

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN: LABORATORIO 2

PABLO CÁCERES LUZANTO
BENJAMÍN HERNÁNDEZ CORTÉS

Profesor:

Gonzalo Acuña

Ayudante:

Francisco Muñoz

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
ÍNDICE DE CUADROS	vi
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	7
1.2 ESTRUCTURA DEL INFORME	8
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1 ¿QUÉ ES UN MODELO?	9
2.2 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES	9
2.3 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN	9
2.4 SISTEMAS DE LAZO ABIERTO	9
2.5 SISTEMAS DE LAZO CERRADO	10
2.6 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA, RENC, RESC	10
2.7 PROPIEDADES	11
2.7.1 Polos	11
2.7.2 Ceros	11
2.7.3 Ganancia Estática	11
2.7.4 Tiempo de estabilización	11
2.8 ÁLGEBRA DE DIAGRAMA DE BLOQUES	11
CAPÍTULO 3. DESARROLLO	13
3.1 Parte 1	13
3.1.1 Ecuación 1.1	13
3.1.2 Ecuación 1.2	15
3.1.3 Ecuación 1.3	16
3.1.4 Comparativa entre las funciones 1.1 y 1.2	18
3.2 Parte 2	18
CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES	21

CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA.....	23
--------------------------------------	-----------

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Diagrama de Bloque - Parte 2	7
2.1	Ejemplo de Sistema de Lazo Abierto (Acuña, 2018)	10
2.2	Ejemplo de Sistema de Lazo Cerrado (Acuña, 2018)	10
3.1	Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_1	14
3.2	Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_1	14
3.3	Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_2	15
3.4	Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_2	16
3.5	Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_3	17
3.6	Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_3	17
3.7	Conexión en paralelo Funciones de Transferencia 4 y 5	18
3.8	Función de Transferencia 3 con Retroalimentación	18
3.9	Función de Transferencia 3 en serie con 4-5	19
3.10	Función de Transferencia 3-4-5 en serie con Función 6	19
3.11	Función de Transferencia 1 en paralelo con Función de Transferencia 2	19
3.12	Función de Transferencia 1-2 en paralelo con Función de Transferencia 3-4-5-6	19
3.13	Respuesta al escalón de la Función de Transferencia Final 3.10	20

ÍNDICE DE CUADROS

3.1	Cuadro comparativo entre funciones 1.1 y 1.2 para los gráficos de lazo abierto	18
-----	--	----

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día MATLAB (abreviatura de *Matrix Laboratory*) es un IDE de programación en su propio lenguaje M, el cual es muy utilizado principalmente para la manipulación de matrices, la representación gráfica de datos y funciones, y la implementación de distintos algoritmos para llevar a cabo cierto objetivo en particular.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, es que en el presente informe se ahondará y se llevará a la práctica los conceptos fundamentales y que son necesarios conocer para llevar a cabo los objetivos planteados a continuación y en general, a lo largo de todo el curso de Modelación y Simulación.

1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

■ Primera parte

- Graficar respuestas de lazo abierto y lazo cerrado para las siguientes funciones:

$$4\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{du(t)}{dt} \quad ; \quad y(0) = 1, u(0) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) - \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 8\frac{du(t)}{dt} - u(t) = 0 \quad ; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 1, u(0) = \dot{u}(0) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + y = 5\frac{du}{dt} \quad ; \quad y(0) = \dot{y}(0) = 1, \ddot{y}(0) = 0, u(0) = 0 \quad (1.3)$$

- Realizar cuadro comparativo entre las funciones de primer y segundo orden para los gráficos de lazo abierto e indicar los valores de ganancia estática, tiempo de estabilización, ceros, polos, etc.

■ Segunda parte

- Graficar la respuesta al escalón del siguiente diagrama de bloque utilizando funciones de la consola de MATLAB y obtener el valor de la función de transferencia del sistema.

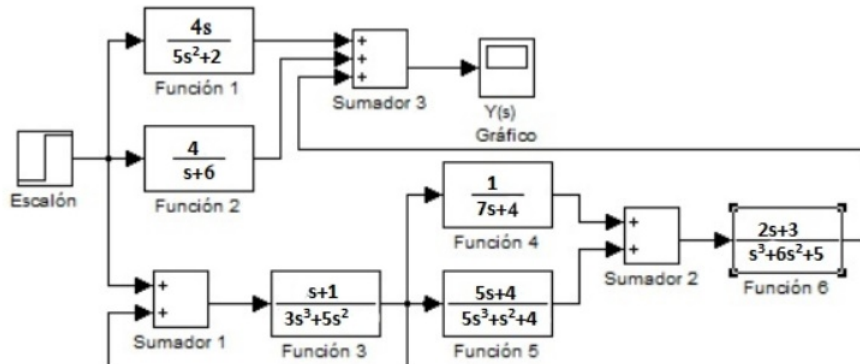


Figura 1.1: Diagrama de Bloque - Parte 2

1.2 ESTRUCTURA DEL INFORME

Este documento está conformado por cinco capítulos, el primero y actual es el referente a la **Introducción** del informe. Luego, se presenta un breve **Marco Teórico**, en donde se repasan ciertos conceptos que son necesarios conocer al momento de realizar la experiencia y leer este documento. A continuación, se presenta el capítulo de **Desarrollo** en donde, en el caso de la Parte 1, se explica el desarrollo de cada uno de los gráficos, y en el caso de la Parte 2, se grafica la respuesta al escalón y se muestra la obtención de la función de transferencia del sistema. Finalmente, se presentan las **Conclusiones** que se obtienen luego del desarrollo de la experiencia y acorde a los objetivos planteados inicialmente. Además, se presentan todas las referencias expuestas a lo largo del texto en la **Bibliografía**.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 ¿QUÉ ES UN MODELO?

Un modelo es una herramienta que debe ser lo más simple posible y que permite representar de manera simplificada un sistema (los aspectos esenciales), que al mismo tiempo, es una abstracción de la realidad. Existen diversos tipos de modelos y clasificaciones, y por ende, se pueden utilizar en muchas áreas de las ciencias, entre ellas, física, química, matemáticas, etc. (Acuña, 2018)

2.2 SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

En el caso de los modelos matemáticos, estos pueden clasificarse en distintos tipos. En el área de la informática y de la electrónica en general, se utilizan los Sistemas Lineales e Invariantes en el tiempo (SLI), ya que poseen tres características importantes: son modelos continuos, es decir, el valor del tiempo utilizado es de tipo Real ($t \in \mathbb{R}$); tienen variables y parámetros constantes (invariantes en el tiempo); pueden subdividirse en diversos subproblemas (lineales). Por lo general, este tipo de modelos, se pueden representar a través de ecuaciones diferenciales.

2.3 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Este principio permite descomponer un problema lineal en distintos problemas más sencillos que el original. De esta forma, al realizar una suma (o superposición) de los resultados de estos problemas (o respuestas a ciertas subentradas), se obtiene la solución del problema original. (Guadarrama, Guadarrama y Rodríguez, 2014) Todo aquel modelo que cumpla con el principio de superposición, entonces será un SLI. La principal razón para utilizar estos tipos de sistemas, es intentar conocer el comportamiento de un sistema frente a una entrada y así determinar su salida (Acuña, 2018).

2.4 SISTEMAS DE LAZO ABIERTO

En este tipo de sistemas, la salida solo se genera por el uso de la variable de entrada, aunque sea independiente de ella. Estos sistemas suelen ser simples y fáciles de entender, pero es por este mismo hecho que pueden llegar a ocurrir diversos problemas como cambios en el comportamiento frente a perturbaciones o fenómenos, poca precisión de los instrumentos, entre otros factores que pueden afectar a este tipo de sistemas).

Lazo abierto:



Figura 2.1: Ejemplo de Sistema de Lazo Abierto (Acuña, 2018)

2.5 SISTEMAS DE LAZO CERRADO

En este tipo de sistemas, la salida genera cierta información, que es utilizada en conjunto con la entrada, para controlar así, de mejor manera la salida. Lo anterior se conoce como sistema de retroalimentación o *feedback*, en donde la salida en un instante t , se puede combinar con la entrada del sistema en un instante $t + 1$.

Lazo cerrado

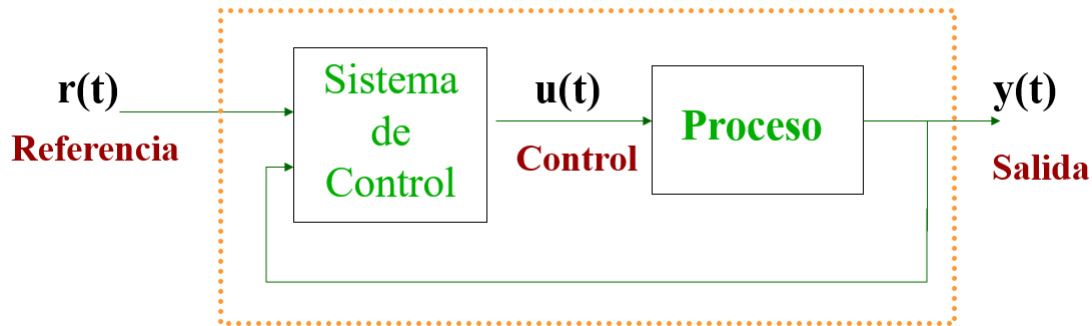


Figura 2.2: Ejemplo de Sistema de Lazo Cerrado (Acuña, 2018)

2.6 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA, RENC, RESC

Como se ha mencionado anteriormente, los SLI, se pueden representar por medio de ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo. Sin embargo, también se pueden representar en el dominio de las frecuencias gracias a la Transformada de Laplace. Al aplicar esta transformada en una ecuación diferencial, se obtiene una ecuación estructurada de tal forma, en donde se pueden apreciar claramente tres componentes de esta: RESC o Respuesta de Estado Cero, que entrega información del sistema y está relacionada con la entrada del sistema; RENC o Respuesta de Entrada Cero, que entrega información relativa a las condiciones iniciales del sistema. A lo largo del tiempo, por lo general se hace importante el análisis exclusivo de la RESC, ya que si se aparta la entrada de esta expresión, se obtiene la función de transferencia del sistema en el dominio de Laplace.

2.7 PROPIEDADES

2.7.1. Polos

Corresponden a los valores de s (parámetro de Laplace) que resuelven la ecuación resultante luego de igualar el polinomio del denominador a cero, de la ecuación en el dominio de Laplace.

2.7.2. Ceros

Corresponden a los valores de s (parámetro de Laplace) que resuelven la ecuación resultante luego de igualar el polinomio del numerador a cero, de la ecuación en el dominio de Laplace.

2.7.3. Ganancia Estática

Indica el valor al cual la función converge, utilizando como entrada la función escalón.

2.7.4. Tiempo de estabilización

Como su nombre lo indica, es el tiempo que demora una función en estabilizarse o alcanzar el valor correspondiente a la ganancia estática, utilizando la función escalón como entrada.

2.8 ÁLGEBRA DE DIAGRAMA DE BLOQUES

Al igual que en los circuitos eléctricos, los diagramas de bloques pueden simplificar utilizando diversas técnicas. Las más utilizadas son la de reducir todos aquellos bloques que se encuentren conectados en serie o en paralelo según corresponda. De esta forma, se facilita, por ejemplo, la obtención de la función de transferencia de un diagrama de bloque o sistema.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO

3.1. Parte 1

A continuación, se describen los pasos realizados para obtener las funciones de transferencia $H(s)$ de cada una de las ecuaciones presentadas en el capítulo introductorio.

3.1.1. Ecuación 1.1

- Se aplica Transformada de *Laplace* a la función original y se obtiene:

$$4[sY - y(0)] + 2Y = 2[sU - u(0)] \quad (3.1)$$

- Luego, se reemplazan los respectivos valores iniciales de la ecuación y se despeja la variable Y , resultando lo siguiente:

$$Y = \frac{s}{2s+1}U + \frac{2}{2s+1} \quad (3.2)$$

- Luego la función de transferencia de la ecuación 1.1 es:

$$H_1(s) = \frac{s}{2s+1} \quad (3.3)$$

A continuación, se presentan los dos gráficos de la respuesta al impulso, de Lazo Abierto y Lazo Cerrado, del sistema con la Función de Transferencia $H_1(s)$.

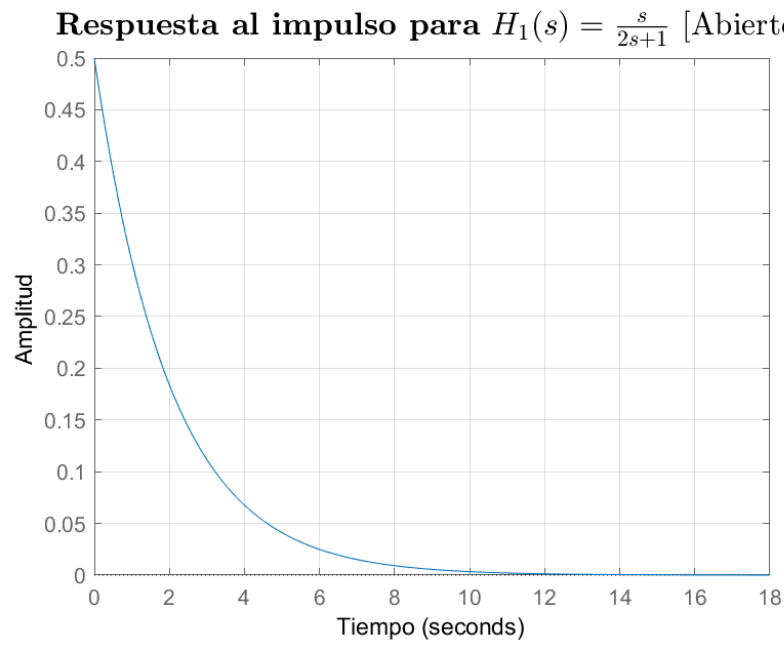


Figura 3.1: Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_1

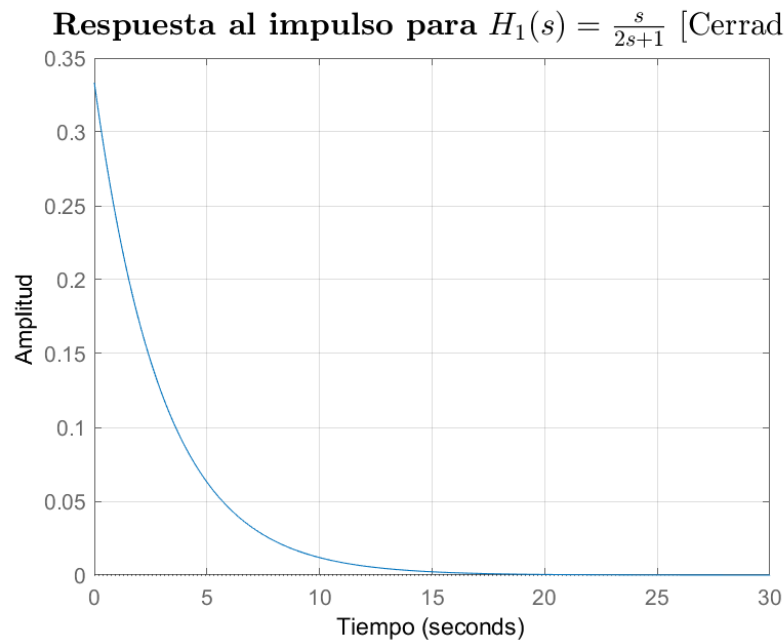


Figura 3.2: Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_1

3.1.2. Ecuación 1.2

- Se aplica Transformada de *Laplace* a la función original y se obtiene:

$$[s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0)] + 4[sY - y(0)] + 3Y = [s^2U + su(0) + \dot{u}(0)] + 8[sU - u(0)] + U \quad (3.4)$$

- Luego, se reemplazan los respectivos valores iniciales de la ecuación y se despeja la variable Y , resultando lo siguiente:

$$Y = \frac{s^2 + 8s + 1}{s^2 + 4s + 3}U + \frac{s + 5}{s^2 + 4s + 3} \quad (3.5)$$

- Luego la función de transferencia de la ecuación 1.2 es:

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 8s + 1}{s^2 + 4s + 3} \quad (3.6)$$

A continuación, se presentan los dos gráficos de la respuesta al impulso, de Lazo Abierto y Lazo Cerrado, del sistema con la Función de Transferencia $H_2(s)$.

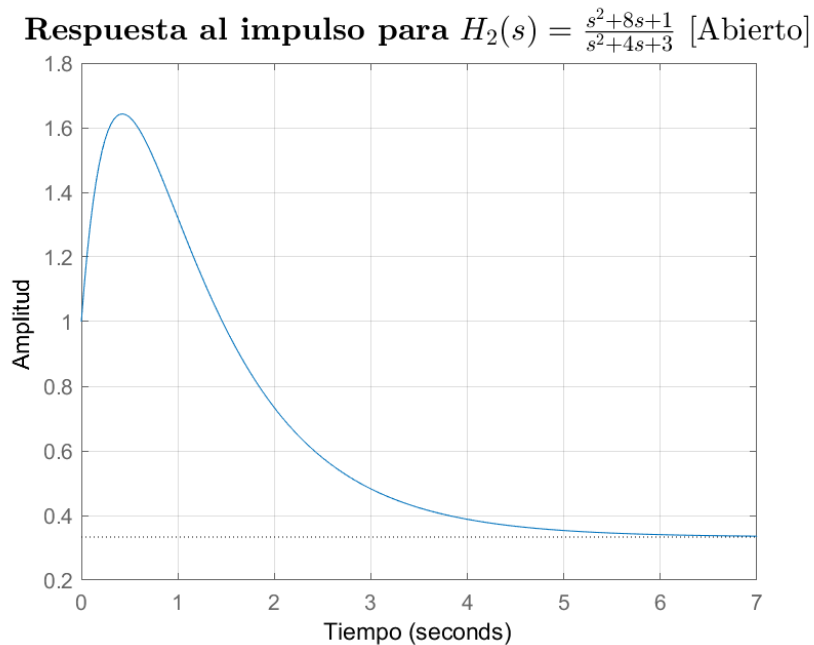


Figura 3.3: Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_2

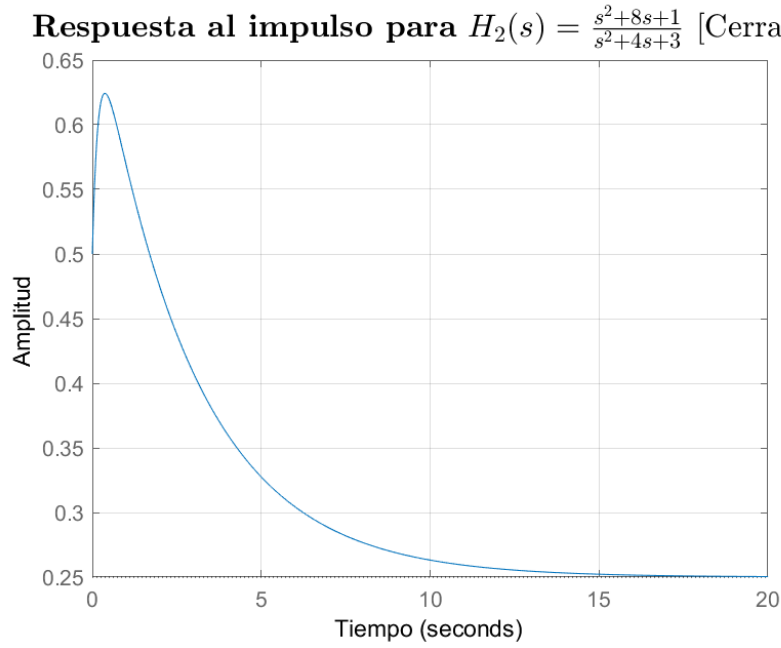


Figura 3.4: Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_2

3.1.3. Ecuación 1.3

- Se aplica Transformada de *Laplace* a la función original y se obtiene:

$$[s^3Y - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0)] + 2[s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0)] + Y = 5[sU - u(0)] \quad (3.7)$$

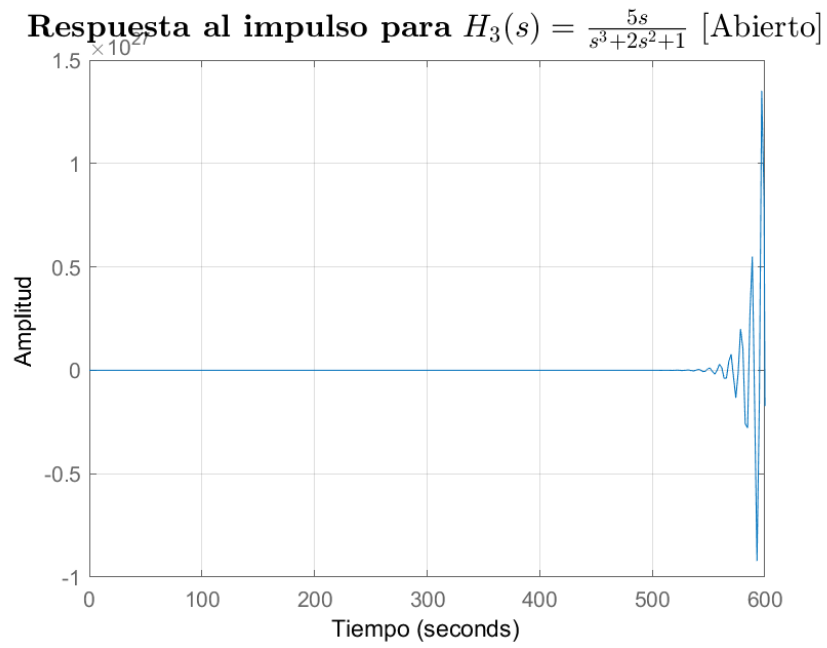
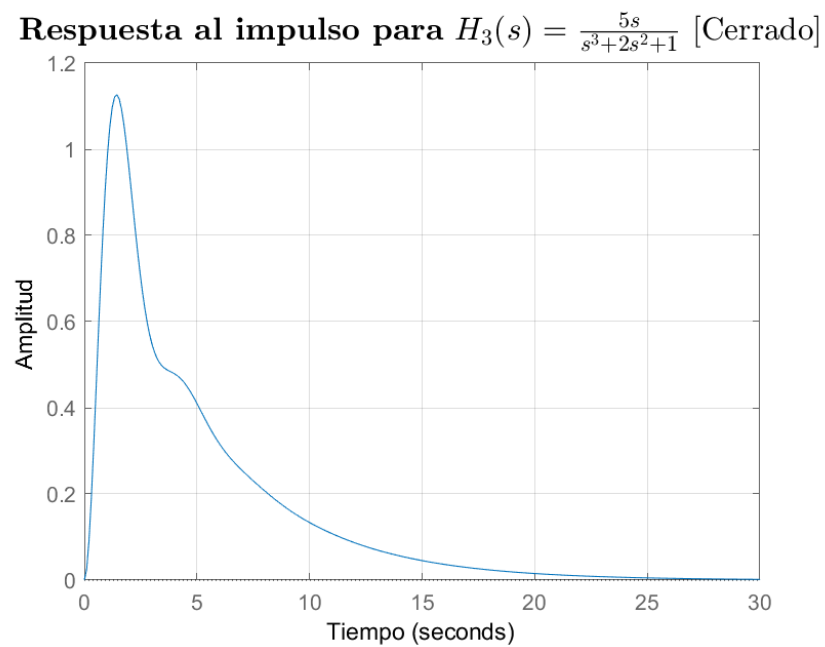
- Luego, se reemplazan los respectivos valores iniciales de la ecuación y se despeja la variable Y , resultando lo siguiente:

$$Y = \frac{5s}{s^3 + 2s^2 + 1}U + \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 2s^2 + 1} \quad (3.8)$$

- Luego la función de transferencia de la ecuación 1.3 es:

$$H_3(s) = \frac{5s}{s^3 + 2s^2 + 1} \quad (3.9)$$

A continuación, se presentan los dos gráficos de la respuesta al impulso, de Lazo Abierto y Lazo Cerrado, del sistema con la Función de Transferencia $H_3(s)$.

Figura 3.5: Respuesta al impulso, de Lazo Abierto, con F. de T. = H_3 Figura 3.6: Respuesta al impulso, de Lazo Cerrado, con F. de T. = H_3

3.1.4. Comparativa entre las funciones 1.1 y 1.2

Datos	Función 1.1	Función 1.2
Ceros	0	$\{-7.8730; -0.1270\}$
Polos	-0.50	$\{-3.00; -1.00\}$
Ganancia Estática	0	0.33
Tiempo de Estabilización	7.8241 [seg]	4.7412 [seg]

Cuadro 3.1: Cuadro comparativo entre funciones 1.1 y 1.2 para los gráficos de lazo abierto

3.2. Parte 2

A continuación, se describe detalladamente la elaboración del diagrama de bloque presentando en la figura 1.1, a través de las funciones de consola de MATLAB.

En primer lugar, se definen cada una de las funciones de transferencia involucradas en los bloques del diagrama. Luego, se procede con la elaboración del sistema propiamente tal.

El diagrama se define en el siguiente orden.

1. Función 4 y 5 en paralelo, a través del comando: `parallel(H4,H5)`

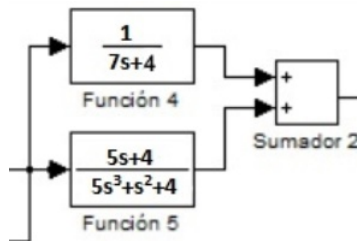


Figura 3.7: Conexión en paralelo Funciones de Transferencia 4 y 5

2. Función 3 y su retroalimentación, a través del comando: `feedback(H3, 1, +1)`

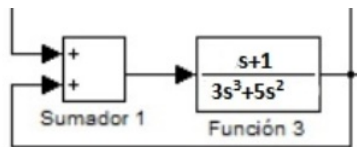


Figura 3.8: Función de Transferencia 3 con Retroalimentación

3. Función 4-5 en serie con Función 3, a través del comando: `series(H3F, H45)`

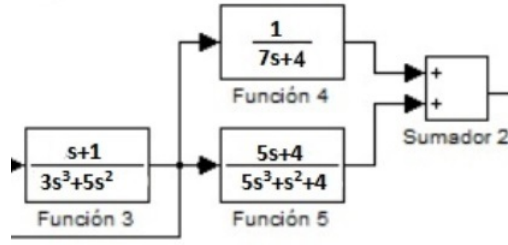


Figura 3.9: Función de Transferencia 3 en serie con 4-5

4. Función 3-4-5 en serie con Función 6, a través del comando: *series(H345, H6)*

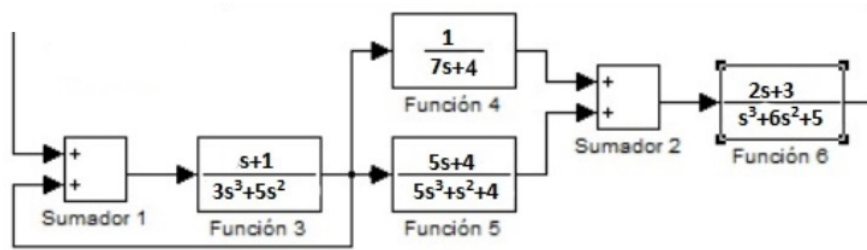


Figura 3.10: Función de Transferencia 3-4-5 en serie con Función 6

5. Función 1 y 2 en paralelo, a través del comando: *parallel(H1, H2)*

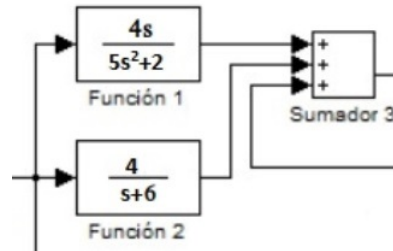


Figura 3.11: Función de Transferencia 1 en paralelo con Función de Transferencia 2

6. Función 1-2 en paralelo con Función 3-4-5-6, a través del comando: *parallel(H12, H3456)*

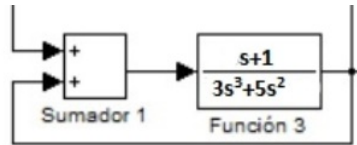


Figura 3.12: Función de Transferencia 1-2 en paralelo con Función de Transferencia 3-4-5-6

A continuación, se presenta la función de transferencia final del sistema separada en numerador ($N(s)$) y denominador ($D(s)$):

$$N(s) = 80 - 872s + 40s^2 + 12360s^3 + 31014s^4 + 43398s^5 + 64333s^6 + 88078s^7 + 83481s^8 + 76376s^9 + 61656s^{10} + 23784s^{11} + 2520s^{12}$$

$$D(s) = -960 - 2800s - 1112s^2 - 652s^3 + 9678s^4 + 35378s^5 + 39513s^6 + 67016s^7 + 80674s^8 + 59543s^9 + 58667s^{10} + 35030s^{11} + 7580s^{12} + 525s^{13}$$

$$H_{final}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.10)$$

Finalmente, en la figura 3.13 se presenta la respuesta al escalón de la Función de Transferencia expresada anteriormente.

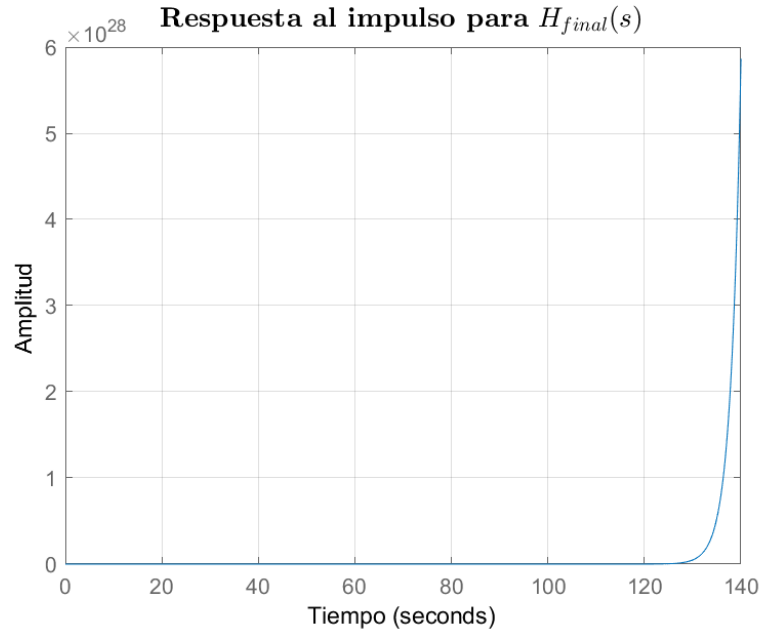


Figura 3.13: Respuesta al escalón de la Función de Transferencia Final 3.10

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

En primer lugar, respecto a las gráficas de lazo abierto y cerrado obtenidas por cada una de las funciones definidas inicialmente, se logra hallar algunas particularidades totalmente diferenciadas entre las funciones de transferencia de primer, segundo y tercer orden. En el caso de las relacionadas con la función de primer orden, ambas muestran en sus gráficas una ganancia final de 0, presentándose diferencias en los tiempos de estabilización. Las de segundo orden se diferencian tanto en la ganancia obtenida como en los tiempos de estabilización, pero ambos valores siguen siendo acotados. En cuanto a las de tercer orden, se logra observar de los gráficos claras diferencias en sus ganancias, donde la de lazo abierto presente una ganancia infinita, mientras que la de lazo cerrado posee una ganancia cero. El origen de la marcada diferencia podría deberse al grado de la función analizada, pero que no es posible afirmar con seguridad dado los pocos sistemas analizados.

En la segunda parte de la experiencia se logra desarrollar el sistema presentado como diagrama de bloques a partir de una reducción de cada uno de los *subsistemas* presentados en el diagrama, obteniéndose finalmente una representación equivalente a través de una única función de transferencia, de la cual se observa su respuesta al impulso, presentada en la figura 3.13, y con la cual se logra apreciar una tendencia hacia el infinito, a medida que avanzaba el tiempo.

A grandes rasgos, se logra realizar un desarrollo y posterior análisis con sistemas lineales, en torno a características como la función de transferencia asociada, tiempo de estabilización, ganancia estática, entre otros. Junto a lo anterior, se logra conseguir una función de transferencia asociada a un sistema en su completitud y realizar su respectivo análisis frente a su respuesta al impulso.

CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA

Acuña, G. (2018). Simulación de Sistemas. Recuperado desde <http://www.udesantiovirtual.cl/moodle2/mod/resource/view.php?id=100208>

Guadarrama, R., Guadarrama, V. & Rodríguez, M. (2014). *Circuitos Eléctricos: Teoría y Práctica*. El libro Catedra. Grupo Editorial Patria. Recuperado desde <https://books.google.es/books?id=vzfABgAAQBAJ>