《拓扑学》学习笔记

基于庄晓波老师的教学视频 and 一些不知道从哪里来的 idea

作者：张博涵

组织：张博涵

起著重庄赤奋若

版本：August 3, 2022

Github 地址：www.github.com/BHanZhang

摄于 2022 年 07 月 28 日 河南省 洛阳市 *with my my*

目录

第 1 章 拓扑空间

1.1 拓扑空间，开集

定义 1.1 (拓扑空间，开集)

设 X 为一个集合 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}(X)$（把 $\mathscr{F}$ 中的元素称为 X 中的 **开集**），满足：

1. $\emptyset, X \in \mathscr{F}$
2. U, V 是开集，那么 $U \cap V$ 是开集
3. $U_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的一个 **拓扑**，$(X, \mathscr{F})$ 为一个 **拓扑空间**。

注： 有时候这样写："设 X 为拓扑空间"，这就意味着"X 为一个集合，且规定了 X 上的一个拓扑（指定了那些子集为开集）"。

注： 这里第二点可以更换为"有限个开集的交仍为开集"，这样的定义也与我们熟知的开集的性质相一致。

例 1.1（欧氏拓扑） 对于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，$\mathscr{F} = \{\mathbb{R}^n$在通常意义下的开集$, \emptyset\}$ 构成一个拓扑空间。

证： 验证其为拓扑空间，就是要验证三条：

1. 第一条显然成立：$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathscr{F}$；
2. 设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，要证 $U \cap V$ 为开集。任取 $x_0 \in U \cap V$，就有：
   (a). $x_0 \in U$，有 $\exists \delta_1$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_1) \subset U$
   (b). $x_0 \in V$，有 $\exists \delta_2$, $s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta_2) \subset V$
   择 $\delta \in \min(\delta_1, \delta_2)$，有 $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U \cap V$，那么 $U \cap V$ 是开集；
3. 任取 $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$，则必 $\exists \alpha_0 \in I\ s.t.\ x_0 \in U_{\alpha_0}$，则 $\exists \delta\ s.t.\ x_0 \in B(x_0, \delta) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$，于是 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ 是开集。

□

例 1.2（平凡拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **平凡拓扑**。

例 1.3（离散拓扑） 设 X 是一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 显然是 X 上一个拓扑，称之为 **离散拓扑**。

注： 以上两个例子说明，对于同一个集合，我们可以定义不同的拓扑，拓扑并不是唯一的，可以证明，平凡拓扑是 X 上最弱的拓扑，离散拓扑是 X 上最强的拓扑[1]。

通过以后的学习可以知道，平凡拓扑具有较为"刚性"的拓扑结构，而离散拓扑具有较为"柔性"的拓扑结构。

定义 1.2 (度量空间)

设 X 为一个集合，$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下三条：

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X, \rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$

[1] 如果 X, Y 是 T 上的两个拓扑，且 $X \subset Y$ 那么就称拓扑 X **弱** 于拓扑 Y，反之拓扑 Y **强** 于拓扑 X。

那么就称 X, ρ 为一个 **度量空间** ，ρ 为 X 上的一个 **度量** 。♣

例 1.4（度量空间诱导的拓扑） 设 (X, ρ) 为一个度量空间，定义 X 上开集 U 为：

$$x_0 \in U \iff \forall x_0 \in U, \exists \delta > 0,\ s.t.\ B(x_0, \delta) \subset U$$

定义拓扑 $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，则 $\mathscr{F}$ 给出了 X 上的一个拓扑（称之为 **度量 ρ 诱导的拓扑** ）。

注： 这个例子说明了度量可以诱导拓扑，"赋范出度量，天然诱拓扑"。

例 1.5（$\mathbb{R}$ 上连续函数空间上的连续度量诱导的拓扑） 定义 $X = C([a,b])$ 上的连续度量 ρ：

$$\rho : C([a,b]) \times C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longmapsto \rho(f,g) := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

此时 ρ 诱导了 $C([a,b])$ 上的一个拓扑。

例 1.6 (除了"最大"和"最小"的拓扑之外，还存在"适中"的拓扑) 设 $X = \{0,1\}$，$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ 是一个拓扑，$(X, \mathscr{F})$ 是一个拓扑空间。

1.2 更多的拓扑空间与子空间拓扑

定义 1.3 (子空间拓扑)

设 X 是一个拓扑空间，$Y \subset X$ 为 X 的一个子集，则 Y 上可以如下定义一个拓扑结构：

$$\mathscr{F} = \{U \cap Y | U \subset_{open} X\}$$

则 $\mathscr{F}$ 定义了 Y 上的一个拓扑空间结构，此结构成为 X 在 Y 上诱导的拓扑，或称 Y 被赋予 **子空间拓扑** 。♣

证： 取大集合为小集合即可，证明显然。 □

例 1.7（n 维单位球面） n 维单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^n$ 赋予欧氏拓扑，其中 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \ ||x|| = 1\}$。

例 1.8（谈开集一定要说是在哪个拓扑的意义下是开集） 设 $[0,1) \subset \mathbb{R}$，赋予 $[0,1)$ 子空间拓扑，因为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集，$(\frac{1}{2}, 1)$ 也是 $\mathbb{R}$ 中开集，那么有以下结论成立：

- $[0, \frac{1}{2}) := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0,1)$ 是开集。
- $(\frac{1}{2}, 1) := (\frac{1}{2}, 1) \cap [0,1)$ 是开集。

正如我们在 $\mathbb{R}$ 中所规定的那样，上述两个例子分别应该不为开集和为开集，但是在子空间拓扑的意义下均为开集。这就说明了谈开集一定要说在哪个拓扑的意义下是开集。

定义 1.4 (连续性)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall\, U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是 **连续的** 。即连续映射到达域原像为开集。♣

例 1.9（离散拓扑为原像集的映射一定是连续映射） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$，是 X 上的离散拓扑，

假设 $f : X \longrightarrow Y$，那么对于 $\forall U \subset_{open} Y, f^{-1}(U) \subset X$ 而 X 的所有子集都是开集（因为 X 的拓扑 $\mathscr{F}$ 是离散拓扑）。因此我们得知：**X 上的任意映射都是连续的**。

例 1.10（平凡拓扑上的连续映射只能到平凡拓扑） 设 X 为一个集合，$\mathscr{F} = \{\emptyset, X\}$，是 X 上的平凡拓扑，

设 Y 为一个拓扑空间，$f: X \longrightarrow Y$ 为一个连续映射，$f(X) := \{f(x)|x \in X\} \subset Y$（此处 $f(X)$ 作为子空间赋予子空间拓扑），则 $f: X \longrightarrow f(X)$ 仍是连续映射。下断言：$f(X)$ **在子空间拓扑下只能为平凡拓扑空间**。

假设 $f(X)$ 不是平凡拓扑空间，那么[2]$\exists U \sqsubset f(X)$，并且 $U \neq \emptyset$ 且为 $f(X)$ 中开集，即 $f^{-1}(U) \subset_{open} X$。

但是 X 中开集只有两种可能，即 X 和 $\emptyset$，因为 $f: X \longrightarrow f(X)$ 是满射，因此 U 中的任何一点都有原像（但是原像不一定唯一），因此 $f^{-1}(U) \neq \emptyset$。因此 $f^{-1}(U) = X$。因此 $f(X) = U \sqsubset f(X)$ 相矛盾，因此：若 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，则 $f(X)$ 一定为平凡拓扑空间。

1.3 开集的反面，闭集

定义 1.5 (闭集)

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$，如果 $X \backslash F$ 是 X 中开集，则 F 称为 X 中的 **闭集** 。♣

根据开集的性质 (定义1.1) 可立马得到闭集的性质：

命题 1.1 (闭集的性质)

1. $\emptyset, X$ 是闭集
2. F, G 是闭集，那么 $F \cup F$ 是闭集
3. $F_\alpha, \alpha \in I$ 是开集，$\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 是闭集。

♠

1.3.1 闭集之刻画

定义 1.6 (极限点)

设 X 是一个拓扑空间，$A \subset X$，$\forall p \in X$，若 $\forall$ 包含 p 的开集 U 都有：

$$(U \backslash \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

则称 p 为 A 的一个 **极限点** 。而将集合 $\overline{A} = A \cup \{A\text{的极限点}\}$ 称为 A 的 **闭包** 。♣

例 1.11(欧式空间中有理点的极限点集为欧氏空间) $X = \mathbb{R}^3$，A 是 X 中的有理点(即 $A \in \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{Q}\}$)，那么 X 就是 A 的极限点集。

例 1.12（欧式空间中整数点的极限点集为空集） $X = \mathbb{R}^3$，$A = \mathbb{Z}$，那么 A 的极限点集为 $\emptyset$。

例 1.13（点集的极限点） 设 $X = \{0, 1\}$，$\mathscr{F} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ 则 X 的子集 A 有以下两种情况：

1. $A = \{0\}$:
   - 0 :$\forall$ 包含 $\{0\}$ 的开集 U，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 :$\forall$ 包含 $\{1\}$ 的开集 $U = \{0, 1\}$（只有这一个），$(U \backslash \{1\}) \cap A \neq \emptyset$，说明 1 是 A 的极限点。

   因此 1 为 $A = \{0\}$ 的极限点。
2. $A = \{1\}$:
   - 0 : 取包含 $\{0\}$ 的开集 $U = \{0\}$，$(U \backslash \{0\}) \cap A = \emptyset$，说明 0 不是 A 的极限点。
   - 1 : 包含 $\{1\}$ 的 X 中开集 $U = \{0, 1\}$，$(U \backslash \{1\}) \cap A = \emptyset$，说明 1 也不是 A 的极限点。

[2]这里符号 $\sqsubset$ 表示真被包含。

命题 1.2 (闭集的等价刻画)

设 X 为拓扑空间，$A \subset X$ 则:

$$A\text{是闭集} \iff \overline{A} = A$$

证: $[\Rightarrow]$ 设 A 是闭集，要证 $\overline{A} = A$，显然 $A \subset \overline{A}$，下只需证 $\overline{A} \subset A$，即证 $X \backslash A \subset X \backslash \overline{A}$，因此对于 $p \in X \backslash A$ 都有 $p \in X \backslash \overline{A}$，因此即证：$\forall p \notin A$，$p$ 不是 A 的极限点。

事实上，A 闭集 $\Rightarrow X \backslash A$ 开集 $\iff \exists$ 开集 $U \subset A \backslash A, p \in U \Rightarrow (U \backslash \{p\}) \cap A = \emptyset \Rightarrow p$ 不是 A 的极限点。

$[\Leftarrow]$ 设 $\overline{A} = A$，要证 A 是闭集。只要证 $X \backslash A$ 是开集，即：

$$\forall p \in X \backslash A, \exists\text{开集}U,\ s.t.\ p \in U \subset X \backslash A$$

由于 $p \notin A \Rightarrow p \notin \overline{A}$，则 p 不为 A 的极限点。因此 $\exists$ 开集 $U \subset X (p \in U)\ s.t.\ (U) \cap A = (U \backslash \{p\}) \cap A = \emptyset$，即 $p \in U \subset X \backslash A$ □

推论 1.1

$\overline{A}$ 为一个闭集。

证: 只要证 $X \backslash \overline{A}$ 为开集。由于 $\forall p \in X \backslash \overline{A}, p$不为$A$的极限点 则 $\exists$ 开集 $U \subset X\ s.t.\ p \in U$ 且由于 $p \notin A$ 则 $U \cap A = (U \backslash \{p\}) \cap A = \emptyset$

则 $p \in U \subset X \backslash A$

则 $\forall q \in U$，U 为包含 q 的开集，又由于 $U \cap A = \emptyset$，因此 q 不是 A 的极限点，所以 $q \notin \overline{A}$，故 $U \subset X \backslash \overline{A}$。

因此 $X \backslash \overline{A}$ 为开集。 □

推论 1.2

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset_{closed} A} F$$

注: 由上推论可以知道，任何一个包含 A 的闭集都包含 $\overline{A}$，而根据 $\overline{A} = A \cup \{A\text{的所有极限点}\}$。因此 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小的闭集。

证: $[\supset]$: 由于 $\overline{A} \supset_{closed} A$，那么必然可以取到 $F_0 =_{closed} \overline{A}$，此时 $\displaystyle\bigcap_{F \supset_{closed} A} F = F_0 \cap \left(\bigcap_{F_0 \neq F \supset_{closed} A} F \right) \subset A$。

$[\subset]$: 只要证 $\forall F \supset_{closed} A$ 都有 $F \supset \overline{A}$，即证 $X \backslash F \subset X \backslash \overline{A}$。

只要证 $\forall x \notin F, x$ 不为 A 的极限点。

事实上，F 是闭集，根据命题1.2可知 $F = \overline{F} \Rightarrow x \notin \overline{F}$，因此 x 不为 F 的极限点，而 $F \supset A$ 因此得证。 □

命题 1.3 (闭包运算的性质)

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

证： 额，不知道什么高级方法，于是采用土办法就好了。

1. 只需要证明 $A\cup B$ 的极限点和 A 的极限点或 B 的极限点一致就好，事实上我们有如下的推理[3]：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cup B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cup B,\exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cup B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cup((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{或}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，或}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

2. 只需要证明 $A\cap B$ 的极限点就是 A 的极限点和 B 的极限点就好，事实上：

$$\begin{aligned} x_0\text{是}A\cap B\text{的极限点} &\iff \forall x_0\in A\cap B,\exists_{open}V(x_0\in V)\ s.t.\ (V\backslash\{x_0\})\cap(A\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\cap((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\Longrightarrow ((V\backslash\{x_0\})\cap A)\neq\emptyset\ \text{且}\ ((V\backslash\{x_0\})\cap B)\neq\emptyset \\ &\iff x_0\text{是}A\text{的极限点，且是}B\text{的极限点} \end{aligned}$$

这一部分不是等号的问题主要出现在倒数第二步，因为两个非空集合的交不一定非空，而两个非空集合的并，一定非空。 □

例 1.14（上命题第二部分不能取等） 若 $A=[0,1),B=(1,2]$ 那么 $\overline{A\cap B}=\emptyset\sqsubset\{1\}=\overline{A}\cap\overline{B}$

例 1.15（单点集不一定是闭集，稠密） 设 $X=\{0,1\}$，$\mathscr{F}=\{\{0\},\{0,1\},\emptyset\}$，于是拓扑空间的闭集就是直接取 $\mathscr{F}$ 在 X 中的补集，即 $\{\{1\},\emptyset,\{0,1\}\}$，对比之后明显可以看出来 $A=\{0\}$ 不是闭集（其他几个都是既开又闭）。根据我们前面例1.13的经验，$\{0\}$ 的极限点是 1，因此 $\overline{A}=A\cup\{A\text{的极限点}\}=\{0,1\}=X$。即取了闭包之后就取到全集，这种现象我们称之为**稠密**。

1.3.2 稠密

定义 1.7 (稠密)

设 X 为一个拓扑空间，$A\subset X$，若 $\overline{A}=X$ 则称 A 在 X 中 **稠密**。如果 $Y\subset X$ 是 X 的拓扑子空间，如果还有 Y 的拓扑子空间 $Z\subset Y$ 那么我们分别记：

$\overline{Z_Y}$ ：Z 在 Y 中取闭包。

$\overline{Z_X}$ ：Z 在 X 中取闭包。

注： 之所以会在不同背景集合中取闭包，最本质是因为某集合在不同背景集合中的极限点是不一样的。

例 1.16（同一集合在不同背景集合中取闭包不相一致） 设 $X=\mathbb{R},Y=(0,2),Z=(0,1)$ 于是取闭包：$\overline{Z_X}=[0,1],\overline{Z_Y}=(0,1]$

例 1.17（有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中稠密） 因为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的极限点集为实数集 $\mathbb{R}$，因此 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$。

那么很自然就产生疑问，是否取闭包的运算和子空间拓扑存在很多联系？这就是下面命题所解决的：

命题 1.4

设 X 是拓扑空间，Y 是 X 的拓扑子空间，Z 是 Y 的拓扑子空间。我们有：

$$\overline{Z_Y}=\overline{Z_X}\cap Y$$

证： 验证这一问题，仍然从土方法走：

[3] 这里会利用到集合运算的分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 和 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[$\subset$] 即证 $\forall x \in \overline{Z_Y}$, $s.t.\ x \in \overline{Z_X} \cap Y$，首先因为 $x \in \overline{Z_Y}$，因此 $x \in Y$ 于是只需证 $x \in \overline{Z_Y}$：

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 Y 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 X 中的极限点。事实上 $\forall x$ 在 X 中的开邻域 V，有：对于 X 在 Y 中的去心开邻域 $((V \cap Y)\backslash\{x\})$ 有：

$$
\begin{aligned}
&((V \cap Y)\backslash\{x\}) \cap Z \\
=&((V\backslash\{x\}) \cap Z) \cap Y \\
\subset&(V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

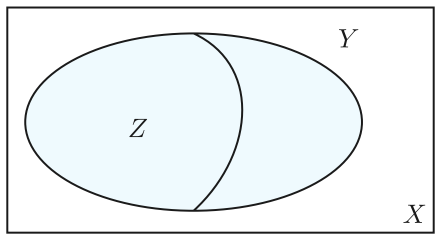

图 1.1: 命题 1.4 之集合关系图

[$\supset$] 即证 $\forall x \in \overline{Z_X} \cap Y$, $s.t.\ x \in \overline{Z_Y}$，首先明显有 $x \in Y$ 于是仍分类讨论：

(a). $x \in Z$ 显然成立

(b). $x \notin Z$，此时意味着 x 为 Z 在 X 中的极限点，只需证 $x \in \overline{Z_X}$，即证 x 为 Z 在 Y 中的极限点。事实上，任意在 Y 中的包含 x 的开集，由子空间拓扑，不妨设之为 $V \cap Y$，其中 $V \subset_{open} X(x \in V)$，因为 x 为 Z 在 X 中的极限点，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \neq \emptyset$，又由于 $x \in Y$，所以 $(V\backslash\{x\}) \cap Z \cap Y = (V \cap (Y\backslash\{x\})) \cap Z \neq \emptyset$

□

更进一步，我们问以下的问题：

问题 1.1 设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset X$，问：$F \cap U$ 是否在 U 中稠密？

答案是否定的，因为如果偷鸡取 $U = X\backslash F$ 这件事就算寄了。于是为了排除这个情况，我们必须要求 U 是开集。如下命题：

命题 1.5

设 X 是拓扑空间，$F \subset X$ 稠密，$U \subset_{open} X$ 是 X 且赋予子空间拓扑，则 $F \cap U$ 在 U 中稠密。

证： 要证 $\overline{(F \cap U)_U} = U$ 根据命题1.4，即要证 $\overline{(F \cap U)_U} \cap U = U$，即要证 $U \subset \overline{(F \cap U)_X}$。

即对 $\forall x \in U$ 要证 $x \in \overline{(F \cap U)_X}$。则分两类讨论：

1. $x \in F \cap U$ 显然成立
2. $x \notin F \cap U$，又由于 F 在 X 中稠密，那么 x 是 F 的极限点，任取 X 中开集 $V(x \in V)$，由于 U 是 X 中开集，因此 $V \cap U$ 也是 X 中开集，因为 x 是 F 的极限点，所以有：

$$
\begin{aligned}
&((V \cap U)\backslash\{x\}) \cap F \neq \emptyset \\
\iff&(V\backslash\{x\}) \cap (F \cap U) \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

□

1.3.3 集合之解体

为了更好说话，引入以下概念：

定义 1.8 (内点，外点，边界点)

设 X 为一个拓扑空间，$A \subset X$ 定义：

- 定义 A 的 **内点集**：$int(A) := \{p \in A | \exists X 中开集 V(p \in V), V \subset A\}$
- 定义 A 的 **外点集**：$ext(A) := \{p \notin A | \exists X 中开集 V(p \in V), V \subset X \backslash A\} \iff int(X \backslash A)$
- 定义 A 的 **边界点集**：$\partial(A) := \{p \in X | \forall p 的开邻域 V, V \cap A \neq \emptyset . V \cap (X \backslash A) \neq \emptyset\}$

♣

注: 根据以上定义，我们显然有：

$$X = int(A) \sqcup ext(A) \sqcup \partial(A)$$

例 1.18 (一些显然的例子)

1. 设 $A = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ 那么：$\partial(A) = \{0, 1\}, int(A) = (0, 1)\,, ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
2. (a). 设 $A = (0, 1) \subset [0, 1)$ 那么：$\partial(A) = \{0\}, int(A) = (0, 1)\,, ext(A) = \emptyset$
   (b). 设 $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ 那么：$\partial(A) = \{0, 1\}, int(A) = (0, 1)\,, ext(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
3. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 于是：
   (a). $\partial(D) = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$
   (b). $int(D) = D$
   (c). $ext(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$

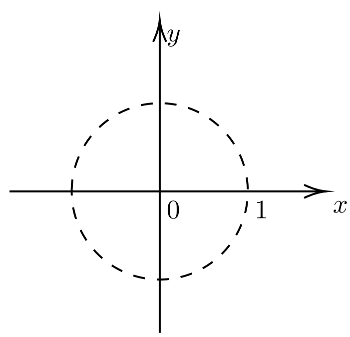

图 1.2: 例 1.18.3 之拓扑空间 D

4. 设 $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$，此时 $\partial(A) = A, int(A) = \emptyset, ext(A) = X \backslash A$

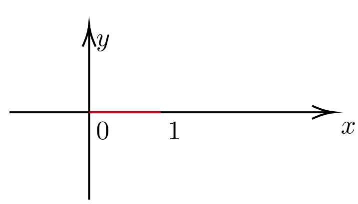

图 1.3: 例 1.18.4 之拓扑空间 A

1.4 拓扑空间的砖头—拓扑基

定义 1.9 (拓扑基)

设 X 是拓扑空间，$\mathcal{B}$ 是一个由一些 X 中开集构成的集族，如果对 $\forall X$ 中开集 U，U 均可表为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并，则称 $\mathcal{B}$ 构成了 X 的一个 **拓扑基** 。

例 1.19（$\mathbb{R}^1$ 中的欧氏拓扑可以有不同的拓扑基） 很明显，$\mathbb{R}^1$ 有一个拓扑基为 $\mathcal{B} = \{(a,b)|a<b\}$。

令 $\mathcal{B}' = \{(a,b)|a<b, a,b\in\mathbb{Q}\}$，则 $\mathcal{B}'$ 也是 $\mathbb{R}^1$ 的一个拓扑基。

证： $\forall U \subset_{open} \mathbb{R}^1, \forall p \in U$，则存在 $a<p<b$ 使得 $(a,b)\subset U$，从而由有理数集的稠密性可知，$\exists (a_p,b_p)\in \mathcal{B}'$，$s.t.\ p\in(a_p,b_p)\subset U$ 即 $U = \bigcap\limits_{p\in U}(a_p,b_p)$。 □

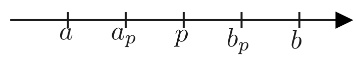

图 1.4: 例 1.19 之数轴

注： 由此可见，一个拓扑空间可以有诸多拓扑基，但是一个拓扑基是否唯一确定一个拓扑空间呢？答案是肯定的，这个结论将由以下讨论给出。

了解了定义，我们就需要探究一个拓扑基 $\mathcal{B}$ 之所以为拓扑基的等价条件。很明显，由拓扑基我们可以知道拓扑基的必要条件，如下面这个命题：

命题 1.6

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个拓扑基，那么：

TB1 . $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{B}} U = X$

TB2 . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}\ s.t.\ U_1\cap U_2$ 可以表示为 $\mathcal{B}$ 中一些元素之并。

证： 显然。 □

这个命题反过来也是正确的，即有以下的命题：

命题 1.7

设 X 为一个集合，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个由一些子集构成的集族，若 $\mathcal{B}$ 满足以上 TB1 、 TB2 两条，则 $\mathcal{B}$ 必为 X 上某个拓扑 $\mathscr{F}$ 的拓扑基。而且，$\mathscr{F}$ 是唯一的，称之为由拓扑基 $\mathcal{B}$ **生成** 的拓扑。

证： 定义 $\mathscr{F} = \{\emptyset\}\cup\{\mathcal{B}\text{中若干元素之并}\} = \{\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha | U_\alpha \in \mathcal{B}\}\cup\{\emptyset\}$，我们所要证明的是以下两点：

1. $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个拓扑。事实上，我们有：
   (a). $\emptyset, X\in\mathscr{F}$（显然，由定义和条件 TB1 可以保证。）
   (b). $\mathscr{F}$ 对于任意并封闭是显然的（因为就是这样定义的。）
   (c). 对于 $\forall \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha, \bigcup\limits_{\beta\in J} V_\beta \in \mathscr{F}$，其中 $U_\alpha, V_\beta \in \mathcal{B}, \forall \alpha\in I, \beta\in J$ 那么有：

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)\cap\left(\bigcup_{\beta\in J} V_\beta\right) = \bigcap_{\alpha,\beta}(U_\alpha\cap V_\beta)\in\mathscr{F}$$

2. $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathscr{F}$ 上的一个拓扑基。

根据定义可知 $\mathcal{B}$ 也确实为拓扑 $\mathscr{F}$ 上的一个拓扑基。从构造来看，我们并没有规定在拓扑基 $\mathcal{B}$ 中的并是哪些，因此 $\mathscr{F}$ 是唯一的，因此命题得证。 □

例 1.20 ($\mathbb{R}^2$ 的另一拓扑基) 明显来看，欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中的开球的全体构成的集合是 $\mathbb{R}^2$ 的一个拓扑基，根据我们在度量空间中所积攒的经验，$\mathbb{R}^2$ 中的开球和邻域是等价的，很自然的我们可以考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的开矩体的全体构成的集合 $\mathcal{B}' = \{(a,b)\times(c,d)|a<b, c<d\}\cup\{\emptyset\}$:

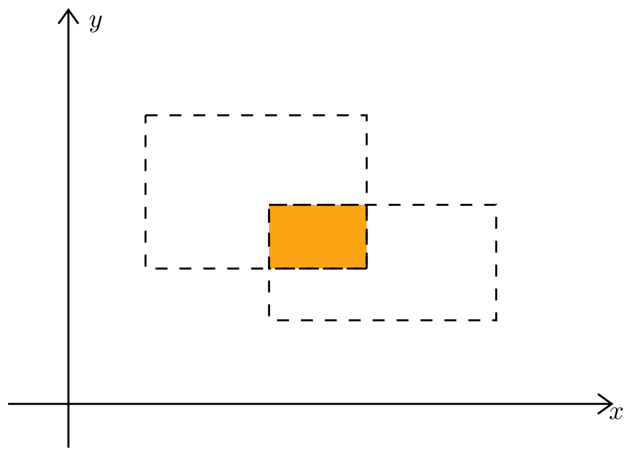

图 1.5: 例 1.20 之开矩体

很明显 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上某拓扑的拓扑基。

为了更好地描述两个拓扑基之间的关系，以便更加方便地研究两个拓扑基生成的拓扑空间之间的关系，我们对拓扑基引入如下的定义：

定义 1.10 (拓扑基之间的等价)

设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 是 **等价** 的，若:

1. $\forall U\in\mathcal{B}, p\in U$, 都 $\exists U'\in\mathcal{B}'$, $s.t.\ p\in U'\subset U$
2. $\forall V\in\mathcal{B}', p'\in V'$, 都 $\exists V\in\mathcal{B}'$, $s.t.\ p\in V\subset V'$

♣

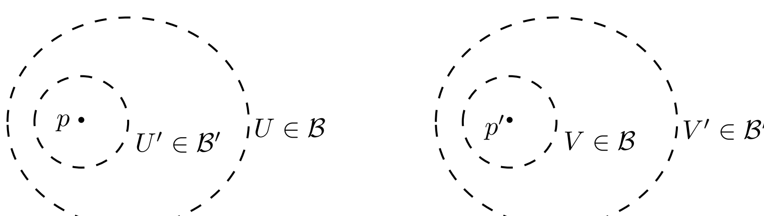

图 1.6: 定义 1.10 的说明

命题 1.8

设 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 满足 TB1 、 TB2 ，且 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{B}'$ 等价，则 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathscr{F}$ 与 $\mathcal{B}'$ 生成的拓扑 $\mathscr{F}'$ 相同。 ♠

证: 证明很简单，$\forall U\in\mathscr{F} \Rightarrow U=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha, U_\alpha\in\mathcal{B}$，又因为两个拓扑基等价，则有:

$$\forall U_\alpha, \forall p\in U_\alpha \Rightarrow \exists V_p\in\mathcal{B}',\ s.t.\ p\in V_p\subset U_\alpha$$

即：$U_\alpha = \bigcup\limits_{p \in U_\alpha} V_p \in \mathscr{F}'$，即 $U = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathscr{F}'$，则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$

同理，$\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$，因此 $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ □

为了更好的使用以上拓扑基的等价条件，我们可以篡改 TP2 为以下的 TP2'：

TP2' . $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{B}, \forall p \in U_1 \cap U_2, \exists U_p \in \mathcal{B},\ s.t.\ p \in U_p \subset U_1 \cap U_2$

证： 这个的验证也十分显然。 □

第 2 章 连续映射

研究点集拓扑的主要动机就是从更加一般的观点来定义连续性、紧性和连通性。下面三章就是做这个工作。这一章，先研究一般的连续映射。

2.1 连续映射

首先，我们重申连续性的定义：

定义 2.1 (连续映射)

若 f 是拓扑空间 $X \longrightarrow Y$ 的映射，如果 $\forall\, U \subset_{open} Y, f^{-1}(U)$ 为 X 中开集，则称映射 f 是**连续映射**。

我们有下面这俩显然的命题：

命题 2.1 (连续映射之复合是连续映射)

设 X, Y, Z 是三个拓扑空间，定义连续映射 $f: X \longrightarrow Y$，$g: X \longrightarrow Y$，则 $gf: X \longrightarrow Z$ 是连续映射。

证： 对于 $\forall U \subset_{open} Z$，我们有 $(g \cdot f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$，由于 g 是连续映射，则 $g^{-1}(U)$ 是 Y 中的开集; 又由 f 是连续映射，所以 $f^{-1}(g^{-1}(U))$ 是 X 中开集。 □

命题 2.2 (连续映射之限制是连续映射)

设 $f: X \longrightarrow Y$ 是连续映射，$A \subset X$ 并赋予 A 以子空间拓扑，那么 $f|_A: A \longrightarrow Y$ 是连续映射。

证： $\forall U \subset_{open} Y$, 因为赋予 A 以子空间拓扑，所以有 $(f|_A)^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$

又由于 f 是 $X \longrightarrow Y$ 的连续映射，所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中开集，所以 $A \cap f^{-1}(U)$ 就为 A 中开集。□

2.2 充满整个空间的曲线-Peano[1]曲线

[1]朱塞佩 · 皮亚诺（意大利语：Giuseppe Peano；1858 年 8 月 27 日 – 1932 年 4 月 20 日）是意大利数学家、逻辑学家、语言学家。

第 3 章 紧性

第 4 章 连通性

第 5 章 符号说明

本讲义有以下符号说明，便于我自己看不明白的时候过来回顾一下（

5.1 符号说明

1. $O \subset_{open} X$ 的含义是 O 是 X 的开子集。
2. $F \subset_{closed} X$ 的含义是 F 是 X 的闭子集。
3. $F =_{closed} X$ 的含义是 F 和 X 相等，且均为闭集。
4. 所有的弯体（比如 $\subset$）变直之后就表示更加强的区分效果（比如 $\sqsubset$，表示真被包含）。
5. 所有的包含采用类似 $\subset$ 的符号，若出现 $\subseteq$（一般不会），表示同一意思。

5.2 语法说明

1. 数学逻辑语言同国际标准。
2. 外加一些张氏古代汉语和标准中式英语（虽然掺杂一些少量标准英式英语）。