

VLSI DSP Chapter10 Homework

171180545 集成电路设计与集成系统 王静之

4.考虑 IIR 数字滤波器的传输函数：

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2}}$$

采用 a) 聚类超前 b) 离散超前和分解方法得出一个等效 4 级流水线传输函数
解：

(a) 聚类超前方法

我用 MATLAB 编了一个简单程序实现聚类超前流水线 IIR 滤波器

```
format rat
M=4;
N=2;
a=[4/3 -5/12];
den=[1 -4/3 5/12];
r=zeros(1,M);
r(1,1)=1;
for i=1:M-1
    for k=1:N
        if (i-k)>=0
            r(1,i+1)=r(1,i+1)+a(1,k)*r(1,i-k+1);
        end
    end
end
num=r;
num(1,M+N)=0;
den=round(conv(den,r)*1e8)/1e8;
sys=tf(num,den,1);
zplane(num,den);
```

结果如下：

```
num =

    1          4/3      49/36      34/27      0      0

>> den

den =

    1          0          0          0     -1441/1296     85/162

>> sys

sys =

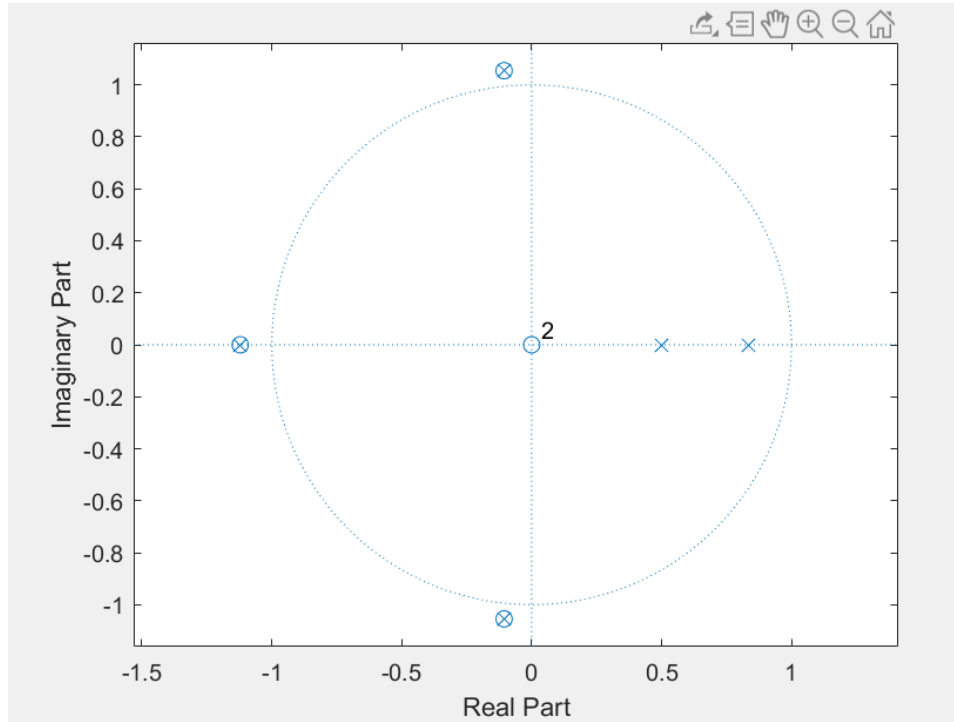
      z^5 + 1.333 z^4 + 1.361 z^3 + 1.259 z^2
      -----
      z^5 - 1.112 z + 0.5247
```

即：

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2}} = \frac{1(\sum_{i=0}^3 r_i z^{-i})}{(1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2})(\sum_{i=0}^3 r_i z^{-i})}$$

$$= \frac{1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{49}{36}z^{-2} + \frac{34}{27}z^{-3}}{1 - \frac{1441}{1296}z^{-4} + \frac{85}{162}z^{-5}}$$

还可以用 MATLAB 画出零极点图，考察聚类超前方法得到的传递函数的稳定性，如下图所示：



在本题中用聚类超前实现的等价 4 级流水线滤波器是不稳定的。实际上书中给出：对于一个传递函数的流水线实现，总在 $M > M_c$ 是稳定的，如果流水线延时不能产生一个稳定的滤波器，那么应该增大 M 的值，直到滤波器稳定为止。对于本题，应有 $M_c = 7$ 。

(b) 离散超前和分解

基于 2 的幂次分解的离散超前流水线表示为：

$$H'(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i} [1 - \sum_{i=1}^N (-1)^i a_i z^{-i}]}{(1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}) [1 - \sum_{i=1}^N (-1)^i a_i z^{-i}]}$$

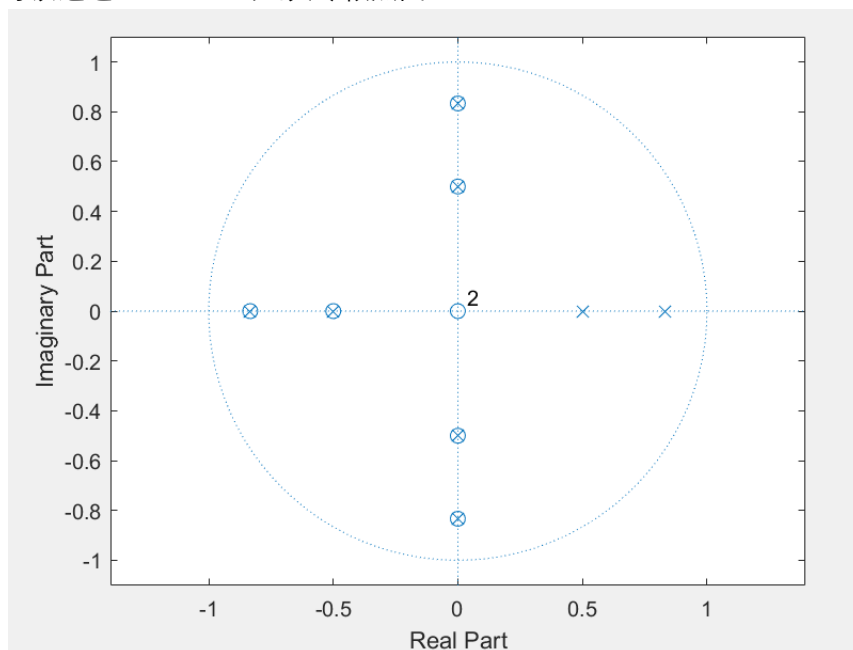
在本题中：

$$H'(z) = \frac{1(1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2})}{(1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2})(1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2})} = \frac{1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2}}{1 - \frac{17}{18}z^{-2} + \frac{25}{144}z^{-4}}$$

$$H''(z) = \frac{(1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{5}{12}z^{-2})(1 + \frac{17}{18}z^{-2} + \frac{25}{144}z^{-4})}{(1 - \frac{17}{18}z^{-2} + \frac{25}{144}z^{-4})(1 + \frac{17}{18}z^{-2} + \frac{25}{144}z^{-4})}$$

$$= \frac{1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{49}{36}z^{-2} + \frac{34}{27}z^{-3} + \frac{245}{432}z^{-4} + \frac{25}{108}z^{-5} + \frac{125}{1728}z^{-6}}{1 - \frac{353}{648}z^{-4} + \frac{625}{2073}z^{-8}}$$

亦可以通过 MATLAB 画出其零极点图：



从中我们可以看到 4 级离散超前本质上就是增加间隔 $\frac{\pi}{4}$ 角度相消零极点。

5.考虑二阶全极点递归滤波器

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.6z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

应用离散超前和分解技术实现 9 级流水线。使用 3×3 推导出传输函数。画出每一部分零极点。

解：

M1=M2=3, 第一级实现 $N(M1-1)=4$ 个零点, 第二级实现 $NM1(M2-1)=12$ 个零点。

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - 0.6z^{-1} + 0.25z^{-2}} = \frac{1}{(1 - p_1z^{-1})(1 - p_2z^{-2})} \\ &= \frac{(1 + p_1z^{-1} + p_1^2z^{-2})(1 + p_1^3z^{-3} + p_1^6z^{-6})}{1 - p_1^9z^{-9}} \frac{(1 + p_2z^{-1} + p_2^2z^{-2})(1 + p_2^3z^{-3} + p_2^6z^{-6})}{1 - p_2^9z^{-9}} \\ &= [(1 + p_1z^{-1} + p_1^2z^{-2})(1 + p_2z^{-1} + p_2^2z^{-2})][(1 + p_1^3z^{-3} + p_1^6z^{-6})(1 + p_2^3z^{-3} + p_2^6z^{-6})] \frac{1}{(1 - p_1^9z^{-9})(1 - p_2^9z^{-9})} \end{aligned}$$

其中 $p_1 = 0.3 + 0.4i$, $p_2 = 0.3 - 0.4i$.上式中红色为分解第一级, 蓝色为分解第二级。

用 MATLAB 实现以上传递函数：

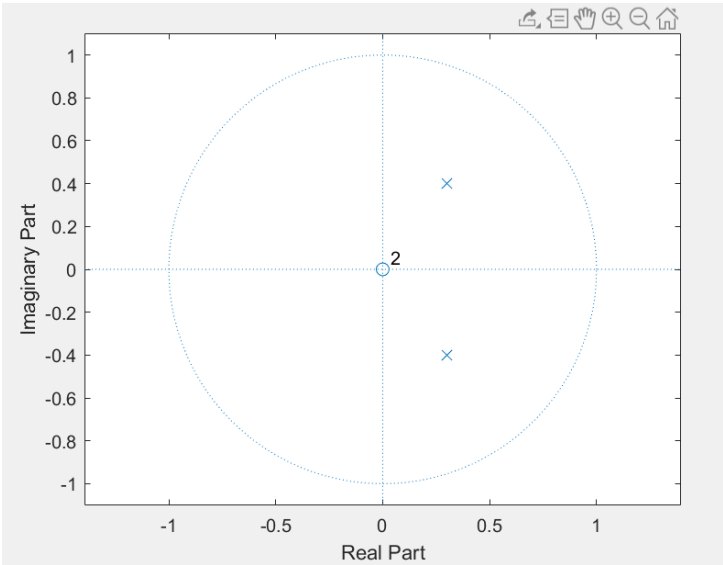
```
p1=0.3+0.4i;
p2=0.3-0.4i;
num1=round(conv([1 p1 p1*p1 0 0 0 0],[1 p2 p2*p2 0 0 0 0])*1e10)/1e10;
%zplane(num1,1);
num2=round(conv([1 0 0 p1^3 0 0 p1^6],[1 0 0 p2^3 0 0 p2^6])*1e10)/1e10;
%zplane(num2,1);
den=round(conv([1 0 0 0 0 0 0 0 -p1^9],[1 0 0 0 0 0 0 0 -p2^9])*1e10)/1e10;
num=conv(num1,num2);
zplane(num,den);
```

得到的结果如下：

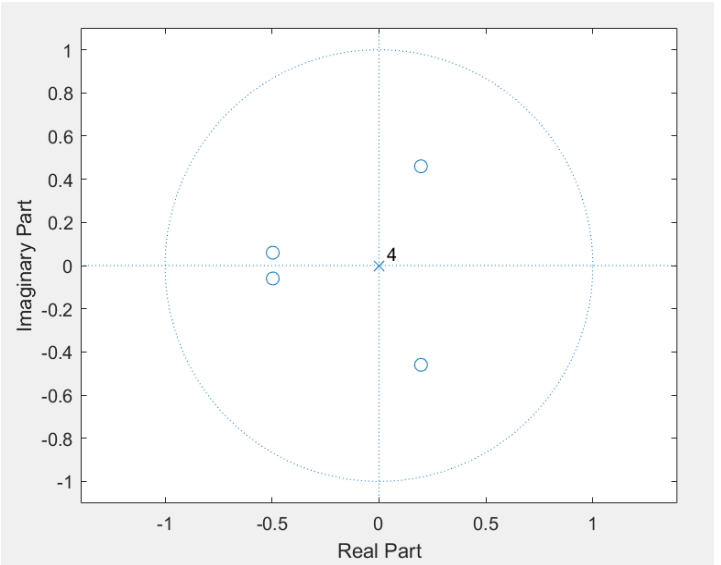
$$\begin{aligned} & z^{24} + 0.6 z^{23} + 0.11 z^{22} - 0.084 z^{21} - 0.0779 z^{20} - 0.02574 z^{19} + 0.004031 z^{18} + 0.008854 z^{17} + 0.004304 z^{16} \\ & + 0.002213 z^{15} + 0.0002519 z^{14} - 0.0004022 z^{13} - 0.0003043 z^{12} - 8.203e-05 z^{11} + 2.686e-05 z^{10} \\ & + 3.662e-05 z^9 + 1.526e-05 z^8 \end{aligned}$$

$$z^{18} + 0.001844 z^9 + 3.815e-06$$

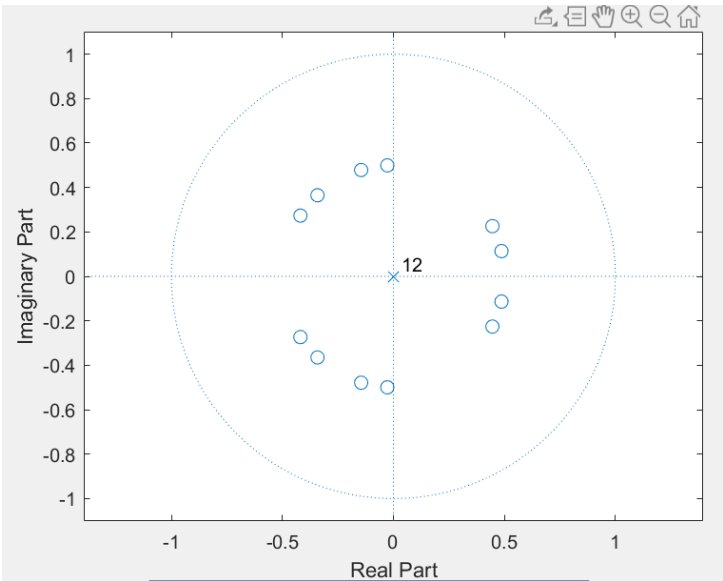
零极点图如下：



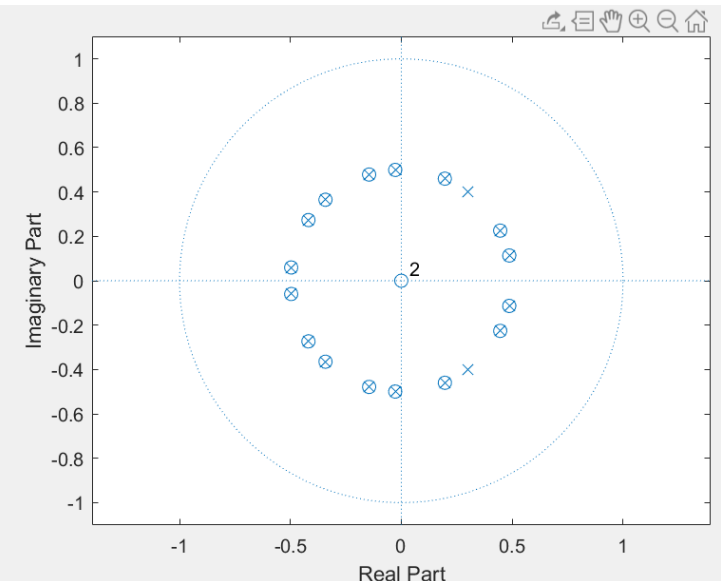
原始传递函数零极点



3x3 分解第一步：4 零点



3x3 分解第二步：12 零点



离散超前方法实现的 9 级流水线滤波器