

# PERTURBAÇÕES ESCALARES EM ESPAÇOS-TEMPOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS

---

Eveling C. Ribeiro

# SUMÁRIO

## INTRODUÇÃO

## PARTE 1: SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

1. Equações de Einstein-Maxwell
2. Solução de Schwarzschild
3. Solução de Gutsunaev-Manko

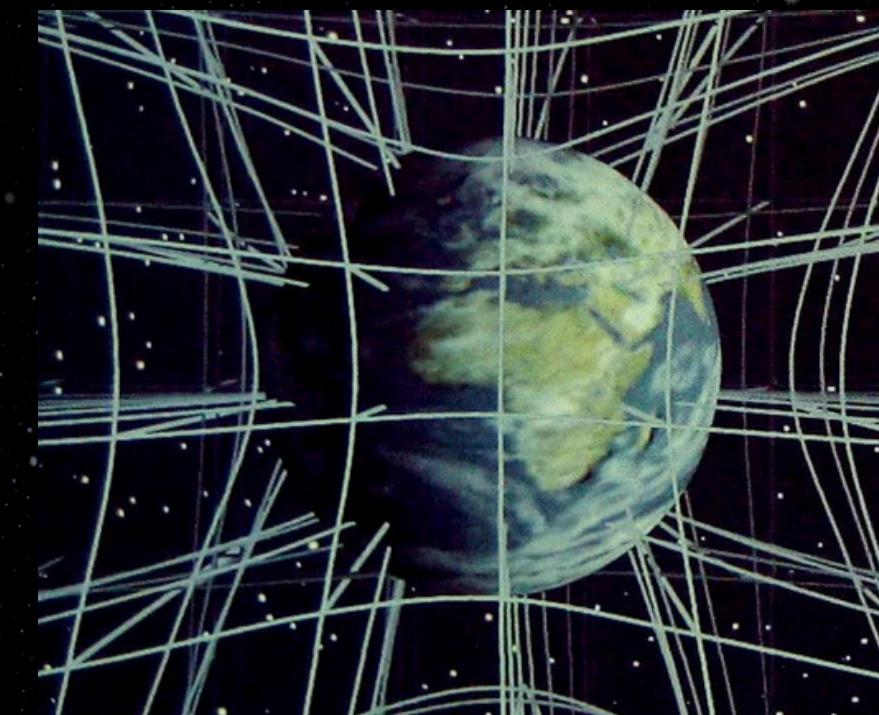
## PARTE 2: MÓDOS QUASE-NORMAIS DE CORPOS COMPACTOS

1. Perturbações escalares no espaço-tempo de GM
2. Limite de Schwarzschild

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

# INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral, introduzida por Einstein em seu paper de 1915, revolucionou nossa compreensão do universo ao descrever como a gravidade é resultante da curvatura do espaço-tempo devido à presença de massa e energia.



844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

## Die Feldgleichungen der Gravitation.

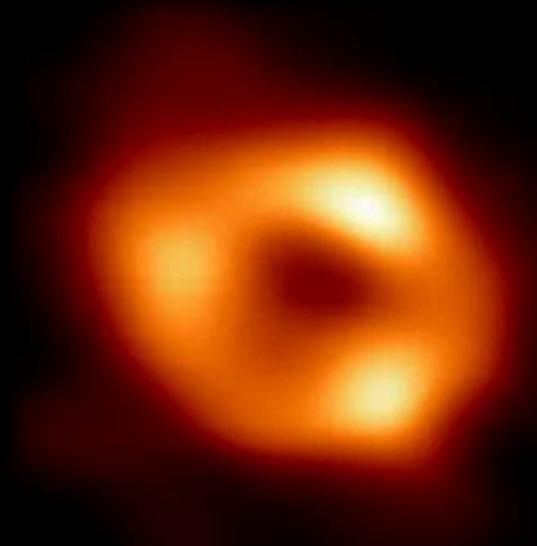
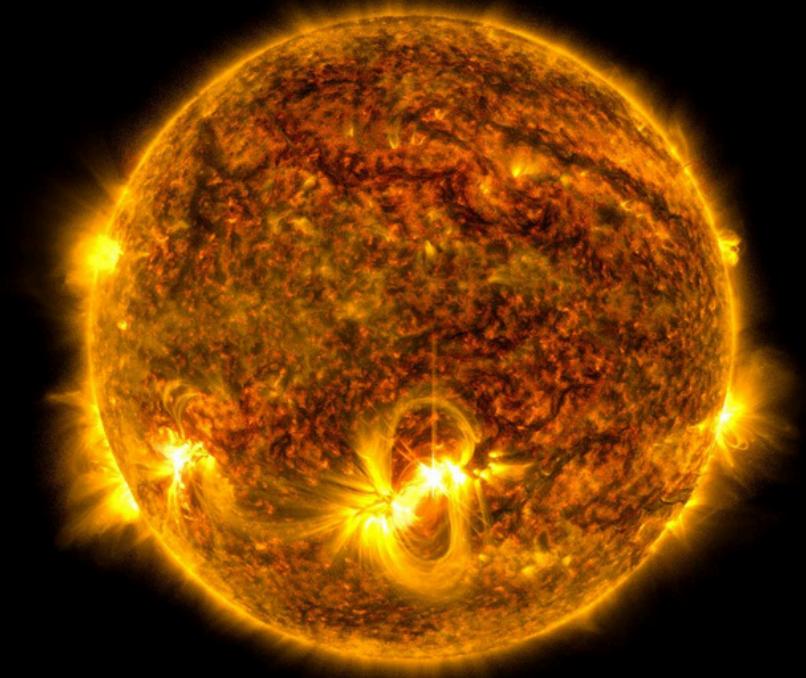
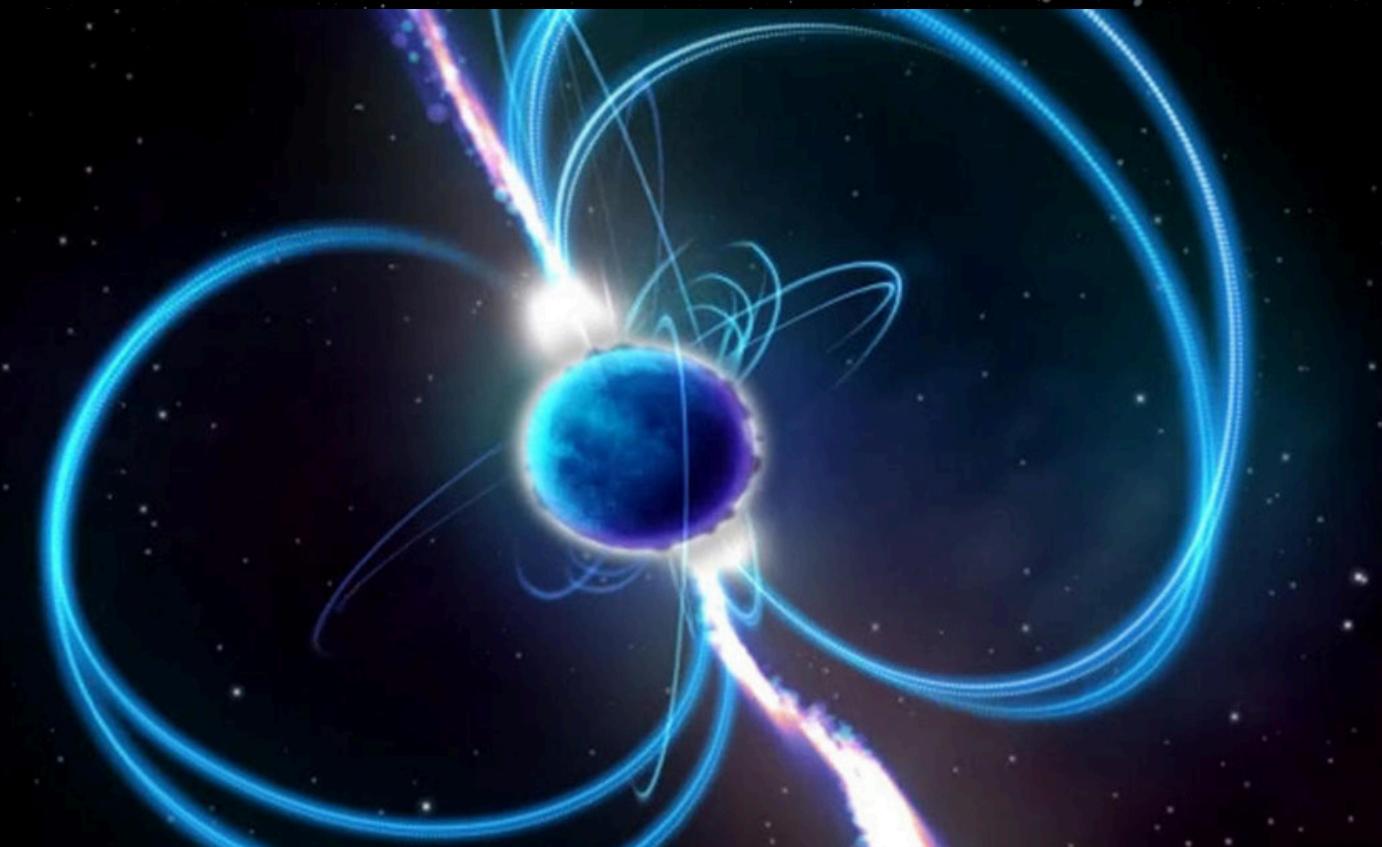
Von A. EINSTEIN.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen<sup>1</sup> habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen des Raumzeitfeldes unterliegen.

# INTRODUÇÃO

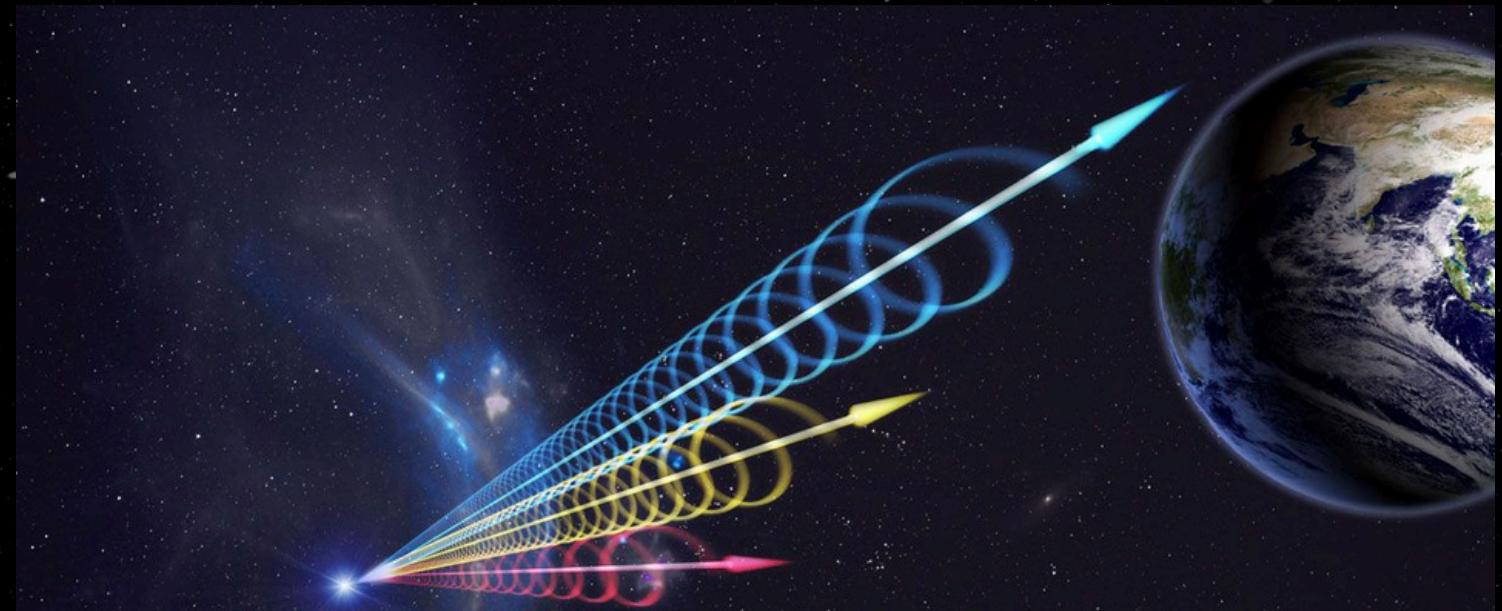
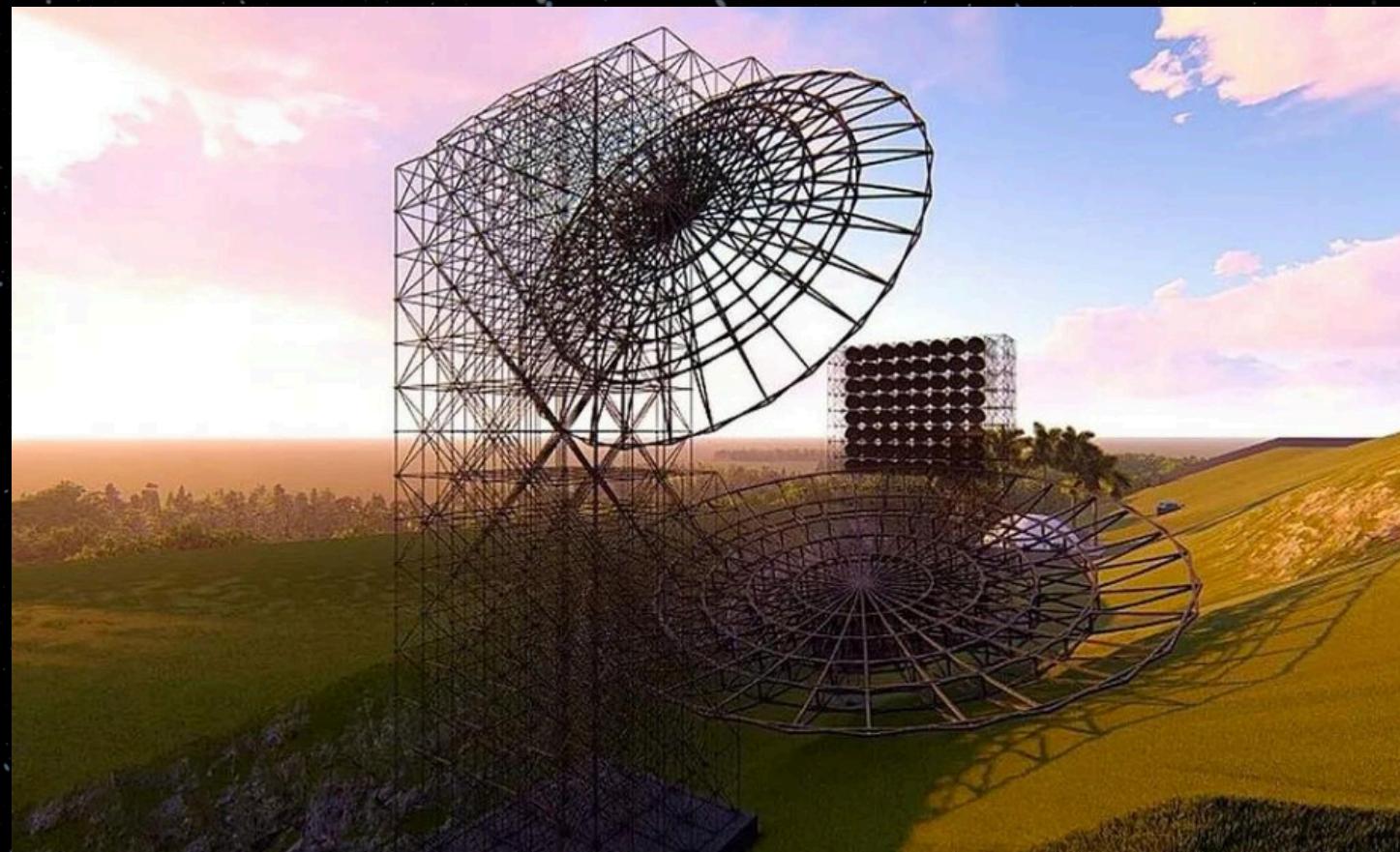
A Relatividade Geral é indispensável para estudar objetos astrofísicos.

A investigação de objetos astrofísicos magnetizados, como os magnetares, revela-se de profunda importância.



# INTRODUÇÃO

Um dos objetivos principais deste projeto é estudar fenômenos explosivos associados a objetos astrotfísicos.



## A Bright Millisecond Radio Burst of Extragalactic Origin

D. R. Lorimer,<sup>1,2\*</sup> M. Bailes,<sup>3</sup> M. A. McLaughlin,<sup>1,2</sup> D. J. Narkevic,<sup>1</sup> F. Crawford<sup>4</sup>

Uma rajada rápida de rádio é um fenômeno astrotfísico de alta energia que se manifesta como um pulso de rádio transitório com duração de apenas alguns milissegundos.

# SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

---

Parte 1

# EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL

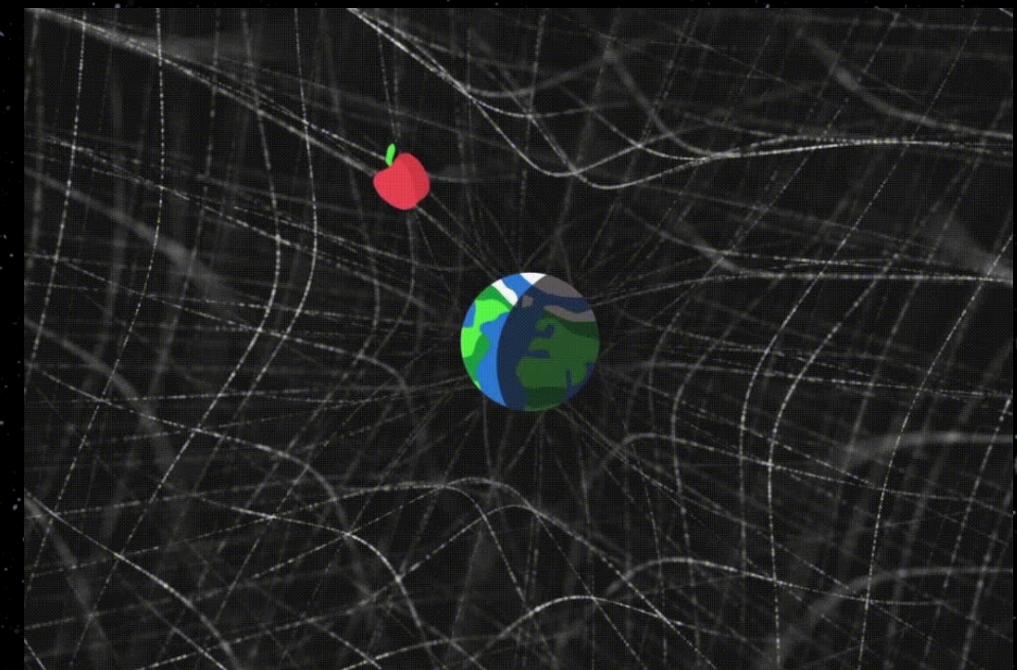
As equações para o campo gravitacional ( $c=1$ ;  $G=1$ ) são, inevitavelmente, mais complicadas do que as do campo eletromagnético. O campo gravitacional carrega momento e energia e, portanto, é fonte de si mesmo. As equações de campo para a gravidade são não-lineares.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$



# EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL

Na ausência de gravidade, as equações de Maxwell podem ser escritas em sua forma covariante, dada por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$$

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$$

Onde o tensor eletromagnético, a 4-corrente e o 4-potencial são dados por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$$

# EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL

Na presença da gravidade, devemos substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes, o que nos leva ao acoplamento entre o campo e a geometria do espaço-tempo,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -j^\nu$$

Assim como a gravidade influencia no eletromagnetismo os campos eletromagnéticos influenciam na curvatura do espaço-tempo

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = \frac{1}{4\pi} \left( g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} F_{\lambda\alpha} F_{\beta\sigma} \right)$$

# EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL

As equações de campo de Einstein na presença de campos eletromagnéticos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(M)})$$

O Eletrovácuo é caracterizado pela ausência de fontes,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}^{(M)}$$

$$T_{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0$$

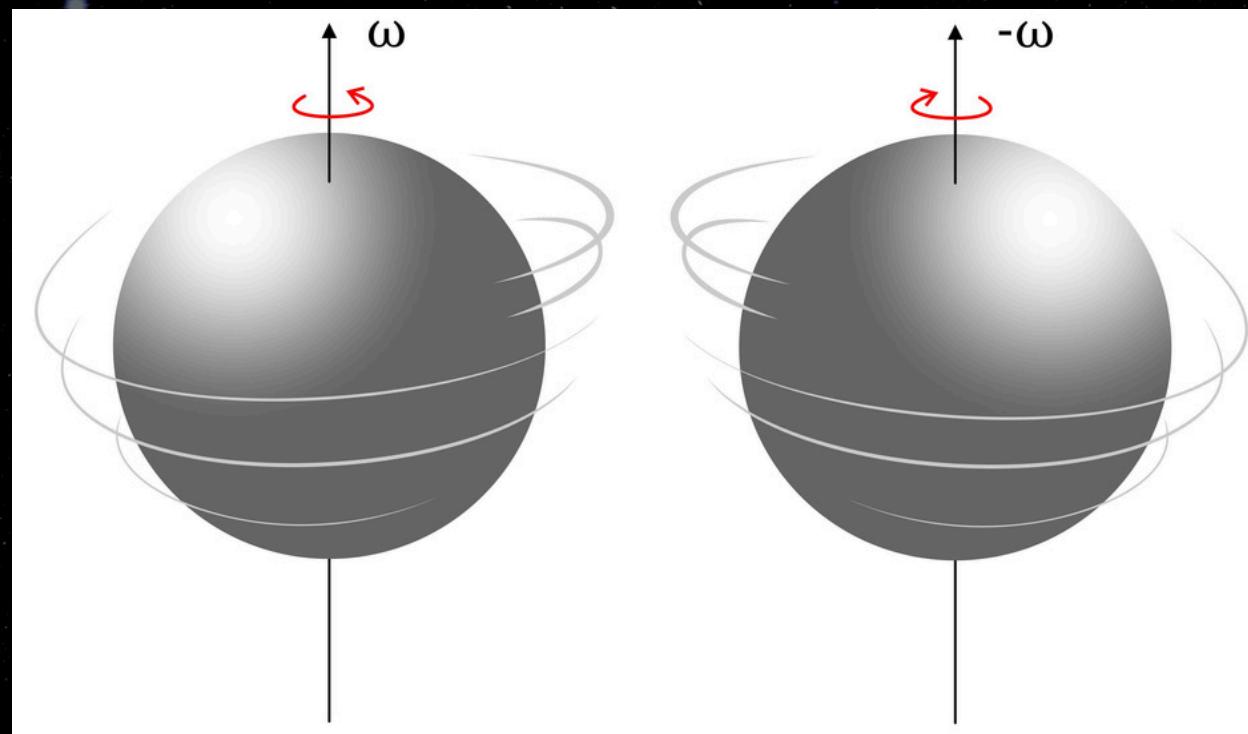
$$j^\mu = 0$$

# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

A solução de Schwarzschild descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$$

$$g_{\mu\nu}(x^0, x^i) = g_{\mu\nu}(-x^0, x^i)$$



O elemento de linha não contém termos cruzados

$$ds^2 = g_{00}(x^k) (dx^0)^2 + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

A simetria esférica garante o conhecimento da parte angular.

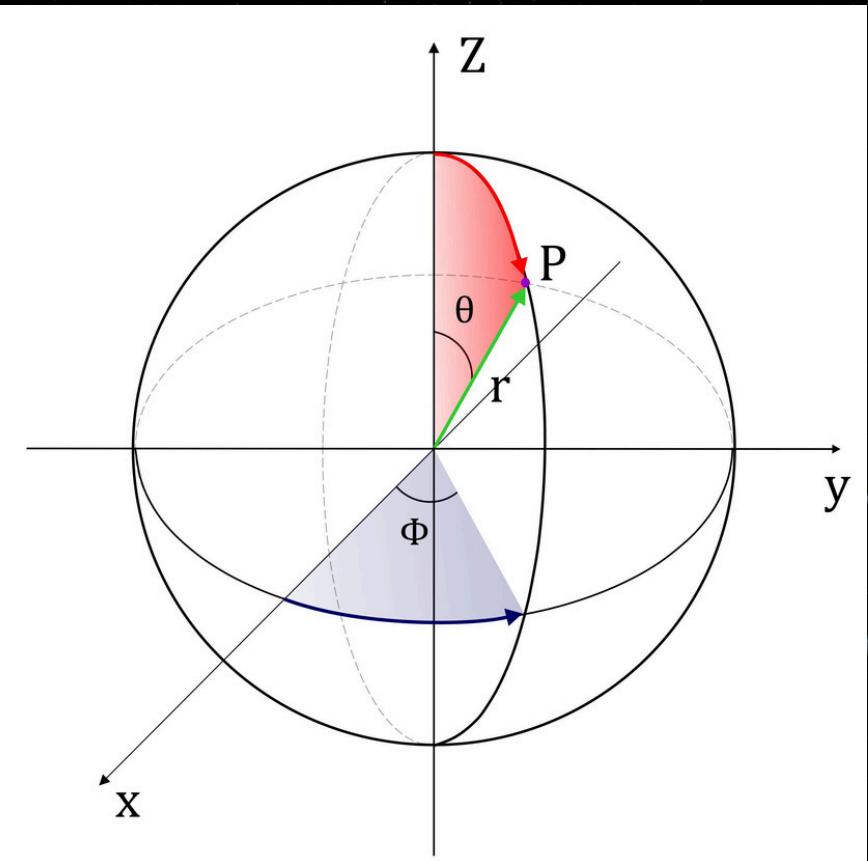
$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

A métrica acima satisfaz a equação de Einstein para o vácuo

$$G_{\mu}^{\nu} = 0$$

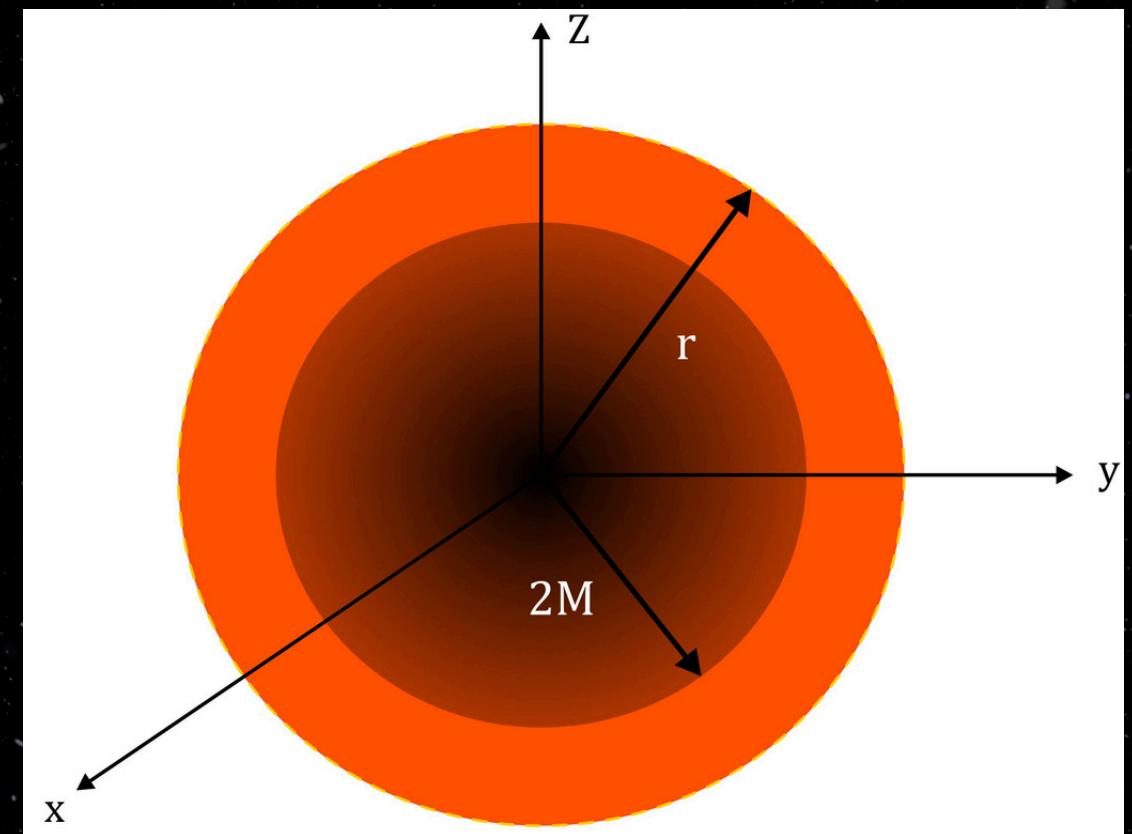
A solução de Schwarzschild é:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

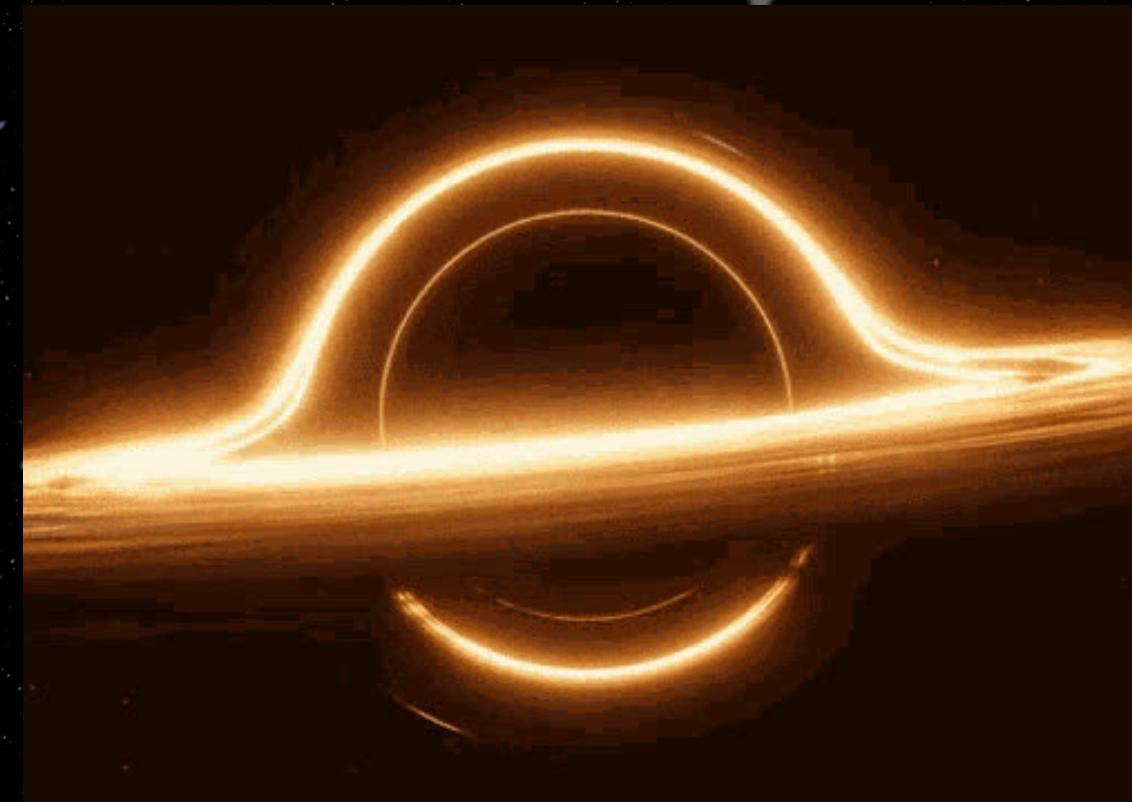


# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

A região delimitada por  $r = 2M$  é identificada como o horizonte de eventos, onde a componente puramente temporal se anula



Fisicamente, esse limiar divide o espaço-tempo em duas regiões, de modo que o interior do horizonte não pode influenciar causalmente a região exterior.



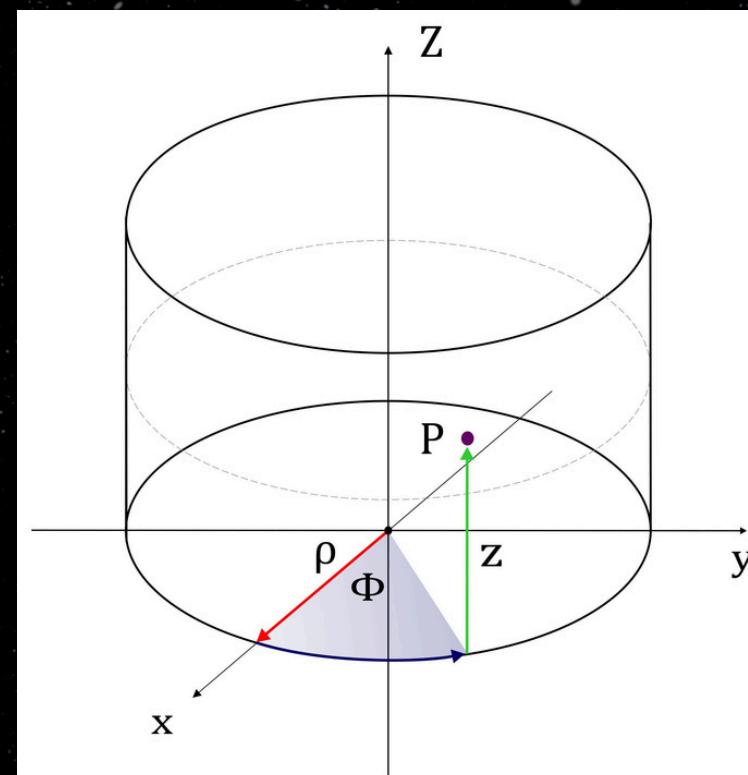
# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

A solução de Gutsunaev-Manko é um tipo específico de solução exata dessas equações. Essa solução, estática e axissimétrica, destaca-se por descrever um corpo massivo com campo magnético.

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}^{(M)}$$
$$\partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0$$

Essa situação sugere o uso de uma métrica axissimétrica que é conhecida como métrica de Weyl

$$ds^2 = -\mathcal{F} dt^2 + \frac{1}{\mathcal{F}} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]$$



# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

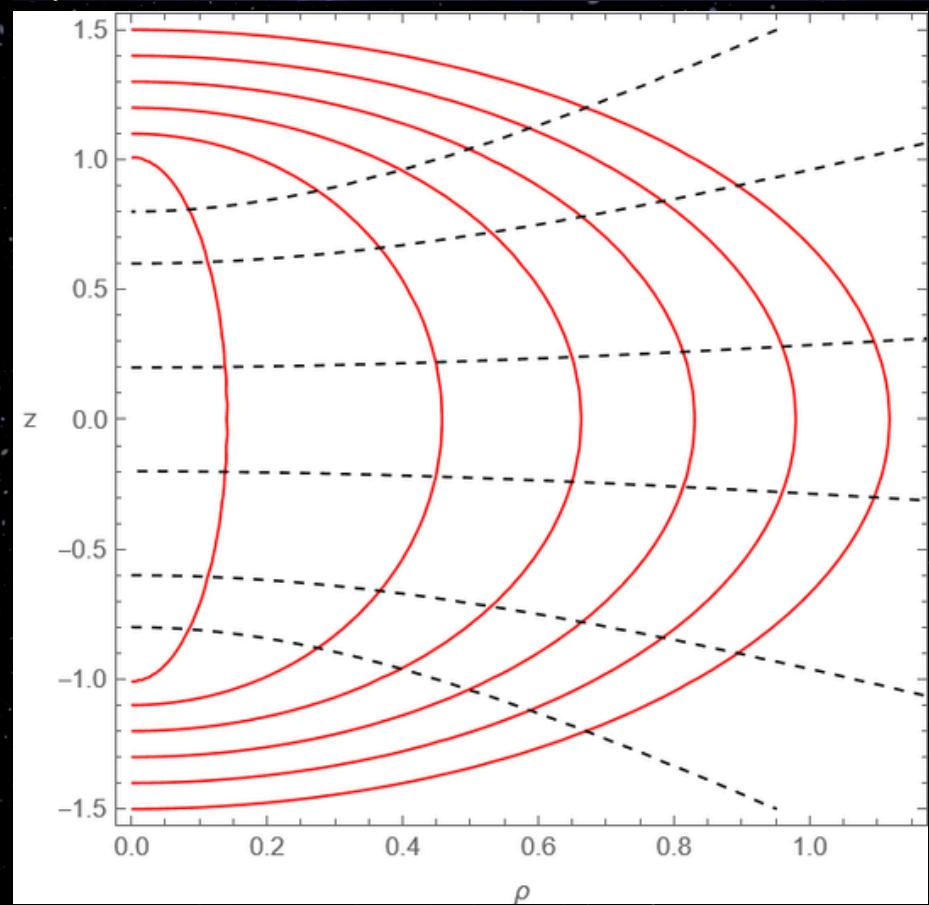
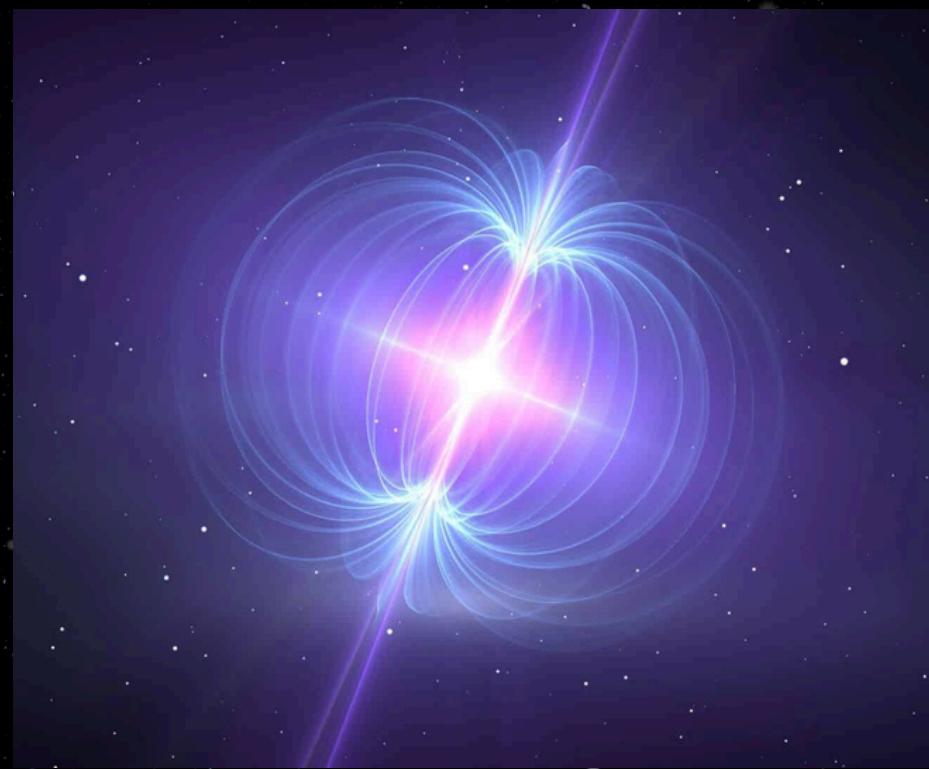
O campo magnético de um dipolo pode ser descrito por

$$A^\mu = [0, 0, 0, A(\rho, z)]$$

Para problemas que apresentam simetria axial, as coordenadas prolatas se destacam como o sistema mais natural de coordenadas. Sua introdução desempenha um papel crucial na obtenção das soluções para o problema.

$$\rho = k\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}$$

$$z = kxy$$



# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

A solução geral para a métrica de Gutsunaev-Manko é:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{x-1}{x+1} \left( \frac{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)}{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2]^2 - 4\alpha^2 y^2 (x^2 - 1)} \right)^2 \\ A &= \frac{4k\alpha^3(1-y^2)[2(1+\alpha^2)x^3 + (1-3\alpha^2)x^2 + y^2 + \alpha^2]}{(1+\alpha^2)\{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)\}} \\ e^{2\gamma} &= \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \frac{\{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)\}^4}{(1 + \alpha^2)^8 (x^2 - y^2)^8}\end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $k$  estão relacionados com a massa  $M$  e com o momento de dipolo magnético  $\mu$  do sistema

$$M = \frac{1 - 3\alpha^2}{1 + \alpha^2} k \quad \mu = \frac{8\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} k^2 \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

# SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DO CAMPO GRAVITACIONAL

Em coordenadas esferoidais prolatas, a solução GM produz o elemento de linha

$$ds^2 = -\left(\frac{x-1}{x+1}\right) f^2 dt^2 + \left(\frac{kg}{f}\right)^2 \left[ \frac{x+1}{x-1} dx^2 + \frac{(x+1)^2}{1-y^2} dy^2 \right] + \left(\frac{k}{f}\right)^2 (x+1)^2 (1-y^2) d\phi^2$$

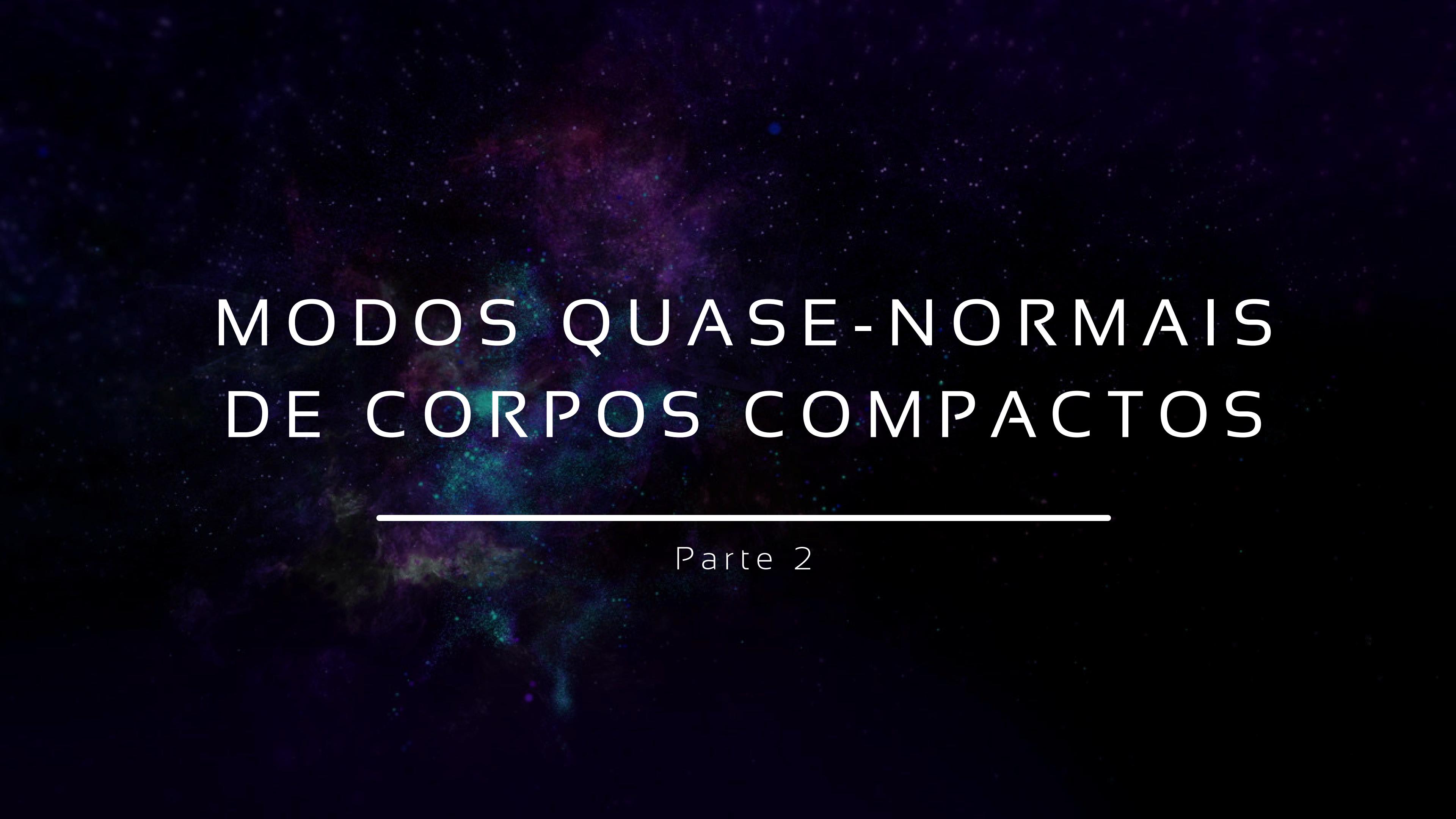
com

$$\mathcal{F} = \frac{x-1}{x+1} f^2 \quad e^{2\gamma} = \frac{x^2-1}{x^2-y^2} g^2$$

É importante notar que quando  $\alpha = 0$ , temos  $k = M$ . Isso marca o limite onde a solução GM se destaca.

$$x = \frac{1}{k}(r - M), \quad y = \cos\theta$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (\sin^2\theta d\phi^2)$$



# MODOS QUASE-NORMAIS DE CORPOS COMPACTOS

---

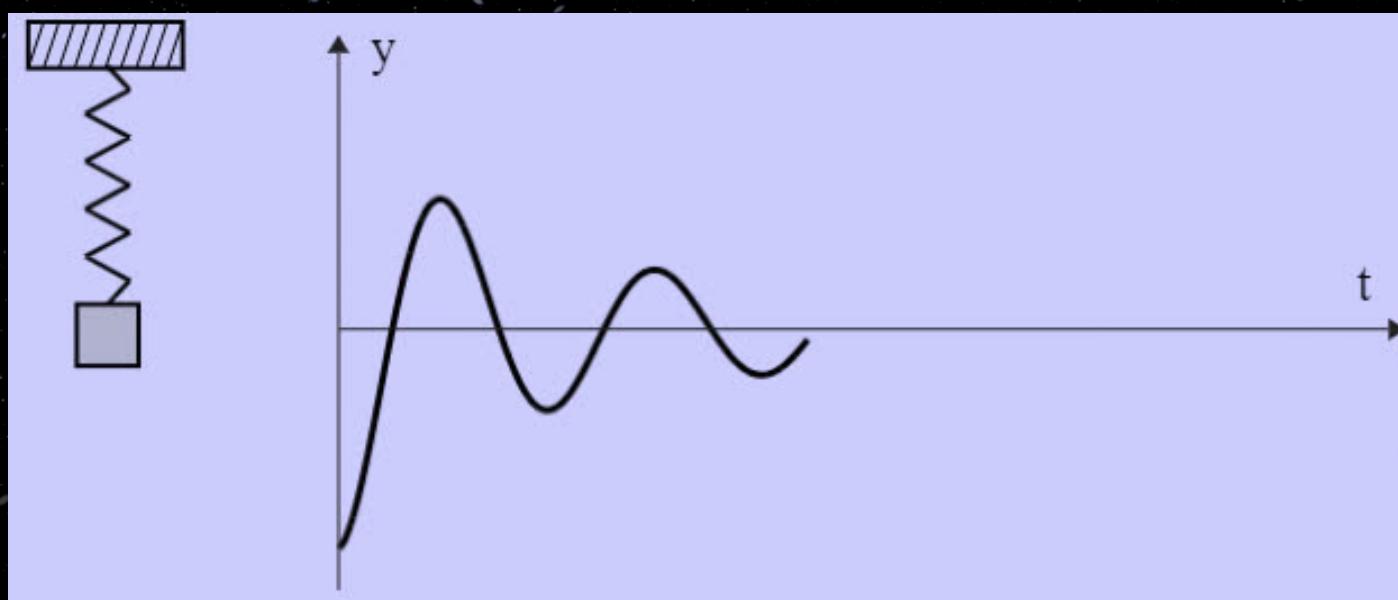
Parte 2

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

Modos quase-normais (QNM) são modos de vibração associados com fenômenos dissipativos. São caracterizados por uma frequência complexa

$$\omega = \omega_R + i\omega_I$$

A estabilidade de objetos astrofísicos pode ser estudada usando os modos quase-normais ( $\omega_I > 0$  Situações estáveis, enquanto que  $\omega_I < 0$  situações instáveis).



# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

Vamos considerar um campo escalar  $\Psi$ , no espaço de Gutsunaev-Manko, que não contribui para a gravidade local e analisar a sua dinâmica

$$S_\Psi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - m^2 \Psi^2 \right)$$

A equação de movimento para uma perturbação escalar sem massa é:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0$$

É conveniente supor

$$\Psi = \frac{\psi}{x+1} \quad \tilde{x} = x + 2 \ln(x-1)$$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

A equação de movimento escrita explicitamente em termos da métrica GM:

$$-\partial_t^2\psi + \frac{f^4}{g^2} \left[ \partial_{\tilde{x}}^2\psi + \frac{x-1}{(x+1)^3} \left( \partial_y ((1-y^2)\partial_y\psi) + \frac{g^2}{1-y^2}\partial_\phi^2\psi - \frac{2\psi}{x+1} \right) \right] = 0$$

A função de onda admite uma decomposição em harmônicos esféricos

$$\psi(\tilde{x}, y, \phi, t) = \sum_{l,m} u_{lm}(\tilde{x}, t) Y_l^m(y, \phi)$$

A equação diferencial para os modos é:

$$-\partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \sum_{l'} A_l^{l'} \partial_{\tilde{x}}^2 u_{l'm}(\tilde{x}, t) = \sum_{l'} B_{lm}^{l'} u_{l'm}(\tilde{x}, t)$$

A equação acima é resolvida numericamente para um valor específico de  $l_{\max}$ .

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

As matrizes que acoplam os modos são:

$$A_l^{l'} = \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} Y_{l'}^m \right\rangle$$

$$B_{lm}^{l'} = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left[ \left( l(l+1) + \frac{2}{x+1} \right) A_l^{l'} + m^2 \left\langle \frac{f^4(g^2-1)}{g^2} Y_l^m, Y_{l'}^m \right\rangle \right]$$

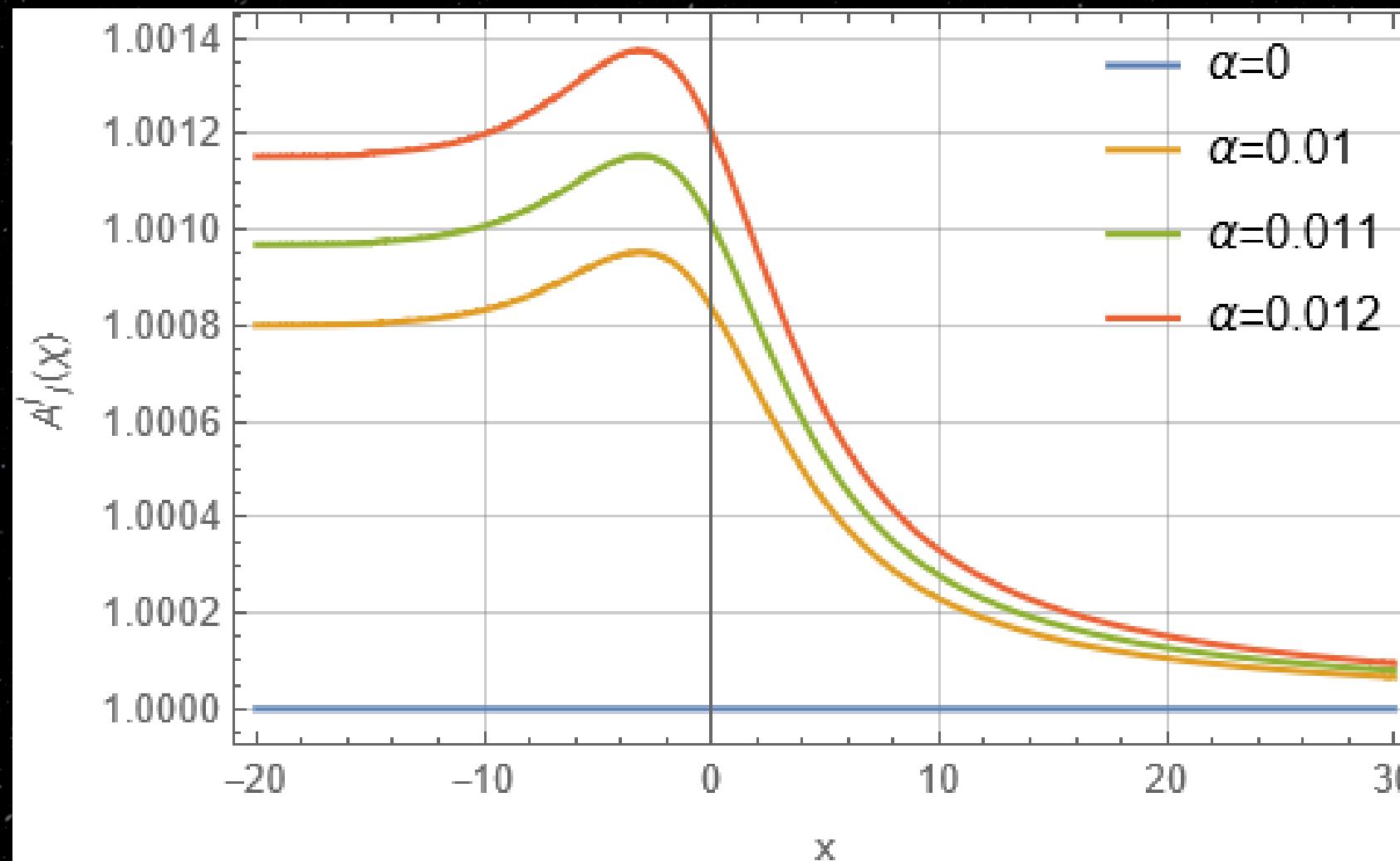
onde o produto interno é definido da seguinte maneira:

$$\left\langle Y_l^m, R(y) Y_{l'}^{m'} \right\rangle = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} R(y) Y_l^m(y, \phi) \bar{Y}_{l'}^{m'}(y, \phi) d\phi dy$$

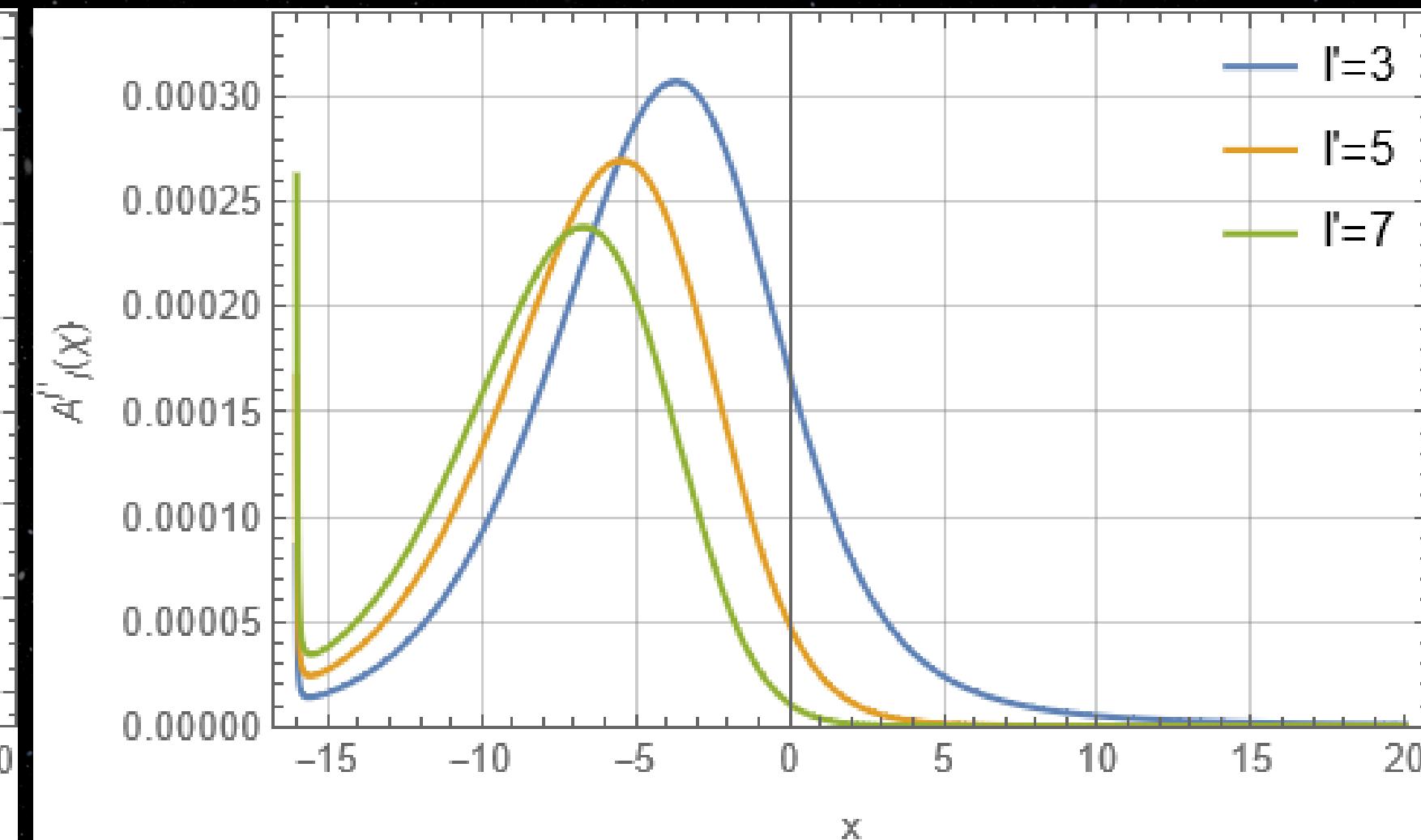
As matrizes acoplam apenas modos de mesma paridade.

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

Comportamento da Matriz A para  $l=m=1$ .



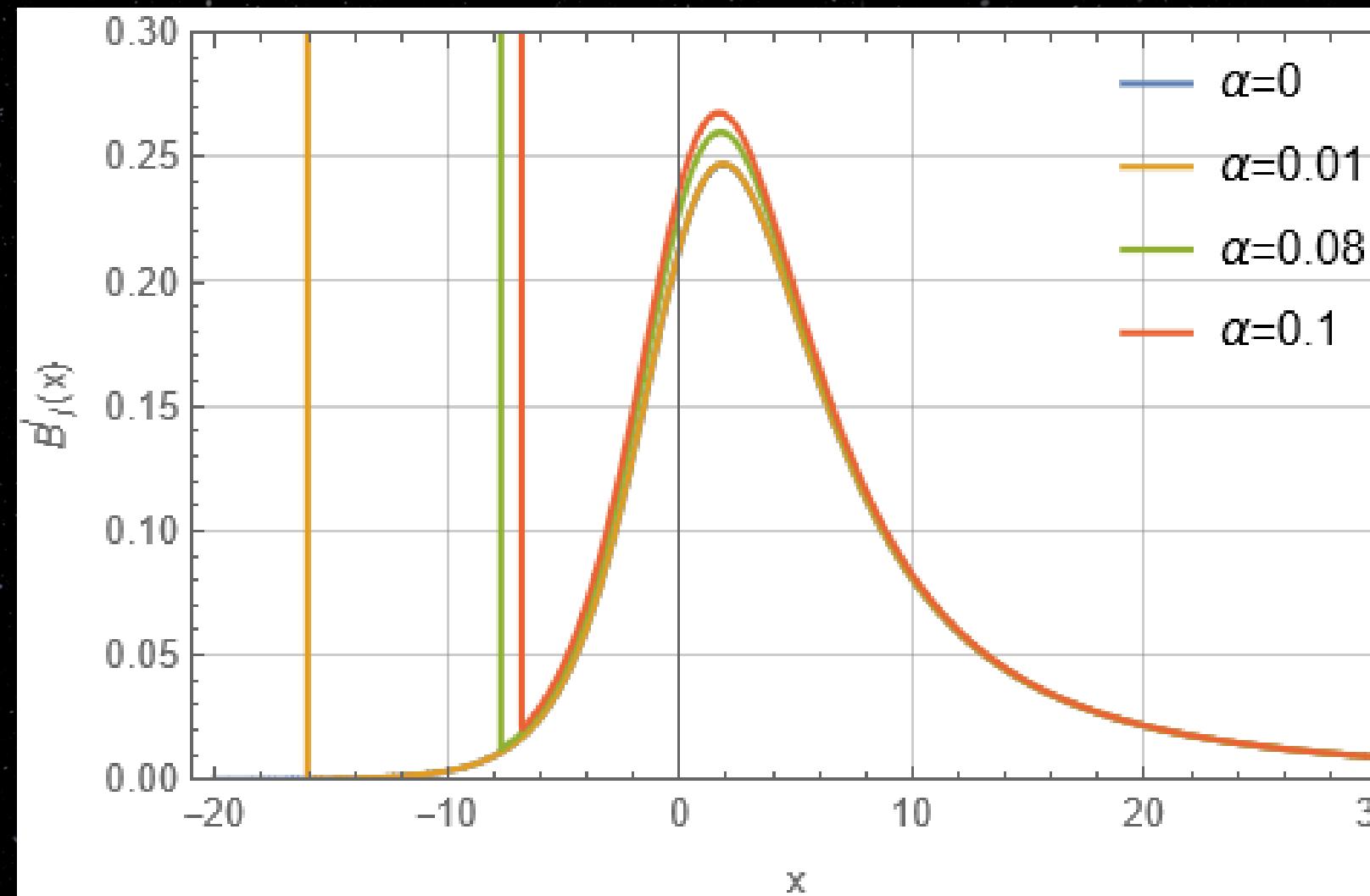
Diagonal



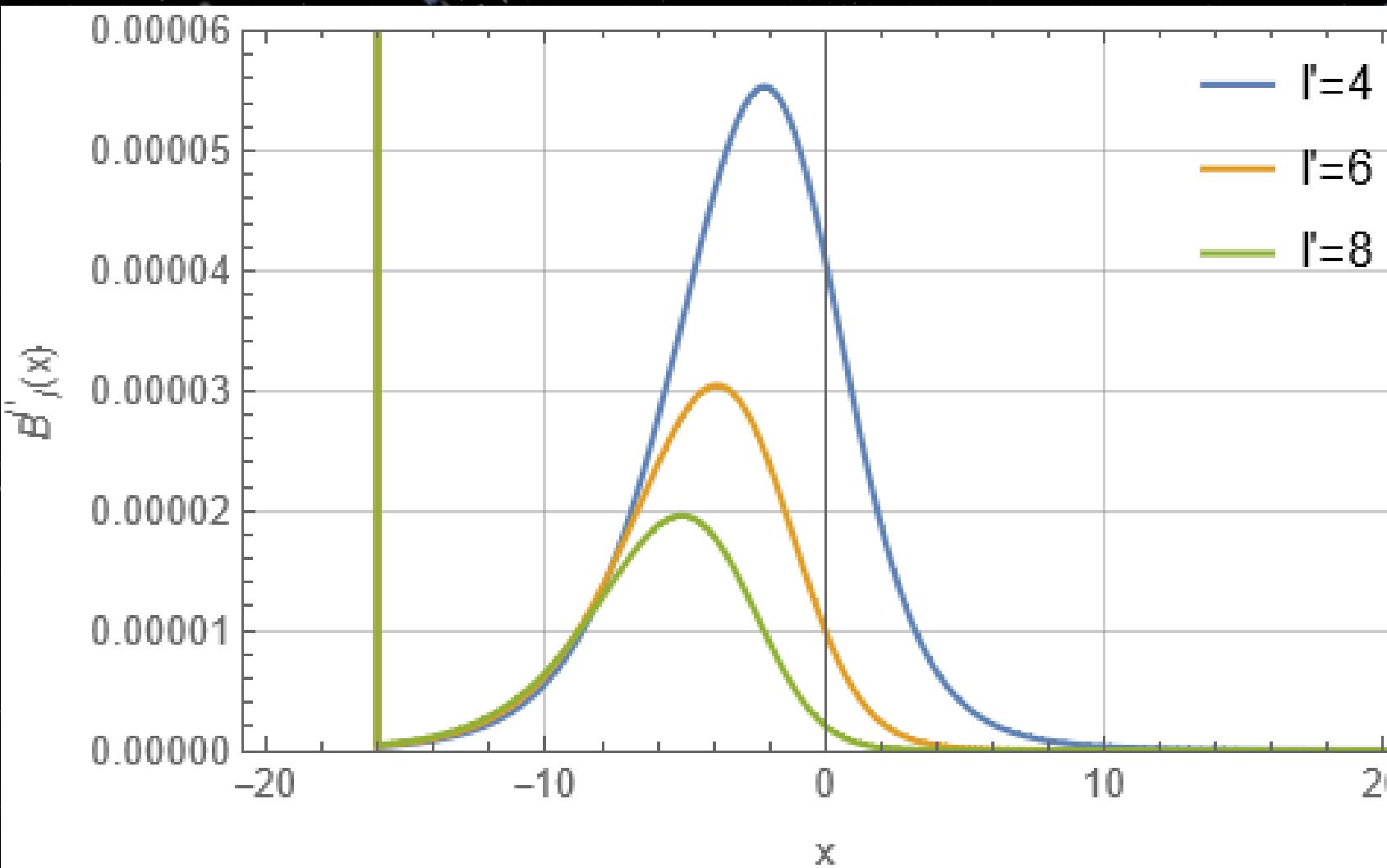
Fora da diagonal, com  $\alpha = 0.01$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM

Comportamento da Matriz B para  $l=m=2$ .

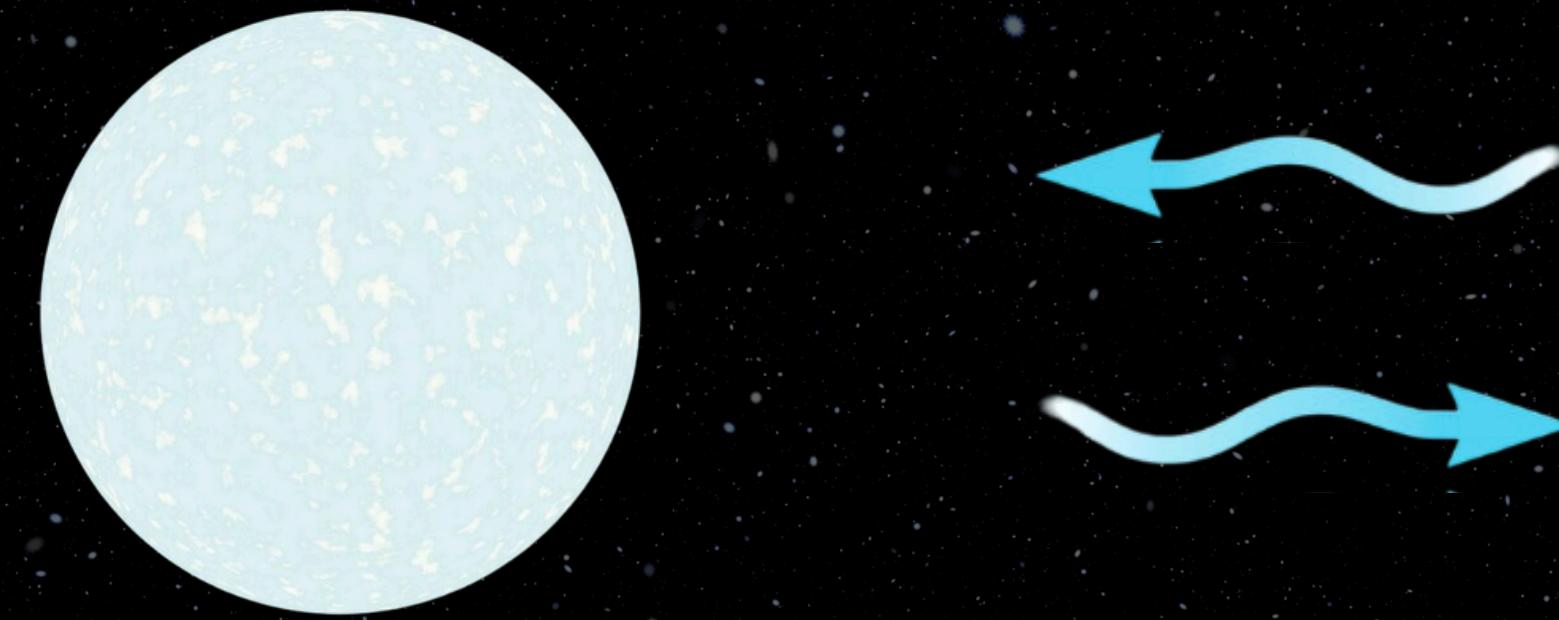


Diagonal



Fora da diagonal, com  $\alpha = 0.01$

# PERTURBAÇÕES ESCALARES NO ESPAÇO-TEMPO DE GM



A fim de evitar as divergências da métrica de GM devemos impor uma condição de contorno que representa um corpo compacto totalmente refletor.

$$u_{lm}(\tilde{x}_{\min}) = 0$$

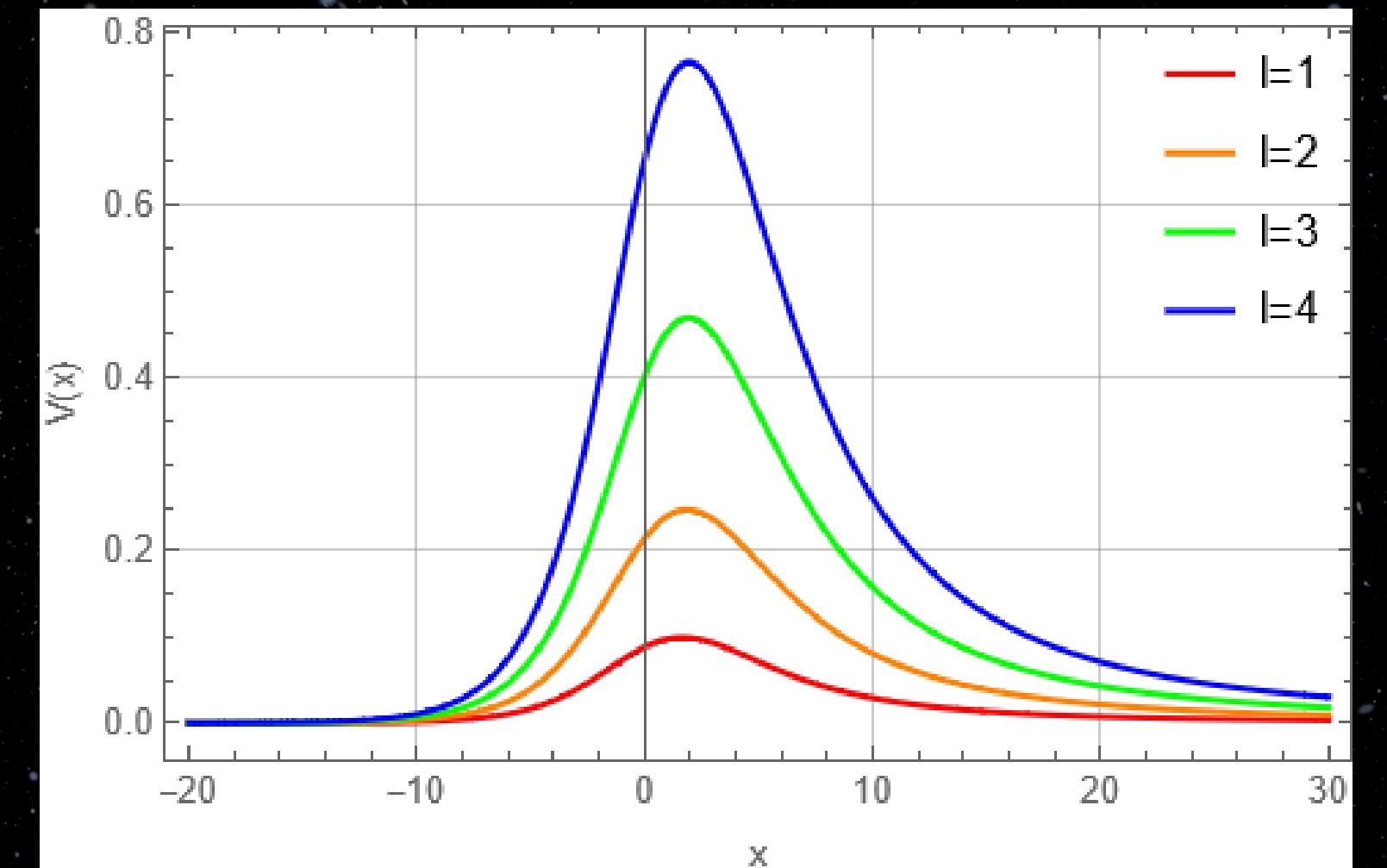
# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-BURACO NEGRO

O limite de Schwarzschild é alcançado fazendo  $\alpha = 0$ , resultando em um conjunto de equações desacopladas

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g = 1$$

$$A_l^{l'} = \delta_{ll'}$$

$$B_{lm}^{l'} = \frac{x - 1}{(x + 1)^3} \left( l(l + 1) + \frac{2}{x + 1} \right) \delta_{ll'}$$



A equação de movimento é:

$$-\partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \partial_{\tilde{x}}^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) = \frac{x - 1}{(x + 1)^3} \left( l(l + 1) + \frac{2}{x + 1} \right) u_{lm}(\tilde{x}, t)$$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-BURACO NEGRO

O limite de Schwarzschild pode ser resolvido numericamente por um esquema de diferenças finitas

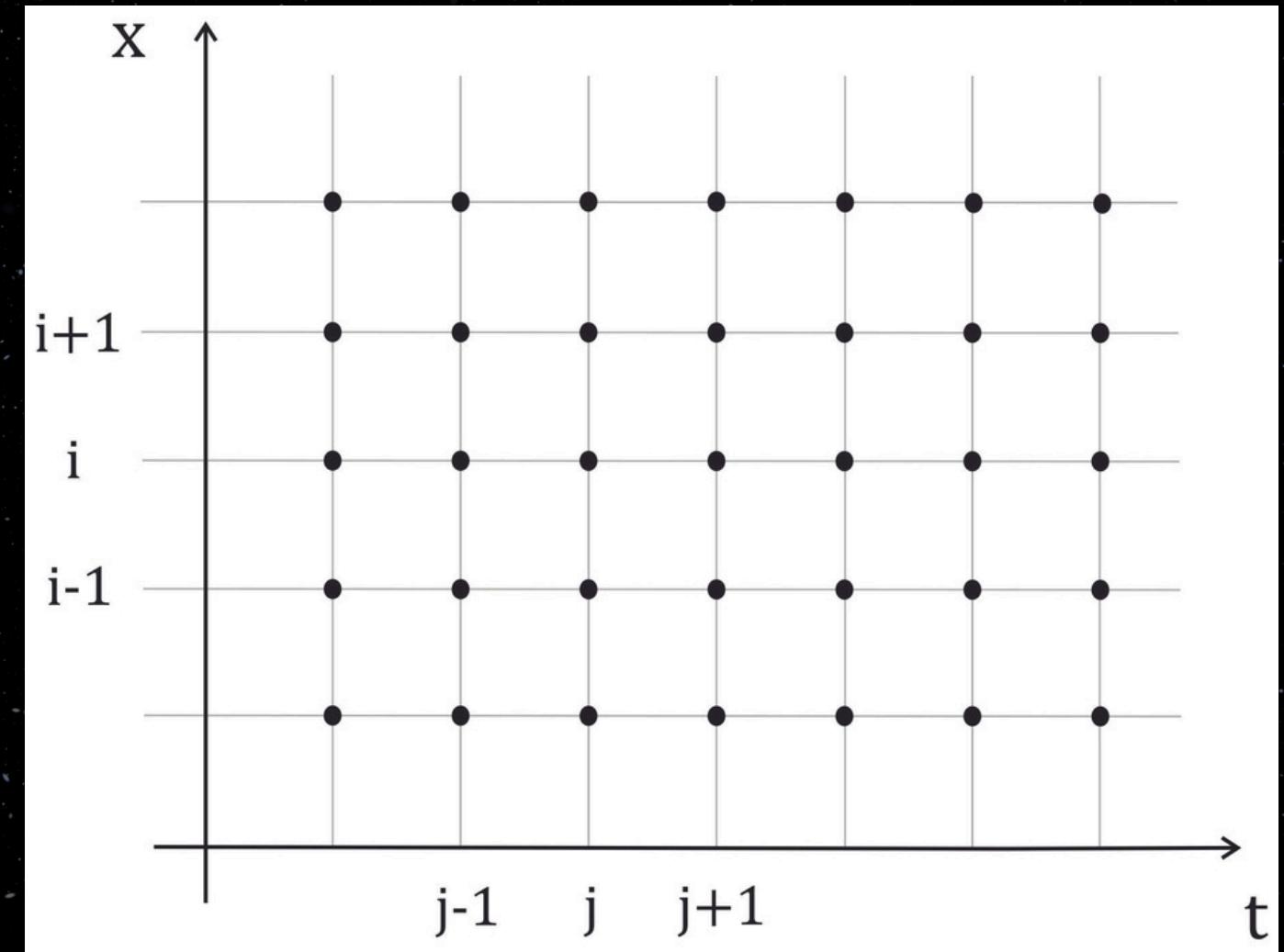
$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t-1} < t_{N_t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \approx \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\Delta t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \approx \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}$$

$$x_i = i\Delta x + X_0, i = 0, \dots, N_x \quad t_j = j\Delta t, j = 0, \dots, N_t$$



# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-BURACO NEGRO

O limite de Schwarzschild pode ser resolvido numericamente por um esquema de diferenças finitas

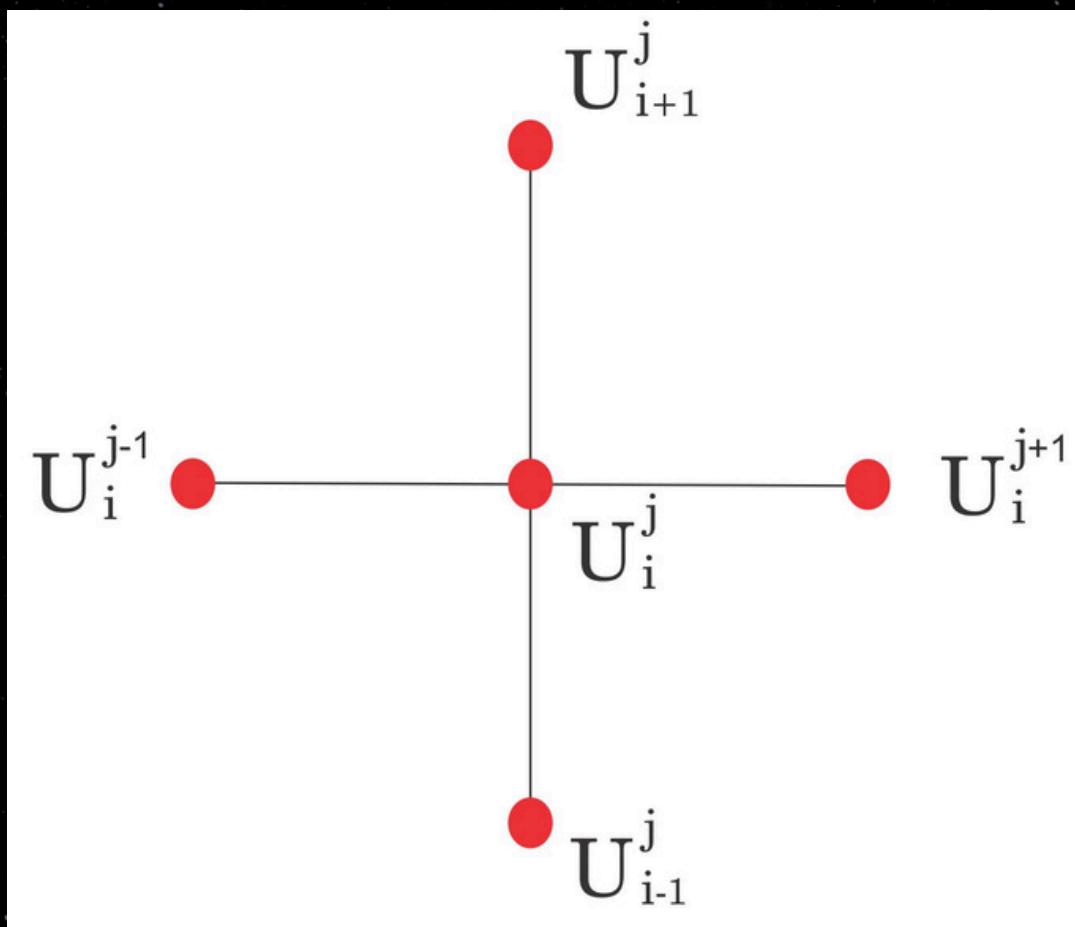
$$U_i^{j+1} = \left[ 2(1 - C^2) - \left( l(l+1) + \frac{2}{x_i + 1} \right) \frac{x_i - 1}{(x_i + 1)^3} \Delta t^2 \right] U_i^j + C^2 (U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - U_i^{j-1}$$

Sua validade está definida no intervalo

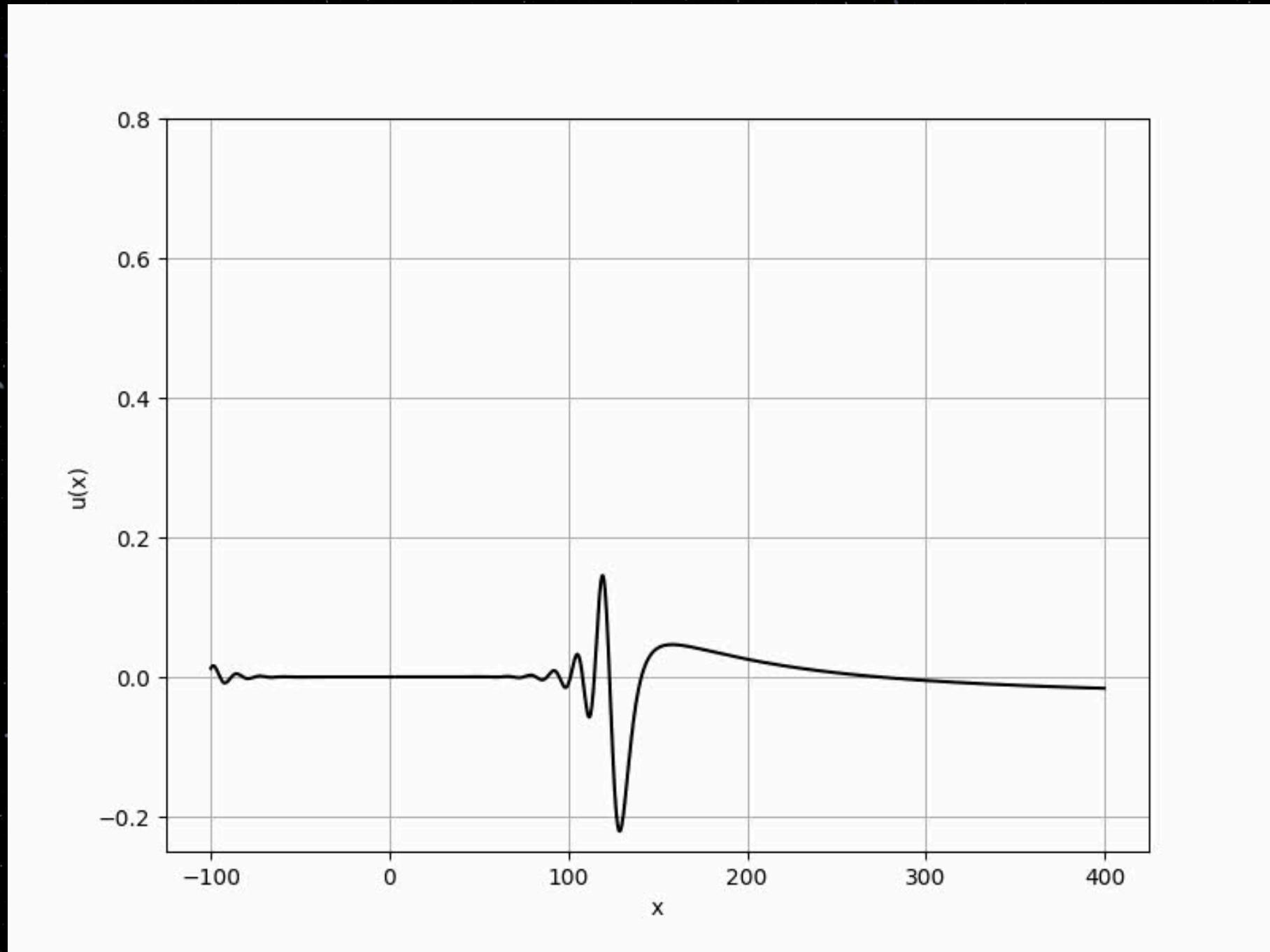
$$i \in [1, N_x - 1] \quad j \in [1, N_t - 1]$$

O método acima é estável quando temos a seguinte condição:

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

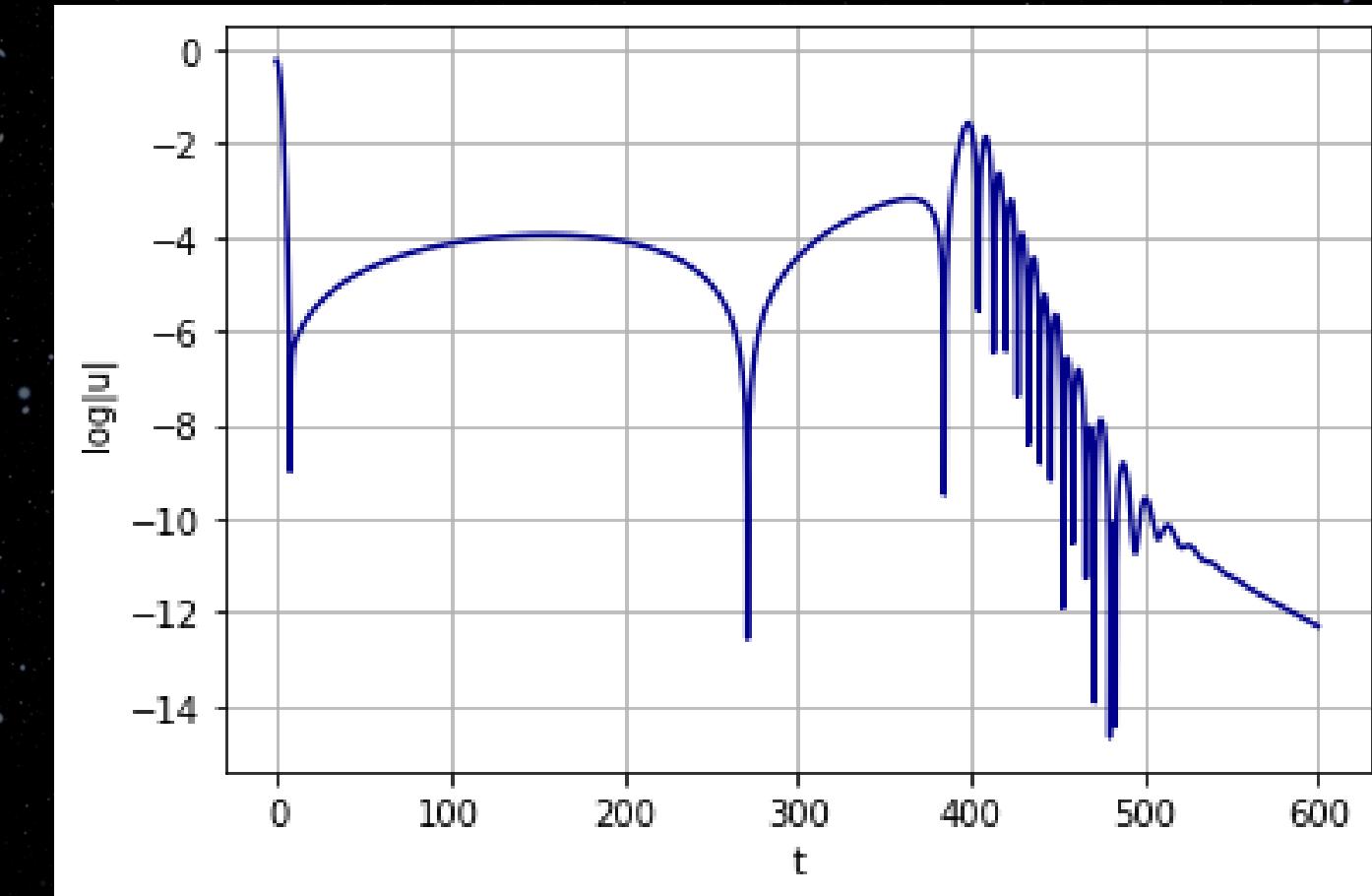
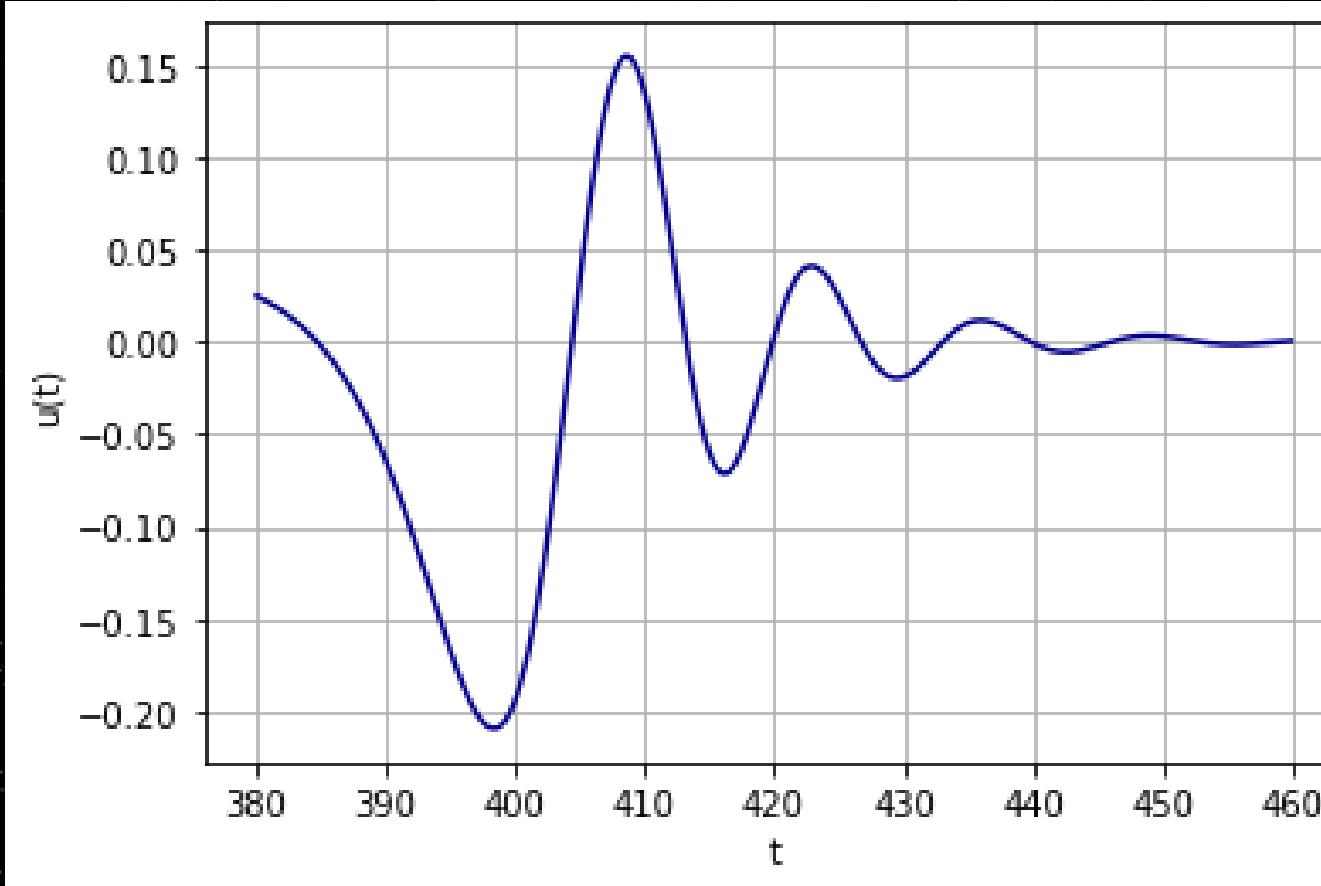


# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-BURACO NEGRO



Evolução temporal da onda para  $l=2$ .

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-BURACO NEGRO

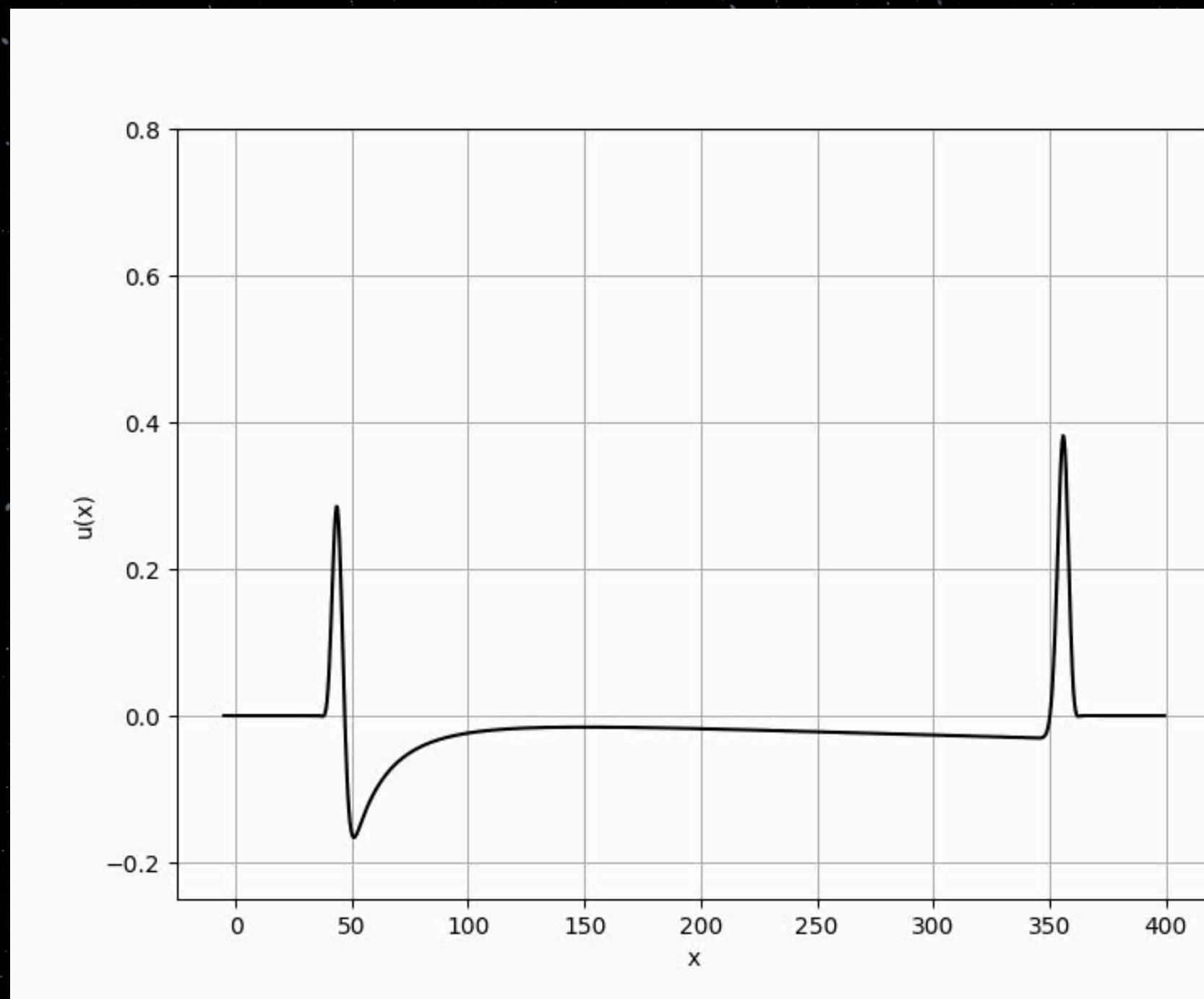


A primeira região é caracterizada por um comportamento sensível às condições iniciais, o segundo regime é identificado por exibir um comportamento de oscilação amortecida do tipo

$$Ae^{-\omega_i t} \cos(\omega_r t + \delta)$$

Por fim, a perturbação decai como uma lei de potência para tempos grandes.

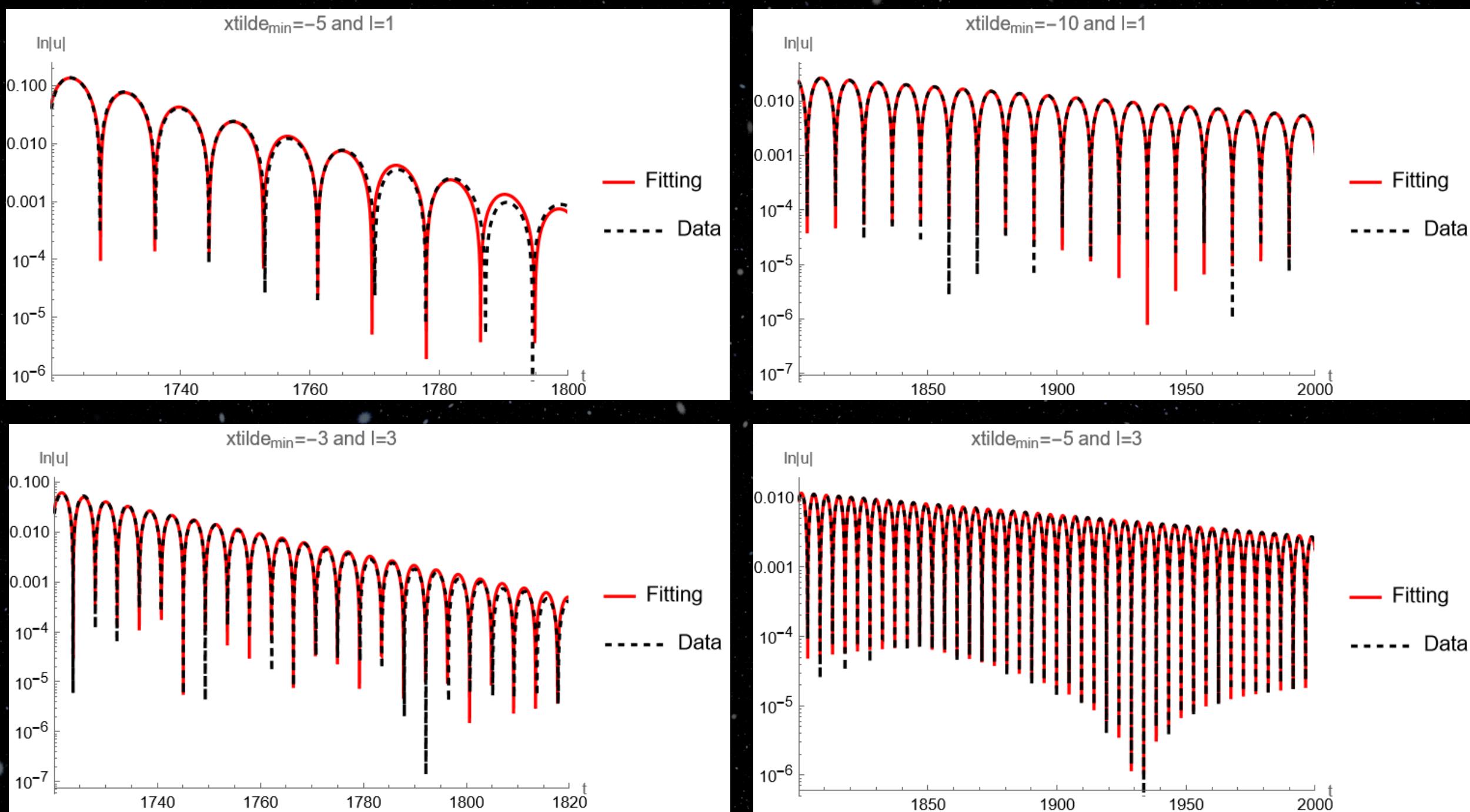
# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO



Evolução temporal da onda para  $l=3$  e  $x_{\min} = -5$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

Cálculo numérico dos modos quase-normais para corpos compactos no limite de Schwarzschild



# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

É possível calcular os modos quase-normais no limite de Schwarzschild fazendo uso da solução exata para a equação de onda para um campo escalar sem massa.

$$ds^2 = - \left( \frac{x-1}{x+1} \right) dt^2 + \left( \frac{x+1}{x-1} \right) dx^2 + (x+1)^2 \left( \frac{dy^2}{1-y^2} + (1-y^2) d\phi^2 \right)$$

Nesse limite vale a seguinte decomposição

$$\Psi(t, x, y, \phi) = \sum_{l,m} \frac{u_{l\omega}(x)}{x+1} Y_l^m(y, \phi) e^{i\omega t}$$

A equação de onda se reduz à uma equação ordinária para x-radial

$$\frac{d^2 u_{l\omega}}{dx^2} + \frac{2}{x^2 - 1} \frac{du_{l\omega}}{dx} - \frac{1}{x-1} \left[ \frac{l(l+1)}{x+1} - \frac{(x+1)^2 \omega^2}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] u_{l\omega} = 0$$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

É possível obter duas soluções linearmente independentes em torno do ponto regular  $x=1$ ,

$$u_{l\omega}(x) = C_1 e^{i\omega x} (x+1)(x-1)^{2i\omega} \text{HeunC}\left(-4i\omega, 4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \frac{1-x}{2}\right) + \\ + C_2 e^{i\omega x} (x+1)(x-1)^{-2i\omega} \text{HeunC}\left(-4i\omega, -4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \frac{1-x}{2}\right)$$

Para o ponto  $x = \infty$  as funções de Heun admitem uma série assintótica. Existe um significado físico direto relacionado com as funções. Elas estão relacionadas com os modos outgoing e ingoing no ponto X.

$$u_{l\omega}(x) = C_X^+ U_X^{(+)}(x) + C_X^- U_X^{(-)}(x) \quad X = 1, \infty$$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

Buscamos descrever objetos compactos, os quais se traduzem por condições de contorno apropriadas em uma região delimitada por  $x_{\min}$ , com  $x_{\min} > 1$ .

$$u_{l\omega}(x_{\min}) = 0$$

A solução que satisfaz a condição de contorno de corpo compacto é:

$$u_{l\omega}(x) = C_1 e^{-i\omega x} (x+1)(1-x)^{2i\omega} \left[ \text{HeunC} \left( \alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2} \right) - \left( \frac{1-x_{\min}}{1-x} \right)^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; (1-x_{\min})/2)}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; (1-x_{\min})/2)} \text{HeunC} \left( \alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2} \right) \right]$$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

As frequências quase-normais podem ser encontradas diretamente da solução anterior. Para isso, devemos garantir que no infinito não existam modos outgoing

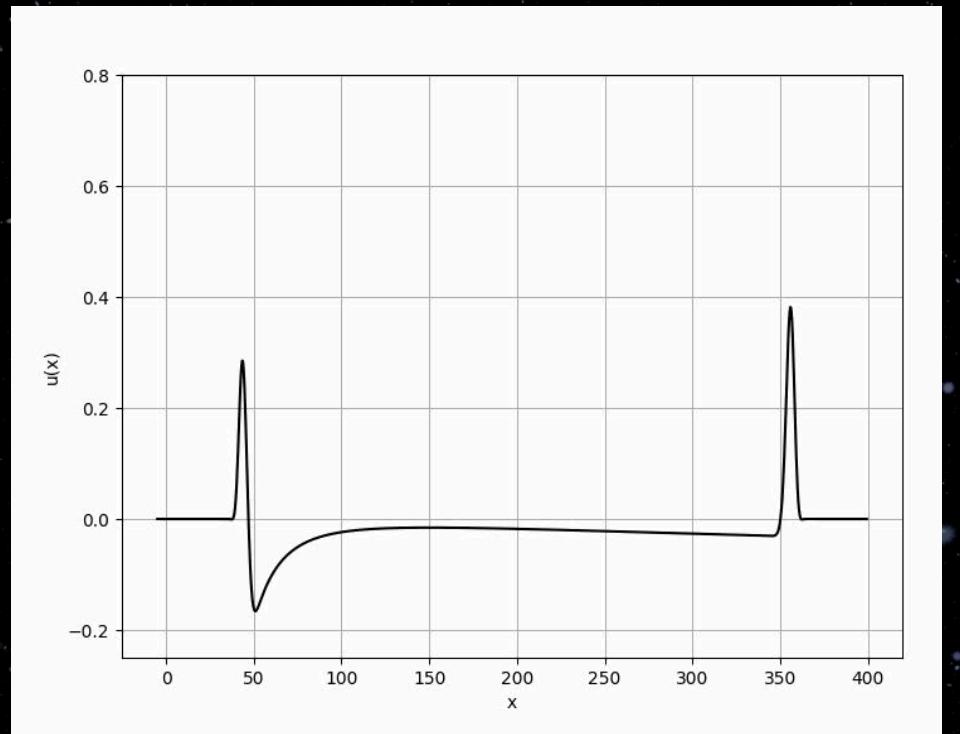
$$|C_{\infty}^-| = |C_{\infty}^+| \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{\infty}^{(+)}(x)}{U_{\infty}^{(-)}(x)} \right|$$

O modos outgoing são anulados na região  $\arg(x) + \arg(\omega) \in (-\pi, 0]$ , desde que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |U_{\infty}^{(-)}(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (0, \pi) \\ \infty, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

A condição de contorno apropriada para obter os modos quase-normais é

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ \arg(x) + \arg(\omega) \in [-\pi, 0]}} |u_{l\omega}(x)| = 0$$



# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

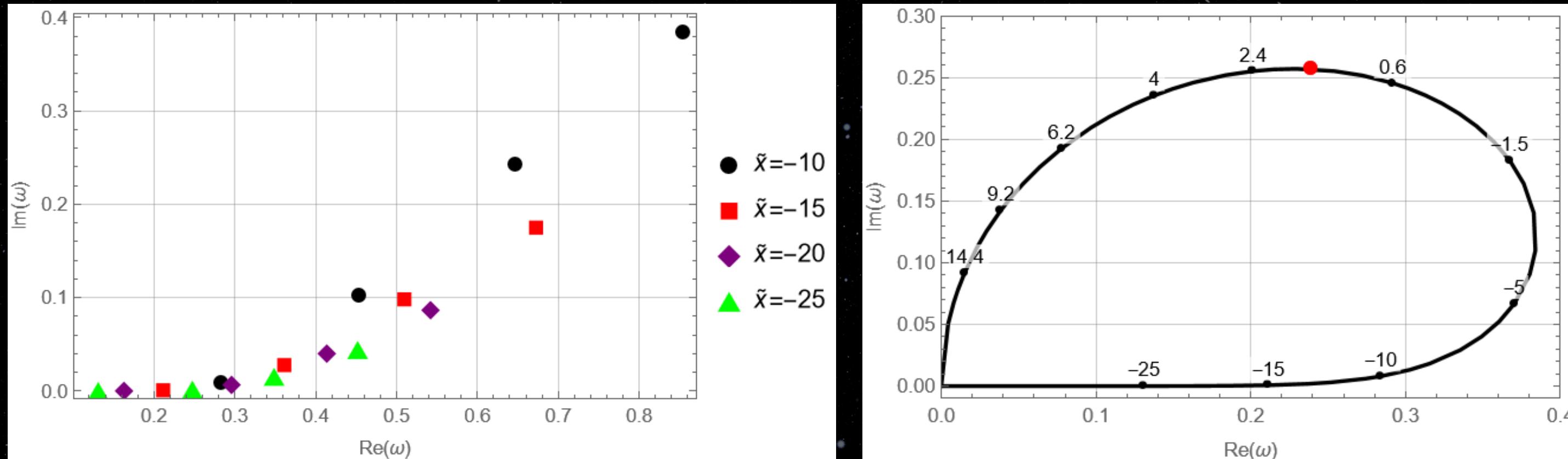
A equação anterior implica na seguinte equação transcendental em termos das funções Confluentes de Heun,

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ \arg(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2} - \arg(\omega)}} \left| (1-x)^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2})}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2})} \right. - \left. (1-x_{\min})^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x_{\min}}{2})}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x_{\min}}{2})} \right| = 0$$

A equação acima é válida apenas para valores discretos de  $\omega$ .

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

O comportamento dos modos quase-normais para  $l=1$  e  $x_{\max}=100$ .



$n$	$\tilde{x}_{\min} = -10$	$\tilde{x}_{\min} = -15$	$\tilde{x}_{\min} = -20$	$\tilde{x}_{\min} = -25$
0	$0.28409 + i 0.00802$	$0.21155 + i 0.00074$	$0.16303 + i 0.00010$	$0.13107 + i 0.00002$
1	$0.45383 + i 0.10192$	$0.36120 + i 0.02769$	$0.29599 + i 0.00655$	$0.24753 + i 0.00150$
2	$0.64775 + i 0.24144$	$0.50976 + i 0.09814$	$0.41377 + i 0.04005$	$0.34855 + i 0.01520$
3	$0.85580 + i 0.38376$	$0.67266 + i 0.17503$	$0.54206 + i 0.08659$	$0.45198 + i 0.04393$

# LIMITE DE SCHWARZSCHILD-CORPO COMPACTO

Tabela 1: Resultados Semi-Analíticos

I	Coordenada tartaruga	$\omega_r$	$\omega_i$
3	-3	0.7296224031	0.0477576499
3	-5	0.6512886683	0.0072767111
1	-10	0.2840954501	0.0080203563
1	-5	0.3703303173	0.0668826499

Tabela 2: Resultados Numéricos

I	Coordenada tartaruga	$\omega_r$	$\omega_i$
3	-3	0.735	0.0489
3	-5	0.6516	0.0073
1	-10	0.2842	0.0081
1	-5	0.3738	0.0688

Erro percentual (%) da tabela 2 em relação à tabela 1

I	Coordenada tartaruga	$\omega_r$	$\omega_i$
3	-3	0.74	2.4
3	-5	0.05	0.32
1	-10	0.04	0.99
1	-5	0.94	2.87

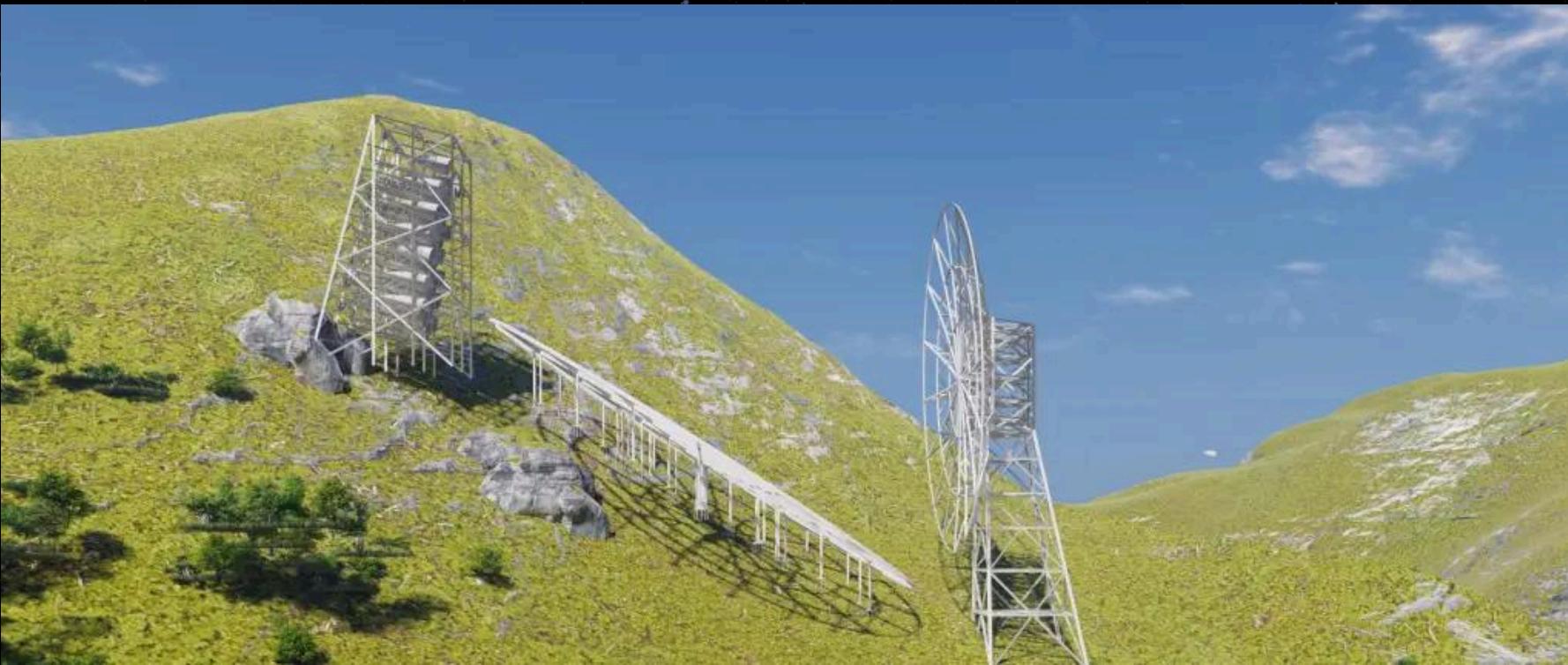
# CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

- Identificamos um acoplamento entre os modos para o caso magnetizado.
- Ao analisar as perturbações escalares no espaço de Gutsunaev-Manko, notamos divergências significativas para valores muito negativos para a coordenada tartaruga;
- Estudamos as propriedades das perturbações escalares no espaço-tempo de Schwarzschild e obtivemos os modos quase-normais para o caso de corpo compacto totalmente refletor;

# CONSIDERAÇÕES FINAIS



- Implementar o caso magnetizado e calcular os modos quase-normais;
- Planejamos expandir nossa análise para perturbações vetoriais e spinoriais;
- Assim, este projeto visa compreender os mecanismos por trás das RRR, pois o radiotelescópio BINGO/ABDUS será capaz de detectá-las, abrindo perspectivas futuras para a aplicação observacional deste projeto.

OBRIGADA!

