CAPÍTULO 4. Relaciones y funciones

En el Capítulo 2 se ha definido el *producto cartesiano* entre dos conjuntos A y B como:

$$AXB = \{(a;b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

Una *relación binaria* es cualquier subconjunto de un producto cartesiano entre *A* y *B*, es decir, $R \subseteq AXB$
Una relación *R* se define como:

$$R: A \to B / R = \{(a;b)/(a;b) \in AXB\}$$

Dominio y conjunto imagen de una relación

Se denomina *dominio de una relación*, *Dom (R)* al conjunto formado por todas las *primeras componentes* de los pares ordenados que forma la relación. Mientras que *conjunto imagen de una relación*, *Im(R)* es aquel formado las *segundas componentes* de los pares que pertenecen a la relación.

Relación binaria homogénea es aquella que está incluida en *AXA*

Una *relación binaria homogénea* puede ser representada por medio de un gráfico denominado *dígrafo*[1] o mediante una matriz, denominada *matriz de adyacencia*, M_a

Para construir el dígrafo se necesita nodos y arista:
-Los nodos (puntos) representan todos los elementos del conjunto A
-Las aristas son arcos dirigidos (flechas) que representan cada par ordenado de la relación.

Para construir una matriz de adyacencia:
-Se crea una matriz cuadrada de orden #*A* x #*A* donde las filas y las columnas representan los *nodos* del dígrafo.
-Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1.

De modo que se obtiene una matriz que representa la cantidad de aristas entre cada par de nodos. Además, existe una matriz de adyacencia única para cada grafo (sin considerar las permutaciones de filas o columnas), y viceversa)

Camino y longitud de camino

Un *camino de un dígrafo* es una sucesión de nodos que va desde un nodo a otro.

La *longitud de un camino* es la cantidad de aristas que se atraviesa desde un nodo a otro en dicho camino
La cantidad de caminos $C_{i,j}(k)$, atravesando *k*-aristas desde el nodo *i* hasta el nodo *j*, se conoce por cada elemento de la potencia k-ésima de la matriz de adyacencia:

$$C_{i,j}(k) = A^k$$

Propiedades de una relación binaria homogénea

Sean el conjunto *A* y la relación $R \subseteq AXA$:

---

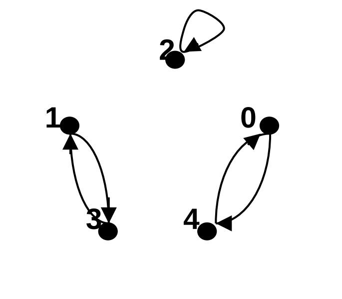
[1] En el capítulo 5 se profundizará sobre este concepto.

Propiedad	***Definición***
Reflexiva	$\forall x \in A: x \in A \Rightarrow (x;x) \in R$
Arreflexiva	$\forall x \in A: x \in A \Rightarrow (x;x) \notin R$
Simétrica	$\forall x, y \in A: (x;y) \in R \Rightarrow (y;x) \in R$
Asimétrica	$\forall x, y \in A: (x;y) \in R \Rightarrow (y;x) \notin R$
Antisimétrica	$\forall x, y \in A: (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$
Transitiva	$\forall x, y, z \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Por ejemplo, sea el conjunto *A = {0;1;2;3;4}* y la relación $R \subseteq$ *AXA* que se denota de la siguiente manera:

R: A→A/R= {(x; y) /x + y=4} = {(0;4), (1;3), (2;2), (3;1), (4;0)}

a) *Dom(R)= {0,1,2,3,4}* e *Im(R)= {4,3,2,1,0}*
b) Dígrafo y matriz de adyacencia:



$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) Propiedades:

Propiedad	***Justificación***
Reflexiva	No, porque 1 $\in$*A* pero (1;1) $\notin$*R*
Arreflexiva	No, porque 2 $\in$*A* y (2;2) $\in$*R*
Simétrica	Sí, porque $\forall x, y \in A: (x;y) \in R \Rightarrow (y;x) \in R$
Asimétrica	No, porque (1;3) $\in$*R* y (3;1) $\in$*R*
Antisimétrica	No, porque (1;3) $\in$*R* y (3;1) $\in$*R* pero 1≠3
Transitiva	No, porque (1;3) $\in$*R* y (3;1) $\in$*R* pero (1;1) $\notin$*R*

Observación: Para fundamentar que una propiedad no se cumple basta con un contraejemplo.

Función
Se define como una *función* del conjunto A (*dominio*) al conjunto B (*codominio*) a toda relación entre A y B tal que todo elemento de A se corresponde con un único elemento en B.

$f: A \rightarrow B / f(x) = y$ tal que $x \in A$ e $y \in B$, *x* recibe el nombre de variable *independiente* e *y* variable *dependiente*

Función lineal
Se define *función lineal* como:

$$f: \Re \rightarrow \Re / f(x) = mx + b \qquad \text{con } m \neq 0$$