Conjunto de números (reales, enteros, racionales, naturales, irracionales)

En esta unidad vamos a dar una pequeña introducción a las nociones de conjuntos de números más significativas, siendo la más importante el conjunto de los números reales, que se denota por

Pero antes, para llegar a los reales empezaremos por el conjunto de los números naturales.

Números naturales $\mathbb{N}$

Los números naturales son los que desde el principio de los tiempos se han utilizado para contar. En la mayoría de países han adoptado los números arábigos, llamados así porque fueron los árabes quienes los introdujeron en Europa, pero fue en la India donde se inventaron.

El conjunto de los números naturales se denota como $\mathbb{N}$

y se representan así:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Los números naturales se caracterizan por dos propiedades:

- El número 1 es el primer número natural y cada número natural se forma sumándole 1 al anterior.
- Cuando restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no es necesariamente un número natural, y por eso decimos que los números naturales no son cerrados respecto estas dos operaciones. En cambio, sí son cerrados respecto a la suma y la multiplicación, es decir, la suma o multiplicación de dos números naturales da siempre como resultado otro número natural.

Números enteros $\mathbb{Z}$

Cuando aparece la necesidad de distinguir unos valores de otros a partir de una posición de referencia es cuando aparecen los números negativos. Por ejemplo, cuando desde el nivel 0 (nivel del mar) queremos diferenciar por encima del nivel del mar o por debajo del mar (en las profundidades). O en el caso de las temperaturas, positivas o bajo cero. Así podemos estar a 700m de altitud,+700 , o bucear a 10m de profundidad, -10 , y podemos estar a 25 grados,+25 , o a 5 grados bajo 0, -5.

Para denotar los números negativos añadimos un signo menos delante del número.

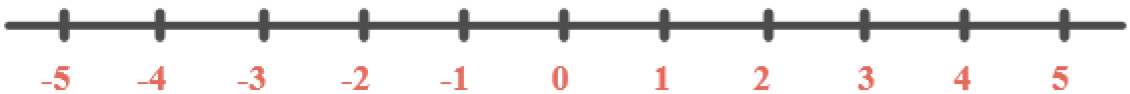
En definitiva, al conjunto formado por los enteros negativos, el número cero y los enteros positivos (o naturales) lo llamamos conjunto de los números enteros.

Se denota con el símbolo $\mathbb{Z}$

y se pueden escribir como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Los representamos en una recta numérica de la siguiente manera:



Una propiedad importante de los números enteros es que son cerrados respecto a las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, es decir, la suma, la resta y la multiplicación de dos números enteros da otro número entero. Nótese que el cociente de dos enteros, por ejemplo 3 y 7, no necesariamente es un entero. Así, la operación división no es cerrada respecto a los números enteros.

Números racionales $\mathbb{Q}$

Los números racionales son los números que resultan de la razón (división) entre dos números enteros. Se denota el conjunto de los números racionales como $\mathbb{Q}$, así que:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

El resultado de un número racional puede ser un $\left(-\frac{8}{4} = -2\right)$entero o bien un decimal ($\frac{6}{5} = 1{,}2$), positivo o negativo. Además, entre los decimales puede ser de dos tipos, con un número limitado de cifras que llamaremos decimal exacto ($\frac{88}{25} = 3.52$), o bien con un número ilimitado de cifras, que llamaremos decimal periódico($\frac{5}{9} = 0{,}5555 \ldots . = 0.\hat{5}$)

Se llaman periódicos porque en la parte decimal hay una o más cifras que se repiten. Si justo los números que se repiten comienzan a las décimas, los llamamos periódicos puros (6,88888….=$6.\hat{8}$), mientras que en caso contrario los llamamos periódicos mixtos $(3,415626262\ldots = 3,415\widehat{62})$

Obsérvese que todo entero es un número racional, ya que, por ejemplo, $5 = \frac{5}{1}$; por tanto Z, es un subconjunto de Q. De la misma manera que los naturales son también enteros, concretamente enteros positivos. Así tenemos que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Los números racionales son cerrados no sólo respecto de las operaciones de adición, multiplicación y sustracción, sino también de la división (excepto por 0).

Números irracionales $\mathbb{I}$

Hemos visto que cualquier número racional se puede expresar como un número entero, un decimal exacto o un decimal periódico.

Ahora bien, no todos los números decimales son exactos o periódicos, y por tanto, no todos los números decimales pueden ser expresados como una fracción de dos enteros.

Estos números decimales que no son exactos ni periódicos se caracterizan por tener infinitas cifras decimales no periódicas, es decir, que no se acaban nunca y no tienen un patrón de repetición.

Obsérvese que el conjunto de números irracionales es el complementario del conjunto de números racionales.

Algunos ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}\,, \pi, \sqrt[3]{5}$ donde por ejemplo $\pi = 3.1415926535 \ldots$ proviene de la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Números reales $\mathbb{R}$

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se denomina conjunto de los números reales y se denota como $\mathbb{R}$.

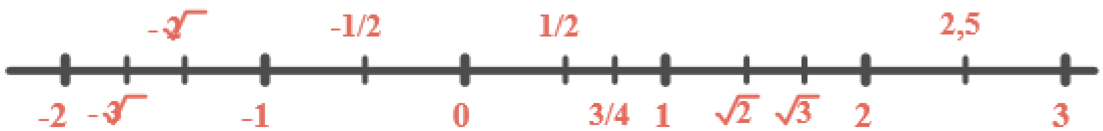
Así pues tenemos que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Tanto los números racionales como los números irracionales son números reales.

Una de las propiedades más importantes de los números reales es poderlos representar por puntos en una línea recta. Se elige un punto llamado origen, para representar el 0, y otro punto, comúnmente a la derecha, para representar el 1.

Resulta así de manera natural una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales, es decir, que cada punto de la recta representa un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. Llamamos a esta recta la recta real. En la siguiente imagen se puede ver un ejemplo:



Fuente: Sangaku S.L. (2020) Conjunto de números (reales, enteros, racionales, naturales, irracionales). sangakoo.com. Recuperado de https://www.sangakoo.com/es/temas/conjunto-de-numeros-reales-enteros-racionales-naturales-irracionales