CAPÍTULO 5. Grafos y árboles

Un *grafo* es una estructura formada por *vértices* unidos a través de *arcos* o *aristas* y se utiliza para representar determinadas situaciones. Formalmente se define de la siguiente manera:

Un grafo es una terna **G (V; A; φ)** formada por tres componentes:

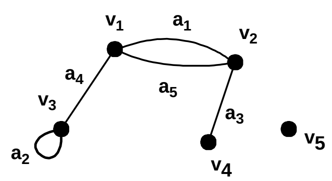
V: *Un conjunto no vacío de vértices*
A: *Un conjunto de aristas*
φ: *una relación de A →V llamada de "incidencia"*

Aristas incidentes en un vértice: Son aquellas que tienen a dicho vértice por extremo.

Ejemplo: Sea el grafo G (V; A; φ) definido por:
V= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; A=$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$; la relación de incidencia:

a_i	$\varphi(a_i)$
1	$\{v_1,v_2\}$
2	$\{v_3\}$
3	$\{v_4, v_2\}$
4	$\{v_1,v_3\}$
5	$\{v_1,v_2\}$

Representación del grafo G:



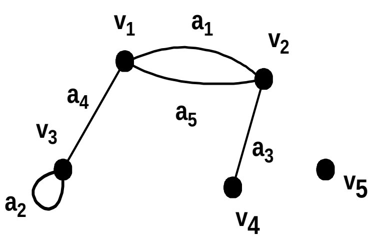
Algunas definiciones relativas a vértices y aristas

Sean v_1 y v_2 dos vértices y a_1 y a_2 aristas de un grafo G se dice que:

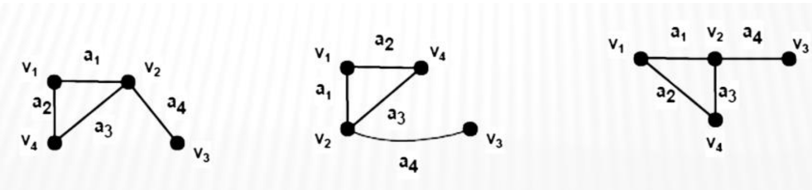
- v_1 y v_2 son *vértices adyacentes* sí y sólo sí existe una arista a1 tal que **φ** $(a_1) = \{v_1, v_2\}$.
- v_5 es un *vértice aislado* sí y sólo sí no es adyacente a ningún otro.
- a_1 y a_5 son *aristas paralelas* si $a_1 \neq a_5$ y **φ** (a_1) = **φ** (a_5)
- a_1 y a_3 son *aristas adyacentes* si $a_1 \neq a_3$, no son paralelas y tienen un único vértice en común.
- a_2 es un *lazo o bucle* sí y sólo sí está comprendida en un mismo vértice.

Un grafo es *simple* cuando no tiene ni aristas paralelas ni bucles

Ejemplo:

Grafo G 	*v_3 y v_1 son *adyacentes* porque existe una arista a_1 tal que $\varphi(a_4) = \{v_1, v_3\}$ *v_5 es un *vértice aislado* porque no es adyacente a ningún otro. * a_1 y a_5 son *aristas paralelas* pues $a_1 \neq a_5$ y $\varphi(a_1) = \varphi(a_5)$ *a_3 y a_5 son *aristas adyacentes* porque $a_3 \neq a_5$, no son paralelas y tienen un único vértice en común. a_2 es un *lazo o bucle* porque está comprendida en un mismo vértice, v_3 **G *no es un grafo simple* ya que tiene bucles y aristas paralelas.**

Observación: Es importante resaltar que en la definición de grafo no se especifica la ubicación de los vértices ni tampoco la longitud, la forma o la posición de las aristas. De manera que NO EXISTE una única representación para un grafo.



Matrices de adyacencia e incidencia

Dado un grafo **G (V, A, φ)** con n vértices y m aristas:

- La *matriz de adyacencia* es una matriz cuadrada de orden nxn, M_a donde las filas y las columnas representan los n vértices del grafo. Y a cada elemento de la matriz se le asigna el valor 1, si son vértices adyacentes y 0, en caso contrario. Es simétrica
- La *matriz de incidencia* es una matriz de dimensión nxm, M_i dónde las filas representan los n vértices y las m columnas representan las m aristas del grafo. Y a cada elemento de la matriz se le asigna el valor 1, si la arista incide en el vértice y 0, en caso contrario.

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de adyacencia

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de incidencia

Grado o valencia de un vértice

Se define grado o valencia de un vértice v_1 a la cantidad de aristas incidentes en dicho vértice.

$$\mathbf{g(v_1) = k} \text{ siendo } \mathbf{k} \in \mathbf{N_0}$$

- Un vértice se lo llama *aislado* si y sólo si su grado es 0

- Si un vértice tiene grado igual a 1 se lo denomina *vértice pendiente*.
- Si un vértice presenta únicamente un bucle el grado del vértice es 2.

En el grafo del ejemplo anterior se tiene:

$$\mathbf{g(v_1) = 3; \quad g(v_2) = 3; \quad g(v_3) = 3; \quad g(v_4) = 1; \quad g(v_5) = 0}$$

Caminos, ciclos y conexidad

Camino de un grafo: Es una sucesión de aristas adyacentes Para denotarlo se utiliza una *n-ada de vértices* que tiene por extremos a dichas aristas.

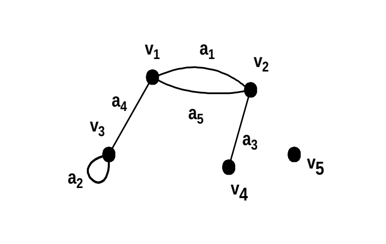
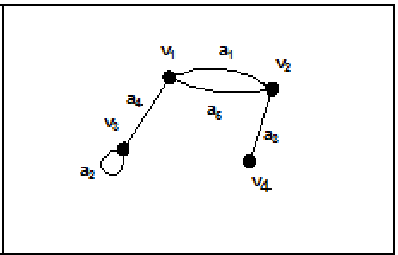
Ciclo o circuito de un grafo**:** Es un camino cerrado. El vértice inicial coincide con el final.

Longitud del camino: Es la cantidad de aristas que componen dicho camino.

Camino simple: Es aquel camino en el que todos los vértices son distintos.

Un grafo se lo llama *conexo* si y sólo si existe algún camino entre todo par de vértices. En caso contrario es no conexo.

Ejemplo:

	
G_1: Grafo No Conexo	***G_2: Grafo conexo***

Si por caso, se toma el grafo G_1, un posible camino desde el vértice v_3 hasta el v_4 puede ser:
$C_1 = (v_3; v_1; v_2; v_4)$ cuya longitud es, $Long(C_1) = 3$
Y un posible circuito de longitud 4 cuyo punto de partida es v_3:

$$C_2 = (v_3; v_1; v_2; v_1; v_3)$$

Caminos y ciclos eulerianos

Se denomina *camino euleriano* de un grafo al camino que pasa por todas las aristas del grafo una sola vez.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista un camino euleriano es:

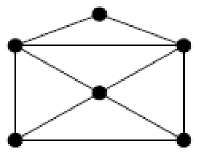
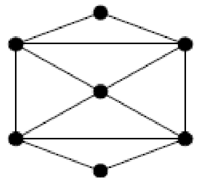
El grafo debe ser conexo, y debe tener sólo dos vértices de grado impar

Se denomina *ciclo euleriano* al ciclo que pasa por todas las aristas una sola vez.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista un ciclo euleriano es:

El grafo debe ser conexo, y todos los vértices deben tener grado par

Ejemplo:

	
Grafo que tiene un camino euleriano	***Grafo que tiene un ciclo euleriano***

Árbol binario

Un **árbol binario** es grafo conexo y sin ciclos formado por un conjunto finito de vértices llamados nodos y un conjunto finito de arcos dirigidos llamados ramas que unen pares de nodos tal que:

a) Si desde un nodo n_1 existe una rama hacia un nodo n_2 se dice que:

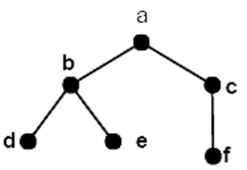
n_2 *es hijo de* n_1

b) Cada nodo puede tener a lo sumo dos hijos.

c) El conjunto de nodos está dividido en tres subconjuntos separados:

- El primer subconjunto contiene un elemento único nodo llamado *raíz del árbol*.
- El segundo subconjunto es en sí mismo un árbol binario y se le conoce como *subárbol izquierdo* del árbol original.
- El tercer subconjunto es también un árbol binario y se le conoce como *subárbol derecho* del árbol original.
- Un subárbol izquierdo o derecho puede o no estar vacío.

Ejemplo:



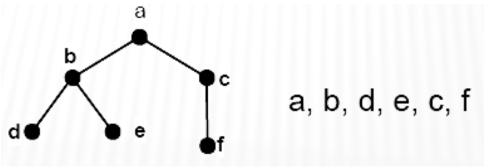
1) El nodo a es la raíz del árbol
2) El nodo a tiene como subárbol izquierdo {b; d; e} y como subárbol derecho {c; f}
3) El nodo b tiene como subárbol izquierdo {d} y como subárbol derecho {e}
4) El nodo c que tiene un sólo subárbol no vacío y se lo supone izquierdo {f}
5) Los nodos d y e tienen como subárboles izquierdo y derecho al {}

Una operación común que se realiza sobre un árbol binario es aquella en que se recorre a dicho árbol en un orden específico.

a) *Recorrido en preorden*:

1) Visitar la raíz del árbol
2) Visitar en preorden el subárbol izquierdo
3) Visitar en preorden el subárbol derecho

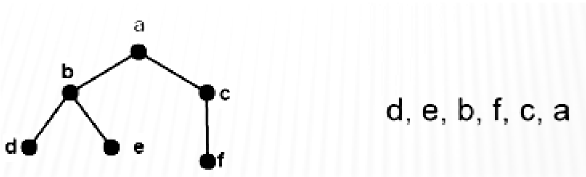
Ejemplo:



b) *Recorrido en postorden*:

1) Visitar en postorden el subárbol izquierdo
2) Visitar en postorden el subárbol derecho
3) Visitar la raíz del árbol

Ejemplo:



c) *Recorrido en orden simétrico:*

1) Visitar en orden simétrico el subárbol izquierdo
2) Visitar la raíz del árbol
3) Visitar en orden simétrico el subárbol derecho

Ejemplo: