

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN: LABORATORIO 3

PABLO CÁCERES LUZANTO
BENJAMÍN HERNÁNDEZ CORTÉS

Profesor:

Gonzalo Acuña

Ayudante:

Francisco Muñoz

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS.....	iv
ÍNDICE DE CUADROS	v
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	7
1.2 ESTRUCTURA DEL INFORME	7
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.....	9
2.1 MODELOS Y SISTEMAS DISCRETOS	9
2.2 PROCESO DE DISCRETIZACIÓN	9
2.3 BLOQUEADOR DE ORDEN CERO (ZOH)	9
CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE.....	11
3.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	11
3.2 DISCRETIZACIÓN	11
3.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	13
CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE.....	15
4.1 DIAGRAMA EN <i>SIMULINK</i>	15
4.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	17
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES.....	19
CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA.....	21

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1	Proceso de discretización de una señal continua Pérez, 2013	9
3.1	Respuesta continua al escalón para $H(s)$ (ecuación 3.3)	12
3.2	Respuestas al escalón de $H_1(z)$ y $H_2(z)$ discretizadas con $T = 0.5$ y $T = 0.1$ respectivamente	12
3.3	Respuesta continua al escalón para $H_2(s)$ con $T = 0.1$	13
4.1	Diagrama de bloque configurado en Simulink para la segunda parte	15
4.2	Comparativa entre bloqueadores de orden cero con $T_m = 0.1$ y $T_m = 0.3$	16
4.3	Comparativa entre bloqueadores de primer orden con $T_m = 0.1$ y $T_m = 0.3$	16

ÍNDICE DE CUADROS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día MATLAB (abreviatura de *Matrix Laboratory*) es un IDE de programación en su propio lenguaje M, el cual es muy utilizado principalmente para la manipulación de matrices, la representación gráfica de datos y funciones, y la implementación de distintos algoritmos para llevar a cabo cierto objetivo en particular.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, es que en el presente informe se ahondará y se llevará a la práctica los conceptos fundamentales y que son necesarios conocer para llevar a cabo los objetivos planteados a continuación y en general, a lo largo de todo el curso de Modelación y Simulación.

1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Primera parte

- Se tiene la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales nulas:

$$14\frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} + 21y(t) - 5\frac{du}{dt} - 15u(t) = 0 \quad (1.1)$$

- Tomando como entrada del sistema el escalón: Encontrar la respuesta continua, realizar el proceso de discretización, y luego llevar nuevamente al espacio continuo, analizando el porqué de los resultados. Se deben aplicar distintos tiempos de muestreo. En el caso en que se pasa de la señal discreta a continua, el tiempo de muestreo debe ser de 0.1. Además, se debe comentar respecto al impacto del tiempo de muestreo usado para cada proceso.

- Segunda parte

- Utilizando la herramienta de MATLAB, *Simulink*, y la función de transferencia deducida en la primera parte del Laboratorio, se debe obtener dos gráficos, donde se presente el proceso de ajuste del tiempo de muestreo para discretizar la función y dos gráficos, donde se presente el proceso inverso. La idea principal es ir ajustando el tiempo de muestreo para obtener un buen gráfico, sin requerir demasiadas muestras.

1.2 ESTRUCTURA DEL INFORME

Este documento está conformado por cinco capítulos, el primero y actual es el referente a la **Introducción** del informe. Luego, se presenta un breve **Marco Teórico**, en donde se repasan ciertos conceptos que son necesarios conocer al momento de realizar la experiencia y leer este documento. A continuación, se presentan los capítulos de **Desarrollo** en donde, se explica el desarrollo de cada una de las partes que componen

el Laboratorio, y al mismo tiempo, se presentan los distintos resultados obtenidos. Finalmente, se presentan las **Conclusiones** que se obtienen luego del desarrollo de la experiencia y acorde a los objetivos planteados inicialmente. Además, se presentan todas las referencias expuestas a lo largo del texto en la **Bibliografía**.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 MODELOS Y SISTEMAS DISCRETOS

Mientras que en un Sistema Continuo, las variables de estado cambian de forma continua a lo largo del tiempo, en un Sistema Discreto, dichas variables cambian instantáneamente de valor en ciertos instantes de tiempo. En sistemas de cierta complejidad, puede ocurrir que existan simultáneamente variables de estado continuas y discretas. En aquel caso, dependiendo de la predominancia de una y otras y del objetivo del estudio que se pretende realizar al sistema, se considerará como perteneciente a uno de los dos tipos de sistemas García y Ortega, 2006.

2.2 PROCESO DE DISCRETIZACIÓN

En términos simples, un sistema discretizado corresponde a un sistema continuo muestreado a cierta frecuencia o período según se quiera ver. En general, para realizar esto, se utiliza la misma salida del sistema discreto como entrada de un conversor análogo digital (A/D), lo cual genera la señal continua como una señal digital, la cual a su vez pasa a un controlador digital, generándose una nueva variable de entrada discreta digital. Luego, dicha variable de entrada pasa por un conversor digital análogo (D/A) para generar la retroalimentación necesaria para el correcto funcionamiento del sistema. Cabe destacar, que al ser un sistema con retroalimentación, este corresponde a un sistema de lazo cerrado. Por otra parte, es importante destacar que el conversor digital análogo trabaja como un bloqueador de orden cero (ZOH). Este proceso de discretización de una señal continua queda expuesto en la figura 2.1.

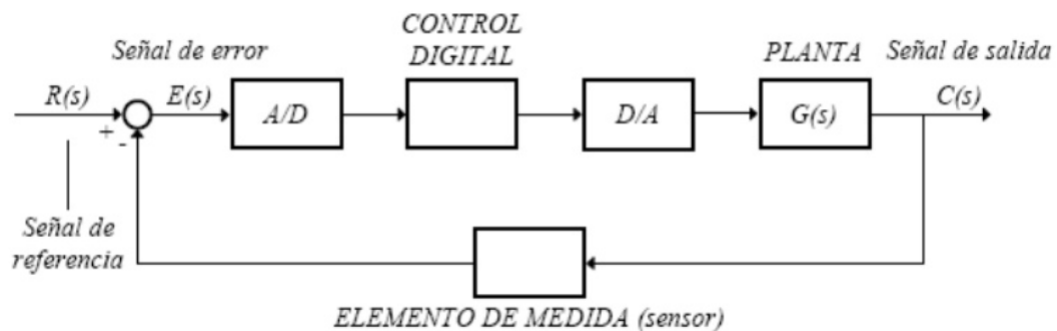


Figura 2.1: Proceso de discretización de una señal continua Pérez, 2013

2.3 BLOQUEADOR DE ORDEN CERO (ZOH)

Un bloqueador de orden cero o ZOH (del inglés, Zero-Order Hold), realiza la interpolación de orden cero de una señal, la cual resulta ser bastante diferente de la señal original, pero es la única forma de interpolación de señales realizable en tiempo real. Para su correcto funcionamiento, se debe tener en cuenta la frecuencia

de muestreo con la que se desea discretizar la señal, cuyo valor, través del Teorema de Shannon, debe ser al menos dos veces la frecuencia máxima de la señal. Por otra parte, se debe tener en cuenta la precisión del sistema numérico utilizado. En caso, de que la precisión sea alta, entonces el error del sistema será mucho menor. Es importante mencionar, que a lo largo del Laboratorio, sobre todo en la segunda parte, se utilizaran bloqueadores de distinto orden, con el único fin de obtener mejores interpolaciones y conversiones de las señales continuas Dulhoste, 2011.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

3.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Ya que la función o señal continua que se desea trabajar se da como una ecuación diferencial, entonces, se debe obtener la función de transferencia de dicha señal, para poder conocer su respuesta al escalón una vez se aplique. De esta forma, al aplicar la Transformada de Laplace a toda la ecuación 1.1, se obtiene lo siguiente:

$$14(s^2Y - sY_o - \dot{Y}_0) - 7(sY - Y_0) + 21Y = 5(sU - U_0) + 15U \quad (3.1)$$

Luego, al reemplazar las variables iniciales por cero, y utilizando operaciones y propiedades algebraicas, se factoriza el lado izquierdo de la ecuación por la variable Y, y el lado derecho por la variable U, resultando lo siguiente.

$$(14s^2 - 7s + 21)Y = (5s + 15)U \quad (3.2)$$

Luego, la función de transferencia $H(s)$ es igual a:

$$H(s) = \frac{Y}{U} = \frac{5s + 15}{14s^2 - 7s + 21} \quad (3.3)$$

3.2 DISCRETIZACIÓN

En primer lugar, se muestra la gráfica de la respuesta al escalón de la función de transferencia $H(s)$ (figura 3.1) expresada en la ecuación 3.3, de forma continua y durante los primeros 15 segundos, ya que al existir un cambio de signo en el denominador de la función, entonces se dice que la función no es estable en el tiempo, y con la acotación del tiempo, es posible ver solo una parte estable.

A continuación, gracias a la función *c2d* de la librería de *MATLAB*, y en conjunto con un bloqueador de orden 0 (ZOH), es posible discretizar la función de transferencia. Además, gracias a la función *dstep* es posible visualizar la respuesta al escalón del sistema resultante (discretizado). Este último proceso, se realizó en dos ocasiones, una con un período de muestreo de 0.5 y otra con un período de muestreo de 0.1. Los resultados obtenidos de lo descrito anteriormente se pueden visualizar en la figura 3.2.

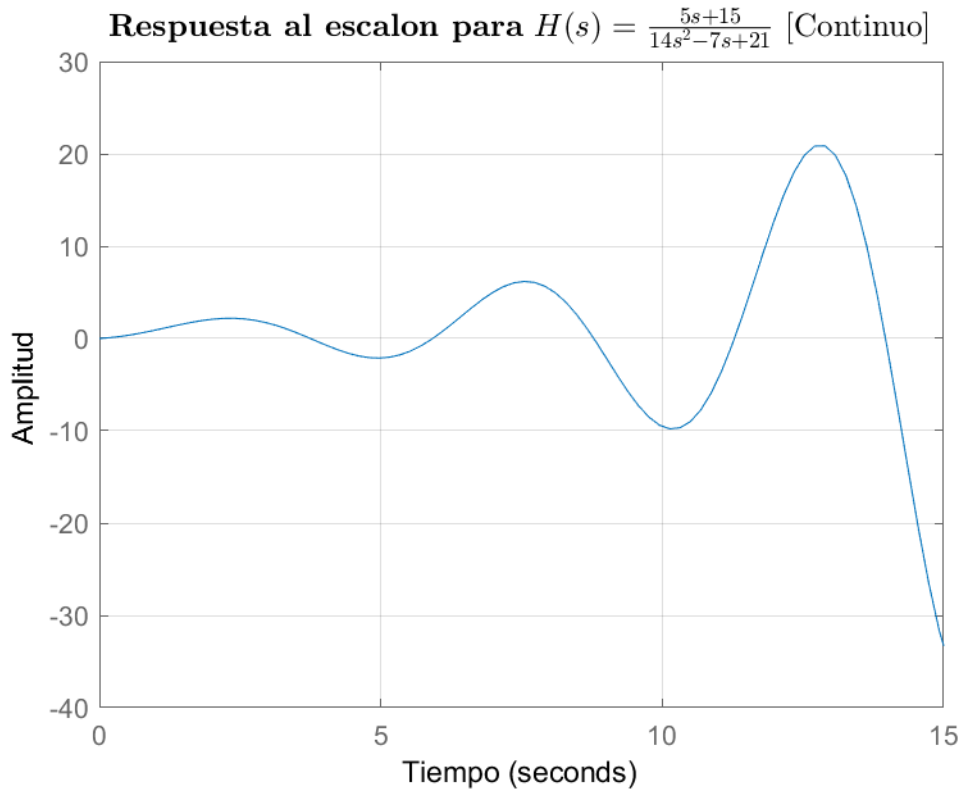


Figura 3.1: Respuesta continua al escalón para $H(s)$ (ecuación 3.3)

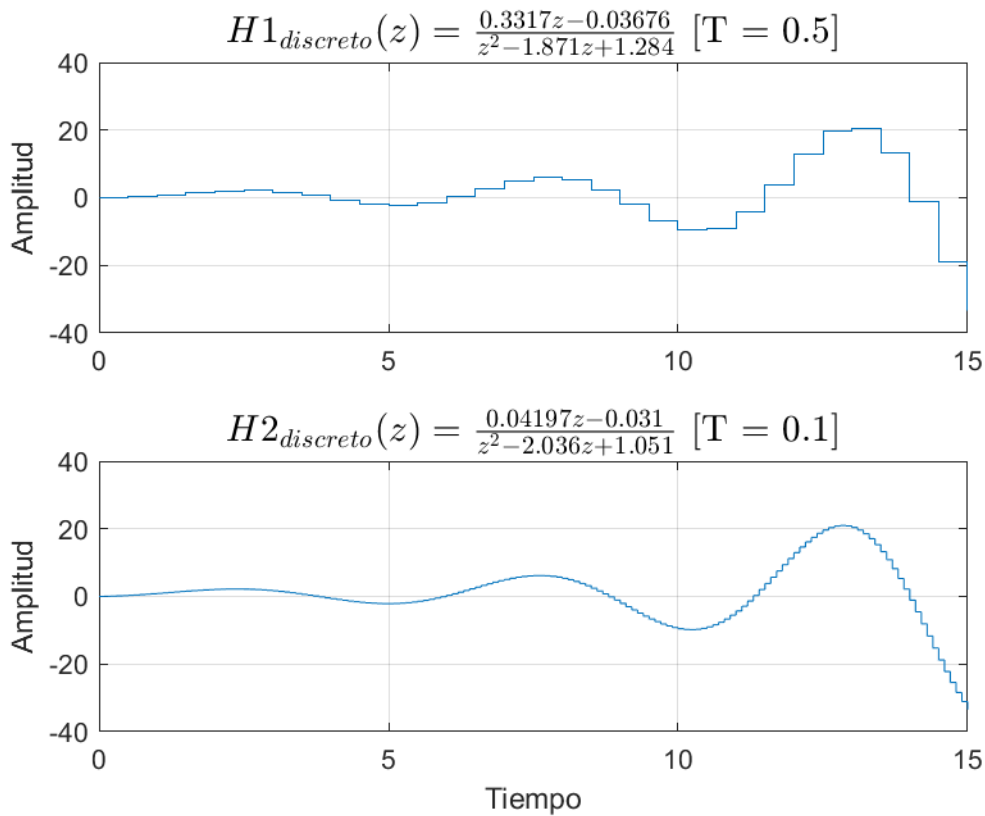


Figura 3.2: Respuestas al escalón de $H_1(z)$ y $H_2(z)$ discretizadas con $T = 0.5$ y $T = 0.1$ respectivamente

Finalmente, el sistema discretizado en el paso anterior con período de muestreo igual a 0.1, se vuelve al tiempo continuo gracias a la función $d2cm$ y a un bloqueador de orden cero (ZOH). El resultado del proceso se ve reflejado en la figura 3.3.

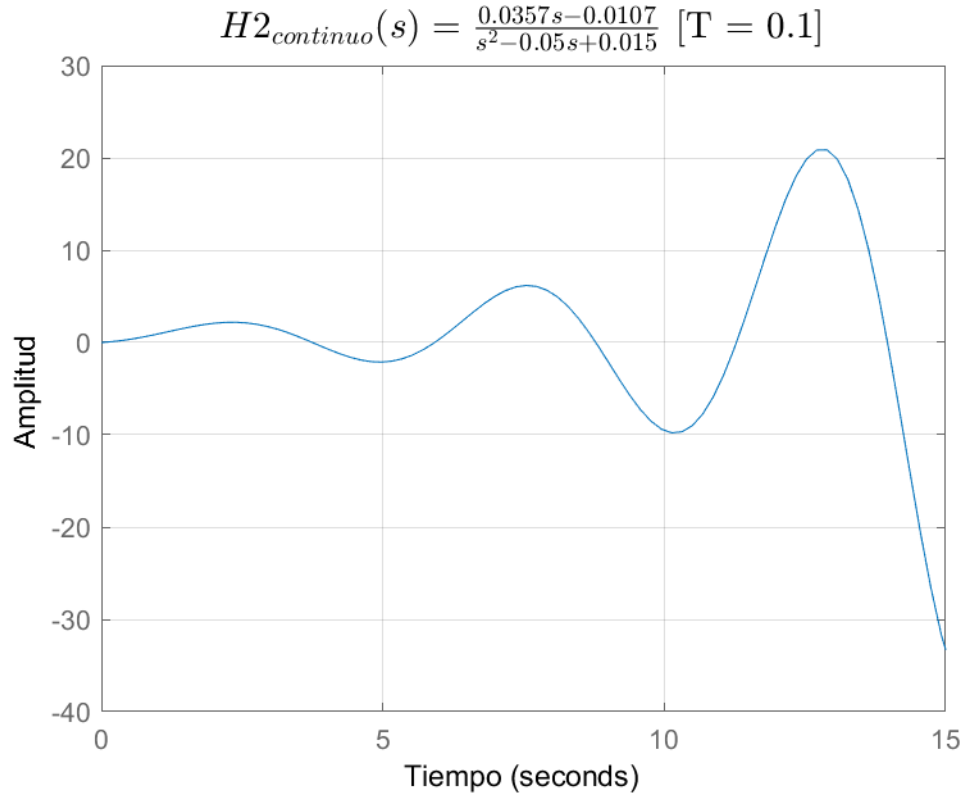


Figura 3.3: Respuesta continua al escalón para $H_2(s)$ con $T = 0.1$

3.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Respecto a los tiempos de muestreo de los gráficos obtenidos en el apartado anterior es posible afirmar que mientras menor sea el tiempo (y mayor la frecuencia), la curva o función obtenida tendrá un mayor parecido a la función original, como se da en el caso de $T = 0.1$ (figura 3.2). De igual forma, para $T = 0.5$ (figura 3.2), la gráfica obtenida no se distorsiona en mayor medida respecto a la original (figura 3.1), pero esta no logra ser una curva lo suficientemente suave en comparación con la original. Sin embargo, siempre hay que respetar lo que dice el Teorema de Shannon, en donde, se debe muestrear por lo menos al doble de la frecuencia máxima para evitar el fenómeno de *aliasing*.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

4.1 DIAGRAMA EN *SIMULINK*

En esta sección, se presenta el diagrama de bloque realizado a través de la herramienta de *MATLAB*, *Simulink*. Dicha herramienta, permite discretizar una función de transferencia usando bloqueadores de orden cero y también, permite regresar al tiempo continuo una de estas utilizando bloqueadores de primer orden, todo a distintas frecuencias. A partir del enunciado, se configuró el diagrama tal como se presenta en la figura 4.1

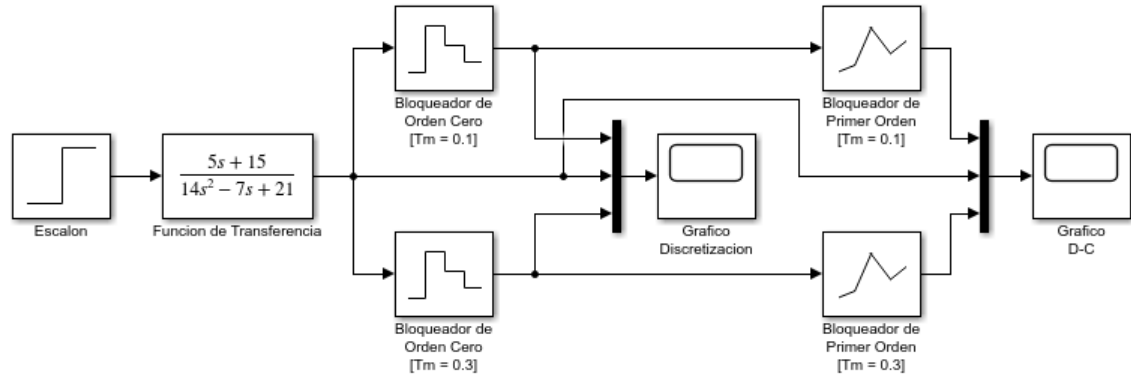


Figura 4.1: Diagrama de bloque configurado en Simulink para la segunda parte

Cada *scope* contiene tres gráficas superpuestas, donde una de ellas corresponde a la respuesta al escalón de la función de transferencia, y las otras 2 corresponden a la discretización de tal respuesta, mediante el uso de un bloqueador de orden cero (ZOH) y bajo un determinado tiempo de muestreo T_m , o bien, a la vuelta al tiempo continuo empleando bloqueadores de primer orden (FOH) y con el mismo tiempo de muestreo T_m definido en los bloqueadores de orden cero. La visualización de una determinada etapa, dependerá del *scope* seleccionado. A continuación, se presentan los gráficos mencionados y resultantes para la etapa de discretización (figura 4.2) y vuelta al tiempo continuo (figura 4.3).

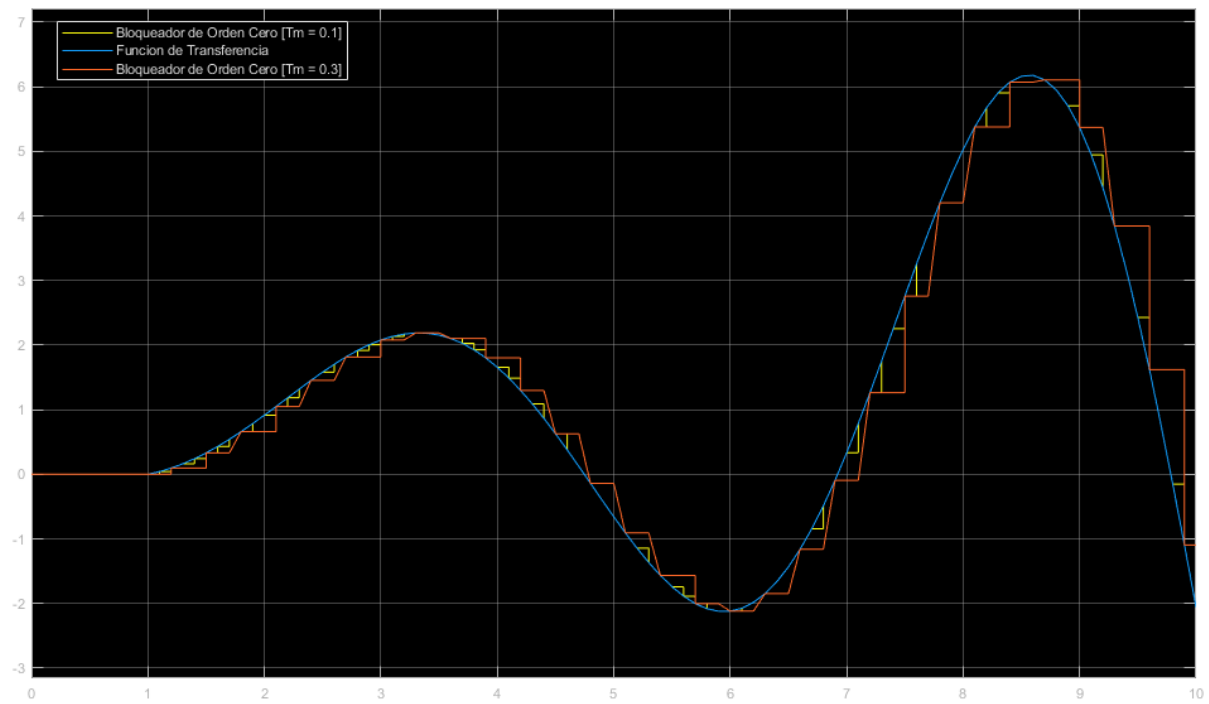


Figura 4.2: Comparativa entre bloqueadores de orden cero con $T_m = 0.1$ y $T_m = 0.3$

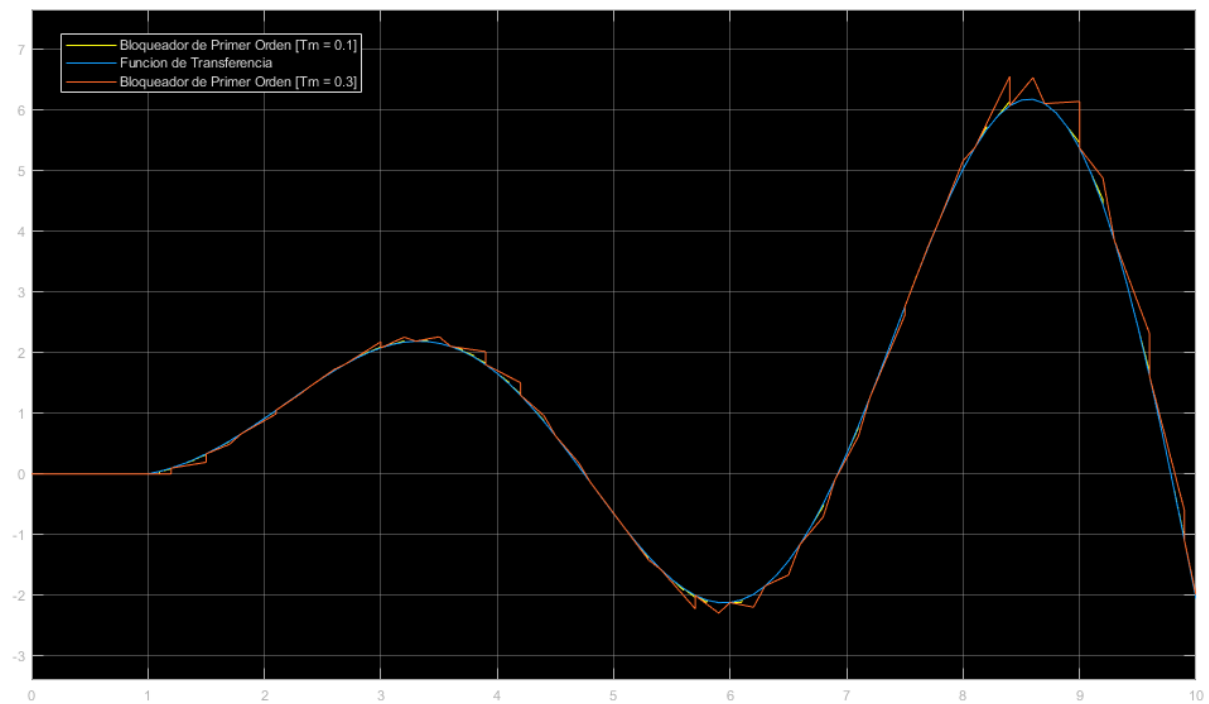


Figura 4.3: Comparativa entre bloqueadores de primer orden con $T_m = 0.1$ y $T_m = 0.3$

4.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Antes de proceder con el análisis de los resultados obtenidos para la segunda parte, es necesario aclarar y recordar que se hará referencia a los bloqueadores de orden cero mediante las siglas ZOH (Zero-Order Hold), mientras que los bloqueadores de primer orden serán referenciados mediante las siglas FOH (First-Order Hold).

En lo que respecta a los gráficos resultantes del proceso de discretización, se logra observar algunas diferencias entre el uso de un ZOH con tiempo de muestreo $T_m = 0.1$ (línea de color amarillo) y la respuesta al escalón para la función de transferencia (línea de color azul), en donde la discretización presenta segmentos poco suaves, en específico, con leves escalones en el y que son característicos de la interpolación hecha por un ZOH. En cuanto a la discretización hecha con un ZOH cuyo tiempo de muestreo fue de $T_m = 0.3$ (línea de color rojo), también se presentan segmentos con escalones, pero que resultan mayormente pronunciados en comparación al anterior ZOH.

Por el lado del proceso de vuelta al tiempo continuo, la señal resultante del FOH definido con tiempo de muestreo $T_m = 0.1$ (línea de color amarillo), y cuya entrada corresponde a la salida del respectivo ZOH con $T_m = 0.1$, presenta diferencias poco significativas respecto a la señal original (línea de color azul) proveniente de la función de transferencia, asemejándose en casi todo su dominio a la señal original; semejanza que el FOH con tiempo de muestreo $T_m = 0.3$ (línea de color rojo) no logra presentar en su totalidad, pues en los segmentos con una curva más pronunciada, la señal resultante deja entrever escalones que poco se ajustan a la señal original.

Las diferencias presenciadas entre los ZOH y FOH se encuentra definida primordialmente por los tiempos de muestreo empleados, pues a medida que se disminuyen estos, la cantidad de muestras que se consiguen para representar la señal original es mucho mayor que empleando un tiempo de muestreo alto, lo que finalmente se traduce en que los bloqueadores puedan realizar una mejor interpolación respecto a la señal original. Tal influencia puede observarse con mayor claridad en la figura 4.3, en donde la señal interpolada con un $T_m = 0.5$ no logra ajustarse adecuadamente en las curvas pronunciadas, debido a la reducida cantidad de puntos muestreados.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En referencia a lo observado y analizado en ambas partes relacionadas con la actual experiencia, es posible concluir que en general, una adecuada discretización de una señal continua depende de varios factores, siendo uno de ellos el tiempo de muestreo empleado el cuál, tal como se pudo corroborar con los resultados en las dos experiencias previas, a medida que el mismo se reducía, la discretización resultante se ajustaba de mejor manera a la señal original. Otro de los factores relevantes al momento de discretizar es el sistema empleado para el mismo proceso, consistiendo en la presente experiencia en un bloqueador de orden cero el cual, por características propias del mismo, definirá finalmente una señal que no podrá asemejarse completamente a la señal original, pero que si será suficiente para reconstruir la misma, siempre y cuando se emplee un tiempo de muestreo que respete el Teorema de Shannon.

Por otro lado e independientemente de las falencias que puedan haberse detectado del proceso de discretización, es importante recalcar su importancia dentro del campo de la computación, dado que la manipulación y transmisión de datos analógicos a través de sistemas computacionales, no puede llevarse a cabo empleando modelos continuos, por ende, se debe recurrir a modelos discretizados que se aproximen a la señal que se desea trabajar y que permitan realizar diversas operaciones computacionales sobre las mismas y con los cuales se puedan realizar los debidos análisis.

Finalmente, y a modo de síntesis, se lograron cumplir con los objetivos planteados al comienzo de la experiencia, los cuales estuvieron orientados principalmente a comprender el proceso de creación de modelos discretos y como estos pueden variar en función de los parámetros definidos para los mismos, como lo es el tiempo de muestreo. Así mismo, con estos nuevos aprendizajes se podrán efectuar estudios más solidos a fenómenos cuyo comportamiento pueda ser representado teóricamente por un modelo continuo.

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

Dulhoste, J. F. (2011). Teoría de Control. Recuperado el 5 de diciembre de 2018, desde http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/djean/index_archivos/Documentos/TC12_Intro_Sistemas_Digitales.pdf

García, Á. & Ortega, M. (2006). Introducción a la simulación de sistemas discretos. Recuperado el 4 de diciembre de 2018, desde <https://github.com/SuarezDiego/monitoreoPython-backend>

Pérez, V. (2013). Unidad 1: Control Digital. Recuperado el 4 de diciembre de 2018, desde <https://es.slideshare.net/euch00/control-digital-17119458>