

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Observações na linha de 21cm do
hidrogênio:
Um ajuste fenomenológico para extração
das oscilações acústicas de bárions do
espectro de potência angular**

Alessandro Ribeiro Marins

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre(a) em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Élcio Abdalla - Orientador (IF-USP)

Prof. Dr. Miguel Boavista Quartin (UFRJ)

Prof. Dr. André Gustavo Scagliusi Landulfo (UFABC)

São Paulo
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marins, Alessandro Ribeiro

Observações na linha de 21cm do hidrogênio: um ajuste fenomenológico para extração das oscilações acústicas de bárions do espectro de potência angular. São Paulo, 2018.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla.
Área de Concentração: Física.

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Energia escura; 3. Estrutura do universo; 4. Linha 21cm do hidrogênio.

USP/IF/SBI-085/2018

**University of São Paulo
Physics Institute**

**Observations in the 21cm line of
hydrogen:
A phenomenological fit to extract the
baryon acoustic oscillations from the
angular power spectrum**

Alessandro Ribeiro Marins

Advisor: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the re-
quirements for the degree of Master of Science.

Examining Commission:

Prof. Dr. Élcio Abdalla - Orientador (IF-USP)

Prof. Dr. Miguel Boavista Quartin (UFRJ)

Prof. Dr. André Gustavo Scagliusi Landulfo (UFABC)

São Paulo
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao professor Élcio Abdalla pelos conselhos e sermões, sempre objetivando o aprendizado consistente e a melhora na qualidade do trabalho.

Agradeço ao André Costa, amigo e colega de grupo que ajudou-me profundamente no desenvolvimento deste trabalho, não me deixando perder o foco e sempre debatendo a realidade das análises. Ao Lucas Olivari pelas dicas e conselhos para construção do ajuste. Ao professor Raul Abramo pelos ensinamentos sobre cosmologia e por apresentar-me à cosmologia em um curso de graduação que me fez ficar excitado com todos os mágicos enigmas desta área, assim como os cursos de pós-graduação que forneceram-me aparatos teóricos e computacionais para conseguir entender a cosmologia e saber tratá-la de modo profissional.

Agradeço aos meus pais José Antônio e Angela pela paciência e carinho que sempre tiveram comigo, apoiando-me em todos os momentos difíceis. Agradeço às minhas filhas Laura e Valentina, que mesmo sem terem noção da importância delas para mim e para desenvolvimento deste trabalho, fazem com que eu levante e batalhe todos os dias motivado. Fazem com que eu sorria no desespero, e gargalhe na alegria. Fazem com que eu sempre esteja pronto a uma possível queda, contudo, mais pronto e forte para não me deixar cair. Ao meu irmão José Thiago, pelo carinho em todos os momento da minha vida, demonstrando-me quão bom é fazer o bem para os outros, quão bem fazemos quando queremos os outros bem. Agradeço a minha namorada Edilaine, pela paciência e entendimento nos diversos momentos em que precisei ficar longe em prol da dedicação deste estudo, sempre me apoiando e não me deixando abater pelas dificuldades.

Agradeço aos meus não grandes, mas sim gigantes amigos: Bruno Hideki, Paulo Macedo, Alex Sandro, Gabriel Moraes, Vitor Marcon, Eduardo Priuli, Arthur Pacheco, Natália Saydel e Bianca Cadete pelos debates sobre a vida, pelos momentos de compaheirismo, pelas conversas e conselhos, pelo amor e carinho que sempre tiveram comigo.

Um agradecimento especial àquela que me apresentou este incrível mundo da Física, Maria Dolores, professora do ensino médio que era mãe e professora, mandava-me ficar quieto quando eu, aluno impaciente e bagunceiro, queria responder todas suas perguntas sobre a disciplina, e me abraçava fortemente em seu acolhedor amor em forma de abraço. Esta que me intimou a cursar Física, levando-me a decidir por aquela que fora uma das mais acertadas decisões de minha vida. Sem dúvida, além de agradecimento, fica à ela dedicado este trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer à CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, procurei construir um ajuste fenomenológico que descrevesse o comportamento das oscilações acústicas de bárions (BAO) no espectro de potência da temperatura de brilho da linha de 21cm do átomo de hidrogênio neutro, na aproximação de Limber.

O ajuste obtido demonstrou ser capaz de descrever o comportamento oscilatório do BAO nas faixas de redshift analisados, que foram de 0.127 à 0.479. Quando combinado com dados de supernova, restrições nos parâmetros cosmológicos tiveram resultados mais precisos. Contudo, restrições incluindo a medida do valor local da constante de Hubble piora os dados, devido a grandes divergências nos valores da constante de Hubble.

Palavras-chave: 21 cm, BAO, espectro de potência angular, aproximação de Limber, ajuste fenomenológico.

Abstract

In this work, I searched for a phenomenological fit that describes the behavior of the baryon acoustic oscillation (BAO) in the angular power spectrum of brightness temperature of the 21cm line from the neutral hydrogen atom, under Limber's approximation.

The fit obtained has shown to be capable of describe the oscillatory behaviour of the BAO in the redshift bands analyzed, that lies in the range from 0.127 to 0.479. When combined with supernova data, the constraints in the cosmological parameters produced more precise results. However, constraints including measuring the local value of the Hubble constant worsen the data, due to great divergences in the values of the Hubble constant.

Keyword: 21 cm, BAO, angular power spectrum, Limber's approximation, phenomenological fit.

Lista de abreviaturas e siglas

BAO	<i>Baryon Acoustic Oscillations</i>
BE	Bose-Einstein
BINGO	<i>Baryon Acoustic Oscillations In Neutral Gas Observations</i>
BOSS	<i>Baryon Oscillation Spectroscopic Survey</i>
CAMB	<i>Code for Anisotropies in the Microwave Background</i>
CDM	<i>Cold Dark Matter</i>
CLASS	<i>Cosmic Linear Anisotropy Solving System</i>
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i>
DE	<i>Dark Energy</i>
DM	<i>Dark Matter</i>
EoR	<i>Epoch of Reionisation</i>
FD	Fermi-Dirac
FLRW	Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
GR	<i>General Relativity</i>
IGM	<i>Intergalactic Medium</i>
IM	<i>Intensity Mapping</i>
ISW	<i>Integrated Sachs-Wolfe</i>
JLA	<i>Joint Light-curve Analysis</i>
HDM	<i>Hot Dark Matter</i>
HST	<i>Hubble Space Telescope</i>
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i>
RSD	<i>Redshift Space Distortion</i>
SDSS	<i>Sloan Digital Sky Survey</i>
SNIa	Supernovas de Tipo Ia

SW	<i>Sachs-Wolfe</i>
TQC	Teoria Quântica de Campos
WDM	<i>Warm Dark Matter</i>
Λ CDM	<i>Lambda Cold Dark Matter</i>

Lista de símbolos

a	Fator de escala
c	Velocidade da luz
C_ℓ	Espectro de potência angular
χ	Distância comóvel
D_L	Distância luminosidade
D_A	Distância diâmetro angular
D_H	Distância de Hubble
D_V	Distância esfericamente média
E	Função de Hubble normalizada
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
G	Constante gravitacional de Newton
$\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$	Símbolo de Christoffel
h	Constante de Planck
\hbar	$h/2\pi$
H_0	Constante de Hubble
H	Função de Hubble
k	Constante de curvatura
k_B	Constante de Boltzmann
Λ	Constante cosmológica
m_{Pl}	Massa de Planck
Ω	Parâmetro de densidade
P_{2D}	Espectro de potência bidimensional
P_{3D}	Espectro de potência tridimensional

ρ	Densidade de energia
r_s	Horizonte sonoro na <i>drag epoch</i>
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
w	Equação de estado
w_{eff}	Equação de estado efetiva
z	Redshift
z_{coinc}	Redshift no período em que a densidade de energia da matéria e da constante cosmológica são iguais
z_{dec}	Redshift no período em que os bárions desacoplam dos fótons
z_{drag}	Redshift na <i>drag epoch</i>
z_{eq}	Redshift no período em que densidade de energia da matéria e da radiação são iguais
z_{reio}	Redshift no período em que ocorre a reionização do hidrogênio

Lista de tabelas

Tabela 1 – Principais limites das quantidades termodinâmicas n , ρ e P para partículas descritas por BE e FD. Adaptado de [41].	54
Tabela 2 – Resumo dos momentos envolvidos nas interações para a equação de Boltzmann para os bárions. O "linha" sobre a letra sempre irá se referir ao momento após a interação.	66
Tabela 3 – Cosmologia assumida para gerar os dados teóricos, $C_\ell/C_{\ell,s}$	99
Tabela 4 – Resultados da análise de Monte Carlo para modelo cosmológico w CDM, com resultados do ajuste segundo o cenário do BINGO, JLA e HST. Os dados estão expostos com o valor médio e erros de um sigma.	113
Tabela 5 – Resultados da análise de Monte Carlo para JLA, combinado com informações da constante de Hubble, HST, ele com o com informações do BAO através do ajuste, ele combinado com HST, ele combinado com o ajuste (BINGO) e todas informações juntas. Os dados estão expostos com o valor médio e erros de um sigma.	115

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de Hubble. Fonte: [28].	28
Figura 2 – Evolução da radiação, matéria e da energia escura em relação ao redshift. Os valores para a energia escuras são de $w_{eff} = -1.0 \pm 0.2$. Fonte: [21].	43
Figura 3 – Diagrama de Hubble para compilação do Union2.1. A linha sólida representa o bestfit cosmológico para o modelo Λ CDM. Fonte: [52].	47
Figura 4 – Diagrama de Hubble para o <i>Pantheon sample</i> . A figura superior é a μ para cada SNIA em relação ao redshift em que esta se encontra. A figura inferior é o resíduo em relação ao valor obtido pelo bestfit Λ CDM. Fonte: [48].	47
Figura 5 – Representação da relação entre o tamanho comóvel angular e o tamanho comóvel radial. Fonte: [6].	50
Figura 6 – Distribuição de mais de 200 mil galáxias das cerca de 350 mil medidas pelo 2dF Galaxy Redshift Survey.	57
Figura 7 – Restrições de valores para a matéria e para o valor da equação de estado da DE combinando informações diferentes. Fonte: [52]	72
Figura 8 – Função de correlação para 46748 galáxias vermelhas luminosas medidas pelo SDSS, cobrindo uma região de $0.72 h^{-3}$ Gpc ³ sobre $3816 deg^2$, entre os redshifts de 0.16 e 0.47.	79
Figura 9 – Comparação entre os espectros de potência da matéria gerado segundo a resolução analítica (equações de Boltzmann), feita pelo código CAMB, e o espectro construído por um ajuste fenomenológico do trabalho do Daniel Eisenstein & Wayne Hu. $A \approx 4.38 \times 10^6$ e $z = 0$. Os dados utilizados nos parâmetros cosmológicos são os fornecido por [1].	86
Figura 10 – Os espectros em azul, amarelo e verde são os fornecidos em [18], sendo o primeiro a descrição do espectro de potência da matéria, o segundo a mesma descrição exceto por não conter as informações das oscilações e o terceiro o espectro de potência sem bárions. Em vermelho está a descrição do ajuste BBKS, que era bastante utilizado antes do ajuste do Eisenstein& Hu. $A \approx 3.13 \times 10^6$ e $z = 0$. Os dados utilizados nos parâmetros cosmológicos são os fornecido por [1].	86
Figura 11 – Representação relacionando três períodos cosmológicos, suas faixas de redshift e as faixas de frequência da linha de 21cm correspondente. Fonte: [57].	88
Figura 12 – Medidas da fração de densidade de HI como função do redshift. O linha continua preta segue um modelo de lei de potência. Fonte: [46].	90

Figura 13 – Tanto a representação superior quanto a inferior são provenientes da divisão entre os espectros gerados pela figura 10. A superiro demonstra um maior intervalo ressaltando que a região de interesse é de fato a da representação inferior.	97
Figura 14 – Espectros de potência angulares obtidos com redshift inicial de 0.127 acrescidos de diferentes bins Δz , com tamanhos de bin variando de 0.001 à 0.35.	98
Figura 15 – Espectro produzido dentro da faixa de redshift de 0.127 e 0.145. Os erros são devidos somente a variância cósmica.	100
Figura 16 – $D_\ell = \ell(\ell+1)C_\ell/2\pi$. Os gráficos foram gerados com os parâmetros cosmológicos fornecidos em [1] e dispostos na tabela 3, e corresponde ao primeiro bin, Δz_1 , que vai do redshift 0.127 ao 0.145. O gráfico em azul representa o espectro de potência angular de 21cm utilizando o ajuste de [18] para espectro total da matéria, e o laranja para o espectro sem o BAO.	106
Figura 17 – No gráfico superior, as curvas continuas são as fornecidas pela teoria e a tracejada o ajuste. As curvas azul, laranja e verde são referentes ao primeiro, segundo e terceiro bin, respectivamente. O ajuste foi obtido com: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$. O gráfico inferior possui as curvas continuas azul e laranja, representando a teoria para o nono e décimo bin, respectivamente, e a curva tracejada o ajuste com os parâmetros: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$	107
Figura 18 – As curvas azul e laranja e verde são referentes ao nono e décimo bin fornecido pela teoria, respectivamente. O ajuste foi obtido com: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0413$. O gráfico inferior possui as mesmas curvas continuas dadas no gráfico superior e a curva tracejada o ajuste com os parâmetros: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$	108
Figura 19 – Em preto tracejado estão os resultados dos ajustes com os valores esperados fornecidos pelos MCMCs. Em colorido os valores teóricos com suas respectivas barras de erro, resultado da variância cósmica vezes um fator, p. ex. no primeiro gráfico o fator é de 0.3 de $\delta(C_\ell/C_{\ell,s})$, representado simplesmente por δC_ℓ , isto é, 30% do valor da variância cósmica.	109
Figura 20 – Em preto tracejado estão os resultados dos ajustes com os valores esperados fornecidos pelos MCMCs. Em colorido os valores teóricos com suas respectivas barras de erro, resultado da variância cósmica vezes um fator, p. ex. no quarto gráfico o fator é de 1.5 de $\delta(C_\ell/C_{\ell,s})$, representado simplesmente por δC_ℓ , isto é, 150% do valor da variância cósmica.	110

Figura 21 – Resultados dos valores obtidos para α_{\perp} em cada bin, marginalizado em relação aos dois outros parâmetros. O redshift correspondente a cada valor é o redshift que é o limite superior do dado bin.	111
Figura 22 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo para modelo cosmológico w CDM, com resultados do ajuste segundo o cenário do BINGO e JLA.	112
Figura 23 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo combinando informações de JLA com HST, e com HST mais BINGO.	114
Figura 24 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo combinando informações de JLA com BINGO, e com HST mais BINGO.	116
Figura 25 – Bins: 1, 2, 3 e 4. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.	145
Figura 26 – Bins: 5, 6, 7 e 8. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.	146
Figura 27 – Bins: 9, 10, 11 e 12. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.	147
Figura 28 – Bins: 13, 14 e 15. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.	148

Sumário

Lista de tabelas	11
Lista de ilustrações	13
Sumário	17
Introdução	21
1 BACKGROUND	23
1.1 Fatiamento do espaço-tempo	23
1.2 Métrica FLRW	24
1.3 Tempo conforme	26
1.4 Tempo e distância própria	26
1.5 Função de Hubble e a expansão do Universo	27
1.6 Horizonte de partículas e horizonte de eventos	29
1.7 Redshift	29
1.7.1 Dilatação do tempo cosmológico	31
1.7.2 Velocidade peculiar e dispersão de velocidade peculiar	31
1.8 Equações de Friedmann	32
1.9 Fluido cosmológico e seus múltiplos componentes	37
1.10 O Universo de Einstein e a energia escura	39
1.10.1 O Problema do Ajuste Fino	41
1.10.2 O Problema da Coincidência	42
1.11 Distâncias em um Universo dinâmico	43
1.11.1 Distância comóvel	43
1.11.2 Distância luminosidade	44
1.11.3 Distância diâmetro angular	48
1.11.4 Distância de Hubble e distância esfericamente média	49
1.12 Matéria escura e o modelo ΛCDM	50
1.12.1 Partículas em equilíbrio termodinâmico	51
2 PERTURBAÇÕES	57
2.1 Quadrimomento em um Universo perturbado	59
2.2 Equações de Boltzmann	60
2.3 Condições iniciais para as equações de Boltzmann-Einstein	68
2.4 Oscilações acústicas de bárions	70

3	ESPECTROS DE POTÊNCIA	77
3.1	Cosmologia e Estatística	77
3.2	Função de correlação	78
3.3	Espectro de potência 3D	79
3.3.1	Espectro de potência linear da perturbação de densidade da matéria	82
3.3.2	Função de transferência	82
3.3.3	Função de crescimento	83
3.3.4	Espectro de potência linear da matéria	84
4	A LINHA DE 21CM E A COSMOLOGIA	87
4.1	Emissão da linha de 21cm	87
4.2	Observações da linha de 21cm no Universo e a temperatura de 21cm	87
4.3	Temperatura de brilho da linha de 21cm	89
4.4	Espectro de potência angular da linha de 21cm	90
5	ESTUDO FENOMENOLÓGICO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA ANGULAR	95
5.1	Motivação	95
5.2	Primeiras percepções e entendimentos para a construção de um ajuste	97
5.3	Teoria	100
5.4	O ajuste	105
5.5	Teste	108
5.6	Análises	110
6	CONCLUSÃO	117

APÊNDICE A – RELATIVIDADE GERAL SEGUNDO A MÉTRICA FLRW 119

APÊNDICE B – CONSERVAÇÃO DO TENSOR DE EINSTEIN . . 121

APÊNDICE C – TEORIA DE GAUGE EM COSMOLOGIA E O GAUGE NEWTONIANO 123

C.1	Transformações de gauge e a escolha do gauge	125
C.1.1	Transformações entre gauges	125
C.1.2	Transformações de campos entre gauges	126
C.1.3	Transformação do tensor métrico	130
C.2	Decomposição do tensor em partes escalar, vetorial e tensorial	132
C.3	Perturbações escalares	135
C.4	Gauge Newtoniano	136

C.5	Relatividade Geral no gauge Newtoniano	137
	APÊNDICE D – EQUAÇÕES DE EINSTEIN NO GAUGE NEWTONIANO	139
	ANEXO A – RESULTADOS DOS MCMC	145
	REFERÊNCIAS	149
	Índice	155

Introdução

A cosmologia moderna se inicia após o desenvolvimento da Relatividade Geral (GR), que fornece as ferramentas necessárias para o estudo desta, assim como do avanço das observações do Universo, expandindo nosso campo de visão e nosso conhecimento sobre o mesmo. É a área que busca entender o Universo como um todo: suas dimensões, sua composição, sua história passada e sua história futura. Era de se esperar que devido ao limitado conhecimento do Universo no período do desenvolvimento da GR, restrito à Via-Láctea, modelos que tentassem o descrever fossem modelos com o máximo de simetrias possíveis. Um espaço-tempo *maximamente simétrico* [56] é necessariamente um espaço-tempo homogêneo e isotrópico (princípio cosmológico), e tal caso é uma solução das equações de Einstein.

O princípio cosmológico aparenta ser somente válido quando observamos distâncias superiores a ~ 300 milhões de anos-luz, i.e., o Universo visto em todas as direções a distâncias superiores a esta aparenta não possui nem direção nem posição preferencial. Um segundo ponto que reforça o princípio cosmológico é o de que dificilmente somente nós, terrestres, conseguimos ver o Universo igual em todas as direções a partir de uma certa escala. A posição privilegiada da Terra diante dos outros astros vem sendo historicamente desconstruída, com o desenvolvimento das observações e do nosso conhecimento sobre o Universo, e é cada vez mais difícil crer que temos uma posição privilegiada. Logo, a homogeneidade é um pilar da cosmologia, junto à isotropia.

Contudo, observamos também estruturas no Universo que são distribuídas de forma que não refletem qualquer anisotropia ou homogeneidade. Para além disso, uma descrição da formação de tais estruturas, como galáxias e aglomerados de galáxias, certamente necessita que matéria se aglomere, ao menos na Relatividade Geral, por atração gravitacional, e portanto uma característica nem isotrópica, tão pouco homogênea. Além da característica anisotrópicas observadas na temperatura da radiação cósmica de fundo (CMB), radiação proveniente de um período remoto no Universo.

O estudo da história do Universo tem boas descrições teóricos, desafiadores problemas a serem resolvidos e uma vasta possibilidade exploratória, que só tem crescido nos últimos tempos. A exploração das características das inhomogeneidades da matéria e anisotropia da radiação frente os modelos teóricos têm sido o principal meio de estudo cosmológico, já que a descrição dos modelos deve ser muito bem "amarrada" e necessita de descrições precisas a serem confrontadas com os dados. Estudos de estágio final de estrelas, tais como supernovas, do valor atual da taxa da expansão do Universo, das características da CMB têm sido cada vez mais precisos e indicam um Universo com duas não familiares componentes, ambas "escuras": matéria escura e energia escura. O termo escuro serve para

demonstrar que estas são somente inferidas por meios indiretos. Conhecemos muito mais como estas componentes se comportam do que propriamente o que elas são. A matéria escura seria uma quantidade de matéria necessária para a composição e formação das grandes estruturas no Universo. A energia escura, alguma componente que está causando uma expansão acelerada do Universo. Dados recentes convergem precisamente em provar da matéria escura ser do tipo "fria", ou seja, somente interage com outras partículas que conhecemos por atração gravitacional, e a energia escura é uma constante, interpretada pela teoria quântica de campos como sendo uma energia de vácuo. Porém, há problemas quanto à descrição física e cosmológica do que devia ser esta constante, demonstrando que ainda precisamos de mais informações para entendermos o que de fato está ocorrendo.

Em favor de um melhor conhecimento do que vem a ser esta tal energia misteriosa que está afastando as estruturas no Universo, um novo tipo de informação tem ganhado cada vez mais espaço e se demonstrado uma fonte valiosa de informação, conhecido como BAO, um pico de sobredensidade na distribuição de galáxias, aglomerados, quasares e supernovas, predito teoricamente na distribuição de matéria pela descrição de um período jovem do Universo, anterior ao período da CMB, em que a matéria ordinária e a radiação formavam um plasma, e devido à competição entre a ação gravitacional da matéria e a pressão da radiação, criam-se ondas sonoras que se propagam neste fluido, e tais ondas, aproximadamente no momento em que radiação e matéria deixam de interagir, e a radiação se torna a CMB, progando-se livremente, esta onda sonora é congelada com o comprimento de onda deste período e o seu efeito na distribuição da matéria também. Este pico na distribuição da matéria observada gera oscilações na distribuição da matéria no espaço recíproco e são chamadas de **oscilações acústicas de bárions**, representada pela sigla BAO, que em inglês é *baryon acoustic oscillations*.

Uma outra fonte de observação do BAO pode ser obtida observando átomos de hidrogênio neutro (HI), o elemento mais simples de se formar e mais abundante no Universo, através da radiação característica que eles emitem extremamente estudada e bem medida conhecida como linha de **21cm**, pois o comprimento de onda desta linha possui 21 cm.

O objetivo deste trabalho é tentar descrever o comportamento do BAO isoladamente através da observação da linha de 21cm do HI por um ajuste fenomenológico simples porém que explore tanto a eficiência computacional (para fins de simulação) quanto diversas propriedades físicas, e possivelmente, utilizá-la como teste de modelos cosmológicos.

1 Background

Neste capítulo buscaremos fazer uma breve descrição da cosmologia, sempre visando descrever as ferramentas e definições importantes para o entendimento do trabalho. Estarei assumindo que o leitor já tenha um conhecimento prévio da teoria da Relatividade Geral. Para um bom entendimento desta, há diversos livros ([17],[26],[56]). Estarei ainda supondo que a velocidade da luz seja unitária, $c = 1$, citando, sempre que achar conveniente, quando ela aparece em alguma expressão. Além desta, assumirei também que a constante de Boltzmann é unitária, $k_B = 1$.

1.1 Fatiamento do espaço-tempo

A forma que definiremos o parâmetro tempo será através de um "fatiamento" do espaço-tempo, descrito por um espaço (variedade \mathcal{M}) $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_t$, no qual \mathbb{R} é a direção do tempo e \mathbb{S}_t é o espaço (hipersuperfície tipo espaço) a tempo fixo. Com tal fatiamento, ao invés de falarmos no parâmetro tempo, descreveremos o espaço-tempo como uma série de (hiper)superfícies sobrepostas, com cada superfície associada a um certo tempo. O parâmetro tempo que define cada superfície do tipo espaço pode ser tomado como sendo o tempo próprio da linha de mundo de algum observador fundamental¹. Consequentemente, associado a tal linha de mundo temos as coordenadas espaciais x^i , conhecidas como coordenadas comóveis.

Sendo o espaço-tempo homogêneo e isotrópico em relação a parte espacial, podemos escrever o elemento de linha que descreve tal espaço-tempo como sendo [56],

$$ds^2 = -(cdt)^2 + g_{ij}(x^\mu) dx^i dx^j \equiv -dt^2 + a(t)^2 \tilde{g}_{ij}(x^i) dx^i dx^j. \quad (1.1)$$

Os índices latinos indo de 1 a 3, e os gregos de 0 a 3. O termo $a(t)$, conhecido como *fator de escala*, contém a informação da expansão (ou contração) do Universo^{2,3}. O tensor métrica g no espaço-tempo assume a forma

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{bmatrix}.$$

¹ Definimos um observador fundamental, como sendo aquele que não possui movimento relativo ao *fluido cosmológico* global associado com o movimento borrado de todas as galáxias e matérias no Universo. Um observador fundamental, p. ex., não pode medir nenhum momento dipolar na CMB, somente um observador com velocidade peculiar não-nula poderá medir tal dipolo, como um resultado do efeito Doppler.

² Sempre que me referir a Universo, estou dizendo da parte espacial do espaço-tempo, i.e., usarei os termos "espaço" e "Universo" como sinônimos.

³ Como pode ser visto em [42] e em [39] a cosmologia é uma teoria estocástica, quando uso o nome próprio "Universo", faço considerando a realização em que vivemos.

No caso de $g_{ij} = \delta_{ij}$, a métrica acima é a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, descrevendo um espaço-tempo plano e estático. Sendo as coordenadas espaciais constantes na linha de mundo de um observador fundamental, a métrica ao longo de $x^\mu(\tau)$, linha de mundo parametrizada em relação ao tempo próprio τ , é dada por,

$$-d\tau^2 \doteq ds^2 = -dt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \tau,$$

Isto é, a coordenada temporal de um observador fundamental é justamente o tempo próprio. Com isto, a sua quadrivelocidade, u^μ , fica,

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, 0, 0, 0 \right) = c(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) \\ u_\nu &= g_{\nu\mu} u^\mu = (-1, 0, 0, 0), \end{aligned} \tag{1.2}$$

que como facilmente podemos provar, é ortogonal a toda superfície tipo espaço \mathbb{S}_t . Partindo desta expressão, podemos definir o 4-momento de uma partícula (massiva ou não), segundo coordenadas parametrizadas com um certo λ , $x^\mu(\lambda)$, como sendo,

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \tag{1.3}$$

Vide que para partículas massivas $\lambda = \tau/m$.

1.2 Métrica FLRW

Como comentei anteriormente, o princípio cosmológico pode ser descrito por um espaço-tempo maximamente simétrico na parte espacial (a tempo constante), além disto, um espaço maximamente simétrico pode ser completamente caracterizado por um único número, que é completamente constante: curvatura escalar, K . Uma vez que um número arbitrário pode ser positivo, negativo ou nulo, há três tipos possíveis de espaço, no caso aqui tratado, há três possíveis formas assumidas pela (hiper)superfície tipo espaço.

Busquemos descrever espaços tridimensionais homogêneos e isotrópicos, então, por hora, esqueçamos da contribuição temporal.

A geometria do espaço estudado está codificada no tensor métrico $\tilde{g}_{ij}(x^k)$, ou, de maneira equivalente, no elemento de linha a este associado, $dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j$, então esperamos que seja sua forma que determine tais possibilidades. Um espaço homogêneo e isotrópico trivial é o Euclidiano, curvatura nula, que possui $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij}$, i.e.,

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx_j dx^j = d\mathbf{x}^2,$$

que claramente é uma quantidade invariante por transformações do tipo translação e rotação. Ainda há duas outras possibilidades simples que são a superfície esférica ($K > 0$)

e a pseudoesférica (ou hiperesférica) ($K < 0$), que são espaços trimensionais imersos em um espaço euclidiano quadrimensinal, descritos por,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 \pm dz^2, \quad z^2 \pm \mathbf{x}^2 = a^2,$$

para a^2 alguma constante positiva. O caso (+) é a descrição esférica e o (-), pseudoesférica. Reescalonando a coordenada \mathbf{x} pelo mesmo escalar, $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$, tomindo a diferencial da parametrização e a substituindo na expressão do elemento de linha, obtemos,

$$dl^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right] \equiv a^2 \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right], \quad (1.4)$$

com a constante K , que é a quantidade inicialmente citada como descrevendo uma superfície homogênea e isotrópica, assumindo um dado valor para cada possível superfície.

$$K = \begin{cases} +1, & \text{se esfera,} \\ 0, & \text{se plano,} \\ -1, & \text{se pseudoesfera.} \end{cases}$$

É possível generalizar isto para o caso de um espaço homogêneo e isotrópico de N -dimensões [56], demonstrar que a forma assumida é exatamente a equação 1.4, e provar que estas três soluções, três superfícies, são as únicas possíveis. Com este resultado, voltamos ao caso quadrimensinal, e obtemos a forma geral da métrica de um espaço homogêneo e isotrópico,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right], \quad (1.5)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \left[\delta_{ij} dx^i dx^j + K \frac{(x_i dx^i)(x_j dx^j)}{1 - K\mathbf{x}^2} \right] \\ &= -dt^2 + a^2(t) \left[\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right] dx^i dx^j. \end{aligned}$$

Ao compararmos com a equação 1.1, obtemos,

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K\mathbf{x}^2}. \quad (1.6)$$

Reescrevendo a parte espacial em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin(\theta) \cos(\phi), \\ x^2 &= r \sin(\theta) \sin(\phi), \\ x^3 &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

encontramos,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right) \right],$$

conhecida como métrica FLRW (Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker). As coordenadas (r, θ, ϕ) são chamadas de coordenadas comóveis. O *Raio de curvatura* do espaço, em um dado tempo t , é dado por,

$$R_{curv} = a(t) / \sqrt{|K|}. \quad (1.7)$$

É útil reescrever o elemento de linha em termos de uma quantidade que contenha somente a informação do sinal da curvatura, i.e., que independa da magnitude de K , ao mesmo tempo, temos liberdade para reescalonar r . Qualquer fator que o reescalone não irá alterar a geometria do espaço-tempo. Assumindo, inicialmente, que $K \neq 0$, definamos $k \doteq K/|K|$ e $r \rightarrow |K|^2 r$,

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{a(t)}{\sqrt{|K|}} \right)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right].$$

As equações dinâmicas da cosmologia dependem da normalização geral do fator de escala somente através de um termo $K/a^2(t)$. Então, para $K = 0$ esta normalização não tem significado físico. Assim, redefiniremos o fator de escala como sendo,

$$a(t) \rightarrow \begin{cases} a(t)\sqrt{|K|}, & K \neq 0, \\ a(t), & K = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right]. \quad (1.8)$$

1.3 Tempo conforme

É útil reescrevermos a equação 1.8 de forma a parte do tempo (cósmico) ser algum parâmetro em termos do fator de escala. Para isto, definimos o que venha a ser o **tempo conforme** η , como sendo,

$$ad\eta \doteq dt \implies \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.9)$$

Como veremos, a quantidade $c(\eta - \eta_i) = (\eta - \eta_i)$ representa a *distância comóvel* viajada por um fóton entre os momentos η_i (ou t_i) e η (ou t). A métrica FLRW escrita em termos do tempo conforme fica,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.10)$$

1.4 Tempo e distância própria

Numa perspectiva mais física, o tempo próprio de um observador é o tempo registrado por um relógio em repouso com o mesmo. Logo, o tempo cósmico é o tempo próprio

de todos observadores fundamentais. Já a distância própria l é definida por quaisquer dois observadores em um dado tempo cósmico t como sendo: $l = \int \sqrt{dl^2}$. Sem perda de generalidade e evocando o princípio cosmológico, podemos assumir um observador como estando na origem e outro observador em (r, θ, ϕ) . A distância própria entre eles pode ser escrita como sendo,

$$l = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \equiv a(t) \chi(r), \quad (1.11)$$

em que χ é chamada de distância comóvel entre dois obsevadores fundamentais e depende da constante de curvatura. A distância comóvel pode assumir as seguintes formas,

$$\chi(r) = \begin{cases} \sin^{-1} r, & \text{se } k = 1, \\ r, & \text{se } k = 0, \\ \sinh^{-1} r, & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Utilizando $d\chi^2 = dr^2/(1 - kr^2)$, podemos reescrever a equação 1.10 em termos da distância comóvel. Tomando a inversa da equação 1.12,

$$f_k(\chi) \doteq r = \begin{cases} \sin \chi, & \text{se } k = 1, \\ \chi, & \text{se } k = 0, \\ \sinh \chi, & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Obtemos, em termos das novas coordenadas comóveis (χ, θ, ϕ) , a métrica FLRW como,

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2 \right]. \quad (1.14)$$

Esta forma da métrica é útil para obter um *insight* sobre as propriedades causais do espaço-tempo. Para um tratamento explorando as propriedades geométricas desta métrica indico a leitura [36].

1.5 Função de Hubble e a expansão do Universo

Uma vez que a informação de expansão (ou contração) do Universo está contida no fator de escala $a(t)$, a taxa de expansão (ou contração) do Universo pode ser visto via a taxa de mudança da distância própria entre dois observadores fundamentais, situados em qualquer lugar do Universo, $\dot{l} = (\dot{a}/a) l$ ⁴. E por esta definimos,

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t).$$

A função $H(t)$ é chamada de função (parâmetro) de Hubble. O valor atual da função de Hubble é conhecida como constante de Hubble H_0 . O valor inicialmente obtido por Edwin Hubble, em 1929, comparando a velocidade de recessão de nebulosas extragalácticas para H_0 foi de $500 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, figura 1. A medida fornecida pelo satélite Planck em 2015 [1] foi de $H_0 = 67.74 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

⁴ $\cdot \equiv d/dt$

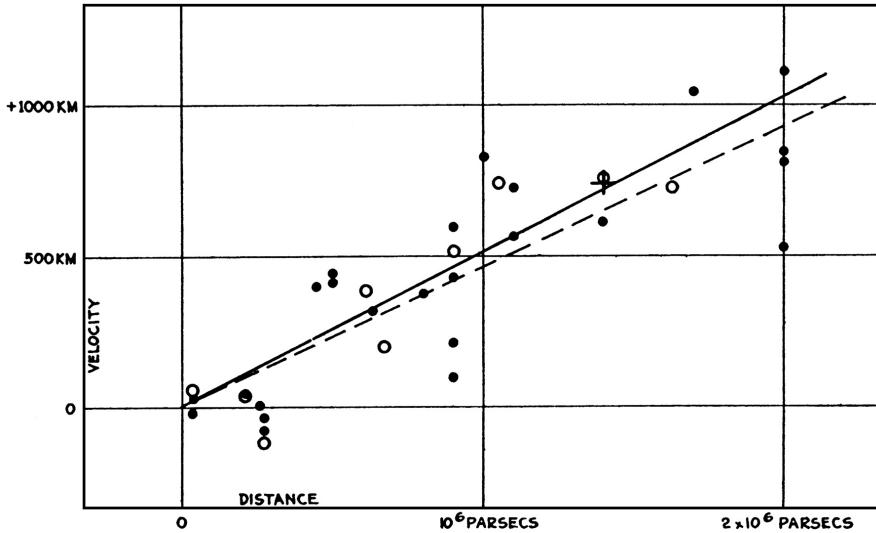


Figura 1 – Diagrama de Hubble. Fonte: [28].

Usaremos diversas vezes uma quantidade adimensional associada a H_0 ,

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$$

isto é,

$$h \equiv H_0/100.$$

Vide que H_0 tem dimensão de inverso do tempo, logo, $t_H = 1/H_0$ fornece a magnitude da idade do Universo, que segundo os dados de [1] é $t_H \approx 9.78h^{-1}$ Gyr. E se multiplicarmos por c , temos a ordem do tamanho do universo visível, $l_H \doteq ct_H \approx 3.00h^{-1}$ Gpc. Nós comumente chamamos l_H de **horizonte**, pois fornece uma estimativa da distância viável pela luz durante um t_H . Mas chamarei de horizonte não somente H_0^{-1} ⁵, mas, usarei este termo para designar H^{-1} , para qualquer tempo t , que como mostrarei em seguida, será usado ao invés de dizer *horizonte de partículas*. Ou seja, um abuso de linguagem. Quando for necessário, serei explícito sobre o horizonte em t_H .

Obviamente t_H não é a idade do Universo, mas sim, fornece a ordem de grandeza desta. A idade do universo é calculada via função de Hubble.

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^1 \frac{da}{H(a)a}. \quad (1.15)$$

Observe que estou definindo a normalização $a(t_0) = 1$. Além disto, estou assumindo $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0$. É bom ter em mente que este fato depende do modelo cosmológico assumido, há modelos que o fator de escala só se anula para $t \rightarrow -\infty$. Mas para o que desejo, *a priori* esta definição é boa. À frente encontraremos uma expressão mais conveniente para 1.15 que estará expressa em termos das informações dos constituintes do Universo.

⁵ $c = 1$

Ainda podemos escrever a função de Hubble não em relação ao tempo cósmico, mas em relação ao tempo conforme,

$$\mathcal{H} = \frac{da}{d\eta} \frac{1}{a} \equiv \frac{a'}{a}. \quad (1.16)$$

Que se relaciona com a definição da função de Hubble por,

$$\mathcal{H} = \frac{da}{d\eta} \frac{1}{a} = \frac{dt}{d\eta} \frac{da}{dt} \frac{1}{a} = aH = \dot{a}.$$

1.6 Horizonte de partículas e horizonte de eventos

Vale a pena aqui introduzir dois conceitos que serão extremamente importante nos estudos perturbativos.

Definição (Horizonte de Partículas). *Também conhecido como horizonte comóvel ou até mesmo horizonte cosmológico, é a distância comóvel máxima que um fóton pode ter viajado do início do Universo, $t = 0$, até um dado tempo t .*

$$\chi_P = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_{\eta(0)}^{\eta(t)} d\eta' = \eta(t) - \eta(0). \quad (1.17)$$

Vide que este é o tamanho comóvel do Universo visível para um dado tempo t e que em modelos cosmológicos com $\eta(0) = 0$, $\chi_P = c\eta = \eta$. Em qualquer instante de tempo, eventos separados por mais de duas vezes o horizonte de partículas não podem ter uma relação causal.

Definição (Horizonte de Eventos). *É a distância máxima que um fóton viajará no futuro de um certo tempo t .*

$$\chi_E = \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \eta(\infty) - \eta(t). \quad (1.18)$$

Obviamente, não faz sentido falar em horizonte de eventos em modelos de Universo que colapsa. Se χ_E divergir, então, além de não existir o horizonte de eventos, todos os eventos no Universo estarão conectados causalmente.

1.7 Redshift

Uma das informações mais importantes proveniente de objetos luminosos é o *redshift* sofrido pela luz que vem deste. Muitas vezes usamos o termo *redshift* para designar qualquer deslocamento sofrido pela luz no espectro, ou seja, esteja o espectro sendo deslocado para comprimentos de onda maiores (para o vermelho) ou para comprimentos de onda menores (para o azul).

Tomemos o elemento de linha descrito por um fóton, centrado num dado sistema de coordenadas comóveis. Da equação 1.8,

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right) \implies dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

Considerando que o feixe se desloca da fonte ao laboratório, tomamos o sinal negativo (quanto maior o tempo, menor o comprimento radial). Integrando entre a emissão (t_e, r_e) e a recepção $(t_r, 0)$,

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_e}^{r=0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

Consideremos ser esta uma crista da luz e consideremos que a crista seguinte é emitida em $t_e + \delta t_e$, e recebida em $t_r + \delta t_r$, proveniente do mesmo local.

$$\begin{aligned} \int_{t_e+\delta t_e}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} &= \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_{t_e+\delta t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ &= - \int_{t_r}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ &= - \int_{t_r}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \left(- \int_{t_e+\delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} \right) + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ &= - \int_{t_r}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)} \end{aligned}$$

Comparando a primeira e a última linha, temos,

$$\int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)}.$$

Portanto,

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} \frac{dt}{a(t)}.$$

Uma vez que $a(t)$ praticamente não varia para tempos muito pequenos, como é o caso entre duas cristas ($\delta t_e \sim 10^{-14}$ s),

$$\frac{1}{a(t)} \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} dt = \frac{1}{a(t)} \int_{t_r}^{t_r+\delta t_r} dt \implies \frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_r}{a(t_r)},$$

$$\frac{\delta t_e}{\delta t_r} = \frac{a(t_e)}{a(t_r)} = \frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_r}. \quad (1.19)$$

Então,

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_r} = \frac{a(t_e)}{a(t_r)}.$$

Definimos o *redshift cosmológico* z como sendo,

$$z \doteq \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} - 1 = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1. \quad (1.20)$$

Vide que,

- $a(t_r) > a(t_e)$ ($z > 0$), \implies Expansão.
- $a(t_e) > a(t_r)$ ($z < 0$), \implies Contração.

1.7.1 Dilatação do tempo cosmológico

A equação 1.19 fornece um efeito de *dilatação do tempo cosmológico*,

$$\delta t_r = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} \delta t_e, \quad (1.21)$$

ou seja, quando observamos uma certa fonte luminosa, por exemplo, uma supernova, tudo o que vemos acontecer nela se dá de forma mais lenta, com essa lentidão sendo estabelecida pela razão entre os fatores de escala.

1.7.2 Velocidade peculiar e dispersão de velocidade peculiar

A diferença entre o redshift medido de um objeto, z_{obs} , e seu redshift cosmológico, z_{cosm} , se deve a velocidade peculiar (radial) do objeto, v_{pec} , ou seja, denominados de redshift cosmológica ao desvio do espectro devido somente a expansão do Universo.

Mas o que seria a velocidade peculiar? Para entendermos, tomemos a velocidade própria de um objeto em relação a um observador fundamental, que é dada pela derivada da equação 1.11 em relação ao tempo cósmico.

$$v(t) = \frac{d}{dt} l(t) = \frac{d}{dt} (a(t) \chi) = \dot{a}\chi + a\dot{\chi} \doteq v_{cosm}(t) + v_{pec}(t), \quad (1.22)$$

no qual, $v_{cosm} = Hl$ é a velocidade do fluxo de Hubble e $v_{pec} = a\dot{\chi}$ é a velocidade peculiar do objeto. Ou seja, a velocidade peculiar é a contribuição que não é devido ao fluxo de Hubble, é a velocidade devido justamente ao movimento próprio do objeto, $\dot{\chi} \neq 0$.

Ao tomarmos um observador fundamental \mathcal{O}_1 na mesma localização de um objeto \mathcal{P} , com velocidade peculiar v_{pec} em relação a \mathcal{O}_1 , como localmente podemos considerar o espaço-tempo como sendo o de Minkowski, \mathcal{O}_1 irá observar a luz proveniente de \mathcal{P} segundo o efeito Doppler,

$$1 + z_{pec} = \sqrt{\frac{1 + v_{pec}/c}{1 - v_{pec}/c}} = \sqrt{\frac{1 + v_{pec}}{1 - v_{pec}}}. \quad (1.23)$$

Agora, tomemos um outro observador fundamental \mathcal{O}_2 , a uma distância própria δl_{12} de \mathcal{O}_1 , e assumamos, por conveniência, que \mathcal{O}_2 seja tal que a velocidade peculiar de \mathcal{P} esteja ao longo da geodésica que conecta \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 . Usando a definição de redshift, temos que o redshift observado por \mathcal{O}_2 , $z_{\mathcal{O}_2}$, é dado por,

$$1 + z_{\mathcal{O}_2} = \frac{\lambda_{\mathcal{O}_2}}{\lambda_{\mathcal{P}}} = \frac{\lambda_{\mathcal{O}_2}}{\lambda_{\mathcal{O}_1}} \frac{\lambda_{\mathcal{O}_1}}{\lambda_{\mathcal{P}}},$$

com $\lambda_{\mathcal{O}_{1,2}}$ sendo o comprimento de onda observado por $\mathcal{O}_{1,2}$, e $\lambda_{\mathcal{P}}$ o comprimento de onda emitido por \mathcal{P} . O primeiro termo, corresponde ao redshift cosmológico devido ao fluxo de Hubble. O segundo termo do lado direito corresponde ao redshift cosmológico observado por \mathcal{O}_1 devido a \mathcal{P} , $z_{\mathcal{O}_1}$. Uma vez que \mathcal{O}_1 é um observador fundamental, podemos simplesmente tomar $z_{\mathcal{O}_1}$ como um redshift peculiar, z_{pec} , que no caso, é simplesmente o efeito Doppler 1.23. Por conveniência, tomarei que $z_{\mathcal{O}_2} \equiv z_{obs}$.

$$1 + z_{obs} = (1 + z_{cosm})(1 + z_{pec}), \quad (1.24)$$

ou seja, o redshift observado de qualquer objeto consiste de uma contribuição devida a dinâmica do Universo e outra devida a contribuição da velocidade peculiar ao longo da linha de visada.

No limite não-relativístico,

$$1 + z_{pec} = \sqrt{\frac{1 + v_{pec}}{1 - v_{pec}}} \approx \left(1 + \frac{1}{2}v_{pec}\right) \left(1 + \frac{1}{2}v_{pec}\right) \approx 1 + v_{pec},$$

ou seja, $z_{pec} \approx v_{pec}/c = v_{pec}$. Assim, tomando novamente a equação 1.25,

$$z_{obs} = z_{pec}(1 + z_{cosm}) + (1 + z_{cosm}) - 1 \approx z_{cosm} + v_{pec}(1 + z_{cosm}). \quad (1.25)$$

A partir desta equação temos que: $v_{pec} = (z_{obs} - z_{cosm}) \frac{1}{(1+z_{cosm})}$. Donde temos que a dispersão de velocidade peculiar de galáxias, σ_v , esta relacionada a dispersão de redshift observado, σ_z , e é dada por,

$$\sigma_v = \frac{\sigma_z}{1 + z}. \quad (1.26)$$

1.8 Equações de Friedmann

Até aqui, investigamos somente as consequências geométricas e cinemáticas de um espaço-tempo FLRW, isto é, um espaço-tempo segundo o tensor métrico que descreve a equação 1.8.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a(t)r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a(t)r \sin(\theta))^2 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

ou seja,

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = \left(\frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} \right)^2, \quad g_{22} = (a(t)r)^2, \quad g_{33} = (a(t)r \sin(\theta))^2,$$

$$g_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

A dinâmica da geometria do espaço-tempo é caracterizado inteiramente pelo fator de escala $a(t)$. A fim de determinarmos tal fator, devemos resolver as equações de Einstein na presença dos constituintes do Universo.

A menos de convenções de sinal⁶, as equações de Einstein são dadas por,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Em contraparte à complexidade da resolução das equações 1.28, a informação que esta nela contida é, de certa forma, fácil de ser traduzida através de um balanço entre geometria e conteúdo. Ou seja, a deformação da geometria do espaço-tempo estudado (lado esquerdo da equação) será devido ao conteúdo do espaço em si (lado direito). Quando digo conteúdo falo em fontes de energia, as componentes que contribuem para o tensor energia-momento.

Obviamente, as equações de Einstein dependem da métrica que descreve o espaço. No nosso caso, estamos trabalhando com um Universo homogêneo e isotrópico (FLRW), e as informações deste estão contidas na equação 1.27. Para encontrarmos $a(t)$, temos que obter as equações dinâmicas para este Universo, e estas são obtidas utilizando a equação 1.27 na equação 1.28.

A descrição do tensor de Einstein é obtida indiretamente pelo tensor métrico. Primeiro obtemos o símbolo de Christoffel (um tipo de conexão afim)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}).$$

Com a vírgula significando derivada parcial⁷. Observe que $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma$. E desta conexão, obtemos o tensor e o escalar de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\gamma - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\gamma, \quad (1.29)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

⁶ Dependendo de como se define o tensor de Riemann, o tensor de Einstein pode ser proporcional ao tensor de energia-momento, ou ao negativo deste

⁷ $a_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \partial^n a_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} / \partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} \dots \partial x^{\alpha_n}$

Estas quantidades, equações 1.29 e 1.30, definem o que vem a ser um tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.31)$$

Vide ainda que, utilizando a definição de escalar de Ricci e tomando o traço do tensor energia-momento, $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, podemos reescrever as equações de Einstein 1.28 em termos do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GS_{\mu\nu}.$$

com o termo fonte: $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$.

Uma importante característica de um Universo homogêneo e isotrópico é que escalares são funções exclusivas do tempo, ou seja, constantes no espaço, trivetores são nulos e tritensores de ordem 2 são proporcionais ao tensor métrico restrito a parte homogênea e isotrópica [56]. Para melhor ilustrar esta afirmação, tomemos um quadritensor de segunda ordem $A_{\mu\nu}(t, x^i)$. Este assume a forma geral:

$$A_{\mu\nu}(t, x^i) = \begin{cases} A_{00}(t, x^i) &= \alpha(t), \\ A_{0j}(t, x^i) &= 0, \\ A_{jk}(t, x^i) &= \beta(t)\tilde{g}_{jk}(x^i). \end{cases}$$

Com α e β funções somente do tempo e \tilde{g} dado pela equação 1.6, que para um FLRW é a parte espacial da equação 1.27 sem o termo do fator de escala. Como em um espaço-tempo FLRW \tilde{g} é diagonal, todo tensor de segunda ordem tem que ser diagonal. Com isso, o tensor energia-momento deve ser diagonal e, consequentemente, o tensor de Einstein também deve ser diagonal.

O tensor energia-momento é dado como,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.32)$$

em que ρ é a densidade de energia, p a pressão e u é a quadrivelocidade definida na equação 1.2. Logo, o termo das duas quadrivelocidades é,

$$u_\mu u_\nu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$ e que a representação matricial de $u^\nu u_\mu$ é exatamente a matriz acima, exceto pelo que o primeiro termo ser -1 , temos que T_μ^ν ⁸ assume a forma,

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

⁸ $T_\mu^\nu = g^{\nu\sigma}T_{\sigma\mu}$

que fornece rapidamente o traço $T = -\rho + 3p$. O fato do tensor energia-momento ser diagonal reflete o fato que em um universo homogêneo e isotrópico não há termos de cissalhamento (termos fora da diagonal principal), e portanto, descreve um fluido perfeito.

Para um compilado dos valores dos símbolos de Christoffel, dos valores do tensor de Ricci, do escalar de Ricci e dos valores do tensor de Einstein, ver o apêndice A. O resultado da equação $G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$ para a parte temporal, $\mu = \nu = 0$, é,

$$\frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + k) = 8\pi G\rho.$$

Já a parte espacial, $\mu = i$ e $\nu = j$,

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp.$$

Usando a primeira equação na segunda, obtemos,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.35)$$

Estas equações são conhecidas como equações de Friedmann. Quando dita no singular, "equação de Friedmann", muito comumente queremos nos referir a equação 1.34. Podemos reescrevê-las em termos da função de Hubble. Usando as relações

$$\begin{aligned} H &= \frac{\dot{a}}{a} \implies \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2, \\ \therefore \frac{\ddot{a}}{a} &= \dot{H} + H^2, \end{aligned}$$

e então,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.36)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (1.37)$$

Uma vez que as equações de Friedmann contêm informações do(s) fluido(s) perfeito(s) é de se esperar que a partir deste, de alguma forma, consigamos informação(ões) da equação da continuidade. De fato, multiplicando a equação 1.34 por a^2 , diferenciando-a em relação ao tempo e utilizando a equação 1.35, obteremos que,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.38)$$

Para melhor entender esta equação, tomemos como exemplo o caso da matéria bariônica⁹, em que a pressão é subdominante frente a densidade ($p_b \ll \rho_b$)¹⁰. Então, a

⁹ Em cosmologia, a menos que seja dito, elétrons são tomados como bárions, mesmo isso não sendo verdade.

¹⁰ O índice "b" representa o termo "bárions".

equação 1.38 fica,

$$0 = \dot{\rho}_b + 3H(\rho_b + p_b) \approx \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b = \frac{1}{a^3}(\dot{\rho}_b a^3 + 3\dot{a}a^2\rho_b) \quad (1.39)$$

$$= \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho_b a^3). \quad (1.40)$$

Isto é, para todo tempo cósmico t , temos que $\rho_b a^3$ é conservado, ou seja, a densidade do fluido segue $\rho_b \sim 1/a^3$. No caso da radiação, temos que $p_r/\rho_r = 1/3$, o que nos leva a conservação da quantidade $\rho_r a^4$. Podemos assumir num caso mais geral que exista um fluido X que satisfaça $p_X/\rho_X = w$, com w constante no tempo, e que irá conservar a quantidade $\rho_X a^{3(1+w)}$. A quantidade w é comumente denominada de *equação de estado*. Assumindo ainda que possamos ter $w = w(t)$, então,

$$\begin{aligned} dt' \frac{d\rho_X}{dt'} &= -3(dt'H)\rho_X(1+w), \\ \int_0^t dt' \frac{d\rho_X}{dt'} \frac{1}{\rho_X} &= -3 \int_0^z \left(-\frac{dz'}{1+z'}\right)(1+w(z')), \\ \ln\left(\frac{\rho_X}{\rho_X^{(0)}}\right) &= 3 \int_0^z dz' \frac{1+w(z')}{1+z'}. \end{aligned}$$

Usando que¹¹

$$\int_0^z \frac{dz'}{1+z'} = \int_{z'=0}^{z'=z} d\ln(1+z') = \ln(1+z),$$

temos,

$$\begin{aligned} 3\left(\ln(1+z) + \int_0^z dz' \frac{w(z')}{1+z'}\right) &= 3\ln(1+z)\left(1 + \frac{1}{\ln(1+z)} \int_0^z dz' \frac{w(z')}{1+z'}\right) \\ &\equiv 3\ln(1+z)(1+w_{eff}). \end{aligned}$$

Em que defino a *equação de estado efetiva*, w_{eff}

$$w_{eff} = \frac{1}{\ln(1+z)} \int_0^z dz' \frac{w(z')}{1+z'}. \quad (1.41)$$

Então,

$$\begin{aligned} \rho_X &= \rho_X^{(0)} e^{3\ln(1+z)(1+w_{eff})} \\ &= \rho_X^{(0)} (e^{\ln(1+z)})^{3(1+w_{eff})} = \rho_X^{(0)} (1+z)^{3(1+w_{eff})} \\ &= \rho_X^{(0)} a^{-3(1+w_{eff})}. \end{aligned}$$

Ou seja, para um fluido com equação de estado variando no tempo cósmico, temos que a densidade de energia do fluido é descrita por,

$$\rho_X = \rho_X^{(0)} a^{-3(1+w_{eff})}. \quad (1.42)$$

E a quantidade conservada é exatamente $\rho_X a^{3(1+w_{eff})}$.

¹¹ Uso o *superscript* (0) sobre a densidade para dizer que este é o valor "hoje", em $t = 0$.

1.9 Fluido cosmológico e seus múltiplos componentes

Por hora, não me importarei exatamente quais são os tipos de constituintes que compõem o Universo. Assumirei que existem constituintes que possuem equação de estado $w \approx 0$, que serão genericamente chamados de matéria e referidos com o acrônimo "m", aqueles com $w = 1/3$, genericamente chamados de radiação, referidos com o acrônimo "r", e que possam existir n fluidos com valores w_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, podendo ser constante ou não no tempo, e que os chamarei genericamente de X_i , e com o mesmo acrônimo.

Em um tratamento inicial em grandes escalas, para que não tenhamos que lidar com questões de inhomogeneidades, podemos considerar que os fluidos não interagem entre si, a não ser por meio gravitacional, e com isso, modelar tais fluidos como sendo fluidos perfeitos. Então, segundo tais hipóteses podemos escrever que o tensor energia-momento total é a soma dos tensores energia-momento de cada componente

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \sum_{i=1}^{n+2} (T_{\mu\nu})_i = \sum_{i=1}^{n+2} ((\rho_i + p_i) u_\mu u_\nu + p_i g_{\mu\nu}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+2} (\rho_i + p_i) \right) u_\mu u_\nu + \left(\sum_{i=1}^{n+2} p_i \right) g_{\mu\nu} \\ &\equiv (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Logo, temos que a densidade de energia total e a pressão total são dadas pela soma das contribuições a partir de cada componente

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i \rho_i, \\ p &= \sum_i p_i. \end{aligned}$$

Além disso, tomando a propriedade de conservação do tensor energia-momento¹², ou equivalentemente a partir da propriedade da conservação do tensor de Einstein demonstrado no apêndice B, temos que a soma das contribuições deve satisfazer¹³

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\mu} = \sum_i \left(T^{\mu\nu}_{;\mu} \right)_i = 0. \quad (1.43)$$

Que no caso de não ocorrer interação entre as componentes¹⁴, devemos ter

$$\left(T^{\mu\nu}_{;\mu} \right)_i = 0.$$

¹² Uma vez que ocorra a conservação do tensor num sistema de coordenadas local a conservação deve ser verdade para qualquer sistema de coordenadas por transformações gerais de coordenadas.

¹³ Utilizarei ∇ como um operador representando a derivada covariante, i.e., a derivada parcial mais termo, ou termos dependendo da ordem, proporcionais a conexão que faz desta derivada uma quantidade covariante, ou seja, um tensor.

¹⁴ Há modelos cosmológicos que matéria escura e energia escura não são componentes independentes. Modelos conhecidos como *modelos de interação matéria-energia escura* explorando interações fenomenológicas assumem que $\nabla_\mu T_{(i)}^{\mu\nu} = Q_{(i)}^\nu$, com (i) podendo ser (c) ou (DE) , dependendo da convenção, mas com $Q_{(c)}^\nu = -Q_{(DE)}^\nu$. Modelos de interação entre outras componentes segue ideia igual com $\sum_i Q_{(i)}^\nu = 0$. Para mais sobre modelos de interação matéria-energia escura recomendo a leitura dos artigos [15], [54] e [34].

Este resultado leva a termos a equação 1.38 sendo satisfeita para cada componente de modo independente.

Podemos agora tomar a equação de Friedmann 1.36 e reescrevê-la em relação a cada componente.

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2}, \\ 1 &= \frac{8\pi G}{3H^2}\sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{1}{\rho_{crit}}\sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2 H^2}, \\ 1 + \frac{k}{a^2 H^2} &= \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \doteq \sum_i \Omega_i. \end{aligned}$$

Em que tenho definido $\rho_{crit} = 8\pi G/3H^2$, conhecido como *densidade de energia crítica* e que corresponde a energia que o Universo deve ter para ser plano, $k = 0$. O valor fornecido pelos dados do Planck de 2015, [1], prediz seu valor atual, ou seja, com a função de Hubble sendo exatamente o valor da constante de Hubble, como sendo $\rho_{crit}^{(0)} = 1.878 h^2 \times 10^{-29} g cm^{-3}$. Já Ω_i é chamado de parâmetro de densidade da i -ésima componente, e é a razão entre o valor da densidade de energia da componente sobre a densidade crítica no dado momento. Temos então que o parâmetro de densidade total é dado por $\Omega = \sum_i \Omega_i$. É também comum definirmos um parâmetro de densidade associado a curvatura,

$$\Omega_k \doteq -\frac{k}{a^2 H^2}.$$

Com isso, a equação de Friedmann pode ser reescrito como sendo simplesmente,

$$\sum_i \Omega_i(t) = 1 = \Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_k(t) + \sum_j^n \Omega_{X_j}(t). \quad (1.44)$$

Uma vez que $\rho_{crit}(t) = \rho_{crit}^{(0)} E^2(t)$, com a função de Hubble adimensional $E = H/H_0$, o parâmetro de densidade fica,

$$\Omega_i(t) = \left(\frac{\rho_i(t)}{\rho_{crit}^{(0)}} \right) E^{-2}(t) = \left(\frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_{crit}^{(0)}} a(t)^{-3(1+w_i)} \right) E^{-2}(t). \quad (1.45)$$

Escrevendo em termos do redshift

$$\Omega_i(z) = \left(\frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_{crit}^{(0)}} (1+z)^{3(1+w_i)} \right) E^{-2}(z) \equiv \left(\Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)} \right) E^{-2}(z).$$

Em que estou definindo $\Omega_i^{(0)} \doteq \rho_i^{(0)}/\rho_{crit}^{(0)}$. Com isto,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_i \Omega_i(z) = \left(\sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)} \right) E^{-2}(z), \\ E^2(z) &= \sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z)^{3(1+w_i)}. \end{aligned}$$

$$\therefore E(z) = \sqrt{\Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \sum_{j=1}^n \Omega_{X_j}^{(0)}(1+z)^{3(1+w_j)}}. \quad (1.46)$$

Com, $\Omega_k^{(0)} \doteq -kH_0^{-2}$. Vide que, sendo $\Omega_i \sim h^{-2}$ temos que a quantidade $\Omega_i h^2$ é uma quantidade adimensional que independe do valor da taxa de Hubble, e portanto muito conveniente de ser utilizada para análises. Ainda é possível encontrar esta quantidade escrita como $\omega_i = \Omega_i h^2$. A equação 1.46 será massivamente utilizada quando tratarmos de medidas de distância em cosmologia. Ela nos fornece informações da função de Hubble, a cada tempo ou redshift, em termos das componentes do Universo, o que é extremamente útil em testes de modelos cosmológicos, uma forma de ver isso é pela equação 1.15, com que relaciona a idade do Universo tanto as componentes que o constitui quanto a forma que eles evoluem.

1.10 O Universo de Einstein e a energia escura

A solução das equações de Einstein 1.28 segundo o princípio cosmológico resulta em um Universo dinâmico. Para ver isto, basta-nos ver a *equação da aceleração* 1.35. Uma vez que com os constituintes até então analisados, com $w \neq -1/3$, o lado esquerdo da equação é não-nulo, i.e., o fator de escala varia com o tempo. Portanto, um Universo preenchido somente com matéria ordinária não poderia ser estático. É justamente por isso, e pela crença em um Universo estático, que Einstein adiciona um termo a mais à equação 1.28, tal que, a mesma ainda satisfizesse a propriedade de conservação do tensor de Einstein. Uma vez que a derivada covariante do tensor métrico é nula, a adição do tensor métrico multiplicado por qualquer escalar não altera a estrutura covariante da equação. O que Einstein fez foi adicionar um termo deste à equação que teria por função contrabalancear a atração gravitacional imposta pelos constituintes ordinários e que mantivesse o Universo estático, i.e., o termo teria uma propriedade de repulsiva. A nova equação seria

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

e a equação 1.35 teria um termo adicional no lado direito, $\Lambda/2$. Então, as equações de Friedmann com $\ddot{a}, \dot{a} = 0$ e com o Universo sendo dominado pela matéria, teríamos que $\rho = \Lambda/4\pi G$, e da equação de Friedmann, como $H = 0$, $\Lambda = k/a^2$. Sendo $\rho > 0$, devemos ter um Universo aberto, e por conseguinte, um fator de escala $a = 1/\sqrt{\Lambda} = const.$

Com os trabalhos do Hubble demonstrando a expansão do Universo, Einstein abandona tal adição. Contudo, com os resultados mais recentes a partir de supernovas do Tipo Ia que demonstraram não somente uma expansão do Universo, mas também que este está ocorrendo de forma acelerada, tal fator renasceu como uma possível explicação, muito devido ao seu caráter repulsivo, só que obviamente em um contexto diferente.

Tal termo, conhecido como **constante cosmológica** recentemente tem sido associada a *energia de vácuo*, descrita pela Teoria Quântica de Campos (TQC), que devido a existência de flutuações do vácuo a densidade de energia deste é não-nula, mas alguma constante que podemos chamar de " $\rho_{vácuo}$ ". Ou seja, ela seria uma conexão entre a gravitação e a física de partículas.

Podemos construir o tensor energia-momento da constante cosmológica simplesmente comparando-a ao lado direito da equação 1.47, i.e., deve ser algo como: $\Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G (T_{\mu\nu})_{i=\Lambda}$. Então, $(T_{\mu\nu})_{i=\Lambda} = -(\Lambda/8\pi G) g_{\mu\nu} \equiv -\rho_{vácuo} g_{\mu\nu}$. Ou seja, a energia do vácuo teria exatamente o mesmo efeito que uma constante cosmológica de valor $\Lambda = 8\pi G \rho_{vácuo}$. Em princípio, essas duas quantidades representam ideias diferentes. A constante cosmológica, uma adição ao lado esquerda das equações de Einstein, representa um modificação das leis da gravidade. Já a energia de vácuo, uma adição ao lado direito das equações, é uma nova fonte de energia. Vide que possíveis diferenças entre elas são observacionalmente indistinguíveis. Isto se deve ao fato de que em física somente diferenças de energia são mensuráveis. Somente a gravidade responde a valores absolutos de energia¹⁵. Na seção 1.10.1, veremos quais os problemas do modelo de uma constante cosmológica.

Uma componente tipo constante cosmológica deve ter, como acabamos de ver, a densidade de energia constante no tempo, então, pela equação da continuidade 1.38, para que a densidade de energia ρ_Λ seja constante, devemos ter $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, ou seja, $w = -1$. Mas podemos ir além e buscar por um tipo de fluido que cause a aceleração, sem necessariamente ser Λ . Então, assumamos que nós temos como componentes: "r", "m" e "DE"¹⁶. A equação da aceleração 1.35 com

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_{DE}, \quad (1.48)$$

$$p = p_m + p_r + p_{DE} \approx p_r + p_{DE} = \frac{1}{3}\rho_r + w_{eff}\rho_{DE}, \quad (1.49)$$

$$\rho + 3p = (\rho_m + \rho_r + \rho_{DE}) + 3\left(\frac{1}{3}\rho_r + w_{eff}\rho_{DE}\right) = \rho_m + 2\rho_r + (1 + 3w_{eff})\rho_{DE}.$$

Como $\rho_{m,r}$ são positivas, para termos uma expansão acelerada,

$$0 < \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 2\rho_r + (1 + 3w_{eff})\rho_{DE}),$$

$$\frac{\rho_m + 2\rho_r}{\rho_{DE}} < -(1 + 3w_{eff}) \implies w_{eff} < -\frac{1}{3}\left(\frac{\rho_{DE} + \rho_m + 2\rho_r}{\rho_{DE}}\right).$$

Que é uma restrição ao possível valor de candidatos que causariam tal expansão acelerada. No caso de termos um período em que DE domina frente as outras componentes, temos que $\rho \approx \rho_{DE} \gg \rho_m, \rho_r$, e então, $w_{eff} < -1/3$. Portanto, de fato, a constante

¹⁵ Para uma boa discussão deste tópico, ver <http://www.helsinki.fi/~hkurkisu/>, Cosmology I, section 2.7.

¹⁶ DE = Dark Energy

cosmológica seria uma candidata. Mas vide que este fato leva a esta componente possuir pressão negativa, $p_{DE} < -\rho_{DE}/3$, assumindo a densidade de energia positiva. Na gravidade newtoniana, a pressão está relacionada a uma força, que por sua vez está associada com um potencial local que depende da posição no espaço. Porém, em Universo homogêneo e isotrópico tal potencial local não existe, não pode haver uma função escalar dependente da posição, o que significa que não existe uma analogia a pressão Newtoniana.

1.10.1 O Problema do Ajuste Fino

Segundo o trabalho [21], a energia de vácuo é o mais plausível e enigmático candidato a matéria escura. Se a constante cosmológica de fato se origina de uma densidade de energia de vácuo, então esta sofre de um sério *problema de ajuste fino*¹⁷. Observacionalmente, sabemos que Λ deve ser da ordem do valor da constante de Hubble ([1], [14]), usando isto e as propriedades do sistema de unidades naturais¹⁸

$$\Lambda \approx H_0^2 = (2.13h \times 10^{-42} GeV)^2,$$

e esta relacionado a densidade de energia da constante cosmológica

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \equiv \frac{\Lambda m_{Pl}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} GeV^4. \quad (1.50)$$

Em que uso a definição de massa de planck, $m_{Pl}^2 \doteq \hbar c/G$, que no nosso caso fica simplesmente $m_{Pl} = 1/\sqrt{G} \approx 1.22 \times 10^{19} GeV$. Contudo, no caso da densidade de energia do vácuo, contabilizando a contribuição da energia de ponto-zero de cada modo de um campo quântico com massa m , a densidade é dada por,

$$\rho_{vacuo} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Que diverge no limite do ultravioleta ($\rho_{vacuo} \sim k^4$). No entanto, esperamos que a TQC seja válida até alguma escala máxima $k_{máx}$, chamada de *cut-off*. O que faz a integral ser finita e fornece,

$$\rho_{vacuo} \approx \frac{k_{máx}^4}{16\pi^2}.$$

Para o caso extremo da Relatividade Geral, esperamos que seja válido até escalas abaixo da massa de Planck. Com isso, podemos tomar como *cut-off* $k_{máx} = m_{Pl}$. O que leva uma predição para o valor da densidade de energia do vácuo de

$$\rho_{vacuo} \approx k_{máx}^4 / 16\pi^2 \approx 10^{74} GeV^4. \quad (1.51)$$

¹⁷ Fine tuning problem

¹⁸ $1 = c = 2.9979 \times 10^8 m/s$, $1 = \hbar = 6.58211 \times 10^{-25} GeV s$, e usando também que $1 Mpc = 3.089 \times 10^{19} km$. Então: $1 km/s/Mpc = 1 km/s / (3.09 \times 10^{19} km) = 3.237 \times 10^{-20} s^{-1} = 2.131 \times 10^{-44} GeV$. Logo, $H_0 = 100h km/s/Mpc = 2.131h \times 10^{-42} GeV$.

Logo, ao compararmos os valores 1.51 e 1.50, temos que os valores diferem por um fator de $\rho_{vácuo}/\rho_\Lambda \sim 10^{121}$. Isto é, o valor predito pela TQC é 10^{121} ordens de magnitude maior do que o observado. Mesmo postulando um falso estado de vácuo após a transição eletrofraca a $\sim 10^8 \text{ GeV}^4$, i.e., uma predição da *cromodinâmica quântica*, a diferença é da ordem de 10^{55} [37]. Este fato é conhecido como *problema do ajuste fino da constante cosmológica*.

1.10.2 O Problema da Coincidência

Um outro problema surge ao observarmos que além do valor da densidade de energia $\rho_{vácuo}$ ter de ser muito pequeno, o seu valor coincide com o valor da densidade da matéria em um período recente na história cosmológica. Para ver isto, uma vez que a densidade de energia ρ_Λ é constante, ao buscarmos o período em que $\rho_m = \rho_\Lambda$, temos que,

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda &= \rho_m = \rho_m^{(0)} (1 + z_{coinc})^3 = \rho_{crit}^{(0)} \Omega_m^{(0)} (1 + z_{coinc})^3, \\ \therefore z_{coinc} &= \left(\frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}} \right)^{1/3} - 1 \approx \left(\frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{1 - \Omega_\Lambda^{(0)}} \right)^{1/3} - 1. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Em que uso o fato de medidas atuais [1] predizerem que o parâmetro de densidade atual da radiação como sendo subdominante frente as contribuições da matéria e da constante cosmológica e que o Universo é plano, segundo os mesmos dados. Usando que $\Omega_\Lambda = 0.6911$, obtemos que $z_{coinc} = 0.3079$, o que para a história do Universo é um período recente¹⁹. O problema reside no fato de mesmo a densidade de energia da matéria decrescendo com um fator cúbico do redshift, e a da constante cosmológica sendo constante, atualmente elas possuem valores muito próximos. A questão se torna mais estranha quando vemos que se o domínio da constante cosmológica no Universo, i.e., o período em que ela é a componente no Universo com o maior valor de parâmetro de densidade, Ω_Λ , fosse antes de z_{coinc} , estruturas como galáxias não teriam tido tempo de se formar, por outro lado, se o domínio fosse a $z < z_{coinc}$ ainda estariam vivendo em um período de expansão desacelerada.

Uma abordagem diferente, que tenta amenizar tal impasse da constante cosmológica é dada pelo *Princípio Antrópico* que afirma que o fato de Λ ter o valor que tem é meramente um acaso e que tal fato leva ao valor certo para a formação das estruturas e para estarmos aqui hoje.

¹⁹ Usando o valor de Ω_m fornecido pelo Planck de 2015, temos que $z_{coinc} = 0.3099$, o que para fins práticos não muda nossas conclusões.

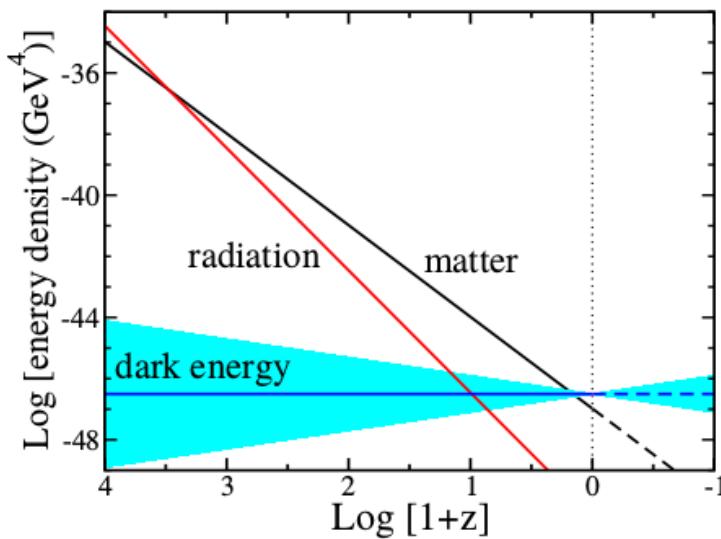


Figura 2 – Evolução da radiação, matéria e da energia escura em relação ao redshift. Os valores para a energia escuras são de $w_{eff} = -1.0 \pm 0.2$. Fonte: [21].

1.11 Distâncias em um Universo dinâmico

Em cosmologia²⁰ existem muitas maneiras de se definir a distância entre dois pontos arbitrários, consequência do fato do Universo ser possivelmente dinâmico e da finitude da propagação da informação. Da dinâmica do Universo, têm-se que as distâncias entre objetos comóveis estão constantemente mudando, logo, da finitude da propagação da informação, um observador terrestre sempre observa uma distância que possivelmente não mais condiz com a distância no instante da observação. Porém, um aspecto comum as medidas de distância é que todas elas, de alguma forma, medem a separação entre eventos em trajetórias radiais nulas, i.e., trajetórias de fôtons que terminam no observador.

Distância em si é um tópico extremamente importante e engloba mais do que aqui será exposto. Por exemplo, não irei descrever métodos como *triangulação*, *paralaxe geométrica* e *lookback time*, pois, uma vez que meu objetivo primário é fornecer as ferramentas teóricas para um bom entendimento do trabalho da dissertação, e não há nenhum uso destas. Porém, para o leitor interessado, há diversos bons livros que cobrem estes tópicos, como [38], [56], [27] e [47].

1.11.1 Distância comóvel

Já definimos o que venha a ser a distância comóvel quando definimos 1.11. Mesmo assim, voltemos e tratemos novamente deste.

Tomemos a métrica 1.8 para a luz e definimos $d\chi = dr/\sqrt{1 - kr^2}$. Como sabemos,

²⁰ Para ser mais específico, em cosmografia, que é a área de medições do Universo.

fótons descrevem geodésicas nula, então, assumindo que a luz se propaga na direção χ ,

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a(t)^2 d\chi^2. \quad (1.53)$$

Com a luz sendo emitida em $(t_{em}, \chi_{em}) = (t, \chi)$ e observada em $(t_{obs}, 0)$, definimos a distância comóvel como sendo a distância da origem do sistema, no caso, consideremos a localização de um terráqueo, à um objeto em χ ,

$$\chi = \int_0^\chi d\chi' = - \int_{t_{obs}}^t \frac{dt}{a(t)}.$$

A partir da definição de redshift cosmológico,

$$\chi = - \int_{t_{obs}}^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')(1+z')} \frac{1}{a(z')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (1.54)$$

$$\therefore \chi = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \sum_{j=1}^n \Omega_{X_j}^{(0)}(1+z)^{3(1+w_j)}}}. \quad (1.55)$$

1.11.2 Distância luminosidade

Para descrevermos o que venha a ser distância luminosidade, faz-se útil definir duas quantidades: *luminosidade absoluta* e *luminosidade aparente*.

Definição (Luminosidade absoluta - L). *Energia emitida por um corpo a cada segundo.*

Definição (Luminosidade aparente - l). *Energia observada de um corpo a cada segundo, em uma área receptora de 1 cm².*

Com o objeto observado emitindo radiação isotropicamente, podemos tomar uma esfera imaginária que engloba tal objeto luminoso e o tem em seu centro, de raio igual a d , em que d também é a distância objeto-Terra.

A emissão isotrópica leva ao fato de que independente da forma do objeto, sua emissão se dá como se este fosse esférico. Então, temos que o fluxo de energia, por segundo, que atravessa tal superfície imaginária é dado por,

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint ds l = 4\pi d^2 l \equiv L, \\ \therefore l &= \frac{L}{4\pi d^2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Perceba que até então nada disse sobre o espaço ser curvo e dinâmico. Quando falei sobre d disse pura e simplesmente que era a distância entre a fonte emissora e a fonte receptora. Claramente, aqui estou assumindo que a informação se propaga de forma

instantânea mas esperamos que a distância que poderemos definir através desta deve ser algo como $D_L^2 \sim L/F$, em que F é a medida de fluxo, uma vez que l tem unidade de fluxo. Por definição, o fluxo (bolométrico²¹) observado/recebido é dado por,

$$F = \frac{dE_{rec}}{dt_{rec} dA_{rec}} = \frac{dE_{rec}}{dt_{rec} A},$$

em que aqui, $A = 4\pi a_0^2 f_k^2(\chi) = 4\pi f_k^2(\chi)$ é a esfera descrita pelo raio dado pela distância comóvel $f_k(\chi)$, dada entre a fonte emissora e a fonte receptora. A distância comóvel deve ser usada para quantificar a finitude da propagação da luz assim como a dinâmica do Universo.

Como a energia do fóton recebido não é a mesma do fóton emitido e com $E \sim a^{-1}$, $dE_{emit}a_{emit} = dE_{rec}a_{rec}$, usando o subscripts 0 no lugar do *rec*, e omitindo o de emissão

$$dE_0 = \frac{a}{a_0} dE = adE.$$

Já a diferença entre os intervalos de tempo na emissão e na recepção é dada por 1.21, ou seja,

$$dt_0 = \frac{a_0}{a} dt = \frac{1}{a} dt.$$

Então, o fluxo deve ser reescrito como,

$$F = \frac{dE_0}{dt_0 A} = \frac{adE}{(dt/a) 4\pi f_k^2(\chi)} = \frac{dE}{dt 4\pi (a^{-2} f_k^2(\chi))}.$$

Portanto, comparando com 1.56, e sendo $L = dE/dt$, definimos a distância luminosidade como sendo:

$$D_L \doteq a^{-1}\chi = (1+z)\chi. \quad (1.57)$$

Por motivos históricos, mede-se a magnitude (aparente), m , de corpos celestes, ao invés da luminosidade (aparente), l . Antigamente, classifica-se um corpo celeste segundo o brilho do mesmo. Sem entrar na forma desta classificação, os corpos eram agrupados em grupos de 1 à 6 (magnitudes), com 1 os corpos mais brilhantes e 6 os menos. Seguindo esta ideia, em meados do século XIX, definiu-se uma relação entre magnitude e luminosidade, que foi dada de forma a diferença entre a magnitude máxima e mínima, diferença de 5 magnitudes, correspondesse a ordem de 1/100 na luminosidade : $l \sim 10^{-2m/5}$. Obviamente, a constante de proporcionalidade deve ter dimensão de energia por área por segundo. A determinação de tal constante é baseada em algum corpo celeste bem conhecido. digamos que seja A tal constante, então: $\log(l/A) = -2m/5$, ou ainda, $m = -2.5 \log(l) + constante$. Com a constante sendo determinada pelas medidas do objeto celeste conhecido. Assim, definimos a magnitude aparente como sendo

$$m \doteq -2.5 \log(l) + const.$$

²¹ O fluxo depende da frequência, então, F_ν . Define-se por fluxo bolométrico o fluxo integrado sobre todas as frequências, i.e., $F = \int_0^\infty d\nu F_\nu$.

Pode-se ver na literatura, que por vezes usasse F ao invés de l , porém, são quantidades completamente equivalentes, alterando somente a constante.

A magnitude absoluta é definida como sendo a magnitude de um corpo celeste como se ele estivesse a $10pc$ ²². Então, por conveniência, expresso este através do fluxo, como sendo,

$$M \doteq -2.5 \log(F(10pc)) + const.'$$

Uma referência conveniente a magnitude absoluta é o sol.

$$\begin{aligned} M - M_{\odot} &= -2.5 \log(F(10pc)) - (-2.5 \log(F_{\odot}(10pc))) = -2.5 \log\left(\frac{F(10pc)}{F_{\odot}(10pc)}\right), \\ \therefore M &= M_{\odot} - 2.5 \log\left(\frac{F(10pc)}{F_{\odot}(10pc)}\right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

com $M_{\odot} = +4.72$. Para a estrela Sirius, muito utilizada para calibração, $M_{Sirius} = +1.43$. Podemos também simplesmente subtrair as magnitudes, como $l = L/4\pi D_L^2$, $m = 5 \log(D_L) + const.$. Definimos o módulo de distância μ como sendo a diferença entre a magnitude aparente e a absoluta, $\mu = m - M$. Logo,

$$\mu = m - M = 5 \log\left(\frac{D_L}{10pc}\right) + \kappa, \quad (1.59)$$

com κ sendo uma correção ao *shifting* do espectro para dentro ou fora do intervalo de comprimento de onda medido devido à expansão. Ela é chamada de *correção* – k . Para ver sua expressão, índico a leitura da referência [27]. A figura 3 é um compilado de dados de supernovas do Tipo Ia (SNIa).

Ainda podemos reescrever este como

$$m = M + 5 \log\left(\frac{D_L}{1Mpc}\right) + 25 + \kappa = 5 \log(H_0 D_L) + \mathcal{M}, \quad (1.60)$$

com o *nuisance parameter* \mathcal{M} .

²² 1parsec = 1pc = $3.086 \times 10^{16} m$.

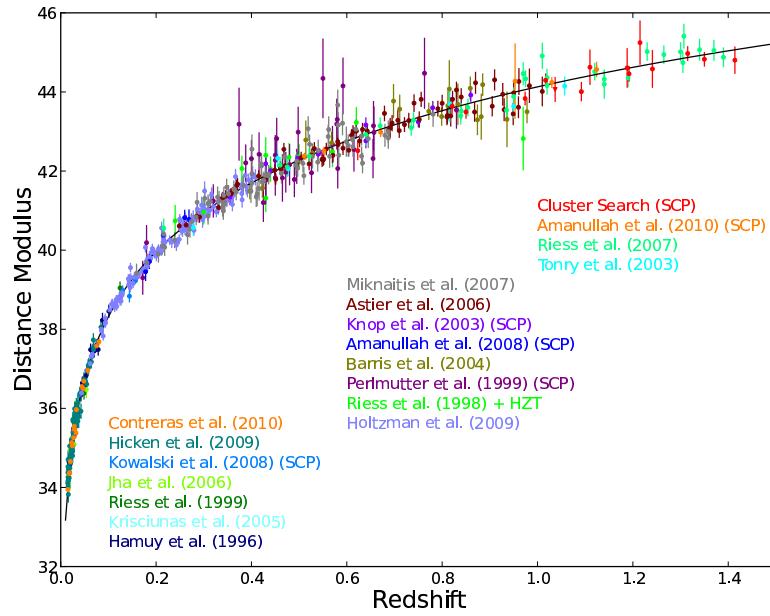


Figura 3 – Diagrama de Hubble para compilação do Union2.1. A linha sólida representa o bestfit cosmológico para o modelo Λ CDM. Fonte: [52].

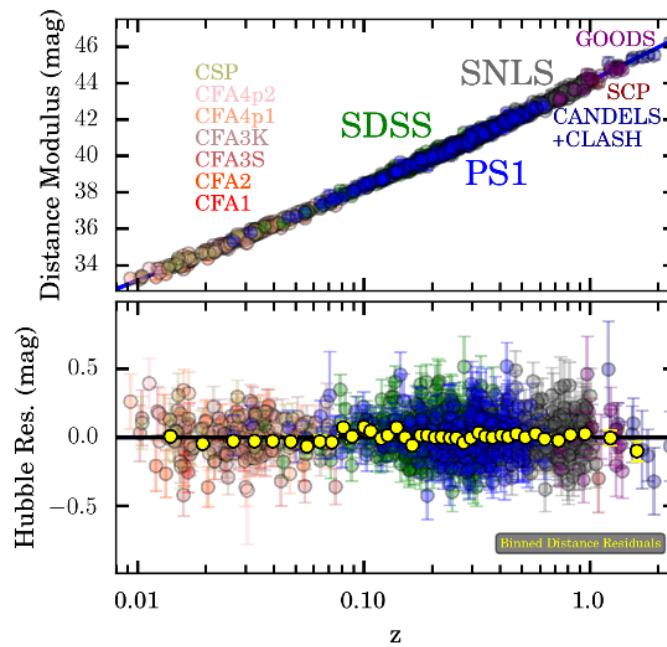


Figura 4 – Diagrama de Hubble para o *Pantheon sample*. A figura superior é a μ para cada SNIa em relação ao redshift em que esta se encontra. A figura inferior é o resíduo em relação ao valor obtido pelo bestfit Λ CDM. Fonte: [48].

A figura 4 foi apresentada em [48] e reúne 1048 SNIa entre redshifts $0.01 < z < 2.3$. Estes são dados recentes e incluem os dados da figura 3.

1.11.3 Distância diâmetro angular

Objetos com tamanho próprio conhecidos são denominados de **régua padrão**, assim como objetos luminosos à distâncias próprias conhecidas são denominados de **velas padrão**. O termo "padrão" se refere a estes serem conhecidos e por tal fato eles são úteis para calibração das medidas de distância. Um exemplo de régua padrão são as **oscilações acústicas de bárions** (BAO - *Baryon Acoustic Oscillations*), que são oscilações no espectro de potência da matéria, também observado na CMB, devido à flutuações no fluido bárions-fóttons, em um período anterior à recombinação, causado pela competição entre a força gravitacional (atrativa) e a pressão dos fóttons (repulsiva), tal competição dá surgimento a um sistema de ondas sonoras dentro do plasma. O período desta escala corresponde a uma escala espacial característica conhecida como **escala acústica**, k_A ou **horizonte sonoro**, r_s , com $k_A = 2\pi/r_s$. Veremos mais quando tratarmos propriamente de BAO. Um exemplo de vela padrão são as SNIa, uma vez que sua luminosidade absoluta pode ser estimada independente de sua distância e de sua luminosidade aparente. Existem ainda as **sirenes padrão**, como é o caso das ondas gravitacionais.

Consideremos um objeto de tamanho próprio conhecido D , ortogonal a linha de visada, e luminosidade absoluta L , a alguma distância D_A . Este corpo subtende uma abertura angular θ à um observador na origem do sistema de coordenadas situado na Terra, e esta associado a um fluxo F . Definimos como distância diâmetro angular D_A , a distância tal que,

$$D_A = \frac{D}{\theta}. \quad (1.61)$$

Como a fonte emissora está na borda de uma esfera imaginária de raio χ , centrada no observador, a um tempo de emissão fixo, a métrica FLRW nos diz que $ds = \sqrt{d\chi^2 + f_k^2(\chi) d\Omega^2}$, como χ é fixo, uma vez que consideramos o objeto ortogonal a linha de visada: $D = \int ds = a(t_{em}) f_k(\chi) \theta = f_k(\chi) \theta / (1+z)$. Portanto, a distância diâmetro angular, dada em 1.61, fica,

$$D_A = \frac{f_k(\chi)}{(1+z)}. \quad (1.62)$$

Vide que $D_A = a^2 D_L$ (Relação de Etherington). Esta será a principal ferramenta de medida cosmológica do nosso trabalho, uma vez que, como veremos, o *BINGO telescope* irá fazer um mapeamento da linha de 21 cm do hidrogênio neutro e nos fornecerá o *espectro de potência angular*, C_ℓ , que grosseiramente dizendo, é uma medida da correlação angular entre sobredensidades de energia da matéria de regiões do mapeamento, no espaço de Fourier.

Em resumo e posto de forma aberta, temos as duas medidas de distância se relacionando por,

$$\begin{aligned} D_L(z) &= (1+z)^2 D_A(z) \\ &= \frac{(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_1^{(1+z)} \frac{dx}{\sqrt{\Omega_k^{(0)} x^2 + \Omega_m^{(0)} x^3 + \Omega_r^{(0)} x^4 + \sum_{j=1}^n \Omega_{X_j}^{(0)} x^{3(1+w_j)}}} \right). \end{aligned}$$

Observe que no caso de termos $k = +1$, $\Omega_k^{(0)} < 0$, então $-i \sinh(i \dots) = \sin(\dots)$, com $k = -1$, $\Omega_k^{(0)} > 0$, e nada muda e no caso de $k = 0$, então $\sinh(\dots) \rightarrow 1$, como é 1.13.

1.11.4 Distância de Hubble e distância esfericamente média

Será útil também definirmos duas outras medidas de distância que serão utilizadas à frente: distância de Hubble, D_H , e distância esfericamente média, D_V .

A primeira é definida simplesmente como,

$$D_H \doteq \frac{c}{H} = \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{\Omega_k^{(0)} (1+z)^2 + \Omega_m^{(0)} (1+z)^3 + \Omega_r^{(0)} (1+z)^4 + \sum_{j=1}^n \Omega_{X_j}^{(0)} (1+z)^{3(1+w_j)}}}. \quad (1.63)$$

Já a segunda tem motivação a partir de medidas de BAO, [50], e é obtida pela combinação da medida de distância angular com medida de distância ao longo da linha de visada, ou seja, combinando D_A e D_H . Então, consideremos um objeto, ou uma característica física, celeste com tamanho (comóvel)²³ perpendicular à linha de visada r_\perp , e tamanho (comóvel) ao longo da linha de visada r_\parallel . Podemos obter r_\perp ao compararmos a 1.61, e lembremos de passar o tamanho próprio ao tamanho comóvel, $r_\perp/(1+z) = D_A(z) \theta$. Já r_\parallel advém da relação 1.63, $r_\parallel = D_H dz$.

²³ O tamanho comóvel é simplesmente o tamanho próprio vezes o fator de escala no período.

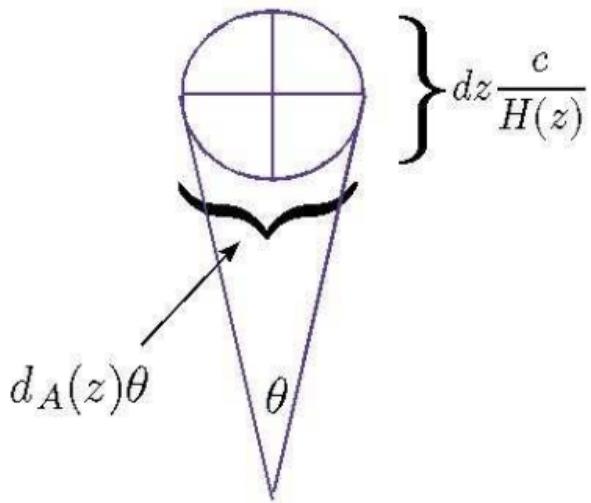


Figura 5 – Representação da relação entre o tamanho comóvel angular e o tamanho comóvel radial. Fonte: [6].

Então, inspirado na ideia posta na figura 5, definimos a distância esfericamente média como sendo,

$$\begin{aligned} D_V^3(z) &\doteq (D_A(z)(1+z))^2 \left(\frac{cz}{H(z)} \right) = (D_A(z)(1+z))^2 (z D_H(z)), \\ D_V(z) &= \sqrt[3]{D_A^2(z) D_H(z) z (1+z)^2}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Quando conhecemos r_{\perp} e r_{\parallel} , medimos θ e dz , para obter estimativas de D_A e de D_H , ou equivalentemente H . Agora conseguimos entender o "porquê" do BAO ter inspirado tal definição. Ao conhecermos a escala acústica r_s podemos usá-la para calibrar distâncias.

1.12 Matéria escura e o modelo Λ CDM

Em 1933, Fritz Zwicky observa que as velocidades de dispersão das galáxias no aglomerado de COMA não eram compatíveis com a massa estelar observada, ou seja, eram grandes demais para manter a coesão. Trabalhos que vieram depois do trabalho do Zwicky também notaram o mesmo problema em relação a quantidade de matéria observada em galáxias espirais e suas curvas de rotação, como foi observado que a galáxia de Andrômeda rotacionava mais rápido do que se esperaria à grandes raios. Porém, somente em 1978, com melhores medidas óticas e observações na frequência de rádio de gases de hidrogênio neutro à grandes distâncias do centro galáctico que foi possível confirmar o fato elencado por Zwicky. Durante este período outras indicações de uma possível matéria até então desconhecida surgiram, dentre elas J. Silk demonstra que uma matéria bariônica poderia não dar surgimento a pequenas galáxias. O que é cada vez mais aceito, é que esta nova

componente tem papel extremamente importante na formação de estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias no Universo, e a reprodução dos picos acústicos da CMB são fortemente afetadas pela sua ausência.

Existem diversos candidatos que tentam responder estas questões, mas chamaremos estes genericamente de "matéria escura" (DM - *Dark matter*), em que o termo "escuro" tem um duplo sentido, o de estabelecer nossa ignorância a cerca do que é esta nova componente e também que esta não emite radiação e interage somente gravitacionalmente. Evidências observacionais indicam, admitindo que a matéria escura é formada por algum tipo de partícula, que ela deve ser "fria", i.e., assim como a matéria bariônica, com pressão desprezível e velocidade de suas partículas baixas, comparadas a velocidade da luz. Chamamos estas de "matéria escura fria", comumente referida por CDM (*Cold Dark Matter*), e que para nos referir a ela usaremos o acrônimo "c" sob as quantidades físicas.

Se a DM esteve em equilíbrio térmico com as demais partículas do Universo no plasma primordial, i.e., ela fora termicamente produzida, então para ser uma CDM é necessário que suas partículas tenham massa suficientemente grande, $\sim 100 \text{ GeV}$, para partículas massivas que interagem fracamente (WIMPs - *Weakly Interacting Massive Particles* [42]). Diminuindo a massa, temos candidatos caracterizados por velocidades de dispersão cada vez maiores e portanto com diferentes impactos na formação de estruturas. Outros candidatos seriam o WDM (*Warm Dark Matter*), uma DM termicamente produzida com massas da ordem de keV e o HDM (*Hot Dark Matter*), com massas da ordem de eV, ou mesmo não massivos.

O **Modelo Padrão Cosmológico** é formado por uma energia escura descrita por Λ e uma matéria escura fria, CDM. Tal modelo é conhecido como cosmologia Λ CDM. Existem modelos que assumem uma DE mais geral com equação de estado constante porém não necessariamente -1 , chamados de modelo *w*CDM. E tantos outros modelos que se necessário serão referidos no curso do trabalho.

1.12.1 Partículas em equilíbrio termodinâmico

Como visto na última seção, temos diversas componentes que formam este tal "fluido cósmico": bárions, fótons, neutrinos²⁴, DE e DM. Para começar a entender a questão das interações entre as componentes e seus efeitos no Universo, é interessante primeiramente entender sobre o equilíbrio termodinâmico entre as mesmas, uma vez que boa parte da história do Universo este foi o caso. A ideia agora é ir aos poucos voltando na história do Universo, i.e., dos períodos mais recentes em direção aos períodos iniciais. Como o Universo está se expandindo hoje, se fizermos uma análise reversa, voltando no tempo, o Universo seria menor, e como é possível mostrar, em um período de domínio da radiação

²⁴ Não falei diretamente sobre os neutrinos até aqui, contudo, para este trabalho o que é necessário saber sobre os neutrinos é que eles são partículas ultra-relativística e que serão tratados como radiação. Qualquer informação adicional necessária sobre eles será dita quando necessário.

frente as outras componentes, como representado na figura 2, com a temperatura indo com $T(t) \sim a^{-1}(t)$ (fato que demonstraremos na próxima seção), um Universo cada vez mais primitivo é um Universo cada vez mais quente, e esta temperatura, a depender do período, já foi tal que a energia térmica era suficiente para romper os estados de ligação da matéria, ou seja, houve períodos em que tudo que se tinha de matéria eram prótons e elétrons livres em intensa interação com os fótons, ou, em períodos mais quentes ainda, em interação também com os neutrinos. Nestes períodos teremos que ir além de uma descrição simplista de que as componentes podem ser tratadas como fluidos perfeitos.

Por hora, analisemos o caso de equilíbrio termodinâmico. Podemos reparar no que já foi tratado, que diante do nosso conhecimento do Universo e do que se acredita ser a sua constituição, a história do Universo pode ser contada através de diversas formas, pelo tempo cósmico, pelo tempo comóvel, pelo redshift e agora, como vimos acima, pela temperatura, então, é preciso saber expressar a densidade de energia e a pressão, de uma dada partícula, que são as quantidades que temos usado para caracterizar cada componente devido a equação da continuidade, em termos da temperatura. Para isto, é extremamente importante buscarmos ferramentas da mecânica estatística. Então, precisamos primeiro definir a distribuição de probabilidade de encontrar uma dada partícula em um certo volume no espaço de fase, i.e., espaço formado pela posição \vec{x} e pelo momento (próprio) \vec{p} , (\vec{x}, \vec{p}) . A probabilidade de encontrarmos uma partícula, em um dado tempo t , com posição dentro do intervalo $(\vec{x} - \frac{d\vec{x}}{2}, \vec{x} + \frac{d\vec{x}}{2})$ e momento dentro do intervalo $(\vec{p} - \frac{d\vec{p}}{2}, \vec{p} + \frac{d\vec{p}}{2})$, i.e., dentro do volume no espaço de fase $d^3\vec{x}d^3\vec{p}$, é dada por,

$$d\mathcal{P}(t, \vec{x}, \vec{p}) = f(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{d^3\vec{x}d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

em que f é a função de distribuição e pode ser pensada como uma densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade de se encontrar uma partícula em um certo tempo t dentro do volume $d^3\vec{x}d^3\vec{p}$. O fator $(2\pi\hbar)^3$ é um fator de normalização devido ao princípio da incerteza de Heisenberg que afirma que nenhuma partícula pode ser encontrada, no espaço de fase, em um volume inferior a este. No que se seguirá irei assumir $\hbar = 1$, quando julgar conveniente informarei a posição que este apareceria nas expressões.

Em um caso de equilíbrio termodinâmico, partículas do tipo bóson, como os fótons, a mecânica estatística nos diz que estas são distribuídas segundo a função de distribuição de probabilidade conhecida como *distribuição de Bose-Einstein*, BE, e no caso de partículas do tipo fermions, como os bárions, f são distribuídas segundo a função de distribuição de probabilidade conhecida como *distribuição de Fermi-Dirac*, FD.

$$f(t, \|\vec{p}\|) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad \begin{cases} (+) & , \text{Bose} - \text{Einstein}, \\ (-) & , \text{Fermi} - \text{Dirac}, \end{cases} \quad (1.65)$$

com μ sendo o potencial químico da espécie, a energia dada pela relatividade como $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, em que m é a massa da espécie, e T a temperatura. Vide que estas não dependem nem da posição, nem das direções da posição e do momento. O que faz sentido quando tratamos do caso homogêneo e isotrópico. A distribuição de partículas, energia das partículas e a pressão não podem depender nem da posição tomada, nem de uma direção preferencial. Então, cada espécie i pode ser descrita por uma função de distribuição f_i , e esta função de distribuição é usada para definir quantidades macroscópicas. Por exemplo, a densidade de energia de uma espécie de partículas i em um volume $d^3\vec{x}d^3\vec{p}$ é dado por $d\rho_i = f_i(t, p) E_i(p)$, e por conseguinte, a energia de uma espécie é obtida contabilizando todas as contribuições no espaço de fase $\sum_{espacó} f_i E_i$. Em suma, temos que a densidade de número de partículas de i , n_i , a densidade de energia, ρ_i , e a pressão a esta espécie associada, p_i , são dadas por,

$$n_i(t) = g_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}), \quad (1.66)$$

$$\rho_i(t) = g_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}) E(p), \quad (1.67)$$

$$P_i(t) = g_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E(p)}, \quad (1.68)$$

em que g_i é o fator de degenerescência da espécie i , i.e., o número de estados de spin²⁵. Lembrando que a integral se dá somente no momento, pois, as quantidades estão sendo expressas em unidades de volume. Observe ainda que no caso dos fótons, que irei me referir nas equações por γ , a energia é $E = p$, então as expressões 1.68 e 1.67 nos dizem que $P_\gamma = \rho_\gamma/3$, que era o que esperávamos.

Gostaria ainda de adicionar uma expressão que nos servirá quando tratarmos das equações de Boltzmann, que irão descrever como as funções de distribuição evoluem em um sistema fora do equilíbrio em um Universo dinâmico, que é a descrição do campo de velocidade dos bárions. Então, o campo de velocidade de um dado fluido constituído por partículas de massa m é descrito como,

$$n_i \vec{v}_i(t, \vec{x}, \vec{p}) = g_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f_i(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{\vec{p}}{m}. \quad (1.69)$$

No caso de um Universo homogêneo e isotrópico, que como vimos implica no fato das funções de distribuição dependerem somente do módulo do momento, p , as integrais podem ser simplificadas por simetria esférica. Além disto, podemos obter expressões diferentes para limites diferentes entre a massa, o potencial químico e a temperatura, como sumarizado na tabela 1.

²⁵ Fótons possuem $g_\gamma = 2$, spin $\pm 1/2$, neutrinos $g_\nu = 1$, e quarks igual a 6.

Tabela 1 – Principais limites das quantidades termodinâmicas n , ρ e P para partículas descritas por BE e FD. Adaptado de [41].

Limite	Tipo	n	ρ	P
$T \gg m, \mu$	BE	$g(\zeta(3)/\pi^3)T^3$	$(\pi^2/30)gT^4$	$\rho/3$
	FD	$g(3\zeta(3)/4\pi^3)T^3$	$(7\pi^2/8 \times 30)gT^4$	$\rho/3$
$\mu \gg T \gg m$	FD	$g\mu^3/6\pi^2$	$g\mu^3/8\pi^3$	$\rho/3$
$T \gg m, \mu \ll -T$	BE, FD	$(g/\pi^2)e^{\mu/T}T^3$	$(3g/\pi^3)e^{\mu/T}T^4$	$\rho/3$
$T \ll m$	BE, FD	$g(mT/2\pi)^3 e^{(\mu-m)/T}$	$(m+3T/2)n$	nT

Para quase todas as partículas e basicamente em todo período em que analisaremos o potencial químico é muito menor do que a temperatura. Logo, uma boa aproximação é tomarmos $(E - \mu)/T \approx E/T$.

Tomemos como exemplo o caso da radiação. Para isto, olhemos a primeira linha da tabela 1 que no caso dos fótons tem $g_\gamma = 2$. Ela nos diz que a densidade de energia dos fótons é

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T_\gamma^4, \quad (1.70)$$

ou seja, como $1K^4 = 1.279 \times 10^{-35} g \text{ cm}^{-3}$, a densidade de energia dos fótons hoje corresponde a $\rho_\gamma^{(0)} \approx 2.8 \times 10^{-34} g \text{ cm}^{-3}$. Vide ainda que desta, uma vez que vimos pela equação da continuidade 1.38 que $\rho_\gamma = \rho_\gamma^{(0)}(a_0/a)^4$, a temperatura da radiação vai com $T_\gamma \sim a^{-1}$. Como a temperatura da CMB hoje é dada como sendo $T_\gamma^{(0)} = 2.725 K$, $T_\gamma^{(0)}a^{(0)} = T_\gamma(t)a(t)$, de forma a termos a razão entre a densidade de energia dos fótons e da densidade crítica hoje dada por,

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_{crit}^{(0)}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} a^{-4} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2} (1+z)^4. \quad (1.71)$$

O parâmetro de densidade dos fótons hoje é dado por,

$$\Omega_\gamma^{(0)} = \frac{\rho_\gamma^{(0)}}{\rho_{crit}^{(0)}} = 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}, \quad (1.72)$$

$$\omega_\gamma = \Omega_\gamma^{(0)} h^2 = 2.47 \times 10^{-5}. \quad (1.73)$$

Já os neutrinos, que possuem massa extremamente pequena e portanto se comportam como partículas ultrarrelativística, são fermions com potencial químico nulo e um grau de liberdade de spin por tipo, g_ν . Existem três tipos de neutrinos, segundo o modelo padrão da física de partículas: neutrino elétron ν_e , neutrino muon ν_μ e o neutrino tau ν_τ . Cada um possui uma antipartícula ($\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$). Então, temos que o número *efetivo* de graus de liberdade de spin é: $g = 6$, segundo o modelo padrão, ou seja, o dobro do número de tipos de neutrinos. Porém, usasse \mathcal{N}_{eff} ao invés de $g/2$, permitindo um número maior

de tipos ou graus relativísticos adicionais²⁶, o valor fornecido por [1] é de $\mathcal{N}_{eff} = 3.046$. Então, olhando a segunda linha da tabela 1,

$$\rho_\nu = \mathcal{N}_{eff} \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^4. \quad (1.74)$$

Comparando as relações 1.70 e 1.74, temos que,

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{7}{8} \mathcal{N}_{eff} \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^4.$$

Com isto, uma vez que $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$,²⁷ podemos obter a parâmetro de densidade da radiação hoje.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\gamma + \rho_\nu}{\rho_{crit}^{(0)}} &= \left(1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \mathcal{N}_{eff} \right) \frac{\rho_\gamma}{\rho_{crit}^{(0)}}, \\ \Omega_r^{(0)} &= \left(1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} \mathcal{N}_{eff} \right) \Omega_\gamma^{(0)} = (1 + 0.2271 \mathcal{N}_{eff}) \Omega_\gamma^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

²⁶ Para uma discussão sobre este tópico, recomendo a leitura de [4] seção 2.4

²⁷ Esta é uma informação que obtemos a partir de um período da história do Universo conhecido como *aniquilação elétron-pósitron*. Sem entrar muito em tal tópico, existiu um período em que a temperatura imposta pelos fótons era tão alta que mantinha em equilíbrio a reação: $e^-e^+ \rightleftharpoons \gamma\gamma$. Com o Universo em expansão, em um dado momento a temperatura cai a ponto desta reação sair do equilíbrio em favor dos fótons. Neste momento a temperatura dos fótons decai menos com a expansão do Universo do que a dos neutrinos, até então em equilíbrio. É possível demonstrar que a diferença entre as temperaturas é tal que satisfaz $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$. A prova utiliza-se da conservação da densidade de entropia comóvel total antes e depois da aniquilação e^-e^+ .

2 Perturbações

Assumir que o Universo é (espacialmente) homogêneo e isotrópico só é verdadeiro quando junto a esta afirmação dizemos em que escala estamos considerando. Claramente, observamos estruturas tais como galáxias, aglomerados, filamentos que dependendo da escala observada não são distribuídos de forma homogênea e isotrópico. Além, um Universo homogêneo e isotrópico tão pouco pode dar origem a estas estruturas, é necessário que tenham existido inomogeneidades na distribuição da matéria para que estas surjam. Se em um dado período do Universo, fótons e bárions interagiam de maneira tão forte a se comportar como um único fluido e com a expansão do Universo, chegou um momento que a taxa com que este se expandia era superior à taxa com que os fótons e os bárions interagiam, então os fótons se desacoplam da matéria, possibilitando que os bárions não somente formem átomos, como estes caiam em poços de potenciais gravitacionais da matéria escura fria e, por conseguinte, a matéria passe a aglomerar via interação gravitacional. Mas, mesmo estes poços só surgem se houver diferenças de densidade de energia da CDM. É preciso que tenha existido inomogeneidades iniciais nas distribuições de matéria.

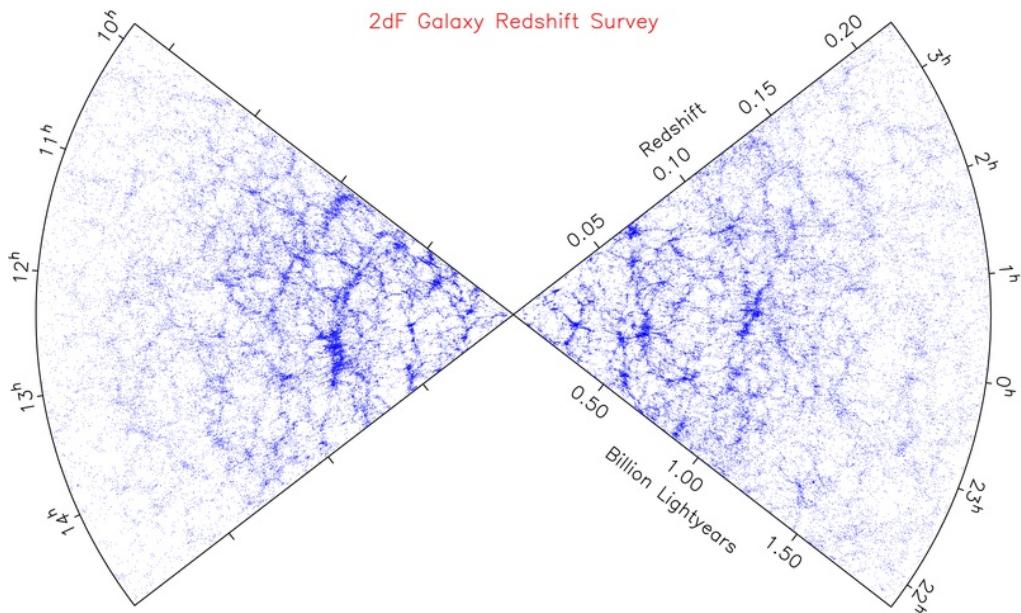


Figura 6 – Distribuição de mais de 200 mil galáxias das cerca de 350 mil medidas pelo 2dF Galaxy Redshift Survey.

Precisamos que nossa descrição do Universo seja refinada a ponto de conseguir descrever tanto a distribuição da matéria e a formação de estruturas no Universo, quanto explicar a flutuação do valor da temperatura da radiação cósmica de fundo (CMB), radiação proveniente do período do desacoplamento, em torno de seu valor atual: 2.725 K com flutuações da ordem de 10^{-5} . Claro que nossa descrição anterior não está errada, mas ela

não irá descrever a riqueza do Universo que observamos. O que faremos é "perturbar" este sistema homogêneo e isotrópico adicionando uma correção de primeira ordem ao tensor métrico. Isto levará a correções de primeira ordem nas equações de campo de Einstein e nas descrições dos fluidos pelo tensor energia-momento. Ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \implies \begin{cases} G_{\mu\nu} = \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}. \end{cases}$$

Uso a barra sobre as quantidades que são descritas no Universo FLRW-flat¹, que daqui por diante chamarei simplesmente de *background*, e os termos com " δ " são termos perturbativos de primeira ordem que serão considerados bem pequenos, de tal forma ao produto de elementos de primeira ordem serem descartáveis. A questão primária é conhecer como descrevemos este novo tensor. Uma vez que pela geometria diferencial tensores são invariantes por transformações gerais de coordenadas existem infinitas transformações que levam $\bar{g} \rightarrow g$, ditas transformações de gauge, o sistema em si será denominado de "gauge", escolheremos um gauge que faça o novo tensor métrico ser diagonal. Isto facilitará nosso trabalho eliminando diversos termos nas equações de campo. Usaremos o *gauge Newtoniano*, ou conforme-Newtoniano ou ainda gauge longitudinal, com a restrição de tratarmos de campos que se transformem como campos escalares sobre rotações,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 \left[-(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (2.1)$$

O fato de tratarmos somente do caso de campos escalares se dá pois são estes que estão relacionados as inomogeneidades da matéria e da anisotropia da radiação. Ao leitor não familiarizado com este tratamento e que queira saber mais do que aqui será exposto, recomendo a leitura do apêndice C, no qual descrevo de forma um pouco mais completa a teoria de gauge em cosmologia e como obtemos o tensor métrico para o gauge Newtoniano. Também sumarizo no mesmo apêndice os valores dos tensores de Einstein e de Ricci, além dos símbolos de Christoffel para o espaço perturbado, e no apêndice D as equações de Einstein descrita por este tensor.

Uma outra questão que precisamos resolver é acerca da forma assumida pelo tensor energia-momento pois é ele quem contém as informações dos constituintes do Universo. Quando tratamos do caso no background assumimos que as componentes poderiam ser descritas por um fluido ideal. Mas agora temos que levar em conta casos de interação entre componentes que não são somente do tipo gravitacional, como é o caso dos bárions e fótons antes do desacoplamento, que fazem com que a função de distribuição de probabilidade da dada espécie não seja mais conservada no espaço de fase, isto é, as componentes não são mais descritas pelas expressões 1.65. Temos que considerar que, em princípio, a função de

¹ Isto é, um Universo homogêneo, isotrópico e sem curvatura.

distribuição de uma certa componente i possa sim depender das direções do momento e da posição, além de poder depender da própria posição, e que estas quantidades podem depender do tempo, devido a movimentos próprios. Então, em princípio, uma espécie i deve ser descrita por uma função de distribuição de probabilidade $f_i(x^\mu, P^\mu)$, como faremos na próxima seção, ao definirmos o momento próprio como $p^2 = g_{ij}P^iP^j$ e uma vez que há o vínculo $P^\mu P_\mu = -m^2$, podemos escrever a função de distribuição como sendo $f_i(t, \vec{x}(t), \vec{p}(t))$, que devido as interações sofre dissipação e portanto varia no espaço de fase,

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \frac{df_i}{d\eta} \neq 0. \quad (2.2)$$

Dado uma função de distribuição de probabilidade, em termos do tempos cósmico, $f_i(t, \vec{x}, \vec{p})$, o tensor energia-momento, em um cenário relativístico geral, para esta componente pode ser descrito em termos da função de distribuição

$$T^\mu{}_\nu(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3 \sqrt{\det|g|}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f(t, \vec{x}, \vec{p}). \quad (2.3)$$

2.1 Quadrimomento em um Universo perturbado

Para prosseguir precisamos saber descrever o quadrimomento, expressão 1.3, em um Universo perturbado descrito segundo o gauge Newtoniano, uma vez que a função de distribuição dependerá deste. Tomemos a definição dada pela expressão 1.3 e usando o vínculo do quadrimomento de uma partícula de massa m ter que satisfazer $P_\mu P^\mu = -m^2$, seja qual sistema de coordenadas estivermos, ao invés de termos de determinar quatro componentes, agora teremos somente três. Definamos a magnitude do momento próprio como a restrição espacial do quadrimomento comóvel do tensor métrico,

$$p^2 \doteq g_{ij}P^iP^j, \quad (2.4)$$

e o versor direção, $\hat{p}^i = P^i/\|P\|$, que satisfaz $\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1$. Com $P^i = \|P\|\hat{p}^i$, utilizemos a definição da magnitude de momento próprio p , para descrever $\|P\|$ em termos dele, e consequentemente, obter a expressão para a parte espacial do quadrimomento.

$$\begin{aligned} p^2 \doteq g_{ij}P^iP^j &= (a^2(1+2\Phi)\delta_{ij})(\|P\|\hat{p}^i)(\|P\|\hat{p}^j) = a^2(1+2\Phi)\underbrace{(\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j)}_{=1}P^2. \\ \|P\| &= \frac{p}{a\sqrt{1+2\Phi}} \approx \frac{p}{a} \left(1 - \frac{1}{2}2\Phi\right). \end{aligned}$$

$$\therefore P^i = \frac{1-\Phi}{a} p \hat{p}^i.$$

Precisamos agora determinar a componente zero do quadrimomento e a fazemos tomando o vínculo imposto pela massa.

$$\begin{aligned} P_\mu P^\mu &= -m^2 = P^0 P_0 + P^i P_i = g_{00} (P^0)^2 + g_{ij} P^i P^j = -(1 + 2\Psi) (P^0)^2 + p^2, \\ - (P^0)^2 &= -\frac{p^2 + m^2}{1 + 2\Psi} \implies P^0 = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{1 + 2\Psi} \approx \sqrt{p^2 + m^2} \left(1 - \frac{1}{2}2\Psi\right). \end{aligned}$$

Portanto, o quadrimomento de uma partícula de massa m em um Universo perturbado descrito pelo gauge Newtoniano é dado por,

$$P^\mu = \left(\sqrt{p^2 + m^2} (1 - \Psi), \frac{1 - \Phi}{a} p \hat{p}^i \right). \quad (2.5)$$

Para componentes não massivas tais como os fótons, esta fica,

$$P^\mu = \left(1 - \Psi, \frac{1 - \Phi}{a} \hat{p}^i \right) p. \quad (2.6)$$

2.2 Equações de Boltzmann

Aqui, por conveniência, irei trabalhar com o tempo cósmico e somente quando obtiver as equações de interesse eu as transformarei ao tempo conforme.

De modo geral, temos que a variação da função de distribuição no espaço de fase será devido aos tipos de interação não-gravitacional que a espécie estará envolvida. Se a espécie i interage com N tipos de componentes², então, temos uma equação que denominamos de **equação de Boltzmann**

$$\frac{df_i}{dt} = P^0 \frac{df_i}{d\eta} = \sum_{j=1}^N C_{ij} [f_i, f_j], \quad (2.7)$$

em que C_{ij} representa um funcional das funções de distribuição das espécies i e j . Ele também é conhecido como termo de colisão, e contém a informação da interação entre as espécies. Como P^μ pode ser descrito somente por P^i e este descrito por p e \hat{p}^i , a função de distribuição é caracterizada como $f(t, x^i, p, \hat{p}^i)$. Abrindo-a em suas derivadas parciais (ocultando o subíndice referente à espécie para não confundir com os índices das componentes)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt},$$

que ainda pode ser simplificada. O último termo é um termo de ordem perturbativa superior à primeira, uma vez que a dependência de f na direção de propagação só ocorre se houver perturbação (no mínimo um termo de primeira ordem) e a direção de propagação

² Tenho usado o termo espécie e componente como sinônimos.

somente irá mudar se existirem potenciais tais como Φ e Ψ (no mínimo de primeira ordem), então o produto é no mínimo de segunda ordem e por isso desprezível.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}. \quad (2.8)$$

A ideia agora é resolver a equação de Boltzmann neste cenário cosmológico para as componentes de interesse. Não desenvolverei detalhadamente as equações mas procurarei referir as principais ideias que levam aos resultados que irei apresentar. Para derivação detalhada das equações de Boltzmann indico fortemente a leitura dos livros [17] e [42]. Irei fazer uma descrição superficial do caso dos fótons e do caso dos bárions. O caso dos neutrinos é obtido de maneira similar ao dos fótons e será apontado como se obtêm observando o resultado dos fótons. Já o caso da CDM é similar ao dos bárions exceto que o lado direito das equações de Boltzmann 2.7 é nula, uma vez que CDM só interage gravitacionalmente. A sua descrição se dá somente pelo lado esquerdo da equação de Boltzmann. Ao final procuraremos reunir todas equações obtidas para estas componentes e que estão acopladas entre si e adicionaremos à elas as equações de Einstein. Este conjunto de equações é fechado e pode ser resolvido analiticamente. O caso da DE, aqui assumirei que este não interage e nem aglomera, tão pouco possui termos perturbativos.

I Equações de Boltzmann para os fótons: Tomando o quadrimomento dos fótons descrito pela relação 2.6, temos que a derivada temporal da triposição é dada por,

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{1}{\|\frac{dt}{d\lambda}\|} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{(1 - \Phi) p \hat{p}^i / a}{(1 - \Psi) p} \\ &= (1 - \Phi) (1 + \Psi) \frac{\hat{p}^i}{a} \approx (1 - \Phi + \Psi) \frac{\hat{p}^i}{a}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Agora falta o termo dp/dt . Para obter este precisamos da equação da geodésica da GR, que escreveremos em termos do quadrimomento

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} P^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta.$$

Tomando o termo $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} P^0 &= \frac{dt}{d\lambda} \frac{d}{dt} P^0 = -\Gamma^0_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta, \\ P^0 \frac{d}{d\lambda} ((1 - \Psi) p) &= -\Gamma^0_{00} (P^0)^2 - 2\Gamma^0_{0k} P^0 P^k - \Gamma^0_{ij} P^i P^j, \\ p \frac{d}{dt} (1 - \Psi) + (1 - \Psi) \frac{dp}{dt} &= -\Gamma^0_{00} P^0 - 2\Gamma^0_{0k} P^k - \Gamma^0_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0}, \\ (1 - \Psi) \frac{dp}{dt} &= \frac{d\Psi}{dt} p - \left(-\Gamma^0_{00} P^0 - 2\Gamma^0_{0k} P^k - \Gamma^0_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0} \right), \\ \frac{dp}{dt} &\approx (1 + \Psi) \frac{d\Psi}{dt} p - (1 + \Psi) \left(\Gamma^0_{00} P^0 + 2\Gamma^0_{0k} P^k + \Gamma^0_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0} \right) \\ &\approx \frac{d\Psi}{dt} p' + \left((1 + \Psi) \Gamma^0_{00} P^0 + (1 + \Psi) 2\Gamma^0_{0k} P^k + (1 + \Psi) \Gamma^0_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0} \right) \end{aligned}$$

com os símbolos de Christoffel sendo fornecidos no final do apêndice C,

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \Gamma^0_{0i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \end{cases} \implies \begin{cases} (1 + \Psi) \Gamma^0_{00} = (1 + \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ (1 + \Psi) \Gamma^0_{0i} = (1 + \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \approx \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}. \end{cases}$$

$$\left\{ \Gamma^0_{ij} = a \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2H(\Phi - \Psi) \right) \right\} \implies \left\{ \frac{1+\Psi}{P^0} \Gamma^0_{ij} = \frac{1+\Psi}{(1-\Psi)p} \Gamma^0_{ij} \approx \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right\} .$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{d\Psi}{dt} p' + \left((1 + \Psi) \Gamma^0_{00} P^0 + (1 + \Psi) 2\Gamma^0_{0k} P^k + (1 + \Psi) \Gamma^0_{ij} \frac{P^i P^j}{P^0} \right) \\ &\approx \frac{d\Psi}{dt} p - \frac{\partial \Psi}{\partial t} P^0 - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} P^i - \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) P^i P^j \\ &\approx \frac{d\Psi}{dt} p - \frac{\partial \Psi}{\partial t} (1 - \Phi) p - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{1 - \Phi}{a} p \hat{p}^i - \frac{a^2}{p} \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \frac{(1 - \Phi)^2}{a^2} p^2 \underbrace{\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j}_{=1} \\ &\approx \frac{d\Psi}{dt} p - \frac{\partial \Psi}{\partial t} p - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{p}{a} \hat{p}^i - \left(H + 2H\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) (1 - 2\Phi) p \\ &\approx \underbrace{\frac{d\Psi}{dt} p - \frac{\partial \Psi}{\partial t} p}_{=\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} p} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{p}{a} \hat{p}^i - \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) p \\ &= \frac{\hat{p}^i}{a} (1 - \Phi + \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} p - 2 \frac{p \hat{p}^i}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - H p \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\therefore \frac{dp}{dt} = -\frac{p}{a} \hat{p}^i \Psi_{,i} - H p - p \Phi_{,0}, \quad (2.10)$$

que demonstra a perda de energia devido tanto à expansão, quanto à ação dos potenciais.

Substituindo os valores das expressões 2.9 e 2.10 na relação 2.8, e lembrando que a dependência da função de distribuição com a direção é uma correção de no mínimo de primeira ordem

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - p \left(H + \Phi_{,0} + \frac{1}{a} \hat{p}^i \Psi_{,i} \right) \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (2.11)$$

O próximo passo é perturbar a própria função de distribuição entorno do seu valor no background, isto é, tomar f como uma perturbação da função de distribuição de BE, f_{BE} . É possível provar que pela conservação de f_{BE} , ou seja, o termo de ordem zero,

$$\frac{df_{BE}}{dt} = 0 \implies \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \implies \frac{\delta E}{E} = \frac{\delta T}{T} \doteq \Theta,$$

com Θ sendo um termo que depende da posição e do momento, assim como de suas direções. Este termo quantifica a perturbação na temperatura da radiação. Assim,

temos que a informação da anisotropia e da inhomogeneidade da mesma está contida nesta quantidade. Então podemos supor que a correção na função de distribuição dos fótons possa ser contabilizado pela perturbação da temperatura na expressão 1.65. Portanto, se eu supuser que f assume a forma

$$f = \frac{1}{e^{p/T(1+\Theta)} - 1}, \quad (2.12)$$

e uma vez que a principal interação que os fótons sofreram no dado período se deva ao espalhamento Compton, que basicamente não altera o módulo do momento próprio, $\Theta = \Theta(t, \vec{x}, \hat{p})$. A expansão de Taylor da função de distribuição fica,

$$f(t, \vec{x}, \hat{p}) \approx f_{BE}(t, p) + \left(-\frac{\partial f}{\partial E} E \right) \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) = f_{BE}(t, p) - p\Theta \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Utilizando-a na expressão da derivada temporal da função de distribuição e mantendo somente termos de primeira ordem, $f^{(1)}$, temos

$$\frac{df}{dt} = \frac{df^{(1)}}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} \right). \quad (2.13)$$

Agora temos o lado esquerdo da equação de Boltzmann, falta-nos o lado direito que é o termo de colisão. Para tal precisamos saber que tipo de interações estão envolvidas na análise. Estarei interessado no período em que basicamente as interações dos fótons se deve aos bárions, mais especificamente com os elétrons, via espalhamento Compton.

Estaremos interessados na mudança da função de distribuição de um dado fóton com momento próprio \vec{p} interagindo via espalhamento Compton com um elétron que inicialmente tem momento \vec{q} . Esquematicamente,

$$e^-(\vec{q}) + \gamma(\vec{p}) \rightleftharpoons e^-(\vec{q}') + \gamma(\vec{p}').$$

Para obter a mudança na função de distribuição dos fótons com momento \vec{p} temos que "marginalizar" sobre o efeito dos outros momentos. A expressão não é nada bela e tem a forma [17],

$$\begin{aligned} C[f(\vec{p})] &= \frac{1}{p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}(p')} \|\mathcal{M}\|^2 \times \\ &\quad (2\pi)^4 \delta(p^\mu + q^\mu - p'^\mu - q'^\mu) \{f_e(\vec{q}') f(\vec{p}') - f_e(\vec{q}) f(\vec{p})\}. \end{aligned}$$

Vide que pelo último termo, se as funções de distribuições forem conservadas, isto é, o sistema estiver em equilíbrio, o termo se anula e o termo de colisão também. A função delta de Dirac garante a conservação do quadrimomento. O termo $\|\mathcal{M}\|$ é chamada de amplitude de espalhamento e esta relacionada a seção de choque de Thomson, e portanto, a probabilidade de uma interação ocorrer. A expressão acima

não contabiliza efeitos como bloqueio de Pauli e emissão estimulada, que na teoria linear e após o período da aniquilação elétron-pósitron podem ser descartados.

Não irei tratar desta expressão. Mas sob as condições que direi a seguir, não é difícil obter os resultados, só necessitando de paciência e concentração nos cálculos.

- Assumirei que no período os elétrons são basicamente não-relativísticos ($E_e(\vec{q}) \approx m_e + q^2/2m_e$).
- Usarei o fato do espalhamento Compton **não relativístico** transferir pouca energia, e com isto, o módulo do momento próprio é basicamente constante ($p \approx p'$).
- Obviamente, $q \gg p, p'$.
- Por hora, assumirei também que $\|\mathcal{M}\|$ não dependa nem do ângulo de espalhamento, nem da polarização do fóton.

Esta última hipótese não altera significativamente a análise, uma vez que, por exemplo, ao tomarmos a contribuição angular $\|\mathcal{M}\| \sim 1 + \cos^2(\theta)$, ou seja, somente adicionará um termo. Os cálculos não complicam tanto. Ao final, adicionarei as contribuições de polarização e do ângulo devidamente, sem nenhuma perda significativa de entendimento do processo.

As hipóteses acima levam à simplificação do termo de colisão

$$C[f(\vec{p})] = \frac{\pi}{4m_e^2 p} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} f_e(\vec{q}) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 p'} \left(\delta(p - p') - \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{q}}{m_e} \right) \|\mathcal{M}\|^2 \{f(\vec{p}') - f(\vec{p})\}.$$

Usando as expressões 1.66 e 1.69³, que $\|\mathcal{M}\| = 8\pi\sigma_T m_e^2$, σ_T é a seção de choque de Thomson, e definindo a média angular da anisotropia da temperatura da radiação como

$$\Theta_0(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(t, \vec{x}, \hat{p}'), \quad (2.14)$$

em que este termo se chama **monopolio**⁴ da anisotropia da temperatura da radiação, o termo de colisão é reduzido a

$$C[f(\vec{p})] = -n_e \sigma_T \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \{ \Theta_0(t, \vec{x}) - \Theta_0(t, \vec{x}, \hat{p}) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b \}.$$

Este é o termo de colisão dos fótons devido ao espalhamento Compton não-relativístico. Juntando este com o resultado obtido para a função de distribuição, resulta na

³ Aqui o campo de velocidade é escrito como $\vec{v}_p = \vec{v}_e = \vec{v}_b$, ou seja, o campo de velocidade dos elétrons é basicamente o campo de velocidade dos prótons e portanto dos bárions, pois, o forte acoplamento devido ao espalhamento Coulomb entre eles os faz se comportar como um único fluido.

⁴ De modo geral, definimos os multipolos da anisotropia como sendo $\Theta_\ell \doteq \frac{1}{(-i)^\ell} \int \frac{d\mu}{2} \Theta(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu)$, em que \mathcal{P}_ℓ é o multipolo de Legendre de ordem ℓ .

equação de Boltzmann para os fótons⁵

$$a \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \hat{p} \cdot \nabla \Theta + a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \hat{p} \cdot \nabla \Psi = n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b). \quad (2.15)$$

Caso considerassemos a amplitude de espalhamento com dependência ângular ocorreria a adição dentro do parêntesis do termo $\mathcal{P}_2(\mu) \Theta_2/2$, em que temos o polinômio de Legendre de segunda ordem e o quadrupolo da anisotropia (ver definição na nota de rodapé 4.). Já se adicionassemos a polarização, teríamos de corrigir este último termo com $\Theta_2 \rightarrow \Theta_2 + (\Theta^P)_2 + (\Theta^P)_0$, com estes dois últimos sendo as anisotropias da polarização, que são descritas pelos parâmetros de Stokes. Podemos ainda expandi-las em termos dos modos de Fourier dos campos escalares (sobre rotação), e uma vez que assumimos o fluido sendo irrotacional, pois tem sua perturbação advinda das perturbações escalares (irrotacionais) e portanto se propaga na direção \hat{k} , $\vec{v}_b = v_b \hat{k}$, definido $\mu = \hat{p} \cdot \hat{k}$,

$$a \frac{\partial \Theta}{\partial t} + ik\mu\Theta + a \frac{\partial \Phi}{\partial t} + ik\mu\Psi = n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \mu v_b), \quad (2.16)$$

que em tempo conforme fica,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = n_e \sigma_T a (\Theta_0 - \Theta + \mu v_b). \quad (2.17)$$

Adicionando as contribuições da polarização e do ângulo de espalhamento,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + ik\mu\Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = n_e \sigma_T a \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right), \\ \Pi \doteq \Theta_2 + (\Theta^P)_2 + (\Theta^P)_0. \end{cases}$$

A anisotropia na temperatura dos neutrinos será representada por \mathcal{N} e coincide com a dos fótons, exceto pelo fato de interagir somente de maneira fraca, levando ao termo da seção de choque ser basicamente nulo.

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \eta} + ik\mu\mathcal{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + ik\mu\Psi = 0. \quad (2.18)$$

II Equação de Boltzmann para os bárions: Sua derivação segue de maneira muito parecida com o caso dos fótons, com as devidas adaptações. Como os elétrons interagem via espalhamento Compton com os fótons e espalhamento Coulomb com os prótons; e os prótons, basicamente, interagem somente com os elétrons, já que a amplitude de espalhamento da interação Compton depende do inverso da massa,

⁵ É bom manter cuidado pois pode ocorrer confusão em que espaço se está trabalhando, se o real ou de Fourier, não usarei nenhum adição de identificação aos termos para não carregar a notação, mas sempre que julgar necessário irei especificar o espaço que esta sendo tomado.

partícula/instante	antes	depois
elétron	q	q'
próton	Q	Q'
fóton	p	p'

Tabela 2 – Resumo dos momentos envolvidos nas interações para a equação de Boltzmann para os bárions. O "linha" sobre a letra sempre irá se referir ao momento após a interação.

e a massa do próton é muito maior do que a do elétron, temos que as equações de Boltzmann são esquematizadas como sendo,

$$\begin{cases} \frac{df_e(t, \vec{x}, \vec{q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} + \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'}, \\ \frac{df_p(t, \vec{x}, \vec{q})}{dt} = \langle C_{e-p} \rangle_{qq'Q'}, \end{cases} \quad (2.19)$$

em que uso a representação

$$\langle \dots \rangle_{xx'y'} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3y'}{(2\pi)^3} (\dots).$$

Usando as expressões 1.66 e 1.69, e que

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{df_e}{dt} - \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} - \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'} \right] = 0,$$

obtemos a equação para a densidade de número dos elétrons.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} (n_e v_b^i) + 3 \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_e = \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'q} + \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'q}.$$

Os termos $\langle \dots \rangle_{xx'y'y}$ são simétricos em relação as trocas $x \leftrightarrow x'$ e $y \leftrightarrow y'$. Contudo, C_{e-p} e $C_{e-\gamma}$ são completamente antissimétricos pelas trocas, devido a troca que ocorre no termo que contém os produtos entre funções de distribuição. Logo, estes dois fatos só podem ser simultaneamente satisfeitos se as quantidades forem nulas.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} (n_e v_b^i) + 3 \left(H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) n_e = 0. \quad (2.20)$$

Se perturbarmos a densidade de número: $n_e = n_e^0 (1 + \delta(t, \vec{x}))$, a equação de ordem zero é justamente a conservação da densidade de número de elétrons comóvel $d(n_e^0 a^3)/dt = 0$. Já o termo de primeira ordem fornece,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v}_b + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

Esta equação é válida tanto para bárions quanto para CDM.

A equação de campo de velocidade é obtida com as integrações

$$\begin{cases} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q \hat{q}^j \left[\frac{df_e}{dt} - \langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} - \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'} \right] = 0, \\ \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} Q \hat{Q}^j \left[\frac{df_p}{dt} - \langle C_{e-p} \rangle_{qq'Q'} \right] = 0. \end{cases}$$

A primeira implica em

$$m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} (n_e v_e^i) + 4H(n_e v_e^i) + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} n_e \right) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q \hat{q}^j (\langle C_{e-p} \rangle_{QQ'q'} + \langle C_{e-\gamma} \rangle_{pp'q'}).$$

Usando que,

$$\begin{cases} \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q^3 \hat{Q}^j}{m_p E} \frac{\partial f_p}{\partial Q} = -4n_p v_b^j, \\ \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{Q \hat{Q}^i \hat{Q}^j}{m_p} \frac{\partial f_p}{\partial Q} = -n_p \delta^{ij}, \\ \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} Q \hat{Q}^j \langle C_{e-p} \rangle_{qq'Q'} \doteq \langle C_{e-p} Q^j \rangle_{qq'Q'Q}, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} \langle C_{e-p} q^j \rangle_{QQ'q'q} + \langle C_{e-\gamma} q^j \rangle_{QQ'q'q} = m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} (n_e v_e^i) + 4H(n_e v_e^i) + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} n_e \right), \\ \langle C_{e-p} Q^j \rangle_{qq'Q'Q} = m_e \left(\frac{\partial}{\partial t} (n_p v_b^i) + 4H(n_p v_b^i) + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} n_p \right), \end{cases} \quad (2.22)$$

e, sendo válidas as expressões

$$\begin{cases} m_p n_p + m_e n_e \approx m_p n_b, \\ m_p n_b = \rho_b, \\ \rho_b = \rho_b^0 (1 + \delta_b), \\ \rho_b^0 = m_p n_b^0, \end{cases}$$

com a soma das equações 2.22, chegamos a simplificação,

$$\begin{cases} \langle C_{e-p} (q^j + Q^j) \rangle_{QQ'q'q} = 0, \\ \vec{q} + \vec{Q} = \vec{q}' + \vec{Q}' \implies \langle C_{e-\gamma} q^j \rangle_{pp'q'q} = -\langle C_{e-\gamma} Q^j \rangle_{pp'q'q}. \end{cases}$$

$$\implies \frac{\partial v_b^j}{\partial t} + H v_b^j + \frac{1}{a} \nabla_i \Psi = -\frac{1}{\rho_b^0} \langle C_{e-p} Q^j \rangle_{pp'q'q}.$$

Por fim, desta é possível demonstrar que, ao expandirmos os campos perturbativos de velocidade e da anisotropia na temperatura da radiação em modos de Fourier, resolvendo a integral dos colchetes com o termo de colisão já obtido quando falamos sobre equações de Boltzmann para os fôtons, temos

$$\therefore \frac{\partial v_b}{\partial t} + H v_b + \frac{1}{a} \vec{k} \cdot \nabla \Psi = \frac{\dot{\tau}}{a} \left(\frac{4\rho_\gamma^0}{3\rho_b^0} \right) (3i\Theta_1 + v_b) \equiv \frac{\dot{\tau}}{a\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b), \quad (2.23)$$

que é a equação do campo de velocidade dos bárions. O termo τ é conhecido como profundidade ótica e dado por: $\dot{\tau} = -n_e \sigma_T$, e o termo⁶ $\mathcal{R} = 3\rho_b^0/4\rho_\gamma^0$. O caso dos campo de velocidade da CDM é igual, exceto que não há seção de choque de Thomson. Logo, o lado direito é zero.

Podemos agora resumir as equações que obtemos das equações de Boltzmann (no espaço de Fourier), adicionando a contribuição das perturbações da polarização⁷.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right), \\ \Theta^{P'} + ik\mu\Theta^P = \tau' \left(\Theta^P - \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P}_2(\mu))\Pi \right) \\ \delta_c' + ikv_c = -3\Phi', \\ v_c' + \mathcal{H}v_c = -ik\Psi, \\ \delta_b' + ikv_b = -3\Phi', \\ v_b' + \mathcal{H}v_b = -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}}(3i\Theta_1 + v_b), \\ \mathcal{N} + ik\mu\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Este sistema de equações acoplados deve ser completado com as equações de campo de Einstein. Estas foram obtidas no apêndice D, e estão resumidas na expressões D.8. Este sistema de equações pode ser resolvido computacionalmente, contudo, para termos ideia de seus resultados podemos tomar certos limites de análise de tal forma a simplificá-las.

2.3 Condições iniciais para as equações de Boltzmann-Einstein

É comum tratarmos as equações de Boltzmann-Einstein em dois limites diferentes que se dão entre a relação do comprimento de onda (físico) associado as perturbações $k = 2\pi a/\lambda_p$ e o horizonte de partículas. Com o horizonte de partículas sendo dado pela expressão 1.17, $\chi_p = \eta$. Consideramos três possíveis regimes:

- $\eta \ll 1/k$ (**Superhorizonte**),
- $\eta \sim 1/k$ (**Região de cruzamento**),
- $\eta \gg 1/k$ (**Subhorizonte**).

Na época de domínio da radiação $\mathcal{H} = \eta^{-1}$, então podemos simplesmente comparar os números de onda com a função de Hubble comóvel.

⁶ Quando eu escrever explicitamente que esta quantidade depende do redshift, ou tempo, irei querer dizer que as densidades dependem destas. Quando mantiver omitido esta informação, ficará subentendido que se refere ao caso de $z = 0$.

⁷ Para entender mais sobre estas, recomendo fortemente a leitura dos livros [17] e [42].

- $k \ll \mathcal{H}$ (**Superhorizonte**),
- $k \sim \mathcal{H}$ (**Região de cruzamento**),
- $k \gg \mathcal{H}$ (**Subhorizonte**).

Assim, dizer que estamos em uma escala de superhorizonte significa que o tamanho do comprimento de onda das perturbações é muito maior do que o tamanho do horizonte (de partículas). E de modo inverso, falar em escala de subhorizonte, é se referir ao fato do tamanho do comprimento de onda das perturbações ser muito menor que o tamanho do horizonte.

Para resolver tal sistema necessitamos de condições iniciais. Assumirei por todo este trabalho que estamos tratando de condições iniciais adiabáticas ([17], [42], [2]). Para imaginar como estabelecer tal fato, tomemos um período tão inicial tal que possamos expandir os campos $(\delta_\gamma, \delta_\nu, \delta_b, \delta_c, v_b, v_c, \Phi, \Psi, \Theta^P)$ em séries de potência de $k\eta$, em torno de 0. Tomemos por exemplo a equação do contraste de densidade dos bárions,

$$\sum_n \left(\delta_b^{(n)} \frac{n}{\eta} + ik\eta v_b^{(n)} + 3\Phi^{(n)} \frac{n}{\eta} \right) (k\eta)^n = 0,$$

demonstrando que neste período primordial o campo de velocidade dos bárions é uma potência $k\eta$ maior que os dois outros campo, e portanto subdominante, de tal forma a podermos aproximar a equação para o contraste de densidade como

$$\delta'_b \approx -3\Phi'. \quad (2.25)$$

Seguindo o mesmo procedimento para as demais equações^{8,9}:

$$\begin{cases} \Theta'_0 = -\Phi', \\ \mathcal{N}'_0 = -\Phi', \\ \delta'_b = -3\Phi', \\ \delta'_c = -3\Phi'. \end{cases} \implies \begin{cases} \Theta_0 = -\Phi + A_\gamma, \\ \mathcal{N}_0 = -\Phi + S_\nu, \\ \delta_b = -3\Phi + S_b, \\ \delta_c = -3\Phi + S_c. \end{cases} \quad (2.26)$$

⁸ Para a equação da anisotropia dos fótons e a dos neutrinos é preciso fazer um passo antes. Escrever a equação em equações para os multipolos ℓ , uma equação para cada. Para tal, deve se integrar a equação da anisotropia em termos do ângulo e junto dos polinômios de Legendre, como é na definição de multipolo. A resolução da integral da equação da anisotropia leva a quatro equações diferentes: para $\ell = 0$, $\ell = 1$, $\ell = 2$ e para $\ell > 2$. Com tais equações, expandisse cada multipolo em potências de $k\eta$ e verificasse os limites. Como as equações dos multipolos estão acopladas, irá se encontrar que cada multipolo irá com a potência igual a sua ordem, i.e., $\Theta_\ell \sim (k\eta)^\ell$, e portanto, quanto menor for o termo $k\eta$ menos multipolos contribuem, de forma a períodos primordiais somente o monopolo contribuir.

⁹ Uma vez que o termo que contabiliza o acoplamento, τ' , é $n_e \sigma_T a$, sendo σ_T constante e $n_e \sim a^{-3}$, $\tau' \sim a^{-2} \sim \eta^{-2}$, e portanto, para evitar divergência quando $\eta \rightarrow 0$, impomos que as quantidades que multiplicam τ' devem se anular. Este fato leva aos termos da anisotropia da polarização basicamente serem desprezíveis.

A condição de adiabaticidade inicial é estabelecida tomando as constantes de integração (que dependem somente do módulo do número de onda) S 's nulas. O que nos leva a termos

$$\frac{1}{3}\delta_b = \frac{1}{3}\delta_c = \Theta_0 = \mathcal{N}_0 = A_\gamma - \Phi. \quad (2.27)$$

Ao aplicarmos estas condições na equação de Einstein (00), derivando duas vezes a equação de Einstein (0*i*), e tomando os devidos limites fornecidos pela escala, chegamos as condições:

$$\begin{cases} \Phi = -\left(1 + \frac{2}{5}f_\nu\right)\Psi, \\ \Psi = -\frac{10}{15 + 4f_\nu}A_\gamma, \\ f_\nu \doteq \rho_\nu/\rho_r. \end{cases} \quad (2.28)$$

O valor de A_γ é fornecido pela inflação e esta relacionada com a perturbação da curvatura primordial.

Definamos o valor do potencial Φ imediatamente após o período inflacionário, que comumente temo chamado de período inicial, e portanto as condições iniciais são as condições imediatamente após a inflação, como sendo

$$\Phi(k, \eta_{ini}) = \Phi_P(k). \quad (2.29)$$

Como veremos à frente, são as amplitudes das flutuações no valor deste potencial que implicarão no que chamaremos de **espectro de potência primordial**, e desde que consigamos contabilizar as influências sobre as escalas k no período da transição entre matéria e radiação, que afetam de forma distinta diferentes escalas, e como essas perturbações evoluem no tempo, podemos prever como essas flutuações são observadas.

2.4 Oscilações acústicas de bárions

As condições expostas na seção anterior possiblitz-nos resolver as equações de Boltzmann-Einstein e conhecer como as inomogeneidades na matéria e as anisotropias na radiação evoluem. Conhecer estes é primordial para entendermos o Universo que observamos. Veja que tratamos de um período de domínio da radiação, isto é, a sua contribuição para a densidade de energia do Universo é dominante frente as demais contribuições. Além disso, como vimos, os fótons estão fortemente acoplados aos bárions via espalhamento Compton. Enquanto existir acoplamento, não há possibilidade de átomos serem formados em quantidade significativa, tão pouco de matéria se aglomerar para formar estruturas. É preciso que este regime de forte acoplamento cesse e os átomos possam ser formados e possam cair nos poços potenciais formados pela matéria escura. No entanto, as inomogeneidades observadas estão diretamente relacionadas com este forte acoplamento, pois, é necessário que surjam regiões de sobredensidade para que cada vez mais matéria seja atraída, e o um

dos mecanismos que amplificam estas diferenças de densidade se devem a disputa entre a atração gravitacional imposta pela matéria e a pressão da radiação que força contra a aglomeração. No caso da pressão ser baixa frente à força gravitacional, a sobredensidade aumenta exponencialmente, mas se for alta, a sobredensidade oscila.

Se este caráter oscilatório de fato existiu, possivelmente ele gerou ondas sonoras que se propagaram por este fluido (plasma) formado por bárions e fótons. Considerando uma única perturbação de densidade esférica no fluido ela irá se propagar para fora (em relação ao centro da perturbação) com velocidade sonora¹⁰ $c_s = c/\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(z))}$, e após os fótons e bárions desacoplarem, esta onda sonora "congelaria" e deixaria tal característica na distribuição de matéria no Universo através de um excesso de densidade na escala do **horizonte sonoro**, r_s ¹¹, próximo ao período do desacoplamento, que basicamente é a distância percorrida pela onda sonora até o período. Este "pico" de sobredensidade foi primeiramente medido na distribuição de galáxias em 2005 [19], encontrando um pico na função de correlação das galáxias apresentado na figura 8. Um pico no espaço real leva a formação de oscilações no espaço de Fourier, da mesma maneira que uma função "top-hat" no espaço real é levada a ter um comportamento oscilatório no espaço de Fourier, com uma **escala característica** $k_A = 2\pi/r_s$. Este comportamento é predito pela teoria perturbativa linear e é a base do nosso trabalho. Efeitos de não linearidade aparecem em pequenas escalas, o que no caráter oscilatório leva ao efeito de amortecimento após o terceiro pico acústico, de tal forma a podermos nos restringir a somente os dois primeiros picos das oscilações.

A estas oscilações chamaremos de oscilações acústicas de bárions (BAO) e estas são uma das mais modernas ferramentas de, não somente estudo cosmológico, como também de calibração de medidas de distâncias no Universo, uma vez que esta nos fornece uma medida de escala bem determinada que pode ser encontrada em redshifts posteriores a era da recombinação (EoR) e utilizada segundo os métodos descritos na seção 1.11.4. No caso de estudo de modelos cosmológicos, ela é uma poderosa maneira de entender a natureza da energia escura. Portanto, complementando restrições de parâmetros junto a radiação cósmica de fundo, que nos dá informações do Universo em um período "jovem". O benefício da combinação de diferentes fontes de informação cosmológica para conhecimento dos parâmetros cosmológicos pode ser visto pela figura 7.

¹⁰ Lembrando que $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}(1+z)^{-1}$.

¹¹ $r_s = \int_{z_{drag}}^{\infty} dz \frac{c_s(z)}{H(z)}$, onde z_{drag} não é exatamente o redshift do desacoplamento, que é determinado quanto a função de Hubble e a taxa de interação Compton são iguais, mas é o redshift em que cessa o arrasto dos bárions devido ao efeito Compton.

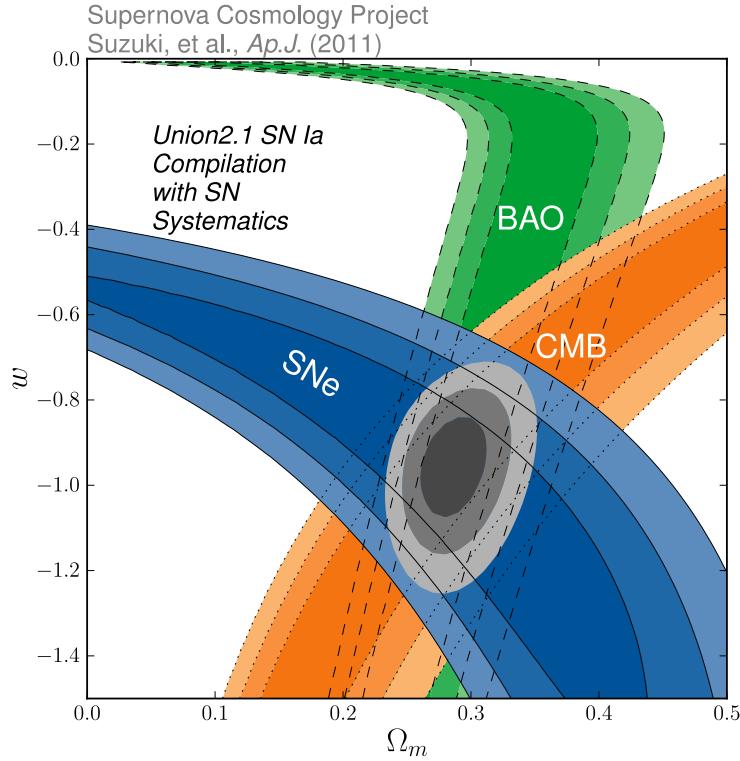


Figura 7 – Restrições de valores para a matéria e para o valor da equação de estado da DE combinando informações diferentes. Fonte: [52]

Precisamos agora obter a(s) equação(ões) que descreva(m) estas oscilações, que também devem estar de alguma forma impressas na anisotropia da radiação.

Tomemos a equação proveniente dos fótons,

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi = -\tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right). \quad (2.30)$$

Como discutido na seção anterior, inicialmente, no regime de forte acoplamento, temos que a contribuição para Θ se deve principalmente ao monópolo e ao dipolo, Θ_0 e Θ_1 , além de podermos desprezar a influência da polarização. Então, reescrevemos a equação acima para estas quantidades.

$$\frac{1}{(-i)^\ell} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) (\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi) = \frac{-1}{(-i)^\ell} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_\ell(\mu) \tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right).$$

Tomando $\ell = 0$ e 1 , e usando as relações de ortogonalidade dos polinômios de

Legendre^{12,13},

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(-i)^0} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0(\mu) (\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi) &= \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \Theta \right)' + ik \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_0 \Theta \right) \\
 &\quad + \Phi' \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \right) + ik\Psi \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 \right) \\
 &= \Theta_0' + k\Theta_1 + \Phi', \\
 -\frac{1}{(-i)^0} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0(\mu) \tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right) &\approx \tau' \Theta_0 \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \right) - \tau' \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \Theta \right) \\
 &\quad + v_b \left(\int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1 \right) \\
 &= \tau' \Theta_0 - \tau' \Theta_0 = 0.
 \end{aligned}$$

De forma, a termos a equação do monopolo sendo:

$$\Theta_0' + k\Theta_1 + \Phi' = 0.$$

Para o dipolo, usando as relações de recursão dos polinômios de Legendre¹⁴

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1(\mu) (\Theta' + ik\mu\Theta + \Phi' + ik\mu\Psi) &= \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \Theta \right)' + ik \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1 \Theta \right) \\
 &\quad + \Phi' \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \right) + ik\Psi \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1 \right) \\
 &= \Theta_1' + ik \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \left(\frac{2}{3} \mathcal{P}_2 + \frac{1}{3} \mathcal{P}_0 \right) \Theta \right) - \frac{k\Psi}{3} \\
 &= \Theta_1' - \frac{k}{3} \Theta_0 - \frac{k\Psi}{3}, \\
 -\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1(\mu) \tau' \left(\Theta_0 - \Theta + \mu v_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right) &\approx \tau' \Theta_0 \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \right) \\
 &\quad - \tau' \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \Theta \right) \\
 &\quad + \tau' v_b \left(\frac{1}{(-i)^1} \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1 \right) \\
 &= -\tau' \Theta_1 + \tau' \frac{v_b}{3i} = -\tau' \left(\Theta_1 - \frac{iv_b}{3} \right).
 \end{aligned}$$

De forma a termos

$$\Theta_1' - \frac{k}{3} (\Theta_0 + \Psi) = \tau' \left(\Theta_1 - \frac{iv_b}{3} \right).$$

¹² $\int_{-1}^1 dx \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) = 2\delta_{\ell\ell'}/(2\ell+1)$.

¹³ $\mathcal{P}_0(\mu) = 1, \mathcal{P}_1(\mu) = \mu, \mathcal{P}_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2, \dots$

¹⁴ $(2\ell+1)\mu \mathcal{P}_\ell(\mu) = (\ell+1)\mathcal{P}_{\ell+1}(\mu) + \ell\mathcal{P}_{\ell-1}(\mu) \quad \rightarrow \quad (\ell=1) : \mathcal{P}_1(\mu) \mathcal{P}_1(\mu) = \mu \mathcal{P}_1(\mu) = \frac{2}{3} \mathcal{P}_2(\mu) + \frac{1}{3} \mathcal{P}_0(\mu)$.

Então, as duas principais contribuições à anisotropia da temperatura advém das duas equações fornecidas pelo monopolo e pelo multipolo,

$$\begin{cases} \Theta_0' + k\Theta_1 + \Phi' = 0, \\ \Theta_1' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) = \tau' \left(\Theta_1 - \frac{iv_b}{3} \right). \end{cases} \quad (2.31)$$

Para resolver a primeira, preciso da segunda, e para resolver a segunda, preciso conhecer o campo de velocidade. No regime de forte acoplamento que estamos tratando, temos,

$$\begin{aligned} v_b' + \mathcal{H}v_b &= -ik\Psi + \frac{\tau'}{\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b), \\ v_b' + \mathcal{H}v_b + ik\Psi &= \frac{\tau'}{\mathcal{R}} (3i\Theta_1 + v_b), \\ \frac{\mathcal{R}}{\tau'} (v_b' + \mathcal{H}v_b + ik\Psi) &= 3i\Theta_1 + v_b, \\ 0 &\approx 3i\Theta_1 + v_b, \\ v_b &\approx -3i\Theta_1. \end{aligned}$$

Usando esta última novamente na equação da velocidade,

$$\begin{aligned} v_b &= -3i\Theta_1 + \frac{\mathcal{R}}{\tau'} (v_b' + \mathcal{H}v_b + ik\Psi) \\ &= -3i\Theta_1 + \frac{\mathcal{R}}{\tau'} (-3i\Theta_1' - 3i\mathcal{H}\Theta_1 + ik\Psi) \\ &= -3i\Theta_1 - 3i\frac{\mathcal{R}}{\tau'} \left(\Theta_1' + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k}{3}\Psi \right). \end{aligned}$$

Usamos esta na equação do dipolo,

$$\begin{aligned} \Theta_1' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) &= \tau' \left[\Theta_1 - \frac{i}{3} \left(-3i\Theta_1 - 3i\frac{\mathcal{R}}{\tau'} \left(\Theta_1' + \mathcal{H}\Theta_1 - \frac{k}{3}\Psi \right) \right) \right] \\ &= \tau'\Theta_1 - \tau'\Theta_1 - \mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi \\ &= -\mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi. \end{aligned}$$

Para obter, enfim, as equação do monopolo, tomamos a equação obtido acima para o monopolo¹⁵ na equação do dipolo:

$$\begin{aligned} \Theta_1' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) &= -\mathcal{R}\Theta_1' - \mathcal{R}\mathcal{H}\Theta_1 + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi, \\ \left(-\frac{1}{k}(\Phi' + \Theta_0') \right)' - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) &= -\mathcal{R} \left(-\frac{1}{k}(\Phi' + \Theta_0') \right)' - \mathcal{R}\mathcal{H} \left(-\frac{1}{k}(\Phi' + \Theta_0') \right) + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi, \\ -\frac{1}{k}(\Phi'' + \Theta_0'') - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) &= \frac{\mathcal{R}}{k}(\Phi'' + \Theta_0'') + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{k}(\Phi' + \Theta_0') + \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi. \end{aligned}$$

¹⁵ $-\Theta_1 = \frac{1}{k}(\Phi' + \Theta_0')$.

$$\begin{aligned} -\frac{(1+\mathcal{R})}{k}(\Phi'' + \Theta_0'') - \frac{k}{3}(\Theta_0 + \Psi) - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{k}(\Phi' + \Theta_0') &= \frac{k}{3}\mathcal{R}\Psi, \\ (\Phi'' + \Theta_0'') + \mathcal{H}\frac{\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}(\Phi' + \Theta_0') + \frac{k^2}{3(1+\mathcal{R})}(\Psi + \Theta_0) &= -\frac{\mathcal{R}}{3(1+\mathcal{R})}k^2\Psi. \end{aligned}$$

Usando a definição de velocidade sonora efetiva,

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{3(1+\mathcal{R})}},$$

$$(\Phi'' + \Theta_0'') + \mathcal{H}\frac{\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}(\Phi' + \Theta_0') + (c_s k)^2(\Phi + \Theta_0) = -(c_s k)^2\Psi,$$

$$\begin{aligned} \Theta_0'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Theta_0' + (c_s k)^2\Theta_0 &= -(c_s k)^2\Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi' - (c_s k)^2\Phi \\ &\doteq F(\eta, k). \end{aligned}$$

Portanto temos que o monopólo segue a equação

$$\begin{cases} \Theta_0'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Theta_0' + (c_s k)^2\Theta_0 = F(\eta, k), \\ F(\eta, k) \doteq -(c_s k)^2\Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi' - (c_s k)^2\Phi. \end{cases} \quad (2.32)$$

O termo à esquerda da equação tem o comportamento oscilatório amortecido com velocidade de propagação c_s . Vide ainda que o termo à direita é um termo fonte. Por estarmos utilizando as condições iniciais adiabáticas, temos que $3\Theta_0 = \delta_b$, então obtemos uma equação de oscilação para os bárions,

$$\begin{cases} \delta_b'' + \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\delta_b' + (c_s k)^2\delta_b = 3F(\eta, k), \\ F(\eta, k) = -(c_s k)^2\Psi - \Phi'' - \frac{\mathcal{H}\mathcal{R}}{(1+\mathcal{R})}\Phi' - (c_s k)^2\Phi. \end{cases} \quad (2.33)$$

O termo $(c_s k)^2\delta_b$, no espaço de Fourier, é o termo $-c_s^2\nabla^2\delta_b$, no espaço real, e se deve a pressão dos fóttons. O termo de amortecimento, $\mathcal{H}\mathcal{R}/(1+\mathcal{R})$, é um termo de fricção e só tem efeito significativo próximo ao desacoplamento, em períodos de domínio da radiação este termo é praticamente nulo, uma vez que $\mathcal{R} \sim \rho_b/\rho_\gamma$. Já o termo fonte contém a informação da influência gravitacional, $-(c_s k)^2\Psi \rightarrow c_s^2\nabla^2\Psi$. A solução desta equação, é obtida através das funções de Green [17], e resulta em

$$\begin{aligned} \delta_b(k, \eta) &= -3\Phi(k, \eta) + 3C_1S_1(k, \eta) + 3C_2S_2(k, \eta) \\ &+ k^2 \int_0^\eta d\eta' [\Phi(k, \eta') - \Psi(k, \eta')] \frac{S_1(k, \eta')S_2(k, \eta) - S_1(k, \eta)S_2(k, \eta')}{S_1(k, \eta')\dot{S}_2(k, \eta') - \dot{S}(k, \eta')S_2(k, \eta')}. \end{aligned}$$

Com C_1 e C_2 constantes no tempo que podem ser fixadas com as condições iniciais, e as funções S são funções trigonométricas

$$\begin{cases} S_1(k, \eta) &= \sin(kr(\eta)), \\ S_2(k, \eta) &= \cos(kr(\eta)), \end{cases} \quad (2.34)$$

em que r é o horizonte sonoro no período η , i.e.,

$$r(\eta) = \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta') = \int_z^\infty dz' \frac{c_s(z')}{H(z')} \quad (2.35)$$

Logo após os bárions desacoplarem dos fótons, estes passam a se propagar livremente, mas os bárions ainda estão sob ação do espalhamento Compton. O fim deste período é denominado de "época de arrasto" (*drag epoch*). Então, somente após cessar este efeito que as oscilações congelam e preservam o tamanho do horizonte sonoro neste período. Ou seja, temos que o horizonte sonoro na drag epoch (que chamarei simples de horizonte sonoro), é: $r_s = r(z_{drag})$. Valores recentes proveniente de dados da CMB [2] fornecem que este período ocorreu em $z_{drag} = 1060.01 \pm 0.29$, com um horizonte sonoro $r_s = 147.21 \pm 0.23 \text{ Mpc}$. Já o desacoplamento, segundo os mesmos dados, ocorreu em $z_{dec} = 1089.80 \pm 0.21$, com o horizonte sonoro neste período $r(z_{dec}) = 144.57 \pm 0.22 \text{ Mpc}$.

3 Espectros de potência

Após o desacoplamento entre os bárions e os fótons, o Universo se esfria a ponto de possibilitar que os prótons e os elétrons se combinem para formar átomos de hidrogênio (HI). Com o passar do tempo, a força gravitacional atua de maneira a aumentar as, até então, pequenas inomogeneidades, levando-as a formar grandes estruturas não-lineares que colapsam e se estruturam em filamentos e halos. Estas estruturas não-lineares são a base para que as galáxias se formem. Assim, tais estruturas carregam informações acerca das condições iniciais do Universo e dos processos físicos que culminaram em tais formações. Portanto, o fato de estudarmos inomogeneidades no Universo serve-nos como uma forma de entender o processo que fez (e faz) o Universo ser afastado de uma configuração uniforme.

Diante do cenário posto, a distribuição de matéria no Universo *per se* nos fornece informações de um período primordial, do período de formação das estruturas e do período de observação, logo, uma fonte riquíssima de informações. Nossa questão agora é saber extrair das informações estatística das medidas, informações que precisamos para entender a física que elas contêm.

3.1 Cosmologia e Estatística

A teoria perturbativa cosmológica nos fornece um conjunto de equações diferenciais acopladas que, dado as condições iniciais, nos possibilitam descrever a evolução das quantidades físicas perturbadas descritas por tais equações com altíssima precisão. Contudo, são as condições iniciais que dão início ao caráter estatístico. Por exemplo, em um cenário em que temos condições iniciais adiabáticas, a densidade de energia da matéria inicial¹ é dada pela perturbação da curvatura primordial. Logo, basta-nos conhecer tal perturbação. Contudo, tal perturbação se dá em uma fase quântica e portanto carrega um caráter probabilístico. No caso da distribuição de probabilidade que a perturbação da curvatura primordial assume ser do tipo gaussiano toda sua informação estará contida no **espectro de potência** da perturbação, que basicamente é a sua covariância. Vide que com isto, o caráter aleatório das condições iniciais leva a um caráter aleatório das quantidades físicas perturbadas e consequentemente, das perturbações cosmológicas. Portanto, serão as quantidades estatísticas associadas a uma quantidade física, tais como valor esperado, variância, covariância, dentre outros, que nos fornecerão informações.

¹ Quando digo inicial me refiro ao período em que não precisamos de nenhum entendimento sobre uma possível teoria de gravitação quântica, pois, a gravidade se comporta satisfatoriamente de maneira clássica.

3.2 Função de correlação

Agora, imaginemos a situação de estarmos observando a distribuição de matéria no Universo, e imaginemos que os objetos analisados (por exemplo, galáxias) são partículas². Estamos analisando uma região contemplada em um volume pequeno dV e que contém dN destas partículas. Sem pensar em física, se temos um conjunto de dados distribuídos em um volume, extrair informações deste tem por início conhecer sua distribuição média e qual o nível de flutuação desta em torno do valor médio, sua variância. Mas sabemos fisicamente que no nosso caso a forma com que estas informações se distribuem não deve ser totalmente independente, uma vez que elas são originadas de um mesmo mecanismo físico. Para quantificar esta informação, tomemos duas regiões menores dentro do dado volume, digamos $dV_a, dV_b \subset dV$, separados por uma distância \vec{r}_{ab} , e que cada região contenha dN_a e dN_b partículas, respectivamente. Definindo o produto médio do número de partículas nos respectivos volumes como³ $dN_{ab} \doteq \langle dN_a dN_b \rangle$, e sendo $\bar{\rho} dV$ o número médio de partículas no volume dV , se pudessemos afirmar que a distribuição de partículas em dV_a não influencia a distribuição em dV_b , e vice-versa, teríamos

$$dN_{ab} = \langle n_a n_b \rangle = (\bar{\rho} dV_a) (\bar{\rho} dV_b) = \bar{\rho}^2 dV_a dV_b.$$

Contudo, certamente isso não deve ser verdade e então $\langle n_a n_b \rangle \neq \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle$, o que implica no fato da média do produto dos pares de partículas depender da posição. Sendo \vec{r}_a a distância da origem do sistema à dV_a e \vec{r}_b a distância à dV_b , com $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$, definimos a **função de correlação** (ou função 2-pontos, ou ainda função de correlação de 2-pontos), como sendo:

$$\xi(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \doteq \langle \delta(\vec{r}_a) \delta(\vec{r}_b) \rangle.$$

Com o contraste de densidade sendo definido como $\delta(\vec{x}) + 1 = \rho(\vec{x}) / \langle \rho \rangle$. Ou seja, esta função quantifica quão "correlacionadas" duas regiões de um certo volume, que aqui estou chamando de dV , estão, ou ainda, quanto a distribuição de uma dada região

² O que não foge muito da forma como estes objetos são observados em resolução de grande escala no Universo

³ No contexto posto, podemos definir duas médias: **média sobre amostra** e **média sobre conjunto**. Utilizando o caso dos subvolumes dV_a e dV_b para exemplificar, tomarmos a média sobre amostra é, dentro de uma mesma realização (configuração), tomar a média de todos os pares de subvolumes equidistantes, ou seja, todos os subvolumes além dos dV_a e dV_b que distam r_{ab} . Já a média sobre conjuntos é tomar a média somente dos dV_a e dV_b , só que em todas as possíveis realizações, que poderíamos imaginar como os possíveis universos (com letra minúscula!). Obviamente que esta última é uma medida fisicamente impossível de ser feita por nós, a não ser por simulações computacionais. No caso destas duas definições serem iguais, o sistema é dito ser **ergódico**. No entanto, no caso de termos a distância entre as regiões grande o suficiente de tal forma as duas regiões serem causalmente desconexas podemos considerá-las originadas de realizações diferentes, e com isto, as definições são equivalentes. Uma vez que eu defini $\bar{\rho}$ a densidade de números médio num dado volume numa dada realização, no caso do sistema ser ergódico, $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$, seja qual for a definição de média. Irei assumir que mesmo no caso das distâncias não serem suficientes para as regiões serem desconexas a ergodicidade é válida e tratarei a média como a média usual sobre o volume.

influência na distribuição da outra região. Vide que, pela homogeneidade estatística⁴ $\xi(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \xi(\vec{r}_b, \vec{r}_a) = \xi(\vec{r}_b - \vec{r}_a)$. Se $\vec{r}_{ab} = 0$, $\xi(0) = \langle \delta(\vec{r}_a) \rangle$, i.e., a variância na dada posição. Mudando de variáveis por praticidade e conveniência, chamemos $\vec{r} \doteq \vec{r}_{ab}$, e $\vec{x} \doteq \vec{r}_a$, então, $\vec{r}_b = \vec{r}_a + \vec{r}_{ab} = \vec{x} + \vec{r}$, e reescrevemos a função de correlação

$$\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (3.1)$$

sendo escrita somente em termos da distância entre as regiões. A partir da isotropia estatística a função de correlação não deve depender da direção, ou seja, possui simetria esférica: $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$.

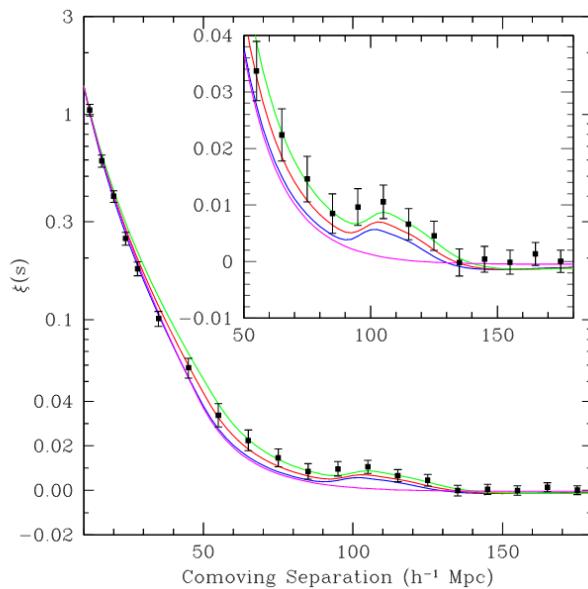


Figura 8 – Função de correlação para 46748 galáxias vermelhas luminosas medidas pelo SDSS, cobrindo uma região de $0.72 h^{-3} \text{ Gpc}^3$ sobre 3816 deg^2 , entre os redshifts de 0.16 e 0.47.

Na figura 8 estão as medidas do *survey* SDSS, que identificou pela primeira vez um pico das oscilações acústicas de bárions na escala de $100 h^{-1} \text{ Mpc}$ da função de correlação em grandes escalas, medindo a separação entre galáxias vermelhas luminosas.

3.3 Espectro de potência 3D

No regime de perturbações lineares, podemos expandir uma variável perturbativa, como é o caso do contraste de densidade, em uma série de Fourier, ou seja, decompor a variável

⁴ Homogeneidade estatística significa que o valor esperado de um campo deve ser o mesmo em todos os pontos do espaço, assim como isotropia estatística significa que quantidades que dependem da direção possuem características estatísticas que não dependem da direção. Iremos assumir que as variações na densidade surgem de **processos aleatórios ergódicos estatisticamente homogêneos e isotrópicos**.

em ondas planas que evoluem de maneira independente.

$$\delta(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.2)$$

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int_V d^3\vec{x} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.3)$$

Como $\delta(\vec{x})$ deve ser uma função real: $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$. Notemos ainda que, uma vez que temos $\langle \delta(\vec{x}) \rangle = 0$, então $\langle \delta_{\vec{x}} \rangle = 0$, a flutuação média dos modos, assim como dos campos, é nula.

Então a função de correlação fica,

$$\begin{aligned} \xi(\vec{r}) &= \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \langle \delta(\vec{x}) \delta^*(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \left\langle \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 \int d^3\vec{k} d^3\vec{k}' \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \right\rangle \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 \left\langle \int d^3\vec{k} d^3\vec{k}' \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right\rangle \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 \frac{1}{V} \int d^3\vec{x} \left(\int d^3\vec{k} d^3\vec{k}' \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right) \\ &= \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^2 \frac{1}{V} \int d^3\vec{k} d^3\vec{k}' \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \underbrace{\left(\int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} \right)}_{(2\pi)^3 \delta_D^3(\vec{k}'-\vec{k})} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \|\delta_{\vec{k}}\|^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \underbrace{\left(V \|\delta_{\vec{k}}\|^2 \right)}_{\doteq P(\vec{k})} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} P(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \end{aligned}$$

Definimos a quantidade $P(\vec{k})$, conhecida como **espectro de potência 3D** (ou simplesmente espectro de potência), como sendo a transformada de Fourier da função de correlação. Pelas propriedades de ortogonalidade dos modos de Fourier, podemos expressar o espectro de potência em termos da função de correlação,

$$P(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} \xi(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.4)$$

Agora, computemos a correlação entre dois modos de Fourier distintos. Se definirmos a transformada de Fourier da função de correlação entre dois pontos, \vec{x} e \vec{x}' , que

distam por \vec{r} , como sendo $\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle$, então,

$$\begin{aligned}\langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle &= \frac{1}{V^2} \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}' \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x}') \rangle e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{r} \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{x} + \vec{r})} \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^3 \vec{x} d^3 \vec{r} \xi(\vec{r}) e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \\ &= \frac{1}{V^2} \underbrace{\left(\int d^3 \vec{x} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right)}_{(2\pi)^3 \delta_D^3(\vec{k} - \vec{k}')} \underbrace{\left(\int d^3 \vec{r} \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right)}_{P(\vec{k}')} \\ \therefore \langle \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'}^* \rangle &= \frac{(2\pi)^3}{V^2} \delta_D^3(\vec{k} - \vec{k}') P(\vec{k}).\end{aligned}$$

Podemos estar interessados não em analisar perturbações à redshift zero, mas em algum outro redshift. Para isso, tomemos redshifts diferentes, z e z' . No caso de estarmos tratando de uma teoria perturbativa linear no período de domínio da matéria, os modos a um certo redshift são os modos no redshift zero "transladados" até o redshift, segundo a ação da **função de crescimento**⁵ D : $\delta(\vec{k}, z) \equiv \delta_{\vec{k}}(z) = D(z) \delta_{\vec{k}}$.

Portanto,

$$\langle \delta(\vec{k}, z) \delta^*(\vec{k}', z') \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V^2} \delta_D^3(\vec{k} - \vec{k}') D(z) D^*(z') P(\vec{k}). \quad (3.5)$$

Podemos ainda definir o **espectro de potência 2D**. Decompondo o número de onda k em suas contribuições ao longo e ortogonal à linha de visada, k_{\parallel} e k_{\perp} , respectivamente, $k = \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}$, e integrando sobre a componente ao longo da linha de visada,

$$P_{2D}(\vec{k}_{\perp}) = \int \frac{dk_{\parallel}}{2\pi} P(\vec{k}_{\parallel}, \vec{k}_{\perp}). \quad (3.6)$$

De maneira equivalente, o caso 1D,

$$P_{1D}(\vec{k}_{\parallel}) = \int \frac{d^2 \vec{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} P(\vec{k}_{\parallel}, \vec{k}_{\perp}). \quad (3.7)$$

Como veremos à frente, podemos também, a depender do interesse, expandir as perturbações não em ondas planas, mas, em cascas esféricas. Isto nos levará a trabalhar não mais no espaço de Fourier mas no espaço harmônico. Contudo, existe um caso particular em que ocorre uma transformação biunívoca entre os espaços, ou seja, podemos representar a variável k , do espaço de Fourier, em termos da variável ℓ , do espaço harmônico, e este caso será a ferramenta deste trabalho.

⁵ A definição de função de crescimento será dada à frente, mas é bom ter em mente que a afirmação aqui feita é válida somente nas escalas lineares.

3.3.1 Espectro de potência linear da perturbação de densidade da matéria

Temos até então tanto a descrição teórica das flutuações das inomogeneidades da matéria, quanto uma descrição observacional em grande escala fornecida pelo espectro de potência. Precisamos agora saber se o que observamos na distribuição da matéria é o que a nossa teoria descreve.

Obtivemos a condições iniciais (pós-inflação) para a resolução das equações de Boltzmann-Einstein fornecida pelo potencial primordial 2.29. Este potencial fora gerado durante a inflação e é tomado no período em que todas as perturbações estão basicamente fora do horizonte⁶. A inflação⁷ prevê que a variância do potencial primordial é descrita pelo espectro de potência,

$$P_{\Phi_P} \equiv \langle \|\Phi_P(k)\|^2 \rangle = \frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_m^{(0)}}{D(a=a_0)} \right)^2, \quad (3.8)$$

com δ_H^2 sendo a amplitude do potencial gravitacional e n_s é conhecido como índice espectral e possui valor muito próximo a 1.⁸

Precisamos então demonstrar quantitativamente os efeitos destas flutuações nas condições iniciais do potencial gravitacional sobre a distribuição de matéria que observamos. Para isso, precisamos quantificar como se dá a evolução do potencial do período primordial até o período da observação. Isso se dá de duas formas. Primeiro quantificando como a transição entre os períodos de domínio da radiação e da matéria afeta o potencial em diferentes escalas, e após estes efeitos cessarem e a evolução do potencial ser a mesma para todas as escalas, precisamos quantificar como esse potencial evolue no tempo (redshift). Então, definiremos duas funções que quantificam estas ações: **função de transferência** e **função de crescimento** D .

3.3.2 Função de transferência

É de se esperar que as propriedades físicas dos constituintes do Universo alterem as previsões da teoria perturbativa. De fato, simulações demonstram que a evolução do potencial Φ pode ser fortemente afetada pela transição entre o período da radiação para o período da matéria à depender da escala em questão. Para entender esta influência sobre o potencial, consideremos três períodos divididos segundo o período da equivalência⁹.

Períodos bem anteriores ao período da equivalência, $a \ll a_{eq}$, basicamente todos os comprimentos de onda estão fora do horizonte e os potenciais são basicamente cons-

⁶ Os comprimentos de onda das perturbações são menores do que o horizonte de partículas, H^{-1} , ou equivalentemente, do que $k\eta \ll 1$.

⁷ Aqui estou assumindo a versão mais simples do cenário inflacionário de um campo simples.

⁸ Segundo os dados fornecidos pelo Planck em 2018, [2], $n_s = 0.9665 \pm 0.0038$.

⁹ Nos referimos como período da equivalência como o período em que a densidade de energia da radiação é igual a densidade de energia da matéria: $\rho_r = \rho_m \longrightarrow \rho_r^0 (1+z_{eq})^4 = \rho_m^0 (1+z_{eq})^3$, então definimos este período como sendo: $(1+z_{eq}) = \rho_m^0/\rho_r^0$.

tantes. Porém, em um dado momento cada vez mais próximo ao período da equivalência, $a \sim a_{eq}$, o potencial em grande escala (pequeno número de onda) entra no horizonte e passa a ter sua amplitude de oscilação fortemente amortecida. Já o potencial em pequena escala (grande número de onda) demora a entrar no horizonte e tem sua amplitude fracamente afetada. O estudo das perturbações de pequena escala através das equações de Boltzmann-Einstein prediz que o amortecimento mínimo, limite inferior, faz com que a amplitude decaia 10% do seu valor primordial ([4],[17]). No período bem posterior ao da equivalência, $a \gg a_{eq}$, os potenciais passam a evoluir independente da escala. Logo, devido a causalidade, estes efeitos que causam o amortecimento das amplitudes são evitados em pequenas escalas, de tal forma a definirmos os efeitos normalizando o potencial pelo seu valor após o período de transição em grandes escalas,

$$T_F(k) \doteq \frac{\Phi(k, a)}{\Phi_{LS}(k, a)}, \quad a \gg a_{eq}.$$

Aqui, o potencial Φ_{LS} é o potencial em grandes escalas, que como dito anteriormente, é $\Phi_{LS}(k, a) = 9\Phi_P(k)/10$. É comum definir o período do fim da ação da função de transferência como a_T ¹⁰ e então comparar os períodos à ele. Com este, a própria função de transferência pode ser redefinida em termos do período que se acredita que ela deva atuar:

$$T_F(k) \doteq \frac{10}{9} \frac{\Phi(k, a_T)}{\Phi_P(k)}. \quad (3.9)$$

3.3.3 Função de crescimento

A predição do modelo padrão cosmológico é que bem após este período de transição radiação-matéria, os potenciais permaneçam constantes durante o domínio da matéria. Contudo, com o Universo sob uma expansão acelerada o potencial volta a variar. A teoria perturbativa linear no período do domínio da matéria prediz ainda que os modos perturbativos são funções separáveis de tal forma que a evolução temporal dos modos perturbativos seja estabelecido de forma independente da amplitude devido a escala. Isto é, o contraste de densidade da matéria pode ser quebrado numa função somente do redshift, ou alguma quantidade que quantifique a evolução, e outro termo que dependa somente da escala, e por isso, as equações dinâmicas fornecidas pelas equações de Einstein, mais especificamente o análogo à função de Poisson, determina como ocorre a evolução dessas quantidades somente dependentes do tempo. Definimos a função de crescimento de tal forma a ela determinar a maneira como se dá a evolução temporal dos potenciais após o período de atuação da função de transferência.

$$\frac{D(a)}{a} \doteq \frac{\Phi(a)}{\Phi(a_T)}, \quad a \gg a_T. \quad (3.10)$$

Definimos com um fator de escala no denominador para que no período de domínio da radiação queremos que $\Phi(a) \sim \Phi(a_T) = 9T_F(k)\Phi_P(a)/10$.

¹⁰ *T* acrônimo para *Late*.

3.3.4 Espectro de potência linear da matéria

Podemos agora combinar as informações fornecidas pelas duas funções, mais o espectro primordial para obter um espectro da matéria. Ou seja, o nosso espectro será uma função destas três quantidades. Temos que o potencial pode ser descrito como sendo,

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{k}, a) &= \Phi(a_T) \frac{D(a)}{a} \\ &= \frac{9}{10} \Phi_P(\vec{k}) T_F(k) \frac{D(a)}{a}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Precisamos agora saber relacionar o potencial ao contraste de densidade da matéria neste período. Para isto, em tal regime, as informações estão codificadas nas equações de Einstein, mais precisamente nas equações (00) e (0*i*), fornecidas no apêndice e expressas nas equações D.8. Quando as combinamos, obtemos a equação adicional D.9.

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \left[\rho_m \left(\delta_m + \frac{3\mathcal{H}}{k} i v_m \right) + 4\rho_r \left(\Theta_{r,0} + \frac{12\mathcal{H}}{k} \Theta_{r,1} \right) \right].$$

No período em que estamos tratando, basicamente todas as perturbações já estão dentro do horizonte, e podemos usar o limite $k\eta \gg 1$, ou seja, $\mathcal{H}/k \approx 0$. Além disto, estamos no período após o período da equivalência e que a densidade da matéria é dominante frente a densidade da radiação. Com isto, a equação se simplifica,

$$k^2\Phi \approx 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m, \quad (3.12)$$

$$\Phi \approx \frac{4\pi G a^2 \rho_m \delta_m}{k^2}, \quad a \gg a_T. \quad (3.13)$$

Ao utilizarmos as definições de parâmetro de densidade da matéria e da densidade crítica hoje¹¹

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{4\pi G a^2 \rho_m \delta_m}{k^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m^{(0)} a^{-1} \delta_m}{k^2}, \\ \delta_m &= \frac{2ak^2}{3H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \Phi \\ &= \frac{2ak^2}{3H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \left(\frac{9}{10} \Phi_P(\vec{k}) T_F(k) \frac{D(a)}{a} \right) \\ &= \frac{3k^2}{5} \left(\frac{\Phi_P(\vec{k})}{H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \right) T_F(k) D(a).\end{aligned}$$

¹¹ $4\pi \rho_m = 4\pi \rho_{crit}^{(0)} \frac{\rho_m^{(0)}}{\rho_{crit}^{(0)}} a^{-3} = 4\pi \rho_{crit}^{(0)} \Omega_m^{(0)} a^{-3} = \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m^{(0)} a^{-3}$

Logo, o espectro de potência da matéria é dado por,

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\vec{k}, a)^* \delta(\vec{k}', a) \rangle &= \left(\frac{3k^2}{5} \frac{1}{H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \right)^2 T_F(k) T_F(k') D^2(a) \langle \Phi_P^*(\vec{k}) \Phi_P(\vec{k}') \rangle \\
&= \left(\frac{3k^2}{5} \frac{1}{H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \right)^2 T_F(k) T_F(k') D^2(a) (2\pi \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P_{\Phi_P}(k)) \\
&= \left(\frac{3k^2}{5} \frac{1}{H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \right)^2 T_F(k) T_F(k') D^2(a) 2\pi \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') \\
&\quad \times \left(\frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_m^{(0)}}{D(a=a_0)} \right)^2 \right) \\
&= \left(\frac{3k^2}{5} \frac{1}{H_0^2 \Omega_m^{(0)}} \right)^2 \left(2\pi \frac{50\pi^2}{9k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_m^{(0)}}{D(a=a_0)} \right)^2 \right) \\
&\quad \times T_F^2(k) \left(\frac{D(a)}{D(a=a_0)} \right)^2. \\
\therefore P_m(k, a) &= 2\pi^2 \delta_H^2 \left(\frac{k_s^n}{H_0^{n_s+3}} \right) T_F^2(k) \left(\frac{D(a)}{D(a=a_0)} \right)^2. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Para os objetivos deste trabalho, é conveniente tomar simplesmente

$$P_m(k, a) = A k^{n_s} T_F^2(k) D^2(a). \tag{3.15}$$

Com A condensando todos os termos constantes. Faço isto, pois, no tipo de análise que farei tomarei razões de quantidades que são proporcionais ao espectro de potência, e então, a constante some.

Na figura 9 estão representados os espectros gerado pelo código CAMB, [31], e o ajuste fenomenológico fornecido em [18], apresentando a boa concordância do ajuste com o resultado analítico.

Na figura 10, estão representados outros dois ajustes segundo o mesmo trabalho [18] um sem os bárions na contribuição da matéria, e portanto perdendo o efeito de supressão que eles causam em pequenas escalas no espectro de potência, um com o mesmo comportamento do espectro de potência da matéria só que sem as oscilações. Adiciono ainda o ajuste que era utilizado antes do fornecido por esse trabalho chamado de BBKS, que como podemos ver é uma descrição sem bárions. A amplitude dos gráficos 9 e 10 são diferentes como pode ser visto. O segundo é construído segundo o trabalho [18], e o primeiro é corrigido por um fator de ≈ 1.4 em relação a amplitude desse trabalho.

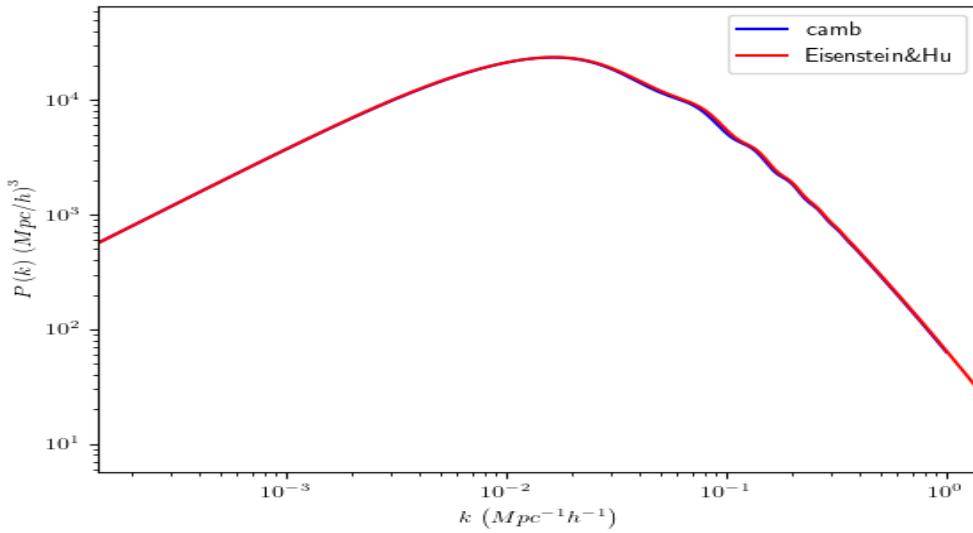


Figura 9 – Comparação entre os espectros de potência da matéria gerado segundo a resolução analítica (equações de Boltzmann), feita pelo código CAMB, e o espectro construído por um ajuste fenomenológico do trabalho do Daniel Eisenstein & Wayne Hu. $A \approx 4.38 \times 10^6$ e $z = 0$. Os dados utilizados nos parâmetros cosmológicos são os fornecido por [1].

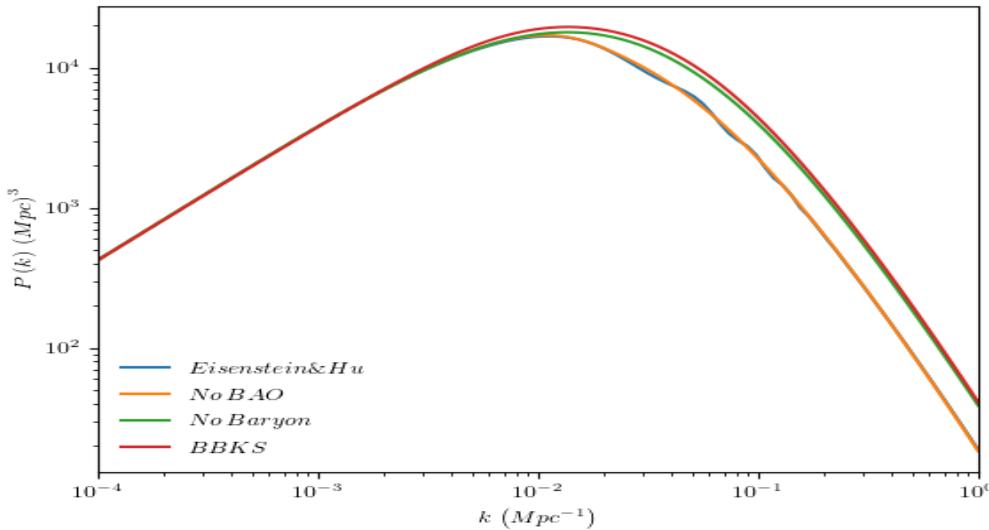


Figura 10 – Os espectros em azul, amarelo e verde são os fornecidos em [18], sendo o primeiro a descrição do espectro de potência da matéria, o segundo a mesma descrição exceto por não conter as informações das oscilações e o terceiro o espectro de potência sem bárions. Em vermelho está a descrição do ajuste BBKS, que era bastante utilizado antes do ajuste do Eisenstein& Hu. $A \approx 3.13 \times 10^6$ e $z = 0$. Os dados utilizados nos parâmetros cosmológicos são os fornecido por [1].

4 A linha de 21cm e a Cosmologia

Gostaria de começar este capítulo descrevendo de forma simples o que vêm a ser a linha de 21cm do átomo de hidrogênio neutro (HI), para em seguida dizer o porquê esta é uma das mais importantes e promissoras informações proveniente do Universo.

4.1 Emissão da linha de 21cm

Como sabemos, o HI é composto por um próton e um elétron e ambas partículas possuem momento de dipolo. Mesmo que o momento do dipolo do próton seja muito menor do que a do elétron o seu campo magnético faz surgir um hamiltoniano do elétron devido a interação deste campo com o dipolo do elétron: $H = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}_p$. O autovalor de energia deste efeito é uma correção de primeira ordem no estado fundamental da energia do HI. Mas, devido ao acoplamento existente entre os spins das duas partículas, i.e., o autovalor de energia do dado hamiltoniano ser proporcional à $\langle \vec{S}_e \cdot \vec{S}_p \rangle = \langle (S^2 - S_e^2 + S_p^2) / 2 \rangle$ ¹, na analogia das setas, ou elas podem estar "paralelas" (triploto) ($\uparrow\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$)², ou elas podem estar "antiparalelas" (singleto) ($\uparrow\downarrow$ ou $\downarrow\uparrow$), o que leva à dois possíveis autovalores de correção.

Seus valores são dados como³:

$$E^{(1)} = 5.88 \times 10^{-6} eV \times \begin{cases} +1/4 & \text{se triploto,} \\ -3/4 & \text{se singleto.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Portanto, a diferença entre os estados é: $\Delta E = (E^{(0)} + E_{\text{triploto}}^{(1)}) - (E^{(0)} + E_{\text{singleto}}^{(1)}) = 5.88 \times 10^{-6} eV$. O comprimento de onda do fóton emitido na transição do estado triploto ao singleto é $\lambda = \Delta E / hc = 21cm$.

4.2 Observações da linha de 21cm no Universo e a temperatura de 21cm

A linha de 21cm é uma das quantidades mais bem conhecidas e medidas pela astrofísica, sendo usada, por exemplo, como prova da distribuição de velocidade de gás dentro da nossa galáxia ou de galáxias próximas, assim como as curvas de rotação da linha de 21cm

¹ $S^2 = (\vec{S}_e + \vec{S}_p)^2$ e autovalores de spin $s_{e,p} = \pm 1/2$, pois ambas partículas são férmions.

² A seta \uparrow representa o valor $+1/2$, e a seta \downarrow , $-1/2$.

³ O superscript n sobre a energia significa que o valor é uma correção de ordem n ao estado fundamental, $n = 0$.

são usadas para traçar a dinâmica de galáxias [43]. Sendo o átomo HI o mais abundante no Universo e tendo começado a se formar logo após o período do desacoplamento, é possível obter informações de boa parte da história do Universo utilizando-o. Contudo, limitações físicas e experimentais ainda nos impossibilita de conhecer bem o período entre a emissão da CMB até a formação das primeiras estruturas luminosas, período conhecido como *Dark Ages*⁴. Informações provenientes do período pós CMB até redshifts da ordem da dezena constituem uma nova fronteira às observações cosmológicas. Meu interesse é analisar a linha de 21cm no período da análise do *BINGO telescope*, ou seja, à baixos redshifts. Este é um período que podemos chamar de **pós-reionização**⁵, que é um período em que a física envolvida é linear.

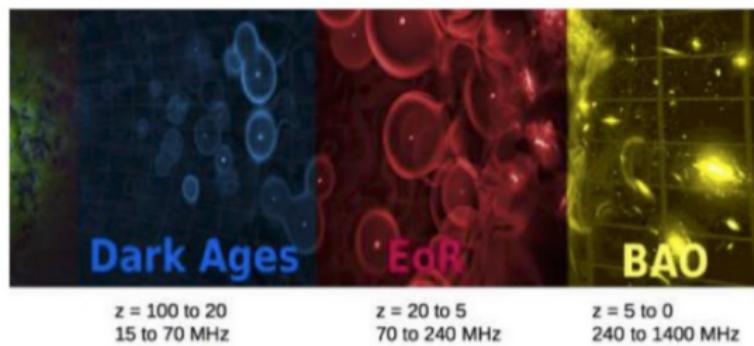


Figura 11 – Representação relacionando três períodos cosmológicos, suas faixas de redshift e as faixas de frequência da linha de 21cm correspondente. Fonte: [57].

A figura 11 representa três períodos de grande interesse das próximas gerações de satélites e telescópios, dentre eles o BINGO. O período entre a Dark Ages e a reionização é um período que engloba desde a formação das primeiras fontes luminosas até o processo das estrelas e quasares ionizarem o hidrogênio intergaláctico (IGM). Após a época da reionização (EoR), muito do hidrogênio neutro está concentrado em regiões densas dentro de galáxias, regiões conhecidas como DLAs (*Damped Ly α Absorbers*). Acredita-se que estas são as regiões que mais contribuem para o sinal de 21cm durante este período.

Galaxy surveys tais como o SDSS se baseiam na hipótese da distribuição de galáxias ser um traçador do campo de densidade da matéria (adjacente). Assim, o contraste de densidade de galáxias, δ_g , é assumido estar relacionado com o contraste de densidade da matéria segundo uma quantidade que chamamos de **bias**,

$$b \doteq \frac{\delta_g}{\delta_m}. \quad (4.2)$$

⁴ Parte da teoria deste período pode ser visto em [43].

⁵ Com a formação das primeiras estrelas a luz ultravioleta por elas emitidas possibilita a reionização dos átomos de hidrogênio. Este período ocorre em redshift $z_{reio} \approx 10$ e é conhecido como período da **reionização**

Implicando no espectro de potência da matéria estar relacionado ao espectro de potência de galáxias,

$$P_g(k) = b^2 P_m(k). \quad (4.3)$$

Uma vez que a distribuição de galáxias está relacionada a distribuição de matéria, podemos utilizá-la como ferramenta para restrições de parâmetros cosmológicos. Em paralelo à distribuição de galáxias, é esperado, que em grandes escalas, fontes de emissão da linha de 21cm também sejam traçadores do campo de densidade da matéria, com a vantagem frente à análise de galáxias, de não necessitar da resolução de galáxias individualmente, i.e., observa-se uma grande região do céu sem que se saiba a localização precisa da fonte de emissão. Este é o caso do BINGO, p.ex., que observará uma grande região do céu entre os redshifts $0.127 - 0.478$, e que possibilita "fatiar" esta região em regiões menores e analisar as mesmas separadamente. Isto é feito neste trabalho, em que faço uma análise "tomográfica" de 15 regiões, contempladas por toda a faixa coberta.

4.3 Temperatura de brilho da linha de 21cm

De modo geral, a fim de se descrever a intensidade de uma fonte luminosa em unidades de temperatura, inspirado no limite de Rayleigh-Jeans, define-se a **temperatura de brilho** por,

$$T_b \doteq \frac{c^2}{2k_B\nu^2} I_\nu, \quad (4.4)$$

com I_ν sendo a intensidade intrínseca da radiação proveniente de uma nuvem de gás à uma frequência ν , representando a quantidade de energia carregada por um raio viajando ao longo de uma certa direção, por unidades de tempo, área, ângulo sólido e frequência (em unidades, $J s^{-1} m^{-2} Hz^{-1} sr^{-1}$). Contudo, é comum encontrar trabalhos em cosmologia que usam outras unidades tais como $s^{-1} m^{-2} Hz^{-1} sr^{-1}$, pois, com o Universo está em expansão o número de fótons é conservado durante a expansão, porém, a energia não⁶. Daqui em diante, não trataremos de intensidade mas sim de temperaturas (de brilho).

Considerando que o campo de radiação observado na faixa de 21cm é composto basicamente pela linha de 21cm proveniente do HI e pela CMB⁷. No período pós-reionização, à baixos redshifts, é possível demonstrar que a temperatura média de brilho (observada) da linha de 21cm é dada por [25]

$$\bar{T}_{21}(z) = \left(\frac{3}{16} \frac{A_{21} \hbar c^3}{\nu_{21}^2 m_{HI} k_B} \right) \frac{\rho_{HI}(z) (1+z)^2}{H(z)} = 0.188 h \Omega_{HI}(z) \frac{(1+z)^2}{E(z)} K, \quad (4.5)$$

⁶ Lembrando, como já demonstrado, a grandeza associada a energia da radiação que é conservada com o Universo expandindo/contraindo é a densidade de energia da radiação multiplicada pelo fator de escala a quarta potência, $\rho_r a^4$.

⁷ No dado período a influência da temperatura de Spin é bem menor do que a da CMB, por isso não é levada em conta.

com ν_{21} a frequência de emissão da radiação de 21cm, A_{21} o coeficiente de emissão exponencial da transição de 21cm, m_{HI} é a massa do átomo de HI, ρ_{HI} é a densidade de massa média do HI à um redshift z , e $\Omega_{HI}(z) \doteq \rho_{HI}(z)/\rho_{crit}^{(0)}$.

4.4 Espectro de potência angular da linha de 21cm

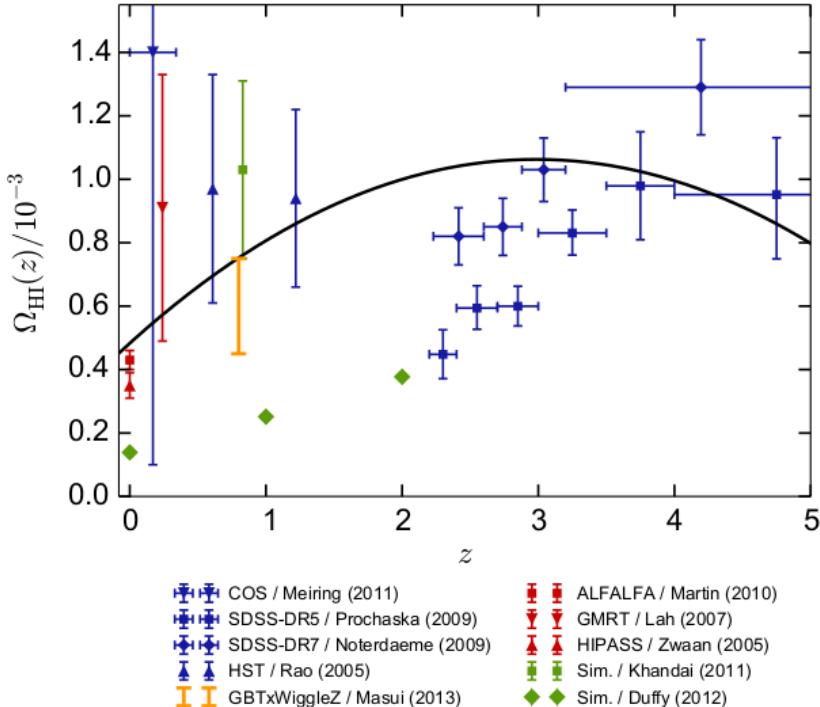


Figura 12 – Medidas da fração de densidade de HI como função do redshift. O linha continua preta segue um modelo de lei de potência. Fonte: [46].

Pode-se ver pela figura 12 que a determinação da fração de densidade de HI é extremamente complicada. Sua determinação é importante para o resultado do espectro de potência, por todo este trabalho assumirei que Ω_{HI} não depende do redshift na faixa de redshift analizada ([37], [7], [25]), com o valor $\Omega_{HI}h = 0.245 \times 10^{-3}$. Além disto, neste trabalho assumirei que o único efeito que causa flutuações na temperatura de 21cm observada, função 4.5, deve-se exclusivamente as flutuações na densidade de HI, ou seja, estarei desconsiderando efeitos como *redshift space distortion* (RSD), efeito *Sachs-Wolfe* (SW), *integrated Sachs-Wolfe* (ISW) e efeitos de lentes gravitacionais⁸. Então, as flutuações na temperatura observada em um certa direção \hat{n} são fornecidas por

$$\delta T_{21}(\chi(z)\hat{n}, z) = \bar{T}_{21}(z)\delta_{HI}(\chi(z)\hat{n}, z), \quad (4.6)$$

com $\delta_{HI} = \delta\rho_{HI}/\rho_{HI}$ e χ é a distância comóvel, expressão 1.55. Dado que temos uma faixa de redshift que contribuem a intensidade de 21cm observada, podemos projetar a

⁸ Tanto RSD quanto SW são efeitos que não influenciam a nossa análise, como veremos.

perturbação da temperatura no céu numa certa direção \hat{n} ,

$$\delta T_{21}(\hat{n}) = \int_{\Delta z} dz W(z) \delta T_{21}(\chi(z) \hat{n}, z) = \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{HI}(\chi(z) \hat{n}, z),$$

Δz é uma faixa de redshift que queremos projetar e W é uma função janela. A função janela aqui terá a função de informar acerca da detectabilidade do sinal, incorporando informações como dimensão do feixe detectado e também o seu perfil de detectabilidade. Para os fins deste trabalho assumi uma função janela dentro da faixa de redshift Δz , da seguinte forma:

$$W(z) = \begin{cases} 1/\Delta z & , \text{se } z \in \Delta z, \\ 0 & , \text{se } z \notin \Delta z. \end{cases} \quad (4.7)$$

A fim de obter seu espectro de potência angular, tomamos a transformada de Fourier do contraste de densidade de 21cm, e para o fator exponencial da transformada utilizamos sua expansão em harmônicos esféricos (Relação de Rayleigh).

$$\begin{aligned} \delta_{HI}(\hat{n}) &= V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \delta_{HI}(\vec{k}, z) e^{i\chi(z)\hat{k}\cdot\hat{n}} \\ &= V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \delta_{HI}(\vec{k}, z) \left(4\pi \sum_{\ell,m} i^\ell j_\ell(k\chi(z)) Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \right) \\ &= \sum_{\ell,m} \left(4\pi i^\ell V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_\ell(k\chi(z)) Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \right). \end{aligned}$$

Então a transformada de Fourier da temperatura é dado por,

$$\begin{aligned} \delta T_{21}(\hat{n}) &= \int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \left(\sum_{\ell,m} \left(4\pi i^\ell V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_\ell(k\chi(z)) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell m}(\hat{n}) \right) \right) \\ &= \sum_{\ell,m} \left(4\pi i^\ell V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_\ell(k\chi(z)) \right) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \right) Y_{\ell m}(\hat{n}) \\ &\equiv \sum_{\ell,m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \end{aligned}$$

com os coeficientes harmônicos

$$a_{\ell m} = 4\pi i^\ell V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\int_{\Delta z} dz W(z) \bar{T}_{21}(z) \delta_{HI}(\vec{k}, z) j_\ell(k\chi(z)) \right) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \quad (4.8)$$

Sendo j_ℓ a função esférica de Bessel de ordem ℓ . Defini-se o espectro de potência angular como sendo a variância dos coeficientes harmônicos⁹:

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle \doteq \delta_{ll'} \delta_{mm'} \mathcal{C}_\ell. \quad (4.9)$$

⁹ www.helsinki.fi/~hkurkisu/GSC1.pdf

A relação $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle$ independe de m , que representa diferentes orientações a uma dada escala angular (multipolo) ℓ . Então, o espectro de potência angular da linha de 21cm fica

$$\begin{aligned} C_\ell &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3} \left(\int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' K(\vec{k}, z) K^*(\vec{k}', z') \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z) \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle \right), \\ K(\vec{k}, z) &\doteq 4\pi V i^\ell W(z) \bar{T}_{21}(z) j_\ell(k\chi(z)) Y_{\ell m}^*(\hat{k}). \end{aligned}$$

Mas, uma vez que estamos considerando HI como um traçador da matéria, temos um bias a ele associado, $b_{HI}(k, z) = \delta(k, z) / \delta_m$, de forma a podermos relacionar o valor esperado do contraste de densidade do hidrogênio neutro ao espectro da matéria.

$$\begin{aligned} \langle \delta_{HI}(\vec{k}, z) \delta_{HI}^*(\vec{k}', z') \rangle &= b_{HI}(\vec{k}, z) b_{HI}^*(\vec{k}', z') \langle \delta_m(\vec{k}, z) \delta_m^*(\vec{k}', z') \rangle \\ &= b_{HI}(k, z) b_{HI}(k', z') \frac{(2\pi)^3}{V^2} \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') D(z) D^*(z') P(k), \end{aligned}$$

em que uso o fato de que na teoria perturbativa linear os modos do constraste de densidade em um dado redshift possam ser descritos segundo a ação da função de crescimento, como feito na equação 3.5, e também que estamos tratando de homogeneidade e isotropia estatística (mas ainda existem os termos dos harmônicos esféricos nas direções \hat{k} e \hat{k}' , que devem ser integrados).

$$C_\ell = (4\pi)^2 \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' K(\vec{k}, z) K^*(\vec{k}', z') b_{HI}(k, z) b_{HI}(k', z') D(z) D^*(z') P(k),$$

definindo

$$F(\Delta z, k) \doteq \int_{\Delta z} W(z) \bar{T}_{21}(z) j_\ell(k\chi(z)) b_{HI}(k, z) D(z).$$

Temos, por fim, o espectro de potência angular (devido a perturbação do constraste de densidade de HI) cruzado de duas faixas de redshift¹⁰

$$\begin{aligned} C_\ell(\Delta z, \Delta z') &= (4\pi)^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 P(k) F(\Delta z, k) F^*(\Delta z', k) \underbrace{\int \Omega_k Y_{\ell m}(\hat{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{k})}_{=1}, \\ \therefore C_\ell(\Delta z, \Delta z') &\equiv \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) F(\Delta z, k) F^*(\Delta z', k). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Irei agora assumir dois fatos, a do bias ser constante, como neste trabalho estarei interessado com a razão entre espectros angulares não importará o valor que ele assume, e que estamos no regime de céu plano, tal que, possamos usar a aproximação de Limber

¹⁰ Infelizmente o número de letras gregas não é infinito, tampouco tende à este, e aqui usaremos o "Ômega" maiúsculo não como parâmetro de densidade, mas como elemento de ângulo sólido, com um subíndice k indicando o eixo assumido.

[33]. Para multipolos $\ell > 20, 30$ podemos usar a **aproximação de Limber** para tirar a dependência em k , ou seja, a aproximação de Limber nos possibilita uma correspondência um à um entre o número de onda e o multipolo, dado por $k\chi(z) \approx \sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \ell + 1/2$, com o z sendo tomado dentro de Δz tal que maximize a grandeza formada pelo seguinte produto: $H_0 W(z) \bar{T}_{21} D(z) b_{HI} E(z)$, como será visto no próximo capítulo. Segundo a aproximação de Limber [30],

$$j_\ell(k\chi(z)) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2\ell+1}} \delta_D((l+1/2) - k\chi(z)) = \sqrt{\frac{\pi}{2\ell+1}} \frac{\delta_D\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)} - k\right)}{\chi(z)}.$$

Então, as únicos funções dependentes de k são as funções de Bessel e o termo do espectro de potência da matéria $k^2 P(k)$, de forma a integral sobre k , em tal limite, resultar em

$$\begin{aligned} \int dk k^2 P(k) j_\ell(k\chi(z)) j_\ell(k\chi(z')) &\approx \int dk \left(\frac{\pi}{2\ell+1} k^2 P(k) \frac{\delta_D\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)} - k\right)}{\chi(z)\chi(z')} \right) \delta_D\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')} - k\right) \\ &= \frac{\pi}{2\ell+1} \left(\frac{l+1/2}{\chi(z')} \right)^2 P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) \frac{\delta_D\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)} - \frac{l+1/2}{\chi(z')}\right)}{\chi(z)\chi(z')} \\ &= \frac{\pi}{2\ell+1} \left(\frac{l+1/2}{\chi(z')} \right)^2 P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) \frac{\delta_D(\chi(z') - \chi(z))}{\chi(z)\chi(z') \frac{\ell+1/2}{\chi(z)\chi(z')}} \\ &= \frac{\pi}{2\chi^2(z')} P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) \delta_D(\chi(z') - \chi(z)) \\ &= \frac{\pi}{2\chi^2(z')} P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) \frac{\delta_D(z' - z)}{\| \frac{d\chi}{dz} \|} \\ &= \frac{\pi}{2\chi^2(z')} P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) \frac{\delta_D(z' - z)}{H(z)^{-1}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} C_\ell &= \frac{2b_{HI}^2}{\pi} \int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' W(z) W(z') \bar{T}_{21}(z) \bar{T}_{21}(z') D(z) D(z') \times \\ &\quad \times \int dk k^2 P(k) j_\ell(k\chi(z)) j_\ell(k\chi(z')) , \\ C_\ell &= \frac{2b_{HI}^2}{\pi} \int_{\Delta z, \Delta z'} dz dz' W(z) W(z') \bar{T}_{21}(z) \bar{T}_{21}(z') D(z) D(z') \times \\ &\quad \times \frac{\pi}{2\chi^2(z')} P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z')}\right) H(z) \delta_D(z' - z) . \\ \therefore C_\ell &= H_0 b_{HI}^2 \int_{\Delta z} \frac{dz}{E(z)} \left(\frac{W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) E(z)}{\chi(z)} \right)^2 P\left(\frac{l+1/2}{\chi(z)}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta é a expressão principal deste trabalho, depois do ajuste que buscaremos construir. É ela que descreverá o espectro de potência angular observado e, na aproximação de Limber, ela é simplificada a uma única integral ao contrário das três iniciais, o que leva a um ganho computacional enorme.

5 Estudo fenomenológico do espectro de potência angular

5.1 Motivação

A expansão acelerada do Universo reserva boa parte dos desafios atuais no estudo cosmológico. Que mecanismo ou componente de fato está causando este comportamento é um dos grandes enigmas atuais. Existem diversos candidatos e modelos que tentam descrever as observações, o mais aceito e compatível com os dados de, p.ex., supernova ([52], [8], [48]) e da CMB ([2]) é o modelo composto por uma constante cosmológica. Porém, como vimos nas seções 1.10.2 e 1.10.1, existem problemas no entendimento desta descrição. Uma vez que os efeitos desta possível componente se tornam importantes à redshifts relativamente baixos, a combinação de outras fontes independentes de informação cosmológica, porém, complementares a de supernova e a da CMB, auxiliam na restrição de possíveis modelos e nos valores dos parâmetros que descrevem o Universo que observamos. Uma ótima ferramenta nesta direção tem se demonstrado o estudo das oscilações acústicas de bárions, que fora primeiramente detectado em 2005 pelo SDSS, figura 8. O BAO é bem descritos pela teoria perturbativa linear, como vimos nos capítulos anteriores, e tem sido detectado por outros grupos ([11], [40], [51], [9]) estudando a distribuição de galáxias, aglomerados, quasares e até supernovas.

Neste cenário, uma outra forma de extrair o BAO tem surgido e se baseia no método de mapeamento de intensidade (IM - *Intensity Mapping*) da linha de 21cm do átomo HI. Como descrevemos no capítulo anterior, a linha de 21cm é utilizada para estudos de dinâmica de galáxias na astronomia, e em cosmologia demonstrasse ser uma promissora fonte de informação de períodos ainda obscuros à nós, como períodos em que se formam as primeiras estruturas no Universo. Para além disso, seu estudo pós-reionização, como pretende o telescópio BINGO ([57], [7], [37]), demonstra ser uma promissora fonte de informação a cerca da natureza da energia escura. O mapeamento de intensidade tem o benefício de possibilitar um maior campo de observação em um menor período de tempo, uma vez que não necessita identificar individualmente as fontes emissoras da radiação. O importante não é especificamente o número de fontes, mas sua densidade de número em grandes escalas. Outra vantagem é a possibilidade de se fazer um estudo tomográfico, dividindo uma extensa faixa de redshift em pequenas faixas. Isso se deve pois as frequências observadas estão diretamente relacionadas as emitidas. O BAO seria descritos pelo espectro de tal linha, de tal forma a conseguirmos tanto utilizá-lo como calibração de distâncias e da taxa de expansão, quanto para a restrição de parâmetros, complementando outras fontes de dados e permitindo uma melhora significativa na precisão das informações.

Nosso estudo se faz num cenário idealizado do que se espera para o telescópio BINGO, e digo idealizado pois considero um cenário em que o sinal é observado sem nenhuma fonte de contaminação como por exemplo a radiação proveniente de fontes extragalácticas ou o ruído devido ao próprio equipamento de observação. Além disso, utilizo um cenário que seria possível observar todo o céu, e não somente uma faixa do mesmo, como de fato ocorre. As hipóteses assim postas servem para não perder o objetivo principal que é conseguir a possível descrição das oscilações proveniente do espectro angular da linha de 21cm. Há diversas formas de se analisar o BAO, seja pelo espectro de potência 3D, seja pelo angular, pela função de correlação galáxia-galáxia, função de correlação angular. Existe também o método de se isolar somente o efeito oscilatório do espectro [10]. A ideia é simples: no espectro de potência (angular ou 3D), de algum traçador de matéria, as oscilações aparecerão, mas não somente, outros efeitos físicos contribuem para sua construção além do BAO, e o efeito do BAO se da principalmente numa certa faixa. A ideia é simplesmente gerar uma função que tenha exatamente o mesmo comportamento do espectro global, porém, sem as oscilações, e com este dividir os espectros gerando somente o efeito oscilatório. A ideia no caso 3D é bem consolidada e vastamente utilizada. Obviamente que muito da informação do Universo se perde neste caso, pois a amplitude, os comportamentos assintóticos, contêm física e auxiliam numa melhor restrição dos parâmetros. Porém, um estudo específico para determinação do horizonte acústico se torna muito preciso, pois, descarta efeitos tais como de RSD e outros efeitos físicos.

Dá para fazer mais do que tirar a escala acústica das oscilações, é possível sim fazer testes cosmológicos utilizando o BAO proveniente do espectro angular. Diversos trabalhos ([50], [49], [16], [23], [44]) usam diferentes métodos para modelar as oscilações. Alguns na escala angular. O que eu pretendo aqui é construir um ajuste (fit), que consiga descrever de maneira simples as oscilações observadas. Para isto utilizo o espectro descrito no capítulo anterior e fornecido pela expressão 4.11. Para construí-lo utilizo o espectro da matéria 3.15 com a função de transferência descrita pelo *fitting* do trabalho [18], tanto com as oscilações, quanto sem as oscilações. Isso me possibilita ter dois espectros angular, com e sem oscilações, e com estes reproduzir o BAO, como vimos representado na figura 10. A divisão dos espectros isola a informação das oscilações como podemos ver em 13. Utilizo este como se fosse uma observação, e para isto, uso o modelo Λ CDM. A ideia é primeiramente ver se o ajuste descreve bem o comportamento oscilatório, utilizando somente os erros proveniente da variância cósmica. Faço isso para diferentes faixas de redshift, com cada uma fornecendo uma informação da dilatação de escala k . Logo, consigo um dado para cada faixa, e estes dados utilizo para tentar reobter a cosmologia que assumi, como um teste de consistência.

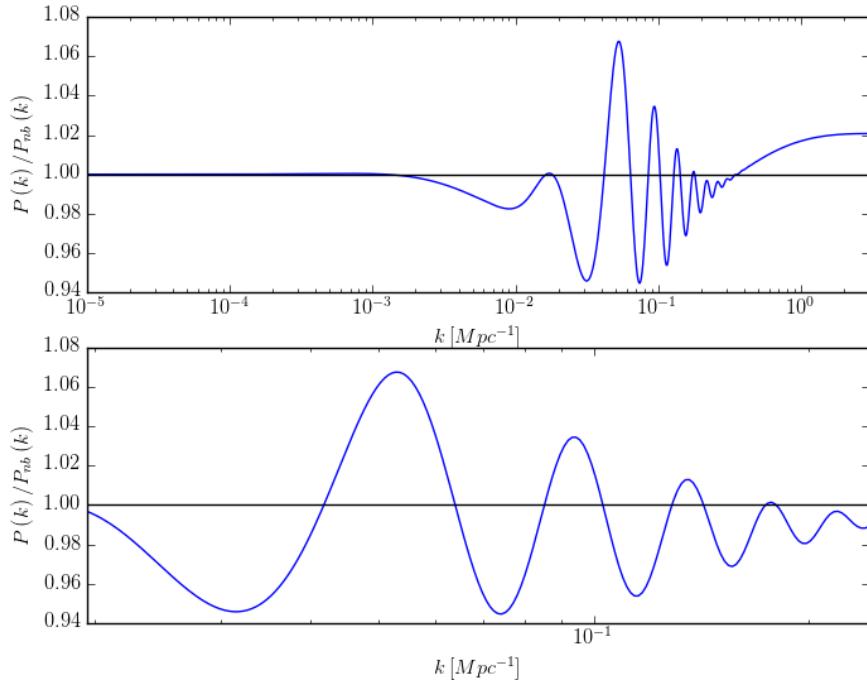


Figura 13 – Tanto a representação superior quanto a inferior são provenientes da divisão entre os espectros gerados pela figura 10. A superiro demonstra um maior intervalo ressaltando que a região de interesse é de fato a da representação inferior.

Este é um método simples, computacionalmente rápido, que explora diversas efeitos cosmológicos ao mesmo tempo que descreve de forma objetiva o comportamento oscilatório dos bárions.

5.2 Primeiras percepções e entendimentos para a construção de um ajuste

Utilizei dados em um intervalo de redshift de 0.127 à 0.478, que será coberto pelo *BINGO telescope*, para conseguir fazer análises das oscilações acústicas. Usei também o método possibilitado pelo IM de "fatiamento" deste intervalo, dividindo-o em intervalos menores, que chamarei de **bins**, e comumente o representarei como Δz_i , para representar que é o bin correspondente à i -ésima fatia. No entanto, fiz a divisão do tamanho dos intervalos (fatias) não pensando no intervalo de redshift mas pensando no tamanho do canal de frequência observado pelo telescópio¹. Então, uma análise inicial, necessária, para a construção de

¹ Como a relação entre a frequência e o redshift não é linear, um intervalo de frequência fixo para toda faixa entre 960 MHz à 1260 MHz, ou seja, dividindo toda faixa de frequência em n partes, com o tamanho do bin da frequência (canal): $(1260 - 960) / n = 300/n$ MHz. Mas, apesar do tamanho do bin na frequência se manter constante, o do redshift não irá ser, por isso uso o subíndice i , para me referir a um certo bin, dentre os n possíveis.

um ajuste fenomenológico para o espectro de potência angular no regime linear, foi feita buscando entender a influência do tamanho do bin de redshift plotando $C_\ell/C_{\ell,s}$, em que C_ℓ é o espectro de potência angular, expressão 4.11, obtido pelo espectro de potência 3D, expressão 3.15, $P_{3D}(k) = P_{3D}(\sqrt{k_\parallel^2 + k_\perp^2})$, construído a partir da função de transferência fornecida pelo ajuste dado em [18], assim como o espectro $C_{\ell,s}$, pela função de transferência sem as oscilações, com outro ajuste dado no mesmo trabalho.

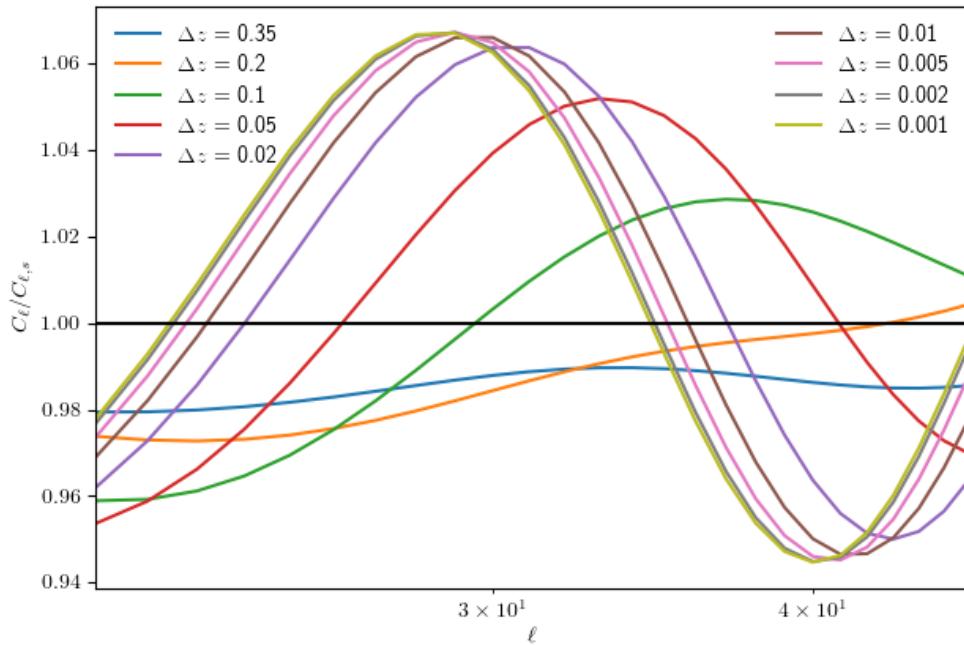


Figura 14 – Espectros de potência angulares obtidos com redshift inicial de 0.127 acrescidos de diferentes bins Δz , com tamanhos de bin variando de 0.001 à 0.35.

Na figura 14, estão representados diferentes oscilações para bins indo de 0.35, o que corresponderia a toda faixa de observação, até 0.001, necessário para 300 divisões. A faixa acima coberta, corresponde a multipolos entre 21 e 64, buscando representar somente o primeiro pico acústico no redshift de 0.127. Como podemos ver, a captura das oscilações depende fortemente do tamanho do bin tomado. Tamanho de bin extremamente pequeno faz com que, basicamente, $C_\ell \sim P_{3D}$, e o pico aparece, já para bin grande, englobando uma extensa faixa de redshifts, a informação das oscilações praticamente não é detectada. No entanto, existe um tamanho mínimo de bin tal que qualquer "binagem" menor não fornecerá melhora significativa na detecção diante do trabalho computacional exigido. Podemos ver que, p.ex., para bins inferiores a 0.01, a diferença passa a ser bem pequena, a largura do pico aparenta ser praticamente a mesma alterando somente a posição do mesmo. A vantagem de se tomar bins extremamente pequenos é que a amostragem de dados também aumenta, portanto, diminui os erros estatísticos. Para exemplificar, neste sentido, basta pensarmos que é melhor tomar 0.01 a 0.02 pois no primeiro tem-se o dobro

de dados do segundo. Com isso, diminuir por um fator 10 o tamanho do canal, aumenta pelo mesmo fator o número de dados.

Neste trabalho, utilizei 15 divisões, ou seja, bin de frequência de 20 MHz, o que resulta em bins entre 0.018 e 0.030.

A principal ideia do trabalho é buscar um ajuste fenomenológico o mais simples possível, que consiga descrever os picos acústicos obtido através do espectro de potência angular da linha de 21 cm do hidrogênio neutro, C_ℓ , assim como feito para o espectro de potência 3D em [10]. Uma vez que a descrição, torna-se complicada a partir do terceiro pico, devido a efeitos de não-linearidade, o principal objetivo é conseguir descrever o primeiro pico.

Para verificar se o ajuste funciona, construí espectros usando $C_\ell/C_{\ell,s}$ pela teoria da relação 4.11, com os dados descritos na tabela 3, e assumí que esses são os dados "observacionais". Em seguida, tentei descrever as oscilações com o ajuste, modelo teórico. Para isto, fiz uma análise com o método de Monte-Carlo, com parâmetros que tentassem descrever a dilatação da escala, a amplitude e o amortecimento das oscilações. Por último, com a informação da dilatação, marginalizada sobre os outros parâmetros, fiz outra análise de Monte-Carlo, usando agora como dado os valores dos parâmetros de dilatação obtidos em cada faixa de redshift da comparação entre $C_\ell/C_{\ell,s}$ e o ajuste, tentando reobter os valores dos parâmetros cosmológicos da tabela 3.

ω_c	ω_b	Ω_k	w_{eff}	H_0	N_{eff}	Ω_{DE}
0.1188	0.02230	0	-1.00	67.74	3.046	0.6911

Tabela 3 – Cosmologia assumida para gerar os dados teóricos, $C_\ell/C_{\ell,s}$.

A principal dificuldade em conseguir um ajuste fenomenológico para $C_\ell/C_{\ell,s}$ se deve ao erro associado aos multipolos, que imprimem um erro muito grande em escalas de multipolos descritos pela faixa em que se encontram os picos em baixos redshifts, como pode ser visto na figura 15.

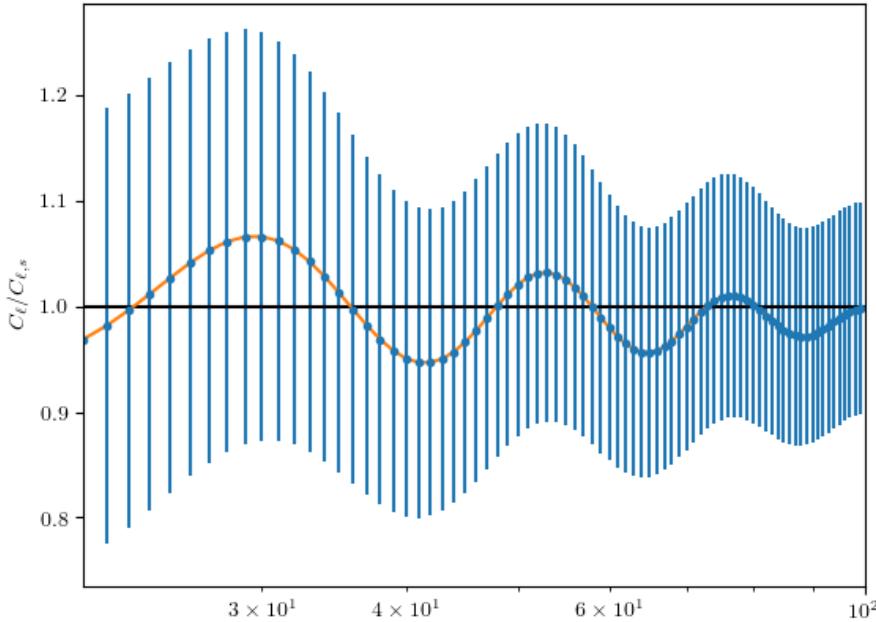


Figura 15 – Espectro produzido dentro da faixa de redshift de 0.127 e 0.145. Os erros são devidos somente a variância cósmica.

O erro aqui surge do fato de termos somente um céu para tomarmos medidas (uma única realização), ou seja, um erro inerente à própria teoria, que traduz-se em

$$\delta C_\ell = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)f_{sky}}} C_\ell. \quad (5.1)$$

Assumo o caso mais simples possível, em que não há qualquer ruído (instrumental ou contaminação de outras fontes do Universo) e o céu é todo coberto pelo telescópio, $f_{sky} = 1$. No caso do BINGO, uma vez que é previsto uma cobertura do céu de 2900 deg^2 , e o céu completo cobre $4\pi (180/\pi)^2 \text{ deg}^2$, a fração coberta será de $f_{sky} \approx 0.07$.²

5.3 Teoria

O ajuste que estou assumindo descrever os dados se baseia na relação, na aproximação de Limber, $\ell(\ell + 1)C_\ell \approx k_\perp^2 P_{2D}(k_\perp)$, para $\ell \gg 30$. No caso, para valores superiores a 20 ele já funciona de maneira satisfatória [33]. Assumo que de certa forma, $P_{2D}(k)$ possa ser "suavizado", assim como ocorre com o caso $P(k)$, segundo um comportamento que segue um decaimento exponencial que oscila segundo uma senóide.

$$\frac{P(k)}{P_s(k)} = 1 + Ake^{-(\Sigma k)^{1.4}} \sin\left(2\pi \frac{k}{k_A}\right). \quad (5.2)$$

² Elevando o erro por um fator de ≈ 3.78 .

Podemos chegar a este motivados pela seguinte descrição:

$$P(k) = \left(1 + \left(\frac{P(k) - P_s(k)}{P_s(k)}\right)\right) P_s(k) \equiv (1 + f_{BAO}(k)) P_s(k),$$

e, seguindo o trabalho [12], uma vez que a informação do BAO está contida em f_{BAO} , multiplicamos este por um parâmetro \tilde{A} que dará a medida de detectabilidade das característica do BAO.

$$\frac{P(k)}{P_s(k)} = 1 + \tilde{A}f_{BAO}(k),$$

ou seja, quanto menor o tamanho do canal maior a detectabilidade do BAO.

Contudo é necessário adaptar ao caso ortogonal à linha de visada. Primeira observação a ser feita é devido a correspondência que surge entre k e ℓ . Sem a aproximação de Limber não há uma correspondência biunívoca entre estas quantidades. Contudo em tal aproximação há, e ela é dada por $k_\perp(z) \approx \sqrt{\ell(\ell+1)/r(\bar{z})} \approx (\ell+1/2)/r(\bar{z})$, para um dado \bar{z} dentro do bin de análise. Segundo o trabalho [33], este \bar{z} tem que ser tal que maximize o produto dos kernels de projeção do espectro de potência angular. Para conseguir adaptar este fato ao espectro de 21cm, primeiro é importante entender de onde surge o tal kernel e qual forma este assume no caso aqui estudado.

Se tomarmos dois campos aleatório A e B, projetados no céu, a aproximação de Limber diz que o espectro cruzado destes campos, em primeira ordem, é

$$C_\ell(A, B) = \frac{c}{H_0} \int_{\Delta z} \frac{dz}{r(z) E(z)} f_A(r(z)) f_B(r(z)) P_{AB}\left(\frac{\ell+1/2}{r(z)}\right), \quad (5.3)$$

com,

$$f_A(r) = \frac{F_A(r)}{\sqrt{r}}.$$

Em que F_A é o kernel de projeção. Para a aproximação entre C_ℓ e $P_{2D}(k_\perp)$ valer, é preciso tomar $k_\perp \approx (\ell+1/2)/r(\bar{z})$, como dito anteriormente, com o \bar{z} do bin sendo tal que, $F_A(r(\bar{z}))F_B(r(\bar{z})) > F_A(r(z))F_B(r(z))$, $\forall z$ do mesmo bin Δz .

No caso do espectro de 21cm, os campos A e B são as perturbações na temperatura de 21cm ($A = B = \delta T_{21}$). Lembrando que no caso da aproximação de Limber, o espectro angular de 21cm, pela expressão 4.11, é

$$C_\ell((\delta T)^2) = \frac{H_0}{c} \int_{\Delta z} dz E(z) \left[\frac{W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) b_{HI}}{r(z)} \right]^2 P_{(\delta T)^2}\left(\frac{\ell+1/2}{r(z)}\right). \quad (5.4)$$

Então, comparando as relações 5.3 e 5.4, temos,

$$\frac{c}{H_0 E(z) r(z)} (f_{\delta T})^2 = \frac{H_0 E(z)}{c} \left[\frac{W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) b_{HI}(z)}{r(z)} \right]^2,$$

$$(f_{\delta T})^2 = \left(\frac{F_{\delta T}(r(z))}{\sqrt{r(z)}} \right)^2 = \left[\frac{H_0 W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) b_{HI}(z) E(z)}{c r(z)} \right]^2 r(z).$$

$$\therefore (F_{\delta T}(z))^2 = \left[\frac{H_0 W(z) \bar{T}_{21}(z) D(z) b_{HI}(z) E(z)}{c} \right]^2. \quad (5.5)$$

A não ser que o bias do hidrogênio neutro seja assumido com uma forma esdrúxula, não convencional, ou a função de crescimento tenha um comportamento não crescente com o redshift, o kernel de projeção para 21cm é crescente dentro do bin. Com isso, o \bar{z} deve ser o limite superior do bin.

Tendo em mente a correspondência entre o espaço de Fourier e o espaço harmônico, assumi que há uma forma de extrair as oscilações acústicas no espectro projetado sobre o plano perpendicular a linha de visada, (P_{2D}), similar a forma 3D dada na expressão 5.11, com os parâmetros Σ , A e k_A (escala acústica) não necessariamente sendo os mesmos. A amplitude A , assim como na expressão 5.2, não tem motivação física, logo seu valor serve para ajustar simplesmente a amplitude das oscilações, e é de se esperar que não dependa (fortemente) do redshift, contudo, assim como podemos ver na figura 14, deve depender do tamanho do bin, da detectabilidade. Para diferenciar do caso 3D, o chamarei de A_{\perp} . O parâmetro Σ da expressão 5.2 é motivada pelo *Silk damping*, e como este ocorre com mais força em um período até a recombinação, também não é de se esperar que tenha uma (forte) dependência com o redshift na nossa análise, já que não ocorre um forte espalhamento no período. Para o caso aqui estudado, seu valor tem que ser um certo Σ_{\perp} que também dependerá principalmente do tamanho do bin. Já a escala acústica será assumida como sendo um $k_{A,\perp}$ ³, escala acústica perpendicular, que esta relacionada a medida do horizonte sonoro na *drag epoch*, r_s , e esta relacionada à escala acústica por $k_A = (k_{A,\parallel})^{1/3} (k_{A,\perp})^{2/3}$, como mostra o artigo [7].

Como a escala acústica k_A esta relacionado ao horizonte sonoro r_s por $k_A = 2\pi/r_s$, assumindo que o horizonte sonoro é isotrópico, usando as propriedades de tamanhos próprios nas direções perpendiculares e ortogonal a linha de visada, exposta na seção 1.11.4, assim como no artigo [50], o tamanho comóvel de uma propriedade física, perpendicular a linha de visada é dado por $(1+z)D_A(z)\theta$, e o tamanho ao longo da linha de visada, $\Delta z/H(z)$, com isso, chamando tais tamanhos de r_{\perp} e r_{\parallel} , respectivamente, temos que as quantidades $r_{\perp}/(1+z)D_A(z)\theta$ e $r_{\parallel}H(z)/\Delta z$ são constantes. Com isto,

$$\left(\frac{r_{\perp}}{D_A(z)} \right)^{mod} = const. = \left(\frac{r_{\perp}}{D_A(z)} \right)^{fid},$$

$$(r_{\parallel}H(z))^{mod} = const. = (r_{\parallel}H(z))^{fid}.$$

³ Usarei como subíndice da escala acústica perpendicular (paralelo) a linha de visada como " A, \perp " (" A, \parallel "), a fim de designar que este está associada ao tamanho do horizonte sonoro perpendicular a linha de visada (paralela)

Os superscripts *fid* e *mod* se referem ao fato dos dados serem calculados nas cosmologias "fiducial" e "modelo", respectivamente, no qual, assumo como fiducial a cosmologia Λ CDM-*flat*, tabela 3, i.e., Λ CDM sem curvatura, e a modelo, qualquer cosmologia formada pela combinação de valores dos parâmetros cosmológicos que difiram do caso Λ CDM-*flat*. Logo, dependendo da cosmologia utilizada, o valor obtido para o horizonte sonoro pode ser dilatado/contraído, na respectiva direção em análise.

$$\begin{aligned} r_{s,\perp}^{\text{mod}} &= \left(\frac{D_A^{\text{mod}}(z)}{D_A^{\text{fid}}(z)} \right) r_{s,\perp}^{\text{fid}} \equiv \alpha_{\perp} r_s^{\text{fid}}, \\ r_{s,\parallel}^{\text{mod}} &= \left(\frac{D_H^{\text{mod}}(z)}{D_H^{\text{fid}}(z)} \right) r_{s,\parallel}^{\text{fid}} \equiv \alpha_{\parallel} r_s^{\text{fid}}, \end{aligned}$$

em que uso a definição de distância de Hubble, feita na seção 1.11.4. Nas últimas igualdades das expressões acima, para cada direção assumo que o horizonte sonoro é isotrópico. Também defino os **parâmetros de distorção** α_{\perp} e α_{\parallel} , referente as respectivas direções, como sendo⁴

$$\alpha_{\perp} \doteq \frac{D_A^{\text{mod}}}{D_A^{\text{fid}}}, \quad (5.6)$$

$$\alpha_{\parallel} \doteq \frac{D_H^{\text{mod}}}{D_H^{\text{fid}}}. \quad (5.7)$$

Podemos esperar que ocorrá influência da escolha da cosmologia não somente na escala acústica como no *multipolo acústico*. Definimos o multipolo acústico a partir da abertura angular θ , como sendo

$$\ell_A \doteq \frac{\pi}{\theta} = \pi \frac{(1+z) D_A(z)}{r_s}. \quad (5.8)$$

É preciso cuidado ao comparar este cálculo de multipolo acústico ao caso feito na CMB, uma vez que na CMB todos os valores são calculados na época do desacoplamento, incluindo o horizonte sonoro.

Usando os dados do Planck de 2015 [1], temos que $\ell_A(z=0.13) \simeq 11$ e $\ell_A(z=0.48) \simeq 37$. No caso da CMB, com $z \approx 1090$, tem-se o valor $\ell_A^{\text{CMB}} \approx 289$. Uma vantagem do caso da CMB para o do BAO, para fins de análise, se deve a trabalhar em altos multipolos, e então com erros de variância cósmica menores. Mas por outro lado, para fins físicos, caso o principal objetivo seja analisar restrições a energia escura, o período em que a CMB atua é um período de baixa influência da mesma, já no caso da nossa análise, toda a faixa de redshift utilizada é da ordem do redshift z_{coinc} , período em que a energia escura e a matéria não-relativística têm a mesma densidade de energia, como analisado na seção 1.10.2.

⁴ Neste ponto é bom ressaltar a diferença que há entre esta definição e a apresentada em [10] e que aparece por exemplo nos artigos do SDSS, dentre outros. Aqui faço uma derivação utilizando o efeito Alcock-Paczynski. O termo de dilatação apresentado em [10] é $\alpha = (D_V/r_s)^{\text{mod}}/(D_V/r_s)^{\text{fid}}$, ou seja, leva em conta o horizonte sonoro.

O parâmetro de dilatação escrito em termos do multipolo acústico, fica

$$\alpha_{\perp} = \frac{(l_A(z) r_s)^{mod}}{(l_A(z) r_s)^{fid}}. \quad (5.9)$$

Voltando ao caso da escala acústica, uma vez que

$$r_{s,\perp}^{mod} = \alpha_{\perp} r_s^{fid},$$

$$r_{s,\parallel}^{mod} = \alpha_{\parallel} r_s^{fid},$$

temos que

$$\begin{aligned} k_{A,\perp}^{mod} &= \alpha_{\perp}^{-1} k_A^{fid}, \\ k_{A,\parallel}^{mod} &= \alpha_{\parallel}^{-1} k_A^{fid}. \end{aligned}$$

Então, a dilatação que a escala acústica pode sofrer segundo uma cosmologia errada, é

$$\begin{aligned} k_A^{mod} &= (k_{A,\parallel}^{mod})^{1/3} (k_{A,\perp}^{mod})^{2/3} = (\alpha_{\parallel}^{-1} k_A^{fid})^{1/3} (\alpha_{\perp}^{-1} k_A^{fid})^{2/3} \\ &= \left((\alpha_{\parallel})^{1/3} (\alpha_{\perp})^{2/3} \right) \left((k_{A,\parallel}^{fid})^{1/3} (k_{A,\perp}^{fid})^{2/3} \right) = \left(\frac{D_H^{mod}}{D_H^{fid}} \frac{(D_A^{mod})^2}{(D_A^{fid})^2} \right)^{1/3} k_A^{fid} \\ &= \left(\frac{D_V^{mod}}{D_V^{fid}} \right) k_A^{fid} \doteq \alpha k_A^{fid}, \end{aligned}$$

em que uso a definição da distância esfericamente média, quantidade definida na seção 1.11.4. Defino também um parâmetro de distorção **isotrópico**, α , como sendo

$$\alpha \doteq (\alpha_{\parallel})^{1/3} (\alpha_{\perp})^{2/3} = \frac{D_V^{mod}}{D_V^{fid}}. \quad (5.10)$$

Porém, iremos querer trabalhar com a relação k/k_A , ou, de modo equivalente, kr_s , e esta distorção possivelmente não irá aparecer. Para entender, basta-nos observar que assim como uma cosmologia não sendo a fiducial causará uma distorção no espaço real, refletido aqui no horizonte sonoro perpendicular $r_{s,\perp}$ e no ortogonal $r_{s,\parallel}$, ela causará uma distorção no espaço de Fourier e com isso $k_{\perp} \rightarrow k_{\perp}/\alpha_{\perp}$, $k_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel}/\alpha_{\parallel}$. Então, $(k_{\perp} r_{s,\perp})^{mod} = (k_{\perp} r_{s,\perp})^{fid}$, e de modo equivalente, $(k_{\parallel} r_{s,\parallel})^{mod} = (k_{\parallel} r_{s,\parallel})^{fid}$. Pode-se então, caso se queira, estudar isoladamente o horizonte sonoro na dada direção sem que estes efeitos causem problema. Porém, como será o caso deste trabalho, pode não haver interesse primário na determinação específica do horizonte sonoro, principalmente pela faixa de redshift em análise, e por este pouco dizer sobre a energia escura. Com isto, irei assumir que o horizonte sonoro na *drag epoch*, r_s , é bem determinado, e utilizei o valor, segundo a cosmologia fornecida pela tabela 3, utilizando o ajuste do trabalho [18]. No caso, este valor é 151.3 Mpc. Este efeito, de distorções nos modos de Fourier devido a cosmologia, é

conhecido como efeito Alcock-Paczyński e a ideia principal a ele associado é que, uma vez que D_H e D_A evoluem de forma diferente, uma cosmologia errada irá distorcer a forma real do objeto em análise de maneira diferente nas duas direções. Para uma discussão didática do mesmo, sugiro a leitura do capítulo 14 do livro [4]. Para concluir, o ajuste dará possibilidade tanto para o estudo de efeitos de distorção, como o Alcock-Paczyński (como neste trabalho feito), quanto para determinação da própria escala acústica e precisão desta como uma régua padrão.

5.4 O ajuste

Tomando as adaptações necessárias, e se baseando na aproximação de Limber, assim como na expressão 5.2, assumo valer a seguinte relação:

$$\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}}(\Delta z) = 1 + Ak_\perp(z)e^{-(\Sigma_\perp k_\perp(z))^{1.4}} \sin\left(2\pi \frac{k_\perp(z)}{k_{\perp,A}(z)}\right); \quad z = \max \Delta z. \quad (5.11)$$

Contudo, como comentado na seção anterior, usarei uma versão modificada da mesma, para fins de análise.

$$\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}}(\Delta z) = 1 + Ak_\perp(z)e^{-(\Sigma_\perp k_\perp(z))^{1.4}} \sin(\alpha_\perp k_\perp r_s); \quad z = \max \Delta z. \quad (5.12)$$

Com a correspondência fornecida pela aproximação de Limber,

$$k_\perp(z) \approx \sqrt{\ell(\ell+1)}/r(z).$$

Para o z assumindo o valor máximo dentro do bin em estudo.

Como pode ser visto na figura 16, usando os C_ℓ e os $C_{\ell,s}$ preditos pela equação 4.11, com os parâmetros cosmológicos sendo os fornecido pelo artigo [1], o espectro de potência suavizado, sem as oscilações, acompanha a tendência do espectro com as oscilações, assim como desejado. O gráfico com as razões dos espectros angulares é exatamente o que foi apresentado na figura 14.

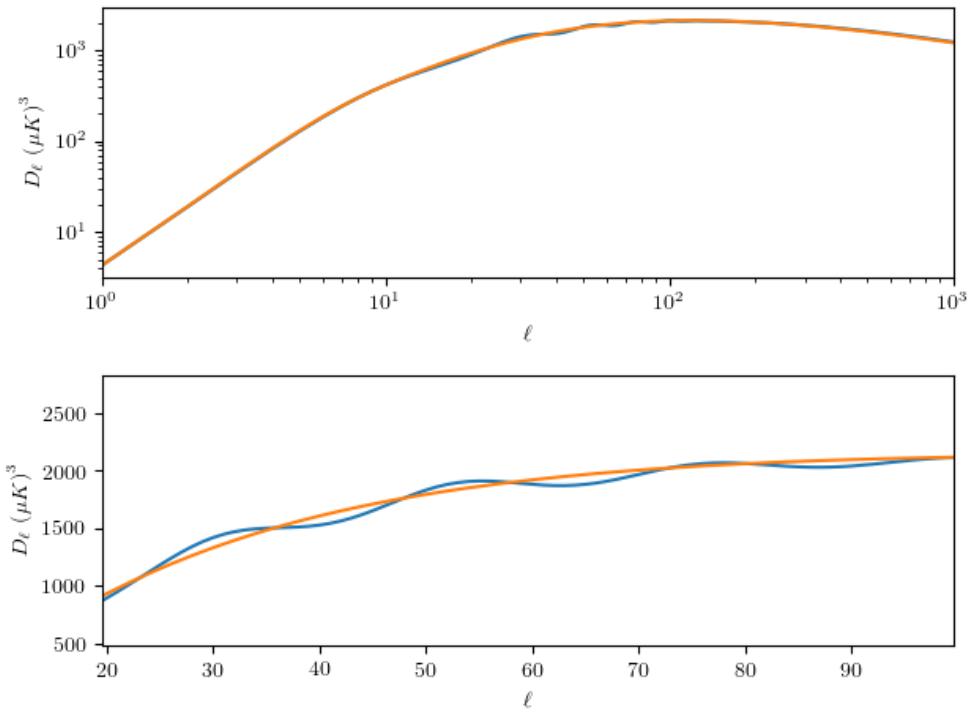


Figura 16 – $D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$. Os gráficos foram gerados com os parâmetros cosmológicos fornecidos em [1] e dispostos na tabela 3, e corresponde ao primeiro bin, Δz_1 , que vai do redshift 0.127 ao 0.145. O gráfico em azul representa o espectro de potência angular de 21cm utilizando o ajuste de [18] para espectro total da matéria, e o laranja para o espectro sem o BAO.

Primeiramente, era necessário verificar se fazia sentido o ajuste 5.11, se de fato ele teria o comportamento esperado e se poderia ser modelado segundo o que se desejava. Com tal ajuste fazendo sentido, o passo seguinte seria o de utilizar o ajuste 5.12 para as análises. As primeiras tentativas de obter os valores dos parâmetros do ajuste (A , Σ_\perp e $k_{A,\perp}$) foram feitas a "olho nu", buscando valores que pudessem fornecer um prior para as análises. Inicialmente calculei os redshifts correspondentes as frequências entre 1260 MHz e 960 MHz, que é a faixa esperada para o projeto BINGO, e dividi a faixa em 15 canais espaçados por frequências de 20 MHz. Isto corresponde a redshifts entre 0.127 – 0.479 com bins entre $\approx 0.02 – 0.03$, uma vez que eles crescem.

Buscando entender como é o comportamento dos parâmetros do ajuste com a evolução do redshift, fixei os parâmetros e evolui a expressão 5.11 tomando sempre o limite superior de cada bin como redshift do ajuste, $z_i = \max \Delta z_i$ (lado direito da expressão 5.11), como pode ser visto na figura 17. Nesta figura, o ajuste foi calculado com⁵: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$.

⁵ O valor, p.ex., $r_s = 151.3$ Mpc corresponde a $k_A = 0.0415 \text{ Mpc}^{-1}$.

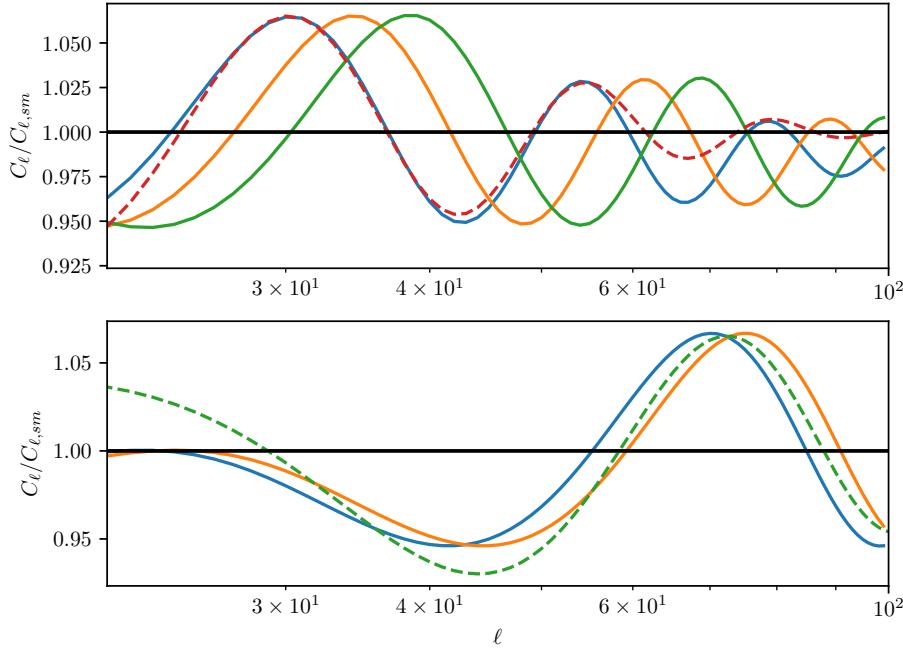


Figura 17 – No gráfico superior, as curvas continuas são fornecidas pela teoria e a tracejada o ajuste. As curvas azul, laranja e verde são referentes ao primeiro, segundo e terceiro bin, respectivamente. O ajuste foi obtido com: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$. O gráfico inferior possui as curvas continuas azul e laranja, representando a teoria para o nono e décimo bin, respectivamente, e a curva tracejada o ajuste com os parâmetros: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$.

Utilizei tais valores para obter o comportamento representado pela curva tracejada no gráfico superior, tentando obter o comportamento do primeiro pico, então, partindo destes parâmetros, calculei o ajuste no décimo bin, gráfico inferior da figura 17. A curva em laranja, no gráfico inferior, é a curva referente ao décimo bin, e a azul é referente ao nono bin. Podemos ver que a curva que, em tese, deveria estar sobre a curva laranja se encontra entre as duas curvas. Isto pode ser causado por dois motivos: pelo erro no valor da escala acústica perpendicular, imprimindo uma correção de primeira ordem que se expressa através de uma pequena translação, como pode ser vista na figura 18, obtidos com os mesmos A e Σ_\perp , mas, $k_{A,\perp}$ de 0.0413 na figura superior, e 0.0399 na inferior. Ou pelo efeito de "alargamento" do pico, i.e., picos mais distantes, em multipolos maiores, sofrem maior amortecimento do termo exponencial. Por tal motivo, a princípio, não faz sentido buscar valores dos parâmetros que consiga descrever toda faixa de redshift, e sim, é importante buscar os valores dos parâmetros para cada bin. Como nosso desejo é o de obter o parâmetro de distorção (ou a escala acústica), marginalizaremos sobre os outros dois parâmetros. Logo, as análises foram feitas com os dois parâmetros "não-físicos" livres em cada bin, assim como o parâmetro físico, parâmetro de distorção (ou a escala acústica),

e tomindo o valor marginalizado deste em relação aos dois primeiros.

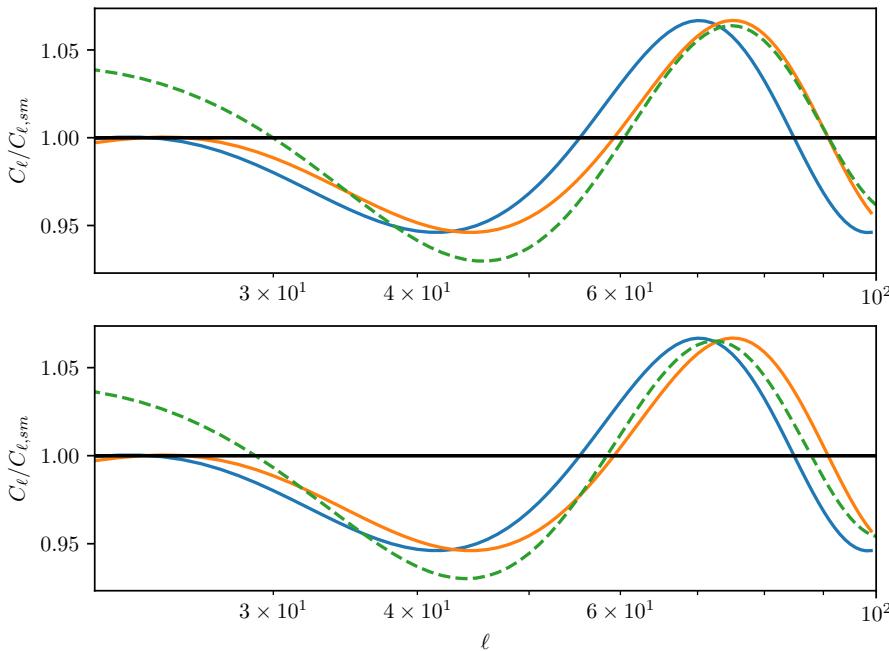


Figura 18 – As curvas azul e laranja e verde são referentes ao nono e décimo bin fornecido pela teoria, respectivamente. O ajuste foi obtido com: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0413$. O gráfico inferior possui as mesmas curvas continuas dadas no gráfico superior e a curva tracejada o ajuste com os parâmetros: $A = 4.07$, $\Sigma_\perp = 22$ e $k_{A,\perp} = 0.0399$.

5.5 Teste

Como a própria teoria dos C_ℓ possui um erro inerente, mostrado na equação 15, uso como erro da razão do lado esquerdo da expressão 5.11, ou seja, da teoria, a expressão 5.13. Com isso, a teoria funciona como se fosse um "dado" com o respectivo erro associado. Então, para cada bin eu tenho o valor de $C_\ell/C_{\ell,s}$ fornecido pela teoria, com erro 5.13. Logo, com 15 divisões obtenho 15 dados.

$$\delta \left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right) = \sqrt{\frac{2}{(2\ell + 1)}} \frac{C_\ell}{C_{\ell,s}}. \quad (5.13)$$

Partindo disto, fiz as análises utilizando o método de Monte Carlo, através da análise de **invariância afim** com o código *emcee* [20], comparando os "dados" como acima citado, e o ajuste, deixando como parâmetros livres os três parâmetros do ajuste. As análises foram feitas com o ajuste 5.12 buscando o valor de α_\perp ⁶. Os priors foram

⁶ De modo independente, fiz as análises buscando valores para a escala acústica. Estas não serão apresentadas aqui, porém, posso adiantar que os valores obtidos foram de $k_A \approx 0.040 \text{ Mpc}^{-1}$, com erros entre 8 – 13% dos valores.

assumidos uniformes e a likelihood \mathcal{L} gaussiana, como pode ser vista abaixo.

$$-2 \log \mathcal{L} = n \log (2\pi) + \log (\det \mathbf{C}) + \chi_B^2. \quad (5.14)$$

O subíndice B sob o "chi-quadrado" é utilizado para especificar que este é o caso feito para especificações do BINGO, n é o número de dados que no caso é 15, e \mathbf{C} é a matriz de covariância, diagonal, formada pelos valores fornecidas pela expressão 5.13. O chi-quadrado é dado por

$$\chi_B^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right)^{\text{teoria}} - \left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right)^{\text{fit}} \right)_i \mathbf{C}_{ij}^{-1} \left(\left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right)^{\text{teoria}} - \left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right)^{\text{fit}} \right)_j. \quad (5.15)$$

Para testar os limites do ajuste, utilizei variações do erro da seguinte forma

$$\sigma = \text{fator} \times \delta \left(\frac{C_\ell}{C_{\ell,s}} \right),$$

com o *fator* assumindo valores entre 0.3 e 1.5. Utilizei os valores esperados das análises de Monte Carlo no ajuste, equação 5.12, e os resultados estão apresentados nas figuras 19 e 20.

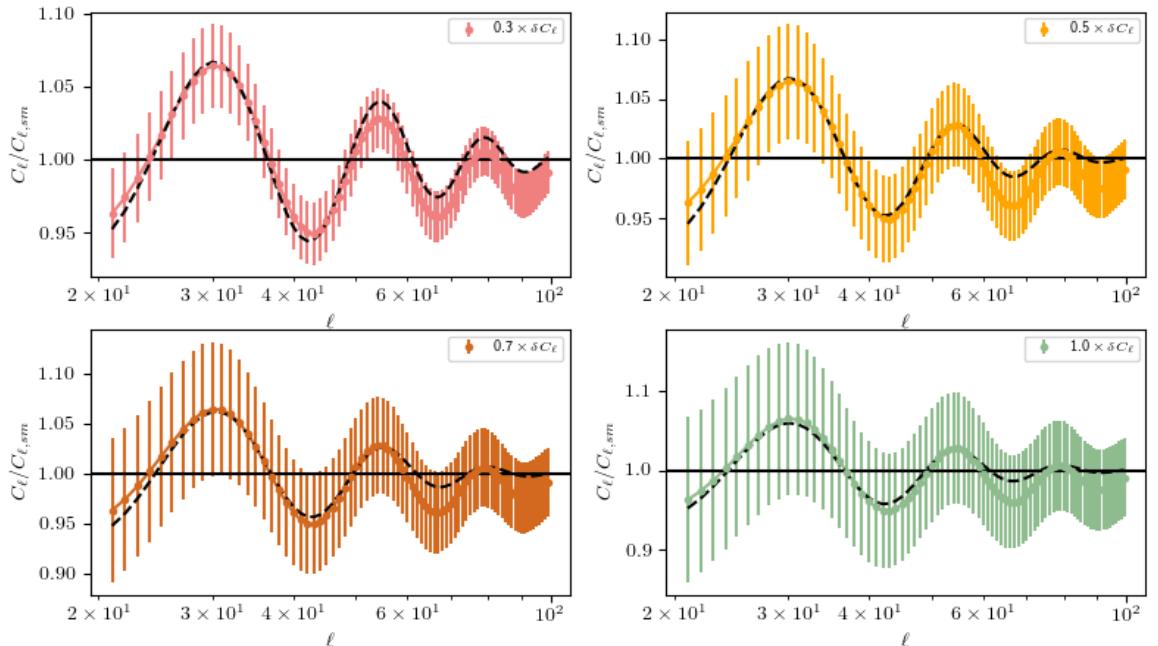


Figura 19 – Em preto tracejado estão os resultados dos ajustes com os valores esperados fornecidos pelos MCMCs. Em colorido os valores teóricos com suas respectivas barras de erro, resultado da variância cósmica vezes um fator, p. ex. no primeiro gráfico o fator é de 0.3 de $\delta(C_\ell/C_{\ell,s})$, representado simplesmente por δC_ℓ , isto é, 30% do valor da variância cósmica.

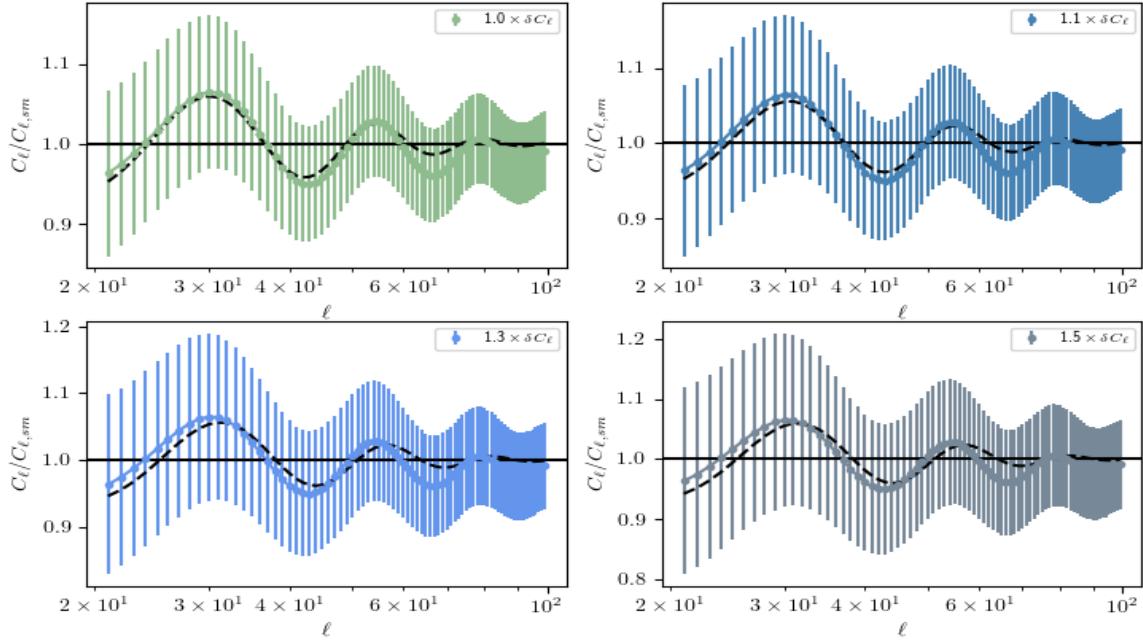


Figura 20 – Em preto tracejado estão os resultados dos ajustes com os valores esperados fornecidos pelos MCMCs. Em colorido os valores teóricos com suas respectivas barras de erro, resultado da variância cósmica vezes um fator, p. ex. no quarto gráfico o fator é de 1.5 de $\delta(C_\ell/C_{\ell,sm})$, representado simplesmente por δC_ℓ , isto é, 150% do valor da variância cósmica.

Como podemos ver nas figuras 19 e 20, a baixos valores de erro o ajuste reproduz o comportamento do pico, porém, erros superiores à 130% da variância cósmica a posição do pico passa não mais ser reproduzido.

5.6 Análises

Uma vez que o desejo principal é o de obter o primeiro pico, utilizei somente multipolos de 21 à 100. O compilado dos resultados pode ser visto na figura 21, os resultados dos MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*) podem ser visto no anexo A.

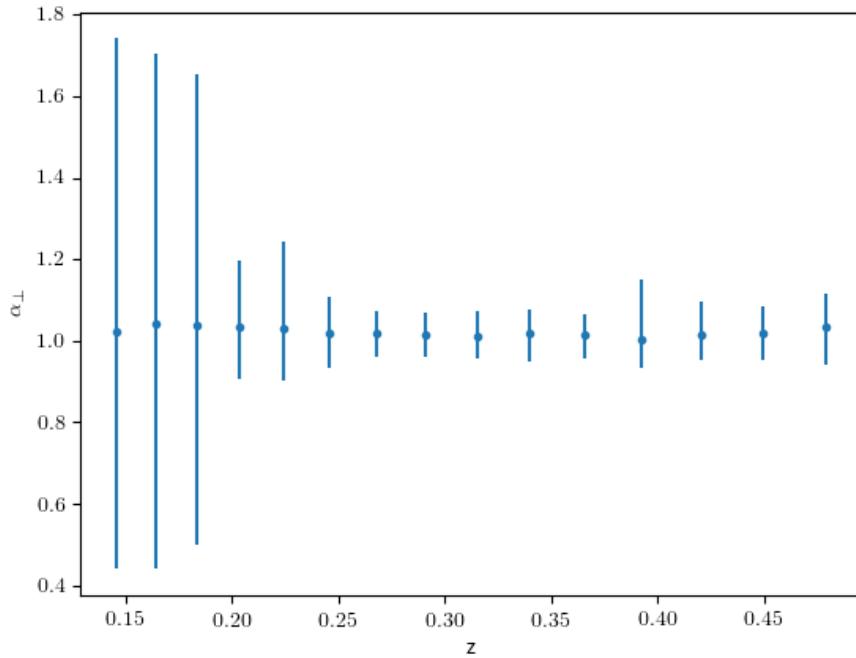


Figura 21 – Resultados dos valores obtidos para α_{\perp} em cada bin, marginalizado em relação aos dois outros parâmetros. O redshift correspondente a cada valor é o redshift que é o limite superior do dado bin.

De fato, é de se esperar que os bins em redshifts maiores resultem em dados com erro menor, uma vez que a variância cósmica diminui. O valor de $\alpha_{\perp} = 1$ é o valor tal que o modelo assumido é o mesmo que o fiducial.

Usando estes α_{\perp} como "dados" e usando a expressão 5.6, fiz uma nova análise de MCMC, agora variando os parâmetros cosmológicos e tentando reobter a cosmologia fiducial, tabela 3, que descreveu a teoria dos dados. Para tal feito, utilizei o método de MCMC *Metropolis-Hastings* através do código MontePython [5], para gerar as cadeias. Fiz este pelo benefício de já estar inserido nele "likelihoods" como a do Planck e a do JLA. Então, construí neste programa uma likelihood gaussiana para os dados, similar a 5.14, e com o qui-quadrado

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{d}_i \mathbf{C}_{ij}^{-1} \mathbf{d}_j = \mathbf{d}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{d}_i = ((\alpha_{\perp})^{teoria} - (\alpha_{\perp})^{dado})_i = \frac{D_A(z_i)}{D_A^{\Lambda CDM}(z_i)} - (\alpha_{\perp})_i^{dado}. \quad (5.17)$$

A análise foi feita possibilitando modelos de matéria escura com equação de estado constante, que seria para alguma outra matéria escura que não a constante cosmológica, Ω_{DE} . Para fins comparativos, na figura 22 gerei as análises para supernovas, utilizando dados do JLA (*Joint Light-curve Analysis*) [8], levantamento que consiste de 740 SNIa, e HST (*Hubble Space Telescope*) [45], que fornece uma medida local da constante de Hubble.

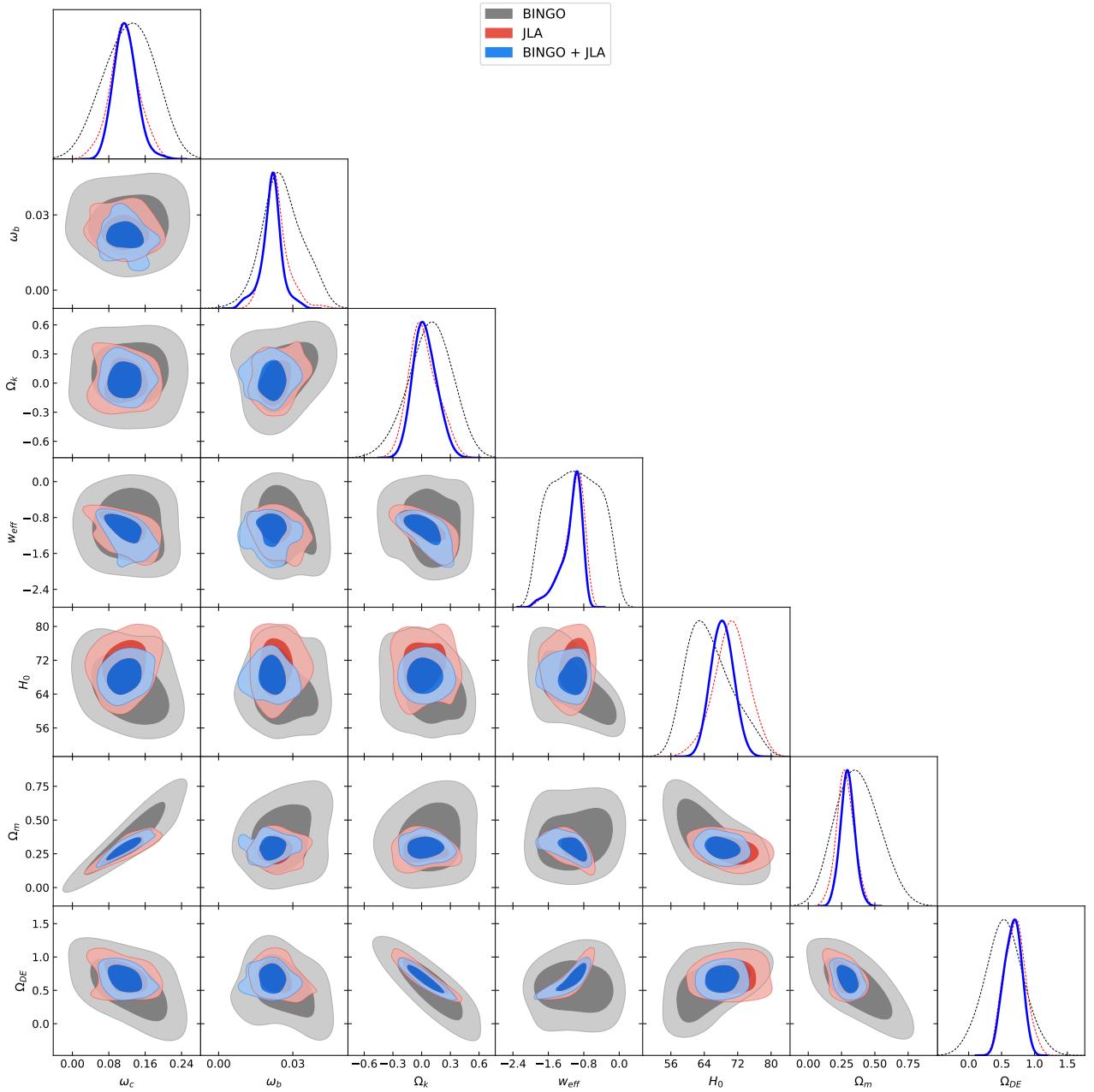


Figura 22 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo para modelo cosmológico w CDM, com resultados do ajuste segundo o cenário do BINGO e JLA.

Como podemos ver pela tabela 4, os resultados comportam os resultados do modelo fiducial assumido, tabela 3. A ordem dos erros não assusta uma vez que os erros associados aos multipolos são relativamente altos, e resultaram em dados com erros relativos altos em baixos redshifts. A figura 22 demonstra que o comportamento obtido pelos dados funciona como uma ferramenta complementar ao JLA sozinho, melhorando a precisão da restrição.

Também realizei outra análise utilizando os resultados do JLA sozinho, ele com medidas do HST, e os dois mais o do ajuste (BINGO), segundo o cenário do BINGO, como exposto na figura 23, assim como uma análise dos dados de JLA combinados somente com

Parameter	BINGO	JLA	BINGO + JLA
ω_c	$0.13^{+0.10}_{-0.11}$	$0.115^{+0.067}_{-0.070}$	$0.116^{+0.054}_{-0.049}$
ω_b	$0.026^{+0.017}_{-0.015}$	$0.0234^{+0.011}_{-0.0096}$	$0.0214^{+0.0097}_{-0.011}$
Ω_k	$0.09^{+0.44}_{-0.46}$	$0.02^{+0.31}_{-0.27}$	$0.03^{+0.25}_{-0.24}$
w_{eff}	$-1.00^{+0.92}_{-0.92}$	$-1.04^{+0.43}_{-0.58}$	$-1.08^{+0.40}_{-0.57}$
H_0	65^{+10}_{-9}	70^{+8}_{-8}	$68.3^{+5.4}_{-5.2}$
Ω_m	$0.37^{+0.33}_{-0.31}$	$0.28^{+0.13}_{-0.14}$	$0.30^{+0.11}_{-0.11}$
Ω_{DE}	$0.54^{+0.60}_{-0.60}$	$0.70^{+0.32}_{-0.31}$	$0.67^{+0.26}_{-0.26}$

Tabela 4 – Resultados da análise de Monte Carlo para modelo cosmológico w CDM, com resultados do ajuste segundo o cenário do BINGO, JLA e HST. Os dados estão expostos com o valor médio e erros de um sigma.

o do ajuste e os comparando com os dados de JLA, HST e ajuste combinados, na figura 24. Na tabela 5 condenso as informações dos resultados das duas figuras. Nesta é possível ver que os dados do JLA com os dados fornecidos pelo ajuste melhoram as precisões dos resultados de um modo geral. Assim como os dados de JLA combinados com HST também melhoram, porém, combinando as três informações os resultados são melhores quando comparados a somente as informações do JLA, porém, piores que JLA + BINGO. Possivelmente, a tensão que há na determinação do valor da constante cosmológica seja uma explicação para tal efeito. O fato do valor obtido por HST para H_0 ser uma valor mais preciso que os outros dados (sozinhos) e somente concordar com estes em mais de dois sigmas, faz com que o valor combinado, JLA+HST+BINGO, tenha o valor de H_0 completamente deslocado no sentido do valor de HST.

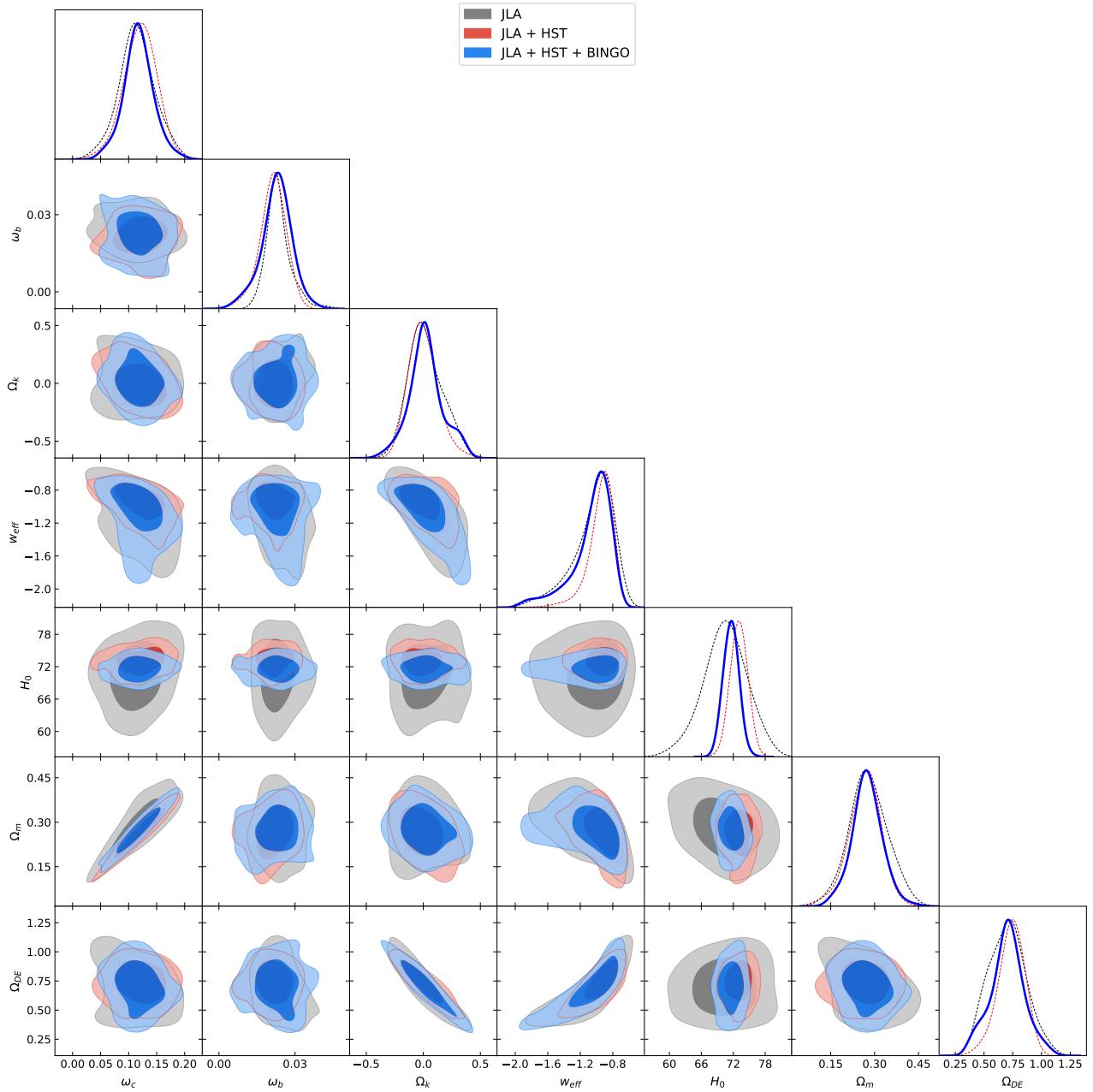


Figura 23 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo combinando informações de JLA com HST, e com HST mais BINGO.

Parameter	JLA	JLA + BINGO	JLA + HST	JLA + HST + BINGO
ω_c	$0.115^{+0.067}_{-0.070}$	$0.116^{+0.054}_{-0.049}$	$0.121^{+0.060}_{-0.062}$	$0.118^{+0.059}_{-0.059}$
ω_b	$0.0234^{+0.011}_{-0.0096}$	$0.0214^{+0.0097}_{-0.011}$	$0.021^{+0.011}_{-0.011}$	$0.023^{+0.012}_{-0.014}$
Ω_k	$0.02^{+0.31}_{-0.27}$	$0.03^{+0.25}_{-0.24}$	$0.00^{+0.27}_{-0.25}$	$0.02^{+0.33}_{-0.31}$
w_{eff}	$-1.04^{+0.43}_{-0.58}$	$-1.08^{+0.40}_{-0.57}$	$-0.95^{+0.29}_{-0.34}$	$-1.06^{+0.39}_{-0.59}$
H_0	70^{+8}_{-8}	$68.3^{+5.4}_{-5.2}$	$73.1^{+3.2}_{-3.3}$	$71.6^{+3.0}_{-2.9}$
Ω_m	$0.28^{+0.13}_{-0.14}$	$0.30^{+0.11}_{-0.11}$	$0.27^{+0.11}_{-0.12}$	$0.27^{+0.11}_{-0.11}$
Ω_{DE}	$0.70^{+0.32}_{-0.31}$	$0.67^{+0.26}_{-0.26}$	$0.74^{+0.23}_{-0.25}$	$0.70^{+0.32}_{-0.32}$

Tabela 5 – Resultados da análise de Monte Carlo para JLA, combinado com informações da constante de Hubble, HST, ele com o com informações do BAO através do ajuste, ele combinado com HST, ele combinado com o ajuste (BINGO) e todas informações juntas. Os dados estão expostos com o valor médio e erros de um sigma.

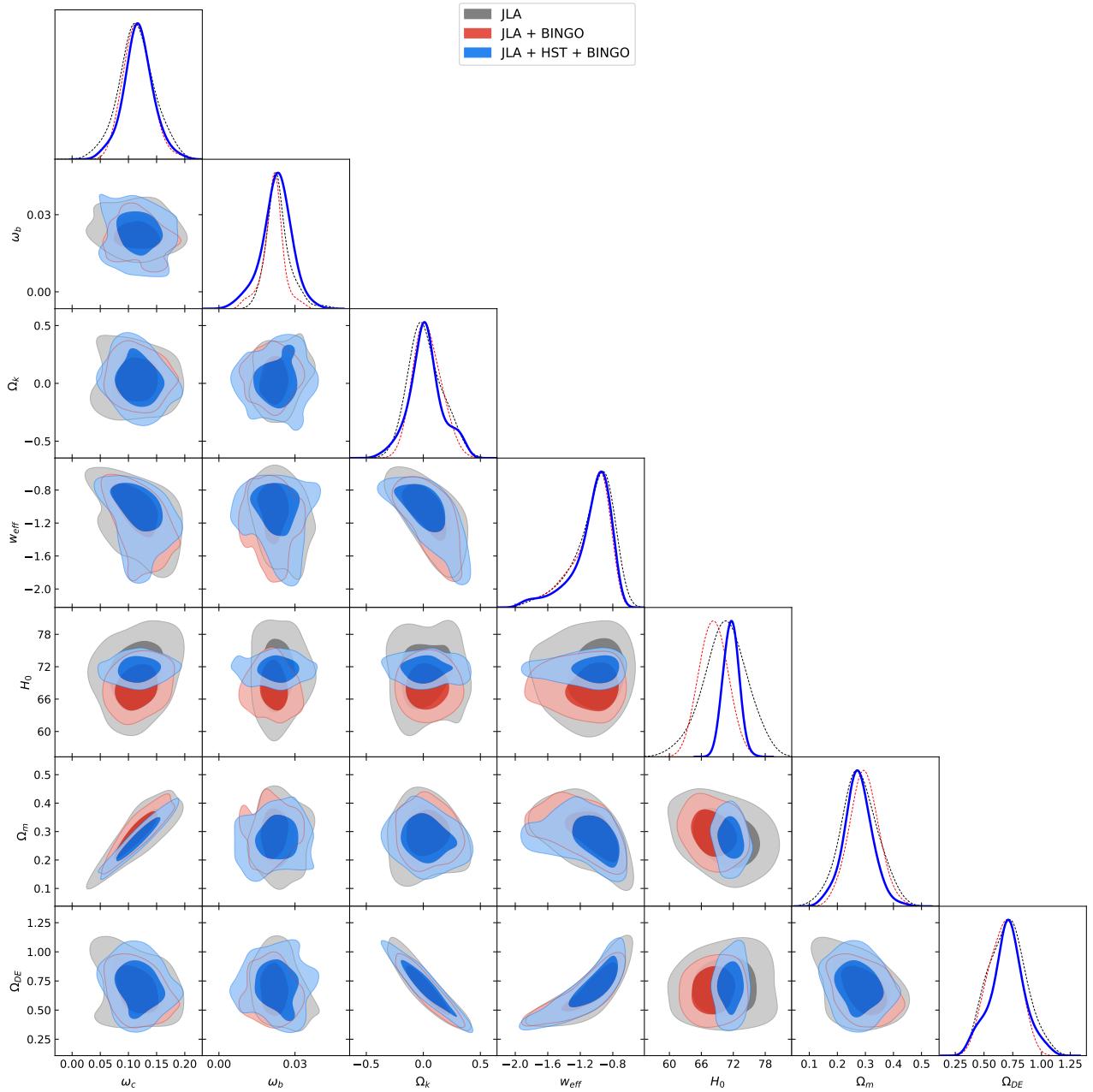


Figura 24 – Distribuições bidimensionais da análise de Monte Carlo combinando informações de JLA com BINGO, e com HST mais BINGO.

6 Conclusão

O objetivo principal do trabalho era construir um ajuste fenomenológico que descrevesse as oscilações acústicas de bárions, prevista pela teoria perturbativa linear cosmológica, no espectro de potência angular da linha de 21cm do átomo de hidrogênio. As figuras 19 e 20 mostraram que o ajuste proposto de fato reproduzia o comportamento desejado, mas, que há de se usar tanto as considerações teóricas para o redshift, dentro da faixa de redshift analisada, uma vez que mudanças sutis no redshift causam efeitos de translação nos picos; quanto a importância dos parâmetros "não físicos" não serem fixados para todos os bins da análise tomográfica. Os erros utilizados para obter os valores dos parâmetros em cada faixa, variância cósmica, foram assumidas como um cenário otimista, e mesmo assim geram erros relativamente altos, devido aos seus efeitos em baixos multipolos. Contudo, os resultados dos MCMC demonstraram que é possível retornar a cosmologia fiducial assumida para os dados que geraram o espectro de potência angular, mesmo com erros relativamente altos, mas que ao combinarmos com informações de supernovas, usando o JLA, melhoramos significativamente tanto a precisão dos resultados do ajuste para os parâmetros cosmológicos, quanto para os valores determinados pelo próprio JLA, demonstrando ser uma informação complementar a esta em prol de uma determinação mais precisa de possíveis cosmologias. Um problema que surgiu é o apresentado na figura 21, em que os três primeiros valores possuem erros expressivamente maiores em relação aos demais, isto pode ter ocorrido devido ao *burning* tomado nessas análises serem pequenos frente a lentidão na convergência das cadeias, e como consequência direta ele piora as restrições dos parâmetros, uma vez que estes dados possuem erros maiores do que possivelmente deveriam ter.

Os dados combinados com informações da constante de Hubble, precisamente medidas pelo HST, quando combinados com HST e ajuste (BINGO) pioram os dados comparados as análises de JLA + BINGO e JLA + HST. Uma possível explicação pode ser a tensão existente na determinação do próprio valor da constante de Hubble.

Por fim, o objetivo principal fora alcançado. Os próximos passos serão adicionar os erros provenientes das contaminações de outras fontes no Universo que não os átomos de HI, assim como efeitos de aquecimento do equipamento de detecção que adicionam ruídos ao sinal observado, verificar como essas e a utilização tanto de mais bins, quanto a quantidade de multipolos podem melhorar os dados. Também, possivelmente, testar outros modelos para energia escura.

APÊNDICE A – Relatividade Geral segundo a métrica FLRW

Condenso neste capítulo o resultado das quantidades de interesse da Relatividade Geral segundo o tensor métrico FLRW, tanto para o tempo cósmico, quanto para o tempo conforme.

I Símbolo de Christoffel

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = kr/\sqrt{1 - kr^2}, \\ \Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2), \\ \Gamma^1_{33} = -r(1 - kr^2)\sin^2(\theta), \\ \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{23} = 0, \\ \Gamma^2_{12} = r^{-1}, \\ \Gamma^2_{33} = \sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{22} = 0, \\ \Gamma^3_{13} = r^{-1}, \\ \Gamma^3_{23} = r^{-1}, \\ \Gamma^3_{33} = \cot(\theta) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{0k} = \Gamma^k_{00} = 0, \\ \Gamma^i_{0j} = H\delta_j^i = a^{-1}\mathcal{H}, \\ \Gamma^0_{11} = aH/\sqrt{1 - kr^2} = \mathcal{H}/\sqrt{1 - kr^2}, \\ \Gamma^0_{22} = aHr^2 = \mathcal{H}r^2, \\ \Gamma^0_{33} = aHr^2\sin^2(\theta) = \mathcal{H}r^2\sin^2(\theta). \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

II Tensor de Ricci

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -3(H^2 + \dot{H}) = -3a^{-2}\mathcal{H}', \\ R_{0i} = 0, \\ R_{11} = a^2(3H^2 + \dot{H} + 2ka^{-2})/\sqrt{1 - kr^2} = (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' + 2k)/\sqrt{1 - kr^2}, \\ R_{22} = a^2(3H^2 + \dot{H} + 2ka^{-2})r^2 = (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' + 2k)r^2, \\ R_{33} = a^2(3H^2 + \dot{H} + 2ka^{-2})r^2\sin^2(\theta) = (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' + 2k)r^2\sin^2(\theta). \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

III Escala de Ricci

$$R^k_k = R = 6a^2(3H^2 + \dot{H} + ka^{-2}) = 6(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' + k). \quad (\text{A.3})$$

VI Tensor de Einstein

$$\left\{ \begin{array}{l} G^0_0 = -3a^{-2}\mathcal{H}^2, \\ G^0_i = G^i_0 = 0, \\ G^i_j = -a^2(3H^2 + 2\dot{H} + ka^{-2})\delta_j^i = -(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + k)\delta_j^i. \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B – Conservação do tensor de Einstein

Seja o tensor de Riemann dado por,

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu,\mu} + \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\beta_{\lambda\nu}, \quad (\text{B.1})$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} R_{\rho\lambda\mu\nu} = g_{\rho\sigma}R^\sigma_{\lambda\mu\nu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\alpha\nu\mu\beta}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Com o símbolo ";" representando a derivada covariante, $\nabla_\alpha \equiv ;_\alpha$. Contraindo esta última equação tensorial com o tensor métrico

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\kappa\lambda}g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu}) \\ &= g^{\kappa\lambda}g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} - R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu}) \\ &= g^{\kappa\lambda}g^{\beta\nu}\left(R^\mu_{\beta\mu\nu;\lambda} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} - R^\mu_{\beta\mu\lambda;\nu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}g^{\beta\nu}(R_{\beta\nu;\lambda} + g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} - R_{\beta\lambda;\nu}) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(R_{;\lambda} + g^{\beta\nu}g^{\alpha\mu}R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} - R^\nu_{\lambda;\nu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(R_{;\lambda} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\beta\alpha\nu\lambda;\mu} - R^\nu_{\lambda;\nu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(R_{;\lambda} - g^{\alpha\mu}R_{\alpha\lambda;\mu} - R^\nu_{\lambda;\nu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(R_{;\lambda} - R^\mu_{\lambda;\mu} - R^\nu_{\lambda;\nu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(R_{;\lambda} - 2R^\mu_{\lambda;\mu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}\left(\delta^\mu_\lambda R_{;\mu} - 2R^\mu_{\lambda;\mu}\right) \\ &= g^{\kappa\lambda}(\delta^\mu_\lambda R - 2R^\mu_{\lambda})_{;\mu} \\ &= (g^{\mu\kappa}R - 2R^{\mu\kappa})_{;\mu} \\ &= -2\left(R^{\mu\kappa} - \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}R\right)_{;\mu}. \end{aligned}$$

Mas, esta é uma equação tensorial e portanto independe do sistema de coordenadas assumido, e se nos lembarmos que definimos o tensor de Einstein como sendo $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}R/2$, então temos que o tensor de Einstein é conservado.

$$\therefore G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (\text{B.3})$$

APÊNDICE C – Teoria de gauge em cosmologia e o gauge Newtoniano

A fim de conseguir descrever o Universo de maneira um pouco mais detalhada, de forma a englobar fenômenos e estruturas que conhecemos mas que não são descritos por um Universo FLRW, partindo de uma descrição homogênea e isotrópica, adicionaremos termos perturbativos, ou seja, expandiremos o tensor métrico em torno da descrição homogênea e isotrópica¹. No regime de escalas e fenômenos que este trabalho considera a descrição linear é válida, não precisando de correções superiores a primeira,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.1})$$

O termo à esquerda é uma descrição da geometria no "espaço perturbado", o primeiro à direita a descrição no *background* e o último o termo é o termo perturbativo, que estamos assumindo ser tal que $\|\delta g_{\mu\nu}\| \ll 1$, assim como suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem. O principal interesse estão nas correções que este termo adicional implicará nas equações de Einstein. Como, tanto o tensor de Einstein, quanto o tensor energia-momento dependem do tensor métrico, estes terão termos corretivos de primeira ordem.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \bar{G}_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Então, as equações de Einstein em uma descrição perturbativa linear pode ser decomposta em uma equação para o *background* e uma equação para os termos perturbados.

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu} &= 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}, \\ \delta \bar{G}_{\mu\nu} &= 8\pi G \delta \bar{T}_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Trataremos aqui do caso particular de um Universo plano, ou tal que a curvatura seja tão pequena que possa ser desprezada. Isto nos possibilitará trabalhar com expansões de campos perturbados em modos de Fourier. Então estarei considerando um *background*

¹ É muito comum chamarmos esta descrição, no contexto perturbativo, simplesmente de *background*. Por vezes a usarei. Além disto, termos "no *background*" serão identificados com um traço sobre o símbolo em questão.

FLRW-flat, de forma a podermos trabalhar com o tensor de Minkowski, $\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu}$. Definemos um tensor perturbado $h_{\mu\nu}$, tal que, $\delta g_{\mu\nu} \doteq a^2(\eta) h_{\mu\nu}$. Ainda assumirei que não somente h seja pequeno como suas derivadas parciais e utilizarei definições complementares para a operação com os tensores métricos $h^\mu_\nu \doteq \eta^{\nu\kappa} h_{\kappa\nu}$ e $h^{\mu\nu} \doteq \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\sigma} h_{\kappa\sigma}$, mesmo h não sendo propriamente um tensor. Com isto,

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} \approx g_{\mu\nu}^{(0)} - g_{\mu\nu}^{(1)} + \dots \approx a^{-2} \eta_{\mu\nu} - (\delta g_{\mu\nu})^{-1} = a^{-2} (\eta^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}).$$

Por definição, h tem que ser simétrico, isto porquê queremos que g ainda o seja. Vide que, com esta definição, $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \delta^\nu_\nu$.

A forma matricial mais geral que podemos expressar h é

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i^T & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Claro que $B_i^T = B_i$. O campo escalar D está relacionado ao traço de h . Para ver isto, tomemos o traço do mesmo,

$$\begin{aligned} h &= h_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = (h_{00}\eta^{00}) + (h_{11}\eta^{11} + h_{22}\eta^{22} + h_{33}\eta^{33}) \\ &= (2A) + Tr(-2D\delta_{ij} + 2E_{ij}) = 2A + (-6 + 2Tr(E_{ij})). \end{aligned}$$

Porém, por definição, E_{ij} deve ser um termo de traço nulo, então: $h = -6D$, i.e., o termo D é proporcional ao traço da parte espacial de h . Levantando os índices de $h_{\mu\nu}$ com o tensor métrico de Minkowski, obtemos que,

$$h^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & B_i \\ B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Podemos agora escrever a métrica do espaço com termos de primeira ordem,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2 (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = a^2 \left(-(1 + 2A) d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + (1 - 2D\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right). \end{aligned}$$

A função $A(\eta, x^i)$ e o vetor $B_j(\eta, x^i)$ são conhecidos como **função lapsó** e **vetor shift**, respectivamente.

C.1 Transformações de gauge e a escolha do gauge

Consideremos um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ e consideremos os pontos \bar{P} e P com os mesmos valores coordenadas, porém, em espaços-tempo diferentes: background e perturbado, respectivamente.

Agora, tomemos um sistema coordenado no background. Existem diversos sistemas coordenados, todos próximos um dos outros, para a descrição perturbada, tal que, a transformação da métrica

$$\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

seja satisfeita. A escolha deste sistema coordenado, que não é única, é conhecida como escolha de *gauge* (ou calibre), e a transformação como *transformação de gauge*. Logo, em GR, podemos dizer que uma transformação de gauge é uma transformação de coordenadas entre sistemas coordenados no espaço-tempo perturbado.

C.1.1 Transformações entre gauges

Definamos agora dois sistemas de coordenadas em espaços perturbados: $\{\tilde{x}^\mu\}$ e $\{\hat{x}^\mu\}$. Estas coordenadas estão relacionadas por uma transformação de coordenadas,

$$\hat{x}^\mu = \tilde{x}^\mu + \xi^\mu. \quad (\text{C.4})$$

O campo ξ é algum campo "vivendo" no background tal que ele e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam quantidades perturbativas de no máximo primeira ordem, e a diferença entre duas derivadas parciais sua seja no máximo de segunda ordem perturbativa.

O sistema $\{\hat{x}^\mu\}$ está associado ao ponto \bar{P} no background com o ponto \hat{P} no espaço perturbado descrito pelo sistema. Já $\{\tilde{x}^\mu\}$ associa \bar{P} com \tilde{P} , ou seja, descreve \bar{P} como \tilde{P} . Todos representam o mesmo local no espaço-tempo. Por definição, temos $\tilde{P} \neq \hat{P}$. Mas, ainda temos que,

$$\begin{cases} \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\tilde{P}) + \xi^\alpha(\bar{P}) \\ \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha(\bar{P}) \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) = \hat{x}^\alpha(\tilde{P}) + \xi^\alpha(\bar{P}), \\ \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) = \hat{x}^\alpha(P) + \xi^\alpha(\bar{P}). \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{cases} \hat{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha(\bar{P}), \\ \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) + \xi^\alpha(\bar{P}). \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

As expressões C.5 relacionam o mesmo ponto, num espaço tempo perturbado, com dois sistemas coordenados perturbados diferentes (diferentes descrições). As expressões C.6 relacionam dois pontos diferentes (associados ao mesmo ponto no background) por um sistema de coordenadas.

Então, a transformação de coordendas entre sistemas pode ser obtida,

$$\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \doteq \frac{\partial \hat{x}^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\beta}} (\tilde{x}^{\alpha} - \xi^{\alpha}) = \delta^{\alpha}_{\beta} - \xi^{\alpha}_{,\beta}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}} \doteq \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial \hat{x}^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^{\beta}} (\hat{x}^{\alpha} + \xi^{\alpha}) = \delta^{\alpha}_{\beta} + \xi^{\alpha}_{,\beta}. \quad (\text{C.8})$$

C.1.2 Transformações de campos entre gauges

Há três casos possíveis de analisar: campos escalares, vetoriais e tensoriais, segundo as transformações C.7 e C.8. Comecemos pelo caso mais simples, o campo escalar.

Seja s um campo escalar ($x^{\mu} \rightarrow s(x^{\mu}) \in \mathbb{R}$). Sua forma no espaço perturbado é

$$s = \bar{s} + \delta s.$$

Contudo, não podemos designar uma única quantidade no background, \bar{s} , a um ponto no espaço perturbado, porquê em diferentes gauges este ponto está associado à diferentes pontos no background, com diferentes valores \bar{s} . Logo, as perturbações δs são dependentes de gauge, ou seja, da escolha do sistema assumido.

$$\hat{\delta}s(x^{\alpha}) = s(\hat{P}) - \bar{s}(\bar{P}), \quad (\text{C.9})$$

$$\tilde{\delta}s(x^{\alpha}) = s(\tilde{P}) - \bar{s}(\bar{P}). \quad (\text{C.10})$$

Ou seja, a que ponto (e consequentemente, o valor do campo) estou associando, se dará pela escolha do termo adicional ao campo no background. Mas mesmo as descrições $s(\tilde{P})$ e $s(\hat{P})$ não são independentes entre si.

$$s(\tilde{P}) \approx s(\tilde{P})|_{\hat{P}} + \frac{\partial s(\tilde{P})}{\partial \tilde{x}^{\alpha}}|_{\hat{P}} (\tilde{x}^{\alpha}(\tilde{P}) - \tilde{x}^{\alpha}(\hat{P})). \quad (\text{C.11})$$

Usando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\tilde{x}^{\alpha}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{s}}{x^{\alpha}}(\bar{P}) &\approx 0, \\ \frac{\partial \bar{s}}{x^{\alpha}}(\hat{P}) &\approx \frac{\partial \bar{s}}{x^{\alpha}}(\bar{P}). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Uma vez que esta diferença é no mínimo de primeira ordem e quando multiplicada por $\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) - \tilde{x}^\alpha(\hat{P}) \approx -\xi^\alpha$, é descartada. Então,

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \frac{\partial s}{\partial \tilde{x}^\alpha}(\hat{P}) &= \xi^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial}{x^\beta} (\bar{s}(\hat{P}) + \delta s(\hat{P})) \approx \xi^\beta \Lambda^\beta_{\tilde{\alpha}} \frac{\partial \bar{s}(\hat{P})}{x^\beta} \\ &= \xi^\beta \Lambda^\beta_{\tilde{\alpha}} \frac{\partial \bar{s}(\bar{P})}{x^\beta} = \xi^\alpha \delta^\alpha_\beta \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\beta}(\bar{P}) \approx \xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}). \\ \therefore \xi^\alpha \frac{\partial s}{\partial x^\alpha}(\hat{P}) &\approx \xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}).\end{aligned}$$

Então, a expansão C.11 fica

$$s(\tilde{P}) \approx s(\hat{P}) - \xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}).$$

$$\begin{cases} s(\tilde{P}) - s(\hat{P}) &= -\xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}), \\ \delta \tilde{s} - \delta \hat{s} &= -\xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha}(\bar{P}). \end{cases}$$

Porém, pela homogeneidade e isotropia, do background, o campo não pode depender nem da direção nem da posição.

$$\bar{s}(\eta, x^i) \equiv \bar{s}(\eta) \rightarrow \xi^\alpha \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^\alpha} = \xi^0 \frac{\partial \bar{s}}{\partial \eta}.$$

Por fim,

$$\therefore \begin{cases} s(\tilde{P}) - s(\hat{P}) &= -\bar{s}' \xi^0, \\ \delta \tilde{s} - \delta \hat{s} &= -\bar{s}' \xi^0. \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Para o caso vetorial, tomemos um campo arbitrário w^α ($x^\mu \rightarrow w^\alpha(x^\mu) \in \mathbb{R}^4$), descrito por

$$w^\alpha = \bar{w}^\alpha + \delta w^\alpha.$$

Com as mesmas condições

$$\begin{cases} \bar{x}^\alpha(\bar{P}) &= \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \hat{x}^\alpha(\hat{P}), \\ \tilde{x}^\alpha &= \hat{x}^\alpha + \xi^\alpha. \end{cases}$$

De forma a termos as transformações, no sistemas perturbados

$$\begin{cases} w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) - w^\alpha(\bar{P}) \doteq \delta\tilde{w}^\alpha, \\ w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - w^\alpha(\bar{P}) \doteq \delta\hat{w}^\alpha. \end{cases}$$

Novamente, para obtermos uma expressão para a transformação do vetor, segundo a transformação de gauge, partimos do campo (vetorial) em $\{\hat{x}^\alpha\}$, no ponto \tilde{P} , e expandimos em torno do ponto \hat{P} ,

$$\begin{aligned} w^{\hat{\alpha}}(\tilde{P}) &\doteq w^\alpha(x^{\hat{\beta}}(\tilde{P})) = w^{\hat{\alpha}}(\tilde{P})|_{\hat{P}} + w^{\hat{\alpha}}_{,\hat{\beta}}(\tilde{P})|_{\hat{P}}(\hat{x}^\beta(\tilde{P}) - \hat{x}^\beta(\hat{P})) + \dots \\ &\approx w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - \xi^\beta \frac{\partial w^{\hat{\alpha}}(\hat{P})}{\partial \hat{x}^\beta}, \\ w^{\hat{\alpha}}(\tilde{P}) &\approx w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - \xi^\beta \frac{\partial w^{\hat{\alpha}}(\bar{P})}{\partial x^\beta}. \end{aligned}$$

Como aqui estou fazendo uma descrição em $\{\hat{x}^\alpha\}$ no ponto \tilde{P} , $w^{\hat{\alpha}}(\tilde{P})$, preciso escrever em $\{\tilde{x}^\alpha\}$ no mesmo ponto \tilde{P} , $w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P})$, e isto é feito usando as relações de transformações C.7 e C.8:

$$\begin{aligned} w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) &= \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\hat{\beta}}(\tilde{P}) w^{\hat{\beta}}(\tilde{P}) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} w^{\hat{\beta}}(\tilde{P}) \approx (\delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta}) w^{\hat{\beta}}(\tilde{P}) \\ &= (\delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta}) \left(w^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\beta}{\partial x^\partial} \right) \approx w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}), \\ \therefore w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) &= w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) - w^{\bar{\alpha}}(\bar{P}) &= \delta\tilde{w}^\alpha = \left(w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}) \right) - \bar{w}^\alpha(\bar{P}) \\ &= (w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) - \bar{w}^\alpha(\bar{P})) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}} - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}) \\ &= \delta\hat{w}^\alpha + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}} - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}). \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\therefore \begin{cases} \delta\tilde{w}^\alpha &= \delta\hat{w}^\alpha + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}} - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}), \\ w^{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) &= w^{\hat{\alpha}}(\hat{P}) + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} w^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\gamma \frac{\partial \bar{w}^\alpha}{\partial x^\partial}(\bar{P}). \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Por fim, temos o caso do campo tensorial de ordem dois, que omitirei a demonstração já que ela é desenvolvida de maneira análoga ao caso vetorial, com suas óbvias adaptações. Chamando de $w^{\alpha\beta}$ ($x^\mu \rightarrow w^{\alpha\beta}(x^\mu) \in \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4$) o campo tensorial de segunda ordem os resultados são:

$$\begin{cases} w_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\tilde{P}) = w_{\tilde{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\sigma \bar{w}_{\alpha\beta,\sigma}(\bar{P}) - \xi^\sigma{}_\alpha w_{\hat{\sigma}\tilde{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\sigma{}_\beta w_{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}(\hat{P}), \\ \delta \tilde{w}_{\alpha\beta} = \delta \hat{w}_{\alpha\beta} - \xi^\sigma \bar{w}_{\alpha\beta,\sigma}(\bar{P}) - \xi^\sigma{}_\alpha w_{\hat{\sigma}\tilde{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\sigma{}_\beta w_{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}(\hat{P}), \\ w^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\tilde{P}) = w^{\tilde{\alpha}\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\sigma \bar{w}^{\alpha\beta}_{,\sigma}(\bar{P}) + \xi^\alpha{}_\sigma w^{\hat{\sigma}\hat{\beta}}(\hat{P}) + \xi^\beta{}_\sigma w^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}(\hat{P}), \\ \delta \tilde{w}^{\alpha\beta} = \delta \hat{w}^{\alpha\beta} - \xi^\sigma \bar{w}^{\alpha\beta}_{,\sigma}(\bar{P}) + \xi^\alpha{}_\sigma w^{\hat{\sigma}\hat{\beta}}(\hat{P}) + \xi^\beta{}_\sigma w^{\hat{\alpha}\hat{\sigma}}(\hat{P}), \\ w_{\tilde{\alpha}}{}^{\tilde{\beta}}(\tilde{P}) = w_{\tilde{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}(\hat{P}) - \xi^\sigma \bar{w}_{\alpha,\sigma}^\beta(\bar{P}) - \xi^\sigma{}_\alpha w_{\hat{\sigma}}{}^{\hat{\beta}}(\hat{P}) + \xi^\beta{}_\sigma w_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\sigma}}(\hat{P}), \\ \delta \tilde{w}_{\alpha}{}^{\beta} = \delta \hat{w}_{\alpha}{}^{\beta} - \xi^\sigma \bar{w}_{\alpha,\sigma}^\beta(\bar{P}) - \xi^\sigma{}_\alpha w_{\hat{\sigma}}{}^{\hat{\beta}}(\hat{P}) + \xi^\beta{}_\sigma w_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\sigma}}(\hat{P}). \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Assim como no caso escalar, nem vetores, nem tensores podem depender nem do sistema adotado, nem da direção. Assumindo as formas gerais fornecidas pelas representações,

$$\bar{w}^\alpha = (\bar{w}^0, 0), \quad (\text{C.16})$$

$$\bar{w}^\alpha{}_\beta = \begin{bmatrix} \bar{w}^0{}_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \delta^i{}_j \bar{w}^k{}_k \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Lembrando que em um espaço maximamente simétrico vetores espaciais w^i, w_0^i são nulos, e que aqui, a parte espacial do tensor deve ser proporcional a parte espacial do tensor de Minkowski, que é simplesmente uma delta de Kronecker, segundo a nossa convenção. O fator $1/3$ é direto, ele advém do fato de tomarmos o traço da parte espacial, $\delta_k^k = 3$, e $\bar{w}^k{}_k$ é justamente o traço da parte espacial.

É útil obtermos uma quantidade que seja invariante de gauge e que em cosmologia terá uma aplicação ao caso do estresse anisotrópico no tensor energia-momento. Da relação para $\delta w^\alpha{}_\beta$ nas equações C.15 tomemos, $\alpha = \beta = k$:²

² Irei omitir os pontos em que os campos serão tomados no caso de tratarmos da transformação dos termos perturbativos, uma vez que se ξ pode ser até primeira ordem, podemos expandir os campos em torno do background e tomar somente este termo, pois termos maiores do que zero serão superiores ao primeiro grau perturbativo.

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{w}^k{}_k &= \delta \hat{w}^k{}_k + \xi^k{}_{,\sigma} \bar{w}^k{}_\sigma - \xi^\gamma{}_{,k} \bar{w}^k{}_\gamma - \xi^\gamma \bar{w}^k{}_{k,\gamma} \\
&= \delta \hat{w}^k{}_k + \underbrace{\xi^k{}_{,j} \bar{w}^j_k}_{=0} - \underbrace{\xi^j{}_{,k} \bar{w}^k_j}_{=0} - \underbrace{\xi^0 \bar{w}^k_{k,0}}_{\bar{w}^k_k = \bar{w}(\eta)}, \\
\implies \frac{1}{3} \delta_j^i \delta \tilde{w}^k{}_k &= \frac{1}{3} \delta_j^i \delta \hat{w}^k{}_k - \frac{1}{3} \delta_j^i \xi^0 \cdot \bar{w}^k{}_{k,0}
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Agora tomemos os termos diagonais da parte espacial do tensor, $i \neq j$.

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{w}^i{}_j &= \delta \hat{w}^i{}_j + \xi^i{}_{,\sigma} \bar{w}^\sigma{}_j - \xi^\gamma{}_{,j} \bar{w}^i{}_\gamma - \xi^\gamma \bar{w}^i{}_{j,\gamma} \\
&= \delta \hat{w}^i{}_j + \underbrace{\xi^i{}_{,k} \bar{w}^k{}_j}_{=0} - \underbrace{\xi^k{}_{,j} \bar{w}^i{}_k}_{=0} - \xi^0 \bar{w}^i{}_{j,0} \\
&= \delta \hat{w}^i{}_j - \bar{w}^i{}_{j,0} \xi^0 = \hat{w}^i{}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \bar{w}^k{}_{k,0} \xi^0 \\
\delta \tilde{w}^i{}_j &= \hat{w}^i{}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \bar{w}^k{}_{k,0} \xi^0
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Subtraindo a expressão C.19 da expressão C.6, obtemos que a quantidade invariante é

$$\left(\delta \tilde{w}^i{}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta \tilde{w}^k{}_k \right) = \left(\delta \hat{w}^i{}_j - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta \hat{w}^k{}_k \right). \tag{C.20}$$

C.1.3 Transformação do tensor métrico

Tomemos o tensor métrico em dois sistemas de coordenadas perturbados: $\{\tilde{x}^\alpha\}$ e $\{\hat{x}^\alpha\}$. Porém, por conveniência, não ficarei carregando notação, assumirei que $\delta \hat{g}_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu}$, as demais permanecem iguais. Então, sendo o tensor métrico um tensor de segundo grau podemos recorrer a expressão de C.15 com os índices abaixados.

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{g}_{\mu\nu} &= \delta g_{\mu\nu} - \xi^\sigma \bar{g}_{\mu\nu,\sigma} - \xi^\sigma{}_{,\nu} \bar{g}_{\sigma\nu} - \xi^\sigma{}_{,\mu} \bar{g}_{\sigma\mu} \\
&= \delta g_{\mu\nu} - \xi^0 \bar{g}_{\mu\nu,0} - \xi^\sigma{}_{,\nu} (a^2 \eta_{\sigma\nu}) - \xi^\sigma{}_{,\mu} (a^2 \eta_{\sigma\mu}) \\
&= \delta g_{\mu\nu} - \xi^0 (a^2 \eta_{\nu\mu})_{,0} - a^2 (\xi^\sigma{}_{,\mu} \eta_{\sigma\nu} + \xi^\sigma{}_{,\nu} \eta_{\sigma\mu}) \\
&= \delta g_{\mu\nu} - a^2 \left(2 \frac{a'}{a} \xi^0 \eta_{\mu\nu} + \xi^\sigma{}_{,\mu} \eta_{\sigma\nu} + \xi^\sigma{}_{,\nu} \eta_{\sigma\mu} \right).
\end{aligned}$$

Como a forma geral da parte perturbativa do tensor métrico pode ser representada pela forma matricial

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}, \tag{C.21}$$

mostremos como cada parte deste tensor se transforma.

I : Caso $\mu = \nu = 0$.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{00} &= \delta g_{00} - a^2 \left(2\frac{a'}{a}\xi^0\eta_{00} + \xi^{\sigma},_0\eta_{\sigma 0} + \xi^{\sigma},_0\eta_{\sigma 0} \right) \\ &= \delta g_{00} - a^2 (-2\mathcal{H}\xi^0 - 2\xi^0,_0) = -2a^2 A + 2a^2 (\mathcal{H}\xi^0 + \xi^0,_0) \\ &\equiv -2a^2 \tilde{A}, \\ \therefore \tilde{A} &= A - \mathcal{H}\xi^0 - \xi^0,_0.\end{aligned}\tag{C.22}$$

II : Caso $\mu = 0$ e $\nu = i$.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{0i} &= \delta g_{0i} - a^2 \left(2\frac{a'}{a}\xi^0 \underbrace{\eta_{0i}}_{=0} + \xi^{\sigma},_0\eta_{\sigma i} + \xi^{\sigma},_i\eta_{\sigma 0} \right) \\ &= \delta g_{0i} - a^2 (\xi^i,_0 + \xi^0,_i) = -a^2 B_i - a^2 (\xi^i,_0 + \xi^0,_i) \\ &\equiv -a^2 \tilde{B}_i, \\ \therefore \tilde{B}_i &= B_i + (\xi^i,_0 + \xi^0,_i).\end{aligned}\tag{C.23}$$

III : Caso $\mu = i$ e $\nu = j$.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{g}_{ij} &= \delta g_{ij} - a^2 \left(2\frac{a'}{a}\xi^0\eta_{ij} + \xi^{\sigma},_i\eta_{\sigma j} + \xi^{\sigma},_j\eta_{\sigma i} \right) \\ &= \delta g_{ij} - a^2 (2\mathcal{H}\xi^0\delta_{ij} + \xi^j,_i + \xi^i,_j) \\ &= a^2 (-2D\delta_{ij} + E_{ij}) - a^2 (2\mathcal{H}\xi^0\delta_{ij} + \xi^j,_i + \xi^i,_j) \\ &= a^2 (-2D\delta_{ij} + E_{ij} - 2\mathcal{H}\xi^0\delta_{ij} - \xi^j,_i - \xi^i,_j) \\ &\equiv a^2 (-2\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{ij}), \\ \therefore -2\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{ij} &= -2D\delta_{ij} + E_{ij} - 2\mathcal{H}\xi^0\delta_{ij} - \xi^j,_i - \xi^i,_j.\end{aligned}\tag{C.24}$$

Para separar esta última transformação, dividamos as expressões à esquerda e à direita em uma parte sem traço e uma parte somente diagonal. Sendo $Tr(\xi^i,_j) = \xi^k,_k$, então,

$$\begin{aligned}Tr\left(\frac{1}{2}(\xi^j,_i + \xi^i,_j)\right) &= \frac{1}{3}Tr(\delta_{ij}\xi^k,_k), \\ \implies Tr\left[\frac{1}{2}(\xi^j,_i + \xi^i,_j) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k\right] &= 0.\end{aligned}$$

Partindo disto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\xi^j,_i + \xi^i,_j) &= \frac{1}{2}(\xi^j,_i + \xi^i,_j) + \left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k - \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k}_{termo\ diagonal} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\xi^j,_i + \xi^i,_j) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k \right)}_{termo\ sem\ traço}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$-2\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{ij} = \left(-D - \frac{1}{3}\xi^k{}_k - \mathcal{H}\xi^0\right)\delta_{ij} + \left(E_{ij} - \left(\frac{1}{2}\left(\xi^j,_i + \xi^i,_j\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k\right)\right).$$

Podemos resumir as transformações como

$$\begin{cases} \tilde{A} &= A - \mathcal{H}\xi^0 - \xi^0,_0, \\ \tilde{B}_i &= B_i + \xi^i_0 - \xi^0,_i, \\ \tilde{D} &= D + \frac{1}{3}\xi^k{}_k + \mathcal{H}\xi^0, \\ \tilde{E}_{ij} &= E_{ij} - \frac{1}{2}\left(\xi^j,_i + \xi^i,_j\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k,_k. \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

C.2 Decomposição do tensor em partes escalar, vetorial e tensorial

Na teoria perturbativa em GR estaremos interessados em dois tipos de transformações:

- I **Transformações de gauge:** Ou seja, mudar de um gauge à outro mantendo o ponto do background o mesmo;
- II **Transformações de pontos:** Mudar os pontos no background para um gauge fixo. Isto induz uma transformação no sistema perturbado.

Se voltarmos e lembremos da forma que assumimos o Universo, segundo um fatiamento do espaço-tempo, este nos fornece duas propriedades:

- i *Transformação homogênea da coordenada tempo:* Isto é, reparametrização do tempo (p.ex., $t \leftrightarrow \eta$);
- ii *Transformação na parte espacial:* $x^{i'} = \Lambda^{i'}_j x^j$.

Além destas propriedades, temos a métrica restrita a parte espacial é a matriz unitária vezes o quadrado do fator de escala: $g_{ij} = a^2\delta_{ij}$. Estas nos levam a rotações espaciais num quadriespaço,

$$\Lambda^{i'}_j = R^{i'}_j \implies \Lambda^{i'}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i'}_j \end{bmatrix},$$

ou seja, transformações de coordenadas no background induzem transformações do tipo $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu}x^{\nu}$, no espaço-tempo perturbado.

Uma vez que,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta)(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= a^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_i^j \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} -2A & -2B_i \\ -2B_i & -2D\delta_{ij} + E_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \Lambda^\alpha_{\mu'} \Lambda^\beta_{\nu'} g_{\alpha\beta}, \\ g_{0'0'} &= \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_0 g_{\alpha\beta} = (\Lambda^0_0)^2 g_{00} = -(1+2A) a^2 \\ &\equiv -(1+2A') a^2, \\ g_{0'i'} &= \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_{i'} g_{\alpha\beta} = \Lambda^0_0 \Lambda^j_i g_{0j} = R^j_i (-2B_j) a^2 \\ &= -2a^2 R^j_i B_j \\ &\equiv -a^2 B'_i, \\ g_{i'j'} &= \Lambda^\alpha_{i'} \Lambda^\beta_{j'} g_{\alpha\beta} = R^k_i R^l_j (-2D\delta_{kl} + 2E_{kl}) a^2 \\ &= -2a^2 D \underbrace{R^k_i R_{kj}}_{=\delta_{ij}} + 2a^2 R^k_i R^l_j E_{kl} \\ &= -2a^2 D\delta_{ij} + 2a^2 R^k_i R^l_j E_{kl} \\ &\equiv -a^2 (-2D'\delta_{ij} + E'_{ij}). \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{cases} A' &= A, \\ B'_{i'} &= R^j_{i'Bj}, \\ D' &= D, \\ E_{k'l'} &= R^k_i R^l_j E_{kl}. \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Vide que A e D se transformam como escalares no background, B_i se transforma como um trivetor e E_{ij} se transforma como um tritensor de tipo 2. Podemos decompor o vetor e o tensor ainda mais, desde que evoquemos o teorema de Helmholtz e um análogo a este para o caso de tensores. Pelo teorema de HelmHoltz, qualquer vetor \vec{B} pode ser decomposto em uma parte exclusivamente vetorial (V) e outra exclusivamente escalar (S)³.

$$\vec{B} = \vec{B}^S + \vec{B}^V \implies \begin{cases} \nabla \times \vec{B}^S = 0 \implies \vec{B}^S = -\nabla B = -B_{,i}, \\ \nabla \cdot \vec{B}^V = 0 \implies B^{V,i}_{,i} = \delta^{ij} B^V_{i,j} = 0, \\ \therefore B_i = -B_{,i}^S + B_i^V. \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

³ Manterei a mesma letra para o seu campo escalar para ficar fácil lembrar a origem.

Já o tensor tem uma forma parecida, só que mais geral contendo um termo exclusivamente tensorial (T).

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T.$$

No qual E_{ij}^S e E_{ij}^V estão sendo associados com a decomposição vetorial por

$$\partial^i E_{ij} = \left(\underbrace{\partial^i E_{ij}^S}_{\text{Associado a um escalar}} + \underbrace{\partial^i E_{ij}^V}_{\text{Associado ao divergente nulo}} \right) + \underbrace{\partial^i E_{ij}^T}_{=0, \text{ para retomar o caso vetorial}}.$$

$$\begin{cases} \partial^i E_{ij}^S \doteq f_j \implies \epsilon_{ijk} \partial_j f_k = 0 \implies f_k = -f_{,k} \equiv -E_{,k}, \\ \partial^i E_{ij}^S \equiv \partial_j E \implies E_{ij}^S = \partial_i \partial_j E + \dots = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2) E_k^k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial^i E_{ij}^V \doteq f_j \implies \partial^k f_k = 0 = \delta^{kl} f_{l,k}, \\ E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (f_{i,j} + f_{j,i}) \iff \partial^i E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (\partial^j \partial^j f_i + \partial^j \partial^i f_j), \\ \partial^i (\partial^i E_{ij}^V) = -\frac{1}{2} (\partial^i \partial^j \partial^j f_i + \partial^i \partial^j \partial^i f_j) = -\frac{1}{2} \left(\underbrace{\partial^j \partial^j \partial^i f_i}_{=0} + \underbrace{\partial^i \partial^i \partial^j f_j}_{=0} \right) = 0. \end{cases}$$

Vide que estou usando o fato de, uma vez afirmado que o termo E^V representa a parte exclusivamente vetorial, quando contraí o índice i a quantidade deve ser algum vetor que deve ter divergente nulo. O mesmo vale para o caso do E^S , que o vetor formado pela contração do índice i deve ter rotacional nulo. Portanto, temos as seguintes decomposições:

$$\begin{cases} E_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E, \\ E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}), \\ \delta^{ik} E_{ij}^T = 0. \end{cases}$$

Com estas decomposições, decomposição segundo a forma de transformação dos campos, podemos separar o tensor métrico em uma parte somente com campos escalares, outra somente com campos vetoriais e uma somente com campos tensoriais, com as seguintes transformações:

$$\begin{cases} A' = A, B' = B, C' = C, D' = D, E' = E & (\text{escalares}), \\ {B'}^V_{i'} = R^j_{i'} B^V_j, E'_{i'} = R^j_{i'} E_j & (\text{vetoriais}), \\ {E'}^T_{m'n'} = R^k_{m'} R^l_{n'} E^T_{kl} & (\text{tensoriais}). \end{cases}$$

Para os nossos objetivos basta-nos tomar as contribuições escalares. Não há problema nisso pois a decomposição nas três partes faz com que o tensor seja composto por três partes independentes entre si. A parte escalar está relacionada as inomogeneidades nas densidade de energia. A parte vetorial esta relacionado a movimentos rotacionais de fluidos e decaem rápido com o Universo em expansão. Já a parte tensorial está relacionado a descrição de ondas gravitacionais. Então, a partir de agora tomarei somente os termos escalares.

C.3 Perturbações escalares

Para o estudo das inomogeneidades, assim como de anisotropia, basta-nos tratar dos termos escalares do tensor métrico perturbado, que tem sua parte perturbada agora representada por

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & 2B_{,i} \\ 2B_{,i} & -2D\delta_{ij} + 2(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\nabla^2)E \end{bmatrix}, \quad (\text{C.28})$$

ou, utilizando o que definirei por perturbação de curvatura, $\psi \doteq D + \nabla^2 E / 3$, que é essencialmente o termo diagonal da parte espacial,

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2A & 2B_{,i} \\ 2B_{,i} & -2\psi + 2E_{,ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.29})$$

Utilizando as transformações C.25 com a restrição somente de tomarmos os campos escalares, incluindo o campo ξ , que segundo o teorema de Helmholtz, $\xi_i = -\xi_{,i} + \xi_i^V$, e que tomaremos somente a parte escalar. Então,

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \implies \begin{cases} \tilde{\eta} = \eta + \xi^0, \\ \tilde{x}^i = x^i - \delta^{ij}\xi_{,j}, \end{cases}$$

e as transformações agora ficam:

$$\begin{cases} \tilde{A} &= A - \mathcal{H}\xi^0 - \xi^0_{,0} \\ \tilde{B}_i &= B_i + \xi^i_0 - \xi^0_i \\ \tilde{D} &= D + \frac{1}{3}\xi^k_k + \mathcal{H}\xi^0 \\ \tilde{E}_{ij} &= E_{ij} - \frac{1}{2}(\xi^j_{,i} + \xi^i_{,j}) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k_{,k} \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{A} &= A - \mathcal{H}\xi^0 - \xi^0_{,0}, \\ \tilde{B} &= B + \xi^0 + \xi', \\ \tilde{D} &= D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \mathcal{H}\xi^0, \\ \tilde{E} &= E + \xi. \end{cases}$$

Em que as partes de D e E são obtidas através de

$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= D + \frac{1}{3} (-\delta^{kl} \xi_{,l})_{,k} + \mathcal{H} \xi^0 = D - \frac{1}{3} \nabla^2 \xi + \mathcal{H} \xi^0, \\
\tilde{E}_{ij} &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \tilde{E} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E - \frac{1}{2} (\xi_{,i}^j + \xi_{,j}^i) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \xi_{,k}^k \\
&= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E - \frac{1}{2} (-\delta^{ik} \xi_{,k,j} - \delta^{jl} \xi_{,l,i}) - \frac{1}{3} \delta^{kl} \xi_{,l,k}, \\
\tilde{E}_{,ij} - E_{,ij} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} (\nabla^2 \tilde{E} - \nabla^2 E - \nabla^2 \xi) + \frac{1}{2} (\xi_{ij} + \xi_{ji}), \\
\partial_i \partial_j (\tilde{E} - E - \xi) &= \frac{1}{3} \nabla^2 (\tilde{E} - E - \xi). \\
\therefore \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) (\tilde{E} - E - \xi) &= 0 \iff \tilde{E} = E + \xi.
\end{aligned}$$

A menos de constantes, que podem ser absorvidas em ξ . A perturbação da curvatura se transforma, utilizando as transformações de D e de E , como

$$\tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H} \xi^0.$$

C.4 Gauge Newtoniano

Podemos explorar a liberdade de gauge que temos para encontrar um sistema de coordenadas perturbadas útil. O que nos facilitaria imensamente é se este sistema descrevesse o tensor métrico na forma diagonal, isto reduziria imensamente a quantidade de cálculos a serem feitos na obtenção das equações de campo perturbados. Para alcançar tal objetivo, temos que encontrar um sistema em que os termos fora da diagonal principal do tensor métrico se anulem, $\tilde{B} = 0$, além disto irei buscar tal sistema de forma ao termo sem traço ser anulado também $\tilde{E} = 0$. O que as transformações nos fornecem são as equações

$$\begin{cases} 0 = B + \xi' + \xi^0, \\ 0 = E + \xi. \end{cases}$$

Então, como $\xi = -E$, utilizando-a na primeira equação, temos que $\xi^0 = E - B$, ou seja, temos agora informações acerca do campo ξ , pois as nossas exigências restringiram os valores possíveis que ele poderia assumir. Existem dois potenciais invariantes importantes aqui, conhecidos como **potenciais de Bardeen**,

$$\begin{cases} \Psi = A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E'), \\ \Phi = \mathcal{H}(B - E') - D - \frac{1}{3} \nabla^2 E = \mathcal{H}(B - E') - \psi. \end{cases} \tag{C.30}$$

É bem comum encontrar outras nomeclaturas para os potencias acima, como por exemplo, encontrar a troca $\Psi \rightarrow \Phi$ e $\Phi \rightarrow -\Psi$. Manteremos esta nomeclatura que irá levar a nomeclatura do gauge Newtoniano utilizada por livros como [4] e [17]. Os potencias de Bardeen C.30 no sistema que estamos buscando ficam simplesmente

$$\begin{cases} \Psi = \tilde{A}, \\ \Phi = \tilde{D} = -\tilde{\psi}. \end{cases}$$

Com isto, nosso tensor métrico fica

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} -2\Psi & 0 \\ 0 & 2\Phi\delta_{ij} \end{bmatrix},$$

e a métrica fica

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-\left(1 + 2\Psi(\eta, x^i)\right) d\eta^2 + \left(1 + 2\Phi(\eta, x^i)\right) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (\text{C.31})$$

Para obter a inversa de $g_{\mu\nu}$, usamos, como dito no início, o tensor de Minkowski. Então, como h agora é o termo δg ,

$$\begin{cases} \delta g^{00} = \eta^{00}\eta^{00}\delta g_{00} = -2\Psi, \\ \delta g^{0i} = \eta^{00}\eta^{ij}\delta g_{0j} = -\delta^{ij}\delta g_{0j} = 0, \\ \delta g^{ij} = \eta^{ik}\eta^{jl}\delta g_{kl} = \delta^{ik}\delta^{jl}\delta g_{kl} = 2\Phi\delta^{ij}. \end{cases}$$

Lembrando que, $g^{\mu\nu} = a^2(\eta^{\mu\nu} - \delta^{\mu\nu})$, podemos resumir como

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -(1 + 2\Psi) & 0 \\ 0 & (1 + 2\Phi)\delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.32})$$

$$g^{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -(1 - 2\Psi) & 0 \\ 0 & (1 - 2\Phi)\delta^{ij} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.33})$$

C.5 Relatividade Geral no gauge Newtoniano

Uma vez que nosso tensor métrico no sistema de coordenadas perturbado na aproximação linear é formado por uma contribuição do background mais uma contribuição perturbativa de primeira ordem, vimos no início deste capítulo que esta correção leva a correções

de primeira ordem nas equações de campo de Einstein. Irei pôr abaixo os valores das quantidades de interesse para obter as equações de Einstein como os valores perturbados dos símbolos de Christoffel, do tensor de Ricci, do escalar de Ricci e do tensor de Einstein⁴.

I Símbolo de Christoffel.

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00} = \mathcal{H} + \Psi', \\ \Gamma^0_{0k} = \Psi_{,k}, \\ \Gamma^k_{00} = \Psi_{,k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^i_{0j} = (\mathcal{H} + \Phi') \delta_j^i, \\ \Gamma^0_{ij} = \mathcal{H} \delta_{ij} - (2\mathcal{H}(\Psi - \Phi) - \Phi') \delta_{ij}, \\ \Gamma^i_{jk} = (\Phi_{,j} \delta_k^i + \Phi_{,k} \delta_j^i) - \Phi_{,i} \delta_{kj}. \end{cases}$$

II Tensor de Ricci.

$$\begin{cases} R_{00} = \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\Psi' - \Phi') - 3(\mathcal{H}' + \Phi'), \\ R_{0i} = 2(2\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{,i}, \\ R_{ij} = -(\Psi + \Phi)_{,ij} + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \delta_{ij} + (\Phi'' - \nabla^2 \Phi - \mathcal{H}(\Phi' - 5\Psi') - 2(\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2))(\Psi - \Phi \delta_{ij}), \\ R^0_0 = a^{-2}(3\mathcal{H}' + 3\Phi'' - \nabla^2 \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' - \Phi') - 6\mathcal{H}\Psi), \\ R^0_i = 2a^{-2}(\mathcal{H}\Psi_{,i} - \Phi'_{,i}), \\ R^i_0 = -R^0_i, \\ R^i_j = a^2((\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \delta_j^i - (\Phi + \Psi)_{,j}^{,i} + (\Phi'' - \nabla^2 \Phi - \mathcal{H}(\Psi' - 5\Phi')) \delta_j^i - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2) \Psi \delta_{ij}). \end{cases}$$

III Escala de Ricci.

$$R^k_k = a^{-2}(6(\mathcal{H} + \mathcal{H}^2) + 6\Phi'' - 2\nabla^2(2\Phi + \Psi) - 6\mathcal{H}(\Psi' - 3\Phi') - 12(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\Psi).$$

VI Tensor de Einstein.

$$\begin{cases} G^0_0 = a^{-2}(6\mathcal{H}^2\Psi - 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2\Phi - 6\mathcal{H}\Psi'), \\ G^0_i = -2a^{-2}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi)_{,i}, \\ G^i_0 = -G^0_i, \\ G^i_j = a^{-2}(-(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 2\Phi'' + \nabla^2(\Psi + \Phi) - \mathcal{H}(2\Psi' - 4\Phi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Psi) \delta_{ij} - a^{-2}(\Phi + \Psi)_{,j}^{,i} \end{cases}$$

⁴ Irei utilizar a convenção para o tensor de Ricci como: $R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$.

APÊNDICE D – Equações de Einstein no gauge newtoniano

Precisamos agora dos termos provenientes do tensor energia-momento. Trataremos agora dos casos de interesse, que é tratar radiação e matéria. Usemos a expressão relativística mais geral para uma certa espécie de partícula para este tensor, como discutido em 2.3,

$$T^{\mu}_{\nu}(t, \vec{x}) = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3 \sqrt{\det \|g\|}} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f(t, \vec{x}, \vec{p}).$$

Começando pelos fótons, como a densidade de energia destes é dada por

$$\begin{aligned} \rho_\gamma &= -\left(T^0_0\right)_\gamma = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} P^0 f(t, \vec{x}, \vec{p}) = 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\gamma(p) f(t, \vec{x}, \vec{p}), \\ \delta\rho_\gamma &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\gamma(p) \delta f, \end{aligned}$$

com a expansão de Taylor da função de distribuição¹

$$f = f_{BE} + \delta f = f_{BE} - p\Theta \frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \implies \delta f(t, \vec{x}, \vec{p}) = -p\Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) \frac{\partial f_{BE}}{\partial p}(t, p).$$

Substituindo esta expressão na perturbação da densidade e descrevendo a integral tripla em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} \delta\rho_\gamma &= 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_\gamma(p) \left(-p\Theta(t, \vec{x}, \hat{p}) \frac{\partial f_{BE}}{\partial p}(t, p) \right) = -\frac{2}{(2\pi)^3} \int dp p^4 \underbrace{\frac{\partial f_{BE}}{\partial p} \left(\int d\Omega \Theta \right)}_{\doteq 4\pi\Theta_0} \\ &= \frac{2(4\pi)}{(2\pi)^3} \Theta_0 \int dp p^3 f_{BE} = 4\Theta_0 \underbrace{\frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p p f_{BE}}_{\rho_\gamma^0}, \\ \implies \delta\rho_\gamma &= 4\Theta_0 \rho_\gamma^0. \end{aligned}$$

¹ No capítulo sobre perturbações assumimos que a função de distribuição perturbada seria igual a de BE/FD, exceto pela expansão da temperatura $T \rightarrow T(1 + \Theta)$.

De forma a termos o **contraste de densidade** da radiação, δ_γ , descrito em termos da anisotropia da sua temperatura²

$$\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \delta_\gamma = 4\Theta_0. \quad (\text{D.1})$$

O mesmo pode ser feito para os neutrinos³,

$$\frac{\delta\rho_\nu}{\rho_\nu} = \delta_\nu = 4\mathcal{N}_0. \quad (\text{D.2})$$

Agora tomemos a equação proveniente de δG^0_0 , obtida no apêndice C.5 devido somente aos campos perturbativos. Lembrando que o tensor de energia-momento nesta equação de campo se refere a densidade de energia **total**,

$$\delta G^0_0 = 2a^{-2} \left(k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) \right) = 8\pi G\delta\rho = 8\pi G \sum_j \delta\rho_j,$$

ou, em tempo cósmico,

$$\frac{k^2}{a^2}\Phi + 3H(\dot{\Phi} - H\Psi) = 4\pi G(\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c + 4\rho_\gamma\Theta_\gamma + 4\rho_\nu\mathcal{N}_\nu). \quad (\text{D.3})$$

Lembrando aqui que os subíndices "b" e "c" se referem aos "bárions" e a "matéria escura fria", respectivamente. Vide que este é uma versão cosmológica da equação de Poisson. Para ver isto, imagine que não há expansão no Universo, então $H = 0$, e então o lado esquerda da expressão é basicamente o laplaciano do potencial Φ , e o termo à direita da igualdade é justamente o termo fonte.

Agora tomemos a componente espacial do tensor de Einstein, δG^i_j ,

$$\delta G^i_j = a^{-2} \left(-2\Phi'' + \nabla^2(\Psi + \Phi) - \mathcal{H}(2\Psi' - 4\Phi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Psi \right) \delta_{ij} - a^{-2} (\Phi + \Psi)^{,i}_{,j}.$$

Escrevendo-o em termos dos modos de Fourier,

$$\delta G^i_j = a^{-2} \left(-2\Phi'' - k^2(\Psi + \Phi) - \mathcal{H}(2\Psi' - 4\Phi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Psi \right) \delta^i_j + a^{-2} (\Phi + \Psi) k^i k_j,$$

² Na aproximação de primeira ordem $\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} \approx \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma^0}$.

³ A definição dos multipolos da anisotropia da temperatura dos neutrinos é exatamente a mesma da dos fótons: $\mathcal{N}_\ell \doteq \frac{1}{(-i)^\ell} \int \frac{d\mu}{2} \Theta(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu)$.

ou seja, temos um parte de termos proporcionais à δ^i_j , e outra parte que é $a^{-2} (\Phi + \Psi) k^i k_j$. Podemos então, assim como feito no apêndice C, separar tal tensor em uma parte exclusivamente diagonal e outra parte sem traço, para isto deixe-me definir o seguinte operador:

$$\mathbf{D}^i_j \doteq \partial^i \partial_j - \frac{1}{3} \delta^i_j \nabla^2. \quad (\text{D.4})$$

Que quando atuando no espaço de Fourier, assume forma

$$\mathcal{D}^i_j = -k^2 \left(\hat{k}^i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta^i_j \right). \quad (\text{D.5})$$

Vide que se eu o utilizo atuando sobre δG^i_j , contraindo os índices,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j_i \delta G^i_j &= -k^2 a^{-2} \left[-2\Phi'' - k^2 (\Psi + \Phi) - \mathcal{H} (2\Psi' - 4\Phi') + (4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) \Psi \right] \underbrace{\left(\hat{k}^j \hat{k}_i - \frac{1}{3} \delta^j_i \right)}_{= \hat{k}^i \hat{k}_i - \frac{1}{3} \times 3 = 0} \delta^i_j \\ &\quad - k^2 a^{-2} (\Phi + \Psi) \left(\hat{k}^j \hat{k}_i - \frac{1}{3} \delta^j_i \right) \left(k^2 \hat{k}^i \hat{k}_j \right) \\ &= -k^4 a^{-2} (\Phi + \Psi) \left(\hat{k}^i \hat{k}_i \hat{k}^j \hat{k}_j - \frac{1}{3} \hat{k}^j \hat{k}_j \right) \\ &= -\frac{2}{3} k^4 a^{-2} (\Phi + \Psi). \end{aligned}$$

Operando sobre o tensor energia-momento,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j_i T^i_j &= \mathcal{D}^j_i \left(\sum_m T_{(m)}^i \right) = \mathcal{D}^j_i \left(\sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{(P^i P_j)_{(m)}}{(P^0)_{(m)}} f_{(m)} \right) \\ &= -k^2 \left(\hat{k}^j \hat{k}_i - \frac{1}{3} \delta^j_i \right) \left(\sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{(P^i P_j)_{(m)}}{(P^0)_{(m)}} f_{(m)} \right) \\ &= \sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\mathcal{D}^j_i (P^i P_j)_{(m)}}{(P^0)_{(m)}} f_{(m)}. \end{aligned}$$

Usando a parte espacial do quadrimomento, expressão 2.5, $P^i = (1 - \Phi) p \hat{p}^i / a$, e baixando o índice com a contração com o tensor métrico,

$$\begin{aligned} P_j = g_{ji} P^i &= \left(a^2 (1 + 2\Phi) \delta^i_j \right) \left(\frac{1 - \Phi}{a} p \hat{p}^i \right) \approx a (1 + \Phi) p \hat{p}_j, \\ P^i P_j &= \left(\frac{1}{a} (1 - \Phi) p \hat{p}^i \right) (a (1 + \Phi) p \hat{p}_j) \approx p^2 \hat{p}^i \hat{p}_j. \end{aligned}$$

Com a ação do operador sobre este último,

$$\mathcal{D}^j{}_i P^i P_j \approx - (kp)^2 \hat{k}^j \hat{k}_i \hat{p}^i \hat{p}_j - \frac{1}{3} (kp)^2 \delta^i_j \hat{p}^i \hat{p}_j = (kp)^2 \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \equiv (kp)^2 \frac{2}{3} \mathcal{P}_2(\mu).$$

Em que usei a definição do ângulo entre a propagação e o número de onda, $\mu = \hat{p}_i \hat{k}^i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j{}_i T^i_j &= -\frac{2}{3} k^2 \sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2 \mathcal{P}_2(\mu)}{(P^0)_{(m)}} f_{(m)} \\ &= -\frac{2}{3} k^2 \sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2 \mathcal{P}_2(\mu)}{(E(p))_{(m)}} f_{(m)}. \end{aligned}$$

Na teoria perturbativa linear podemos descartar as perturbações na temperatura massivas, uma vez que estas vão com o quadrado do fator de escala, ao contrário da temperatura da radiação que cai com o fator de escala, o que leva a temperatura da matéria ir com o quadrado dos monopólos da radiação, logo, de segunda ordem e desprezível. Ao expandir a função de distribuição da expressão acima os termos de ordem zero são nulos por simetria esférica⁴. Já a contribuição de primeira ordem não, uma vez que $\Theta(t, \vec{x}, \hat{p})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j{}_i T^i_j &= -\frac{2}{3} k^2 \sum_m \frac{g_{(m)}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2 \mathcal{P}_2(\mu)}{(E(p))_{(m)}} \delta f_{(m)} \\ &= -\frac{2}{3} k^2 \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2 \mathcal{P}_2(\mu)}{E_\gamma(p)} \delta f_\gamma - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^2 \mathcal{P}_2(\mu)}{E_\nu(p)} \delta f_\nu, \\ \delta f_\gamma &\equiv -p \Theta \frac{\partial f_\gamma^0}{\partial p}, \\ \delta f_\nu &\equiv -p \mathcal{N} \frac{\partial f_\nu^0}{\partial p}. \end{aligned}$$

Pela definição de multipolo de Θ e de \mathcal{N} , e como somente estes e o polinômio de Legendre possuem dependência angular, estes termos ficam

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{\hat{p}} \Theta \mathcal{P}_2 &= 4\pi \int \frac{d\mu}{2} \Theta(\mu) \mathcal{P}_2(\mu) = -4\pi \Theta_2, \\ \int d\Omega_{\hat{p}} \mathcal{N} \mathcal{P}_2 &= 4\pi \int \frac{d\mu}{2} \mathcal{N}(\mu) \mathcal{P}_2(\mu) = -4\pi \mathcal{N}_2, \end{aligned}$$

e como a energia das espécies que compõe a radiação são os momentos próprios destes,

⁴ $\int d\mu \mathcal{P}_\ell = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu \mathcal{P}_\ell(\mu) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^j_i T^i_j &= - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \left[(-4\pi\Theta_2) \int dp \frac{p^4}{p} \left(-p \frac{\partial f_\gamma^0}{\partial p} \right) \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \left[(-4\pi\mathcal{N}_2) \int dp \frac{p^4}{p} \left(-p \frac{\partial f_\nu^0}{\partial p} \right) \right] \\
&= - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \left[(-4\pi\Theta_2) \int dp \frac{d}{dp} (p^4) f_\gamma^0 \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \left[(-4\pi\mathcal{N}_2) \int dp \frac{d}{dp} (p^4) f_\nu^0 \right] \\
&= - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \left[4(-4\pi\Theta_2) \int dpp^3 f_\gamma^0 \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \left[4(-4\pi\mathcal{N}_2) \int dpp^3 f_\nu^0 \right] \\
&= - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\gamma}{(2\pi)^3} \left[(-4\Theta_2) \int d^3 pp f_\gamma^0 \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} k^2 \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \left[(-4\mathcal{N}_2) \int d^3 pp f_\nu^0 \right] \\
&= - \frac{2}{3} k^2 \left[(-4\Theta_2) \rho_\gamma^0 \right] \\
&\quad - \frac{2}{3} k^2 \left[(-4\mathcal{N}_2) \rho_\nu^0 \right].
\end{aligned}$$

Portanto, o termo sem traço do tensor energia momento fica

$$\mathcal{D}^j_i T^i_j = \frac{8}{3} k^2 \Theta_2 \rho_\gamma^0 + \frac{8}{3} k^2 \mathcal{N}_2 \rho_\nu^0. \quad (\text{D.6})$$

Comparando este com o termo sem traço do tensor de Einstein,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^j_i G^i_j &= 8\pi G \left(\mathcal{D}^j_i T^i_j \right), \\
-\frac{2}{3} k^4 a^{-2} (\Phi + \Psi) &= 8\pi G \left(\frac{8}{3} k^2 \Theta_2 \rho_\gamma^0 + \frac{8}{3} k^2 \mathcal{N}_2 \rho_\nu^0 \right).
\end{aligned}$$

Portanto, a parte perturbada da equação de campo de Einstein para termos espaciais fica

$$\therefore k^2 (\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 (\Theta_2 \rho_\gamma + \mathcal{N}_2 \rho_\nu). \quad (\text{D.7})$$

O termo a esquerda se deve a anisotropia do momento, em forte acoplamentos tais que essa anisotropia é praticamente nula, os quadrupolos são desprezíveis e os potenciais são iguais, a menos de um fator negativo.

O termo fora da diagonal das equações de campo, i.e., δG^i_0 , não é independente das duas primeiras. Assim, das três equações, temos duas independentes. As três equações são:

$$\begin{cases} k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2(\rho_m\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0}), \\ \Phi' - \mathcal{H}\Psi = \frac{4\pi G}{ik}a^2(\rho_m v_m - 4i\rho_r\Theta_{r,1}), \\ k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi Ga^2\Theta_{r,2}\rho_r. \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Vide que eu defini

$$\begin{cases} \rho_r\Theta_{r,n} \equiv \rho_r\Theta_n + \rho_\nu\mathcal{N}_n, \\ \rho_m\delta_m \equiv \rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c. \end{cases}$$

Isto porquê,

$$\begin{aligned} \delta\rho_r &= \delta\rho_\gamma + \delta\rho_\nu = 4\Theta\rho_\gamma^0 + 4\mathcal{N}\rho_\nu^0 = \left(4\Theta\frac{\rho_\gamma^0}{\rho_r^0}\right)\rho_r^0 + \left(4\mathcal{N}\frac{\rho_\nu^0}{\rho_r^0}\right)\rho_r^0, \\ \frac{1}{4}\delta_r &\equiv \frac{1}{4}\frac{\delta\rho_r}{\rho_r} = \Theta\frac{\rho_\gamma^0}{\rho_r^0} + \mathcal{N}\frac{\rho_\nu^0}{\rho_r^0} \doteq \Theta_r. \end{aligned}$$

A da matéria segue a mesma ideia.

Há como obter outra equação a partir das equações acima de Einstein que às vezes se demonstra conveniente para obter o valor do contraste de densidade da matéria em termos do potencial Φ no período da matéria. Combinando as duas primeiras equações de D.8,

$$\begin{aligned} k^2\Phi + 3\mathcal{H}\left(\frac{4\pi G}{ik}a^2(\rho_m v_m - 4i\rho_r\Theta_{r,1})\right) &= 4\pi Ga^2(\rho_m\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0}), \\ k^2\Phi &= 4\pi Ga^2\left[\rho_m\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3i\mathcal{H}}{k}(\rho_m v_m - 4i\rho_r\Theta_{r,1})\right], \\ \therefore k^2\Phi &= 4\pi Ga^2\left[\rho_m\left(\delta_m + \frac{3\mathcal{H}}{k}iv_m\right) + 4\rho_r\left(\Theta_{r,0} + \frac{12\mathcal{H}}{k}\Theta_{r,1}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

ANEXO A – Resultados dos MCMC

Neste anexo estão os resultados dos 15 processos de análise de Monte Carlo comparando a teoria da extração do BAO pelo C_ℓ e o ajuste (fit) que tenta descrever as oscilações. O ajuste utilizado é o descrito pela relação 5.12. Os priors das análises são os mesmos das escalas dos parâmetros.

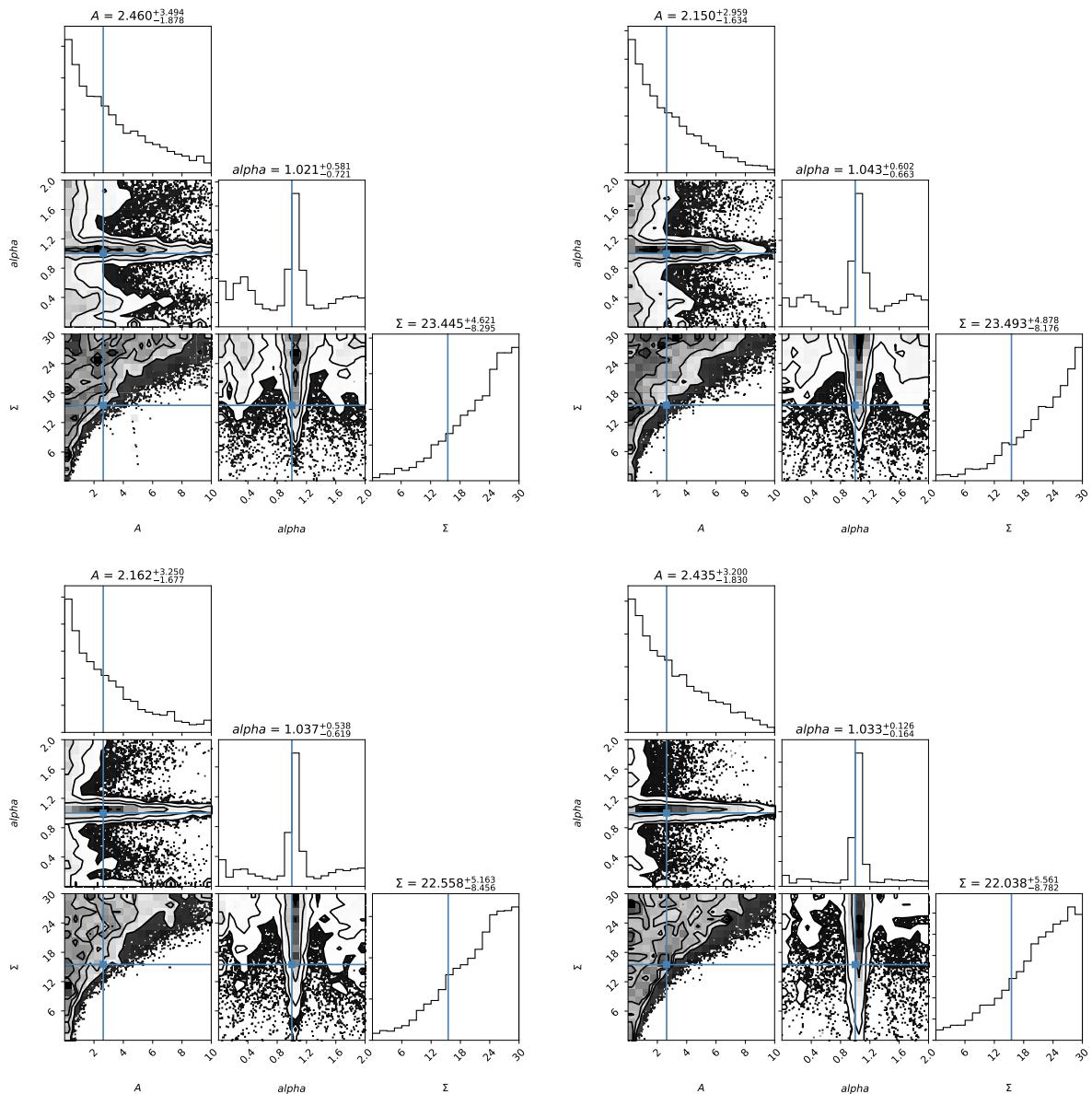


Figura 25 – Bins: 1, 2, 3 e 4. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.

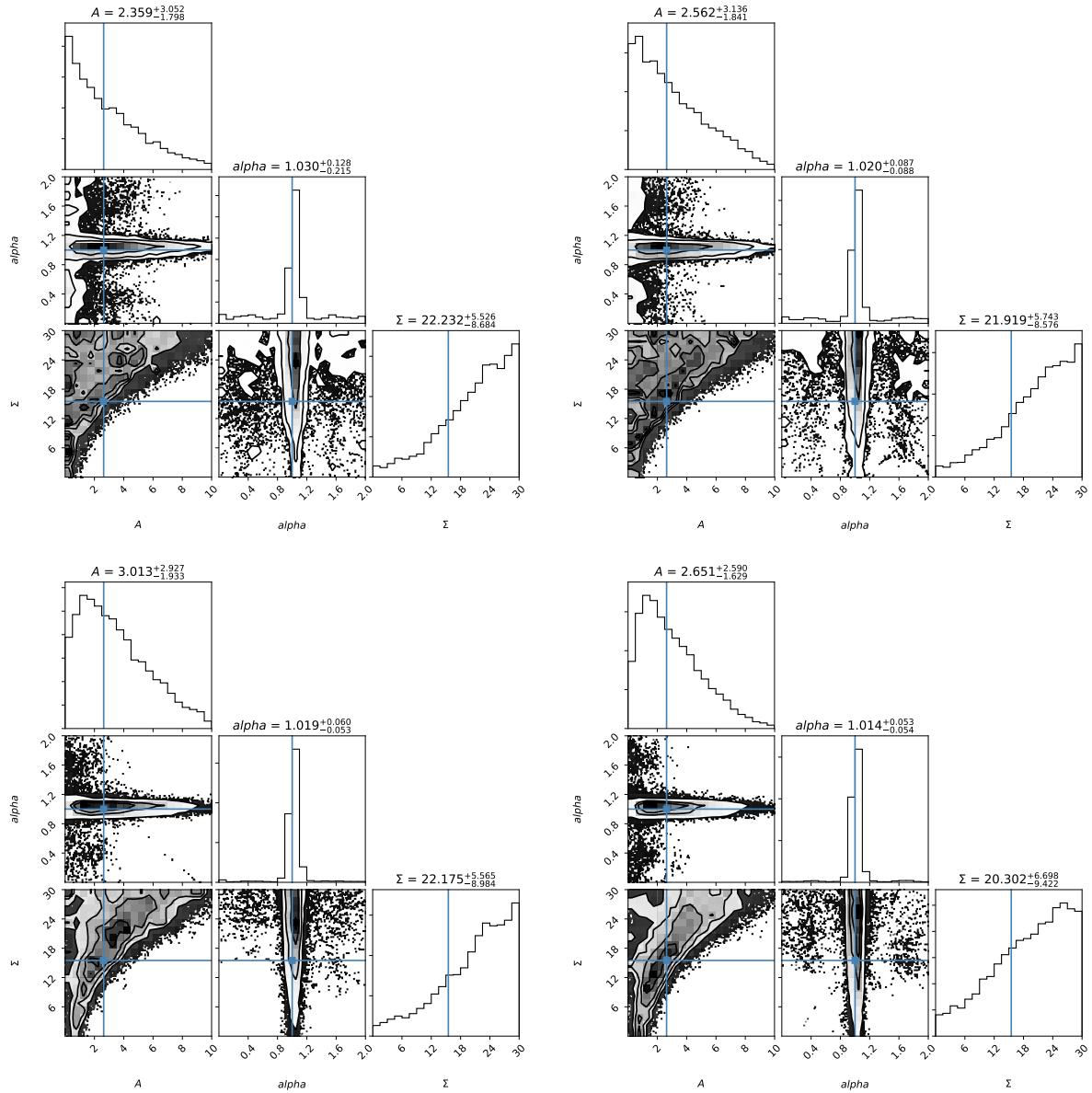


Figura 26 – Bins: 5, 6, 7 e 8. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.

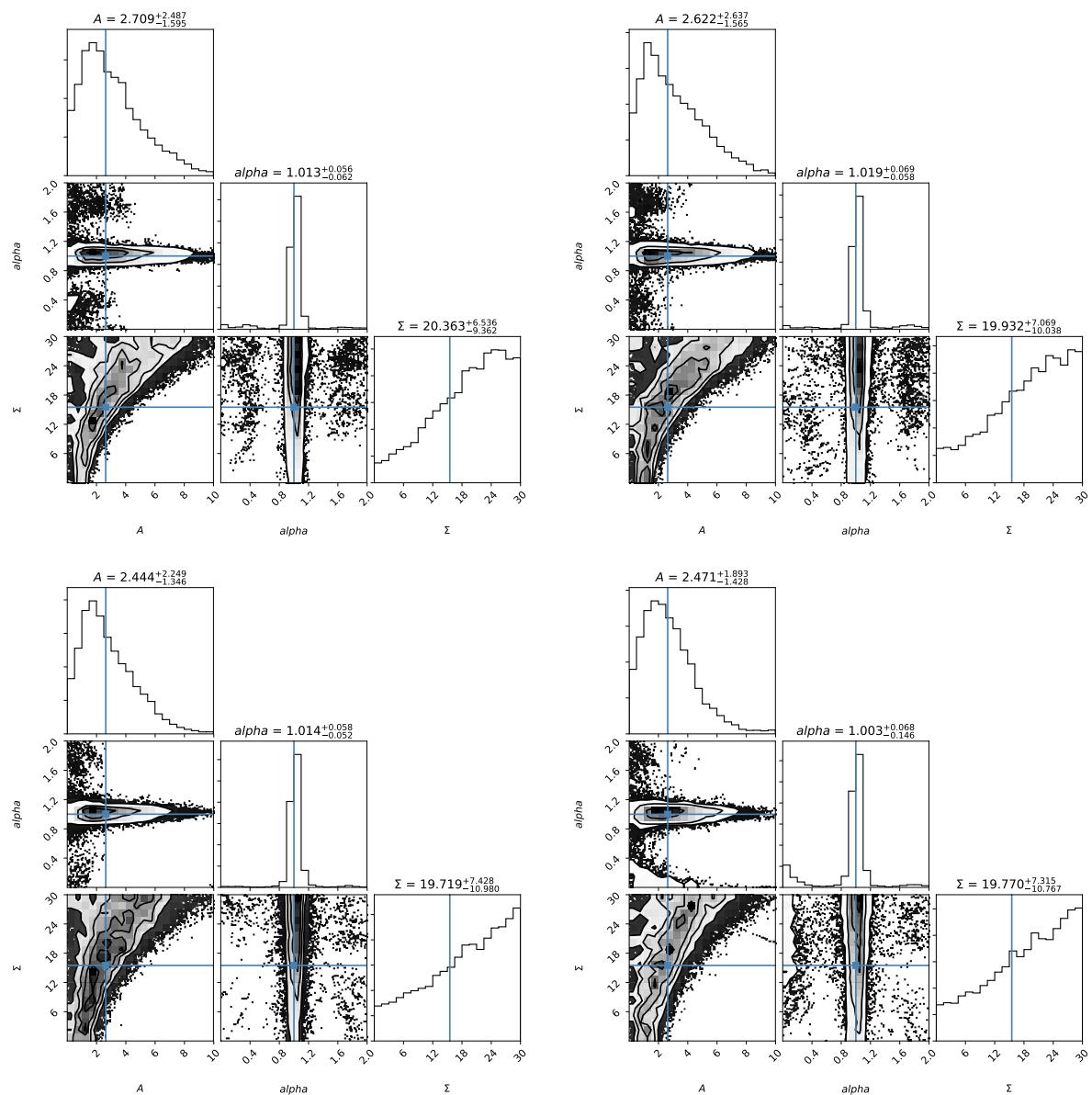


Figura 27 – Bins: 9, 10, 11 e 12. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.

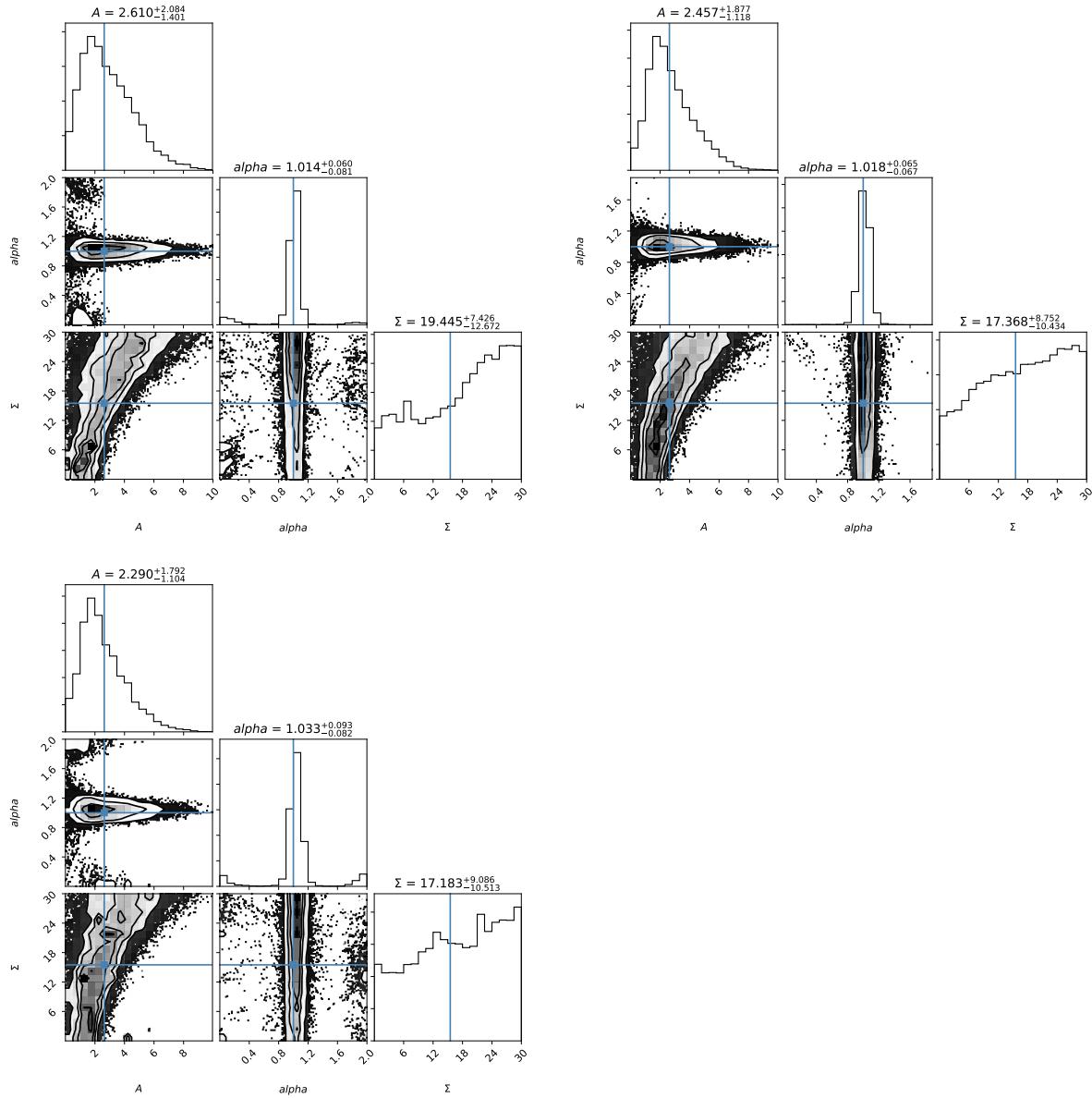


Figura 28 – Bins: 13, 14 e 15. Em azul estão referenciados os valores iniciais dos parâmetros.

Referências

- [1] Peter AR Ade, N Aghanim, M Arnaud, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, AJ Banday, RB Barreiro, JG Bartlett, N Bartolo, et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016. Citado 12 vezes nas páginas [13](#), [14](#), [27](#), [28](#), [38](#), [41](#), [42](#), [55](#), [86](#), [103](#), [105](#) e [106](#).
- [2] Y Akrami, F Arroja, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results. x. constraints on inflation. *arXiv preprint arXiv:1807.06211*, 2018. Citado 4 vezes nas páginas [69](#), [76](#), [82](#) e [95](#).
- [3] Luca Amendola, Stephen Appleby, Anastasios Avgoustidis, David Bacon, Tessa Baker, Marco Baldi, Nicola Bartolo, Alain Blanchard, Camille Bonvin, Stefano Borgani, et al. Cosmology and fundamental physics with the euclid satellite. *Living Reviews in Relativity*, 21(1):2, 2018. Nenhuma citação no texto.
- [4] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas [55](#), [83](#), [105](#) e [137](#).
- [5] Benjamin Audren, Julien Lesgourgues, Karim Benabed, and Simon Prunet. Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code. *JCAP*, 1302:001, 2013. Citado na página [111](#).
- [6] Bruce Bassett and Renée Hlozek. Baryon acoustic oscillations. *Dark energy: observational and theoretical approaches*, page 246, 2010. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [50](#).
- [7] RA Battye, IWA Browne, C Dickinson, G Heron, B Maffei, and A Pourtsidou. Hi intensity mapping: a single dish approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434(2):1239–1256, 2013. Citado 3 vezes nas páginas [90](#), [95](#) e [102](#).
- [8] M et al Betoule, R Kessler, J Guy, J Mosher, D Hardin, R Biswas, P Astier, P El-Hage, M Konig, S Kuhlmann, et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *Astronomy & Astrophysics*, 568:A22, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [95](#) e [111](#).
- [9] Florian Beutler, Chris Blake, Matthew Colless, D Heath Jones, Lister Staveley-Smith, Lachlan Campbell, Quentin Parker, Will Saunders, and Fred Watson. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):3017–3032, 2011. Citado na página [95](#).

- [10] C. Blake and K. Glazebrook. Probing dark energy using baryonic oscillations in the galaxy power spectrum as a cosmological ruler. *Astrophys. J.*, 594:665, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [96](#), [99](#) e [103](#).
- [11] Chris Blake, Tamara Davis, Gregory B Poole, David Parkinson, Sarah Brough, Matthew Colless, Carlos Contreras, Warrick Couch, Scott Croom, Michael J Drinkwater, et al. The wigglez dark energy survey: testing the cosmological model with baryon acoustic oscillations at $z= 0.6$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415(3):2892–2909, 2011. Citado na página [95](#).
- [12] Philip Bull, Pedro G Ferreira, Prina Patel, and Mario G Santos. Late-time cosmology with 21 cm intensity mapping experiments. *The Astrophysical Journal*, 803(1):21, 2015. Citado na página [101](#).
- [13] KC Chan, M Crocce, AJ Ross, S Avila, J Elvin-Poole, M Manera, WJ Percival, R Rosenfeld, TMC Abbott, FB Abdalla, et al. Bao from angular clustering: optimization and mitigation of theoretical systematics. *arXiv preprint arXiv:1801.04390*, 2018. Nenhuma citação no texto.
- [14] Edmund J Copeland, Mohammad Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, 2006. Citado na página [41](#).
- [15] Andre A Costa, Ricardo CG Landim, Bin Wang, and E Abdalla. Interacting dark energy: Possible explanation for 21-cm absorption at cosmic dawn. *arXiv preprint arXiv:1803.06944*, 2018. Citado na página [37](#).
- [16] Timothée Delubac, Julian E Bautista, James Rich, David Kirkby, Stephen Bailey, Andreu Font-Ribera, Anže Slosar, Khee-Gan Lee, Matthew M Pieri, Jean-Christophe Hamilton, et al. Baryon acoustic oscillations in the $\text{Ly}\alpha$ forest of boss dr11 quasars. *Astronomy & Astrophysics*, 574:A59, 2015. Citado na página [96](#).
- [17] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Academic press, 2003. Citado 8 vezes nas páginas [23](#), [61](#), [63](#), [68](#), [69](#), [75](#), [83](#) e [137](#).
- [18] Daniel J Eisenstein and Wayne Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605, 1998. Citado 8 vezes nas páginas [13](#), [14](#), [85](#), [86](#), [96](#), [98](#), [104](#) e [106](#).
- [19] Daniel J Eisenstein, Idit Zehavi, David W Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R Blanton, Robert C Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, 2005. Citado na página [71](#).

- [20] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman. emcee: The mcmc hammer. *PASP*, 125:306–312, 2013. Citado na página [108](#).
- [21] Joshua A Frieman, Michael S Turner, and Dragan Huterer. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [41](#) e [43](#).
- [22] Steven R Furlanetto, S Peng Oh, and Frank H Briggs. Cosmology at low frequencies: The 21 cm transition and the high-redshift universe. *Physics Reports*, 433(4-6):181–301, 2006. Nenhuma citação no texto.
- [23] Karl Glazebrook and Chris Blake. Measuring the cosmic evolution of dark energy with baryonic oscillations in the galaxy power spectrum. *The Astrophysical Journal*, 631(1):1, 2005. Citado na página [96](#).
- [24] David Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2011. Nenhuma citação no texto.
- [25] Alex Hall, Camille Bonvin, and Anthony Challinor. Testing general relativity with 21-cm intensity mapping. *Physical Review D*, 87(6):064026, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [89](#) e [90](#).
- [26] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006. Citado na página [23](#).
- [27] David W Hogg. Distance measures in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/9905116*, 1999. Citado 2 vezes nas páginas [43](#) e [46](#).
- [28] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [28](#).
- [29] David Kirkby, Daniel Margala, Anže Slosar, Stephen Bailey, Timothée Delubac, James Rich, Julian E Bautista, Michael Blomqvist, Joel R Brownstein, Bill Carithers, et al. Fitting methods for baryon acoustic oscillations in the lyman- α forest fluctuations in boss data release 9. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(03):024, 2013. Nenhuma citação no texto.
- [30] Pablo Lemos, Anthony Challinor, and George Efstathiou. The effect of limber and flat-sky approximations on galaxy weak lensing. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(05):014, 2017. Citado na página [93](#).
- [31] Antony Lewis, Anthony Challinor, and Anthony Lasenby. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Astrophys. J.*, 538:473–476, 2000. Citado na página [85](#).

-
- [32] AR Liddle and DH Lyth. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge, 2009. Nenhuma citação no texto.
 - [33] Marilena LoVerde and Niayesh Afshordi. Extended limber approximation. *Physical Review D*, 78(12):123506, 2008. Citado 3 vezes nas páginas [93](#), [100](#) e [101](#).
 - [34] Rafael JF Marcondes, Ricardo CG Landim, Andre A Costa, Bin Wang, and Elcio Abdalla. Analytic study of the effect of dark energy-dark matter interaction on the growth of structures. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(12):009, 2016. Citado na página [37](#).
 - [35] Houjun Mo, Frank Van den Bosch, and Simon White. *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010. Nenhuma citação no texto.
 - [36] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005. Citado na página [27](#).
 - [37] LC Olivari, C Dickinson, RA Battye, Y-Z Ma, AA Costa, M Remazeilles, and S Harper. Cosmological parameter forecasts for hi intensity mapping experiments using the angular power spectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473(3):4242–4256, 2017. Citado 3 vezes nas páginas [42](#), [90](#) e [95](#).
 - [38] Kepler de Souza Oliveira Filho and Maria de Fátima Oliveira Saraiva. Astronomia e astrofísica. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, 780, 2004. Citado na página [43](#).
 - [39] John A Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge university press, 1999. Citado na página [23](#).
 - [40] Will J Percival, Robert C Nichol, Daniel J Eisenstein, David H Weinberg, Masataka Fukugita, Adrian C Pope, Donald P Schneider, Alex S Szalay, Michael S Vogeley, Idit Zehavi, et al. Measuring the matter density using baryon oscillations in the sdss. *The Astrophysical Journal*, 657(1):51, 2007. Citado na página [95](#).
 - [41] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan. *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [54](#).
 - [42] Oliver F Piattella. Lecture notes in cosmology. *arXiv:1803.00070*, 2018. Citado 5 vezes nas páginas [23](#), [51](#), [61](#), [68](#) e [69](#).
 - [43] Jonathan R Pritchard and Abraham Loeb. 21-cm cosmology in the 21st century. *Reports on Progress in Physics*, 75(8):086901, 2012. Citado na página [88](#).
 - [44] Anais Rassat, Adam Amara, Luca Amendola, Francisco J Castander, Thomas Kit- ching, Martin Kunz, Alexandre Réfrégier, Yun Wang, and Jochen Weller. Deconstructing baryon acoustic oscillations: a comparison of methods. *arXiv preprint arXiv:0810.0003*, 2008. Citado na página [96](#).

- [45] Adam G Riess, Lucas M Macri, Samantha L Hoffmann, Dan Scolnic, Stefano Casertano, Alexei V Filippenko, Brad E Tucker, Mark J Reid, David O Jones, Jeffrey M Silverman, et al. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 826(1):56, 2016. Citado na página 111.
- [46] Mario G Santos, Philip Bull, David Alonso, Stefano Camera, Pedro G Ferreira, Gianni Bernardi, Roy Maartens, Matteo Viel, Francisco Villaescusa-Navarro, Filipe B Abdalla, et al. Cosmology with a ska hi intensity mapping survey. *arXiv preprint arXiv:1501.03989*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 90.
- [47] P Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology, by Peter Schneider*. Berlin: Springer, 2006. Citado na página 43.
- [48] DM Scolnic, DO Jones, A Rest, YC Pan, R Chornock, RJ Foley, ME Huber, R Kessler, G Narayan, AG Riess, et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed type ia supernovae from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *arXiv preprint arXiv:1710.00845*, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 13, 47, 48 e 95.
- [49] Hee-Jong Seo, Jonathan Eckel, Daniel J Eisenstein, Kushal Mehta, Marc Metchnik, Nikhil Padmanabhan, Phillip Pinto, Ryuichi Takahashi, Martin White, and Xiaoying Xu. High-precision predictions for the acoustic scale in the nonlinear regime. *The Astrophysical Journal*, 720(2):1650, 2010. Citado na página 96.
- [50] Hee-Jong Seo and Daniel J Eisenstein. Probing dark energy with baryonic acoustic oscillations from future large galaxy redshift surveys. *The Astrophysical Journal*, 598(2):720, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 49, 96 e 102.
- [51] Anže Slosar, Vid Iršič, David Kirkby, Stephen Bailey, Timothée Delubac, James Rich, Éric Aubourg, Julian E Bautista, Vaishali Bhardwaj, Michael Blomqvist, et al. Measurement of baryon acoustic oscillations in the lyman- α forest fluctuations in boss data release 9. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(04):026, 2013. Citado na página 95.
- [52] N Suzuki, D Rubin, C Lidman, G Aldering, R Amanullah, K Barbary, LF Barrientos, J Botyanszki, M Brodwin, N Connolly, et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, 746(1):85, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 13, 47, 72 e 95.
- [53] Francisco Villaescusa-Navarro, David Alonso, and Matteo Viel. Baryonic acoustic oscillations from 21 cm intensity mapping: the square kilometre array case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 466(3):2736–2751, 2016. Nenhuma citação no texto.

- [54] B Wang, E Abdalla, F Atrio-Barandela, and D Pavon. Dark matter and dark energy interactions: theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Reports on Progress in Physics*, 79(9):096901, 2016. Citado na página [37](#).
- [55] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. Nenhuma citação no texto.
- [56] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 2014. Citado 5 vezes nas páginas [21](#), [23](#), [25](#), [34](#) e [43](#).
- [57] CA Wuensche et al. The bingo telescope: a new instrument exploring the new 21-cm cosmology window. *arXiv preprint arXiv:1803.01644*, 2018. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [88](#) e [95](#).
- [58] Xiaoying Xu, Antonio J Cuesta, Nikhil Padmanabhan, Daniel J Eisenstein, and Cameron K McBride. Measuring da and h at z= 0.35 from the sdss dr7 lrgs using baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(3):2834–2860, 2013. Nenhuma citação no texto.

Índice

- Índice espectral, 84
- Métrica
 - Minkowski, 22
- Aproximação de Limber, 94, 102, 103, 107
- Bias, 90
- BINGO, 99, 111
- BINGO telescope, 49
- Bins, 99
- Christoffel
 - símbolo de, 32
- Constante cosmológica, 40–42
- Contraste de densidade, 80
- Curvatura, 22–25
- Distância
 - comóvel, 25, 44, 45
 - de Hubble, 49
 - diâmetro angular, 49
 - esfericamente média, 49, 106
 - luminosa, 45
 - própria, 25
- Efeito Alcock-Paczyński, 106
- Efeito Doppler, 30
- Einstein, 39
 - equações de, 19, 32, 39, 58, 86, 125, 140
 - tensor de, 32, 33, 37, 124, 125, 140, 142
- Energia escura, 52, 105
- Equação da geodésica, 61
- Equação de Boltzmann, 63
- Equação de estado, 35, 36, 52, 112
- Equação de estado efetiva, 36
- Equação de Poisson, 142
- Escala acústica, 48, 104, 110
- Espaço
 - euclidiano, 23
 - maximamente simétrico, 19, 22
- Espalhamento Compton, 63
- Espectro de potência 2D, 83
- Espectro de potência 3D, 82
- Espectro de potência angular, 93, 99
- Espectro de potência primordial, 71
- Friedmann
 - equação de, 37–39
 - equações de, 34, 35, 39
- Função de crescimento, 84
- Função de transferência, 84
- Horizonte
 - de eventos, 28
 - de partículas, 28
 - sonoro, 48, 104, 105
- Hubble, 39
 - constante de, 26, 38, 41, 119
 - diagrama de, 47
 - distância de, 49, 104
 - Edwin, 26
 - fluxo de, 30, 31
 - função de, 26, 34, 38, 39, 69
- Integrated Sachs-Wolfe, 92
- Luminosidade
 - aparente, 46
- Métrica
 - FLRW, 24–26
- Magnitude
 - absoluta, 46
 - aparente, 46

- Matéria escura fria, 52
Minkowski
 espaço de, 30
MontePython, 112
Multipolo acústico, 104, 105

Observador fundamental, 21, 22, 25, 30, 31
Ondas gravitacionais, 48
Oscilações acústicas de bárions, 48, 119

Parâmetro de densidade, 38
Parâmetro de dilatação, 104, 105
Parâmetro de distorção, 110
Planck, 38
 massa de, 41, 42
 satélite, 26, 27
Potencial primordial, 84
Princípio Antrópico, 43
Princípio cosmológico, 19
Princípio da incerteza de Heineberg, 53

Régua padrão, 48, 106
Radiação cósmica de fundo, 21, 57
Raio de curvatura, 24
Recombinação, 48
Redshift, 28, 30, 38, 42
Redshift space distortion, 92
Relação de Rayleigh, 93
Ricci
 escalar de, 33, 140
 tensor de, 33, 140
Riemann
 tensor de, 123

Sachs-Wolfe, 92
Silk, 51
Silk damping, 103

Temperatura de brilho, 91
Tempo
 cósmico, 25