CAPÍTULO 2. Matrices

Se denomina *matriz de orden mxn* a una distribución elementos en una tabla de *m* filas y *n* columnas. Se denota con letras de imprenta mayúsculas.

Simbólicamente una matriz A de orden *mxn* resulta:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Un elemento cualquiera de la matriz Ase expresa cona_{ij}. Si $a_{ij} \in \Re$ la matriz A se denota $A \in \Re^{mxn}$

Operaciones con matrices

a) *Transposición de matrices:* Sea $A \in \Re^{mxn}$, la matriz transpuesta de A, $A^t \in \Re^{nxm}$ que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas de A. Por ejemplo, sea la matriz: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ entonces

$$M^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

b) *Multiplicación de un número real por una matriz:* Sea $A \in \Re^{mxn}$ y $k \in \Re$, $k.A \in \Re^{mxn}$ y se obtiene al multiplicar cada elemento de A por k.Por ejemplo, sea la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad kM = \begin{bmatrix} 1k & 0 \\ -2k & 3k \\ 5k & -7k \end{bmatrix}$$

c) *Adición de matrices:* Sean $A \in \Re^{mxn}$ y $B \in \Re^{mxn}$ se define $A+B \in \Re^{mxn}$ una matriz cuyos elementos se obtiene de la suma entre los elementos correspondientes de una y otra matriz, por lo tanto es necesario que las matrices sean de igual tamaño. Por ejemplo, sean las matrices:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ entonces M+P= P+M resulta $\begin{bmatrix} 1+2 & 0+4 \\ -2+(-1) & 3+9 \\ 5+8 & -7+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 12 \\ 13 & 0 \end{bmatrix}$

Nota: La diferencia entre matrices no se define, ya que A-B= A+(-B)

d) *Producto de matrices:* Sean $A \in \Re^{mxp}$ y $B \in \Re^{pxn}$ se define $A.B \in \Re^{mxn}$ cuyos elementos son la sumatoria de los productos obtenidos al multiplicar cada uno los elemento de cada fila de A por los elementos de la columna de B. La condición necesaria para multiplicar dos matrices es que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. Por ejemplo, sean las matrices:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ y $H = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ como $M \in \Re^{3x2}$ y $H \in \Re^{2x3}$entonces $M.\,H \in \Re^{3x3}$ y resulta

$$M \cdot H = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 8 \\ -2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & -2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 & -2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 0 & 5 \cdot (-2) + (-7) \cdot 4 & 5 \cdot 5 + (-7) \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -6 & 16 & 14 \\ 15 & -38 & -31 \end{bmatrix}$$

Nota: La multiplicación entre matrices **no** cumple **la propiedad conmutativa**, es decir, $A.B \neq B.A$

Algunas matrices particulares

-***Matrices cuadradas****:* Son aquellas que poseen la misma cantidad de filas que de columnas, es decir, de orden nxn.

-***Diagonal de una matriz de nxn****:* es el conjunto formado por los elementos de la matriz tales como:$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_n$

-***Matrices triangulares****:* Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal son ceros.

- ***Matriz diagonal:*** Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos por encima y por debajo de la diagonal son ceros.

-***Matriz identidad*** **(**I): Es una matriz diagonal de relevancia por su rol en varios procedimientos cuyos elementos de la diagonal son unos.

-***Matrices simétricas:*** Son aquellas matrices cuadradas que al hallar la traspuesta se obtiene la misma matriz.

-***Matrices nulas****:* Son aquellas matrices cuyos elementos son todos ceros

Determinante de una matriz cuadrada

Se define *determinante de una matriz cuadrada A*, *det(A)* a un número que real que se obtiene, así:

$$det(A) = \begin{cases} si \quad A \in \Re^{1x1}, & \det(A) = a_{11} \\ si \quad A \in \Re^{2x2}, & \det(A) = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} \\ si \quad A \in \Re^{nxn} & con \quad n > 2 \text{, } por\, desarrollo\ de\ \ cofactores\, de\ los\, elemento \\ & de\ una\ línea\, de\, la\, matriz\, A \end{cases}$$

Matriz inversa

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden n, se dice que A es la matriz inversa de B o que B es la matriz inversa de A si sólo si $AB=BA=I_n$. Si una matriz **posee** inversa se dice que esta es *regular*, en caso contrario es *singular*.

Para expresar que una matriz es inversa de otra se usa una expresión que para nada debe confundirse con la utilizada en potenciación.

*B es inversa de A*se denota B $= A^{-1}$

Algunas propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$
b) Si A es regular posee una **única** inversa
c) $det\ (A) \neq 0$ si y sólo si A es regular

Cálculo de la matriz inversa: Método de Gauss-Jordan

1) Se construye una matriz donde se puede identificar dos bloques $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I_n}]$. En el primero de ellos se dispone la matriz A, a la cual se quiere encontrar su inversa y en el segundo bloque, se ubica la matriz identidad de igual orden que A

2) En la matriz del primer bloque se localiza la primera columna de izquierda a derecha, distinta de cero, y en esta se busca un elemento no nulo llamado *pivote* preferiblemente un uno (si es posible) si no lo fuera reemplazamos dicha fila por otra obtenida al dividir la misma por el valor del *pivote*.

3) Si es necesario, se pude intercambiar la primera fila con otra que contiene un elemento no nulo.

4) Se transforma en cero todos los elementos ubicados debajo y por encima del pivote, obtenidos mediante el reemplazo de distintas filas (exceptuando la del pivote) por otras halladas al sumar o restar estas filas por múltiplos la fila del pivote.

5) Se repiten los pasos del 2 al 4. El proceso finalizará cuando ya no pueda elegirse un pivote o bien en el primer bloque se identifique la matriz identidad: $[\boldsymbol{I_n}|\boldsymbol{A^{-1}}]$

Procedimiento de como hallar la Matriz inversa:

$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ det(M)= 2-(-3)=5 como $5 \neq 0 \Rightarrow$ M tiene inversa, es Regular

Para calcular la inversa, se dispone la matriz dada con la matriz identidad a la derecha:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$

Paso 1 $f_1 : 2 = f_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

Paso 2 $3.f_1 + (-f_2) = f_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right) =$$

Paso 3 $-5.f_1 + f_2 = f_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right)$$

Paso 4 $f_1 :(-5) = f_1$ $f_2 : (-5/2)= f_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 2/5 \end{array}\right) \Rightarrow \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$