

Eveling Milena Costa Diniz Ribeiro

**Perturbações escalares em espaços-tempos axialmente
simétricos**

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Dr. Elcio Abdalla

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella (IFSC/USP)

Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (UNICAMP)



São Paulo

2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ribeiro, Eveling Milena Costa Diniz

Perturbações escalares em espaços-tempos axialmente simétricos /
Scalar perturbations in axially symmetric spacetimes. São Paulo, 2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de
Física. Departamento de Física Geral.

Orientador(a): Profº Drº Elcio Abdalla

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Relatividade (Física); 2. Solução de Gutsunaev-Manko;
3. Perturbações escalares; 4. Modos Quase-normais. 5. Corpos
Compactos.

USP/IF/SBI-002/2024

Eveling Milena Costa Diniz Ribeiro

Scalar perturbations in axisymmetric space-times

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Supervisor: Dr. Elcio Abdalla

Examining Committee:

Prof. Dr. Elcio Abdalla - Supervisor (IFUSP)

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella (IFSC/USP)

Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna (UNICAMP)

São Paulo

2024

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, o Criador, cujo amor sublime tem sido a fonte inesgotável de força e inspiração em minha árdua, porém magnífica trajetória chamada vida. Sou grata por tudo que Ele é e representa para mim, sendo o principal alvo do meu projeto de vida. À Ele, dedico minha mais profunda, sincera e eterna gratidão.

À minha família, o alicerce inabalável que sustenta cada passo que dou. Aos meus amados pais, Sílvia Cristina Costa Diniz e José Bonifácio de Góes Diniz, pela educação sólida, constante incentivo, paciência inesgotável e dedicação absoluta ao longo de toda uma existência. As orações proferidas e conselhos valiosos, pautados na Palavra de Deus, se enraizaram em minha essência, moldando a pessoa que sou hoje. Aos meus queridos irmãos, Eider Matheus e Esaú Muller, por cada conversa, experiência, conselho e pelo apoio que sempre me brindaram.

Ao meu esposo, Marcos Cézar Junior, melhor amigo e maior incentivador neste trajeto. Por todo tempo dedicado, inexaurível paciência, suporte incondicional, empenho contínuo e amor que permearam não apenas a realização deste trabalho, mas também cada etapa percorrida até aqui. Sou profundamente grata por compartilhar não somente a vida, mas também sonhos e objetivos ao seu lado. Sua presença torna cada conquista mais significativa. À você minha eterna gratidão e amor infinito.

Aos meus queridos sogros, Marcos Cézar Ribeiro e Janete Ribeiro, pelo encorajamento durante toda minha caminhada acadêmica. Suas palavras de incentivo e respaldo emocional foram fundamentais para me manter motivada e focada neste projeto. Sou grata por todo o carinho e amparo que sempre demonstraram e, para mim, é uma dádiva tê-los como parte da minha família.

Ao querido amigo, João Alberto, pela amizade, companheirismo, conselhos, preciosos ensinamentos, troca de conhecimentos e apoio em momentos difíceis. Seus valores foram âncoras fundamentais no meu avanço acadêmico, inspirando-me a persistir com determinação.

À minha querida amiga, Emmanuelle Costa, por ser uma fonte constante de ânimo e inspiração para mim. Sua amizade, suporte emocional, conselhos sábios, experiência

e palavras encorajadoras foram um farol de esperança nos momentos mais desafiadores, especialmente durante esta fase final da conclusão deste trabalho.

Ao meu estimado orientador e professor, Elcio Abdalla. Sua generosidade ao me conceder esta oportunidade e ao me introduzir de maneira tão envolvente a este fascinante campo da Física foi essencial para minha trajetória acadêmica. Seu incansável empenho, paciência, dedicação e precisas orientações ao longo do nosso trabalho conjunto foram pilares incomensuráveis e determinantes na concretização deste trabalho.

Aos queridos professores e colaboradores do projeto, Alberto Saa, Bertha Cuadros e Carlos Molina pela dedicação exemplar ao longo deste trabalho. Suas orientações e insights foram fundamentais para o sucesso desta pesquisa.

À banca avaliadora, por dedicar tempo à leitura deste singelo trabalho, além do compartilhamento de suas valiosas destrezas e sapiências.

Aos meus estimados colegas, companheiros neste percurso acadêmico, pelo companheirismo, amizade, respeito mútuo e pela rica troca de conhecimentos que resultaram em reflexões instigantes, enriquecendo meu entendimento acerca de diversos assuntos. Agradeço por compartilharmos juntos cada etapa vencida nesta fase, vivenciando e celebrando momentos de conquista, coletivamente.

À distinta equipe docente do IFUSP, pela imensurável contribuição de conhecimentos partilhados e pelo comprometimento exemplar em apresentar conteúdos de forma clara, concisa e de qualidade ímpar, sendo uma fonte genuína de inspiração, não somente enriquecendo minha trajetória acadêmica, mas também influenciando diretamente minha jornada como futura profissional na área.

Aos meus amigos e a todas as pessoas que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a concretização deste trabalho. Este momento marca o fim de um ciclo e o início de novos desafios.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio."

(Osvaldo Montenegro)

Resumo

A rajada rápida de rádio (RRR) é um fenômeno astrofísico de alta energia caracterizado por um pulso de rádio transitório com duração de apenas alguns milissegundos. O radiotelescópio BINGO e sua versão avançada, ABDUS, terão a capacidade de observar um número significativo de FRBs e suas posições. Nossa objetivo neste estudo é investigar a estabilidade de sistemas que poderiam servir como fontes para os FRBs. Candidatos potenciais incluem objetos com magnetização ou carga substanciais, capazes de desencadear emissões catastróficas semelhantes aos FRBs. Nossa exploração inicial envolve perturbações em uma solução magnetizada das equações de Einstein-Maxwell. Para isso, examinamos a métrica de Gutsunaev-Manko (GM), uma solução que descreve um corpo magnetizado axialmente simétrico, reduzindo à solução de Schwarzschild na ausência de um campo magnético. Este trabalho se concentra na análise de perturbações de ondas escalares dentro do espaço-tempo de GM. Ao contrário do caso de Schwarzschild, a propagação de ondas dentro do espaço-tempo de GM gera modos acoplados. Derivamos os modos quase-normais para um objeto compacto no limite de Schwarzschild usando a solução exata da equação de onda.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Espaços-Tempos Axialmente Simétricos. Solução de Gutsunaev-Manko. Modos Quase-Normais. Corpos Compactos.

Abstract

A fast radio burst (FRB) is a high-energy astrophysical phenomenon characterized by a transient radio pulse lasting only a few milliseconds. The BINGO radio telescope and its advanced version, ABDUS, will have the capability to observe a significant number of FRBs and their positions. Our objective in this study is to investigate the stability of systems that could serve as sources for FRBs. Potential candidates include objects with substantial magnetization or charge, capable of triggering catastrophic emissions resembling FRBs. Our initial exploration involves perturbations to a magnetized solution of the Einstein-Maxwell equations. For this purpose, we examine the Gutsunaev-Manko (GM) metric, a solution describing a magnetized axisymmetric body that reduces to the Schwarzschild solution in the absence of a magnetic field. This work focuses on analyzing scalar wave perturbations within the GM spacetime. Unlike the Schwarzschild case, wave propagation within GM spacetime yields coupled modes. We have derived the quasi-normal modes for a compact object in the Schwarzschild limit using the exact solution of the wave equation.

Key-words: General Relativity. Axisymmetric Spacetime. Gutsunaev-Manko Solution. Quasi-Normal Modes. Compact Bodies.

Listas de ilustrações

Figura 1 – Quando a massa m é solta da torre com altura H , toda a massa na base é transformada em energia e devolvida ao topo na forma de fótons. Isso sugere um ciclo perpétuo, a menos que o fóton perca energia ao subir equivalente à energia ganha pela massa ao cair. Como resultado, a luz é deslocada para o espectro vermelho conforme se move contra o campo gravitacional.	19
Figura 2 – A observadora no foguete perceberá o fantasma em queda livre a medida que o tempo passa.	21
Figura 3 – Para um observador no referencial da maçã, o fóton não perde energia. Esse fato suscita a ideia que referenciais em queda livre, de algum modo, "desligam" a gravidade, localmente.	22
Figura 4 – Um referencial rígido não pode cair livremente no campo gravitacional da Terra e ainda assim permanecer rígido.	23
Figura 5 – Representação do princípio da equivalência fraco, onde não há distinção entre as situações físicas, no contexto da Mecânica Clássica.	24
Figura 6 – Representação do princípio da equivalência forte. Em ambos os cenários a situação física deve ser a mesma.	25
Figura 7 – Representação de um sistema estacionário. O sistema não é invariante por reflexões temporais.	35
Figura 8 – Sistema de Coordenadas Esféricas.	36
Figura 9 – Esquema de um corpo compacto, estático e esfericamente simétrico que produz um espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild. A região delimitada por $r = 2M$ é conhecida como horizonte de eventos.	39
Figura 10 – Coordenadas de Weyl.	40
Figura 11 – Coordenadas Esferoidais Prolatas.	42
Figura 12 – A linha vermelha representa o horizonte de eventos, enquanto as linhas tracejadas são os limites para $y = \pm 1$. As linhas verde, azul e roxa ilustram as regiões onde (1.105) é satisfeita para diferentes valores de campos magnéticos.	44

Figura 13 – Comportamento das singularidades em termos de todo o intervalo do campo magnético. Diferentemente do horizonte, a singularidade depende de α .	45
Figura 14 – x_1 é uma aproximação melhor que x_0 para a raíz, x_* , da função, $f(x)$.	47
Figura 15 – Regra do trapézio para $N = 1$.	53
Figura 16 – Regra do trapézio para N subintervalos.	53
Figura 17 – Várias aproximações para $u'(x)$ interpretadas como a inclinação das retas secantes.	58
Figura 18 – Esquema de uma onda se propagando em uma corda.	60
Figura 19 – Discretização do domínio.	61
Figura 20 – Célula computacional para equação da onda.	62
Figura 21 – Resultados numéricos e analíticos do perfil da onda num instante de tempo t . Nestas figuras utilizamos os valores $x_0 = 5$, $k = 10$ e $c = 1$.	63
Figura 22 – Plot das matrizes $A_l^{l''}$ e $B_{lm}^{l''}$ para $m = 1$. A linha tracejada nos gráficos indica a posição exata da singularidade.	69
Figura 23 – O lado esquerdo apresenta o plot da matriz $A_l^{l''}$ para $l_{\max} = 51$. O lado direito mostra apenas valores ímpares de linha e coluna. A paleta de cores ao lado de cada plot indica a intensidade do elemento da matriz para os parâmetros indicados.	70
Figura 24 – Plot do Potencial $V(\tilde{x})$ para vários valores de l .	71
Figura 25 – Simulação da evolução temporal de uma perturbação gaussiana inicialmente no ponto $x_0 = 200$.	72
Figura 26 – Simulação de uma onda gaussiana se propagando no espaço-tempo de Schwarzschild para $l = 3$ e $\tilde{x}_{\min} = -2$.	73
Figura 27 – Representação gráfica da Tabela 2.	80
Figura 28 – Trajetória no plano complexo do modo fundamental como uma função do parâmetro, \tilde{x}_{\min} , escrito em termos da coordenada tartaruga (3.9). O ponto vermelho marca a posição do pico do potencial (3.18).	81

Lista de tabelas

Tabela 1 – Modos quase-normais para $l = 3$ e $\alpha = 0$.	73
Tabela 2 – Os primeiros quatro modos para $l = 1$, variando o parâmetro, \tilde{x}_{\min} , escrito em termos da coordenada tartaruga (3.9), com $x_{\infty} = 100$.	80
Tabela 3 – Modos quase-normais para $l = 3$ e $\alpha = 0$ obtidos semi-analiticamente.	81
Tabela 4 – Erro percentual (%) dos modos quase-normais obtidos numericamente em relação aos obtidos semi-analiticamente, para $l = 3$ e $\alpha = 0$.	81

Sumário

Introdução	14
1 ELEMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL	18
1.1 Relação entre Gravidade e Curvatura	18
1.1.1 Referenciais Inerciais em um Campo Gravitacional	19
1.1.2 Princípio da Equivalência	23
1.1.3 Movimento de uma Partícula em um Campo Gravitacional	26
1.2 Equações de Campo para a Gravidade	29
1.2.1 Equações de Campo de Einstein	29
1.2.2 Equações de Einstein-Maxwell	32
1.3 Soluções para as Equações de Einstein	34
1.3.1 Solução de Schwarzschild	34
1.3.2 Solução de Gutsunaev-Manko	39
2 MÉTODOS NUMÉRICOS	46
2.1 Método de Newton	46
2.1.1 Sistema de equações	48
2.2 Integração Numérica	50
2.2.1 Fórmulas de Newton-Cotes	51
2.2.2 Fórmulas de quadratura de Clenshaw-Curtis	55
2.3 Método das Diferenças Finitas	57
2.3.1 Aplicação do Método das Diferenças Finitas na Equação de Onda	60
3 PERTURBAÇÕES ESCALARES E MODOS QUASE-NORMAIS	65
3.1 Perturbações de soluções conhecidas da Relatividade Geral	65
3.2 Perturbações Escalares	67
3.3 Modos Quase-Normais de Corpos Compactos	74
3.3.1 Soluções Exatas da Equação de Onda no Espaço-Tempo de Schwarzschild	74
3.3.1.1 Funções Confluentes de Heun	75
3.3.1.2 Corpos Compactos	77

4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	Referências	84
	APÊNDICE A – CAPÍTULO 1	91
A.1	Matemática da Relatividade Geral	91
A.1.1	Vetores e Tensores	91
A.1.2	Derivada Covariante	92
A.1.3	Tensor de Curvatura	94
	APÊNDICE B – CAPÍTULO 2	96
B.1	Simulação em python para a onda unidimensional.	96
	APÊNDICE C – CAPÍTULO 3	99
C.1	Simulação em Python de uma onda escalar no espaço-tempo de Schwarzschild	99
C.2	Propagação de uma Onda no Espaço GM	102
C.3	Solução da Equação da Onda no Espaço-Tempo de Schwarzschild	105
C.4	Análise do comportamento das funções $U_{\infty}^{(\pm)}$	108

Introdução

A Relatividade Geral descreve, presumivelmente, as soluções restritas a uma região finita do espaço para os objetos astrofísicos que observamos ou poderíamos observar no cosmos. Soluções esfericamente simétricas, por exemplo, utilizam a solução de Schwarzschild para grandes distâncias, à qual devemos acoplar campos de matéria próximos à origem para evitar a singularidade. Se não a evitarmos, obtemos soluções de buracos negros; se a evitarmos, podemos descrever planetas ou estrelas, dependendo da equação de estado que governa a matéria do objeto astrofísico. Ao adicionar outros elementos, como rotação, carga ou campos magnéticos, podemos obter soluções mais genéricas e menos triviais, como as soluções de Reissner-Nordström, Kerr, Kerr-Newman, etc [1, 2, 3]. É possível descrever a sequência de uma estrela e, eventualmente, sua fase final, caso utilizemos os elementos constituintes da matéria da qual ela é composta. Assim, chegamos à formação de objetos como buracos negros, estrelas de nêutrons, anãs brancas ou gigantes vermelhas [4, 5]. Em particular, a métrica de Kerr é usada para descrever objetos astrofísicos com momento angular, como Sagittarius A*, o buraco negro no centro da Via Láctea [6, 7, 8].

Um dos desafios fundamentais na compreensão dos fenômenos astrofísicos reside na análise da estabilidade de objetos dessa natureza e as soluções que os descrevem. Ainda na década de 30, trabalhos como [9, 10] já discutiam fenômenos catastróficos, como instabilidades de anãs brancas e colapsos gravitacionais de estrelas. Outra questão é: ao perturbarmos uma dessas soluções que descrevem objetos cósmicos, poderíamos desencadear instabilidades que resultariam em eventos explosivos? A natureza instável de processos como as supernovas exemplifica a complexidade desses fenômenos [11]. O estudo de perturbações de buracos negros foi iniciado pelo trabalho pioneiro de Regge e Wheeler [12] no final dos anos 50 e foi continuado por Zerilli [13]. As perturbações de estrelas relativísticas na Relatividade Geral foram estudadas pela primeira vez no final dos anos 60 por Kip Thorne e seus colaboradores [14, 15, 16, 17] e até hoje o estudo teórico destes corpos astrofísicos é de extrema relevância, uma vez que ainda não existe um consenso sobre a natureza, nem os mecanismos dos fenômenos explosivos.

As soluções generalizadas de Schwarzschild, como as soluções de Kerr ou Reissner-Nordström, demonstraram-se estáveis diante de perturbações de spin em diferentes contextos

[18, 19, 20]. No entanto, é importante notar que nem todas as soluções seguem esse padrão de estabilidade sob todas as condições. Por exemplo, as soluções de Reissner-Nordström podem se tornar instáveis em um espaço que inclua uma constante cosmológica quando expostas a perturbações carregadas [21].

Fisicamente, uma perturbação pode ser pensada como um campo de matéria interagindo com o objeto astrofísico responsável pela gravidade local. Tal interação produz uma resposta, em forma de onda, que se propaga ao longo do espaço-tempo. Essa resposta, quando estável, é conhecida na literatura como modo quase-normal. Esse nome se refere ao fato que, diferentemente dos modos normais, que oscilam indefinidamente no tempo, os modos quase-normais possuem um decaimento exponencial que pode ser interpretado como uma frequência imaginária responsável por fazer a oscilação ter um tempo de vida finito. Sendo assim, quando o espaço-tempo ao redor de um corpo astrofísico é perturbado por algum campo físico, ele emite ondas que possuem frequências reais e imaginárias bem definidas

$$\omega = \omega_R + i\omega_I. \quad (1)$$

Portanto, a estabilidade de uma configuração gravitacional pode ser estudada utilizando esses modos [21, 18, 22], uma vez que a frequência imaginária garante o decaimento ou o crescimento dos modos. Modos que decaem são ditos estáveis, ao passo que modos que crescem indefinidamente são considerados instáveis.

Fenômenos explosivos são eventos catastróficos e representam a mudança drástica de um sistema físico. Estes eventos podem ser encontrados sem muitos esforços, basta pensarmos em supernovas, explosões de raios gama ou colisões de buracos negros. Todos estes fenômenos são razoavelmente bem entendidos do ponto de vista observational e teórico. Por outro lado, foi detectado em 2001 um novo tipo de fenômeno explosivo, os Fast Radio Bursts (FRBs) ou Rajadas Rápidas de Rádio (RRR). Estes sinais extremamente energéticos, são detectados na faixa da frequência de rádio e possui altos valores de dispersão sugerindo assim uma origem extragaláctica para as RRR [23]. Além disso, são reconhecidas pela quantidade extraordinária de energia, estimada em equivaler a cerca de 10^{18} gramas de massa, um valor raramente observado em outros fenômenos [24, 25, 26].

As RRR foram encontradas quase casualmente por Lorimer analisando dados estabelecidos de observação de Rádio do observatório de Parkes, na Austrália, em 2007. Desde então um número cada vez maior (mas ainda pequeno) de RRR têm sido observado

[27]. Além do aspecto observational, frentes de pesquisas teóricas com o intuito de modelá-las vêm sendo desenvolvidas nos últimos anos [28, 23]. Em particular, especula-se que estrelas de nêutrons magnetizadas podem ser fontes de RRR [23]. Visto isso, um dos intuitos deste trabalho é verificar a estabilidade de objetos com expressiva magnetização, uma vez que possuímos evidências teóricas e observacionais que tais sistemas podem ser instáveis e, portanto, ensejar emissões catastróficas. Além do mais, o radioescópio BINGO e sua versão avançada ABDUS serão capazes de observar um número grande de RRR, assim como sua posição no espaço, feito pouco executado até hoje [24, 29].

Além de investigar a estabilidade de corpos magnetizados, este trabalho visa analisar as propriedades analíticas e numéricas da equação de onda em espaços-tempos axialmente e esfericamente simétricos. Ademais, vamos derivar a solução exata de uma onda se propagando em um espaço-tempo esfericamente simétrico. Nossa foco está na obtenção dos modos quase-normais de corpos densos que simulam objetos como estrelas de nêutrons. Ao longo do texto, apresentamos uma série de métodos numéricos e analíticos, destacando outro objetivo importante: a criação de uma revisão abrangente na área de perturbações espaço-temporais.

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos. O Capítulo 1 aborda elementos fundamentais no estudo da Relatividade Geral. Inicialmente, exploramos a ideia que motivou a Relatividade Geral: a interpretação que a gravidade está manifestada na curvatura do espaço-tempo. Em seguida, justificamos as equações de campo para a gravidade e introduzimos as equações de Einstein-Maxwell, como a extensão natural da Relatividade Geral em cenários com campos eletromagnéticos. Concluímos o capítulo discutindo duas soluções para as equações de Einstein: a solução de Schwarzschild e a solução de Gutsunaev-Manko. A primeira descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, fundamental na descrição de estrelas, planetas e outros corpos astrofísicos. Já a segunda representa um tipo específico de solução exata das equações de Einstein-Maxwell, sendo estacionária e axissimétrica, o que possibilita descrever um corpo massivo com campo magnético.

O Capítulo 2 apresenta os métodos numéricos essenciais e aplicados na obtenção de todos os resultados deste trabalho. Começamos com o problema clássico de encontrar raízes para uma função arbitrária. Para isso, discutimos o método de Newton-Raphson e sua generalização para um sistema de n equações. Em seguida, apresentamos alguns métodos de integração numérica, particularmente as fórmulas de quadratura de Clenshaw-

Curtis, amplamente empregadas em várias bibliotecas do Python. Por fim, abordamos o método das diferenças finitas, aplicando, como exemplo, na resolução da equação da onda unidimensional.

O Capítulo 3 destaca os principais resultados deste trabalho, onde derivamos o sistema de equações que governa a propagação de uma onda escalar no espaço-tempo de Gutsunaev-Manko, juntamente com o potencial efetivo envolvido na dinâmica da perturbação. Introduzimos um modelo para corpos compactos, visando evitar as singularidades intrínsecas da métrica. Investigamos detalhadamente o limite de Schwarzschild e obtivemos as soluções exatas da equação de onda para esse cenário. Em seguida, calculamos os modos quase-normais para nosso modelo simplificado de corpos compactos, utilizando as propriedades das soluções exatas.

As conclusões obtidas estão apresentadas no Capítulo 4, onde são sumarizados os principais resultados e enunciadas perspectivas futuras.

1 Elementos da Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral, concebida por Einstein [30, 31, 32], representou uma revolução em nossa percepção do espaço e do tempo, que não são mais vistos como entidades separadas, mas sim como componentes entrelaçados formando o espaço-tempo. Essa perspectiva redesenhou nossa compreensão da realidade física, destacando a íntima interdependência desses conceitos cruciais.

A Relatividade Geral oferece uma visão mais profunda e precisa do espaço, tempo e gravidade e compreender seus princípios é fundamental não apenas para investigar a natureza da gravidade, mas também para avançar em direção às teorias unificadas. Além disso, a pesquisa em cosmologia e astrofísica é impulsionada pelo entendimento dos elementos essenciais da Relatividade Geral e pelo seu papel intrínseco na estrutura do universo [33]. Esses fundamentos impulsionam avanços notáveis em áreas de estudos de buracos negros, ondas gravitacionais e a própria estrutura cósmica, abrindo portas para descobertas significativas. Dessa forma, um conhecimento sólido de Relatividade Geral nos garante uma compreensão mais clara e rica do funcionamento do universo em escalas cósmicas.

Neste capítulo, faremos um resumo conciso dos principais conceitos relevantes para esse trabalho, no contexto da relatividade geral. Começaremos pela relação entre gravidade e curvatura, passando pelas equações de campo para a gravidade, e culminando nas soluções para as equações de Einstein.

1.1 Relação entre Gravidade e Curvatura

A Teoria da Relatividade Especial foi uma conquista notável ao unificar a Mecânica Clássica com o Eletromagnetismo, reformulando a noção de espaço-tempo como uma entidade unificada. No entanto, a Teoria da Gravitação Newtoniana não se encaixa diretamente nesse novo paradigma. A equação de Newton, quando aplicada à gravitação, não se integra à união entre espaço e tempo proposta, permanecendo à parte da unificação entre Mecânica e Eletromagnetismo, embora tenha sido a base da Mecânica Newtoniana.

A contribuição mais marcante de Einstein foi introduzir, por meio da Teoria da Gravitação, uma visão radicalmente nova da força, emergindo como resultado da estrutura

intrínseca do espaço-tempo, agora fundamentada em sua geometria. Na Teoria da Gravitação de Einstein, a força gravitacional tem sua origem na curvatura do espaço-tempo, sendo portanto geométrica.

1.1.1 Referenciais Inerciais em um Campo Gravitacional

Na relatividade especial, o espaço-tempo pode ser descrito por um único referencial¹, no qual todos os pontos estão em repouso em relação à origem (O), e todos os relógios andam no mesmo compasso em relação a O . Contudo, em situações onde existe campo gravitacional, não é possível obter tal referencial, pois, nesse caso, relógios não andam no mesmo passo.

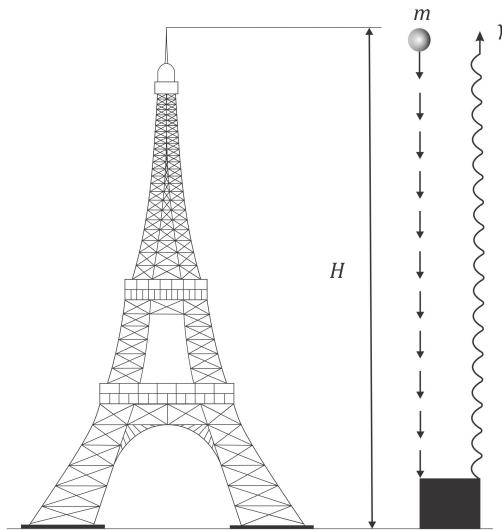


Figura 1 – Quando a massa m é solta da torre com altura H , toda a massa na base é transformada em energia e devolvida ao topo na forma de fôtons. Isso sugere um ciclo perpétuo, a menos que o fóton perca energia ao subir equivalente à energia ganha pela massa ao cair. Como resultado, a luz é deslocada para o espectro vermelho conforme se move contra o campo gravitacional.

A fim de ilustrar esse comportamento, podemos imaginar o seguinte experimento mental: No topo de uma torre de altura H , construída na superfície da Terra (Figura 1), existe uma massa m , em repouso, que será solta e acelerada pela gravidade g . Quando a massa alcançar a base da torre a energia da partícula, E , se converterá, de algum modo, em um fóton de mesma energia, o qual será redirecionado ao topo da torre novamente, onde terá sua energia, E' , convertida em uma nova massa, m' , dando continuidade ao processo. Perceba que $E' = mc^2$, uma vez que é válida a conservação da energia. Note que a razão

¹ Esse referencial é conhecido como referencial inercial global.

entre as energias E' e E pode ser escrita como

$$\frac{E'}{E} = \frac{m}{m + mgH/c^2} \approx 1 - \frac{gH}{c^2}, \quad (1.1)$$

o que indica que o fóton perde energia quando ele sobe o campo gravitacional da Terra. Esse resultado é conhecido como *redshift gravitacional* e foi verificado experimentalmente, pela primeira vez, por Pound e Rebka, em 1960 [34].

O redshift gravitacional é um exemplo definitivo de que um referencial em repouso na terra não pode ser um referencial de Lorentz², visto que

$$E' < E \implies \nu' < \nu \implies \Delta t' > \Delta t, \quad (1.2)$$

onde $\Delta t'$ e Δt são os intervalos de tempo entre duas cristas consecutivas da onda de luz medidos no topo e na base, respectivamente. Dessa maneira, os relógios em cima e em baixo da torre não andam no mesmo compasso³.

O experimento do redshift gravitacional nos obriga a ponderar onde estão localizados os referenciais inerciais em um campo gravitacional uniforme, como na superfície da Terra. Para isso, devemos lembrar do princípio da equivalência que põe em pé de igualdade referenciais acelerados e referenciais em repouso em campos gravitacionais. Discutiremos em detalhes esse assunto na próxima seção. Por agora, consideremos um foguete, no espaço vazio, acelerando a $9,8 \text{ m/s}^2$. Graças ao princípio da equivalência, não existe maneira de alguém dentro da nave distinguir⁴ se está em um referencial acelerado ou em um campo gravitacional. Nessas condições, podemos nos fazer o seguinte questionamento: como um referencial inercial parecerá para alguém que está dentro da nave? Primeiramente, considere um referencial imediatamente acima dessa nave. À medida que a nave acelera, o referencial, representado pelo fantasma (Figura 2), se aproxima cada vez mais do chão da mesma a uma aceleração exatamente igual a $9,8 \text{ m/s}^2$. Isto é, precisamente, uma queda livre, ou seja, um referencial inercial visto por um observador no interior da nave parecerá estar em queda livre. Essa ideia foi vislumbrada por Einstein, que formulou a Teoria da Relatividade Geral sobre a hipótese de que referenciais em queda livre devem ser inerciais. Analisaremos como esses referenciais observam o experimento do redshift gravitacional descrito acima.

² Referenciais de Lorentz são referenciais inerciais na relatividade especial, ou seja, referenciais conectados a partir das transformações de Lorentz.

³ Perceba que a primeira implicação em (1.2) é obtida usando a relação de Einstein para a energia de um fóton, $E = h\nu$, onde h é a constante de Planck e ν é a frequência do fóton.

⁴ O princípio da equivalência foi formulado inicialmente pensando apenas em experimentos mecânicos, uma vez que a física da época se resumia à mecânica clássica.

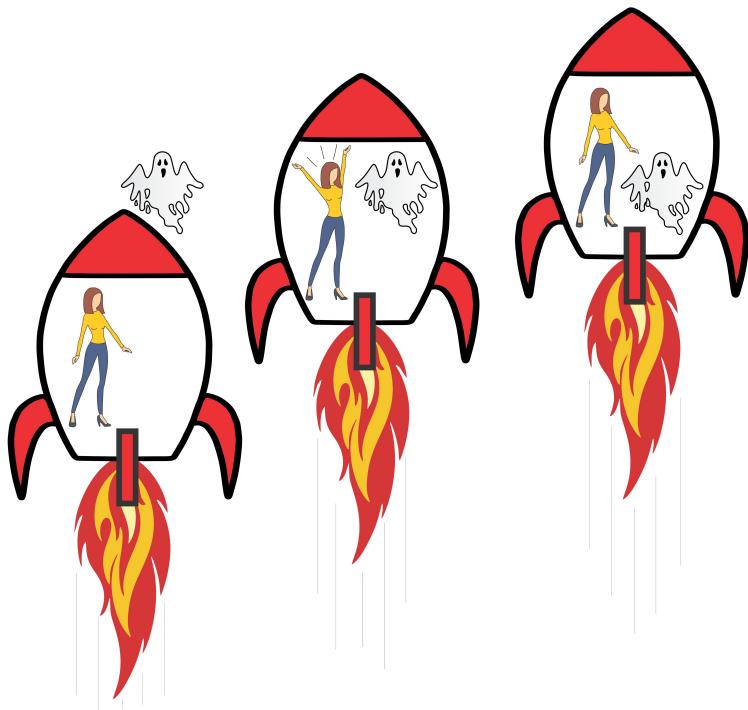


Figura 2 – A observadora no foguete perceberá o fantasma em queda livre a medida que o tempo passa.

Vamos considerar um referencial que está em repouso antes do fóton iniciar a sua trajetória para cima e, em queda livre, depois disto (Figura 3). Evidentemente, o fóton gastará um tempo $\Delta\tau = H/c$ para chegar ao topo da torre. Nesse tempo, o referencial em queda livre, terá uma velocidade gH/c direcionada para baixo, em relação à Terra. A frequência ν_{ql} do fóton, medida no referencial em queda livre, se relaciona com a frequência ν' , medida no topo da torre, pela fórmula do redshift,

$$\nu_{ql} = \frac{1 + gH/c^2}{\sqrt{1 - g^2H^2/c^4}} \nu' \approx \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \nu' . \quad (1.3)$$

Usando a expressão (1.1), a relação de Einstein e desprezando termos de ordem superior, temos que

$$\nu' = \left(1 - \frac{gH}{c^2}\right) \nu . \quad (1.4)$$

Desta forma, podemos observar a relação entre as frequências medidas no referencial em queda livre e o referencial na base da torre, ou seja,

$$\nu_{ql} = \left(1 - \frac{g^2H^2}{c^4}\right) \nu \approx \nu . \quad (1.5)$$

Logo, nesse referencial em queda livre, não será observado o redshift gravitacional. Esse argumento nos leva a inferir que referenciais em queda livre são fortes candidatos a referenciais inerciais em um campo gravitacional uniforme.

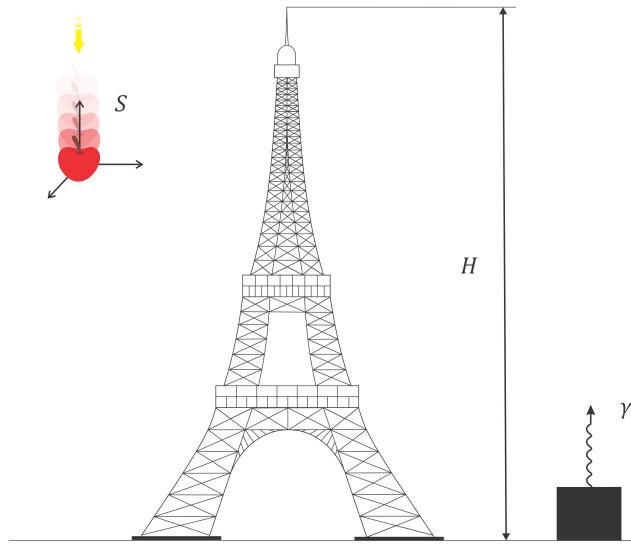


Figura 3 – Para um observador no referencial da maçã, o fóton não perde energia. Esse fato suscita a ideia que referenciais em queda livre, de algum modo, "desligam" a gravidade, localmente.

Toda discussão acima pode nos fazer imaginar que o campo gravitacional e a relatividade especial são compatíveis. Tudo o que devemos fazer é considerar referenciais em queda livre como inerciais. No entanto, infelizmente, isso não é tão simples por uma única razão: há vários referenciais em queda livre em diferentes direções na Terra. Isso significa que em uma situação onde exista um campo gravitacional, as distâncias entre os pontos coordenados não permanecerão constantes no tempo nesses referenciais. Portanto, não é possível definir um referencial inercial global, como na relatividade especial.

Considere, por exemplo, um referencial em queda livre no campo gravitacional da Terra. Se ampliarmos esse referencial para além do horizonte terrestre, notaremos que esse referencial deixará de ser inercial, uma vez que a direção da queda livre mudará (Figura 4). Além disso, se considerarmos esse referencial muito distante da Terra, ele sofrerá uma alteração na aceleração ao longo do tempo, deixando de ser inercial. Todas essas limitações decorrem das não uniformidades do campo gravitacional. Entretanto, se considerarmos uma região pequena o suficiente do espaço-tempo, em queda livre, podemos resgatar o conceito de referencial inercial. Tal referencial é chamado de *referencial inercial local*. Referenciais em queda livre, próximos da superfície da Terra, podem ser considerados inerciais com uma alta precisão [35].

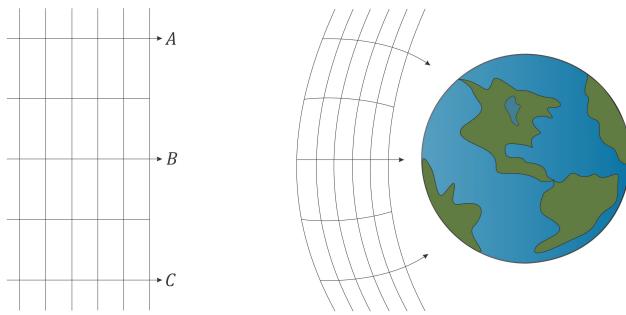


Figura 4 – Um referencial rígido não pode cair livremente no campo gravitacional da Terra e ainda assim permanecer rígido.

1.1.2 Princípio da Equivalência

Compreender a noção de referenciais inerciais é de extrema importância em nossa discussão. Um ponto relevante sobre esses referenciais é que partículas em repouso permanecem nessa condição se nenhuma força atuar sobre elas. A fim de usar essa ideia, é necessário discorrer um pouco sobre o conceito de força. A gravidade sempre foi vista como uma força gerada a partir de uma propriedade intrínseca da matéria, chamada massa gravitacional. Essa força é proporcional ao produto das massas gravitacionais e inversamente proporcional à distância entre elas e é dada por

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_g m_g}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.6)$$

onde o índice g explicita a dependência da massa gravitacional. Contudo, Galileu demonstrou, experimentalmente, que a gravidade era distingível de todas as demais forças, pois, corpos massivos em queda livre, com a mesma velocidade inicial, seguem a mesma trajetória, com a mesma aceleração, independente da composição interna destes, uma vez que a equação de movimento desses corpos é

$$-G \frac{M_g m_g}{r^2} = m_I a, \quad (1.7)$$

onde m_I é a massa inercial. Assim, a aceleração, em módulo, de qualquer corpo é dada por

$$a = \frac{m_g}{m_I} \frac{GM_g}{r^2}. \quad (1.8)$$

As observações de Galileu nos mostraram uma equivalência entre massa inercial e massa gravitacional⁵, ou seja,

$$\frac{m_g}{m_I} = 1. \quad (1.9)$$

⁵ É claro que a equação (1.7) é obtida com o uso da segunda lei de Newton, a qual Galileu não tinha conhecimento. Ele verificou a igualdade (1.9) de maneira empírica.

Dessa forma, podemos concluir que não existe diferença no movimento de corpos em referenciais acelerados e referenciais em repouso em um campo gravitacional (Figura 5). Esse é o princípio da equivalência entre gravidade e aceleração e é um dos fundamentos da gravidade Newtoniana.

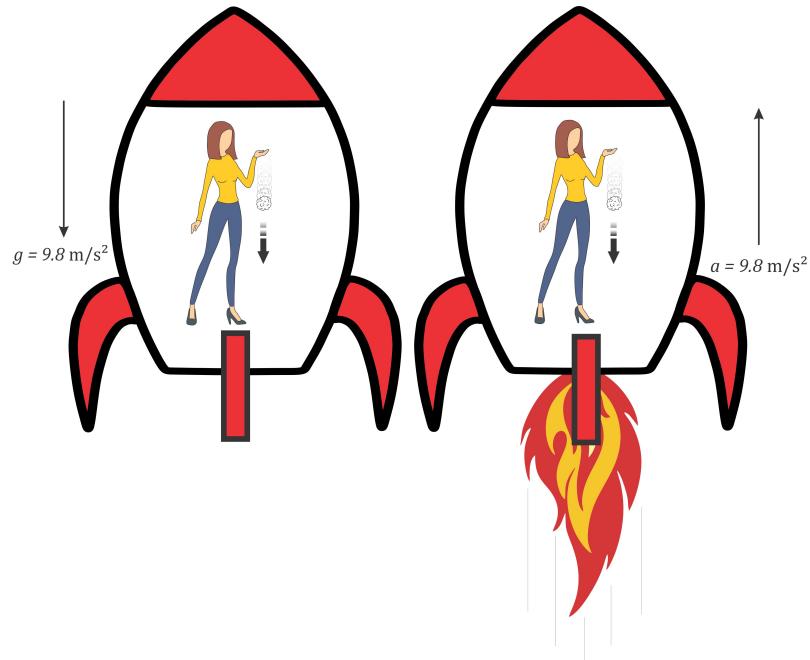


Figura 5 – Representação do princípio da equivalência fraco, onde não há distinção entre as situações físicas, no contexto da Mecânica Clássica.

O princípio da equivalência discutido acima é conhecido na literatura como princípio da equivalência fraco, pois trata apenas do movimento de corpos em referenciais acelerados e referenciais em repouso em um campo gravitacional. Einstein generalizou essa ideia no que é conhecido hoje como princípio da equivalência de Einstein, no qual postula uma completa correspondência entre referenciais acelerados e referenciais em repouso em campos gravitacionais. Essa similaridade vai além das leis de mecânica, englobando todas as leis da física. Para ilustrar essa ideia, ao invés de uma bolinha de papel, a mulher segura uma lanterna e lança um feixe de luz perpendicular ao vetor de aceleração do foguete (Figura 6). Na situação em que o foguete está acelerando para cima, o caminho do feixe de luz parecerá curvado para baixo, à medida que o piso da nave se apressa para encontrar os fôtons. Como não há distinção entre esses dois casos, somos levados à conclusão de que o caminho dos fôtons será curvado para baixo na presença de um campo gravitacional, ou seja, a gravidade afeta os fôtons, apesar destes não terem massa.

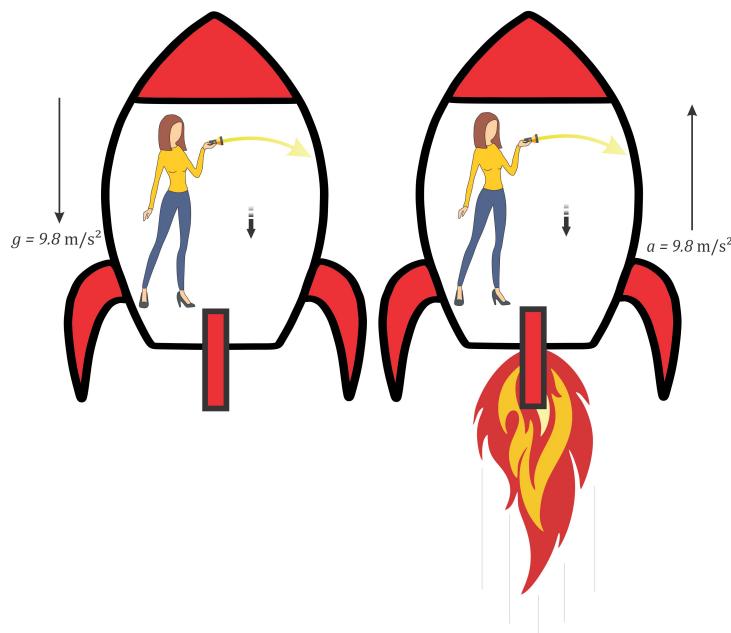


Figura 6 – Representação do princípio da equivalência forte. Em ambos os cenários a situação física deve ser a mesma.

Um dos princípios fundamentais da óptica é o princípio de Fermat que afirma que a luz viaja entre dois pontos ao longo de um caminho que minimiza o tempo de viagem necessário. No vácuo, onde a velocidade da luz é constante, a luz segue o caminho mais curto entre dois pontos. No espaço plano, o caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta. No entanto, na presença de gravidade, o caminho percorrido pela luz não é uma linha reta, indicando uma modificação na geometria do espaço-tempo.

É natural discutir a geometria do espaço-tempo analisando as linhas de mundo de partículas livres. Na relatividade especial, linhas de mundo paralelas entre si permanecerão paralelas não importa o quanto estendidas elas forem. Na geometria euclidiana, as linhas retas possuem essa mesma propriedade. Assim, podemos dizer que o espaço-tempo de Minkowski é plano, pois obedece ao *axioma das paralelas de Euclides*⁶. No caso de um campo gravitacional, as linhas de mundo paralelas de duas partículas próximas não permanecem paralelas em geral. Portanto, o espaço-tempo ao redor de um campo gravitacional não satisfaz, globalmente, o postulado das paralelas de Euclides. Logo, é um espaço curvo, onde as linhas de mundo de partículas livres são geodésicas nesse espaço. Discutiremos como o conceito de geodésica surge, naturalmente, no contexto da gravidade na próxima seção.

⁶ O postulado das paralelas pode ser resumido da seguinte forma: "Por um ponto externo a uma reta, pode-se traçar exatamente uma reta paralela à reta dada". Essa afirmação foi publicada pela primeira vez no famosíssimo livro Os elementos de Euclides [36].

Até aqui apresentamos as ideias principais da Relatividade Geral. Todavia, devemos definir precisamente as grandezas físicas em termos de objetos matemáticos. Matematicamente, todo espaço-tempo é representado por uma variedade diferencial M . Todas as quantidades geométricas importantes para uma variedade são descritas por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ⁷. Isso significa que esta captura todas as propriedades físicas do espaço-tempo. Quando a métrica não depende dos pontos do espaço-tempo dizemos que o mesmo é plano, caso contrário, temos um espaço curvo. Na Relatividade Geral a gravidade é entendida como a curvatura do espaço-tempo e, portanto, é descrita por uma métrica.

Dito isto, notamos que apesar do espaço-tempo de Minkowski ser plano ele não é euclidiano, uma vez que a sua métrica difere da euclidiana⁸.

1.1.3 Movimento de uma Partícula em um Campo Gravitacional

Como já discutido nas seções anteriores, na Relatividade Geral a gravidade perde o status de força e passa a ser entendida como a curvatura do espaço-tempo. Isso significa dizer que faz sentido pensarmos em partículas livres em campos gravitacionais. A equação de movimento para essas partículas pode ser derivada pelo princípio variacional

$$\delta S = 0, \quad (1.10)$$

onde a ação para o movimento está relacionada ao elemento de linha no espaço quadridimensional, ou seja,

$$S_{BA} = \int_A^B ds. \quad (1.11)$$

O elemento de linha contém toda a informação da geometria do espaço e, portanto, depende da métrica pela relação

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.12)$$

Tudo o que devemos fazer é avaliar a mudança na ação (1.11) de um caminho x^μ para um outro $x^\mu + \delta x^\mu$, deixando os pontos extremos fixos, ou seja, fazendo $\delta x^\mu = 0$ para os pontos A e B . Note que $dx^\mu = u^\mu d\tau = \frac{1}{c} u^\mu ds$. Assim, a variação da equação (1.12) pode

⁷ O tensor métrico é como uma versão expandida da primeira forma fundamental de uma superfície bidimensional. Assim como essa forma fundamental descreve distâncias e ângulos em um espaço de duas dimensões, o tensor métrico faz isso para espaços de dimensões mais altas. Na Relatividade Geral, o tensor métrico é um objeto 4-dimensional, o que significa que tem 16 componentes diferentes que capturam as características geométricas do espaço-tempo.

⁸ O espaço de Minkowski é frequentemente chamado de pseudo-Euclidiano. Isso se deve ao fato que, diferentemente do espaço euclidiano, o produto interno entre dois vetores, no espaço de Minkowski, não é positivo definido.

ser escrita da seguinte forma

$$c\delta ds = \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau + g_{\mu\nu}u^\mu\delta dx^\nu, \quad (1.13)$$

ou seja, substituindo a equação (1.13) em (1.10), temos

$$c\delta S_{BA} = \int_A^B \left(\frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau + g_{\mu\nu}u^\mu\delta dx^\nu \right). \quad (1.14)$$

Note que $\delta g_{\mu\nu} = \frac{dg_{\mu\nu}}{dx^\lambda}\delta x^\lambda = g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda$. Assim,

$$c\delta S_{BA} = \int_A^B \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda u^\mu u^\nu d\tau + g_{\mu\nu}u^\mu d\delta x^\nu \right). \quad (1.15)$$

Fazendo uma integração por partes e desprezando os termos de fronteira, uma vez que estamos considerando extremos fixos em A e B , obtemos

$$c\delta S_{BA} = \int_A^B \left\{ \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda u^\mu u^\nu - \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}u^\mu)\delta x^\nu \right\} d\tau. \quad (1.16)$$

O termo de derivada pode ser desenvolvido de tal maneira que a equação acima se torne

$$c\delta S_{BA} = - \int_A^B \left\{ g_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) u^\mu u^\lambda \right\} \delta x^\nu d\tau. \quad (1.17)$$

Utilizando o princípio variacional (1.10) e multiplicando a equação resultante por $g^{\sigma\nu}$

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2}g^{\sigma\nu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}) u^\mu u^\lambda = 0, \quad (1.18)$$

O segundo termo na expressão anterior pode ser reescrito em termos do que conhecemos por símbolo de Christoffel (vide apêndice A.1.2). Sendo assim, podemos reescrever a equação de movimento como

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma u^\mu u^\nu = 0. \quad (1.19)$$

Geometricamente, essa equação representa uma partícula livre em um espaço curvo e, por conseguinte, em um campo gravitacional. Podemos ver que nessa situação uma partícula se moverá pelo menor caminho entre dois pontos, ou seja, por uma *geodésica*. Além disso, a equação (1.19) se reduz ao caso de Minkowski quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, cuja geodésica é uma linha, reta como esperado.

A fim de se reduzir ao caso newtoniano, consideraremos a partícula movendo-se lentamente em um campo gravitacional fraco e estático. Se a partícula estiver suficientemente lenta, podemos considerar $\frac{dx^i}{d\tau} \ll c$. Assim, a equação (1.19) se torna

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + c^2\Gamma_{00}^\sigma \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (1.20)$$

A condição de campo estático,

$$g_{\mu\nu,0} = 0, \quad (1.21)$$

juntamente com a hipótese de campo fraco,

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

podem ser combinadas para reescrever o símbolo de Christoffel em primeira ordem como

$$\Gamma_{00}^\sigma = -\frac{1}{2}\eta^{\sigma i}h_{00,i}. \quad (1.23)$$

A equação de movimento pode ser reescrita separando suas componentes temporal e espacial da seguinte maneira:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}, \quad (1.24)$$

$$c \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0. \quad (1.25)$$

A solução da segunda equação acima nos garante que $\frac{dt}{d\tau}$ é uma constante, o que é compatível com o limite não-relativístico, uma vez que

$$\lim_{v \ll c} \tau = t \implies \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (1.26)$$

Com isso, a equação (1.24) assume a forma newtoniana

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \nabla h_{00}, \quad (1.27)$$

onde podemos identificar a componente h_{00} como proporcional ao potencial gravitacional ϕ .

Assim,

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}, \quad (1.28)$$

ou ainda,

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (1.29)$$

Desta forma, a métrica difere da métrica de Minkowski pela componente puramente temporal

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \quad (1.30)$$

Para grandes distâncias, onde h_{00} desaparece, o espaço volta a ser plano.

1.2 Equações de Campo para a Gravidade

As equações de campo para a gravidade oferecem um entendimento de como a matéria e a energia interagem com o espaço-tempo, dando origem à sua curvatura. Duas formulações fundamentais dessas equações são as Equações de Campo de Einstein e as Equações de Einstein-Maxwell.

As Equações de Campo de Einstein delineiam como a presença de matéria e energia produzem a força gravitacional e, de maneira recíproca, como a gravidade influencia a distribuição dessas entidades. Em condições não-relativísticas, isto é, quando as velocidades são baixas e os campos gravitacionais são fracos, essas equações convergem para a conhecida Lei da Gravitação de Newton.

Por outro lado, as Equações de Einstein-Maxwell expandem as Equações de Campo de Einstein ao incorporar os princípios eletromagnéticos de Maxwell à estrutura da Relatividade Geral. Essas equações unificam a descrição da gravidade com os fenômenos eletromagnéticos, oferecendo um quadro teórico mais abrangente para compreender esses dois pilares fundamentais da física.

1.2.1 Equações de Campo de Einstein

As equações para o campo gravitacional são, inevitavelmente, mais complicadas do que as do campo eletromagnético. As equações de Maxwell são lineares, pois o próprio campo eletromagnético não possui carga. Por outro lado, o campo gravitacional carrega momento e energia e, em vista disso, deve contribuir como fonte de si mesmo. Dessa forma, as equações de campo para a gravidade devem ser não-lineares a fim de representar o efeito de auto-interação da gravidade.

Obter as equações de campo para a gravidade não é tarefa fácil. Posto isto, vamos nos concentrar em uma dedução mais heurística atrás de princípios físicos já discutidos. Primeiro, vamos nos lembrar que um campo gravitacional fraco e estático, produzido por uma densidade de matéria ρ , tem componente puramente temporal dada pela equação (1.30), onde ϕ é o potencial gravitacional que satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (1.31)$$

Sendo assim, no limite de campo fraco, podemos identificar a componente puramente

temporal do tensor energia momento como sendo a densidade de matéria

$$T_{00} = \rho c^2, \quad (1.32)$$

ou seja, a equação para o campo gravitacional tem a seguinte forma

$$\nabla^2 g_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (1.33)$$

Apesar dessa equação ser verdadeira apenas no limite newtoniano, ela nos inspira a postular que, para o caso geral, temos uma equação do tipo

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.34)$$

Contudo, devemos impor a condição que no limite do campo fraco a equação (1.34) se reduza naturalmente ao caso newtoniano (1.33). O objetivo mais imediato será descobrir a forma do tensor $G_{\mu\nu}$. Por analogia direta com a equação (1.33), podemos pensar que o tensor $G_{\mu\nu}$ é algum operador diferencial de segunda ordem, ou seja, alguma combinação de $g_{\mu\nu,\lambda\sigma}$, $g_{\mu\nu,\lambda}$ e $g_{\mu\nu}$. Além disso, o tensor $G_{\mu\nu}$ precisa ser simétrico, uma vez que o tensor energia-momento tem essa propriedade.

As propriedades de antissimetria do tensor de Riemann (vide apêndice A.1.3) nos garantem que há apenas dois tensores de ordem menor ou igual a dois gerados a partir de suas contrações [4]: o tensor de Ricci, um tensor de segunda ordem

$$R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} \quad (1.35)$$

e a curvatura escalar,

$$R = g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \quad (1.36)$$

Desse modo, a forma mais geral para o operador $G_{\mu\nu}$ é

$$G_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R, \quad (1.37)$$

onde α e β são constantes que devem ser determinadas. Note que o tensor em (1.37) é simétrico, como se espera. Para determinar a constante β podemos impor o princípio da equivalência de Einstein que garante a conservação local de energia e momento e, consequentemente,

$$G^{\mu\nu}_{;\mu} = (R^{\mu\nu} + \kappa g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0, \quad (1.38)$$

onde $\kappa = \beta/\alpha$ deve ser tal que a igualdade acima seja verdadeira. Usando a relação (A.33), é possível obter

$$\kappa = -1/2 \implies \beta = -\frac{\alpha}{2}, \quad (1.39)$$

ou seja,

$$G_{\mu\nu} = \alpha \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (1.40)$$

O limite newtoniano pode ser usado para fixar a constante $\alpha = 1$. Desta forma, temos as equações de campo de Einstein, explicitamente, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.41)$$

Uma forma as vezes útil de se reescrever estas expressões em termos apenas da curvatura escalar é obtida contraindo a equação acima com $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= -\frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \\ R - 2R &= -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\mu}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\mu}. \quad (1.42)$$

Combinando as equações (1.42) e (1.41) temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{4\pi G}{c^4} g_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\alpha} &= -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Note que no vácuo o tensor energia-momento é identicamente nulo e, consequentemente, as equações de campo se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.44)$$

A equação acima se reduz ao caso newtoniano para o limite do campo fraco e estático.

Por fim, vale a pena mencionar que Einstein introduziu um termo extra, $\Lambda g_{\mu\nu}$, nas equações de campo [37],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.45)$$

com o intuito de obter soluções estáticas para o universo em grandes escalas. Tal termo ficou conhecido como *termo cosmológico* e a constante Λ foi chamada de *constante cosmológica*. O termo cosmológico era entendido como uma energia intrínseca do vácuo. Observações posteriores [38] sobre a não estaticidade do universo fez com que Einstein retirasse tal termo das equações de campo. Todavia, recentes observações astronômicas sugerem a existência de uma constante cosmológica pequena, mas não-nula [39]. No entanto, a interpretação

moderna do termo cosmológico é muito diferente, e serve, de fato, para que tenhamos uma expansão acelerada do cosmos. Assim, o intuito é bem diferente daquele de Einstein, de fato, basicamente o oposto da interpretação inicial. Para este trabalho vamos considerar $\Lambda = 0$.

1.2.2 Equações de Einstein-Maxwell

Há uma gama de situações físicas que ganham destaque, particularmente em contextos astrofísicos, nos quais tanto a influência da gravidade quanto a presença do campo eletromagnético desempenham papéis significativos [40, 41, 21]. Nessas circunstâncias, a interação entre os campos eletromagnéticos e gravitacionais é fundamental, e é comumente abordada pela combinação das equações de campo de Einstein e as equações de Maxwell, conhecidas como equações de Einstein-Maxwell.

Estas equações oferecem um arcabouço teórico robusto para descrever a interação entre a gravidade, manifestada pela curvatura do espaço-tempo conforme discutido na seção anterior, e o campo eletromagnético.

Esta seção tem como propósito principal a apresentação dessas equações fundamentais. Ao compreender e analisar esse modelo matemático, abre-se uma porta para a compreensão mais profunda da interação entre a gravidade e o eletromagnetismo, proporcionando insights valiosos sobre o funcionamento do universo em escalas cósmicas.

Primeiramente, daqui em diante, vamos considerar as unidades de medidas geométricas, onde $c = 1$ e $G = 1$. Estas unidades de medida são utilizadas para simplificar as expressões, além de colocar em pé de igualdade unidades de tempo, distância e massa. Além disso, vamos escolher $\epsilon_0 = 1$ em nossos cálculos⁹. Na ausência de gravidade, as equações de Maxwell podem ser escritas em sua conhecida forma covariante, dada por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu, \quad (1.46)$$

$$\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0, \quad (1.47)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é conhecido como tensor eletromagnético, definido por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.48)$$

⁹ Esta escolha é conhecida como unidade de medida de Lorentz-Heaviside.

com o 4-potencial e 4-corrente sendo

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (1.49)$$

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}). \quad (1.50)$$

Na presença da gravidade, devemos substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes, o que nos leva ao acoplamento entre o campo A^μ e a geometria do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. Devido às propriedades de antissimetria do tensor eletromagnético $F^{\mu\nu}$ e a simetria da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, mesmo no caso gravitacional, as relações (1.47) e (1.48) se mantém. A equação de movimento se torna

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu. \quad (1.51)$$

Podemos escrever a equação acima de uma maneira mais simples. Utilizando as definições de derivada covariante vistas no apêndice A.1.2, temos

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu F^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma}. \quad (1.52)$$

Devido à simetria da conexão e à antissimetria do tensor eletromagnético, o termo $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu F^{\mu\sigma}$ se anula. O termo $\Gamma_{\sigma\mu}^\mu$ pode ser reescrito como $\partial_\sigma (\ln \sqrt{-g})$ (vide apêndice A.1.2). Desse modo, temos

$$\sqrt{-g} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu (\sqrt{-g}) F^{\mu\nu} = -\sqrt{-g} 4\pi j^\nu, \quad (1.53)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -j^\nu. \quad (1.54)$$

Assim como a gravidade influencia no eletromagnetismo, ilustrado na equação acima, os campos eletromagnéticos influenciam na curvatura do espaço-tempo. Isso ocorre devido ao fato que campos eletromagnéticos possuem energia e momento descritos de maneira unificada pelo tensor,

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} F_{\lambda\alpha} F_{\beta\sigma} \right). \quad (1.55)$$

Sendo assim, para acoplamos o campo eletromagnético às equações de Einstein devemos considerar a correspondência

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(M)}, \quad (1.56)$$

na equação (1.45). O último termo é a contribuição eletromagnética, enquanto o primeiro é a contribuição não-eletromagnética ao tensor energia-momento do sistema. Sendo assim, as equações de campo de Einstein na presença de campos eletromagnéticos se tornam

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(M)}). \quad (1.57)$$

As equações (1.54) e (1.57) caracterizam um conjunto de equações acopladas para os campos gravitacional e eletromagnético, conhecidas como equações de Einstein-Maxwell. Mais tarde, neste trabalho, vamos discutir uma solução específica para estas equações na situação de eletrovácuo, ou seja quando

$$T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.58)$$

$$j^\mu = 0. \quad (1.59)$$

As soluções das equações de Einstein-Maxwell são indispensáveis em situações astrofísicas, como na descrição de estrelas de Nêutrons, Buracos Negros carregados ou Magnetares onde os campos gravitacional e eletromagnético desempenham papel importante no sistema.

1.3 Soluções para as Equações de Einstein

As equações de Einstein discutidas na seção anterior descrevem a dinâmica do campo gravitacional. Estas formam um conjunto de equações não-lineares para o tensor métrico. Nesta seção, iremos apresentar duas soluções exatas dessas equações e analisar suas propriedades. A primeira, a solução de Schwarzschild, é reconhecida por ilustrar o campo gravitacional em torno de um objeto esférico e estático, como estrelas, planetas ou buracos negros não carregados. A segunda, a solução de Gutsunaev-Manko, embora menos conhecida, é igualmente intrigante. Ela descreve o campo gravitacional gerado por um corpo magnetizado, em uma configuração estática e axissimétrica. Essa solução oferece um modelo matemático valioso para explorar objetos astrofísicos mais complexos.

1.3.1 Solução de Schwarzschild

Quando Einstein propôs as equações que descrevem a curvatura do espaço-tempo, em seu célebre trabalho [32], descobriu que estas equações eram tão complicadas que nem mesmo o próprio acreditara que as mesmas tinham alguma solução analítica [42]. Foi quando Karl Schwarzschild, ainda em 1915, encontrou a primeira solução exata das equações de campo da Relatividade Geral. Tal solução foi obtida explorando o conceito de simetrias sob condições específicas. A solução de Schwarzschild que estamos interessados neste trabalho descreve o campo gravitacional próximo a um objeto esférico não-rotativo e não-magnetizado. O sucesso de Schwarzschild em derivar uma solução exata foi crucial para fortalecer a base da teoria da relatividade geral.

A solução de Schwarzschild, como mencionado anteriormente, descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, portanto o campo gravitacional de planetas ou estrelas pode ser aproximado¹⁰ por essa métrica. Dizer que um espaço-tempo é estático significa que existe um referencial onde a métrica não depende do tempo, ou seja,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0. \quad (1.60)$$

Além disso, a métrica deve ser invariante por transformações de inversão temporal, $x^0 \rightarrow x^{0'} = -x^0$;

$$g_{\mu\nu}(x^0, x^i) = g_{\mu\nu}(-x^0, x^i), \quad (1.61)$$

de modo que o elemento de linha não contenha termos cruzados do tipo $dx^0 dx^i$. Essa propriedade diferencia um espaço-tempo estático de um estacionário, visto que a métrica do segundo não é simétrica por reversões temporais (1.61). Um exemplo simples dessa diferença é um espaço-tempo gerado por um corpo em rotação que possui o atributo (1.60), mas não o (1.61), como ilustrado na figura 7 abaixo. Logo, o elemento de linha de um

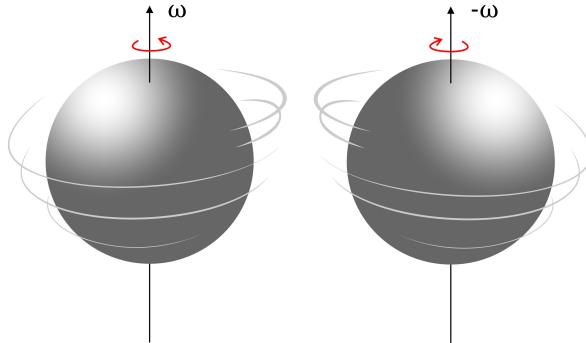


Figura 7 – Representação de um sistema estacionário. O sistema não é invariante por reflexões temporais.

espaço-tempo estático geral tem a forma

$$ds^2 = g_{00}(x^k)(dx^0)^2 + g_{ij}(x^k)dx^i dx^j, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (1.62)$$

Intuitivamente, simetria esférica quer dizer que existe um ponto privilegiado, o qual chamaremos de origem O , tal qual o sistema é invariante por rotações em torno desse ponto. Então, se fixarmos um ponto P a uma distância R da origem, temos que rotações arbitrárias em torno de O descreverão uma superfície esférica centrada nesse ponto. O sistema de coordenadas esféricas usuais (Figura 8) captura essa simetria, onde os ângulos

¹⁰ Desde que possamos desprezar o movimento de rotação do objeto astronômico.

azimutal e polar pertencem ao domínio

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad (1.63)$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (1.64)$$

O elemento de linha sobre a superfície esférica não pode conter termos cruzados do tipo

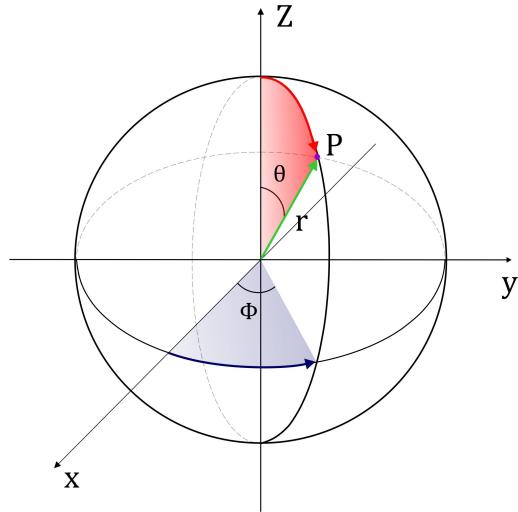


Figura 8 – Sistema de Coordenadas Esféricas.

$d\theta d\phi$, pois a métrica deve ser invariante por reflexões nos angulos θ e ϕ separadamente

$$\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta, \quad (1.65)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi. \quad (1.66)$$

Portanto, o elemento de linha na superfície esférica tem a forma

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.67)$$

Em quatro dimensões, podemos pensar que o elemento de linha tem uma coordenada tipo-tempo e uma radial, ambas arbitrárias, de tal maneira que, se fizermos $r = const$ e $t = const$, recobramos o elemento (1.67), ou seja,

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.68)$$

Note que as funções $A(r)$ e $B(r)$ devem ser positivas, uma vez que a assinatura da métrica deve ser $(-, +, +, +)$. Logo, é comum escrever o elemento de linha (1.68) em termos de exponenciais, ou seja, o elemento de linha de um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático geral tem a forma

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.69)$$

Agora vamos utilizar as equações de campo do vácuo de Einstein para determinar as funções desconhecidas $\nu(r)$ e $\lambda(r)$. A métrica covariante é

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(-e^\nu, e^\lambda, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right), \quad (1.70)$$

e, uma vez que a métrica é diagonal, sua forma contravariante é

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(-e^{-\nu}, e^{-\lambda}, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta \right). \quad (1.71)$$

Se denotarmos as derivadas em relação a coordenada radial por f' , então as componentes não nulas do tensor de Einstein são

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (1.72a)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (1.72b)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda' \nu'}{2} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right). \quad (1.72c)$$

Através dos conceitos de simetria, reduzimos o problema de encontrar dez funções de quatro variáveis cada para o problema de encontrar duas funções de uma variável. Para determinar as funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ devemos obter as equações que essas funções satisfazem. Tais equações podem ser obtidas através das equações de Einstein para o vácuo. São elas

$$G_\mu^\nu = 0. \quad (1.73)$$

Dessa maneira, temos um conjunto de 4 equações diferenciais. No entanto, estas equações não são todas independentes. De fato, as duas últimas são satisfeitas automaticamente se as duas primeiras se anularem. Sendo assim, as duas equações que precisamos resolver são

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad , \quad (1.74)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad . \quad (1.75)$$

Somando as equações acima obtemos a simples relação

$$\lambda' + \nu' = 0 \implies \lambda(r) = -\nu(r) \quad , \quad (1.76)$$

usando o resultado acima em (1.75) obtemos a equação diferencial

$$\nu'(r) = \frac{e^{-\nu}}{r} - \frac{1}{r} \quad , \quad (1.77)$$

que pode ser facilmente integrada para encontrar

$$e^\nu = 1 - \frac{C}{r}, \quad (1.78)$$

e, consequentemente,

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1}. \quad (1.79)$$

A constante de integração C pode ser definida impondo que no limite Newtoniano, para a solução de Schwarzschild, devemos recobrar a teoria de Newton. Assim, devemos comparar o termo g_{00} com a equação (1.30), o que nos leva a

$$C = -2\phi r \implies C = 2M. \quad (1.80)$$

Finalmente, obtemos o elemento de linha de Schwarzschild em sua forma usual,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.81)$$

A solução de Schwarzschild é assintoticamente plana, o que significa que, ao considerarmos o limite para $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo retorna a Minkowski. A região delimitada por $r = 2M$ (Figura 9) é identificada como o horizonte de eventos, onde a componente g_{00} se anula. Fisicamente, esse limiar divide o espaço-tempo em duas regiões, de modo que o interior do horizonte não pode influenciar causalmente a região exterior. Em outras palavras, um corpo astrotípico com raio inferior ao horizonte se transforma em um buraco negro. No horizonte, a componente g_{11} se torna singular. A questão reside na natureza dessa singularidade: será que a geometria é verdadeiramente singular nesse ponto, ou isso é apenas uma aparente singularidade decorrente da escolha de um sistema de coordenadas inconveniente para essa região? Na realidade, a região do horizonte não constitui uma singularidade genuína; assim, um observador em queda livre em direção a um buraco negro não perceberia nada de extraordinário ao atravessar esse ponto.

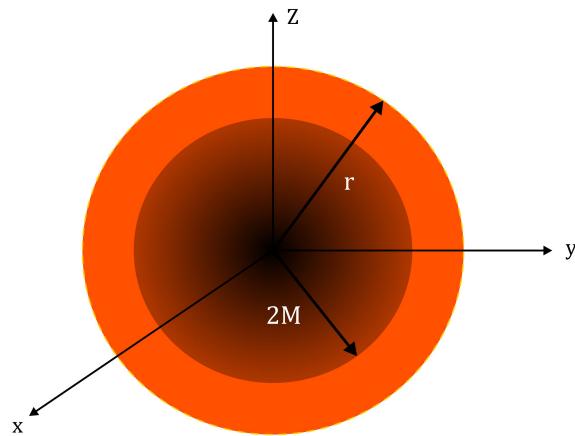


Figura 9 – Esquema de um corpo compacto, estático e esfericamente simétrico que produz um espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild. A região delimitada por $r = 2M$ é conhecida como horizonte de eventos.

1.3.2 Solução de Gutsunaev-Manko

No âmbito da Relatividade Geral, a investigação de objetos astrofísicos magnetizados, como os magnetares, revela-se de profunda importância. Esses magnetares, estrelas de nêutrons notáveis por seus campos magnéticos intensos, têm recentemente sido apontados como possíveis geradores das misteriosas rajadas rápidas de rádio [23]. Essas explosões cósmicas têm sido objeto de intensa especulação e pesquisa [43, 44]. Os modelos que sugerem a associação entre magnetares e a produção das RRR's é fascinante, embora ainda careça de evidências definitivas para confirmar essa ligação.

Diante disso, buscar soluções para as equações de Einstein-Maxwell que descrevem o exterior de objetos massivos e magnetizados torna-se imperativo. O pioneirismo nesse campo foi a solução de Bonnor [45]. No entanto, apesar de exibir o comportamento assintótico de um dipolo magnético, ela não se enquadra como um exemplo desse tipo, visto que não se reduz ao espaço-tempo de Schwarzschild quando o campo magnético é nulo.

A solução de Gutsunaev-Manko é um tipo específico de solução exata dessas equações. Essa solução, estática e axissimétrica, destaca-se por descrever um corpo massivo com campo magnético, apresentando singularidades nuas, isto é, não escondidas por um horizonte de eventos como em Schwarzschild, discutido anteriormente. Além disso, o limite para campo magnético nulo coincide com a solução de Schwarzschild, um aspecto crucial para o estudo de objetos astrofísicos compactos, conforme detalhado no capítulo 3 deste trabalho. A solução de Gutsunaev-Manko continua a ser objeto de estudo, visando uma

compreensão mais aprofundada de suas implicações e relevância no âmbito da astrofísica e da teoria da relatividade geral.

Como já mencionado, estamos interessados em um sistema formado por um corpo massivo e com momento de dipolo magnético. Essa situação suscita o uso de uma métrica axissimétrica que é conhecida como métrica de Weyl, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -\mathcal{F}dt^2 + \frac{1}{\mathcal{F}}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1.82)$$

onde \mathcal{F} e $e^{2\gamma}$ são funções das coordenadas de Weyl ρ e z (Figura 10). Vamos considerar a solução de eletro-vácuo das equações de Einstein-Maxwell,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}^{(M)}, \quad (1.83a)$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.83b)$$

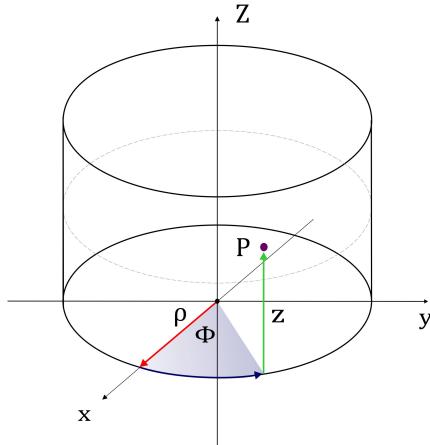


Figura 10 – Coordenadas de Weyl.

Para representarmos um campo magnético consistente com um dipolo magnético, devemos definir o 4-potencial como

$$A^\mu = [0, 0, 0, A(\rho, z)]. \quad (1.84)$$

Isso nos leva ao tensor eletromagnético e tensor energia momento dados respectivamente por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{,\rho} \\ 0 & 0 & 0 & A_{,z} \\ 0 & -A_{,\rho} & -A_{,z} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.85)$$

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = \frac{1}{8\pi\rho^2} \begin{pmatrix} e^{-2\gamma}\mathcal{F}^3(A_{,z}^2 + A_{,\rho}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{F}(A_{,\rho}^2 - A_{,z}^2) & 2\mathcal{F}A_{,z}A_{,\rho} & 0 \\ 0 & 2\mathcal{F}A_{,z}A_{,\rho} & \mathcal{F}(A_{,z}^2 - A_{,\rho}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\gamma}\mathcal{F}\rho^2(A_{,z}^2 + A_{,\rho}^2) \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

Utilizando as equações de Einstein-Maxwell (1.83a), e sabendo que as componentes não-nulas do tensor de Einstein são dadas por

$$G_{00} = \frac{1}{4\rho e^{2\gamma}} [5\rho(\mathcal{F}_{,z}^2 + \mathcal{F}_{,\rho}^2) - 4\rho\mathcal{F}(\mathcal{F}_{,zz} + \mathcal{F}_{,\rho\rho}) + 4\rho\mathcal{F}^2(\gamma_{,zz} + \gamma_{,\rho\rho}) - 4\mathcal{F}\mathcal{F}_{,\rho}], \quad (1.87a)$$

$$G_{11} = -G_{22} = -\frac{1}{4\rho\mathcal{F}^2} [4\mathcal{F}^2\gamma_{,\rho} + \rho(\mathcal{F}_{,z}^2 - \mathcal{F}_{,\rho}^2)], \quad (1.87b)$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{2\rho\mathcal{F}^2} (2\mathcal{F}^2\gamma_{,z} - \mathcal{F}_{,z}\mathcal{F}_{,\rho}), \quad (1.87c)$$

$$G_{33} = -\frac{\rho^2}{4\mathcal{F}^2e^{2\gamma}} [\mathcal{F}_{,z}^2 + \mathcal{F}_{,\rho}^2 + 4\mathcal{F}^2(\gamma_{,zz} + \gamma_{,\rho\rho})], \quad (1.87d)$$

podemos obter o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho(\mathcal{F}_{,\rho}^2 - \mathcal{F}_{,z}^2)}{4\mathcal{F}^2} + \frac{\mathcal{F}}{\rho}(A_{,\rho}^2 - A_{,z}^2), \quad (1.88a)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho\mathcal{F}_{,\rho}\mathcal{F}_{,z}}{2\mathcal{F}^2} + \frac{2\mathcal{F}}{\rho}A_{,\rho}A_{,z}, \quad (1.88b)$$

$$\gamma_{,\rho\rho} + \gamma_{,zz} = -\frac{(\mathcal{F}_{,\rho}^2 + \mathcal{F}_{,z}^2)}{4\mathcal{F}^2} + \frac{\mathcal{F}}{\rho^2}(A_{,\rho}^2 + A_{,z}^2), \quad (1.88c)$$

$$0 = \frac{\mathcal{F}_{,\rho\rho} + \mathcal{F}_{,zz}}{\mathcal{F}} - \frac{(\mathcal{F}_{,\rho}^2 + \mathcal{F}_{,z}^2)}{\mathcal{F}^2} + \frac{\mathcal{F}_{,\rho}}{\rho\mathcal{F}} - \frac{2\mathcal{F}}{\rho^2}(A_{,\rho}^2 + A_{,z}^2). \quad (1.88d)$$

Podemos usar a equação (1.83b) escrita explicitamente como,

$$A_{,z}\mathcal{F}_{,z} + \mathcal{F}_{,\rho}A_{,\rho} + \mathcal{F}(A_{,zz} + A_{,\rho\rho}) - \frac{\mathcal{F}A_{,\rho}}{\rho} = 0, \quad (1.89)$$

em conjunto com a condição de integrabilidade, $\gamma_{,z\rho} = \gamma_{,\rho z}$, para a função $\gamma(\rho, z)$ e com as equações (1.88c) e (1.88d) para obter as seguintes equações em uma forma compacta,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{F}}{\rho^2} \nabla A \right) = 0, \quad (1.90)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{F}} \nabla \mathcal{F} - \frac{2\mathcal{F}}{\rho^2} A \nabla A \right) = 0, \quad (1.91)$$

onde o operador ∇ é definido em coordenadas de Weyl como

$$\nabla \equiv \hat{\rho}\partial_\rho + \hat{\mathbf{z}}\partial_z. \quad (1.92)$$

As equações (1.88a), (1.88b), (1.90) e (1.91) constituem um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem as funções $\mathcal{F}(\rho, z)$, $\gamma(\rho, z)$ e $A(\rho, z)$, responsáveis pela configuração

do espaço-tempo gerado por uma distribuição de massa com um dipolo magnético. Essas equações são intrincadas e, embora exista um método de resolução discutido em [46, 47, 48], ele está além do escopo deste trabalho. Nossa foco se concentra na apresentação das soluções dessas equações, mas, primeiramente, introduziremos as coordenadas esferoidais prolatas (Figura 11) para facilitar a compreensão do problema.

Para problemas que apresentam simetria axial, as coordenadas prolatas se destacam como o sistema mais natural de coordenadas. Sua introdução desempenha um papel crucial na obtenção das soluções para o problema em questão, proporcionando uma abordagem mais eficaz e simplificada para lidar com essa simetria específica. As leis de transformação que relacionam as coordenadas de Weyl com as coordenadas prolatas são

$$\rho = k\sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = kxy, \quad (1.93)$$

onde k é uma constante com dimensão de comprimento. A coordenada y pertence ao intervalo $[-1, 1]$ e a coordenada x pertence ao intervalo $[1, \infty]$. Geometricamente, as curvas para x fixo são elipses, enquanto que as curvas para y fixo desenham hipérboles no plano, como ilustra a figura abaixo.

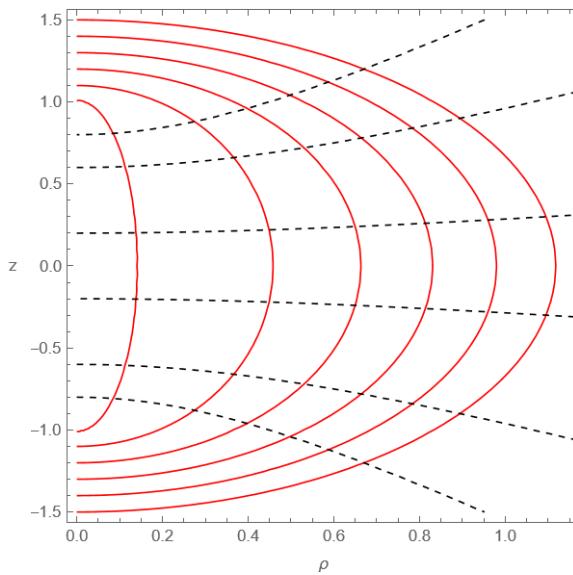


Figura 11 – Coordenadas Esferoidais Prolatas.

As soluções das equações (1.88a), (1.88b), (1.90) e (1.91), expressas em coordenadas

prolatas, são dadas por

$$\mathcal{F} = \frac{x-1}{x+1} \left(\frac{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)}{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2]^2 - 4\alpha^2 y^2 (x^2 - 1)} \right)^2, \quad (1.94)$$

$$A = \frac{4k\alpha^3 (1 - y^2) [2(1 + \alpha^2)x^3 + (1 - 3\alpha^2)x^2 + y^2 + \alpha^2]}{(1 + \alpha^2) \{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)\}}, \quad (1.95)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \frac{\{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)\}^4}{(1 + \alpha^2)^8 (x^2 - y^2)^8}, \quad (1.96)$$

onde os parâmetros α e k estão relacionados com a massa M e com o momento de dipolo magnético μ do sistema,

$$M = \frac{1 - 3\alpha^2}{1 + \alpha^2} k, \quad (1.97)$$

$$\mu = \frac{8\alpha^3}{(1 + \alpha^2)^2} k^2. \quad (1.98)$$

Os resultados acima podem ser obtidos através da análise assintótica, em coordenadas esféricas [48], das soluções (1.94), (1.95) e (1.96). Observe que temos uma interpretação física consistente para valores de α no intervalo

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1.99)$$

Ao longo deste trabalho, vamos escrever as soluções (1.94) e (1.96) de Gutsunaev-Manko de forma mais compacta,

$$\mathcal{F} = \frac{x-1}{x+1} f^2, \quad (1.100)$$

$$e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} g^2, \quad (1.101)$$

ou seja

$$f \equiv \frac{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)}{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x-1)^2]^2 - 4\alpha^2 y^2 (x^2 - 1)}, \quad (1.102)$$

$$g \equiv \frac{\{[x^2 - y^2 + \alpha^2(x^2 - 1)]^2 + 4\alpha^2 x^2 (1 - y^2)\}^2}{(1 + \alpha^2)^4 (x^2 - y^2)^4}. \quad (1.103)$$

Em coordenadas esferoidais prolatas, a solução GM produz o elemento de linha

$$ds^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) f^2 dt^2 + \left(\frac{kg}{f} \right)^2 \left[\frac{x+1}{x-1} dx^2 + \frac{(x+1)^2}{1-y^2} dy^2 \right] + \left(\frac{k}{f} \right)^2 (x+1)^2 (1-y^2) d\phi^2 \quad (1.104)$$

para um valor arbitrário de k .

O espaço-tempo GM tem características notáveis. Este possui *singularidades nuas*¹¹ para valores não nulos do campo magnético. As posições exatas dessas singularidades são determinadas quando o escalar de Kretschmann [4] diverge. Estes pontos estão exatamente nos polos da função $f(x, y)$, ou seja, satisfazem a seguinte equação algébrica

$$\left(x^2 - y^2 + \alpha^2 (x - 1)^2 \right)^2 - 4\alpha^2 y^2 (x^2 - 1) = 0. \quad (1.105)$$

A equação acima é satisfeita na região colorida do gráfico abaixo

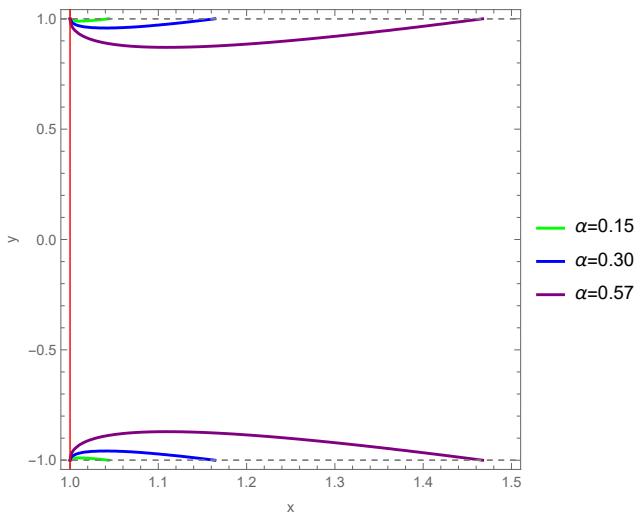


Figura 12 – A linha vermelha representa o horizonte de eventos, enquanto as linhas tracejadas são os limites para $y = \pm 1$. As linhas verde, azul e roxa ilustram as regiões onde (1.105) é satisfeita para diferentes valores de campos magnéticos.

A figura acima deixa claro que as singularidades estão localizadas ao redor dos polos do corpo massivo, ou seja, próximo a $y = \pm 1$. Além disso, o valor singular máximo para a coordenada radial x é obtido exatamente em $y = \pm 1$. Com isso em mãos, podemos simplesmente resolver a equação (1.105) com essa condição para obter suas quatro raízes, das quais duas são reais e, portanto, têm significado físico. A primeira está em $x = 1$, que é meramente o horizonte de eventos e não depende de α . Por outro lado, a segunda é uma função de α . A expressão completa é complicada para escrevermos explicitamente aqui, todavia o gráfico abaixo mostra seu comportamento em termos de α .

¹¹ Este termo é frequentemente utilizado na literatura para indicar singularidades não cobertas pelo horizonte de eventos.

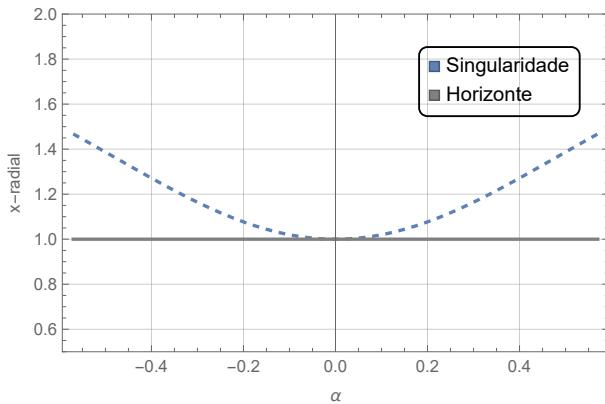


Figura 13 – Comportamento das singularidades em termos de todo o intervalo do campo magnético. Diferentemente do horizonte, a singularidade depende de α .

É importante notar que quando $\alpha = 0$, temos $k = M$ (ver Eq. 1.97). Isso marca o limite onde a solução GM se destaca. O limite de Schwarzschild emerge quando $\alpha \rightarrow 0$, resultando no elemento de linha

$$ds^2 = -\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dt^2 + k^2 \left[\frac{x+1}{x-1} dx^2 + \frac{(x+1)^2}{1-y^2} dy^2 \right] + k^2(x+1)^2(1-y^2) d\phi^2 , \quad (1.106)$$

visto que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g = 1. \quad (1.107)$$

É comum escolher coordenadas prolatas devido à simplicidade das transformações entre essas coordenadas e as coordenadas esféricas, que são determinadas por

$$x = \frac{1}{k}(r - M), \quad y = \cos \theta. \quad (1.108)$$

As equações acima, no elemento de linha (1.106), produzem

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (1.109)$$

que é exatamente o elemento de linha de Schwarzschild, discutido na seção anterior.

2 Métodos Numéricos

Sabe-se que muitos problemas do mundo real são excessivamente complexos para serem resolvidos manualmente ou de maneira analítica. Portanto, torna-se essencial recorrer aos métodos numéricos, pois estes possibilitam uma solução eficaz desses problemas por meio de algoritmos e computações, garantindo uma margem de erro aceitável. Os métodos numéricos desempenham um papel crucial na pesquisa e no avanço tecnológico em diversas áreas.

Neste capítulo, abordaremos os principais métodos numéricos utilizados ao longo deste trabalho. Na primeira parte, discutiremos o Método de Newton, conhecido por ser uma técnica numérica iterativa e eficiente para encontrar raízes de equações não lineares. Posteriormente, estudaremos a integração numérica, em particular, as fórmulas de quadratura de Clenshaw-Curtis, as quais são utilizadas em várias bibliotecas do Python. Por fim, discorreremos acerca do método das diferenças finitas, aplicando-o especificamente na resolução da equação da onda unidimensional.

2.1 Método de Newton

O método de Newton é uma técnica numérica que tem como objetivo encontrar as raízes, $x_* \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, de equações do tipo $f(x_*) = 0$, através de sucessivas aproximações, com $f(x)$ sendo uma função contínua, diferenciável no intervalo $[a, b]$ e com $f'(x_*) \neq 0$. A ideia é escolher um valor inicial x_0 , tal que $f(x_0)$ seja um valor razoavelmente próximo de zero e, em seguida, aproximar a função por uma reta tangente em torno do ponto x_0 (Figura 14). Utilizando a inclinação da função, $f(x)$, em $x = x_0$, temos

$$f'(x_0) = \tan \theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}, \quad (2.1)$$

ou seja,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.2)$$

O novo valor, x_1 , é a interseção da reta tangente com o eixo, x , sendo um valor mais próximo da raiz do que o valor inicial, x_0 . Dessa forma, podemos realizar aproximações sucessivas para a solução desejada, o que caracteriza um processo iterativo. Logo, o $(n+1)$ -ésimo passo

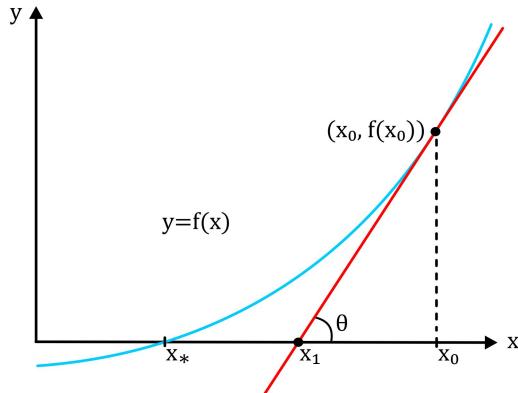


Figura 14 – x_1 é uma aproximação melhor que x_0 para a raiz, x_* , da função, $f(x)$.

é dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.3)$$

A equação acima define o método de Newton. Todo método iterativo possui uma ordem de convergência que mede a velocidade com que as iterações produzidas por esse método aproximam-se da solução exata. Portanto, quanto maior for a ordem de convergência, mais rapidamente a solução é obtida. Isso é de suma importância do ponto de vista computacional, uma vez que buscamos métodos que otimizem algoritmos.

De maneira mais concreta, chamamos de ordem de convergência o número $p \geq 1$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^p} = C, \quad (2.4)$$

onde C é um número positivo.

O método de Newton tem ordem de convergência quadrática. Isso pode ser visto da seguinte forma. Considere a função

$$g(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (2.5)$$

e sua expansão em série de Taylor em torno do ponto, $x = x_*$,

$$g(x) = g(x_*) + \frac{g''(x_*)}{2!}(x - x_*)^2 + O((x - x_*)^3). \quad (2.6)$$

Observe que não aparece o termo linear na equação acima, visto que $g'(x_*) = 0$. Podemos reescrever a equação (2.3), como

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (2.7)$$

Expandindo a função, $g(x_n)$, em torno do ponto, $x_n = x_*$, temos

$$x_{n+1} = g(x_*) + \frac{g''(x_*)}{2!}(x_n - x_*)^2 + O((x_n - x_*)^3). \quad (2.8)$$

Perceba que $g(x_*) = x_*$ e $g''(x_*) = f''(x_*)/f'(x_*)$. Assim, a equação acima se torna

$$\frac{x_{n+1} - x_*}{(x_n - x_*)^2} = \frac{f''(x_*)}{2!f'(x_*)} + O((x_n - x_*)^3). \quad (2.9)$$

Considerando o valor absoluto de ambos os lados da equação e aplicando a desigualdade triangular,

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^2} = \left| \frac{f''(x_*)}{2!f'(x_*)} + O((x_n - x_*)^3) \right| \leq \left| \frac{f''(x_*)}{2!f'(x_*)} \right| + |O((x_n - x_*)^3)|. \quad (2.10)$$

Note que ao tomarmos o limite, $n \rightarrow \infty$, na equação (2.10), o termo $O((x_n - x_*)^3)$ se anula, visto que, nesse limite, $x_n \rightarrow x_*$, o que implica na desigualdade

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^2} \leq \left| \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} \right|. \quad (2.11)$$

Logo, fica claro que se f , f' e f'' são funções contínuas em um intervalo, $[a, b]$, então a ordem de convergência para o método de Newton é quadrática, ou seja, $p = 2$, o que significa que a quantidade de algarismos significativos corretos duplica à medida que os valores da iteração se aproxima de x_* . Apesar dessa vantagem, o método de Newton também possui desvantagens, como o fato de ser necessário calcular a derivada, $f'(x)$, e em cada iteração calcular o seu valor numérico, o que pode ser um trabalho computacionalmente árduo. Além disso, a função pode ser não diferenciável em alguns pontos do domínio, o que inviabilizaria a aplicação do método em uma vizinhança destes.

2.1.1 Sistema de equações

Na seção anterior introduzimos o método de Newton aplicado a uma única equação. Nesta seção, vamos considerar o problema geral da determinação de raízes de um sistema de n equações da forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde cada f_i é uma função real de n variáveis e suficientemente diferenciável. Uma solução para o sistema é um conjunto de valores, $\mathbf{x}_* = (x_{1*}, x_{2*}, \dots, x_{n*})$, que satisfaz, simultaneamente, cada uma das equações acima.

A fim de determinar a generalização correta do método iterativo de Newton para esse caso, podemos expandir as funções, f_i , utilizando suas séries de Taylor em torno de

um chute inicial, \mathbf{x}_0 ,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(\mathbf{x}_0) + \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \\ &\quad \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= f_n(\mathbf{x}_0) + \nabla f_n(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned} \tag{2.13}$$

Supondo-se que o Ansatz inicial, \mathbf{x}_0 , seja razoavelmente próximo da solução, \mathbf{x}_* , podemos desconsiderar os termos de ordem mais alta para determinar uma nova aproximação para a solução que chamaremos convenientemente de \mathbf{x}_1 . Tomamos $f_i(\mathbf{x}_1) = 0$, obtendo assim o sistema

$$\begin{aligned} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) &= -f_1(\mathbf{x}_0), \\ &\quad \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) &= -f_n(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \tag{2.14}$$

O sistema de equações (2.14) pode ser reescrito de uma maneira sucinta, em notação matricial,

$$J(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \tag{2.15}$$

onde \mathbf{f} é a matriz coluna, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^\top$, e $J(\mathbf{x}_0)$ é a matriz Jacobiana calculada no ponto, \mathbf{x}_0 ,

$$J(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1^\top \\ \vdots \\ \nabla f_n^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

A partir da equação (2.15), temos

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J(\mathbf{x}_0)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0). \tag{2.17}$$

Dessa forma, a $(n+1)$ -ésima aproximação para o sistema (2.12) é dada por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n). \tag{2.18}$$

O método de Newton converge sob as seguintes condições:

- f_i e suas derivadas parciais até segunda ordem devem ser contínuas e limitadas numa vizinhança, V , contendo \mathbf{x}_* ;
- O determinante da matriz jacobiana não se anula em V ;
- A aproximação inicial, \mathbf{x}_0 , deve ser escolhida suficientemente próxima da raiz, \mathbf{x}_* .

Quando a iteração converge, a convergência é quadrática, como mostrado anteriormente.

2.2 Integração Numérica

Integrar funções reais é uma tarefa corriqueira em uma série de problemas físicos, desde física básica (como no cálculo do trabalho, potência, etc) até em exemplos mais sofisticados, como na solução de uma equação diferencial. No entanto, não é sempre que podemos realizar a integração analiticamente. Isso se deve a alguns motivos, tais como o completo desconhecimento da função a ser integrada ou a complexidade da mesma, o que pode dificultar a determinação de uma primitiva. Por conta disso, é necessária a utilização de técnicas de aproximação dessas integrais.

A integração numérica consiste em aproximar integrais definidas de funções reais. Para introduzir o tema, vamos nos concentrar apenas no caso de uma função de uma variável real. Todavia, a generalização para várias variáveis pode ser feita de maneira direta utilizando o teorema de Fubini¹.

Considere uma função $y = f(x)$ em um certo intervalo $[a, b]$. A integração numérica da função $f(x)$ nesse intervalo pode ser aproximada pela integração de um polinômio, $P_n(x)$, de grau n , que aproxime $f(x)$. Se não conhecemos a forma explícita da função, $y = f(x)$, mas apenas um conjunto de $n + 1$ pares ordenados, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, podemos aproximar a função, $f(x)$, por seu polinômio de interpolação, $P_n(x)$, que é uma aproximação para $f(x)$ em qualquer subintervalo, $[x_i, x_j]$, com $0 \leq i, j \leq n$, do intervalo, $[a, b]$. Logo, podemos utilizar $P_n(x)$ para integrar $f(x)$ em qualquer um desses subintervalos.

O problema prático que estamos interessados aqui é calcular a integral

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx, \quad (2.19)$$

para algum grau de precisão onde a função, $\omega(x) \geq 0$, conhecida como função peso, é contínua no intervalo, $[a, b]$ e sua forma explícita depende do método específico utilizado. A integração numérica de (2.19) é obtida a partir de uma combinação linear do integrando

$$\int_a^b \omega(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k). \quad (2.20)$$

A expressão acima é conhecida como *fórmula de quadratura*, cujas constantes, A_k , são determinadas pelo método particular escolhido, como veremos a seguir.

¹ O teorema de Fubini fornece as condições necessárias sob as quais é possível calcular integrais múltiplas por meio de integrais iteradas. Dessa forma, reduzimos o problema de integrais múltiplas em problemas de integrais simples [49].

Como primeiro exemplo, vamos considerar a quadratura interpolatória, que é particularmente útil quando não conhecemos a forma funcional do integrando, mas apenas o seu valor em n pontos. Esse método consiste na aproximação do integrando por seu polinômio de interpolação,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (2.21)$$

onde $R_n(x)$ é o erro inerente à interpolação. O polinômio de interpolação, $P_n(x)$, é dado pela fórmula de Lagrange,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x) \quad (2.22)$$

com,

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}, \quad (2.23)$$

e x_0, x_1, \dots, x_n pontos distintos onde conhecemos o valor da função, $f(x_k) = f_k$. A fórmula de A_k , que define o método da quadratura interpolatória, pode ser obtida combinando (2.20) com (2.22),

$$A_k = \int_a^b \omega(x) \ell_k(x) dx. \quad (2.24)$$

Como dito anteriormente, uma integração numérica apenas se aproxima do real resultado da integração. O erro, $R(f)$, associado ao método de quadratura, é definido simplesmente como

$$R(f) = \int_a^b \omega(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k). \quad (2.25)$$

Usando a expressão (2.24), temos

$$R(f) = \int_a^b dx \omega(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x) \right] = \int_a^b \omega(x) R_n(x) dx, \quad (2.26)$$

ou seja, o erro associado ao método de quadratura interpolatória está relacionado ao erro na interpolação, $R_n(x)$.

2.2.1 Fórmulas de Newton-Cotes

Estudaremos aqui as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado². Estas são um caso particular de quadratura interpolatória. Tais fórmulas funcionam dividindo o intervalo de integração, $[a, b]$, com $a = x_0$ e $b = x_n$, em subintervalos, cujos argumentos, x_k , são igualmente espaçados de uma quantidade fixa, h , ou seja, $x_{k+1} - x_k = h$, com $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ e os valores da função são avaliados em pontos específicos dentro de cada

² Fórmulas de Newton-Cotes do tipo aberto não utilizam os pontos extremos do intervalo de integração.

subintervalo para estimar a integral. A função peso, $\omega(x)$, é constante e igual à 1 e o intervalo de integração é finito. As fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado são especialmente utilizadas quando a forma funcional do integrando não é conhecida e este é relativamente suave, podendo ser aproximado por polinômios em cada subintervalo. Veremos mais adiante que, a fim de minimizar os erros nas fórmulas de Newton-Cotes, devemos dividir o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos e aplicá-las separadamente para cada um destes. À medida em que N aumenta, a precisão destas fórmulas fica maior.

Considere o problema do cálculo da integral em (2.19) com $\omega(x) = 1$,

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n f_k \int_{x_0}^{x_n} \ell_k(x) dx. \quad (2.27)$$

Podemos obter a fórmula geral para o método de Newton-Cotes em termos do parâmetro, h , fazendo a seguinte mudança de variável, $u = (x - x_0)/h$,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx h \sum_{k=0}^n f_k C_k^n, \quad (2.28)$$

onde

$$C_k^n \equiv \int_0^n \ell_k(hu + x_0) du. \quad (2.29)$$

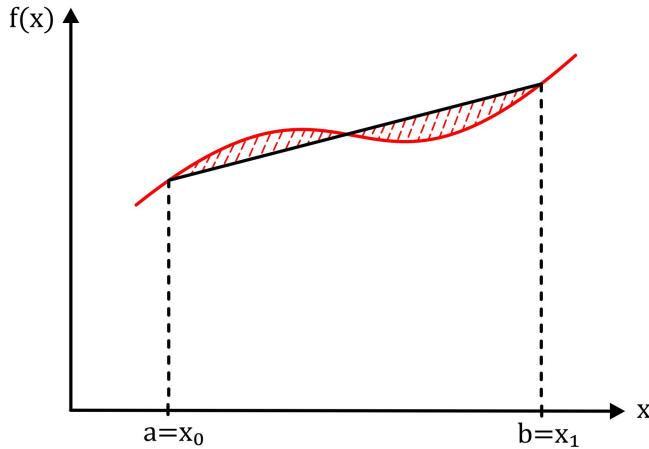
A expressão (2.28) representa o termo geral das fórmulas de Newton-Cotes. O parâmetro, n , é o grau do polinômio que aproxima a função, $f(x)$, no intervalo dado. Sendo assim, a situação mais simples é quando aproximamos a função por uma reta, $n = 1$. Neste caso, temos a conhecida *Regra do Trapézio*, na qual

$$C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2}, \quad (2.30)$$

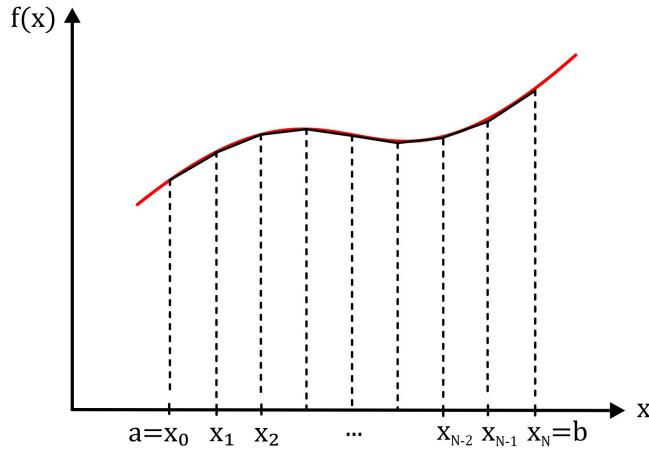
ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (2.31)$$

Observe que, se o intervalo for pequeno, a aproximação será razoável; no entanto, se o intervalo for grande, o erro também poderá ser grande. Na figura abaixo, a área hachurada é o erro resultante da integração da função, $f(x)$, no intervalo, $[a, b]$, a partir de (2.31).

Figura 15 – Regra do trapézio para $N = 1$.

Logo, se o intervalo de integração for grande, podemos dividi-lo em N subintervalos de amplitude $h = (b - a)/N$, onde $x_0 = a$, $x_N = b$ e, em cada subintervalo, $[x_k, x_{k+1}]$, com $k = 0, 1, \dots, N - 1$, aplicar a regra do trapézio. Note que o erro agora é a soma das áreas entre as retas e a curva, o que implica que, conforme $h \rightarrow 0$, o resultado se aproxima do valor exato da integral, visto que o erro tende a zero, como mostra a figura a seguir. Sendo

Figura 16 – Regra do trapézio para N subintervalos.

assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^b f(x) dx, \\ &\approx \frac{h}{2} [f(a) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{N-1}) + f(b)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, podemos reescrever a expressão acima, como

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right], \quad (2.33)$$

que é a *Regra do Trapézio Generalizada*. Na prática, só utilizamos essa regra.

A regra do trapézio é extremamente simples e de fácil implementação numérica. Contudo, existem situações onde seu uso não é o mais adequado, como em exemplos onde a função a ser integrada é fortemente não-linear. Sendo assim, a aplicação da regra do trapézio pode gerar resultados imprecisos. Nestes casos, podemos tentar utilizar um polinômio de grau $n = 2$ na interpolação. Essa escolha nos obriga a dividir o intervalo de integração em $2N$ subintervalos de amplitude $h = (b - a)/2N$. Esse número de subdivisões deve ser múltiplo de 2, pois precisamos de dois subintervalos e, portanto, de três pontos, para aproximar a função por uma parábola. Essa regra é conhecida como *Regra de Simpson*³. Em relação à regra do trapézio, a regra de simpson converge mais rapidamente, além de produzir resultados mais precisos para funções com um alto grau de não-linearidade. Em contrapartida, a sua implementação é mais complexa.

Erro nas fórmula de Newton-Cotes

Como vimos anteriormente, aproximar o valor da integral, utilizando as fórmulas de Newton-Cotes, produz um erro, $R(f)$, dado pela equação (2.26). Para estudá-lo, devemos analisar o número de intervalos iguais e a ordem da derivada da função, $f(x)$. Mais precisamente, se os pontos, $x_k = x_0 + kh$, com $k = 0, 1, \dots, n$, dividem o intervalo, $[a, b]$, em um número ímpar de intervalos iguais e $f(x)$ tem derivada de ordem, $(n + 1)$, contínua em $[a, b]$, podemos expressar $R(f)$, com n ímpar, como

$$R(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n u(u-1)\dots(u-n) du, \quad (2.34)$$

para algum ponto, ξ , do intervalo, $[a, b]$. Entretanto, se $[a, b]$ for dividido em um número par de intervalos iguais e a ordem da derivada de $f(x)$ for $(n + 2)$, podemos expressar $R(f)$, com n par, como

$$R(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u(u-1)\dots(u-n) du, \quad (2.35)$$

para algum ponto, ξ , de $[a, b]$. Assim, podemos aplicar (2.34) para obter o erro da fórmula do trapézio, sobre o intervalo, $[a, b]$, para $n = 1$. Isto é,

$$R(f) = \frac{h^3 f''(\xi)}{2!} \int_0^1 u(u-1) du = -\frac{h^3 f''(\xi)}{12}, \quad (2.36)$$

³ Na realidade, a regra de Simpson que brevemente comentamos aqui é conhecida na literatura como *regra $\frac{1}{3}$ de Simpson*, a qual utiliza polinômios quadráticos na interpolação. Entretanto, existe ainda a *regra $\frac{3}{8}$ de Simpson*, que faz uso de polinômios cúbicos na interpolação e subintervalos múltiplos de 3.

com $a < \xi < b$. Desse modo, podemos escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{h^3 f''(\xi)}{12}. \quad (2.37)$$

Para a regra do trapézio generalizada, o erro é obtido adicionando-se N erros da forma (2.36), com $N = (b - a)/h$, de tal maneira que,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) - \frac{(b-a)}{6} h f''(\xi) \right], \quad (2.38)$$

com $a < \xi < b$. É claro que, na prática, não devemos somar o erro à quadratura, uma vez que o ponto, ξ , é desconhecido. O importante aqui é ressaltar que quanto menor for o espaçamento, h , entre os pontos, x_k , melhor será a aproximação. Observe que o erro associado à regra do trapézio é proporcional a h^2 . Para o caso em que $n = 2$, ou seja, a regra de simpson, o erro é da ordem de h^5 [50, 51], o que evidencia uma precisão maior que a anterior.

Diante das informações destacadas no parágrafo acima, podemos ser levados a intuir que para ganhar maior precisão na quadratura devemos escolher uma ordem cada vez maior nos polinômios de interpolação. Isso não é verdade, pois, apesar de ser possível obter fórmulas de Newton-Cotes para qualquer ordem, n , estas podem sofrer do fenômeno de Runge⁴ [52], onde o erro cresce exponencialmente para altos valores de n . Métodos como as quadraturas de Clenshaw-Curtis, com espaçamento constante, são melhores estratégias para o tratamento de funções mais complicadas, onde é necessário um alto grau de precisão.

2.2.2 Fórmulas de quadratura de Clenshaw-Curtis

As fórmulas de quadratura de Clenshaw-Curtis [53] são métodos de integração numérica mais apropriados que as fórmulas de Newton-Cotes, em alguns casos. Apesar de requerer uma implementação mais sofisticada, a quadratura de Clenshaw-Curtis tende a convergir mais rapidamente para um intervalo com o mesmo número de subdivisões, o que implica em uma economia computacional que é especialmente útil quando estamos avaliando integrais multidimensionais. Além disso, estas fórmulas de quadratura se adaptam melhor à integração de funções altamente oscilantes.

Voltemos para o nosso problema original de calcular a integral (2.19), com $\omega(x) = 1$. A partir de um reescalonamento apropriado do intervalo, podemos reescrever a integral

⁴ O fenômeno de Runge é uma oscilação indesejada nos extremos do intervalo de interpolação que pode ocorrer quando tentamos aproximar uma função suave por um polinômio de alto grau.

como

$$\int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (2.39)$$

A ideia aqui é transformar $f(x)$ em uma função periódica por meio de uma mudança de variável, $x = \cos \theta$. Dessa maneira, a função, $F(\theta) = f(\cos \theta)$, admite uma série de Fourier. Essa representação permite decompor funções periódicas complexas em componentes mais simples, facilitando análises e cálculos. Portanto,

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta), \quad (2.40)$$

visto que os coeficientes dos senos, b_n , se anulam para qualquer valor de n , devido à paridade de $F(\theta)$. Com isso, é possível calcular diretamente a integral (2.39), ou seja,

$$\int_0^\pi f(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_{2n}}{1 - (2n)^2}. \quad (2.41)$$

A integral acima é, precisamente, a resposta exata da integração de (2.19). Contudo, os coeficientes de Fourier, dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (2.42)$$

são ainda desconhecidos. Dessa forma, a nossa tarefa consiste em calcular a integral acima. A principal diferença entre (2.42) e (2.39) é que as integrais de Fourier podem ser calculadas de maneira mais precisa que as integrais arbitrárias, ao dividir o domínio em $N + 1$ pontos espaçados igualmente, com $\theta_n = \pi n / N$ [54]. Logo, a regra do trapézio aproxima melhor a integral (2.42), ou seja,

$$a_n \approx \frac{1}{N} \left[f(1) + (-1)^n f(-1) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f\left(\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi kn}{N}\right) \right]. \quad (2.43)$$

Assim, a quadratura de Clenshaw-Curtis é dada pela série (2.41), com os coeficientes, a_n , dados pela equação acima.

Frequentemente, na literatura, observa-se a relação entre as fórmulas de Clenshaw-Curtis com os polinômios de Tchebychev [55, 56, 53]. Tal relação é de fácil entendimento, uma vez que os polinômios de Tchebychev são definidos por

$$T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta), \quad (2.44)$$

ou seja, podemos pensar que a estratégia é aproximar a função, $f(x)$, em termos de sua expansão em polinômios de Tchebychev [56], realizando a integração termo a termo a fim de se aproximar cada vez mais da resposta exata da integral em questão.

O método de integração numérica aqui discutido é amplamente utilizado em uma série de códigos abertos, como na biblioteca `scipy`, pertencente à linguagem `python` [57], e apresenta muitas vantagens em relação às fórmulas de Newton-Cotes, abordadas anteriormente. As fórmulas de Clenshaw-Curtis apresentam uma convergência exponencial com o número de pontos [56], N , devido ao fato de serem baseadas na expansão em polinômios de Tchebychev, que têm esta propriedade. Além disto, é possível ajustar o método para tratar integrais com limites infinitos de integração [56].

2.3 Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é uma técnica numérica fundamental e amplamente utilizada para resolver uma variedade de equações diferenciais, sejam ordinárias ou parciais, que descrevem sistemas dinâmicos. Estas equações englobam fenômenos como difusão, ondas, dinâmica de fluidos, entre outros. O método se baseia na aproximação das derivadas das funções por meio de diferenças finitas. Essa abordagem transforma as equações diferenciais em sistemas de equações algébricas, que podem ser eficientemente resolvidos por computação. A aplicabilidade desta técnica se estende à análise de sistemas físicos complexos, simulação de fenômenos naturais, otimização de processos, entre outros.

Inicialmente, vamos abordar a questão fundamental de como podemos aproximar as derivadas de uma função usando fórmulas de diferenças finitas, com base apenas nos valores da função em pontos discretos. Além de estabelecer uma base para o desenvolvimento futuro de métodos de diferenças finitas para resolver equações diferenciais, isso nos possibilita explorar diversos conceitos-chave, como a ordem de precisão de uma aproximação, na configuração mais simples possível.

Seja $u(x)$ uma função contínua e diferenciável ao longo de um intervalo contendo um determinado ponto de interesse \tilde{x} . Vamos supor que queremos aproximar $u'(\tilde{x})$ por diferenças finitas baseadas apenas em valores de $u(x)$ em um número finito de pontos próximos a \tilde{x} . Uma escolha óbvia seria utilizar

$$D_+ u(\tilde{x}) \equiv \frac{u(\tilde{x} + h) - u(\tilde{x})}{h}, \quad (2.45)$$

para qualquer valor pequeno de h , ou seja, isto é, precisamente, a definição padrão de derivada quando tomamos o limite $h \rightarrow 0$ da expressão acima e é conhecida como *fórmula das diferenças progressivas*. Observe que $D_+ u(x)$ é a inclinação da reta que interpola $u(x)$

nos pontos \tilde{x} e $\tilde{x} + h$ (Figura 17). A equação (2.45) é uma aproximação unilateral para $u'(x)$, uma vez que a função $u(x)$ é avaliada somente nos valores em que $x \geq \tilde{x}$. Uma outra aproximação unilateral seria

$$D_{-}u(\tilde{x}) \equiv \frac{u(\tilde{x}) - u(\tilde{x} - h)}{h}, \quad (2.46)$$

que é conhecida como *fórmula das diferenças regressivas*. Cada uma dessas fórmulas fornece uma aproximação precisa de primeira ordem para $u'(x)$, o que significa que o erro é proporcional a h . Observe que podemos obter ainda a *fórmula das diferenças centradas*, ou seja,

$$D_0u(\tilde{x}) \equiv \frac{u(\tilde{x} + h) - u(\tilde{x} - h)}{2h} = \frac{1}{2}[D_{+}u(\tilde{x}) + D_{-}u(\tilde{x})], \quad (2.47)$$

que é a média das aproximações $D_{+}u(x)$ e $D_{-}u(x)$ e representa a inclinação da reta que interpola a função, $u(x)$, nos pontos $\tilde{x} + h$ e $\tilde{x} - h$. Note que, visualmente, $D_0u(x)$ fornece

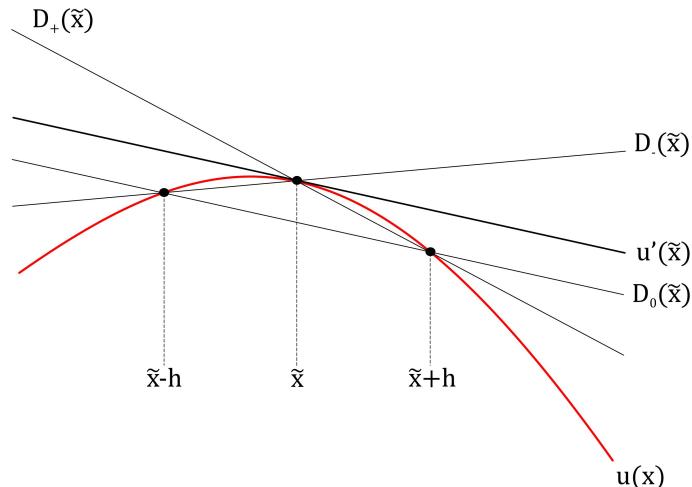


Figura 17 – Várias aproximações para $u'(x)$ interpretadas como a inclinação das retas secantes.

uma melhor estimativa que $D_{+}u(x)$ e $D_{-}u(x)$ (Figura 17). Na realidade, $D_0u(x)$ é, de fato, uma melhor aproximação, visto que seu erro é quadrático em h^2 , diferentemente das aproximações unilaterais, cujo erro é linear, como veremos a seguir.

A ordem de precisão de uma aproximação por diferenças finitas pode ser obtida analisando sua expansão em série de Taylor para $h \ll 1$. Como exemplo, vamos considerar a aproximação unilateral (2.45), a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D_{+}u(\tilde{x}) - u'(\tilde{x}) = \frac{u''(\tilde{x})h}{2} + O(h^2). \quad (2.48)$$

Fica claro que o erro associado com a aproximação é da ordem de h . Considere agora a fórmula das diferenças centradas, que podemos reescrever como,

$$D_0 u(\tilde{x}) - u'(\tilde{x}) = \frac{u'''(\tilde{x})h^2}{6} + O(h^3), \quad (2.49)$$

o que confirma ser mais precisa que as fórmulas de diferenças unilaterais, uma vez que o seu erro é quadrático.

É sempre possível derivar uma fórmula de diferenças finitas dado um conjunto de pontos. Por exemplo, vamos obter uma expressão para uma aproximação de quarta ordem usando a função calculada nos pontos, $u(x+2h)$, $u(x+h)$, $u(x-h)$ e $u(x-2h)$, ou seja, uma combinação linear destes valores,

$$D_4 u(\tilde{x}) = \alpha u(\tilde{x}+2h) + \beta u(\tilde{x}+h) + \gamma u(\tilde{x}-h) + \delta u(\tilde{x}-2h). \quad (2.50)$$

Para determinar os valores das constantes, precisamos expandir as funções em série de Taylor e agrupar os termos de mesma ordem, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_4 u(\tilde{x}) &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)u(\tilde{x}) + (2\alpha + \beta - \gamma - 2\delta)u'(\tilde{x})h \\ &\quad + \left(2\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 2\delta\right)u''(\tilde{x})h^2 + \left(\frac{4}{3}\alpha + \frac{\beta}{6} - \frac{\gamma}{6} - \frac{4}{3}\delta\right)u'''(\tilde{x})h^3 \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{\beta}{24} + \frac{\gamma}{24} + \frac{2}{3}\delta\right)u^{(4)}(\tilde{x})h^4 + \left(\frac{4}{15}\alpha + \frac{\beta}{120} - \frac{\gamma}{120} - \frac{4}{15}\delta\right)u^{(5)}(\tilde{x})h^5 \\ &\quad + O(h^6). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Observe que temos 4 constantes para determinar. Por conta disso, podemos construir um mesmo número de equações

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad (2.52a)$$

$$2\alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 1/h, \quad (2.52b)$$

$$2\alpha + \beta/2 + \gamma/2 + 2\delta = 0, \quad (2.52c)$$

$$4\alpha/3 + \beta/6 - \gamma/6 - 4\delta/3 = 0. \quad (2.52d)$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos

$$\alpha = -1/12h; \quad \beta = 2/3h; \quad \gamma = -2/3h; \quad \delta = 1/12h. \quad (2.53)$$

Assim, a fórmula de diferenças finitas que estamos procurando tem a forma

$$D_4 u(\tilde{x}) = \frac{1}{12h} [-u(\tilde{x}+2h) + 8u(\tilde{x}+h) - 8u(\tilde{x}-h) + u(\tilde{x}-2h)]. \quad (2.54)$$

O erro associado à formula é

$$D_4 u(\tilde{x}) - u'(\tilde{x}) = -\frac{u^{(5)}(x)h^4}{30} + O(h^5). \quad (2.55)$$

Observe que a escolha de $h = 10^{-4}$ produz um erro de aproximação da ordem de 10^{-16} , o que é muito conveniente para fins numéricos. Por essa razão, usaremos mais adiante, neste trabalho, essa fórmula para aproximar derivadas de primeira ordem.

2.3.1 Aplicação do Método das Diferenças Finitas na Equação de Onda

Como mencionado anteriormente, o MDF é amplamente utilizado para obter soluções numéricas de equações diferenciais parciais. Nesta seção, abordaremos de forma específica a equação da onda unidimensional e a aplicação do MDF para obter sua solução.

Iniciaremos nosso estudo imaginando uma situação simples: a propagação de uma onda em uma corda muito longa. A função que descreve o deslocamento da corda em um ponto, x , em um tempo, t , é denotada por $u(x, t)$ (Figura 18). A função deslocamento satisfaz o seguinte modelo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \in (0, \infty) \quad (2.56a)$$

$$u(x, 0) = I(x), \quad (2.56b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x), \quad (2.56c)$$

onde $I(x)$ é a perturbação inicial na corda, ou seja, o perfil da onda no início e $g(x)$ é a condição inicial para a derivada. Observe que a equação da onda é de segunda ordem e, portanto, faz-se necessária a condição inicial para a derivada da função, $u(x, t)$. Podemos também considerar condições de contorno, refletindo uma situação mais realista, como uma corda de comprimento finito. No entanto, para simplificar, trataremos o problema sem impor condições de contorno.

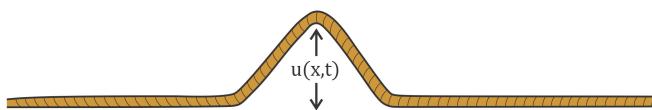


Figura 18 – Esquema de uma onda se propagando em uma corda.

A principal ideia no MDF é discretizar o domínio de integração de (2.56a), criando uma malha de pontos no plano, $x - t$, como ilustrado na Figura 19. Para isso, é necessário escolher uma região delimitada para fins numéricos, que pode ser arbitrariamente grande na

coordenada espacial, x , a fim de representar uma corda extensa. Na prática, substituimos o contínuo por um conjunto de pontos, dado por

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t-1} < t_{N_t}, \quad (2.57)$$

na coordenada temporal e

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x}, \quad (2.58)$$

na coordenada espacial. É conveniente separarmos os pontos por uma quantidade fixa, Δx e Δt , nas direções espacial e temporal, respectivamente, de tal modo que

$$x_i = i\Delta x, i = 0, \dots, N_x \quad t_j = j\Delta t, j = 0, \dots, N_t. \quad (2.59)$$

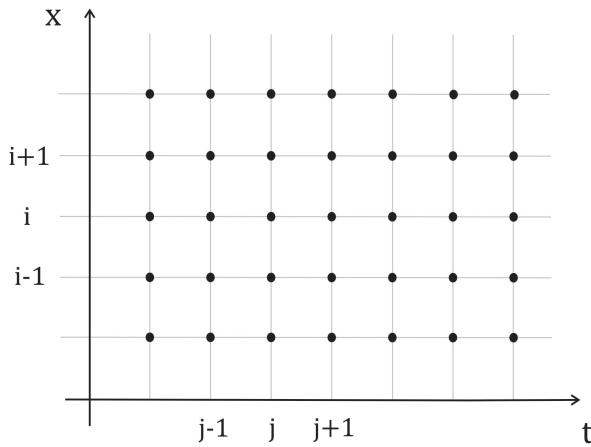


Figura 19 – Discretização do domínio.

A discretização acima é feita para aproximar a função desconhecida, $u(x, t)$, por um conjunto de pontos, $U(x_i, t_j) \equiv U_i^j$, que pode ser calculado utilizando o esquema de aproximação por diferenças finitas estudado na seção anterior. Devemos reescrever a equação (2.56a) em termos das aproximações de derivadas segundas, com alguma ordem de precisão. Com o intuito de simplificar nossa discussão, vamos utilizar o operador de diferenças centradas, \mathcal{D}_0^z , para aproximar a primeira derivada⁵. Note que para aproximar derivadas segundas, podemos simplesmente aplicar duas vezes⁶ o operador, \mathcal{D}_0^z , ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \approx [\mathcal{D}_0^t \mathcal{D}_0^t U]_i^j = \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\Delta t^2}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \approx [\mathcal{D}_0^x \mathcal{D}_0^x U]_i^j = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \quad (2.61)$$

⁵ Estamos utilizando a notação \mathcal{D}_0^z para representar derivadas parciais em relação à variável independente, z , diferentemente de D_0 , utilizada para derivadas ordinárias.

⁶ A aproximação para a segunda derivada pode ser vista como duas aplicações de aproximações de derivadas primeira desde que seja considerado um passo $h/2$ para as aproximações de primeira ordem.

Dessa forma, conseguimos reescrever a equação da onda em termos das aproximações por diferenças finitas,

$$U_i^{j+1} = -U_i^{j-1} + 2U_i^j + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j). \quad (2.62)$$

A constante adimensional, $c\Delta t/\Delta x$, é conhecida como número de Courant e possui uma grande importância na análise da estabilidade numérica da solução [58]. Perceba que a equação (2.62) relaciona o ponto, U_i^j , com seus vizinhos U_{i+1}^j , U_{i-1}^j , U_i^{j-1} e U_i^{j+1} , como ilustrado na Figura 20. Contudo, sua validade está definida no intervalo $i \in [1, N_x - 1]$ e $j \in [1, N_t - 1]$, uma vez que os pontos da borda do tipo U_0^j e $U_{N_x}^j$ não são calculados, pois necessitam de pontos que estão fora da grade⁷. Os pontos do tipo U_i^0 são introduzidos pela condição inicial

$$U_i^0 = u(x_i, 0). \quad (2.63)$$

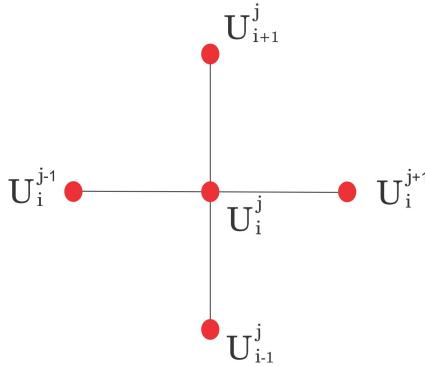


Figura 20 – Célula computacional para equação da onda.

De maneira análoga, podemos obter os termos do tipo U_i^1 , fazendo uso das condições iniciais (2.56b), (2.56c) e a equação de movimento (2.56a):

$$U_i^1 = I(x_i) + g(x_i) \Delta t + \frac{c^2}{2} I''(x_i) \Delta t^2. \quad (2.64)$$

Logo, podemos calcular a evolução temporal utilizando o esquema (2.62).

A fim de simular a solução do problema descrito acima, vamos introduzir o perfil inicial da onda como uma gaussiana, dada por

$$u(x, 0) = e^{-k(x-x_0)^2}, \quad (2.65)$$

⁷ Na prática, estamos excluindo a borda da nossa discussão. Todavia, podemos incluí-la utilizando condições de contorno.

e considerar a condição de derivada trivial, $g(x) = 0$. Essa escolha produzirá duas ondas se propagando em direções contrárias. A função que descreve o resultado exato para esse problema é

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[e^{-k(x-t-x_0)^2} + e^{-k(x+t-x_0)^2} \right]. \quad (2.66)$$

Na Figura 21 é possível perceber a concordância entre os resultados numéricos e analíticos. A simulação numérica foi codificada em Python e pode ser consultada no apêndice (B.1).

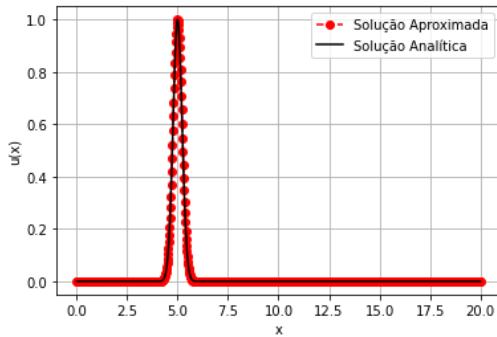
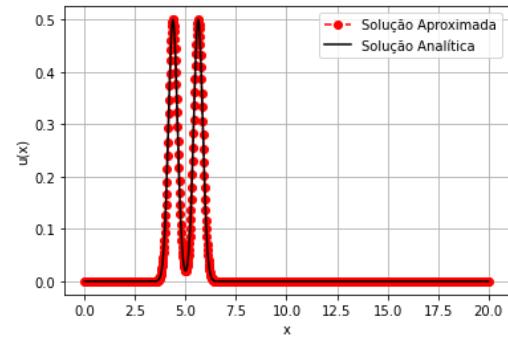
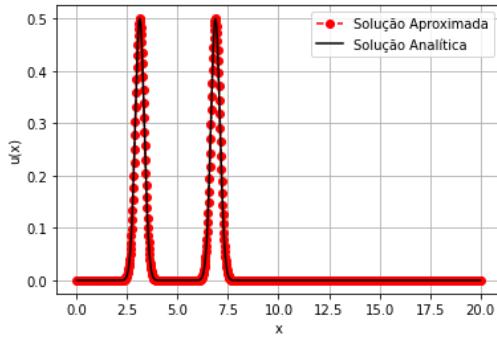
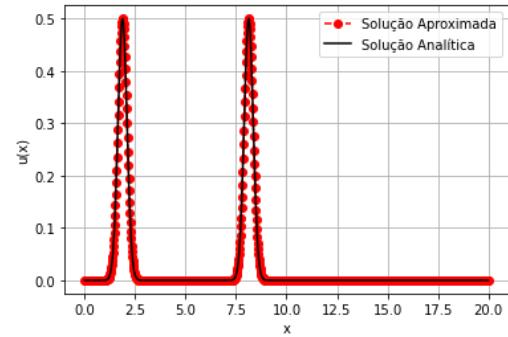
(a) Perfil da onda para $t = 0$.(b) Perfil da onda para $t = 0.6$.(c) Perfil da onda para $t = 1.9$.(d) Perfil da onda para $t = 3.1$.

Figura 21 – Resultados numéricos e analíticos do perfil da onda num instante de tempo t . Nestas figuras utilizamos os valores $x_0 = 5$, $k = 10$ e $c = 1$.

Uma análise mais completa de uma solução numérica requer um estudo sobre a estabilidade do método utilizado. Tal estudo é um requisito essencial para qualquer método numérico empregado para resolver EDPs, pois afeta diretamente a confiabilidade, convergência e validade das soluções obtidas. Métodos estáveis são fundamentais para garantir que as soluções numéricas refletem com precisão o comportamento físico descrito pela EDP, tornando-os valiosos nas mais diversas aplicações científicas e práticas. Em particular, a condição para o número de Courant

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \implies c \Delta t \leq \Delta x, \quad (2.67)$$

assegura a estabilidade do método (2.62). A interpretação dessa condição reside no fato de que se a discretização no tempo Δt satisfizer a desigualdade mencionada, a onda não se propagará mais rapidamente na solução numérica do que na solução física real.

Vale a pena mencionar o *método de Von Neumann* [59, 60] amplamente utilizado para estabelecer a condição de estabilidade para esquemas de diferenças finitas. No caso analisado nesta seção, o critério de estabilidade resulta na mesma condição obtida pelo número de Courant, ou seja, $c\Delta t < \Delta x$, e este critério foi atendido na implementação da simulação.

3 Perturbações Escalares e Modos Quase-Normais

Neste capítulo, estudaremos como objetos compactos reagem a perturbações externas. Descobriremos que esses objetos possuem um conjunto característico de frequências que podem ser excitadas por pequenas perturbações e, posteriormente, decaem através da emissão de radiação (que pode ser gravitacional – de spin 2 – ou mesmo outra – spin zero ou um). É por esse motivo que são chamadas de "modos quase-normais".

Já estamos familiarizados com o fato de que um corpo elástico oscila, e essas oscilações são caracterizadas por um conjunto de modos normais. Por exemplo, um sino ressonante, quando posto em oscilação por uma força externa, suas oscilações podem ser decompostas em modos normais. No caso de corpos compactos, o mesmo resultado não é tão óbvio. No entanto, neste capítulo, veremos que, quando perturbados, eles se comportam de maneira semelhante a corpos elásticos e possuem modos quase-normais.

Iniciaremos discutindo propriedades de uma perturbação do tipo escalar no espaço-tempo de Gutsunaev-Manko e veremos como o campo magnético interfere nas equações de movimento da perturbação. Observaremos fortes divergências ao nos aproximarmos do horizonte. Na situação sem campo magnético, ilustraremos a evolução de uma onda escalar e identificaremos seus três regimes característicos. Por fim, obteremos os modos quase-normais de um objeto compacto através da solução exata da equação de onda.

3.1 Perturbações de soluções conhecidas da Relatividade Geral

Soluções gerais da Relatividade Geral são poucas, mas servem de base para questões mais realistas. A solução de Schwarzschild é bem conhecida, e descreve um Buraco Negro, mas por muitos anos foi vista como uma aproximação para o movimento planetário. De fato, fora do planeta não há matéria, e a solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional fora do planeta. O mesmo acontece para uma estrela. Dentro do planeta, ou da estrela, necessitamos estudar a solução esfericamente simétrica com matéria, portanto há necessidade da equação de estado da matéria de modo que o problema seja completamente determinado. Vários tipos de estrelas foram assim estudados. Da mesma forma, a precessão

do periélio dos planetas pode ser obtida, e o caso mais emblemático é a precessão do planeta Mercúrio, a mais óbvia do ponto de vista observacional [4]. Este foi o ponto em que a Relatividade Geral teve, historicamente, um papel importante em sua confirmação observacional, juntamente com o desvio da luz pelo Sol, observado por um eclipse total, em Sobral, no Brasil [61]. No entanto, tais soluções exatas não correspondem completamente à realidade, e o modus operandi é considerar perturbações em torno delas. Na cosmologia, este é o procedimento mais usual para se calcular o importantíssimo observável chamado de Espectro de Potência, que é o elemento que nos dá certeza sobre a estrutura conhecida do Universo [62].

No caso de objetos astrofísicos, tais como Buracos Negros e estrelas, estas perturbações foram bastante estudadas em termos dos chamados modos quase normais. Historicamente, os modos quase normais foram estudados no decaimento das partículas alfa [63]. O procedimento é, exatamente, expresso em termos de uma solução dentro de um núcleo com uma barreira de potencial cujo valor fora do núcleo é menor. A partícula alfa é descrita por uma frequência complexa, em que a parte imaginária corresponde a um decaimento no tempo. O valor complexo da frequência (E/\hbar) é obtida das condições de contorno sobre a solução da equação de Schrödinger. Isto corresponde a um modo quase normal. Este processo foi muito utilizado por Chandrasekhar [64], sobre soluções de Buracos Negros, e estendido por vários autores, para soluções astrofísicas [65, 66, 67].

As perturbações provenientes desses fenômenos são encontradas em uma ampla gama de problemas de grande relevância na Teoria dos Campos, Teorias de Cordas e até mesmo na análise de perturbações gravitacionais [68]. Existem três principais classes de problemas. As perturbações escalares são as mais simples, correspondendo a campos escalares sujeitos à equação de Klein-Gordon em um campo gravitacional externo fixo. De maneira semelhante, as perturbações fermiônicas e eletromagnéticas funcionam. As perturbações gravitacionais consistem em pequenas alterações na métrica. Elas são divididas em três tipos: spin zero, spin 1 e spin 2. Aquelas de spin zero são também perturbações escalares, porém com características distintas, pois não correspondem a campos externos. Elas desempenham um papel importante na cosmologia, especialmente no contexto de perturbações, onde as soluções de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker descrevem as variações no campo de matéria, servindo como base para o cálculo do espectro de potências [69]. Já as perturbações de spin 1, diferentes das anteriores, estão relacionadas também a

campos magnéticos. As perturbações de spin 2 estão ligadas aos campos gravitacionais [70].

3.2 Perturbações Escalares

Neste trabalho, discutiremos perturbações escalares provocadas por campos externos. Esse é o caso mais simples, porém interessante o suficiente para observarmos várias propriedades importantes do espaço-tempo em questão. Vamos considerar um campo escalar Ψ , no espaço de Gutsunaev-Manko, que não contribui para a gravidade local e analisar a sua dinâmica, descrita pela seguinte ação:

$$S_\Psi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - m^2 \Psi^2). \quad (3.1)$$

A equação de movimento para o campo escalar pode ser obtida diretamente pelo princípio variacional. Tomando a variação da ação em relação ao campo Ψ , temos

$$\delta S_\Psi = \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\mu (\delta \Psi) \nabla^\mu \Psi - m^2 \Psi \delta \Psi]. \quad (3.2)$$

Podemos integrar por partes o primeiro termo da equação acima para obter a igualdade

$$\delta S_\Psi = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\delta \Psi \nabla^\mu \Psi) - \int d^4x \sqrt{-g} \delta \Psi \nabla_\mu \nabla^\mu \Psi - \int d^4x \sqrt{-g} m^2 \Psi \delta \Psi. \quad (3.3)$$

O primeiro termo da equação (3.3), uma vez que estamos considerando variação no campo Ψ com extremos fixos. Logo, da equação acima, temos

$$\delta S_\Psi = - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi + m^2 \Psi) \delta \Psi. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) deve se anular para qualquer variação arbitrária $\delta \Psi$. Isto implica na equação de movimento para o campo escalar,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi + m^2 \Psi = 0. \quad (3.5)$$

Como primeira análise, vamos considerar perturbações sem massa, se propagando no espaço-tempo descrito pela métrica GM. Utilizando a propriedade (A.19), podemos reescrever a equação acima, como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0. \quad (3.6)$$

Em coordenadas esferoidais prolatas, a equação acima pode ser expressa, explicitamente, por

$$-\partial_t^2 \Psi + \frac{f^4}{g^2} \frac{x-1}{(x+1)^3} \left[\partial_x ((x^2-1) \partial_x \Psi) + \partial_y ((1-y^2) \partial_y \Psi) + \frac{g^2}{1-y^2} \partial_\phi^2 \Psi \right] = 0. \quad (3.7)$$

Supondo o Ansatz,

$$\Psi = \frac{\psi}{x+1}, \quad (3.8)$$

e fazendo a mudança de coordenada

$$\tilde{x} = x + 2 \ln(x - 1), \quad (3.9)$$

obtemos a seguinte equação resultante

$$-\partial_t^2 \psi + \frac{f^4}{g^2} \left[\partial_{\tilde{x}}^2 \psi + \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(\partial_y ((1-y^2) \partial_y \psi) + \frac{g^2}{1-y^2} \partial_\phi^2 \psi - \frac{2\psi}{x+1} \right) \right] = 0. \quad (3.10)$$

Observe que a mudança de coordenada (3.9) estende a região de integração ao longo de toda a reta real, \mathbb{R} , na direção \tilde{x} . Além disso, permite obter uma equação do tipo Schrödinger, como veremos mais adiante. Neste ponto, podemos buscar soluções separáveis da forma

$$\psi(\tilde{x}, y, \phi, t) = \sum_{l,m} u_{lm}(\tilde{x}, t) Y_l^m(y, \phi), \quad (3.11)$$

onde $Y_l^m(y, \phi)$ são os harmônicos esféricos usuais. Com isso, obtemos o seguinte conjunto de equações (vide Apêndice C.2) diferenciais acopladas para os modos $u_{lm}(\tilde{x}, t)$

$$-\partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \sum_{l'} A_l^{l'} \partial_{\tilde{x}}^2 u_{l'm}(\tilde{x}, t) = \sum_{l'} B_{lm}^{l'} u_{l'm}(\tilde{x}, t), \quad (3.12)$$

onde as matrizes, $A_l^{l'}$ e $B_{lm}^{l'}$, dependem dos seguintes produtos escalares,

$$A_l^{l'} = \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} Y_{l'}^m \right\rangle. \quad (3.13)$$

$$B_{lm}^{l'} = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left[\left(l(l+1) + \frac{2}{x+1} \right) A_l^{l'} + m^2 \left\langle \frac{f^4}{g^2} \frac{(g^2-1)}{1-y^2} Y_l^m, Y_{l'}^m \right\rangle \right]. \quad (3.14)$$

Para fins de cálculo explícito é necessário escolher um valor, l_{\max} , para limitar a soma na equação (3.12). Dado um valor para m , l' assume valores inteiros no intervalo $[-|m|, l_{\max}]$. As matrizes acoplam apenas termos de mesma paridade, o que decorre da integração na coordenada y de uma função par, quando l e l' têm a mesma paridade, e ímpar quando eles possuem paridades diferentes. Devido à complexidade da forma funcional das funções, f e g , a integração associada aos elementos de matriz (3.13) e (3.14) deve ser calculada numericamente. As figuras abaixo apresentam o plot das matrizes $A_l^{l'}$ e $B_{lm}^{l'}$, feito utilizando a biblioteca Scipy do Python, cujo método de integração numérica foi abordado no capítulo 2.

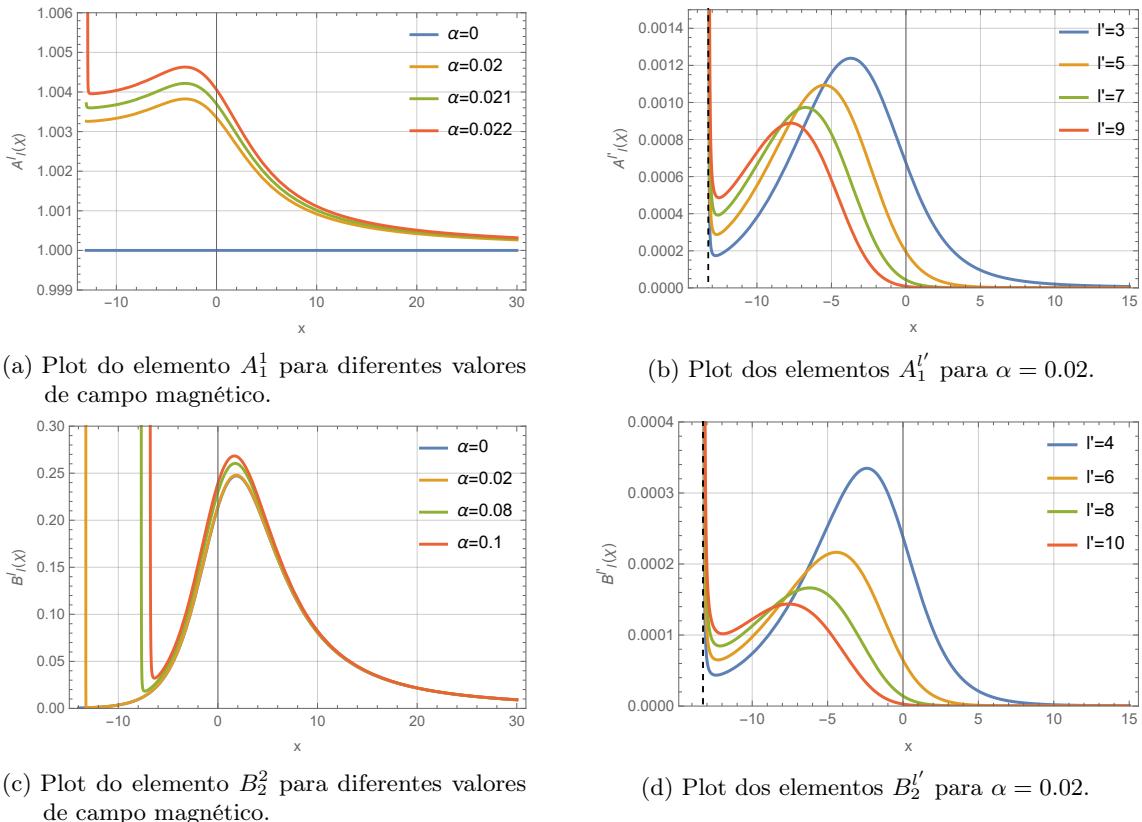


Figura 22 – Plot das matrizes $A_l^{l'}$ e $B_{l'm}^{l'}$ para $m = 1$. A linha tracejada nos gráficos indica a posição exata da singularidade.

Os elementos da matriz $A_l^{l'}$ são relevantes apenas na região próxima de $\tilde{x} < 0$, divergindo para valores muito negativos. Por outro lado, os elementos do tipo A_l^l são relevantes em todo o eixo real. Além disso, $|A_l^l| \gg |A_l^{l'}|$. Os elementos da matriz $B_{l'm}^{l'}$ possuem um comportamento qualitativo semelhante aos anteriores. Existe uma divergência muito sensível ao parâmetro α .

Um dos principais objetivos deste trabalho consiste em investigar as frequências quase-normais associadas a espaços-tempo axialmente simétricos. Para o caso da métrica GM é necessário resolver numericamente a equação (3.12) para um valor específico de l_{\max} e \tilde{x}_{\min} . Este último delimita o espaço à esquerda, impossibilitando o acesso à região que contém a singularidade. O parâmetro l_{\max} trunca a série que possui infinitos termos. Isso pode ser feito desde que os termos para l' decaiam suficientemente rápido para uma posição \tilde{x}_{\min} adequadamente afastada da singularidade.

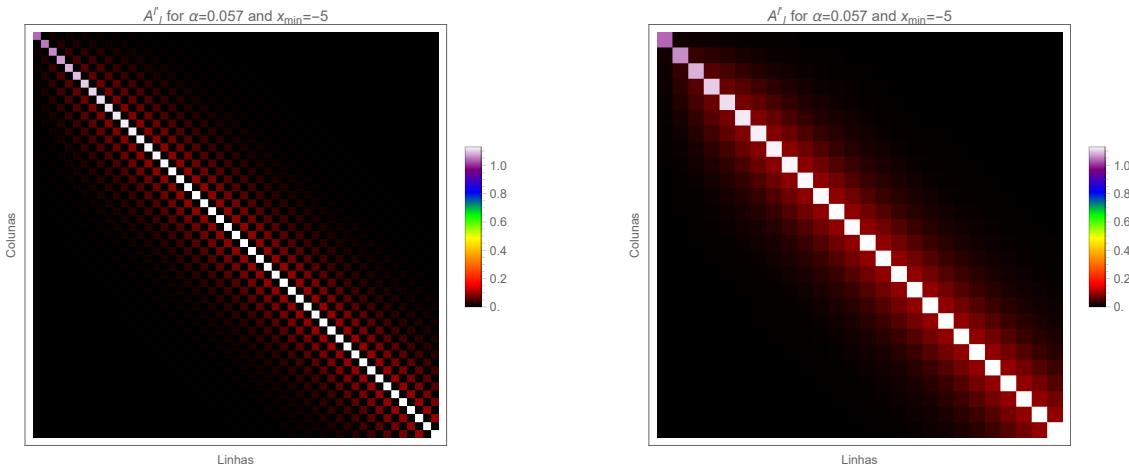


Figura 23 – O lado esquerdo apresenta o plot da matriz A_l'' para $l_{\max} = 51$. O lado direito mostra apenas valores ímpares de linha e coluna. A paleta de cores ao lado de cada plot indica a intensidade do elemento da matriz para os parâmetros indicados.

Uma simulação numérica para a resolução deste problema exige o uso de técnicas computacionais avançadas. Portanto, primeiramente, é vantajoso adquirir experiência e intuição ao considerar o limite de Schwarzschild. Como já mencionado, a métrica de Schwarzschild descreve um corpo esférico estático e não-carregado. Dessa forma, entender o comportamento dessas frequências pode nos ajudar a estudar cenários mais complexos, como o de objetos massivos magnetizados, que são descritos pela métrica GM.

O limite de Schwarzschild é alcançado fazendo $\alpha = 0$, resultando em um conjunto de equações desacopladas. Neste cenário, as matrizes se tornam diagonais,

$$A_l'' = \delta_{ll'}, \quad (3.15)$$

$$B_{lm}' = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(l(l+1) + \frac{2}{x+1} \right) \delta_{ll'}, \quad (3.16)$$

logo, a implementação dos métodos de diferenças finitas se torna mais acessível. Nesse caso, substituindo (3.15) e (3.16) em (3.12), temos a seguinte equação diferencial

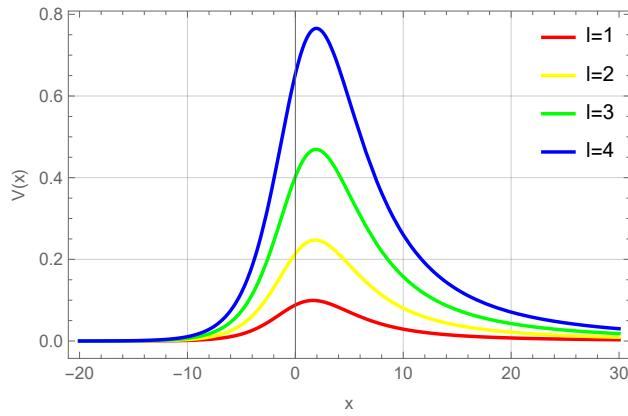
$$-\partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \partial_{\tilde{x}}^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(l(l+1) + \frac{2}{x+1} \right) u_{lm}(\tilde{x}, t), \quad (3.17)$$

cujo termo de potencial é

$$V(\tilde{x}) = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(l(l+1) + \frac{2}{x+1} \right). \quad (3.18)$$

A Figura (24) ilustra o potencial de Schwarzschild para vários valores de l , cujo papel é de suma importância para as frequências quase-normais. O esquema de diferenças finitas¹

¹ Usamos as fórmulas de diferenças finitas de segunda ordem como feito no capítulo 2.

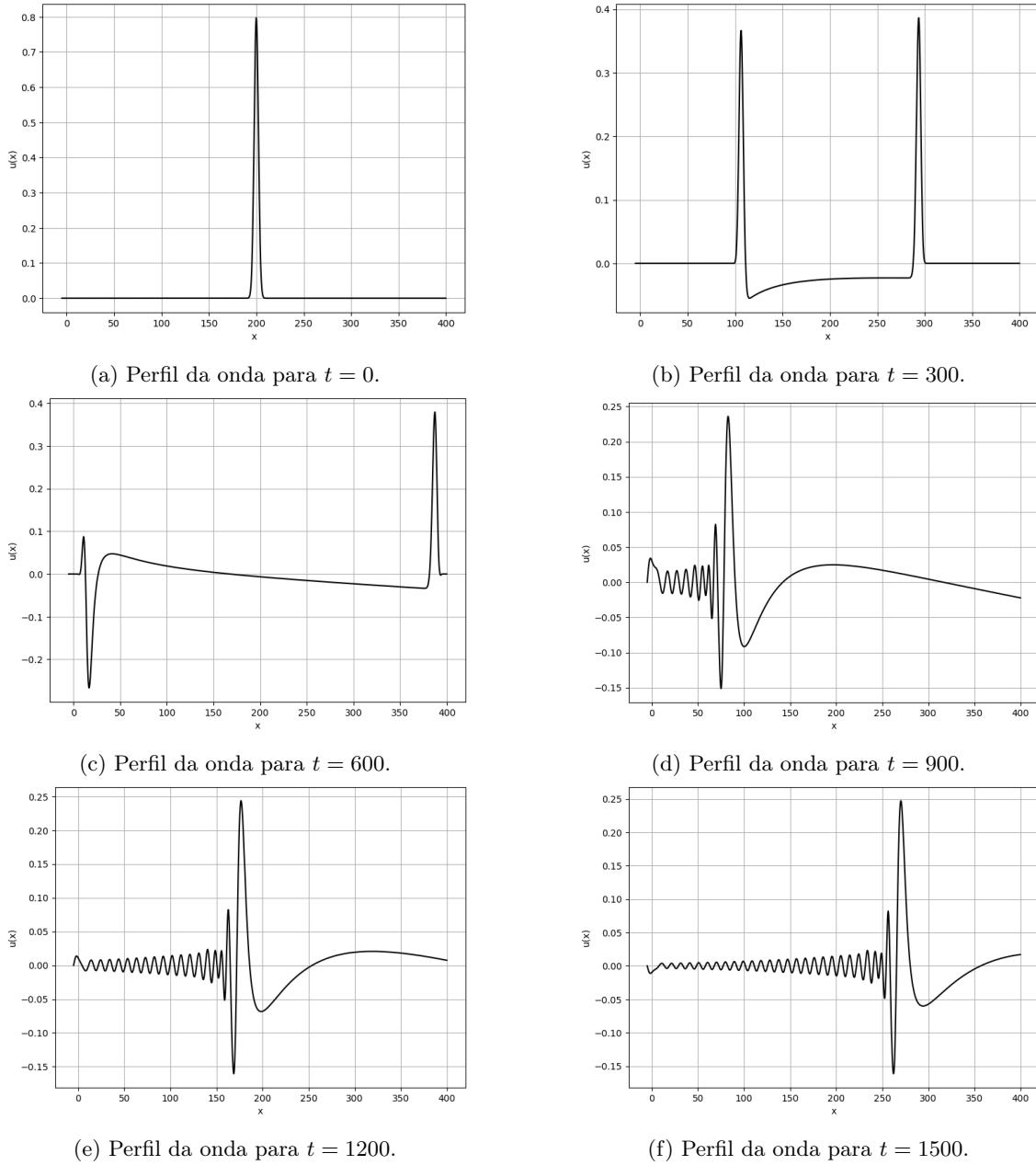
Figura 24 – Plot do Potencial $V(\tilde{x})$ para vários valores de l .

para a equação (3.17) é dado por

$$U_i^{j+1} = \left[2(1 - C^2) - \left(l(l+1) + \frac{2}{x_i + 1} \right) \frac{x_i - 1}{(x_i + 1)^3} \Delta t^2 \right] U_i^j + C^2 (U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - U_i^{j-1}, \quad (3.19)$$

onde C é o número de Courant. Utilizamos um código escrito em Python, conforme detalhado no apêndice C.1, para simular a dinâmica de uma perturbação gaussiana localizada na posição \tilde{x}_0 .

Como mencionado anteriormente, estamos interessados em uma situação de corpo denso que sirva como uma primeira aproximação de objetos compactos como estrelas de nêutrons. Por conta disso a simulação deve conter um parâmetro \tilde{x}_{\min} que pode ser interpretado como a superfície da estrela. Primeiramente, vamos considerar que a estrela refletia completamente a perturbação. A Figura (25) ilustra a evolução temporal do perfil da onda. Podemos observar que para tempos iniciais a perturbação se comporta de acordo com a dinâmica de propagação esperada, ou seja, uma onda livre (Figuras 25a e 25b), semelhantemente ao caso visto no capítulo 2. Posteriormente, a perturbação entra em uma região em que começa a interagir com o potencial (Figuras 25c). Imediatamente depois, a perturbação é totalmente refletida pela superfície da estrela (Figuras 25d, 25e e 25f).

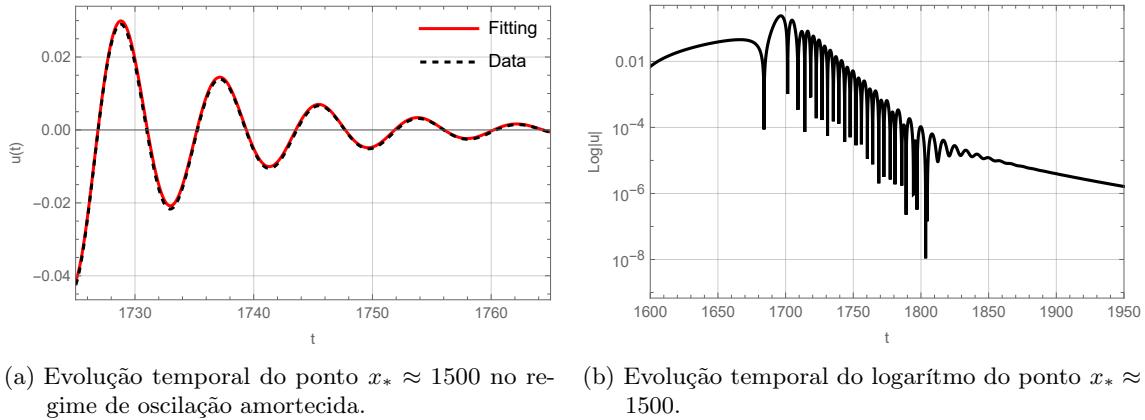
Figura 25 – Simulação da evolução temporal de uma perturbação gaussiana inicialmente no ponto $x_0 = 200$.

É útil entender a evolução temporal de um ponto específico no espaço (Figura 26b). Durante o curso dessa análise, é possível identificar três regimes distintos que caracterizam a evolução da perturbação ao longo do tempo. A primeira região é caracterizada por um comportamento sensível às condições iniciais, o segundo regime é identificado por exibir um comportamento de oscilação amortecida do tipo

$$Ae^{-\omega_i t} \cos(\omega_r t + \delta). \quad (3.20)$$

A taxa de decaimento exponencial está diretamente relacionada às frequências quase-normais

do sistema. Realizando um ajuste (*fitting*) apropriado nessa região (26a), é possível extrair informações sobre as quantidades A , ω_i , ω_r e δ . A Figura (26a) nos mostra o intervalo de tempo em que a perturbação exibe o comportamento de oscilação amortecida. Por fim, a perturbação decai como uma lei de potência para tempos grandes. É possível verificar um decaimento mesmo em situações onde o campo escalar possui massa [71].



(a) Evolução temporal do ponto $x_* \approx 1500$ no regime de oscilação amortecida.
(b) Evolução temporal do logaritmo do ponto $x_* \approx 1500$.

Figura 26 – Simulação de uma onda gaussiana se propagando no espaço-tempo de Schwarzschild para $l = 3$ e $\tilde{x}_{\min} = -2$.

Na tabela abaixo estão os modos quase-normais no limite $\alpha = 0$ para várias posições \tilde{x}_{\min} . Observe que perturbações escalares nesse espaço-tempo são estáveis.

\tilde{x}_{\min}	ω_r	ω_i
-1.5	0.7582	0.108
-2	0.7542	0.0871
-2.5	0.7435	0.0653
-3	0.7305	0.048
-3.5	0.714	0.033
-4	0.695	0.0216
-4.5	0.6742	0.013
-5	0.6517	0.0073
-5.5	0.6278	0.0038
-6	0.6028	0.0018

Tabela 1 – Modos quase-normais para $l = 3$ e $\alpha = 0$.

Esperamos que o comportamento discutido aqui para a métrica de Schwarzschild se repita para a situação onde $\alpha \neq 0$, se esta for estável. Caso contrário, esperamos obter limites para o parâmetro α delimitando situações estáveis e instáveis.

O código desenvolvido aqui, calcula os modos quase-normais de um corpo esfericamente simétrico de raio \tilde{x}_{\min} . Este resultado não está presente na literatura, portanto faz-se necessário sua verificação minuciosa. Por conta disso, na próxima seção, vamos nos

concentrar na obtenção dos modos quase-normais para essa situação, considerando o limite de Schwarzschild por uma abordagem independente.

3.3 Modos Quase-Normais de Corpos Compactos

Conforme mencionado anteriormente, as frequências quase-normais são comumente obtidas por meio de simulações numéricas. Todavia, o limite $\alpha = 0$ produz uma equação diferencial relativamente simples, de tal forma que é possível separá-la. Nestes casos, o problema se reduz à resolução de uma equação diferencial para a coordenada tartaruga. Tal equação pode ser tratada por métodos semiclássicos, como o método WKB [72]. Todavia, neste trabalho, calculamos as frequências quase-normais recorrendo às soluções exatas da equação diferencial resultante.

Vamos começar escrevendo a equação de onda (3.5) para um campo escalar sem massa, no espaço-tempo de Schwarzschild, cuja métrica, $g_{\mu\nu}$, implica no seguinte elemento de linha, em coordenadas prolatas,

$$ds^2 = - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dt^2 + \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx^2 + (x+1)^2 \left(\frac{dy^2}{1-y^2} + (1-y^2) d\phi^2 \right). \quad (3.21)$$

Após alguns procedimentos algébricos, chegamos na seguinte equação diferencial resultante

$$-\frac{(x+1)^3}{x-1} \partial_t^2 \Psi + \partial_x ((x^2-1) \partial_x \Psi) + \partial_y ((1-y^2) \partial_y \Psi) + \frac{1}{1-y^2} \partial_\phi^2 \Psi = 0. \quad (3.22)$$

Supondo a solução separável do tipo

$$\Psi(t, x, y, \phi) = \sum_{l,m} \frac{u_{l\omega}(x)}{x+1} Y_l^m(y, \phi) e^{i\omega t}, \quad (3.23)$$

obtemos a equação diferencial ordinária a seguir para os modos u_{lm} ,

$$\frac{d^2 u_{l\omega}}{dx^2} + \frac{2}{x^2-1} \frac{du_{l\omega}}{dx} - \frac{1}{x-1} \left[\frac{l(l+1)}{x+1} - \frac{(x+1)^2 \omega^2}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] u_{l\omega} = 0. \quad (3.24)$$

Embora possa parecer complicada, a expressão acima é exatamente a equação resultante da separação de variáveis de (3.17), escrita em termos das coordenadas prolatas, as quais são mais convenientes para o propósito desta seção.

3.3.1 Soluções Exatas da Equação de Onda no Espaço-Tempo de Schwarzschild

A equação diferencial (3.24) possui três pontos singulares, dos quais dois são regulares: $x = 1$ e $x = -1$, e um é irregular, situado em $x = \infty$, como veremos a seguir.

Podemos verificar a regularidade do ponto, $x_0 = -1$, considerando os seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x - x_0) \frac{2}{x^2 - 1} = -1, \quad (3.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x - x_0)^2 \frac{1}{x - 1} \left[\frac{(x+1)^2 \omega^2}{x-1} - \frac{l(l+1)}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] = 1 \quad (3.26)$$

Repetindo o mesmo para o ponto situado em $x_0 = 1$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - x_0) \frac{2}{x^2 - 1} = 1, \quad (3.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - x_0)^2 \frac{1}{x - 1} \left[\frac{(x+1)^2 \omega^2}{x-1} - \frac{l(l+1)}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] = 4\omega^2. \quad (3.28)$$

Como os limites calculados acima são finitos, os pontos $x = \pm 1$ são regulares. Para analisar o ponto, $x = \infty$, é conveniente fazer uma mudança de variável, $x = 1/\tau$, pois assim mapearemos o infinito no ponto, $\tau = 0$. A equação diferencial para a nova coordenada, τ , é

$$\frac{d^2 u_{l\omega}}{d\tau^2} + \left(\frac{2}{\tau - 1} - \frac{2}{\tau(\tau^2 - 1)} \right) \frac{du_{l\omega}}{d\tau} + \left[\frac{l(l+1)}{\tau^2(\tau^2 - 1)} + \frac{2}{\tau(\tau - 1)(\tau + 1)^2} + \frac{(\tau + 1)^2 \omega^2}{\tau^4(\tau - 1)^2} \right] u_{l\omega} = 0. \quad (3.29)$$

Verificando a analiticidade das funções no ponto, $\tau_0 = 0$,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (\tau - \tau_0) \left[\frac{2}{\tau - 1} - \frac{2}{\tau(\tau^2 - 1)} \right] = 2, \quad (3.30)$$

enquanto que,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (\tau - \tau_0)^2 \left[\frac{l(l+1)}{\tau^2(\tau - 1)(\tau + 1)} + \frac{2}{\tau(\tau - 1)(\tau + 1)^2} + \frac{(\tau + 1)^2 \omega^2}{\tau^4(\tau - 1)^2} \right] \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

Logo, fica claro que o ponto, $x = \infty$, é singular irregular para a equação (3.24). A observação crucial é que podemos obter séries de Taylor convergentes para os pontos regulares, enquanto, para o ponto irregular, podemos derivar uma série assintótica [73].

3.3.1.1 Funções Confluentes de Heun

Mais adiante, neste trabalho, vamos mostrar que é possível escrever a equação (3.24) como uma equação confluente de Heun, cuja forma padrão é dada por

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \left(\alpha + \frac{\beta + 1}{z} + \frac{\gamma + 1}{z - 1} \right) \frac{dU}{dz} + \left(\frac{\mu}{z} + \frac{\nu}{z - 1} \right) U = 0, \quad (3.32)$$

onde os parâmetros μ e ν são

$$\mu = \frac{1}{2} (\alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) - \eta, \quad (3.33)$$

$$\nu = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma) + \delta + \eta. \quad (3.34)$$

Essa equação possui dois pontos singulares regulares ($z = 0, 1$) e um irregular ($z = \infty$). Soluções locais da equação (3.32), em torno dos pontos singulares regulares, são escritas em termos da função Confluente de Heun, frequentemente denotada por:

$$U(z) = \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z). \quad (3.35)$$

O software Maple 23 denota a solução geral para a equação (3.32), em torno do ponto, $z = 0$, como uma combinação linear das funções

$$H_0^{(+)}(z) = \text{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z), \quad (3.36a)$$

$$H_0^{(-)}(z) = z^{-\beta} \text{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z), \quad (3.36b)$$

onde a notação, $H_0^{(\pm)}$, está sendo utilizada para diferenciar as duas soluções, (\pm) , e o ponto singular, $z = 0$, respectivamente. Mais adiante, vamos identificar as soluções, (\pm) , como modos *ingoing* e *outgoing* da solução.

É possível derivar uma série assintótica das soluções para o ponto, $z = \infty$, onde as soluções linearmente independentes tomam as formas

$$H_{\infty}^{(+)}(z) \sim \frac{e^{-\beta(z+\ln z)}}{z} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_{\nu}^{+}}{z^{\nu}}, \quad a_0^{+} = 1, \quad (3.37a)$$

$$H_{\infty}^{(-)}(z) \sim \frac{1}{z} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_{\nu}^{-}}{z^{\nu}}, \quad a_0^{-} = 1, \quad (3.37b)$$

onde os coeficientes a_{ν}^{\pm} são determinados pelas conhecidas relações de recorrência das funções de Heun [73]. Assim, a solução geral ao redor do ponto $X = 0$ ou ∞ , $U_X(z)$, pode ser escrita como

$$U(z) = C_X^{+} H_X^{(+)}(z) + C_X^{-} H_X^{(-)}(z). \quad (3.38)$$

Nossa conclusão é que, dependendo da região de interesse, temos um conjunto de duas funções linearmente independentes apropriadas que formam a base para uma solução arbitrária.

As Funções Confluentes de Heun desempenham um papel importante na física teórica, encontrando uma ampla gama de aplicações, desde gravitação até a mecânica quântica [74]. Em específico, podemos simplificá-las para polinômios de grau N por meio de restrições adequadas [75].

3.3.1.2 Corpos Compactos

Até aqui, já introduzimos algumas informações relevantes sobre as funções confluentes de Heun. Agora, vamos demonstrar que a equação (3.24), de fato, pode ser reescrita como uma equação confluente de Heun. Para alcançar isso, devemos fazer a mudança de variável

$$\xi = \frac{-x+1}{2}. \quad (3.39)$$

Essa alteração mapeia o horizonte, $x = 1$, no ponto, $\xi = 0$. Além disso, vamos considerar o seguinte Ansatz

$$u_{l\omega}(\xi) = \xi^{2i\omega} e^{-2i\omega\xi} (\xi - 1) w_{l\omega}(\xi). \quad (3.40)$$

Assim, a equação resultante que $w_{l\omega}(\xi)$ satisfaz é (vide Apêndice C.3),

$$\frac{d^2w_{l\omega}}{d\xi^2} + \left(-4i\omega + \frac{1}{\xi-1} + \frac{4i\omega+1}{\xi} \right) \frac{dw_{l\omega}}{d\xi} + \left[\frac{l(l+1)-4i\omega}{\xi} - \frac{l(l+1)}{\xi-1} \right] w_{l\omega} = 0. \quad (3.41)$$

Agora, podemos comparar a equação acima com a equação (3.32) para obter os parâmetros. Os três primeiros podem ser obtidos diretamente e os dois últimos são calculados por (3.33) e (3.34).

$$\eta = 8\omega^2 - l(l+1), \quad (3.42)$$

$$\delta = -8\omega^2. \quad (3.43)$$

Portanto, combinando as equações (3.36a), (3.36b) e (3.40), temos a seguinte solução geral em torno do ponto, $x = 1$,

$$\begin{aligned} u_{l\omega}(x) &= C_1 e^{i\omega x} (x+1) (x-1)^{2i\omega} \text{HeunC} \left(-4i\omega, 4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \frac{1-x}{2} \right) + \\ &+ C_2 e^{i\omega x} (x+1) (x-1)^{-2i\omega} \text{HeunC} \left(-4i\omega, -4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \frac{1-x}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Podemos reescrever a equação acima em termos das soluções² (3.36a) e (3.36b),

$$u_{l\omega}(x) = (x-1)^{2i\omega} (x+1) e^{i\omega x} \left[C_1 H_1^{(+)}(x) + C_2 H_1^{(-)}(x) \right], \quad (3.45)$$

ou ainda,

$$u_{l\omega}(x) = C_1 U_1^{(+)}(x) + C_2 U_1^{(-)}(x). \quad (3.46)$$

² Para reescrever a solução em termos da coordenada x , estamos adotando a notação: $H_0^{(\pm)}\left(\frac{1-x}{2}\right) \equiv H_1^{(\pm)}(x)$.

Existe um significado físico direto relacionado com as funções, $U_1^{(\pm)}(x)$. Elas estão relacionadas com os modos outgoing e ingoing no ponto, $x = 1$. Portanto, as soluções, $U_1^{(+)}(x)$, descrevem ondas se propagando em direção ao horizonte, $x = 1$, ao passo que, $U_1^{(-)}(x)$, descreve uma solução se distanciando do horizonte, $x = 1$. Essa interpretação se estende para os outros conjuntos de soluções, ou seja, as soluções, $U_\infty^{(\pm)}(x)$, comentadas anteriormente³.

Um fato especialmente útil para nossa análise (vide Apêndice C.4) é o comportamento das soluções $U_\infty^{(\pm)}(x)$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |U_\infty^{(+)}(x)| = \begin{cases} \infty, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (0, \pi); \\ 0, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (-\pi, 0); \end{cases} \quad (3.47a)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |U_\infty^{(-)}(x)| = \begin{cases} 0, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (0, \pi); \\ \infty, & \text{se } \arg(x) + \arg(\omega) \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (3.47b)$$

Vale a pena lembrar que as soluções brevemente discutidas acima são funções complexas, de variável complexa e, portanto, o limite $|x| \rightarrow \infty$ depende da direção específica no plano \mathbb{C} . Esse fato é de extrema importância para esse trabalho e sempre que utilizarmos a notação, $|x| \rightarrow \infty$, estará explícito no texto qual a região de interesse.

O principal objetivo desta seção é o cálculo dos modos quase-normais associados à métrica de Schwarzschild, utilizando a solução exata de (3.24). Ademais, buscamos descrever objetos compactos, os quais se traduzem por condições de contorno apropriadas em uma região delimitada por x_{\min} , com $x_{\min} > 1$. O modelo mais simples desses objetos é o que possui a condição de contorno

$$u_{l\omega}(x_{\min}) = 0. \quad (3.48)$$

A condição acima significa que uma perturbação é totalmente refletida ao encontrar o objeto localizado em x_{\min} . Aplicando a condição de contorno na solução geral (3.44), conseguimos determinar uma das constantes

$$\begin{aligned} u_{l\omega}(x) = C_1 e^{-i\omega x} (x+1)(1-x)^{2i\omega} & \left[\text{HeunC} \left(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2} \right) \right. \\ & - \left(\frac{1-x_{\min}}{1-x} \right)^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; (1-x_{\min})/2)}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; (1-x_{\min})/2)} \text{HeunC} \left(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

As frequências quase-normais podem ser encontradas diretamente da solução (3.49). Para isso, devemos garantir que no infinito não existam modos outgoing. Como falado

³ Estamos utilizando a notação $U_X^{(\pm)}(x) = (x-1)^{2i\omega} (x+1) e^{i\omega x} H_X^{(\pm)}(x)$, com $X = 1, \infty$.

anteriormente, podemos escrever a solução em termos das funções no infinito, $U_\infty^\pm(x)$, da seguinte forma,

$$u_{l\omega}(x) = C_\infty^+ U_\infty^{(+)}(x) + C_\infty^- U_\infty^{(-)}(x). \quad (3.50)$$

Tudo o que devemos fazer é encontrar a condição que anula a constante, C_∞^- , uma vez que esta está relacionada com os modos outgoing. Perceba que a função $u_{l\omega}(x)$ satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_{l\omega}(x) = 0. \quad (3.51)$$

A igualdade acima, aliada a equação (3.50) nos mostra que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [C_\infty^+ U_\infty^{(+)}(x) + C_\infty^- U_\infty^{(-)}(x)] = 0. \quad (3.52)$$

Assim, é possível encontrar uma equação para a constante C_∞^- ,

$$C_\infty^- = C_\infty^+ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{U_\infty^{(+)}(x)}{U_\infty^{(-)}(x)} \right]. \quad (3.53)$$

Tomando o módulo de ambos os lados da equação anterior, fica claro que $|C_\infty^-|$ se anula quando

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |U_\infty^{(-)}(x)| \rightarrow \infty. \quad (3.54)$$

Pela relação (3.47b), isso só acontece na região onde $\arg(x) + \arg(\omega) \in (-\pi, 0)$. Portanto, a condição de contorno apropriada para obter os modos quase-normais é

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ \arg(x) + \arg(\omega) \in [-\pi, 0]}} |u_{l\omega}(x)| = 0. \quad (3.55)$$

De fato, o valor que otimiza a convergência da solução é quando $\arg(x) \rightarrow -\pi/2 - \arg(\omega)$ [76]. A equação acima implica na seguinte equação transcendental em termos das funções Confluentes de Heun,

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ \arg(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2} - \arg(\omega)}} \left| (1-x)^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2})}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x}{2})} \right. \\ & \quad \left. - (1-x_{\min})^{4i\omega} \frac{\text{HeunC}(\alpha, \beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x_{\min}}{2})}{\text{HeunC}(\alpha, -\beta, 0, \delta, \eta; \frac{1-x_{\min}}{2})} \right| = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.56)$$

A equação acima é válida apenas para valores discretos de ω_n , com $n = 0, 1, 2, \dots$. O primeiro modo, correspondente a $n = 0$, é comumente denominado modo fundamental. Em termos práticos, é necessário estabelecer um valor numérico⁴ para $|x| \rightarrow \infty \equiv x_\infty$ antes

⁴ Os resultados aqui encontrados não são consideravelmente sensíveis aos valores x_∞ . Nesse caso, estamos considerando $x_\infty = 100$.

de procurarmos as frequências, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, que satisfazem a equação (3.56). Existem várias abordagens para resolver o problema de encontrar as raízes da equação (3.56). Neste contexto, optamos por transformá-la em um sistema de equações de duas variáveis, ω_i e ω_r , e utilizamos o método de Newton-Raphson, que é discutido no Capítulo 2, para calcular numericamente os primeiros modos, cujos valores estão dispostos na tabela abaixo.

n	$\tilde{x}_{\min} = -10$	$\tilde{x}_{\min} = -15$	$\tilde{x}_{\min} = -20$	$\tilde{x}_{\min} = -25$
0	$0.28409 + i 0.00802$	$0.21155 + i 0.00074$	$0.16303 + i 0.00010$	$0.13107 + i 0.00002$
1	$0.45383 + i 0.10192$	$0.36120 + i 0.02769$	$0.29599 + i 0.00655$	$0.24753 + i 0.00150$
2	$0.64775 + i 0.24144$	$0.50976 + i 0.09814$	$0.41377 + i 0.04005$	$0.34855 + i 0.01520$
3	$0.85580 + i 0.38376$	$0.67266 + i 0.17503$	$0.54206 + i 0.08659$	$0.45198 + i 0.04393$

Tabela 2 – Os primeiros quatro modos para $l = 1$, variando o parâmetro, \tilde{x}_{\min} , escrito em termos da coordenada tartaruga (3.9), com $x_{\infty} = 100$.

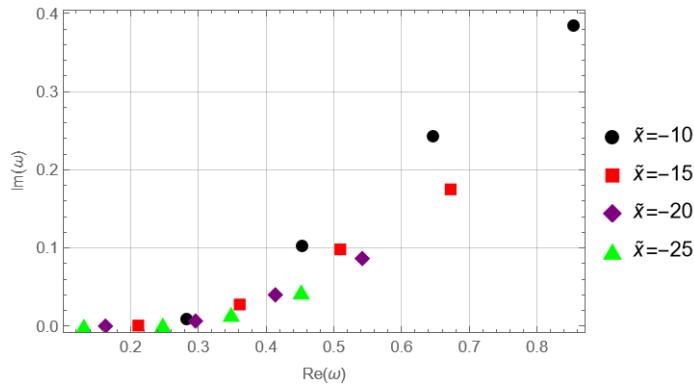


Figura 27 – Representação gráfica da Tabela 2.

É interessante observar o comportamento das frequências como função da posição do parâmetro \tilde{x}_{\min} . Foi constatado que perturbações escalares são estáveis e a estabilidade não depende do tamanho da estrela. A trajetória do modo fundamental como função do raio estelar está disposta na figura 28. Por fim, podemos verificar a concordância entre o método numérico implementado na seção anterior e o caso semi-analítico aqui desenvolvido, cujo o maior erro foi de aproximadamente 2%. As tabelas abaixo mostram os resultados semi-analíticos para $l = 3$ e os respectivos erros percentuais dos cálculos numéricos, dispostos na tabela 1, relativos ao caso semi-analítico.

Os resultados apresentados nos auxiliam na compreensão do comportamento dos modos quase-normais de objetos compactos. O sólido entendimento do caso de Schwarzschild é de extrema relevância para o estudo de espaços-tempo mais complexos, como o de Gutsunaev-Manko.

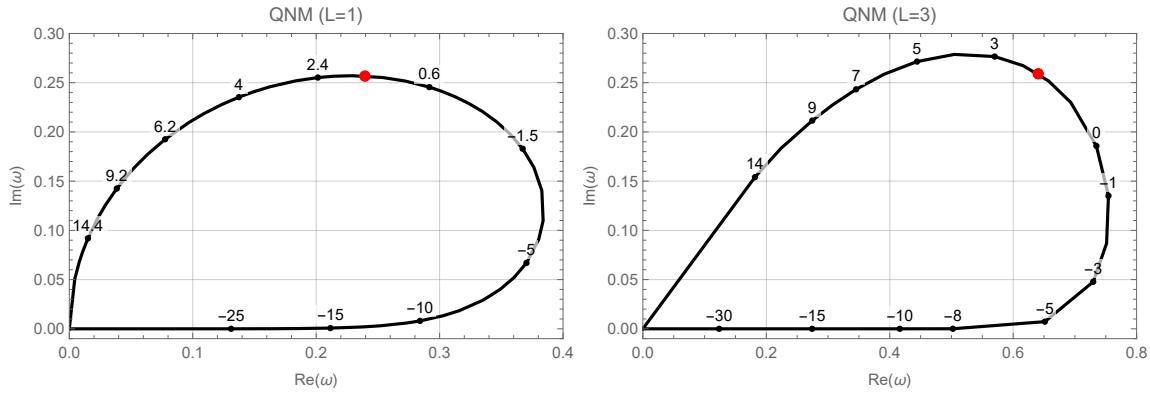


Figura 28 – Trajetória no plano complexo do modo fundamental como uma função do parâmetro, \tilde{x}_{\min} , escrito em termos da coordenada tartaruga (3.9). O ponto vermelho marca a posição do pico do potencial (3.18).

\tilde{x}_{\min}	ω_r	ω_i
-1.5	0.7554883511	0.1101105916
-2	0.7513208581	0.0867450174
-2.5	0.7424613617	0.0657811158
-3	0.7296224031	0.0477576499
-3.5	0.7135123739	0.0329577014
-4	0.6947614525	0.0214256889
-4.5	0.6738842553	0.0129888731
-5	0.6512886684	0.0072767111
-5.5	0.6273339924	0.0037529381
-6	0.6024126113	0.0017923925

Tabela 3 – Modos quase-normais para $l = 3$ e $\alpha = 0$ obtidos semi-analiticamente.

\tilde{x}_{\min}	ω_r	ω_i
-1.5	0.4	1.9
-2	0.4	0.4
-2.5	0.1	0.7
-3	0.1	0.5
-3.5	0.07	0.1
-4	0.03	0.8
-4.5	0.05	0.09
-5	0.06	0.3
-5.5	0.07	1.2
-6	0.06	0.4

Tabela 4 – Erro percentual (%) dos modos quase-normais obtidos numericamente em relação aos obtidos semi-analiticamente, para $l = 3$ e $\alpha = 0$.

4 Considerações Finais

Este estudo explorou as propriedades das perturbações escalares em espaços-tempos axialmente simétricos, visando analisar a estabilidade das soluções magnetizadas de corpos compactos, notadamente a solução de Gutsunaev-Manko. Ao longo desta pesquisa, revisitamos a teoria da Relatividade Geral, seu aparato essencial e ideias fundamentais para compreender as perturbações espaço-temporais. Exploramos a inter-relação entre gravidade e curvatura, enfatizando a interpretação da força gravitacional como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Apresentamos duas soluções das equações de campo para a gravidade: a clássica solução de Schwarzschild e a solução de Gustunaev-Manko, que caracteriza um corpo massivo e magnetizado. Destacamos a característica crucial desse espaço-tempo ao reduzir-se ao caso de Schwarzschild na ausência de um campo magnético. Observamos propriedades essenciais na solução de Schwarzschild, incluindo o conceito de horizonte de eventos. Também identificamos a influência da geometria do espaço-tempo na dinâmica do movimento, resultando em equações diferenciais complexas, requerendo o uso de métodos numéricos, como as diferenças finitas, para sua resolução.

Ao analisar as perturbações escalares no espaço de Gutsunaev-Manko, notamos divergências significativas para valores muito negativos de \tilde{x} , conforme demonstrado na figura 22. Estas divergências são sensíveis ao parâmetro α , deslocando-se para a direita à medida que o campo magnético aumenta. Com o objetivo de mitigar essas divergências, introduzimos uma condição de "casca impermeável", simulando corpos compactos como estrelas de nêutrons ou magnetares. Também identificamos um acoplamento entre os modos $u_{lm}(\tilde{x}, t)$, aumentando a complexidade da integração via diferenças finitas. Como solução, desenvolvemos uma simulação para o limite de Schwarzschild, onde observamos o comportamento dos modos quase-normais e verificamos a estabilidade dessas perturbações de duas formas independentes.

Este trabalho é parte de um projeto abrangente para analisar a estabilidade de perturbações escalares no espaço-tempo de Gutsunaev-Manko. Estamos atualmente desenvolvendo o código em Python, intitulado "*finite-elements-gm*"[77], usando o método de diferenças finitas para simular a propagação de perturbações escalares e calcular os modos quase-normais. Contudo, dada a complexidade do código, é essencial validar os resultados

nos limites conhecidos. Por isso, calculamos os modos quase-normais de um corpo compacto no limite de Schwarzschild, usando a solução exata da equação de onda. É importante frisar que esses resultados, obtidos neste trabalho, não existem até o momento na literatura. Estes revelaram uma dependência explícita dos modos quase-normais em relação à fronteira do corpo compacto, denotada no texto por \tilde{x}_{\min} . Observamos que esses modos se anulam à medida que nos aproximamos ou nos afastamos do horizonte, exibindo um comportamento não trivial na região intermediária, como ilustrado na figura 28.

O próximo passo imediato em nosso projeto é gerar um gráfico similar ao da figura 28 para o limite de Schwarzschild na métrica GM, utilizando o código finite-elements-gm. Posteriormente, planejamos expandir nossa análise para perturbações vetoriais e spinoriais e carregadas.

Esta análise teórica é fundamental para a compreensão da estabilidade de soluções magnetizadas das equações de Einstein-Maxwell. Como já indicado, há evidências substanciais de que corpos astrofísicos com intensa magnetização podem ser fontes de rajadas rápidas de rádio. Assim, este projeto visa compreender os mecanismos por trás desses fenômenos misteriosos. Além disso, o radiotelescópio BINGO/ABDUS será capaz de detectar uma série de RRR, abrindo perspectivas futuras para a aplicação observational deste projeto.

Referências

- [1] Igor Novikov. Black holes. *Stellar Remnants*, pages 237–334, 1997.
- [2] Subrahmanyan Chandrasekhar and James B Hartle. On crossing the cauchy horizon of a reissner–nordström black-hole. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 384(1787):301–315, 1982.
- [3] Barrett O’Neill. *The geometry of Kerr black holes*. Courier Corporation, 2014.
- [4] Steven Weinberg. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.
- [5] Christopher F McKee and Eve C Ostriker. Theory of star formation. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 45:565–687, 2007.
- [6] C Goddi, H Falcke, M Kramer, L Rezzolla, C Brinkerink, T Bronzwaer, JRJ Davelaar, R Deane, M De Laurentis, G Desvignes, et al. Blackholecam: Fundamental physics of the galactic center. *International Journal of Modern Physics D*, 26(02):1730001, 2017.
- [7] Ziri Younsi, Alexander Zhidenko, Luciano Rezzolla, Roman Konoplya, and Yosuke Mizuno. New method for shadow calculations: Application to parametrized axisymmetric black holes. *Physical Review D*, 94(8):084025, 2016.
- [8] Roman Konoplya, Luciano Rezzolla, and Alexander Zhidenko. General parametrization of axisymmetric black holes in metric theories of gravity. *Physical Review D*, 93(6):064015, 2016.
- [9] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, Sep 1939.
- [10] Subrahmanyan Chandrasekhar. Xlviii. the density of white dwarf stars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 11(70):592–596, 1931.
- [11] Paolo A Mazzali, Friedrich K Ropke, Stefano Benetti, and Wolfgang Hillebrandt. A common explosion mechanism for type ia supernovae. *Science*, 315(5813):825–828, 2007.

- [12] Tullio Regge and John A Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Physical Review*, 108(4):1063, 1957.
- [13] Frank J Zerilli. Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Physical Review D*, 2(10):2141, 1970.
- [14] Kip S Thorne and Alfonso Campolattaro. Non-radial pulsation of general-relativistic stellar models. i. analytic analysis for $l \geq 2$. *Astrophysical Journal, vol. 149*, p. 591, 149:591, 1967.
- [15] Kip S Thorne. Gravitational radiation damping. *Physical Review Letters*, 21(5):320, 1968.
- [16] Kip S Thorne. Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models. iii. analytic and numerical results for neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 158:1, 1969.
- [17] Kip S Thorne. Nonradial pulsation of general-relativistic stellar models. iv. the weakfield limit. *Astrophysical Journal, vol. 158*, p. 997, 158:997, 1969.
- [18] Keiju Murata, Harvey S Reall, and Norihiro Tanahashi. What happens at the horizon (s) of an extreme black hole? *Classical and Quantum Gravity*, 30(23):235007, 2013.
- [19] Huan Yang, Aaron Zimmerman, Anil Zenginoğlu, Fan Zhang, Emanuele Berti, and Yanbei Chen. Quasinormal modes of nearly extremal kerr spacetimes: spectrum bifurcation and power-law ringdown. *Physical review D*, 88(4):044047, 2013.
- [20] Elena Giorgi. The linear stability of reissner–nordström spacetime: the full subextremal range $|q| < m$. *Communications in Mathematical Physics*, 380(3):1313–1360, 2020.
- [21] Elcio Abdalla, B Cuadros-Melgar, RDB Fontana, Jeferson de Oliveira, Eleftherios Papantonopoulos, and AB Pavan. Instability of a reissner-nordström-ads black hole under perturbations of a scalar field coupled to the einstein tensor. *Physical Review D*, 99(10):104065, 2019.
- [22] KA Bronnikov, RA Konoplya, and A Zhidenko. Instabilities of wormholes and regular black holes supported by a phantom scalar field. *Physical Review D*, 86(2):024028, 2012.
- [23] Bing Zhang. The physical mechanisms of fast radio bursts. *Nature*, 587(7832):45–53, 2020.

- [24] Marcelo V. dos Santos, Ricardo G. Landim, Gabriel A. Hoerning, Filipe B. Abdalla, Amilcar Queiroz, Elcio Abdalla, Carlos A. Wuensche, Bin Wang, Luciano Barosi, Thyrso Villela, Alessandro Marins, Chang Feng, Edmar Gurjao, Camila P. Novaes, Larissa C. O. Santos, Joao R. L. Santos, Jiajun Zhang, Vincenzo Liccardo, Xue Zhang, Yu Sang, Frederico Vieira, and Pablo Motta. The bingo project ix: Search for fast radio bursts – a forecast for the bingo interferometry system, 2023.
- [25] Duncan R Lorimer, Matthew Bailes, Maura Ann McLaughlin, David J Narkevic, and Froney Crawford. A bright millisecond radio burst of extragalactic origin. *Science*, 318(5851):777–780, 2007.
- [26] D et al Thornton, B Stappers, M Bailes, B Barsdell, S Bates, NDR Bhat, M Burgay, S Burke-Spoliar, DJ Champion, P Coster, et al. A population of fast radio bursts at cosmological distances. *Science*, 341(6141):53–56, 2013.
- [27] TNS FRB. <https://www.wis-tns.org/>. Acessado em 05/12/2023.
- [28] Brian D Metzger, Ben Margalit, and Lorenzo Sironi. Fast radio bursts as synchrotron maser emission from decelerating relativistic blast waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 485(3):4091–4106, 2019.
- [29] Elcio Abdalla, Alessandro Marins, Filipe Abdalla, Jordany Vieira, Lucas Formigari, Amilcar R. Queiroz, Bin Wang, Luciano Barosi, Thyrso Villela, Carlos A. Wuensche, Chang Feng, Edmar Gurjao, Ricardo Landim, Camila P. Novaes, Joao R. L. Santos, and Jiajung Zhang. Bingo-abdus: a radiotelescope to unveil the dark sector of the universe, 2023.
- [30] Albert Einstein. On the influence of gravitation on the propagation of light. *Annalen der Physik*, 35(898-908):906, 1911.
- [31] Albert Einstein and Marcel Grossmann. Outline of a generalized theory of relativity and of a theory of gravitation. *The collected papers of Albert Einstein*, 4:1912–1914, 1913.
- [32] Albert Einstein. The field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:844–847, 1915.
- [33] Stephen W Hawking and Werner Israel. *Three hundred years of gravitation*. Cambridge University Press, 1987.

- [34] Robert V Pound and Glen A Rebka Jr. Apparent weight of photons. *Physical review letters*, 4(7):337, 1960.
- [35] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [36] Euclid. *The Elements of Euclid*. Dover Publications Inc., New York, 2nd edition, 1956.
- [37] Albert Einstein. Cosmological considerations on the general theory of relativity. *Cosmological Constants*, page 16, 1986.
- [38] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [39] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The astronomical journal*, 116(3):1009, 1998.
- [40] Stoytcho S Yazadjiev. Relativistic models of magnetars: Nonperturbative analytical approach. *Physical Review D*, 85(4):044030, 2012.
- [41] A Colaiuda, Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, and JA Pons. Relativistic models of magnetars: structure and deformations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385(4):2080–2096, 2008.
- [42] Jean Eisenstaedt. The early interpretation of the schwarzschild solution. In D. Howard and John Stachel, editors, *Einstein and the History of General Relativity*, pages 1–213. Birkhäuser, 1989.
- [43] Observations of fast radio bursts at frequencies down to 400 megahertz. *Nature*, 566(7743):230–234, 2019.
- [44] Bing Zhang. The physics of fast radio bursts. *Reviews of Modern Physics*, 95(3):035005, 2023.
- [45] WB Bonnor. An exact solution of the einstein-maxwell equations referring to a magnetic dipole. *Zeitschrift für Physik*, 190(4):444–445, 1966.
- [46] Ts I Gutsunaev and VS Manko. On a family of solutions of the einstein-maxwell equations. *General relativity and gravitation*, 20:327–335, 1988.

- [47] Ts I Gutsunaev and VS Manko. On the gravitational field of a mass possessing a magnetic dipole moment. *Physics Letters A*, 123(5):215–216, 1987.
- [48] VS Manko. On a new static solution of the einstein-maxwell equations for a massive magnetic dipole. *Physics Letters A*, 141(5-6):249–250, 1989.
- [49] Elon Lages Lima. *Análise no espaço Rn*. Universidade de Brasilia, 1970.
- [50] Richard L Burden, J Douglas Faires, and Annette M Burden. *Numerical analysis*. Cengage learning, 2015.
- [51] Josef Stoer, Roland Bulirsch, R Bartels, Walter Gautschi, and Christoph Witzgall. *Introduction to numerical analysis*, volume 1993. Springer, 1980.
- [52] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical methods*. Courier Corporation, 2003.
- [53] Charles W Clenshaw and Alan R Curtis. A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*, 2:197–205, 1960.
- [54] Steven G Johnson. Notes on the convergence of trapezoidal-rule quadrature, 2010.
- [55] John P Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.
- [56] John P Boyd. Exponentially convergent fourier-chebyshev quadrature schemes on bounded and infinite intervals. *Journal of scientific computing*, 2:99–109, 1987.
- [57] SciPy documentation. `scipy.integrate.quad`. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.quad.html>. Acessado em 01/10/2023.
- [58] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- [59] Eugene Isaacson and Herbert Bishop Keller. *Analysis of numerical methods*. Courier Corporation, 2012.
- [60] Jules G Charney, Ragnar Fjörtoft, and J von Neumann. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2(4):237–254, 1950.
- [61] Frank Watson Dyson, Arthur Stanley Eddington, and Charles Davidson. Ix. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made

- at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [62] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern cosmology*. Academic press, 2020.
- [63] George Gamow. Zur quantentheorie des atomkernes. *Zeitschrift für Physik*, 51(3-4):204–212, 1928.
- [64] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*, volume 69. Oxford university press, 1998.
- [65] Kostas D Kokkotas and Bernd G Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2:1–72, 1999.
- [66] Bin Wang. Perturbations around black holes. *Brazilian journal of physics*, 35:1029–1037, 2005.
- [67] A Zhidenko. Quasi-normal modes of schwarzchild–de sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(1):273, 2003.
- [68] RA Konoplya and Alexander Zhidenko. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*, 83(3):793, 2011.
- [69] Andrew R Liddle and David H Lyth. *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge university press, 2000.
- [70] Pedro Carrilho and Karim A Malik. Vector and tensor contributions to the curvature perturbation at second order. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(02):021, 2016.
- [71] Roman A Konoplya and AV Zhidenko. Decay of massive scalar field in a schwarzchild background. *Physics Letters B*, 609(3-4):377–384, 2005.
- [72] RA Konoplya, A Zhidenko, and AF Zinhailo. Higher order wkb formula for quasinormal modes and grey-body factors: recipes for quick and accurate calculations. *Classical and Quantum Gravity*, 36(15):155002, 2019.
- [73] Felix Medland Arscott. *Heun's Differential Equations*. Clarendon Press, 1995.

- [74] M Hortaçsu. Heun functions and some of their applications in physics. *Advances in High Energy Physics*, 2018, 2018.
- [75] Marcos C.R. Ribeiro, Márcio M. Cunha, Cleverson Filgueiras, and Edilberto O. Silva. Quantum particle motion on the surface of a helicoid in the presence of an harmonic oscillator. *Physics Open*, 5:100045, 2020.
- [76] Plamen P Fiziev. Exact solutions of regge-wheeler equation and quasi-normal modes of compact objects. *Classical and Quantum Gravity*, 23(7):2447, 2006.
- [77] Lucas Formigari. The gutsunaev-manko model for the description of fast radio bursts. *Universidade de São Paulo - USP*, 2024.

APÊNDICE A – Capítulo 1

A.1 Matemática da Relatividade Geral

Como foi mencionado, o estudo da interação gravitacional é substituído pelo da geometria. Desse modo, é de fundamental importância definir algumas quantidades geométricas que são usadas ao longo do texto, que é o objetivo desta seção.

A.1.1 Vetores e Tensores

A Relatividade Geral é uma teoria que geometriza e unifica o espaço e o tempo em uma entidade conhecida como espaço-tempo. Portanto, o espaço de interesse que estudamos possui 4 dimensões, sendo três delas espaciais e uma temporal e, daqui em diante, vamos nos referir a tal espaço simplesmente como espaço-tempo. Frequentemente, dizemos que este possui (3+1)-dimensões. Um vetor no espaço-tempo pode ser classificado de duas formas diferentes de acordo como ele se transforma perante mudanças de coordenadas. Um vetor contravariante, A^ν , que depende das coordenadas do espaço-tempo, é aquele que se transforma da seguinte maneira

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (\text{A.1})$$

A posição, momento, aceleração, entre outros são exemplos de vetores contravariantes. Por outro lado, existem vetores chamados de covariantes que dependem das coordenadas do espaço-tempo e se transformam obedecendo a lei

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu. \quad (\text{A.2})$$

O operador de divergência é um exemplo de vetor covariante.

A natural generalização dos vetores é conhecida como tensor e este é um objeto de mais de um índice da forma

$$T^{\mu\nu\lambda\dots}_{\alpha\beta\gamma\dots}. \quad (\text{A.3})$$

A quantidade de índice define a ordem do tensor. Dentro dessa linguagem, vetores são tensores de ordem 1 e escalares de ordem 0. Das relações (A.1) e (A.2) podemos escrever as

generalizações para tensores de ordem mais alta

$$T'^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \dots T^{\alpha\beta\dots}, \quad (\text{A.4})$$

$$T'_{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \dots T_{\alpha\beta\dots}. \quad (\text{A.5})$$

O tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, é um exemplo de tensor de segunda ordem.

Tensores covariantes e contravariantes podem ser relacionados utilizando o tensor métrico da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.6})$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.7})$$

A.1.2 Derivada Covariante

Em espaços curvos, como os descritos pela teoria da relatividade geral, as derivadas tradicionais podem não capturar completamente a variação de um vetor ou tensor à medida que nos movemos ao longo de uma curva. A derivada covariante é definida de tal maneira a levar em conta essa curvatura do espaço-tempo. Em virtude disso, a derivada covariante de um tensor de ordem 1 A_μ é definida como sendo

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda, \quad (\text{A.8})$$

e para um tensor contravariante de ordem 1

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda. \quad (\text{A.9})$$

Muitas vezes é mais conveniente escrevermos a derivada covariante em uma notação mais compacta, que segue

$$\nabla_\nu A_\mu \equiv A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda, \quad (\text{A.10})$$

onde o símbolo, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, é conhecido como conexão e leva em consideração a curvatura do espaço. A generalização para um tensor de ordem 2, 3, etc., é feita diretamente. Como exemplo, para ordem 2, temos

$$T_{\mu\nu;\alpha} = T_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda T_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda T_{\mu\lambda}. \quad (\text{A.11})$$

Vale a pena notar que para o caso de campos escalares a derivada covariante é equivalente a derivada usual.

É fundamental que a relatividade geral seja escrita em termos de tensores pois, apenas desta maneira, ela terá a mesma forma qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado. Apesar da derivada covariante ser, de fato, um tensor, o termo de derivada usual e o termo de conexão não são. No entanto, a diferença

$$A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda, \quad (\text{A.12})$$

é um tensor. A conexão pode ser dividida em parte simétrica e antissimétrica

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right) + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right), \\ &= \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda + \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A parte antissimétrica é um tensor, e descreve um espaço-tempo com torção. A relatividade geral foi formulada, inicialmente, em um espaço-tempo sem torção. Por conta disso, neste trabalho, sempre vamos considerar o termo, $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda$, nulo. Nesse caso, a parte simétrica é conhecida como símbolo de Cristoffel e se relaciona com o tensor métrico da seguinte maneira

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (\text{A.14})$$

A contração $\Gamma_{\sigma\mu}^\mu$ do símbolo de Christoffel pode ser escrita de uma maneira particularmente útil. Por definição, temos que

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma}. \quad (\text{A.15})$$

Observe que podemos usar a fórmula de Jacobi,

$$(\det A)_{,\sigma} = \text{tr}(A^{-1} A_{,\sigma}) \det A, \quad (\text{A.16})$$

que calcula a derivada do determinante de uma matriz. Podemos escrever a equação acima considerando o tensor métrico,

$$\begin{aligned} g_{,\sigma} &= \text{tr}(g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu,\sigma}) g, \\ (\sqrt{-g} \sqrt{-g})_{,\sigma} &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma} \sqrt{-g} \sqrt{-g}, \\ 2(\sqrt{-g})_{,\sigma} &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma} \sqrt{-g}, \\ \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma} &= \frac{(\sqrt{-g})_{,\sigma}}{\sqrt{-g}}, \\ \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu,\sigma} &= (\ln \sqrt{-g})_{,\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Comparando (A.15) com (A.17),

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\mu = (\ln \sqrt{-g})_{,\sigma}. \quad (\text{A.18})$$

A derivada covariante de um tensor contravariante de ordem 1 pode ser reescrita de uma forma conveniente utilizando o resultado anterior

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\mu} &= A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} A^\mu \\ &= A^\mu_{,\mu} + (\ln \sqrt{-g})_{,\mu} A^\mu, \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} [\sqrt{-g} A^\mu_{,\mu} + (\sqrt{-g})_{,\mu} A^\mu], \end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} A^\mu)_{,\mu}. \quad (\text{A.19})$$

A.1.3 Tensor de Curvatura

A principal ideia da teoria da relatividade geral é reinterpretar a gravidade como a curvatura do espaço-tempo. Dessa forma, se torna imprescindível definir o objeto matemático que captura essa noção. Tal objeto é o tensor de Riemann, que é fundamental na descrição matemática da curvatura intrínseca do espaço-tempo e desempenha um papel crucial nas equações de campo de Einstein. Matematicamente, o tensor de Riemann é expresso em termos das conexões e suas derivadas¹

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}, \quad (\text{A.20})$$

e possui as seguintes propriedades:

- Antissimetria nos dois últimos índices

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} = -R^\lambda_{\mu\alpha\nu}, \quad (\text{A.21})$$

que é válida mesmo para o caso de espaços com torção.

- Na sua forma completamente covariante, é antissimétrico em relação à troca dos dois primeiros índices, isto é,

$$R_{\lambda\mu\nu\alpha} = -R_{\mu\lambda\nu\alpha}, \quad (\text{A.22})$$

e é simétrico em relação à troca do primeiro par de índices com o segundo,

$$R_{\lambda\mu\nu\alpha} = R_{\nu\alpha\lambda\mu}. \quad (\text{A.23})$$

- 1^a Identidade de Bianchi

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha} + R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\alpha\mu} = 0. \quad (\text{A.24})$$

¹ Ao longo de todo o texto estamos utilizando as definições presentes no livro [4].

- 2^a Identidade de Bianchi

$$R^\lambda_{\mu\nu\alpha;\sigma} + R^\lambda_{\mu\sigma\nu;\alpha} + R^\lambda_{\mu\alpha\sigma;\nu} = 0. \quad (\text{A.25})$$

- Relação com o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}; \quad (\text{A.26})$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.27})$$

Para o caso de conexões simétricas, o tensor de Ricci é simétrico.

Podemos reescrever a 2^a identidade de Bianchi de uma forma particularmente útil, utilizando as propriedades de simetrias do tensor de curvatura mostradas acima. Perceba que, ao multiplicarmos a equação (A.25) por δ^ν_λ , obtemos

$$R^\nu_{\mu\nu\alpha;\sigma} + R^\nu_{\mu\sigma\nu;\alpha} + R^\nu_{\mu\alpha\sigma;\nu} = 0, \quad (\text{A.28})$$

ou ainda,

$$R_{\mu\alpha;\sigma} - R_{\mu\sigma;\alpha} + R^\nu_{\mu\alpha\sigma;\nu} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Contraindo a equação acima com $g^{\mu\alpha}$,

$$R_{;\sigma} - R^\alpha_{\sigma;\alpha} + R^\nu_{\sigma\alpha\sigma;\nu} = 0. \quad (\text{A.30})$$

O último termo pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}R_{\beta\mu\alpha\sigma;\nu} = -g^{\beta\nu}R^\alpha_{\beta\alpha\sigma;\nu} = -R^\nu_{\sigma;\nu}. \quad (\text{A.31})$$

Logo, a equação (A.30) se torna

$$R_{;\sigma} - R^\alpha_{\sigma;\alpha} - R^\nu_{\sigma;\nu} = 0, \quad (\text{A.32})$$

ou ainda,

$$\left(R^\alpha_{\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma R \right)_{;\alpha} = 0. \quad (\text{A.33})$$

APÊNDICE B – Capítulo 2

B.1 Simulação em python para a onda unidimensional.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

```

Autora: Eveling C. Ribeiro

Simulação da propagação da onda na corda de tamanho L.

```
"""

```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Definição da gaussiana para condição inicial
```

```
def InitialConditions(x, x0, k):
```

```
    u = np.exp(-k*(x - x0)**2)
```

```
    return u
```

```
# Definição da função analítica
```

```
def AnalyticalSolution(x, t, x0, k):
```

```
    function = 0.5 * (np.exp(-k*(x - t - x0)**2) \
```

```
+ np.exp(-k*(x + t - x0)**2))
```

```
    return function
```

```
#Parâmetros
```

```
Nx = 1000 # Número de pontos na corda
```

```
Nt = 4000 # Número de pontos no tempo
```

```
L = 20.0 # Comprimento da corda
```

```
T = 25.0 # Tempo total de simulação
```

```
# Parâmetro que controla a "largura" da gaussiana da condição inicial
```

```

k = 10.0
x0 = 5.0 # Valor de deslocamento da gaussiana
x, dx = np.linspace(0, L, Nx, retstep=True) # Discretização espacial
t, dt = np.linspace(0, T, Nt, retstep=True) # Discretização temporal
c = 1.0 # Velocidade de propagação da onda
# Parâmetro de estabilidade do método das diferenças finitas
C = (c * dt) / dx

U = np.zeros((Nx, Nt)) # Inicialização da matriz da solução

# Condição inicial de uma gaussiana deslocada de uma posição x0
U[:, 0] = InitialConditions(x, x0, k)

# Condição inicial para a velocidade inicial da onda
for i in range(1, Nx - 1):
    U[i, 1] = 0.5 * ((C**2) * U[i+1, 0] + 2 * (1 - C**2) \
        * U[i, 0] + (C**2) * U[i-1, 0])

# Resolução da equação de onda por diferenças finitas
for j in range(1, Nt - 1):
    for i in range(1, Nx - 1):
        U[i, j+1] = -U[i, j-1] + 2 * U[i, j] + (C**2) * (U[i+1, j] \
            - 2 * U[i, j] + U[i-1, j])

f = AnalyticalSolution(x, t[200], x0, k)

# Plotagem da solução analítica e aproximada
plt.figure(0)
plt.plot(x, U[:, 200], "ro-", label="Solução Aproximada")
plt.plot(x, f, "k", label="Solução Analítica")
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u(x)")

```

```
plt.legend(loc="best")  
plt.show()
```

APÊNDICE C – Capítulo 3

C.1 Simulação em Python de uma onda escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""

```

Autora: Eveling C. Ribeiro

Simulação da propagação de uma onda escalar no espaço-tempo de Schwarzschild.

```
"""

```

```
# Importando bibliotecas
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import lambertw
```

```
def initial_conditions(x, x0, k):
```

```
"""

```

Função que define a gaussiana para a condição inicial

```
"""

```

```
u = np.sqrt(2/np.pi) * np.exp(-k * (x - x0)**2)
```

```
return u
```

```
def calculate_X(x):
```

```
"""

```

Função que calcula a inversa da coordenada tartaruga e utiliza uma aproximação de Stirling para valores grandes.

```
"""

```

```

#Condição que define uma aproximação de Stirling
if type(x) == np.ndarray:
    lower = np.array(2*lambertw(np.exp((x[x<1000]-1)/2)/2)+1)
    u = np.array(x[x>=1000]/2 + np.log(2))
    higher = 2*(u-np.log(u)+np.log(u)/u) + 1
    return np.concatenate([lower, higher])
else:
    return np.array(2*lambertw(np.exp((x-1)/2)/2)+1)

def calculate_V(x, l):
    """
    Função que calcula o potencial
    """
    v = np.array((l * (l + 1) + 2/(x + 1)) * (x - 1) / (x + 1)**3)
    return v

# Parâmetros
Ntilde = 3000 # Número de pontos no espaço
Nt = 6000 # Número de pontos no tempo
xtilde_min = -500 # valor mínimo para a coordenada espacial
xtilde_max = 1000 # valor máximo para a coordenada espacial
tmin = 0 # tempo inicial de simulação
tmax = 800 # tempo máximo de simulação
k = 0.1 # Parâmetro que controla a "largura" da gaussiana
# Discretização espacial
xtilde, dxtilde = np.linspace(xtilde_min, xtilde_max, \
Ntilde, retstep=True)
# Discretização temporal
t, dt = np.linspace(tmin, tmax, Nt, retstep=True)
l = 2 # modo l
# parâmetro que controla o deslocamento da gaussiana na coordenada x
x0 = 200
# parâmetro do deslocamento da gaussiana na coordenada tartaruga

```

```

xtilde0 = calculate_X(x0)
# Parâmetro de estabilidade do método das diferenças finitas
C = dt / dxtilde
x = calculate_X(xtilde) # inversa da coordenada tartaruga

# Inicialização da matriz U
U = np.zeros((Nxtilde, Nt), float)

# Condições iniciais
for i in range(Nxtilde):
    U[i, 0] = initial_conditions(x[i], xtilde0, k)

# Condição inicial para a velocidade da onda
for i in range(1, Nxtilde - 1):
    U[i, 1] = (1 - C**2 - 0.5 * calculate_V(x[i], 1) * \
                (dt**2)) * U[i, 0] + 0.5 * C**2 * (U[i+1, 0] + U[i-1, 0])

# Esquema por diferenças finitas
for j in range(1, Nt - 1):
    for i in range(1, Nxtilde - 1):
        U[i, j+1] = (2*(1-C**2) - calculate_V(x[i], 1) * (dt**2)) * \
                      U[i, j] + (C**2) * (U[i+1, j] + U[i-1, j]) - U[i, j-1]

print("Número de Courant = ", C)

# Plotagem dos resultados
plt.plot(t, np.log(np.abs(U[1400, :])), "darkblue")
plt.grid()
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("Log|u|")
plt.show()

```

C.2 Propagação de uma Onda no Espaço GM

Nesta seção, vamos obter o conjunto de equações diferenciais parciais acopladas associado à propagação de uma onda escalar sem massa no espaço-tempo descrito pela métrica GM. Considere a equação de onda

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi) = 0. \quad (\text{C.1})$$

onde a métrica é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{x-1}{x+1}f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2}{f^2}\frac{x+1}{x-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g^2}{f^2}\frac{(x+1)^2}{1-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(x+1)^2(1-y^2)}{f^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

O determinante da métrica é simplesmente o produto da diagonal principal, o que implica em

$$\sqrt{-g} = \left(\frac{g}{f}\right)^2(x+1)^2. \quad (\text{C.3})$$

Para calcular a equação da onda explicitamente em termos das componentes da métrica (C.2), vamos considerar a parte espacial e temporal separadamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Psi) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j\Psi) &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\underbrace{\partial_0(\sqrt{-g}g^{00}\partial_0\Psi)}_A + \underbrace{\partial_1(\sqrt{-g}g^{11}\partial_1\Psi)}_B + \underbrace{\partial_2(\sqrt{-g}g^{22}\partial_2\Psi)}_C + \underbrace{\partial_3(\sqrt{-g}g^{33}\partial_3\Psi)}_D\right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Calculando termo por termo:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{g^2}{f^4}\frac{(x+1)^3}{x-1}\partial_t^2\Psi, \\ B &= \partial_x((x^2-1)\partial_x\Psi), \\ C &= \partial_y((1-y^2)\partial_y\Psi), \\ D &= \frac{g^2}{1-y^2}\partial_\phi^2\Psi. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$-\partial_t^2\Psi + \frac{f^4}{g^2}\frac{(x-1)}{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x+1}\partial_x((x^2-1)\partial_x\Psi) + \frac{1}{x+1}\partial_y((1-y^2)\partial_y\Psi) + \frac{g^2}{(x+1)(1-y^2)}\partial_\phi^2\Psi\right] = 0. \quad (\text{C.5})$$

Vamos considerar que a solução seja do tipo,

$$\Psi = \frac{\psi}{x+1}. \quad (\text{C.6})$$

Para rescrever a equação (C.5) em termos da nova função ψ , precisamos dar uma atenção especial para o primeiro termo dentro da chave, que se reescreve como

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} \partial_x ((x^2 - 1) \partial_x \Psi) &= \frac{1}{x+1} \partial_x \left[(x^2 - 1) \partial_x \left(\frac{\psi}{x+1} \right) \right], \\ &= \frac{1}{x+1} \partial_x \left[(x-1) \partial_x \psi - \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \psi \right], \\ &= \frac{2\partial_x \psi}{(x+1)^2} + \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \partial_x^2 \psi - \frac{2\psi}{(x+1)^3}, \\ &= \partial_x \left(\frac{x-1}{x+1} \partial_x \psi \right) - \frac{2\psi}{(x+1)^3}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Em termos de ψ , a equação de onda se reescreve como,

$$-\partial_t^2 \psi + \frac{f^4}{g^2} \left[\frac{x-1}{x+1} \partial_x \left(\frac{x-1}{x+1} \partial_x \psi \right) + \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(\partial_y ((1-y^2) \partial_y \psi) + \frac{g^2}{1-y^2} \partial_\phi^2 \psi - \frac{2\psi}{x+1} \right) \right] = 0. \quad (\text{C.8})$$

Estamos interessados em obter uma equação com apenas uma derivada de segunda ordem em x . No entanto, o operador em x na equação acima nos produzirá um termo de derivada primeira. Dessa forma, é conveniente buscarmos uma mudança de coordenada $\tilde{x}(x)$ que tenha a seguinte propriedade

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{dx}{d\tilde{x}} \partial_x, \quad (\text{C.9})$$

com

$$\frac{dx}{d\tilde{x}} = \frac{x-1}{x+1}, \quad (\text{C.10})$$

o que nos leva à introdução de uma coordenada tartaruga

$$\tilde{x} = x + 2 \ln(x-1). \quad (\text{C.11})$$

Em termos da coordenada tartaruga \tilde{x} , a equação (C.8) pode ser escrita como

$$-\partial_t^2 \psi + \frac{f^4}{g^2} \left[\partial_{\tilde{x}}^2 \psi + \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(\partial_y ((1-y^2) \partial_y \psi) + \frac{g^2}{1-y^2} \partial_\phi^2 \psi - \frac{2\psi}{x+1} \right) \right] = 0. \quad (\text{C.12})$$

Nesse ponto, podemos expandir a solução na base dos harmônicos esféricos

$$\psi(\tilde{x}, y, \phi, t) = \sum_{l,m} u_{lm}(\tilde{x}, t) Y_l^m(y, \phi), \quad (\text{C.13})$$

onde as funções $Y_l^m(y, \phi)$ satisfazem a equação de autovalor dada por

$$\left(\partial_y [(1-y^2) \partial_y] + \frac{1}{1-y^2} \partial_\phi^2 \right) Y_l^m(y, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(y, \phi), \quad (\text{C.14})$$

e possuem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\left\langle Y_l^m, Y_{l'}^{m'} \right\rangle = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_l^m(y, \phi) \bar{Y}_{l'}^{m'}(y, \phi) d\phi dy = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{C.15})$$

A equação (C.12) se torna

$$-\partial_t^2 u_{lm} Y_l^m + \frac{f^4}{g^2} \left[\partial_x^2 u_{lm} Y_l^m + u_{lm} \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(\underbrace{\partial_y [(1-y^2) \partial_y Y_l^m]}_I + \frac{g^2}{1-y^2} \partial_\phi^2 Y_l^m - \frac{2Y_l^m}{x+1} \right) \right] = 0. \quad (\text{C.16})$$

Note que o termo destacado (I) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$I = \partial_y [(1-y^2) \partial_y Y_l^m(y, \phi)] - \frac{g^2 m^2}{1-y^2} Y_l^m(y, \phi),$$

uma vez que

$$Y_l^m(y, \phi) = N e^{im\phi} P_l^m(y),$$

onde $P_l^m(y)$ são os polinômios de legendre associados e N é uma constante de normalização.

Com o auxílio da equação (C.14) podemos reescrever o termo acima como,

$$I = -l(l+1) Y_l^m(y, \phi) - \frac{m^2(g^2-1)}{1-y^2} Y_l^m(y, \phi). \quad (\text{C.17})$$

Dessa forma a equação diferencial (C.16) pode ser colocada na seguinte forma

$$\begin{aligned} & -Y_l^m(y, \phi) \partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \frac{f^4}{g^2} \left[Y_l^m(y, \phi) \partial_{\tilde{x}}^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \right. \\ & \left. - \frac{x-1}{(x+1)^3} \left(U_{eff} + \frac{m^2(g^2-1)}{1-y^2} \right) u_{lm}(\tilde{x}, t) Y_l^m(y, \phi) \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

com

$$U_{eff} = l(l+1) + \frac{2}{x+1}. \quad (\text{C.19})$$

Multiplicando a equação acima por $\bar{Y}_{l'}^{m'}(y, \phi)$, integrando no intervalo $y \in [-1, 1]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ e usando a relação de ortogonalidade (C.15) dos harmônicos esféricos, obtemos

$$\begin{aligned} & -\delta_{mm'} \delta_{ll'} \partial_t^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} Y_{l'}^{m'} \right\rangle \partial_{\tilde{x}}^2 u_{lm}(\tilde{x}, t) + \\ & - \frac{x-1}{(x+1)^3} \left[U_{eff} \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} Y_{l'}^{m'} \right\rangle + \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} \frac{m^2(g^2-1)}{1-y^2} Y_{l'}^{m'} \right\rangle \right] u_{lm}(\tilde{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

É claro que um termo do tipo

$$\left\langle Y_l^m, R(y) Y_{l'}^{m'} \right\rangle,$$

com $R(y)$ uma função apenas da coordenada y , é proporcional a $\delta_{mm'}$. Isso advém da integração na coordenada angular, na situação em que $m \neq m'$, o que a torna nula. Isso pode ser verificado facilmente

$$\begin{aligned} \langle Y_l^m, R(y) Y_{l'}^{m'} \rangle &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} R(y) Y_l^m(y, \phi) \bar{Y}_{l'}^{m'}(y, \phi) d\phi dy, \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} R(y) N_l^m e^{im\phi} P_l^m(y) N_{l'}^{m'} e^{-im'\phi} P_{l'}^{m'}(y) d\phi dy, \\ &= \int_{-1}^1 R(y) N_l^m P_l^m(y) N_{l'}^{m'} P_{l'}^{m'}(y) \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi dy, \\ &= 2\pi \delta_{m,m'} \int_{-1}^1 R(y) N_l^m P_l^m(y) N_{l'}^{m'} P_{l'}^{m'}(y) dy, \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

onde escrevemos os harmônicos esféricos explicitamente em termos dos polinômios associados de Legendre. Graças ao fato mencionado acima, temos a seguinte igualdade

$$\langle Y_l^m, R(y) Y_{l'}^{m'} \rangle = \delta_{m,m'} \langle Y_l^m, R(y) Y_l^m \rangle. \quad (\text{C.22})$$

Podemos tirar vantagem da relação anterior para reescrever a equação (C.20) como

$$-\partial_t^2 u_{l'm'}(\tilde{x}, t) + \sum_l A_l^{l'} \partial_{\tilde{x}}^2 u_{lm'}(\tilde{x}, t) = \sum_l B_{l,m'}^{l'} u_{lm'}(\tilde{x}, t), \quad (\text{C.23})$$

onde as matrizes que acoplam os modos são dadas por

$$A_l^{l'} = \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} Y_{l'}^{m'} \right\rangle, \quad (\text{C.24})$$

$$B_{l,m'}^{l'} = \frac{x-1}{(x+1)^3} \left[U_{eff} A_l^{l'} + m'^2 \left\langle Y_l^m, \frac{f^4}{g^2} \frac{(g^2-1)}{1-y^2} Y_{l'}^{m'} \right\rangle \right]. \quad (\text{C.25})$$

C.3 Solução da Equação da Onda no Espaço-Tempo de Schwarzschild

Nesta seção, vamos obter a equação diferencial (3.24) e sua solução em termos das funções confluentes de Heun. Como Ψ é um campo escalar, ele satisfaz a seguinte equação de onda,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0. \quad (\text{C.26})$$

A representação matricial da métrica de Schwarzschild, em coordenadas prolatas, é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{x-1}{x+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x+1}{x-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(x+1)^2}{1-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+1)^2 (1-y^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.27})$$

É fácil ver que o determinante da métrica é dado simplesmente pelo produto da diagonal, ou seja

$$\sqrt{-g} = (x+1)^2. \quad (\text{C.28})$$

Para calcular explicitamente a equação (C.26), em termos dos elementos da métrica (C.27), vamos separá-la em sua componente espacial e temporal

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\underbrace{\partial_0 (\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \Psi)}_A + \underbrace{\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j \Psi)}_B \right] = 0, \quad (\text{C.29})$$

onde,

$$A = -\frac{(x+1)^3}{x-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (\text{C.30})$$

$$B = \partial_x ((x^2-1) \partial_x \Psi) + \partial_y ((1-y^2) \partial_y \Psi) + \frac{1}{1-y^2} \partial_\phi^2 \Psi. \quad (\text{C.31})$$

Logo, obtemos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{(x+1)^3}{x-1} \partial_t^2 \Psi + \partial_x ((x^2-1) \partial_x \Psi) + \partial_y ((1-y^2) \partial_y \Psi) + \frac{1}{1-y^2} \partial_\phi^2 \Psi = 0. \quad (\text{C.32})$$

Supondo uma solução separável do tipo

$$\Psi(t, x, y, \phi) = \sum_{l,m} \frac{u_{l\omega}(x)}{x+1} Y_l^m(y, \phi) e^{i\omega t}, \quad (\text{C.33})$$

chegamos na seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{(x+1)^3}{x-1} \omega^2 u_{l\omega} Y_l^m + (x+1) Y_l^m \partial_x \left((x^2-1) \partial_x \frac{u_{l\omega}}{x+1} \right) + \\ & + u_{l\omega} \partial_y ((1-y^2) \partial_y Y_l^m) + u_{l\omega} \frac{1}{1-y^2} \partial_\phi^2 Y_l^m = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

ou ainda,

$$\frac{(x+1)^3 \omega^2}{x-1} u_{l\omega} Y_l^m + (x+1) Y_l^m \partial_x \left((x^2-1) \partial_x \frac{u_{l\omega}}{x+1} \right) - l(l+1) Y_l^m u_{l\omega} = 0, \quad (\text{C.35})$$

onde utilizamos a equação de autovalor (C.14) para alcançar a equação acima. Observe que podemos obter uma equação diferencial ordinária para os modos $u_{l\omega}(x)$ se explorarmos as relações de ortogonalidade dos harmônicos esféricos (C.15) já mencionadas

$$\frac{d^2 u_{l\omega}}{dx^2} + \frac{2}{x^2-1} \frac{du_{l\omega}}{dx} - \frac{1}{x-1} \left[\frac{l(l+1)}{x+1} - \frac{(x+1)^2 \omega^2}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right] u_{l\omega} = 0. \quad (\text{C.36})$$

Agora vamos demonstrar que a equação acima pode ser reescrita como uma equação diferencial confluente de Heun. Para isso, vamos considerar a seguinte mudança de variável independente

$$\xi = \frac{-x+1}{2} \implies x = 1 - 2\xi. \quad (\text{C.37})$$

Isso produz a seguinte equação diferencial para a variável ξ .

$$\frac{d^2 u_{l\omega}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi(\xi-1)} \frac{du_{l\omega}}{d\xi} + \frac{1}{\xi} \left[\frac{l(l+1)}{1-\xi} + \frac{4(1-\xi)^2 \omega^2}{\xi} + \frac{1}{(1-\xi)^2} \right] u_{l\omega} = 0. \quad (\text{C.38})$$

Considerando o seguinte Ansatz

$$u_{l\omega}(\xi) = \xi^{2i\omega} e^{-2i\omega\xi} (\xi-1) w_{l\omega}(\xi), \quad (\text{C.39})$$

obtemos a seguinte equação

$$\xi(\xi-1) \frac{d^2 w_{l\omega}}{d\xi^2} + \left[-1 + 2\xi - 4i\omega(\xi-1)^2 \right] \frac{dw_{l\omega}}{d\xi} + [-l(l+1) - 4i\omega(\xi-1)] w_{l\omega} = 0, \quad (\text{C.40})$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 w_{l\omega}}{d\xi^2} + \left(-4i\omega + \frac{1}{\xi-1} + \frac{4i\omega+1}{\xi} \right) \frac{dw_{l\omega}}{d\xi} + \left[\frac{l(l+1)-4i\omega}{\xi} - \frac{l(l+1)}{\xi-1} \right] w_{l\omega} = 0. \quad (\text{C.41})$$

Comparando a equação acima com (3.32), é fácil identificar os parâmetros

$$\begin{aligned} \alpha &= -4i\omega; \\ \beta &= 4i\omega; \\ \gamma &= 0; \\ \mu &= l(l+1) - 4i\omega; \\ \nu &= -l(l+1). \end{aligned}$$

Observe que a solução geral depende dos parâmetros δ e η e estes podem ser calculados utilizando as expressões (3.33) e (3.34).

$$\begin{aligned} l(l+1) - 4i\omega &= \frac{1}{2} (-4i\omega - 4i\omega + 16\omega^2) - \eta, \\ -l(l+1) &= \delta + 8\omega^2 - l(l+1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \eta &= 8\omega^2 - l(l+1), \\ \delta &= -8\omega^2. \end{aligned}$$

Assim, a solução da equação (C.36) é

$$\begin{aligned} u_{l\omega}(\xi) &= C_1 \xi^{2i\omega} e^{-2i\omega\xi} (\xi-1) \text{HeunC}(-4i\omega, 4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \xi) + \\ &+ C_2 \xi^{-2i\omega} e^{-2i\omega\xi} (\xi-1) \text{HeunC}(-4i\omega, -4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); \xi). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

ou ainda, em termos da coordenada x ,

$$\begin{aligned} u_{l\omega}(x) = & C_1(x-1)^{2i\omega} e^{i\omega x} (x+1) \text{HeunC}(-4i\omega, 4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); (1-x)/2) + \\ & + C_2(x-1)^{-2i\omega} e^{i\omega x} (x+1) \text{HeunC}(-4i\omega, -4i\omega, 0, -8\omega^2, 8\omega^2 - l(l+1); (1-x)/2). \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

C.4 Análise do comportamento das funções $U_\infty^{(\pm)}$

Nesta seção vamos investigar o comportamento das soluções, $U_\infty^{(\pm)}(x)$, quando $x \rightarrow \infty$. O primeiro ponto a se observar é que as soluções, $U_X^{(\pm)}(x)$, com $X = 1$ ou ∞ , são funções de variáveis complexas. Isso, a primeira vista, pode parecer estranho uma vez que a interpretação física da coordenada, x , parece ser imediatamente relacionada com uma distância física. Todavia, isso não é verdade. O que de fato é diretamente relacionado com a coordenada radial é $|x|$. Além disso, devemos considerar todos os parâmetros das funções (3.35) como sendo, em geral, números complexos. Por conta disso, o limite, $x \rightarrow \infty$, depende de uma direção específica no plano complexo e devemos escolhê-la convenientemente para representar situações físicas desejadas.

Considere agora o comportamento assintótico da solução

$$\begin{aligned} U_\infty(x) \sim & (x-1)^{2i\omega} (x+1) e^{i\omega x} H_\infty^{(+)}(x) + (x-1)^{-2i\omega} (x+1) e^{i\omega x} H_\infty^{(-)}(x) \\ \equiv & U_\infty^{(+)}(x) + U_\infty^{(-)}(x). \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Observe que para a solução $U_\infty^{(+)}(x)$, temos

$$\begin{aligned} U_\infty^{(+)}(x) \sim & (x-1)^{2i\omega} (x+1) e^{i\omega x} \frac{e^{-4i\omega(\frac{x}{2} + \ln(\frac{x}{2}))}}{x} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_\nu^+}{x^\nu}, \\ U_\infty^{(+)}(x) \sim & x^{2i\omega} e^{i\omega x} e^{-2i\omega x} e^{-4i\omega \ln x} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_\nu^+}{x^\nu}, \\ U_\infty^{(+)}(x) \sim & e^{i\omega x} e^{-2i\omega x} e^{-2i\omega \ln x} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_\nu^+}{x^\nu}, \\ U_\infty^{(+)}(x) \sim & e^{-i\omega x} e^{-2i\omega \ln x} \sum_{\nu \geq 0} \frac{a_\nu^+}{x^\nu}, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Vale a pena mencionar que o argumento original das funções $H_\infty^{(\pm)}$ é $\xi = (1-x)/2$. Lembre-se ainda que o limite assintótico é considerado quando $|\xi|$ se aproxima de infinito. Esse fato foi usado nos cálculos acima.

Da mesma maneira, analisando a solução, $U_{\infty}^{(-)}(x)$, percebemos que

$$\begin{aligned} U_{\infty}^{(-)}(x) &\sim (x-1)^{-2i\omega}(x+1)e^{i\omega x}\frac{1}{1-x}\sum_{\nu \geq 0}\frac{a_{\nu}^{-}}{x^{\nu}}, \\ U_{\infty}^{(-)}(x) &\sim e^{-2i\omega \ln x}e^{i\omega x}\sum_{\nu \geq 0}\frac{a_{\nu}^{-}}{x^{\nu}}. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

De maneira geral, podemos escrever o comportamento assintótico da solução, $U_{\infty}^{(\pm)}(x)$, como

$$U_{\infty}^{(\pm)}(x) \sim e^{\mp i\omega x - 2i\omega \ln x}\sum_{\nu \geq 0}\frac{a_{\nu}^{+}}{x^{\nu}}. \quad (\text{C.48})$$

Perceba que, no limite $|x| \rightarrow \infty$, apenas a exponencial é, de fato, relevante. Como ω e x são variáveis complexas, podemos escrevê-las como

$$\begin{aligned} x &= |x|e^{i\arg x}, \\ \omega &= |\omega|e^{i\arg \omega}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever a exponencial como,

$$\begin{aligned} e^{\mp i\omega x - 2i\omega \ln x} &= e^{\mp i|x||\omega|e^{i(\arg x + \arg \omega)}}e^{\pm 2i|\omega|e^{i\arg \omega \ln x}}, \\ &= e^{\mp i|x||\omega|[\cos(\arg x + \arg \omega) + i \sin(\arg x + \arg \omega)]}e^{\pm 2i|\omega|e^{i\arg \omega \ln x}}. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(|x|e^{i\arg x}) = \ln|x| + \ln(e^{i\arg x}), \\ &= \ln|x| + i\arg x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{\mp i\omega x - 2i\omega \ln x} &= e^{\mp i|x||\omega|[\cos(\arg x + \arg \omega) + i \sin(\arg x + \arg \omega)]}e^{\pm 2i|\omega|[\cos(\arg \omega) + i \sin(\arg \omega)](\ln|x| + i\arg x)}, \\ &= e^{\mp i|x||\omega|\cos(\arg x + \arg \omega) - |x||\omega|\sin(\arg x + \arg \omega)}\underbrace{e^{\pm [2i|\omega|\cos(\arg \omega) - 2|\omega|\sin(\arg \omega)](\ln|x| + i\arg x)}}_I. \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Desenvolvendo o termo I ,

$$I = e^{\pm [2i|\omega|\cos(\arg \omega)\ln|x| - 2|\omega|\cos(\arg \omega)\arg x - 2|\omega|\sin(\arg \omega)\ln|x| - 2i|\omega|\sin(\arg \omega)\arg x]}. \quad (\text{C.51})$$

Separando a exponencial em sua parte real e imaginária, temos

$$\begin{aligned} e^{\mp i\omega x - 2i\omega \ln x} &= e^{i[\alpha \mp |x||\omega|\cos(\arg x + \arg \omega)]}e^{\pm [|x||\omega|\sin(\arg x + \arg \omega) - 2|\omega|\cos(\arg \omega)\arg x - 2|\omega|\sin(\arg \omega)\ln|x|]}, \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

onde,

$$\alpha \equiv 2|\omega| \cos(\arg \omega) \ln|x| \mp 2|\omega| \sin(\arg \omega) \arg x. \quad (\text{C.53})$$

Assim,

$$\left| U_{\infty}^{(\pm)}(x) \right| \sim e^{\pm[|x||\omega| \sin(\arg x + \arg \omega) - 2|\omega| \sin(\arg \omega) \ln|x|]}. \quad (\text{C.54})$$

Observe que o limite $|x| \rightarrow \infty$ é dominado pelo termo linear em $|x|$, uma vez que

$$|x| > \ln|x|.$$

Assim, é fácil notar que o limite depende explicitamente da soma dos argumentos

$$\arg x + \arg \omega.$$

Assim, temos o seguinte comportamento para as funções $U_{\infty}^{(\pm)}(x)$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| U_{\infty}^{(+)}(x) \right| = \begin{cases} \infty, & \text{se } \arg x + \arg \omega \in (0, \pi); \\ 0, & \text{se } \arg x + \arg \omega \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (\text{C.55})$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| U_{\infty}^{(-)}(x) \right| = \begin{cases} 0, & \text{se } \arg x + \arg \omega \in (0, \pi); \\ \infty, & \text{se } \arg x + \arg \omega \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (\text{C.56})$$