

相对论天体力学与天体测量作业

麦晓枫

2020 年 3 月 13 日

$$g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\kappa}$$

度规 $g^{\lambda\nu}$ 为对称张量，曲率张量 $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ 为反对称张量，所以得

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{(\lambda\mu)} R_{[\lambda\mu]\nu\kappa} = \frac{1}{2}(g^{\lambda\mu} + g^{\mu\lambda}) \frac{1}{2}(R_{\lambda\mu\nu\kappa} - R_{\mu\lambda\nu\kappa}) = 0$$

同理得 $g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{(\nu\kappa)} R_{\lambda\mu[\nu\kappa]} = 0$

$$g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -R_{\mu\kappa}$$

$$g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\kappa}$$

$$g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\kappa\nu} = R_{\lambda\nu}$$

结合上面几个缩并结果， $g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}, g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa}, g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa}, g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\kappa\nu}$ 其实本质是相同的，因为仅仅是指标的顺序不同，张量中指标是可以相互替换的。换言之，上面缩并结果可以换种形式表达：

$$g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\kappa}$$

$$g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\kappa}$$

$$g^{\mu\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\lambda\kappa}$$

$$g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\lambda\nu}$$

以及

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

所以，Ricci 张量是唯一可从曲率张量中导出的二阶张量。