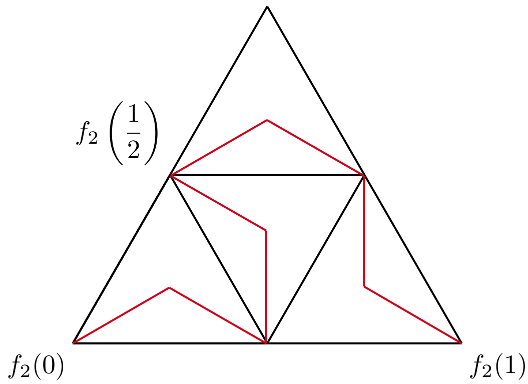

图 2.6: Peano 曲线第二步 f_2

然后对其中每一个小三角形按照如下替换规则进行替换：

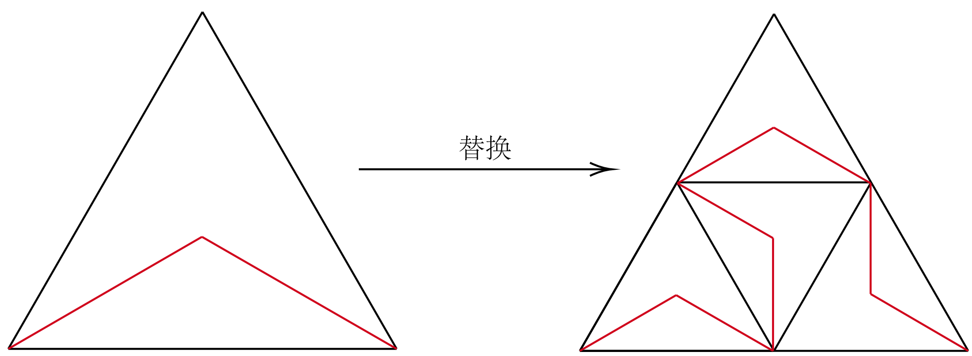

图 2.7: Peano 曲线构筑规则

这样我们就得到了 f_3，以此类推...

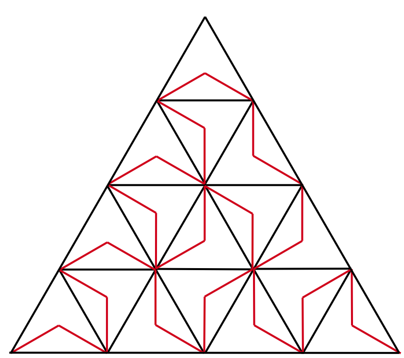

图 2.8: Peano 曲线第三步 f_3

这样一直下去，由于匀速率，f_n 中小三角形的边长为 $\frac{1}{2^{n-1}}$，那么我们有以下断言：

命题 2.7 (Peano 曲线)

1. $f_n : [0,1] \longrightarrow \triangle$ 并且有：$f_n \rightrightarrows: [0,1] \to \triangle$，映射 f 是连续映射，将之称为 Peano **曲线**。
2. $f([0,1]) = \triangle$

证： 我们来一条一条证明：

1. $f(t)$ 是匀速率进行移动，相比较 f_{n+1} 和 f_n，在 f_{n+1} 中的某一点一定要落入比它大四倍的 f_n 中。因此我们有 $||f_{n+1}(t) - f_n(t)|| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$。
   而 f_n 的边长为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$，这就说明在时刻 t，点一定移动到某个小三角形里，三角形中两点的欧氏距离不超过三角形的边长，即：$\forall m \geq n+1, ||f_m(t) - f_n(t)|| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}, \forall t \in [0,1]$。即：
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N,\ s.t. \ \forall n, m > N, ||f_m(t) - f_n(t)|| \leq \varepsilon, \forall t \in [0,1]$$
   因此在 $\mathbb{R}^2$ 中,$\{f_n(t)\}$ 是一致收敛的。那么 f 是一个连续映射。
2. $\forall P \in \triangle, \forall n \in \mathbb{N}$，通过对 $\triangle$ 的边长进行 2^{n-1} 等分，就得到边长为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 的小三角形。则 P 必然落在一个这样的小三角形里，对于 f_n，必 $\exists t_n, ||f_n(t_n) - P|| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$，根据第一点的议论，我们又有 $\forall m \geq n+1, ||f_m(t) - f_n(t)|| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}, \forall t \in [0,1]$，因此：
   $$\begin{aligned} 0 \leq ||f(t_n) - P|| &\leq ||f(t_n) - f_n(t_n)|| + ||f_n(t_n) - P|| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$
   当 $n \to +\infty$ 时，$f(t_n) \to P(n \to +\infty)$，因此 P 为 $f([0,1])$ 的极限点。
   事实上，在欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中，闭区间 $[0,1]$ 是紧集，因此连续映射 f 映射紧集得到的项还是紧集，即欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 的闭集。因此 $P \in f([0,1])$，即 $f([0,1]) = \triangle$。

□

第 3 章 紧性

第 4 章 连通性

第 5 章 符号说明

本讲义有以下符号说明，便于我自己看不明白的时候过来回顾一下（

5.1 符号说明

1. $O \subset_{open} X$ 的含义是 O 是 X 的开子集。
2. $F \subset_{closed} X$ 的含义是 F 是 X 的闭子集。
3. $F =_{closed} X$ 的含义是 F 和 X 相等，且均为闭集。
4. 所有的弯体（比如 $\subset$）变直之后就表示更加强的区分效果（比如 $\sqsubset$，表示真被包含）。
5. 所有的包含采用类似 $\subset$ 的符号，若出现 $\subseteq$（一般不会），表示同一意思。

5.2 语法说明

1. 数学逻辑语言同国际标准。
2. 外加一些张氏古代汉语和标准中式英语（虽然掺杂一些少量标准英式英语）。