一、证明 $T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}A_\mu B^{\alpha\beta}{}_\nu$ 是标量。

在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下，有

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}A_\mu B^{\alpha\beta}{}_\nu \to T'^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}A'_\mu B'^{\alpha\beta}{}_\nu \\
&= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\zeta}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\beta}T^{\epsilon\zeta}{}_{\eta\theta}\right)\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}A_\lambda\right)\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}B^{\rho\sigma}{}_\tau\right) \\
&= \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\epsilon}\right)\left(\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\zeta}\right)\left(\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\right)\left(\frac{\partial x^\theta}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma}\right)T^{\epsilon\zeta}{}_{\eta\theta}A_\lambda B^{\rho\sigma}{}_\tau \\
&= \delta^\lambda{}_\epsilon\delta^\tau{}_\zeta\delta^\eta{}_\rho\delta^\theta{}_\sigma T^{\epsilon\zeta}{}_{\eta\theta}A_\lambda B^{\rho\sigma}{}_\tau \\
&= T^{\lambda\tau}{}_{\eta\theta}A_\lambda B^{\eta\theta}{}_\tau
\end{aligned}
$$

即它在坐标变换下保持不变，是一个标量。

二、二阶 N 维对称（反对称）张量有多少个独立分量。

对二阶 N 维对称张量，有 N^2 个限制条件

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$

其中有 N 个条件描述两指标相等的情形，为平凡条件，不对张量分量做出实际的限制

$$T_{\mu\mu} = T_{\mu\mu} \quad (\text{重复指标不求和})$$

余下的 $N^2 - N$ 个限制条件中，由于每个条件中两指标地位相当，两者互换得到同一方程，因此只有一半 $(N^2 - N)/2$ 个是独立的。

根据线性代数相关知识，对于秩为 $(N^2 - N)/2$ 的 $N^2 \times N^2$ 矩阵，其零空间维数为 $N^2 - (N^2 - N)/2 = (N^2 + N)/2$，即二阶 N 维对称张量有 $(N^2 + N)/2$ 个独立分量。

类似地，对二阶 N 维反对称张量

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$$

对两指标相等的情形，有

$$T_{\mu\mu} = -T_{\mu\mu} \quad (\text{重复指标不求和})$$

故

$$T_{\mu\mu} = 0 \quad (\text{重复指标不求和})$$

此时共有 $(N^2 + N)/2$ 个独立条件，故二阶 N 维反对称张量有 $(N^2 - N)/2$ 个独立分量。