1) a) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

* $T(v) = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ -1 + 2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ +3 \end{pmatrix}$

b) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

* $T(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$

$T(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$

* $\begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$

* $-3v_2 = -12$

$\boxed{v_2 = 4}$ $\boxed{v_1 = 3}$

2) $T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$

* misal $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dan $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

* $T(u+v) = T(u) + T(v)$

* $T\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 - (u_2 + v_2) \\ u_1 + v_1 + 2(u_2 + v_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$

$= T(u) + T(v)$ ⟨Terbukti⟩

* $T(cu) = cT(u)$

* $T\begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_1 - ku_2 \\ ku_1 + 2ku_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(u_1 - u_2) \\ k(u_1 + 2u_2) \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{pmatrix} = kT(u)$

3) $f(x) = x + 1$

* asumsikan x dan y adalah vektor R^1

* $f(x+y) = x + y + 1$ (bukan tf linear karena tidak sama dengan $f(x) + f(y)$)

4) a) zero transformation adalah transformasi yang memetakan $T : V \to W$ dan $T(v) = 0$ untuk setiap v didalam v linear

contoh : jika terdapat pemetaan $T : V \to W$ dengan $T(v) = Av$ dan

$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_1, v_2 - v_2)$

maka, $T(u+v) = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_1 + v_1) \\ (u_2 + v_2) - (v_2 + u_2) \end{pmatrix} = 0$

b) identity operator adalah pemetaan $I = V \to V$ dimana $I(v) = v$

contoh : jika terdapat pemetaan $T : V \to W$ dengan $T(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$ maka,

$T(u+v) = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = u + v$

(5) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3\ (0,0,1)$

$T(v_1) = (2,-1,4)$; $T(v_2) = (1,5,-2)$; $T(v_3) = (0,3,1)$

asumsikan,

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1 (1,0,0) + c_2 (0,1,0) + c_3 (0,0,1)$$

dapat ditulis,

$$c_1 = x_1 \; ; \; c_2 = x_2 \; ; \; c_3 = x_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 (1,0,0) + x_2 (0,1,0) + x_3 (0,0,1)$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1 (2,-1,4) + x_2 (1,5,-2) + x_3 (0,3,1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$T(2,3,-2) = \begin{pmatrix} 2(2) + 3 \\ -2 + 5(3) + 3(-2) \\ 4(2) - 2(3) + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6) $$T(v) = Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

a) $v = (2,-1)$

$$T(v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 \\ 2v_1 + v_2 \\ -v_1 - 2v_2 \end{pmatrix}$$

$$T(v) = \begin{pmatrix} 3(2) \\ 2(2) + (-1) \\ -(2) - 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $T \; R^2 \longrightarrow R^3$

$$T(v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 2v_1 + v_2 \\ -v_1 - 2v_2 \end{bmatrix}$$

$$R^2 \longrightarrow R^3$$

7) a) $A_{3\times3}$: untuk $T: R^n \longrightarrow R^m$ $n = 3$ dan $m = 3$

b) $A_{3\times2}$: untuk $T: R^n \longrightarrow R^m$ $n = 2$ dan $m = 3$

c) $A_{2\times4}$: untuk $T: R^n \longrightarrow R^m$ $n = 4$ dan $m = 2$

8) $F(x,y) = (x+y, x-y, 2xy)$

$F(U+V) = (U_1+V_1+U_2+V_2, U_1+V_1-(U_2+V_2), 2(U_1+V_1)(U_2+V_2))$

$= ((U_1+U_2)+(V_1+V_2), (U_1-U_2)+(V_1-V_2), 2(U_1U_2+U_1V_2+V_1U_2+V_1V_2)$

⟨ Bukan Linear ⟩

9) $F(x,y,z) = (2x+y, 5y+z)$

$F(U+V) = (2(U_1+V_1)+(U_2+V_2), 5(U_2+V_2)+(U_3+V_3))$

$= ((2U_1+U_2)+(2V_1+V_2), (5U_2+U_3)+(5V_2+V_3))$

$= ((2U_1+U_2), (5U_2+U_3)) + ((2V_1+V_2), (5V_2+V_3))$

⟨ Linear ⟩

$F(KU) = (2KU_1+KU_2, 5KU_2+KU_3)$

$= (K(2U_1+U_2), K(5U_2+U_3))$

$= K((2U_1+U_2), (5U_2+U_3))$

$= K\,F(U)$

⟨ Linear ⟩

10) kernel dan Jangkauan

- Jika $T: V \longrightarrow W$ adalah transformasi linier, maka himpunan vektor di V yang dipetakan ke 0, dinamakan dengan kernel (atau ruang nol) dari T. himpunan tersebut dinyatakan oleh ker(T)
- himpunan semua vektor di W yang merupakan bayangan dibawah T dari paling sedikit satu vektor di V dinamakan Jangkauan dari T ; himpunan tersebut dinyatakan oleh R(T)