PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS EM SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Eveling C. Ribeiro

SUMÁRIO

FÉRMIONS

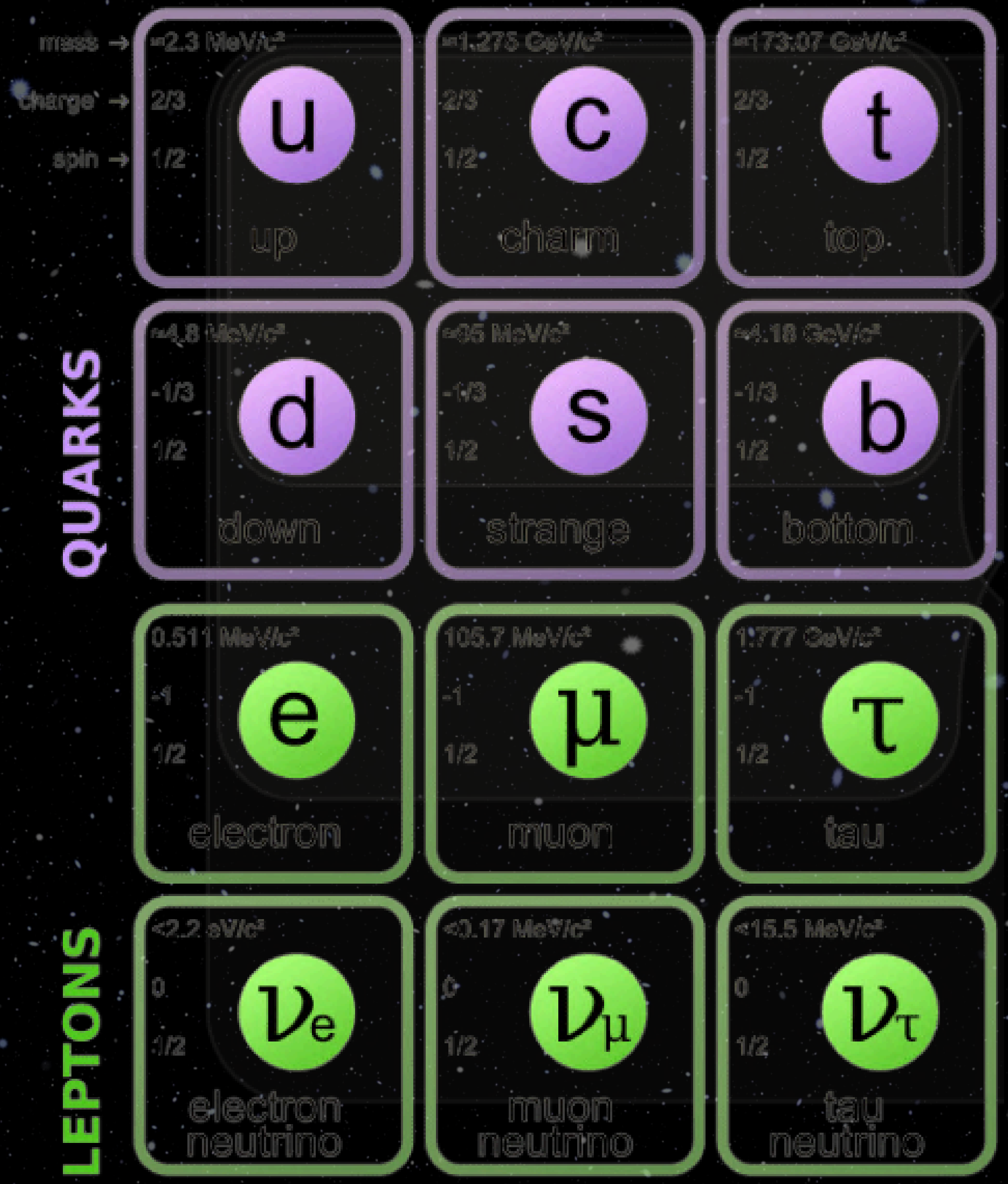
São partículas que satisfazem o princípio de exclusão de Pauli.

Possuem spin semi-inteiro e constituem a matéria.

A equação de 2º ordem não possuía “densidade de probabilidade” definida positiva.

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$

$$E \to i\hbar\partial_t \qquad \boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$$



A EQUAÇÃO DE DIRAC

Em 1928 Dirac buscou uma equação relativística de 1ª ordem.

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \qquad\qquad E = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta mc^2$$

A quantização da relação de dispersão acima é feita através de matrizes

$$-i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

A equação indicou a existência de uma nova forma de matéria, a *antimatéria*.

A EQUAÇÃO DE DIRAC

onde,

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

m é a massa de repouso da partícula,
c é a velocidade da luz,
$\hbar$ é a constante de Planck divida por 2π,
$\psi(\mathbf{x}, t)$ é uma função de onda com 4 componentes,
$\mathbf{x}$ e t são coordenadas do espaço e do tempo.

A EQUAÇÃO DE DIRAC

ou, em sua forma covariante

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0; \quad \hbar = 1 = c$$

com,

$$\gamma^0 = \beta; \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}; \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$$

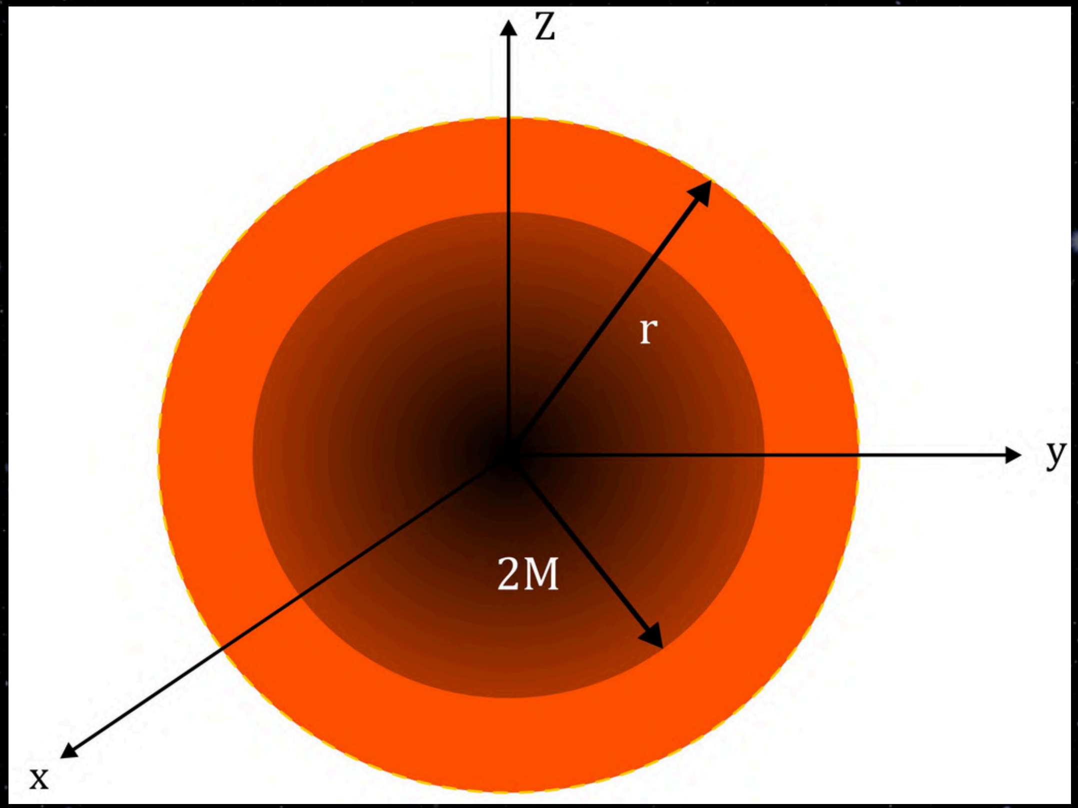
Investigar partículas elementares significa Física de altas energias

$$[Energia] = \frac{1}{[Distância]}$$

A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)$$

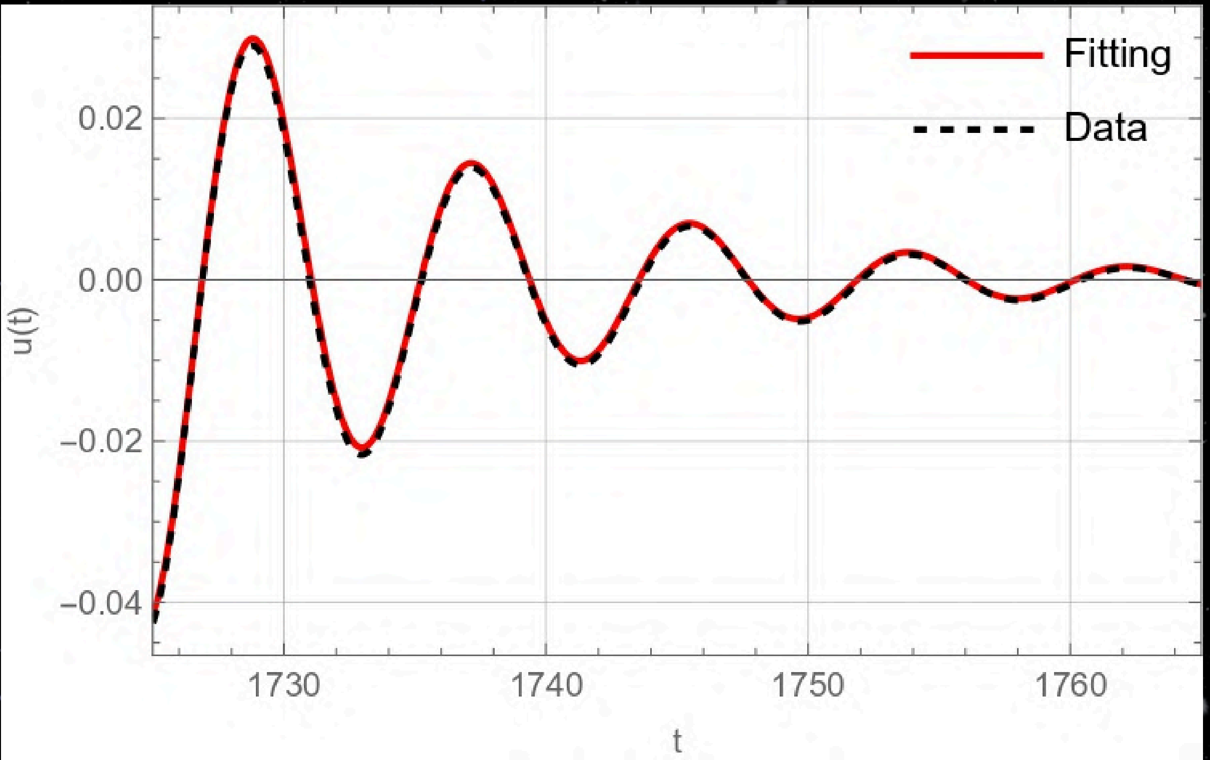
A solução de Schwarzschild descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático

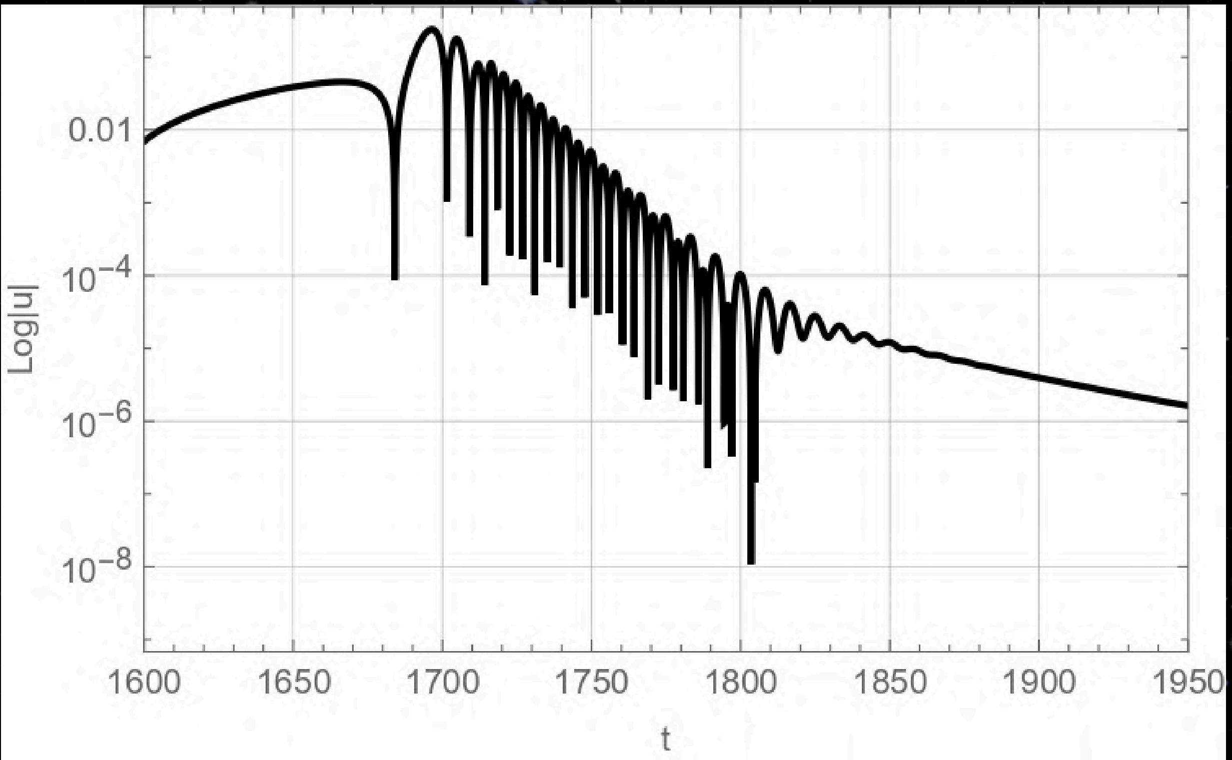


PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

Campos interagindo com a gravidade local possuem três estágios de evolução





O regime quase-normal é descrito por uma oscilação amortecida do tipo

$$Ae^{\omega_i t}\cos\left(\omega_r t+\delta\right)$$

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

PHYSICAL REVIEW D **68**, 024003 (2003)

Dirac quasinormal modes in Schwarzschild black hole spacetimes

H. T. Cho*
Department of Physics, Tamkang University, Tamsui, Taipei, Taiwan, Republic of China
(Received 19 March 2003; published 1 July 2003)

No espaço curvo, a equação de Dirac é escrita em termos das tétradas e da conexão de spin,

$$\left[\gamma^a e_a{}^\mu \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu\right) + m\right]\psi = 0$$

onde m é a massa do campo de Dirac, $e_a{}^\mu$ é a inversa da tétrada $e_\mu{}^a$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8}\left[\gamma^a, \gamma^b\right] e_a{}^\nu e_{b\nu;\mu} \qquad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu{}^a e_\nu{}^b$$

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

$$\left[\gamma^0\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^1\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\right.$$

$$\left.\gamma^2\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\right)+\gamma^3\left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\phi}+m\right]\psi=0.$$

A coordenada tartaruga é utilizada para estender a dinâmica em toda a reta real

$$r_*=r+2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)$$

$$r\in(2M,\infty)\quad r_*\in(-\infty,\infty)$$

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

Usando o seguinte Ansatz:

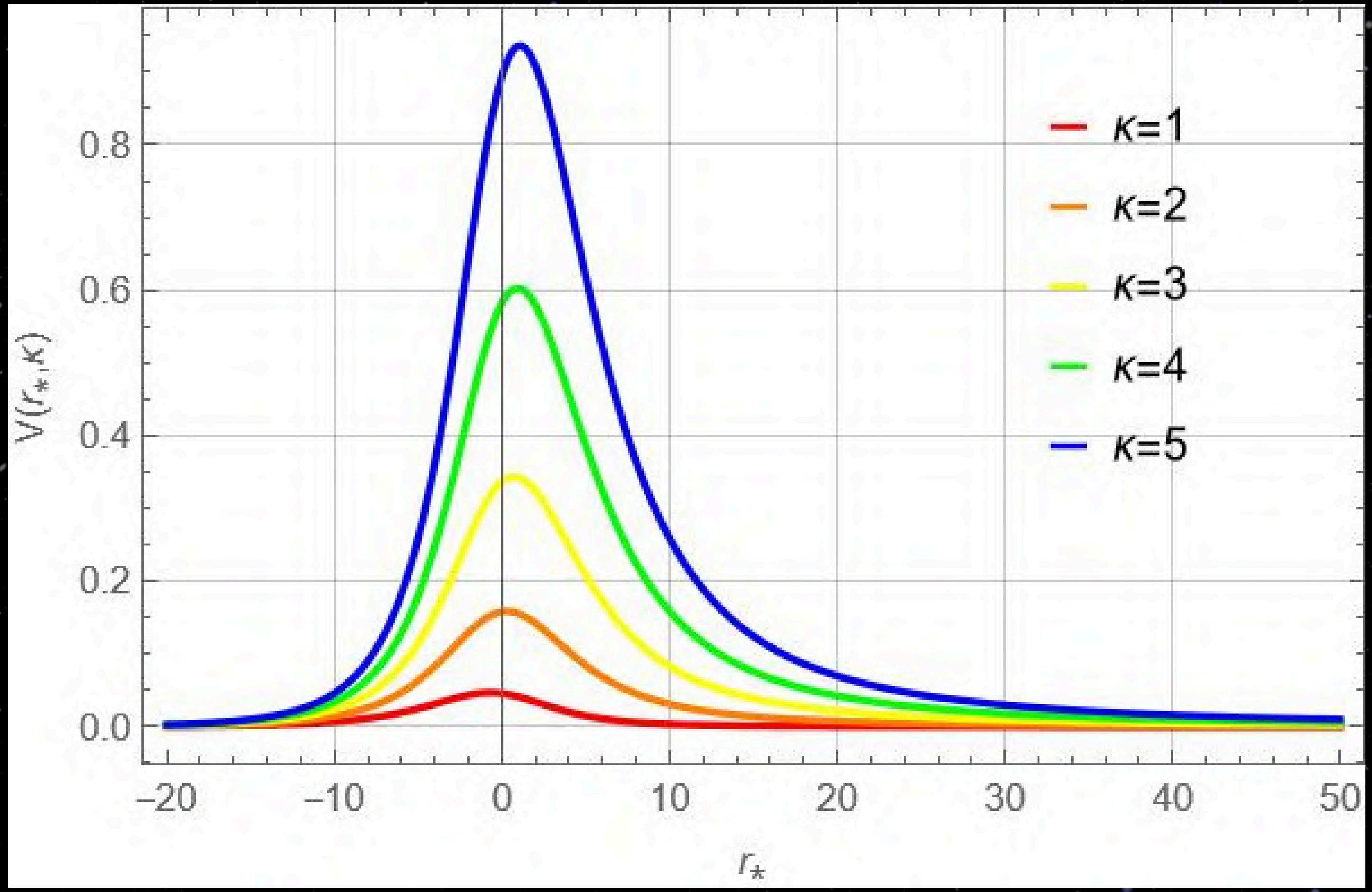
$$\psi\left(t,r,\theta,\phi\right)=\left(\begin{array}{c}\frac{iG(r)}{r}\varphi_{jm}^{(+)}\left(\theta,\phi\right)\\ \frac{F(r)}{r}\varphi_{jm}^{(-)}\left(\theta,\phi\right)\end{array}\right)e^{-iEt}$$

A parte angular é descrita pelo harmônico esférico espinorial e a função desconhecida é a parte radial

$$\varphi_{jm}^{(+)}=\left(\begin{array}{c}\sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}Y_l^{m-1/2}\\ \sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}Y_l^{m+1/2}\end{array}\right) \qquad \varphi_{jm}^{(-)}=\left(\begin{array}{c}\sqrt{\frac{l+1/2-m}{2l+1}}Y_l^{m-1/2}\\ -\sqrt{\frac{l+1/2+m}{2l+1}}Y_l^{m+1/2}\end{array}\right)$$

PERTURBAÇÕES FERMIÔNICAS

O espectro de partícula e anti-partícula são iguais



$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2}+V\left(r_*,\kappa\right)\right)G=E^2G$$

$$V\left(r_*,\kappa\right)=\frac{|\kappa|\sqrt{r\left(r-2\right)}}{r^4}\left[|\kappa|\sqrt{r\left(r-2\right)}-\left(r-3\right)\right]$$

O potencial efetivo depende apenas do valor absoluto de k=j+1/2, e tem a forma de barreira. Estamos considerando M=1.

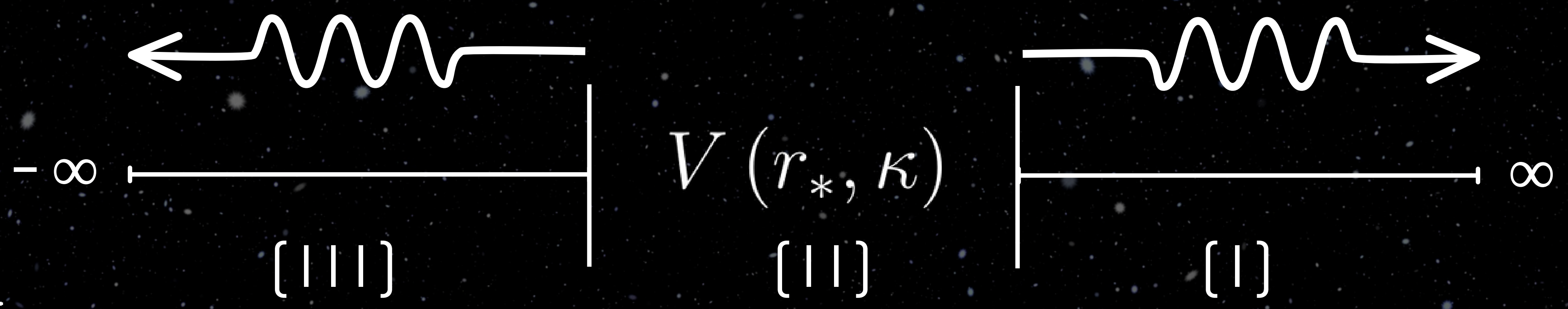
MÉTODO WKB

Esse método é muito útil para encontrar soluções aproximadas de equações de onda

$$G \sim \exp\left(\sum_n S_n(r_*)\epsilon^{n-1}\right) \qquad S_0\left(r_*\right) = \pm i \int^{r_*} Q\left(\eta\right)^{1/2} \mathrm{d}\eta \qquad S_1\left(r_*\right) = -\frac{1}{4}\ln Q\left(r_*\right)$$

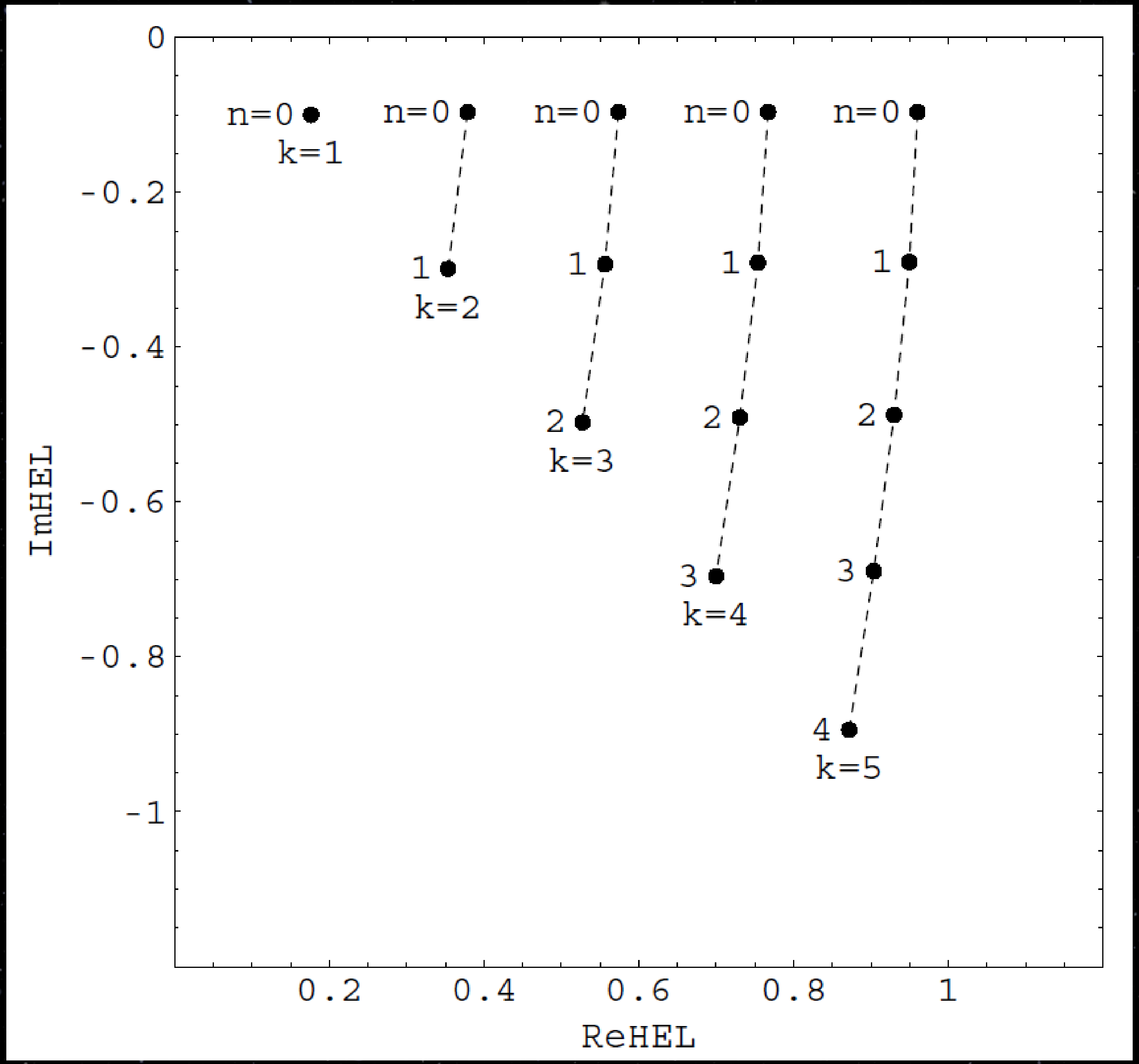
A solução para a região (II) pode ser obtida aproximando $Q(r)=E^2-V(r)$ em 1ª ordem ao redor do pico do potencial,

$$Q\left(r_*\right) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''\left(r_* - r_{0*}\right)^2 + O\left(\left(r_* - r_{0*}\right)^3\right)$$



MODOS QUASE-NORMAIS

As condições de contorno apropriadas implicam em uma equação algébrica para a energia (frequência).



CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

- As perturbações no espaço-tempo de Schwarzschild são estáveis;
- Estamos preocupados em estudar a estabilidade de objetos carregados ou magnetizados;
- Não é possível utilizar o método WKB para soluções de estrela. Nesse caso, faz-se necessário o uso de técnicas computacionais para a integração da equação diferencial radial.

OBRIGADA!!!