

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

*Investigaçāo da física do setor escuro
com ondas gravitacionais*

Riis Rhavia Assis Bachega

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada ao Instituto
de Física como requisito parcial para a ob-
tenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla - Orientador (IF-USP)

Prof. Dr. Riccardo Sturani (IIP -UFRN)

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza (DAS-INPE)

Prof Dr. Eduardo Serra Cypriano (IAG-USP)

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACH-USP)

São Paulo - SP

2019

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Bachega, Riis Rhavia Assis

Investigação da física do setor escuro com ondas gravitacionais.
São Paulo, 2019.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.
Dept. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Astrofísica; 3. Ondas gravitacionais.

USP/IF/SBI-083/2019

UNIVERSITY SÃO PAULO
Physics Institute

*Probing dark sector physics
with gravitational waves*

Riis Rhavia Assis Bachega

Supervisor: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Thesis submitted to the Physics Institute of
University of São Paulo in partial fulfillment
of requirements for the degree of Doctor of
Science

Exammining Committee:

Prof. Dr. Elcio Abdalla - Supervisor (IF-USP)

Prof. Dr. Riccardo Sturani (IIP -UFRN)

Prof. Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza (DAS-INPE)

Prof Dr. Eduardo Serra Cypriano (IAG-USP)

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACH-USP)

São Paulo - SP

2019

Resumo

No final da década de 1990 constatou-se que o universo está passando por uma fase de expansão acelerada, o que sugere a presença de uma componente misteriosa denominada energia escura, que com a matéria escura forma o chamado setor escuro do universo, responsável por cerca de 95% do conteúdo do mesmo. Ondas gravitacionais podem ser usadas para investigar este setor escuro, complementando os atuais observáveis eletromagnéticos como supernovas tipo Ia e radiação cósmica de fundo. A partir da amplitude da onda gravitacional é possível medir a distância luminosa d_L da fonte geradora e com a contraparte eletromagnética é possível determinar o redshift z , podendo assim construir um diagrama $d_L - z$ e medir a história de expansão do universo. Dessa forma, ondas gravitacionais podem ser utilizadas como sirenes padrão. A primeira sirenê padrão detectada constituiu-se nas ondas gravitacionais originadas da colisão de um par de estrelas de nêutrons do dia 17 de agosto de 2017 (GW170817) em que também se detectou a contraparte eletromagnética (GRB170817A). Com este evento foi possível determinar que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais e a velocidade da luz se diferem em uma parte em 10^{15} , o que permitiu restringir em muito modelos que buscavam explicar a aceleração cósmica por meio de teorias de gravitação modificada. Nesta tese irei apresentar duas aplicações. A primeira será sobre um modelo de unificação do setor escuro oriundo da Teoria de Horndeski, e de como o evento GW170817 impôs fortes restrições a este modelo. A segunda será sobre a simulação de catálogos de sirenes padrão que poderiam ser detectadas pelo futuro Telescópio Einstein e de como esses futuros dados poderiam restringir uma interação no setor escuro.

Palavras-chave: Setor escuro, Ondas gravitacionais, Teoria de Horndeski, GW170817, Sirenes padrão, Telescópio Einstein

Abstract

In the end of 1990s it was found that the universe is undergoing an accelerated expansion phase, suggesting the presence of a mysterious component called dark energy, which with dark matter forms the so-called dark sector of the universe, responsible for about 95 % of its content. Gravitational waves can be used to investigate this dark sector, complementing current electromagnetic observables such as type Ia supernova and cosmic microwave background. From the amplitude of the gravitational wave it is possible to measure the luminosity distance d_L from the generating source and with the electromagnetic counterpart it is possible to determine the redshift z and thus build a $d_L - z$ diagram and measure the cosmic expansion history. Thus, gravitational waves can be used as standard sirens. The first standard siren detected was gravitational waves originating from the collision of a pair of neutron stars on August 17, 2017 (GW170817) where the electromagnetic counterpart (GRB170817A) was also detected. With this event it was possible to determine that the propagation velocity of gravitational waves and the velocity of light differ in one part by 10^{15} , which allowed us to restrict in many models that tried to explain the cosmic acceleration through theories of modified gravitation. In this thesis I will present two applications. The first will be about a dark-sector unification model from Horndeski Theory, and how event GW170817 imposed strong constraints on this model. The second will be about simulating standard siren catalogs that could be detected by the future Einstein Telescope and how these future data could constrain dark sector interaction.

Keywords: Dark sector, Gravitational waves, Horndeski Theory, GW170817, Standard sirens, Einstein Telescope.

*“A minha mãe Eneida Assis que onde estiver está zelando por mim
e estaria muito feliz com esse momento ”*

Distinguir o sinal do ruído requer tanto conhecimento científico quanto auto-conhecimento: a sernidade de aceitar coisas que não podemos prever, a coragem de prever o que podemos, e a sabedoria de distinguir ambas.

Nate Silver, O Sinal e o Ruído

Agradecimentos

- Ao meu pai Adão Bachega e a minha irmã Alethéa Assis por sempre me apoiarem.
- Aos meus familiares de São Paulo, especialmente as minhas irmãs Irene, Isis, Eva e Faimah, e a Irene Bachega, que me acolheram e me deram apoio na minha chegada em São Paulo.
- Ao Professor Dr. Elcio Abdalla pela orientação.
- Ao Professor Dr. Elefthelios Papantonopoulos pela colaboração.
- A Dra. Karin Fornazier pelo suporte técnico e moral, ao Dr. André A. Costa por sempre se disponibilizar a ajudar e tirar dúvidas, ao Dr. Vinícius C. Busti por me ensinar a linguagem Python e o código `emcee`, e a Fabrizio F. Bernardi pela parceria, colaboração e discussões.
- Alessandro Marins, Jordany Melo, Willians Ribeiro, Rodrigo Pinheiro, Leonardo Werneck, Priscila Gutierrez, Graciele Oliveira, Wilson Maruyama, Christianne Moraes, Rafael Marcondes, Ricardo Landim e demais colegas do grupo pelas discussões e bons momentos.
- Aos meus amigos da física André Britto, Alysson Morais, Rafael Francisco, Miguel Ferreira, Wallace Elias, Yuber Gonzalez, Gabriela Lichtenstein, Bruno Moreira e Diego S. Pires pela amizade e apoio.
- A Emmanuel Albuquerque, Vinícius T. de Melo, Rodrigo Cunha, Daniel dos Santos, Raphael Zulli, Bruno Crispin, Joe Senjorge, Luiza Wolbert e demais companheiros da República Solar.
- A Carlos Vinícius e Thays Bentes pela amizade e parceria.
- A minha terapeuta Carolina Raquel Perfumo, por cuidar da minha saúde emocional.

- A Universidade Federal do Pará (UFPA) onde fiz minha graduação e a Universidade de São Paulo (USP) em que fiz meu mestrado e doutorado e à todos os professores que contribuíram com a minha formação.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sumário

Introdução	9
1 Cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	19
1.1 Introdução	19
1.2 Equações de campo cosmológicas	20
1.3 Inventário cósmico	22
1.4 Lei de Hubble	24
1.5 Parâmetros cosmológicos	25
1.6 Evolução do fator de escala	27
1.7 Distâncias cósmicas	28
1.7.1 Distância comóvel	29
1.7.2 Distância luminosa	30
1.7.3 Distância diâmetro angular	31
1.8 Volumes na cosmologia de FLRW	31
1.9 Observações de supernovas e o modelo de concordância	33
1.10 Equação de estado da energia escura	34
1.11 Modelos de campo escalar pra energia escura	37
1.11.1 Quintessência	37
1.11.2 K-essência	39
1.12 Modelos de unificação matéria escura/energia escura	41
1.12.1 O Gás de Chaplygin generalizado	41
1.13 Modelos de Interação do Setor Escuro	45
1.13.1 Modelo I: $\Gamma = \xi \rho_{dm}$	47

1.13.2	Modelo II: $\Gamma = \xi \rho_{de}$	48
1.13.3	Modelo III: $\Gamma = \xi(\rho_{dm} + \rho_{de})$	48
2	Teoria das perturbações cosmológicas	50
2.1	Introdução	50
2.2	Perturbações da métrica	51
2.3	Equações de Einstein	53
2.4	Conservação do tensor energia-momento	56
2.4.1	Escalas menores que o raio de Hubble	57
2.4.2	Modelos de unificação matéria escura/energia escura e instabilidades de Jeans	58
2.5	Função de crescimento e razão de crescimento	59
2.6	Função de correlação e espectro de potência	60
2.6.1	Função janela e variância do espectro de potência	64
2.7	Espectro de potência angular da radiação cósmica de fundo	66
2.7.1	Efeito Sachs-Wolfe e efeito Sachs-Wolfe integrado	67
3	Física de Ondas Gravitacionais	70
3.1	Introdução	70
3.2	Relatividade Geral Linearizada	71
3.2.1	Métrica de Campo Fraco	71
3.2.2	Equações de Einstein Linearizadas	72
3.3	Propagação das Ondas Gravitacionais no Vácuo	73
3.4	Interação com massas teste	75
3.4.1	Referencial do Gauge TT	75
3.4.2	Referencial Próprio do Detector	76
3.5	Energia e momento das ondas gravitacionais	79
3.6	Geração de ondas gravitacionais	81
3.6.1	Expansão de multipolos	81
3.6.2	Quadrupolo de massa	83
3.6.3	Radiação de quadrupolo emitida por pares binários	84

3.7 Propagação de ondas gravitacionais em distâncias cosmológicas	88
4 Unificação Matéria Escura/Energia Escura na Teoria de Horndeski	91
4.1 Introdução	91
4.2 Energia escura ou gravitação modificada?	92
4.2.1 Teorias escalar-tensorial	93
4.3 Teoria de Horndeski	96
4.3.1 A Lagrangeana de Horndeski	96
4.3.2 Evolução do background	97
4.3.3 Perturbações lineares	99
4.3.4 Teoria de Horndeski após GW170817	106
4.4 Unificação do setor escuro	108
4.5 O modelo específico	109
4.5.1 Equações de perturbações lineares	114
4.5.2 Funções α e vínculos de GW170807	117
4.5.3 Evolução da perturbações lineares no modelo específico	120
5 Ondas Gravitacionais como Sirenes Padrão	125
5.1 Introdução	125
5.2 Detectores de ondas gravitacionais	127
5.2.1 Funções feixe padrão	127
5.3 A razão sinal-ruído	128
5.3.1 Caracterização do ruído	129
5.3.2 Filtragem combinada	130
5.4 Análise estatística	132
5.4.1 Abordagem Bayesiana vs Abordagem Frequentista	132
5.4.2 Teorema de Bayes	134
5.4.3 Inferência Bayesiana de parâmetros	135
5.4.4 Monte Carlo Markov Chain (MCMC)	137
5.4.5 Matriz de Fisher	139
5.4.6 Erros esperados nas detecções de ondas gravitacionais	140

5.5	Simulação de detecções de ondas gravitacionais	141
5.5.1	Distribuição das fontes	142
5.5.2	Modelo cosmológico fiducial	143
5.5.3	Erros esperados	144
5.6	Outros conjuntos de dados	147
5.6.1	Supernovas tipo Ia (SnIa)	147
5.6.2	Medidas de $H(z)$ por relógios cósmicos	148
5.6.3	Oscilações acústicas de bárions (BAO)	149
5.7	Resultados	150
5.7.1	Modelo I	151
5.7.2	Modelo IIA	153
5.7.3	Modelo IIB	154
5.7.4	Modelo III	156
Considerações Finais		160
A	Equações de perturbação linear do código hi-class	163
B	Derivação do tensor energia-momento para o modelo específico	166

Introdução

No final dos anos 1990 foi descoberto usando as Supernovas tipo Ia (SnIa) que atualmente o universo está passando por um período de expansão acelerada [1, 2]. No contexto da Teoria da Relatividade Geral, esta expansão acelerada só pode ser explicada pela presença de uma nova componente, denominada *energia escura*, que exerceia uma pressão negativa de modo a acelerar a expansão cósmica. A energia escura, junto com a matéria escura, forma o que se chama de *setor escuro*. Este setor escuro, segundo as observações mais recentes, corresponde a mais de 95% do conteúdo total de energia do universo [3]. A conclusão de que a expansão cósmica está passando por um processo de aceleração foi ratificada por outros observáveis como a radiação cósmica de fundo (CMB) [3–5], as oscilações acústicas de bárions (BAO) [6] e as distorções no espaço de redshift (RSD, do inglês *redshift space distortions*) [7].

A real natureza da energia escura é desconhecida, no entanto, o candidato mais simples é a constante cosmológica de Einstein, designada pela letra grega Λ . Um universo dominado por Λ e pela matéria escura fria (CDM, do inglês *Cold Dark Matter*) forma o que se chama de Modelo Λ CDM ou *Modelo de Concordância*. Porém, a identificação da energia escura como uma constante cosmológica apresenta problemas de ordem teórica, a saber: o problema do ajuste fino (a densidade de energia do vácuo calculada pela teoria quântica de campos é 10^{121} ordens de magnitude maior do que a observada) [8], e o problema da coincidência (entender por que a densidade de energia do vácuo e a densidade de energia da matéria possuem a mesma ordem de grandeza justamente hoje)[9]. Outro problema do modelo de concordância é a tensão observational na determinação da constante de Hubble H_0 entre medidas locais e globais. Um panorama atual deste problema e possíveis soluções pode ser encontrado em [10].

Tais problemas motivam a exploração de modelos alternativos, especialmente modelos envolvendo campos escalares dinâmicos como um grau de liberdade extra. Esse campo escalar pode ser introduzido seja como uma nova componente, tais como os modelos de quintessência [11, 12] e k-essência [13, 14], ou como teorias escalar-tensorial de gravitação modificada (Teoria de Brans-Dicke [15], por exemplo).

Outra classe é a dos modelos de unificação do setor escuro. Nessa classe de modelos, se busca descrever com uma única componente tanto a matéria escura quanto a energia escura. O modelo pioneiro nessa abordagem foi o do Gás de Chaplygin Generalizado (GCG) [16, 17], cuja equação de estado evolui como matéria não-pressurizada em tempos antigos ($\omega = 0$) e constante cosmológica no futuro assintótico ($\omega = -1$). Apesar de descrever bem a evolução do *background* homogêneo e isotrópico [18, 19], o GCG apresenta instabilidades no espectro de potências da matéria [20], o que fez com que o entusiasmo em relação ao modelo arrefecesse.

Por fim, temos os modelos de *interação do setor escuro*, em que é proposto um cenário de um setor escuro não trivial em que matéria escura e energia escura trocam energia entre si. Este cenário pode aliviar o problema da coincidência e é compatível com dados observacionais [21–23]. Também é mostrado que a interação no setor escuro pode resolver o problema da tensão em H_0 [24, 25]. Para um artigo de revisão mais completo sobre modelos de interação, ver [26].

Voltando às teorias escalares-tensoriais, temos a *Teoria de Horndeski* [27] que é a teoria com um grau de liberdade escalar mais geral possível cuja Lagrangeana da origem a equações de movimento de segunda ordem nas derivadas. No trabalho de [28], foi proposto um modelo oriundo da Teoria de Horndeski em que o grau de liberdade escalar descreve em uma componente todo o setor escuro. Essa proposta difere de propostas anteriores, em que o grau de liberdade escalar descrevia somente energia escura [29–32], ou somente matéria escura [33]. Neste trabalho, são obtidas a solução das equações de Friedmann no *background* homogêneo e isotrópico, sendo que essa solução evolui com o comportamento esperado de um modelo de unificação do setor escuro. Também é constatado que o modelo está livre de instabilidades do tipo *Ghosts* Laplacianas nas perturbações lineares.

Tamanha variedade de modelos exige testes observacionais cada vez mais precisos em

problema de determinar qual modelo descreve melhor o universo observável. Os observáveis citados anteriormente (SnIa, CMB, BAO, RSD) se utilizam de observações no espectro eletromagnético. No entanto, um tipo diferente de observável proposto originalmente por B. Schutz em 1986 [34] visa utilizar sinais de ondas gravitacionais (GW, do inglês *gravitational waves*) originado por pares binários de estrelas de nêutrons (BNS, do inglês *binary neutron stars*) e estrelas de nêutrons/buracos negros (NSBH, do inglês *neutron stars/black holes*). Do sinal de ondas gravitacionais podemos medir a distância luminosa d_L e da contraparte eletromagnética podemos medir o redshift z da fonte. Dessa forma, é possível construir um diagrama $d_L - z$ e reconstruir a história da expansão cósmica, complementando os observáveis atualmente em uso. Em analogia as SnIa que são consideradas *velas padrão*, as GWs originadas de pares binários podem ser consideradas *sirenes padrão*.

Ondas gravitacionais seriam distorções na curvatura do espaço-tempo provocada pelo movimento acelerado de massas e que provoca variações no comprimento que separa duas partículas teste. Elas foram primeiramente previstas por Albert Einstein em 1916 [35]¹, e os efeitos físicos da passagem de ondas gravitacionais por uma distribuição de massas teste foi primeiramente estudado por Felix A.E. Pirani em 1956 em um artigo intitulado “*On the physical significance of the Riemann tensor*”[37].

As primeiras tentativas de detecção remontam à década de 1960 com o trabalho pioneiro de Joseph Weber que usou como detector uma massa de metal cilíndrica resfriada criogenicamente (figura 1) que deveria registrar vibrações produzidas pela passagem de uma onda gravitacional [38, 39]. Esse tipo de detector é conhecido como *de massa resonante*. Weber alegou ter detectado as ondas em 1969 que seriam emitidas por fontes do centro da via-láctea [40, 41], o que acabou por ser refutado em trabalhos posteriores [42, 43]. A evidência indireta da existência das ondas gravitacionais veio com a descoberta de um pulsar binário (PSR B1913+16) por Joseph Hooten Taylor e Alan Russel Hulse em 1974. O pulsar binário estaria perdendo energia pela emissão de ondas gravitacionais, o que é revelado por um decrescimento no seu período orbital (figura 2). Hulse e Taylor

¹O primeiro a utilizar o termo “onda gravitacional” foi Henri Poincaré em 1905, no entanto em um significado diferente do utilizado hoje [36]

publicaram seus resultados em 1979 [44] e foram laureados com o prêmio Nobel em 1993.

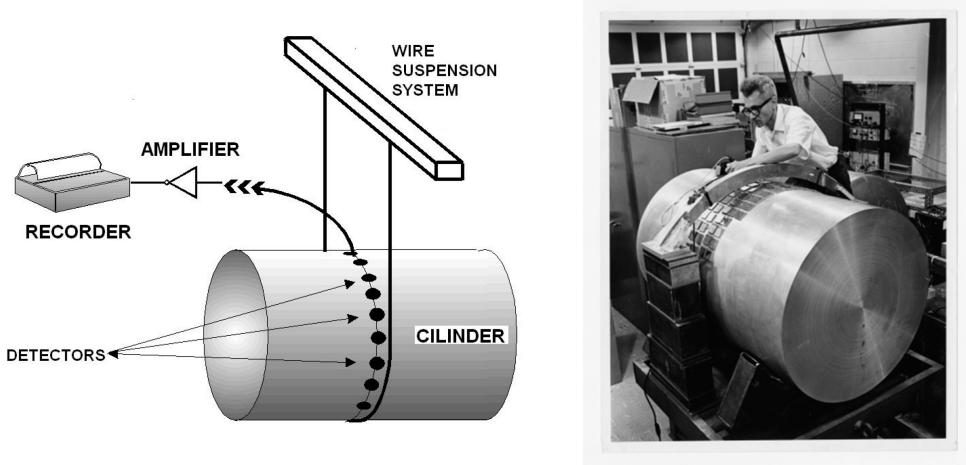


Figura 1: Esquematização do detector cilíndrico e a foto Joseph Weber com o detector. Extraído de [36].

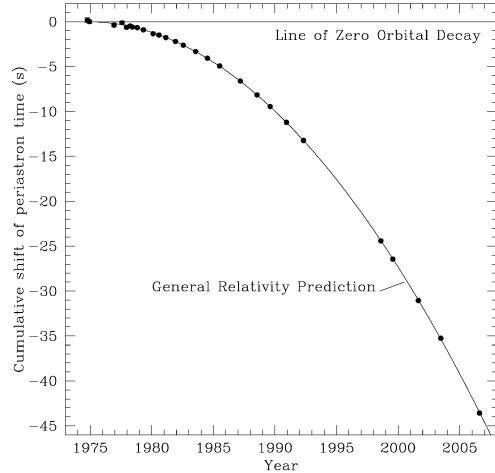


Figura 2: Decaimento orbital do Periastron (ponto de máxima aproximação das estrelas) pelo tempo. A relatividade geral prevê esse decaimento pela perda de energia resultante da emissão de ondas gravitacionais. Extraído de [36].

O anúncio da detecção indireta por Hulse e Taylor renovou o interesse pela detecção direta, agora usando um novo tipo de detector por *interferometria*. Esse conceito busca detectar padrões de interferência devido a passagem de GWs em LASERs que viajam em diferentes braços de um detector em forma de “L” (figura 3). Os primeiros detectores

desse tipo foram concebidos ainda na década de 1970 e começaram a ser construídos na década de 1990. Foram o GEO600 na Alemanha [45], o VIRGO na Itália [46] e o LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) nos EUA [47].

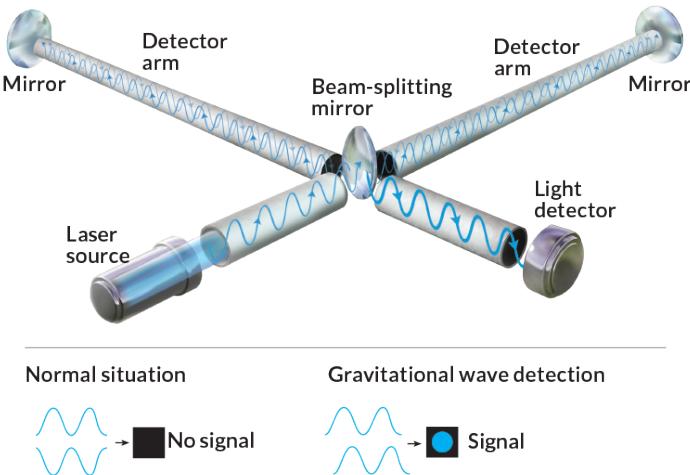


Figura 3: Esquematização de um detector por interferometria. Extraído de <https://www.sciencenewsforstudents.org/article/trio-wins-physics-nobel-detecting-gravity-waves>.

A rede LIGO consiste de dois detectores interferométricos localizados em Hanford (H) no estado de Washington e Livingston (L) no estado da Louisiana. A construção dos dois detectores começou em 1994 e foi finalizada em 1997. Operou entre 2002 e 2010 em seu estágio inicial (iLIGO) e passou por melhorias, voltando a operar em seu estágio avançado (aLIGO) [48] a partir de fevereiro de 2015. No dia 14 de setembro de 2015 ocorreu a primeira detecção de ondas gravitacionais (GW150914) geradas por um par de buracos negros [49] a uma distância de 410^{+160}_{-180} Mpc o que equivale a uma distância de 1.3 bilhões de anos luz e a um redshift de $z = 0.09$. A duração do sinal durou 0.2 segundos (figura 4). A detecção foi anunciada no dia 11 de fevereiro de 2016 e rendeu aos idealizadores do LIGO Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne o prêmio Nobel de física de 2017. Para uma revisão histórica mais completa desde a proposição das ondas gravitacionais por Einstein até a primeira detecção, ver [36, 50].

Houve duas rodadas de observações, a primeira entre 12 de setembro de 2015 a 19 de fevereiro de 2016 (O1) e a segunda entre 30 de novembro de 2016 a 25 de agosto de 2017 (O2). Durante a segunda rodada, o detector VIRGO em seu estágio avançado (aVIRGO)

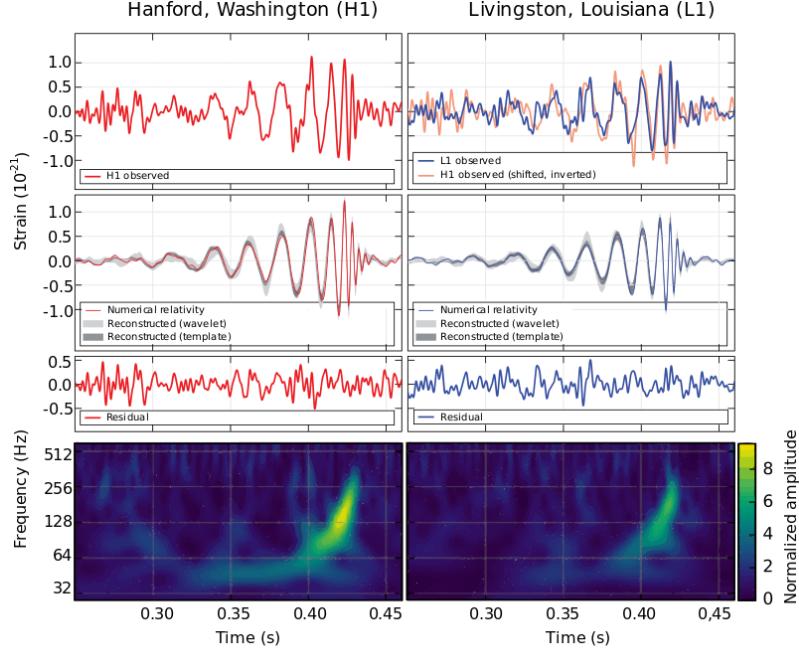


Figura 4: Primeira detecção de ondas gravitacionais pelo LIGO (GW150914) no observatório de Hanford e Livingston, comparado com a previsão teórica da relatividade geral [49].

[51] se juntou a rede de detectores. Nessas duas primeiras rodadas foram detectados 11 eventos, sendo 10 de colisão entre pares de buracos negros (BBH) e um entre pares de estrelas de nêutrons (BNS) [52]² (figura 5).

A detecção de ondas gravitacionais geradas por um binário de estrelas de nêutrons (evento GW170817) no dia 17 de agosto de 2017 e anunciada no dia 16 de outubro de 2017 [53] foi de grande importância, pois foi acompanhada da observação da contraparte eletromagnética no evento GRB170817A (*Gamma-Ray Burst*) [54–57], se tornando assim *a primeira sirene padrão observada*. A fonte foi detectada no redshift $z = 0.008^{+0.002}_{-0.003}$ a uma distância $d_L = 40^{+8}_{-14}$ Mpc na galáxia NGC 4993, o que permitiu determinar a constante de Hubble no valor de $70.0^{+12.0}_{-8.0}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ [58]. O evento GW170817 inaugurou a era da *astrofísica multi-mensageira* [59, 60] que combina sinais de ondas gravitacionais, eletromagnéticas, além de neutrinos e raios cósmicos originados pela mesma fonte astrofísica.

Com o atraso temporal $\Delta t = 1.74 \pm 0.05$ s entre o sinal gravitacional e o eletromagnético

²Atualmente está em curso uma terceira rodada de observações (O3).

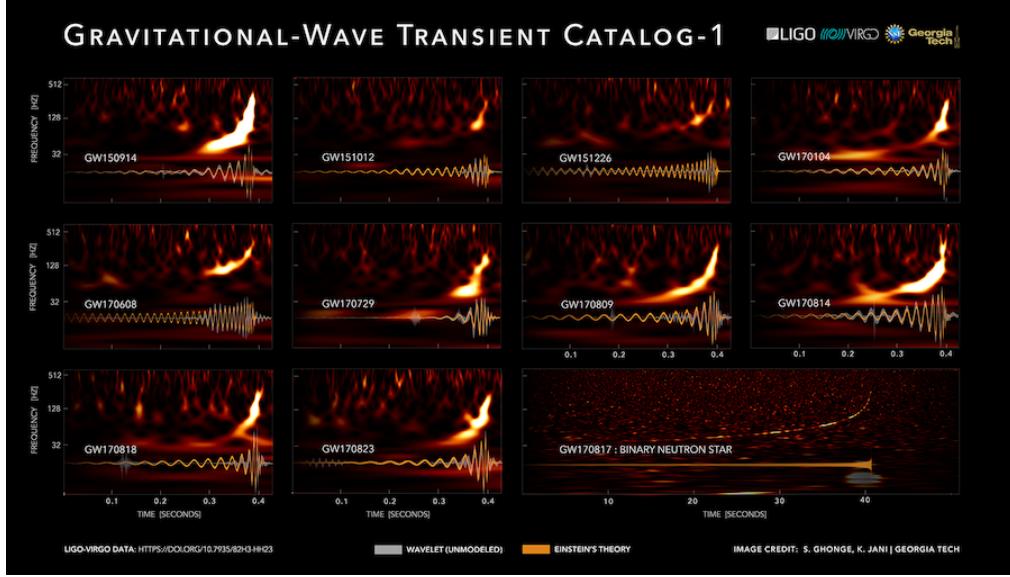


Figura 5: Catálogo de ondas gravitacionais detectadas durante a primeira e segunda rodada de observações pela colaboração LIGO/VIRGO. Extraído de <https://dcc.ligo.org>.

[56], foi possível determinar que a diferença entre a velocidade das ondas gravitacionais c_g e a velocidade da luz c diferem em uma parte em 10^{15} , o que é nulo para todos os efeitos. Esse resultado teve profundas implicações para teorias de gravitação modificada como as do tipo escalar-tensorial mencionadas anteriormente, pois reduziu em muito a viabilidade dessas teorias [61–65]. Aqui entra um breve relato pessoal: na época estava trabalhando no modelo de [28] em colaboração com o professor Eleftherios Papantonopoulos com objetivo de obter e evoluir o modelo no regime de perturbações lineares. No entanto, o modelo foi seriamente afetado pelo vínculo de GW170817 o que o tornou observationalmente inviável. Ainda assim, obtemos o sistema de equações de perturbações lineares e o evoluímos usando o código `hi-class` [66], o que é apresentado nesta tese.

Atualmente estamos na segunda geração de detectores (2G) com o advanced LIGO e o advanced VIRGO. Até o final deste ano de 2019 está previsto para entrar em operação o KAGRA no Japão [67, 68], e o IndIGO [69] uma réplica do LIGO na Índia foi aprovado. A terceira geração (3G) de detectores de solo promete aumentar em 10 vezes a sensibilidade em relação ao aLIGO. Para esta terceira geração, destacam-se o Telescópio Einstein (ET) [70] na Europa e o Cosmic Explorer [71] nos EUA. Mais ambicioso ainda é o LISA (Laser

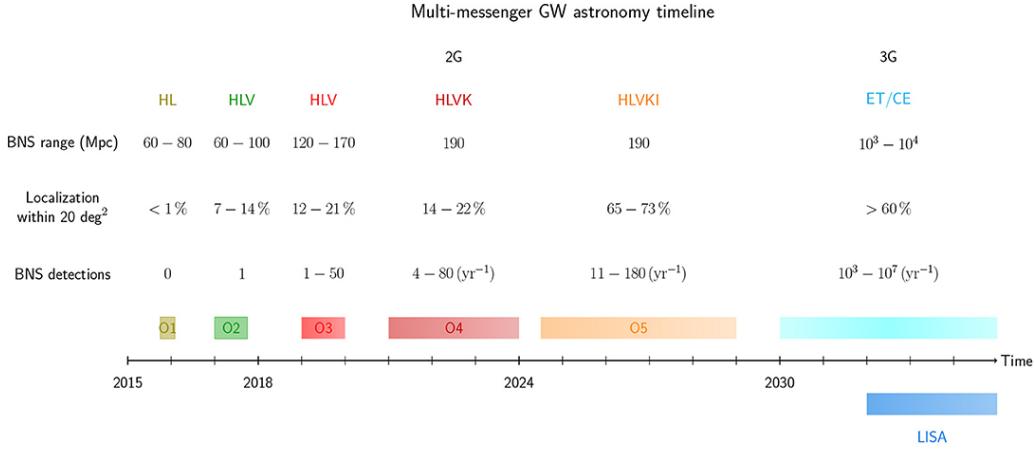


Figura 6: Linha do tempo dos detectores de OG. Os de 2G (H=Hanford, L=Livingston, V=Virgo, K=KAGRA, I=IndIGO) e os de 3G (ET = Telescópio Einstein e CE= Cosmic Explorer e o LISA). Extraído de [59].

Interferometer Space Antenna) [72], uma rede de três detectores no espaço e já aprovado pela Agência Espacial Européia, com previsão para entrar em atividade em 2034. A linha do tempo para os detectores atuais e futuros está apresentada na figura 6.

A eficácia das ondas gravitacionais como sirenes padrão em futuros detectores pode ser atestada por meio de simulações [73–77]. Para o Telescópio Einstein, os trabalhos de [78, 79] simularam de 100 a 1000 detecções com o intuito de estimar o quanto bem as sirenes padrão podem vincular parâmetros do modelo Λ CDM. Outros trabalhos simulando sirenes padrão foram publicados visando vínculos em parâmetros extras como a opacidade cósmica [80], a interação da energia do vácuo [81], ou entre fluidos do setor escuro[82], como réguas cósmicas [83] e para detectar o amortecimento na propagação das ondas [84–87]. Estes trabalhos me motivaram a realizar uma simulação de sirenes padrão que podem ser detectadas pelo ET para modelos de interação do setor escuro. Trabalho este disponível no site arXiv e em processo de submissão para o JCAP (*Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*) [88]. Códigos em linguagem Python utilizados neste trabalho estão disponíveis em <https://github.com/rrhavia/GWStandardSirens>.

O propósito desta tese é apresentar um panorama atual da cosmologia de ondas gravitacionais e aplicações da mesma. Está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 1 farei uma revisão da Cosmologia Padrão de Friedmann-Lemaître-Robert-

son-Walker (FLRW), discutindo a métrica FLRW, as equações de Einstein, a Lei de Hubble e as definições de distâncias e volumes. Também será discutido a equação de estado da energia escura, os modelos de campo escalar dinâmico de quintessência e k-essênciam, o modelo de unificação matéria escura/energia escura do Gás de Chaplygin Generalizado e os modelos fenomenológicos de interação do setor escuro. Esse capítulo foi baseado principalmente na referência [89] e [90], mas também em [91] e [92] e no *review* [93].

No capítulo 2 discutirei a teoria de perturbações lineares em cosmologia. Apresentarei os gauges Síncrono e Newtoniano, as Equações de Einstein perturbadas em primeira ordem nos dois gauges, as condições de estabilidade na evolução das perturbações do fluido de matéria não-pressurizada, assim como a função de correlação, o espectro de potência da matéria, a função de crescimento de estruturas e o espectro de potências angular da radiação cósmica de fundo. Este capítulo foi baseado no artigo de [94], assim como nos referidos livros-texto.

No capítulo 3 será introduzida a física de ondas gravitacionais. A solução de onda das equações de Einstein no regime de campo fraco, os modos de polarização, a deformação em um anel de partículas massivas, as soluções com fontes, o transporte de energia e momento por GW's, as GW's emitidas por pares binários e por fim a propagação de GW's em um espaço-tempo FLRW. Este capítulo é baseado majoritariamente no Livro de M. Maggiore [95] e na tese de T.G.F. Li [96].

No capítulo 4 será discutido as teorias escalar-tensorial, com destaque para a Teoria de Horndeski, tanto a nível de *background* como de perturbação no regime linear (escalares e tensoriais). Será apresentado a parametrização proposta por [97] e a estruturação do código **hi-class** [66], assim como os impactos do evento GW170817 na Teoria de Horndeski. Por fim, será apresentado o modelo desenvolvido em [28] de unificação do setor escuro, a viabilidade do modelo após o evento GW170817 e as soluções para as perturbações escalares.

No capítulo 5 será sobre as ondas gravitacionais como sirenes padrão. Definirei as funções feixe padrão do ET, a razão sinal-ruído, discutirei os métodos estatísticos (baseado em [98]), a análise de erros e a distribuição de fontes. Essas definições são necessárias para a simulação realizada, cujo os resultados são apresentadas nesse capítulo.

Por fim, teremos as considerações finais.

Capítulo 1

Cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

1.1 Introdução

O modelo cosmológico padrão (também chamado *modelo do big bang quente* é baseado na premissa de que o universo é homogêneo e isotrópico, ao menos em largas escalas. Esse é o chamado *princípio cosmológico* ou *princípio de Copérnico*, e é sustentado por várias evidências observacionais, como a radiação cósmica de fundo, que é isotrópica em uma parte em 10^5 . No *background* cosmológico nós podemos calcular a taxa de expansão, distâncias, idade do universo, contagem numérica de galáxias e abundâncias primordiais de elementos leves. Porém, se o universo fosse perfeitamente homogêneo e isotrópico, nós não teríamos estruturas como galáxias, estrelas e planetas. Portanto, nós temos que admitir inomogeneidades, as quais podem ser consideradas como pequenas perturbações do universo homogêneo. Nesse capítulo, nós abordaremos as ferramentas para entender a história de expansão do universo, como a função de Hubble e as distâncias cósmicas, que são importantes para testar diferentes modelos cosmológicos.

1.2 Equações de campo cosmológicas

As equações de Einstein para a Relatividade Geral são

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} , \quad (1.1)$$

em que Λ é a constante cosmológica. Essas equações nos dizem que o conteúdo de matéria-energia determina a curvatura do espaço-tempo. O lado esquerdo das equações representa a parte geométrica (descrita pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$), e no lado direito das equações temos o tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$, que descreve o conteúdo de matéria-energia. As constantes G e c são a constante Newtoniana da gravitação e a velocidade da luz¹, respectivamente. O objeto matemático que descreve o espaço-tempo é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, o qual é relacionado com o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (1.2)$$

O elemento de linha que descreve um espaço-tempo quadridimensional homogêneo e isotrópico é chamado elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (1.3)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala que depende unicamente do tempo cosmológico t , e k é a curvatura espacial, que pode assumir valores de $-1, 0$ e 1 , dependendo se a seção espacial tem curvatura negativa, nula ou positiva, respectivamente. Nós podemos reescrever o elemento de linha 1.3 mudando a variável $r = \sin \chi$ se $k = 1$, $r = \chi$ se $k = 0$ e $r = \sinh \chi$ se $k = -1$, e obter

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] , \quad (1.4)$$

em que (χ, θ, ϕ) são as coordenadas comoveis. A função $S(\chi)$ é dada por

$$S(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{para } k = 1 , \\ \chi & \text{para } k = 0 , \\ \sinh \chi & \text{para } k = -1 . \end{cases} \quad (1.5)$$

¹Adotaremos $c = 1$

A função $S(\chi)$ pode ser escrita de uma forma unificada:

$$S(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) . \quad (1.6)$$

Usando a métrica na forma original (1.3), nós podemos calcular as componentes do símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma,\lambda} + g_{\lambda\sigma,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) , \quad (1.7)$$

em que $g_{\nu\lambda,\sigma} \equiv \partial g_{\nu\lambda}/\partial x^\sigma \equiv \partial_\sigma g_{\nu\lambda}$. Após isso, precisamos do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta , \quad (1.8)$$

do escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (1.9)$$

e finalmente, o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R . \quad (1.10)$$

No lado direito de (1.1) adotamos o tensor Energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}) , \quad (1.11)$$

em que ρ é a densidade de energia do fluido, P é a pressão e $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade do fluido. Por causa da isotropia, precisamos somente das componentes diagonais das equações de Einstein. Existem somente duas componentes independentes (“00” e “11”), logo, nós teremos somente duas equações de campo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{1}{3}\Lambda , \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - \frac{k}{a^2} . \quad (1.13)$$

Essas equações diferenciais determinam a evolução do fator de escala $a(t)$, e são conhecidas como *equações de Friedmann-Lemaître*. Se $\Lambda = 0$, teremos uma expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$) se $P < \rho/3$.

1.3 Inventário cósmico

Dada a conservação do tensor Energia-Momento $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$, podemos escrever a equação da continuidade para (1.11) como

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad , \quad (1.14)$$

expressando a conservação da energia. Na cosmologia, é usual considerar um *fluido barotrópico* em que a densidade de energia e a pressão estão relacionadas por uma equação de estado do tipo

$$P = \omega\rho \quad , \quad (1.15)$$

em que ω é o *Parâmetro da Equação de Estado* (EoS). Logo, (1.14) tem a forma

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\rho = 0 \quad , \quad (1.16)$$

com a solução

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad . \quad (1.17)$$

O conteúdo do universo é uma mistura de diferentes componentes. Podemos classificar esse componentes como

- **Matéria** Refere-se como “matéria” todas as componentes para as quais a pressão é muito menor que a densidade de energia, i.e., $|P| \ll \rho$. Esse é o caso de um gás de partículas não-relativísticas (chamadas de “poeira”). Fazendo $P = 0$ em (1.15) obtemos

$$\rho \propto a^{-3} \quad , \quad (1.18)$$

que simplesmente reflete a expansão do volume. Existem dois tipos de matéria:

- **Barions:** A matéria bariônica consiste em prótons, nêutrons e elétrons².
- **Matéria Escura Fria (CDM, do inglês *Cold Dark Matter*):** Maior parte da matéria no universo está na forma da invisível matéria escura. A real natureza da CDM é desconhecida.

²Elétrons são léptons, mas suas massas são insignificantes se comparadas com neutrons e prótons.

- **Radiação** Esta componente consiste de partículas relativísticas, cuja densidade de energia é dominada pela energia cinética (i.e. o momento é muito maior que a massa). Radiação tem uma equação de estado $P = \frac{1}{3}\rho$, então, (1.14) implica

$$\rho \propto a^{-4} . \quad (1.19)$$

Existem dois tipos de radiação

- **Fótons:** Partículas não-massivas, fótons dominaram o universo jovem até o desacoplamento com os bárions. Atualmente detectamos esses fótons na forma da radiação cósmica de fundo.
- **Neutrinos:** Existem três sabores de neutrinos (neutrino do elétron ν_e , neutrino do mísion ν_μ e neutrino do tau ν_τ), que tem massas de repouso muito pequenas, porém, não nulas.
- **Energia Escura (DE, do inglês *Dark Energy*)** O universo atualmente parece estar dominado por uma componente misteriosa com pressão negativa $P = -\rho$. Particularmente, de (1.14), encontramos que a densidade de energia escura, i.e., a densidade de energia escura não dilui à medida que o universo expande. Os principais candidatos a energia escura são

- **Energia do vácuo:** O tensor energia-momento do vácuo é

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} , \quad (1.20)$$

em que Λ é a constante cosmológica de Einstein. Temos então uma densidade de energia do vácuo $\rho_{vac} = \Lambda/8\pi G$ e uma pressão do vácuo $P_{vac} = -\Lambda/8\pi G$, logo $\rho_{vac} = -P_{vac}$.

- **Campos escalares dinâmicos:** Existem muitos modelos, como os *modelos de quintessência e k-essência* que consideram DE como um campo escalar dinâmico.

1.4 Lei de Hubble

Primeiramente, definiremos o *redshift* cosmológico

$$z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \quad , \quad (1.21)$$

que mede como a evolução do fator de escala afeta o comprimento de onda λ de um fóton viajante com respeito ao comprimento de onda de repouso λ_0 . Se o universo está se expandindo, o fóton sofre um desvio para o vermelho por uma quantidade z . Por outro lado, se o universo estiver se contraindo o fóton sofrerá um desvio para o azul. Somente se o universo for estático, não haverá nenhum desvio na frequência. Definiremos o fator de escala no tempo presente a_0 como igual a 1.

Em 1929, Edwin Hubble e Vesto Slipher descobriram que fótons emitidos por galáxias distantes sofrem desvio para o vermelho [99]. Esse resultado implica que galáxias distantes estão se afastando de nós, e consequentemente, que o universo está sofrendo uma expansão. Em um universo em expansão, a distância física \mathbf{r} de um observador (na origem) para um objeto é dada por $\mathbf{r} = a(t)\chi$, em que χ denota a distância comóvel. Para objetos se movendo com o fluxo de Hubble, a distância comóvel permanece constante. Tomando as derivadas da distância física com respeito a t , temos a velocidade com respeito ao observador

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\chi = H(t)\mathbf{r} \quad , \quad (1.22)$$

em que o *Parâmetro de Hubble* é definido como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad . \quad (1.23)$$

Denotamos o parâmetro de Hubble hoje como $H_0 \equiv H(t_0)$, a *constante de Hubble*³. Para objetos em $z \ll 1$, temos a famosa *lei de Hubble*

$$v \simeq H_0 r \quad , \quad (1.24)$$

a qual nos diz que a relação entre a velocidade de resseção das galáxias v e suas respectivas distâncias r é linear para baixos redshifts.

³Trabalhos mais recentes tem adotado a nomenclatura Hubble-Lemaître.

A constante de Hubble H_0 possui unidade de inverso de tempo. A determinação da prdem de grandeza da idade do universo depende a medida do *tempo de Hubble* $t_H = H_0^{-1}$. Hoje, o valor da constante de Hubble é muito bem conhecido, mas temos uma tensão entre medidas locais e medidas globais⁴. A medida local em Riess et al. [100] nos dá

$$H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} , \quad (1.25)$$

em um intervalo de confiança de 68%. Por outro lado, a determinação global de H_0 derivada de dados da radiação cósmica de fundo pela colaboração Planck [3] nos dá

$$H_0 = 67.31 \pm 0.96 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} . \quad (1.26)$$

Podemos ver que existe uma grande tensão entre essas duas determinações do valor de H_0 . Ver figura (1.1) para o atual estado das tensões nas medidas de H_0 . É comum expressar H_0 em termos da *constante de Hubble reduzida* h . Dessa forma, o valor medido por [100] se torna

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (1.27)$$

com

$$h = 0.74 \pm 0.01 . \quad (1.28)$$

Também é conveniente introduzir a *densidade crítica* hoje

$$\rho_{\text{crit},0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} , \quad (1.29)$$

que representa a densidade necessária para que o universo tenha uma geometria plana.

1.5 Parâmetros cosmológicos

Para conhecer a evolução do fator de escala, precisamos conhecer os parâmetros cosmológicos no background. Um deles é a constante de Hubble H_0 . Precisamos conhecer a densidade de matéria hoje $\rho_{m,0}$, a densidade de radiação hoje $\rho_{r,0}$ e a densidade de energia escura hoje $\rho_{de,0}$. É comum expressar essas quantidades em uma forma normalizada,

⁴Essas medidas globais assumem o modelo ΛCDM , portanto, são dependentes de modelo

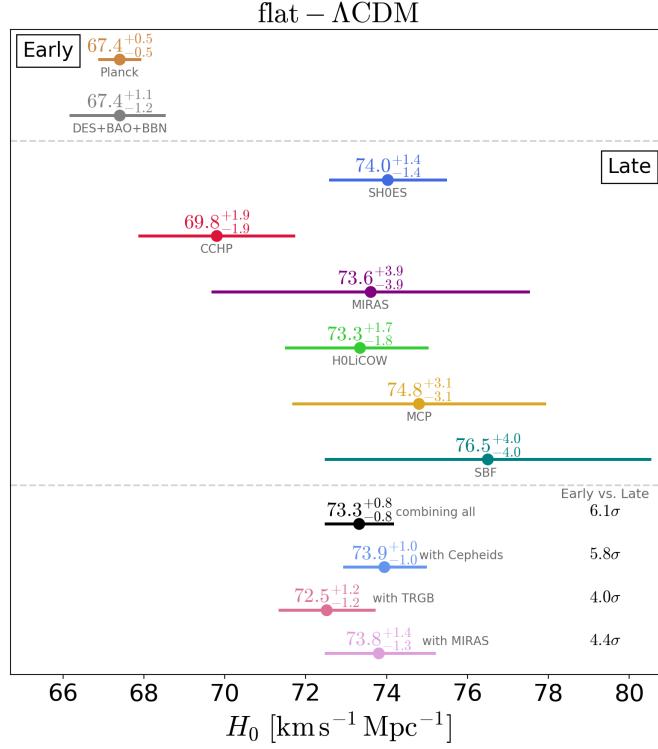


Figura 1.1: Panorama atual da tensão entre medidas de H_0 em universo jovem (*Early*) e universo tardio (*Late*). Imagem extraída de [10].

dividindo-as pela densidade crítica hoje. Portanto, definimos

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\text{crit}}(t)} = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t) \quad , \quad (1.30)$$

em que o índice i representa um dos três componentes. Para descrever o modelo Λ CDM (constante cosmológica + matéria escura fria) no background, precisamos conhecer os valores de H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$. O grande objetivo da cosmologia observational é medir com cada vez mais precisão esses parâmetros. As medidas mais recentes feitas pelo satélite Planck [3] nos dão

$$\Omega_{m,0} = 0.315 \pm 0.013, \quad \Omega_{r,0} = 5 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.685 \pm 0.013 \quad . \quad (1.31)$$

O valor das *densidades físicas* ($\Omega_{i,0}h^2$) de bárions e matéria escura fria são respectivamente

$$\Omega_{b,0}h^2 = 0.02222 \pm 0.00023, \quad \Omega_{dm,0}h^2 = 0.1197 \pm 0.0022 \quad , \quad (1.32)$$

em que podemos notar que apenas um sexto do conteúdo total de matéria é composto por bárions. Podemos expressar a equação de Friedmann (1.13) em termos das densidades normalizadas como

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{k}{H^2 a^2} \quad , \quad (1.33)$$

em que podemos definir a *densidade de curvatura*

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{H^2(t)a^2(t)} \quad , \quad (1.34)$$

e pra qualquer valor de tempo cósmico, a equação abaixo é válida

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad . \quad (1.35)$$

A equação (1.35) determina a curvatura em termos da densidade total:

- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial negativa ($k = -1$) \Leftrightarrow “aberto”,
- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial nula ($k = 0$) \Leftrightarrow “plano”,
- $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow$ curvatura espacial positiva ($k = 1$) \Leftrightarrow “fechado”.

1.6 Evolução do fator de escala

Podemos reescrever a equação (1.13) em termo dos parâmetros cosmológicos. Lembrando que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\sum_i \rho_i \right) - \frac{k}{a^2} \quad ,$$

e dividindo a equação acima por $\rho_{crit,0} = 3H_0^2/8\pi G$, encontramos

$$H^2(a) = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2}) \quad . \quad (1.36)$$

Para um universo plano ($\Omega_k = 0$), podemos summarizar as soluções para um universo dominado pela radiação (RD), universo dominado pela matéria (MD) e um universo dominado pelo vácuo (ΛD) na tabela (1.1).

Podemos comparar essas soluções no plot da figura (1.2). Podemos ver que a energia do vácuo só se torna a componente dominante em tempos muito recentes, muito próximo

	ω	$\rho(a)$	$a(t)$
RD	1/3	a^{-4}	$t^{1/2}$
MD	0	a^{-3}	$t^{2/3}$
AD	-1	a^0	e^{Ht}

Tabela 1.1: Soluções de FLRW para um universo plano com uma única componente.

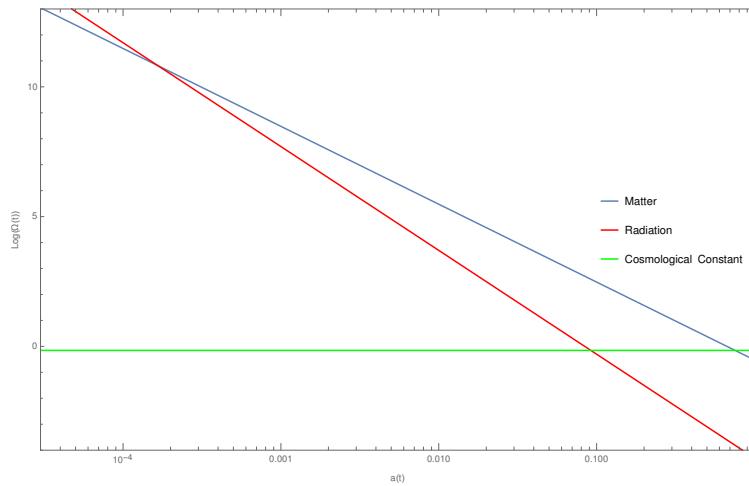


Figura 1.2: Evolução das densidades de energia no universo.

de hoje ($a = 1$), e hoje, a densidade de matéria e a densidade de energia do vácuo possuem a mesma ordem de magnitude. Como podemos ver, a energia do vácuo permaneceu constante durante toda a história do universo, enquanto a densidade de matéria declinou. No entanto, elas possuem a mesma ordem de magnitude justamente hoje! Esse é o chamado *problema da coincidência*, cujo os modelos de interação entre matéria escura e energia escura visam resolver ou pelo menos aliviar.

1.7 Distâncias cósmicas

Medir distâncias em um universo em expansão pode ser confuso. Quando vemos um objeto como uma galáxia, por exemplo, recebemos a luz emitida pela galáxia quando o universo era mais jovem, por que a luz viaja a uma velocidade finita c . E, enquanto a luz viaja da fonte emissora para o observador (no caso, nós), o universo continua se

expandindo. Deste modo, quando olhamos para objetos distantes, vemos eles como eles eram antigamente, em uma época que as distâncias próprias eram menores. Portanto, quando nos referimos a “distância” de uma galáxia, devemos especificar o que queremos dizer como “distância”. Na cosmologia, temos três tipos de distância: a *distância comóvel* ou *distância própria*, a *distância luminosa* e a *distância diâmetro angular*.

1.7.1 Distância comóvel

A distância comóvel é a distância percorrida por um fóton entre a fonte emissora e o receptor, no caso, nós. Um fóton viajando ao longo da direção χ segue a trajetória nula $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)d\chi^2 = 0$. O fóton emitido pela fonte em uma coordenada comóvel χ_e em um tempo cosmológico t_e (redshift z) chega ao observador no tempo presente t_0 com $\chi = 0$ (correspondendo a $z = 0$). Deste modo, podemos definir a distância comóvel d_c como

$$d_c \equiv \chi_1 = \int_0^{\chi_e} d\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} . \quad (1.37)$$

Podemos mudar a variável de integração do tempo cosmológico t para o redshift z usando a relação $1/a(t) = 1+z$ e $dt = -dz/(1+z)H(z)$ e reescrever (1.37) como

$$d_c = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} , \quad (1.38)$$

em que $E(z) \equiv H(z)/H_0$.

Se considerarmos a distância que a luz pode viajar desde $t = 0$, obtemos o *tempo conforme*

$$\eta = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} . \quad (1.39)$$

Podemos pensar em η como um *horizonte comóvel* por que regiões separadas por distâncias maiores que η não estão casualmente conectadas.

A distância comóvel não é uma maneira prática de medir distâncias em cosmologia, então, precisamos de definições operacionais de distância como a distância luminosa e a distância diâmetro angular.

1.7.2 Distância luminosa

Em um espaço-tempo de Minkowski, a luminosidade absoluta L_s de uma fonte emisora e o fluxo de energia \mathcal{F} recebido a uma dada distância d da fonte são relacionados pela expressão $\mathcal{F} = L_s / 4\pi d^2$. Podemos generalizar essa expressão para um universo em expansão, logo, definimos a distância luminosa como

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}} . \quad (1.40)$$

Considere uma fonte com luminosidade absoluta L_s em uma coordenada comóvel χ_s e um observador em $\chi = 0$. A energia emitida pela fonte em um intervalo de tempo Δt_1 é ΔE_1 , enquanto que a energia que chega a esfera de raio χ_s é ΔE_0 . A luminosidade absoluta e relativa L_s e L_0 são dadas respectivamente por

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} , \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} . \quad (1.41)$$

Relembrando que a energia de uma onda eletromagnética é proporcional a sua frequência $\Delta E \propto \nu$ e as frequências são relacionadas com o comprimento de onda por $\nu = c\lambda$. Portanto, a razão entre ΔE_1 e ΔE_0 é

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z , \quad (1.42)$$

e relembrando que $\nu_0 \Delta t_0 = \nu_1 \Delta t_1$, temos $\Delta t_0 / \Delta t_1 = 1 + z$. Portanto, usando (1.41) obtemos

$$L_s = L_0(1 + z)^2 . \quad (1.43)$$

O fluxo \mathcal{F} é definido por $\mathcal{F} = L_0 / A_S$, em que $A_S = 4\pi(a_0 S(\chi_s))$ é a área da esfera em $z = 0$. Sendo assim, a distância luminosa (1.40) é dada por

$$d_L = a_0 S(\chi_s)(1 + z) . \quad (1.44)$$

Usando as expressões (1.6) e (1.38), podemos escrever d_L como

$$d_L = \frac{c(1 + z)}{H_0 \sqrt{\Omega_{k,0}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) . \quad (1.45)$$

No caso plano, (1.45) se reduz a

$$d_L = \frac{c(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} . \quad (1.46)$$

Podemos ver que a distância luminosa é diretamente relacionada com a taxa de expansão do universo.

1.7.3 Distância diâmetro angular

Outra importante medida de distância é baseada na noção da existência de “réguas padrão”, i.e., objetos com comprimento físico D conhecido. No espaço euclidiano, se o objeto está a uma distância d , subentende-se um diâmetro angular $\Delta\theta = D/d$. Em uma geometria de FLRW, podemos definir a distância diâmetro angular em termos do diâmetro próprio do objeto como

$$d_A \equiv \frac{D}{\Delta\theta} . \quad (1.47)$$

Desde que a fonte está na superfície de uma esfera de raio χ com o observador no seu centro, o diâmetro próprio D no tempo de emissão t_e em uma geometria de FLRW é dado por

$$D = a(t_e)S(\chi)\Delta\theta . \quad (1.48)$$

Portanto, substituindo (1.48) em (1.47), temos

$$d_A = a(t_e)S(\chi) = a_0 \frac{a(t_e)}{a_0} S(\chi) = \frac{1}{1+z} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_{k,0}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right) . \quad (1.49)$$

A razão entre d_L (1.45) e d_A (1.49) é

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2} . \quad (1.50)$$

A razão (1.50) é válida além da métrica FLRW. É válido para qualquer métrica em que o fluxo é conservado [89]. Fig. (1.3) mostra a dependência com o redshift dessas três medidas de distância para um universo dominado pela radiação e para um universo dominado pela energia escura.

1.8 Volumes na cosmologia de FLRW

Além de definir distâncias, é necessário a definição de volumes tri-dimensionais na geometria FLRW. Considerando o elemento de linha (1.4), o *volume comóvel* infinitesimal seria aquele delimitado por um intervalo $\xi \rightarrow \chi + d\chi$ e um elemento de ângulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$

$$dV_c = S^2(\chi) d\chi d\Omega . \quad (1.51)$$

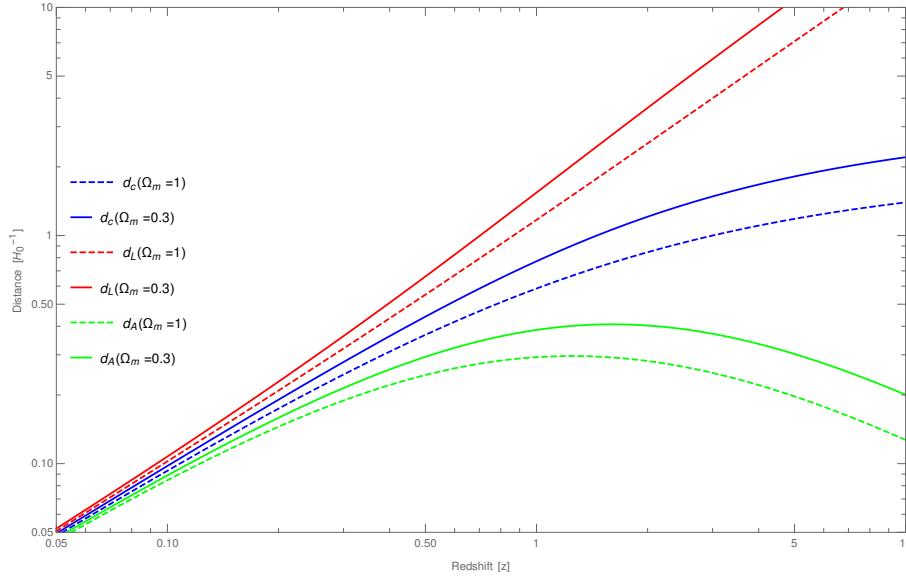


Figura 1.3: Medidas de distância, com universo somente com matéria (linhas pontilhadas) e com 70% de Energia Escura (linhas sólidas). Em um universo dominado pela Energia Escura, distâncias em um redshift fixo são maiores que em um universo dominado pela matéria.

Podemos substituir o elemento $d\chi$ por uma variação infinitesimal no redshift dz usando (1.37) e (1.38) obtendo $\frac{d\chi}{dz} = \frac{c}{H(z)}$, o que resulta em um elemento de volume

$$dV_c = \frac{c S^2(\chi)}{H(z)} dz d\Omega . \quad (1.52)$$

Ao considerarmos o termo de expansão $a(t) = (1+z)^{-1}$, teremos o elemento de *volume físico*

$$dV_{\text{phys}}(z) = \frac{dV_c}{(1+z)^3} = \frac{c S^2(\chi)}{(1+z)^3 H(z)} dz d\Omega . \quad (1.53)$$

A aplicação mais comum para a expressão (1.53) acima é na contagem do número de galáxias. Suponhamos que em uma dada região exista uma densidade numérica de galáxias $n(z)$, então o número total de galáxias é obtido ao integrarmos $dN = n(z) dV_{\text{phys}}$. Se o número de galáxias é conservado naquela região, então a densidade numérica cai com $a(t)^{-3}$, o que implica que $n(z) = n_0(1+z)^3$, em que n_0 é a densidade numérica de galáxias hoje. Sendo assim, o número total de galáxias é dado ao integrarmos de $z = 0$ até um redshift de formação z_f

$$N = 4\pi c n_0 \int_0^{z_f} \frac{S^2(\chi(z))}{H(z)} dz . \quad (1.54)$$

Portanto, a contagem de galáxias é um observável que pode ser utilizado para investigar a história de expansão do universo.

1.9 Observações de supernovas e o modelo de concordância

A explosão de uma supernova é um evento extremamente luminoso e causa uma grande emissão de radiação. As supernovas podem ser classificadas de acordo com as linhas de absorção de elementos químicos. Se o espectro de uma supernova inclui uma linha espectral de hidrogênio, a supernova é classificada como Tipo II. Caso contrário, é classificada como Tipo I. Existem três tipos de supernova de Tipo I:

- Tipo Ia: A supernova contém uma única linha de absorção de silício;
- Tipo Ib: A supernova contém uma linha de hélio;
- Tipo Ic: A supernova carece tanto de linhas de silício quanto de hélio.

A explosão de uma supernova Tipo Ia ocorre quando a massa de uma anã branca em um sistema binário excede o limite de Chandrasekar absorvendo gás da estrela companheira. Desde que a magnitude absoluta da supernova Tipo Ia é constante no pico de luminosidade, a SN Ia funciona como uma espécie de “vela padrão” para a qual a distância luminosa pode ser medida.

Para medir a distância luminosa, definimos o fluxo de energia \mathcal{F} e a luminosidade absoluta L_S em escala logarítmica. O fluxo de energia é expresso em termos da *magnitude bolométrica aparente* m

$$\mathcal{F} = 10^{-2m/5} \times 2.52 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} , \quad (1.55)$$

enquanto a *magnitude bolométrica absoluta* M é definida como a magnitude aparente hipotética do objeto a uma distância padrão de 10 pc. A magnitude bolométrica absoluta é dada por

$$L_S = 10^{-2M/5} \times 3.02 \times 10^{35} \text{ erg s}^{-1} . \quad (1.56)$$

Deste modo, o *módulo da distância* $m - M$ pode ser expresso como

$$d_L = 10^{1+(m-M)/5} \text{ pc} , \quad (1.57)$$

e reescrito como

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25 . \quad (1.58)$$

Primeiramente, tomaremos algumas supernovas em baixo redshift ($z \ll 1$) para as quais poderemos usar a aproximação $d_L(z) \simeq cz/H_0$. Considere as seguintes supernovas: 1992P com $z = 0.026$ e $m = 16.08$; 1990O em $z = 0.03$ e $m = 16.26$; 1992bg com $z = 0.036$ e $m = 16.66$. Usando a expressão para distância luminososa em baixos redshifts e a magnitude aparente em (1.58), podemos obter suas magnitudes absolutas $M = -19.09$, $M = -19.29$ and $M = -19.28$ [2], em que $H_0^{-1} = 2998h^{-1}\text{Mpc}$ com $h = 0.72$. Com isso, o valor da magnitude absoluta para SnIa é $M \simeq -19$ e generalizamos esse valor para SN Ia em altos redshifts.

Em 1998 Adam Riess *et al.* [High-redshift Supernova Team (HSST)] [1] e Saul Perlmutter *et al.* [2] independentemente reportaram a descoberta aceleração cósmica recente a partir da observação de supernovas distantes. Após 1998 Riess *et al.* descobriu 16 SN Ia em altos redshifts, além de 34 supernovas próximas, enquanto Perlmutter *et al.* encontrou 42 supernovas no intervalo de redshift $z = 0.18 - 0.83$. Assumindo um universo plano, Perlmutter *et al.* encontrou $\Omega_{m,0} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$ (1σ estatístico) $_{-0.04}^{+0.05}$ (sistêmático) mostrando que cerca de 70% do conteúdo de matéria-energia do universo corresponde a energia escura. Combinando os dados de SN Ia do catálogo Union2.1 [101] com medidas de CMB do satélite Planck [3] e Oscilações Acústicas de Bárions (BAO), a densidade de curvatura é vinculada em $\Omega_{k,0} = 0.0008_{-0.0039}^{+0.0040}$. Como podemos ver, a densidade de curvatura é vinculada muito próxima do universo plano. A premissa de que vivemos em um universo dominado por uma constante cosmológica com $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$ e $\omega = -1$ é chamado *modelo de concordância* (fig. 1.4) ou modelo Λ CDM.

1.10 Equação de estado da energia escura

O modelo Λ CDM considera a equação de estado da energia escura (EoS) como $\omega_{de} = -1$. Em um caso mais geral, a EoS pode variar, sendo ω_{de} uma função livre. Podemos

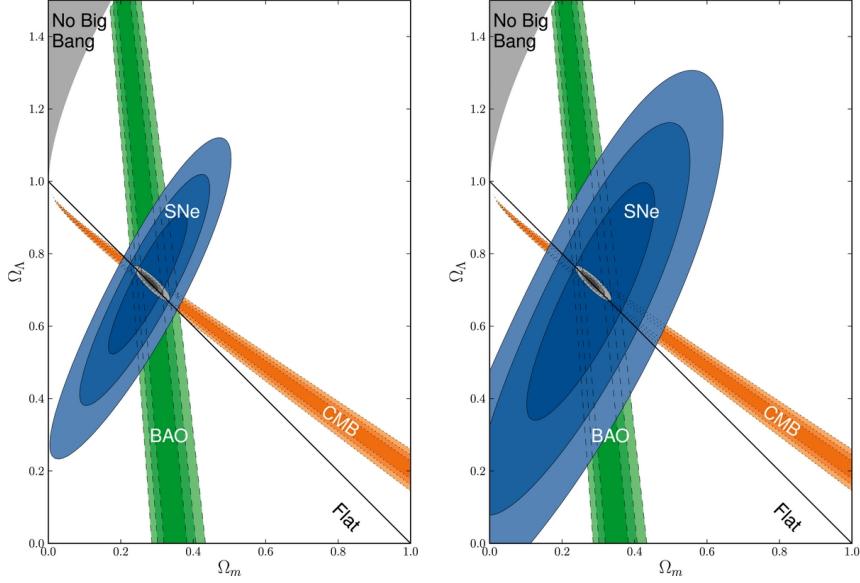


Figura 1.4: Modelo ΛCDM : 1σ , 2σ e 3σ no $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ plano para SN Ia combinadas com vínculos de BAO e CMB. O lado esquerdo mostra regiões de confiança de SN Ia somente com os erros estatísticos, enquanto o lado direito mostra regiões de confiança de SN Ia com erros estatísticos e sistemáticos. Imagem extraída de [101].

resolver a equação da continuidade (1.14) e obter

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} \exp \left[\int_0^z \frac{3(1 + \omega_{de}(z'))}{1 + z'} dz' \right] . \quad (1.59)$$

Podemos também escrever $E(z) = H(z)/H_0$ com a equação (1.36) para esse caso mais genérico como

$$E^2(z) = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0} \exp \left[\int_0^z \frac{3(1 + \omega_{DE}(z'))}{1 + z'} dz' \right] + \Omega_{k,0}(1+z)^2 . \quad (1.60)$$

Diferenciando essa equação com respeito a z , encontramos que a EoS da energia escura pode ser expressa como

$$\omega_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2}{3[E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{k,0}(1+z)^2]} , \quad (1.61)$$

em que a vírgula representa derivada com respeito a z . Da Eq. (1.45) a função $E(z)$ pode ser escrita em termos de d_L :

$$E^2(z) = \frac{(1+z)^2[c^2(1+z)^2 + \Omega_{k,0}H_0^2d_L(z)^2]}{[(1+z)H_0d_L(z) - H_0d_L(z)^2]^2} . \quad (1.62)$$

Para um universo plano ($\Omega_{k,0} = 0$) essa relação se reduz a

$$E(z) = \frac{1}{H_0} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1}. \quad (1.63)$$

Pela medida da distância luminosa $d_L(z)$, podemos determinar a evolução de $E(z)$ da Eq. (1.62) e portanto $\omega_{de}(z)$ da Eq. (1.61). Considerando que a densidade de energia da radiação é desprezível em comparação com a densidade de energia da matéria não-relativística e da energia escura em $z \lesssim \mathcal{O}(1)$ e $\Omega_{k,0} \simeq 0$, a Eq. (1.61) se reduz a

$$\omega_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E^2(z)}{3[E^2(z) - \Omega_{m,0}(1+z)^3]} . \quad (1.64)$$

A extensão mais simples do modelo ΛCDM plano é considerar ω como um parâmetro livre, que caracteriza o modelo ωCDM plano. Esse modelo possui três parâmetros livres no background ($\Omega_{m,0}$, H_0 , ω) e a função de Hubble é dada por

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega)}} . \quad (1.65)$$

Na fig.(1.5) podemos ver os contornos de confiança 1σ , 2σ e 3σ para o plano ($\Omega_{m,0}$ - ω). Podemos ver que os contornos são consistentes com o modelo ΛCDM , i.e, com $\omega = -1$. O valor mais vinculado pelo satélite Planck [5] para a EoS da energia escura em um intervalo de confiança de 95% é $\omega = -1.028 \pm 0.032$.

Se $\omega_{de} < -1$, podemos dizer que a energia escura tem uma EoS do tipo *phantom* [102]. Nesse caso, podemos ver que o parâmetro de Hubble e o escalar de curvatura R divergem em um tempo finito futuro t_{rip} , implicando que o universo irá acabar com uma singularidade futura em um tempo finito. Esta singularidade é chamada de singularidade do *big-rip*.

Podemos considerar $\omega_{de} = \omega_{de}(z)$, com a equação de estado da energia escura evoluindo pela parametrização CPL, de Chevallier e Polarski [103] e Linder [104], na qual a evolução da EoS da energia escura segue

$$\omega_{de}(z) = \omega_0 + \omega_1(1-a) = \omega_0 + \omega_1 \left(\frac{z}{1+z} \right) , \quad (1.66)$$

que se comporta como $\omega_{de}(z) = \omega_0 + \omega_1$ para $z \rightarrow \infty$ e $\omega_{de}(z) \rightarrow \omega_0$ para $z \rightarrow 0$. Substituindo (1.66) em (1.59), temos

$$\rho_{de}(z) = \rho_{de,0}(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp \left(\frac{3\omega_1 z}{1+z} \right) , \quad (1.67)$$

que nos dá a evolução da densidade de energia escura.

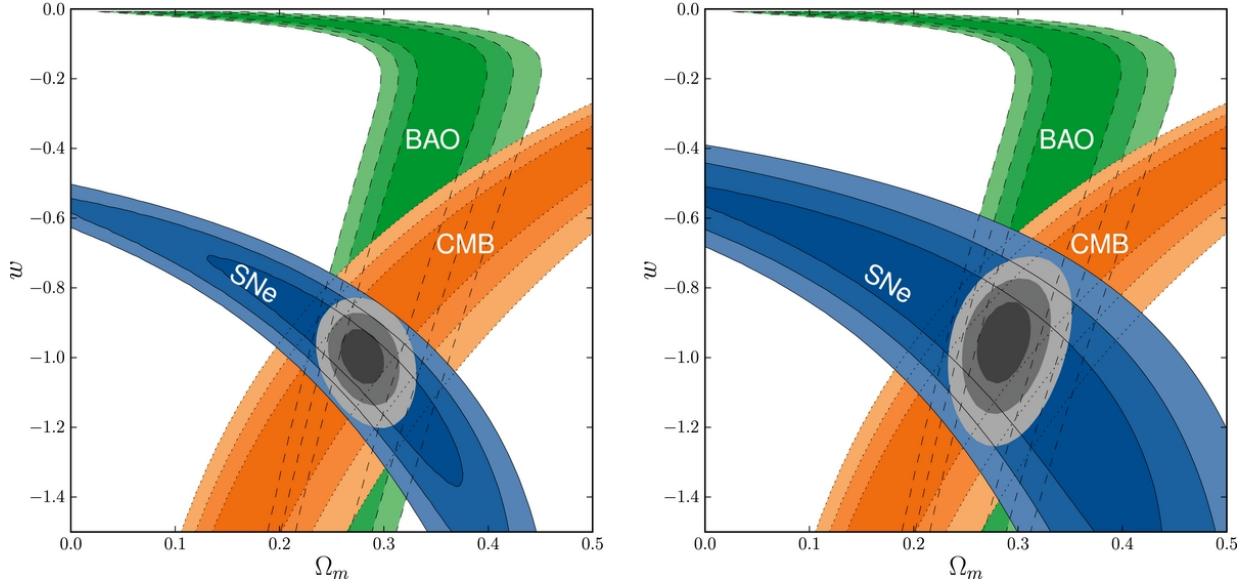


Figura 1.5: Modelo ωCDM : 1σ , 2σ e 3σ no plano $(\Omega_{m,0}, \omega)$ para SNe Ia combinadas com vínculos de BAO e CMB. O lado esquerdo mostra regiões de confiança de SN Ia somente com os erros estatísticos, enquanto o lado direito mostra regiões de confiança de SN Ia com erros estatísticos e sistemáticos. Imagem extraída de [101].

1.11 Modelos de campo escalar pra energia escura

A constante cosmológica corresponde ao caso em que $\omega = -1$. Como vimos na seção anterior, as os vínculos observacionais são compatíveis com esse valor, no entanto, existe a possibilidade de a equação de estado da energia escura mudar com o tempo. Um campo escalar dinâmico pode reproduzir esse comportamento, sendo assim, bons candidatos para energia escura. Nessa seção veremos duas classes de modelos de campo escalar: a quintessência e a K-essência.

1.11.1 Quintessência

A quintessência é descrita como um campo escalar ordinário ϕ minimamente acoplado com a gravidade, mas com potenciais característicos que levam a uma inflação tardia. A ação da quintessência é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] , \quad (1.68)$$

em que $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ e $V(\phi)$ é o potencial do campo. Em uma métrica FLRW plana, a variação da ação (1.68) com respeito a ϕ leva a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad . \quad (1.69)$$

O tensor energia-momento do campo é obtido variando a ação (1.68) em relação a métrica $g^{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad . \quad (1.70)$$

Usando que $\delta\sqrt{-g} = -(1/2)\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, encontramos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] \quad . \quad (1.71)$$

Para uma métrica FRW plana, obtemos a densidade de energia e a pressão do campo escalar como

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad P_\phi = T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad . \quad (1.72)$$

Assim, as equações de campo (1.12) e (1.13) ficam

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_m \right] \quad , \quad (1.73)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}[\dot{\phi}^2 - V(\phi) + P_m] \quad . \quad (1.74)$$

E lembrmos que a equação da continuidade (1.14) é derivada combinando essas duas equações.

Da equação (1.74), vemos que a expansão do universo acelera para $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Essa condição requer um potencial que varie lentamente para dar origem a uma expansão acelerada. No contexto da teoria da inflação, os parâmetros de *rolamento lento*

$$\epsilon_s = \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \quad , \quad \eta_s = \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2} \quad , \quad (1.75)$$

são usados para checar a existência de soluções inflacionárias para o modelo (1.68). A inflação ocorre quando as condições de rolamento lento, $\epsilon \ll 1$ e $|\eta| \ll 1$ são satisfeitas. No contexto da energia escura, essas condições não são confiáveis, já que existe também a matéria escura. Mas se definimos os parâmetros de rolamento lento em termos de

derivadas temporais de H tais como $\tilde{\epsilon} = -\dot{H}/H$, termos uma boa medida da expansão acelerada já que consideramos contribuições tanto da energia escura quanto da matéria escura.

A equação de estado do campo ϕ é dada por

$$\omega_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} . \quad (1.76)$$

Nesse caso, a equação da continuidade (1.14) pode ser escrita em uma forma integral,

$$\rho = \rho_0 \exp \left[- \int 3(1 + \omega_\phi) \frac{da}{a} \right] , \quad (1.77)$$

sendo ρ_0 uma constante de integração. Nota-se que a equação de estado para o campo ϕ está confinada na região $-1 \leq \omega_\phi \leq 1$. O limite de rolamento lento, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ corresponde a $\omega_\phi = -1$, resultando em $\rho = \text{constante}$ da equação (1.77). No caso de uma matéria rígida, caracterizada por $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$ temos $\omega_\phi = 1$, em que a densidade de energia evolui com $\rho \propto a^{-6}$ da equação (1.77). Em outros casos, a densidade de energia se comporta como

$$\rho \propto a^{-m} , \quad 0 < m < 6 . \quad (1.78)$$

Como $\omega_\phi = -1/3$ é o limite entre uma expansão acelerada e desacelerada, o universo exibe uma expansão acelerada para $0 \leq m < 2$.

1.11.2 K-essência

Os modelos de K-essência trabalham com a ideia de que a expansão acelerada do universo é devido a um campo escalar minimamente acoplado ϕ com um termo cinético não-canônico, o que resulta numa pressão negativa. O cenário da K-essência foi proposto originalmente como um modelo para inflação [13] e depois para energia escura [14]. Em geral, a ação desse tipo de modelo é expressa como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + P(\phi, X) \right] , \quad (1.79)$$

em que $P(\phi, X)$ é uma função do campo escalar ϕ e do termo cinético $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$, e estamos adotando $8\pi G = c = 1$. O ponto central desse tipo de modelo é que a aceleração

cósmica pode ser realizada pela energia cinética X do campo escalar, ao invés da energia potencial, tal como na quintessência.

O tensor energia-momento obtido a partir da ação (1.79) é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}P)}{\delta g^{\mu\nu}} = P_{,X} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} P , \quad (1.80)$$

em que $, X$ e $, \phi$ representa derivada parcial com relação a X e a ϕ respectivamente. A densidade de energia e a pressão para este fluido fica escrita como

$$\rho_\phi = 2XP_{,X} - P , \quad (1.81)$$

$$P_\phi = P , \quad (1.82)$$

e a equação de estado da K-essência é

$$\omega_\phi = \frac{P}{2XP_{,X} - P} . \quad (1.83)$$

Quando a condição $|2XP_{,X}| \ll |P|$ é satisfeita, $\omega_\phi \sim -1$. A ação (1.79) inclui uma grande variedade de teorias, como teoria de cordas efetiva em baixas energias [13], condensado fantasma [105], tâquions [106, 107] e teoria DBI (Dirac-Born-Infeld) [108]. A condição de estabilidade para a K-essência pode ser obtida promovendo uma perturbação no campo escalar

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}) , \quad (1.84)$$

em que $\phi_0(t)$ é o campo no background que depende apenas do tempo e $\delta\phi(t, \mathbf{x})$ é uma perturbação que depende da coordenada temporal e das coordenadas espaciais. Expandido a Lagrangeana $\mathcal{L} = P(\phi, X)$ e sua correspondente Hamiltoniana $\mathcal{H} = 2XP_{,X} - P$ até segunda ordem, obtemos a hamiltoniana perturbada em segunda ordem como

$$\delta\mathcal{H} = (P_{,X} + 2XP_{,XX}) \frac{(\dot{\delta\phi})^2}{2} + P_{,X} \frac{(\nabla\delta\phi)^2}{2} - P_{,\phi\phi} \frac{(\delta\phi)^2}{2} . \quad (1.85)$$

Para que a Hamiltoniana seja positiva definida, é necessário que as seguintes condições seja satisfeita:

$$\xi_1 \equiv P_{,X} + 2XP_{,XX} \geq 0 , \quad \xi_2 \equiv P_{,X} \geq 0 , \quad (1.86)$$

$$\xi_3 \equiv -P_{,\phi\phi} \geq 0 . \quad (1.87)$$

A velocidade do som, definida como

$$c_s^2 = \frac{P_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{\xi_2}{\xi_1} , \quad (1.88)$$

com ρ e P dados respectivamente por (1.81) e (1.82). No próximo capítulo, onde discutiremos as perturbações cosmológicas, veremos que a condição para que essas sejam estáveis é que c_s^2 seja positivo, e no caso do modelo de K-essência, isso só será satisfeito se $\xi_1 \geq 0$ e $\xi_2 \geq 0$. Em caso contrário, teremos instabilidades relacionadas a presença de estados fantasma (*ghost*) de energia negativa, fazendo com que o estado de vácuo seja instável. Essas instabilidades fantasmas serão discutidas melhor mais à frente quando formos discutir as teorias efetivas.

1.12 Modelos de unificação matéria escura/energia escura

Existe uma categoria de modelos que visa unificar matéria escura e energia escura em uma única componente, o que ganhou apreço de muitos cosmólogos. Esses modelos também são conhecidos como modelos de *quartessência*. Nessa seção veremos o caso do Gás de Chaplygin generalizado (GCG).

1.12.1 O Gás de Chaplygin generalizado

O modelo do Gás de Chaplygin foi proposto como modelo cosmológico por Kamendhchik *et al.* [16]. Neste modelo, temos um fluido com a seguinte equação de estado:

$$P = -\frac{A}{\rho^\alpha} , \quad (1.89)$$

em que A e α são constantes reais e $A > 0$. Para $\alpha = 1$, temos o Gás de Chaplygin (GC) simples. Essa equação de estado foi proposta originalmente pelo engenheiro aeronáutico russo Sergey Alexeyevich Chaplygin (1869 - 1942) [109] para descrever a força de elevação que o vento exerce sobre uma aeronave. Podemos substituir (1.89) na equação da continuidade (1.14) e obter a evolução da densidade de energia do fluido

$$\rho(a) = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{1/(1+\alpha)} , \quad (1.90)$$

em que B é uma constante de integração. De (1.90), vemos que para $a \ll 1 \rightarrow \rho \sim a^{-3}$, significando que o fluido evolui como matéria em tempos antigos, e para $a \gg 1 \rightarrow \rho = const$, significando que ele evolui como energia escura em tempos recentes (fase de De Sitter).

Definindo

$$\rho_* \equiv (A + B)^{1/(1+\alpha)} \quad , \quad \Omega_m^* \equiv \frac{B}{A + B} \quad , \quad (1.91)$$

em que Ω_m^* é interpretado como uma densidade de matéria efetiva. Então Eq. (1.90) pode ser escrita como

$$\rho(z) = \rho_* [1 - \Omega_m^* + \Omega_m^*(1+z)^{3(1+\alpha)}]^{1/(1+\alpha)} . \quad (1.92)$$

A equação de estado é dada por

$$\omega(z) = - \left[1 + \frac{\Omega_m^*}{1 - \Omega_m^*} (1+z)^{3(1+\alpha)} \right]^{-1} . \quad (1.93)$$

Para ($z \gg 1$) temos $\omega \approx 0$ e para no futuro assintótico temos $\omega \rightarrow -1$. Para o caso de $\alpha = 0$, podemos ver das equações (1.92) e (1.93) que o modelo do GCG mimetiza exatamente o modelo Λ CDM. Essa característica também irá se manter nas perturbações.

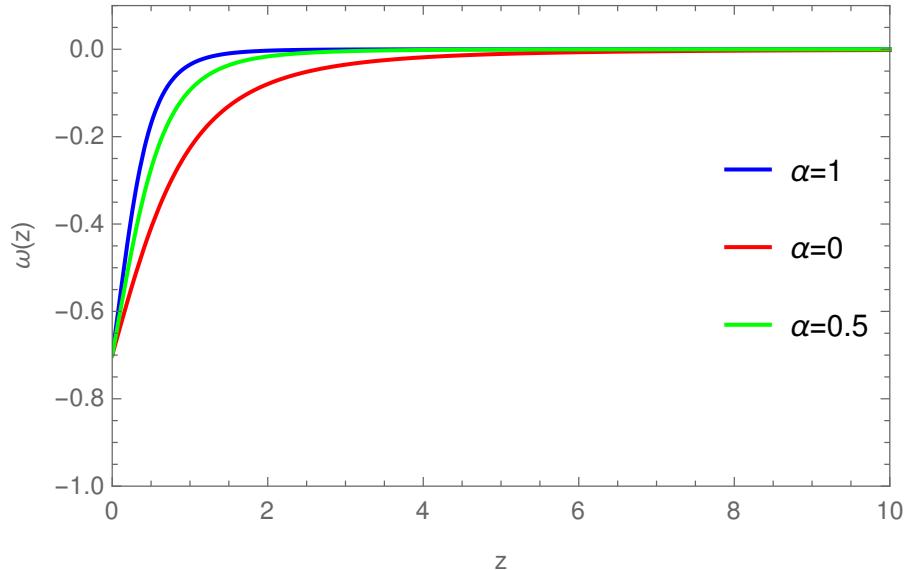


Figura 1.6: Evolução da equação de estado para o GCG para três valores de α : 1, 0, 0.5 e $\Omega_m^* = 0.3$.

Na figura (1.6), temos a evolução da equação (1.93) para $\alpha = 1, 0, 0.5$. Vemos que $\omega(z)$ reproduz o comportamento de matéria para $z \gg 1$ e energia escura para $z \ll 1$, sendo que hoje $\omega = 0.7$.

A equação de estado efetiva no regime intermediário entre a fase dominada pela matéria e a fase de De Sitter pode ser obtida expandindo a Eq. (1.89):

$$\rho \simeq A^{\frac{1}{1+\alpha}} + \left(\frac{1}{1+\alpha} \right) \frac{B}{A^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} (1+z)^{3(1+\alpha)} , \quad (1.94)$$

$$(1.95)$$

$$P \simeq -A^{\frac{1}{1+\alpha}} + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right) \frac{B}{A^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} (1+z)^{3(1+\alpha)} \quad (1.96)$$

que corresponde a uma mistura de uma fase de De Sitter e uma fase intermediária descrita pela equação de estado

$$p = \alpha\rho . \quad (1.97)$$

Até agora, desenvolvemos o modelo do GCG a partir de uma abordagem fenomenológica. No entanto, é possível obter o modelo a partir de uma teoria mais fundamental. Uma abordagem interessante foi proposta por [110], que considera uma d-brana em (3+1)-dimensões imersa em um *bulk* de (4+1)-dimensões descrito pelas coordenadas $x^M = (x^\mu, x^4)$. A métrica induzida na brana é

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \theta_{,\mu}\theta_{,\nu} , \quad (1.98)$$

com o campo escalar $\theta(x^\mu)$ contido na brana embutida no bulk. A ação da d-brana segue a estrutura

$$S_{brana} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} (-f + \dots) = \int d^4x \sqrt{-g} \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu \theta \partial_\nu \theta} (-f + \dots) , \quad (1.99)$$

em que a constante f da a tensão da brana e os três pontos representam outras possíveis contribuições. Essa ação corresponde a de uma teoria de Born-Infeld, e para passar do lado esquerdo para o direito, foi usada a identidade matricial

$$\det(a_{ij} - b_i b_j) = \det(a_{ij})(1 - b_m (a^{-1})_{mn} b_n) . \quad (1.100)$$

Usando a relação (1.70), obtemos o tensor energia-momento correspondente à ação (1.99)

$$T_{\mu\nu} = -f \left(\frac{\partial_\mu \theta \partial_\nu \theta}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta}} + g_{\mu\nu} \sqrt{1 - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta} \right) . \quad (1.101)$$

A densidade de energia e a pressão são dadas respectivamente por

$$\rho = -T_0^0 = \frac{f}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\partial_\beta\theta}} , \quad (1.102)$$

$$P = \frac{T_i^i}{3} = -f\sqrt{1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\partial_\beta\theta} . \quad (1.103)$$

Podemos ver que se $f = \sqrt{A}$, obtemos a equação de estado (1.89) para o caso do Gás de Chaplygin simples ($\alpha = 1$). O trabalho de Bento *et al.* [17] mostrou que o modelo do GCG pode ser obtido por um processo análogo, partindo da Lagrangeana de Born-Infeld generalizada

$$\mathcal{L}_{GBI} = -A^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[1 - (g^{\mu\nu}\partial_\mu\theta\partial_\nu\theta)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} , \quad (1.104)$$

que se reduz à Lagrangeana de Born-Infeld (1.99) no limite que $\alpha \rightarrow 1$. Na figura (1.7) temos esquematizado a evolução cosmológica de um universo descrito pelo GCG.

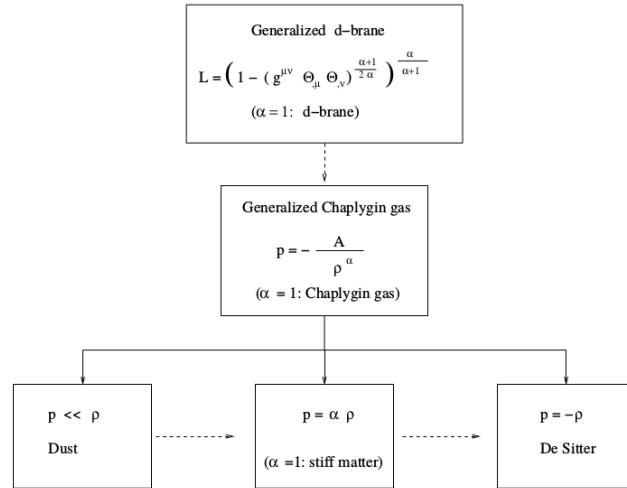


Figura 1.7: Evolução cosmológica de um universo descrito pela equação de estado do Gás de Chaplygin Generalizado. Extraído de [17]

Apesar de descrever bem o *background* cosmológico, o GCG apresenta instabilidades nas perturbações. Abordaremos melhor esse aspecto no próximo capítulo.

1.13 Modelos de Interação do Setor Escuro

O setor escuro, constituído da energia escura e matéria escura, constitui de longe a maior parte do conteúdo do universo, e é razoável supor que este setor escuro possua uma estrutura não-trivial com interações desconhecidas pelo modelo padrão da física de partículas. Foi mostrado que um acoplamento entre a energia escura e a matéria escura pode aliviar o problema da coincidência [111, 112]. Como a natureza desses dois componentes ainda é desconhecida fica difícil escrever a forma precisa do termo de interação a partir de primeiros princípios. Portanto, esse termo de interação será construído por argumentos fenomenológicos.

A densidade total de energia do universo é

$$\rho_{tot} = \rho_b + \rho_r + \rho_{dm} + \rho_{de} , \quad (1.105)$$

sendo que o subscrito b representa a matéria bariônica. O parâmetro de Hubble adimensional $E(z) = H(z)/H_0$ fica dado como

$$E^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \rho_{dm}(z)/\rho_{crit,0} + \rho_{de}(z)/\rho_{crit,0} . \quad (1.106)$$

A matéria escura e a energia escura interagem entre si. Sendo assim, não podemos considerá-las como fluidos que se conservam independentemente. Dessa forma, a equação da continuidade (1.14) fica dada para esse sistema como

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(1+\omega_{dm})\rho_{dm} = Q , \quad (1.107)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(1+\omega_{de})\rho_{de} = -Q , \quad (1.108)$$

sendo Q o termo de interação. Se $Q > 0$ temos uma transferência de energia da energia escura para a matéria escura, enquanto que se $Q < 0$ temos uma transferência de energia no sentido oposto. Definindo a variável $\eta = \ln a^3$, sendo $' = \frac{d}{d\eta}$, podemos reescrever (1.107) e (1.108) como

$$\rho'_{dm} + \gamma_{dm}\rho_{dm} = \Gamma , \quad (1.109)$$

$$\rho'_{de} + \gamma_{de}\rho_{de} = -\Gamma , \quad (1.110)$$

sendo $\Gamma = Q/3H$, $\gamma_{dm} = 1 + \omega_{dm}$ e $\gamma_{de} = 1 + \omega_{de}$. A vantagem dessa mudança de variável é que podemos eliminar H do sistema de equações. Também podemos combinar as equações (1.109) e (1.110) e escrever as densidades ρ_{dm} e ρ_{de} em termos da densidade total do setor escuro $\rho = \rho_{dm} + \rho_{de}$, a saber:

$$\rho_{de} = \frac{\rho' + \gamma_{dm}\rho}{\Delta}, \quad \rho_{dm} = -\frac{\rho' + \gamma_{de}\rho}{\Delta}, \quad (1.111)$$

com $\Delta = \gamma_{dm} - \gamma_{de}$. Fazendo as devidas substituições de (1.111) em (1.109) ou (1.110), podemos obter uma equação diferencial de segunda ordem para a densidade de energia total do setor escuro

$$\rho'' + (\gamma_{dm} + \gamma_{de})\rho' + \gamma_{dm}\gamma_{de}\rho = -\Delta\Gamma. \quad (1.112)$$

Das equações (1.109) e (1.110), podemos ver por análise dimensional que o acoplamento Γ precisa ser proporcional a densidade de energia. Escolhemos $\Gamma = \alpha\rho_{dm} + \beta\rho_{de}$ em que α e β são constantes de acoplamento. Substituindo Γ em (1.112) e expressando tudo em função de ρ através de (1.111), reescrevemos (1.112) como

$$\rho'' + b_1\rho' + b_2\rho = 0, \quad (1.113)$$

em que $b_1 = \gamma_{de} + \gamma_{dm} - \alpha + \beta$ e $b_2 = -\alpha\gamma_{de} + \gamma_{de}\gamma_{dm} + \beta\gamma_{dm}$, e que tem como solução

$$\rho(a) = C_+a^{3\lambda_+} + C_-a^{3\lambda_-}, \quad (1.114)$$

em que C_\pm são constantes e

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2} \right). \quad (1.115)$$

Substituindo a solução acima em (1.111), obtemos

$$\rho_{dm}(a) = -\frac{(\lambda_+ + \gamma_{de})C_+a^{3\lambda_+} + (\lambda_- + \gamma_{de})C_-a^{3\lambda_-}}{\Delta}, \quad (1.116)$$

$$\rho_{de}(a) = \frac{(\lambda_+ + \gamma_{dm})C_+a^{3\lambda_+} + (\lambda_- + \gamma_{dm})C_-a^{3\lambda_-}}{\Delta}, \quad (1.117)$$

e a função de Hubble normalizada (1.106) dada por

$$E(z)^2 = \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \tilde{C}_+(1+z)^{-3\lambda_+} + \tilde{C}_-(1+z)^{-3\lambda_-}, \quad (1.118)$$

sendo

$$\tilde{C}_+ \equiv \frac{C_+}{\rho_{crit,0}} = -\frac{(\lambda_- + \gamma_{dm})\Omega_{dm,0} + (\lambda_- + \gamma_{de})\Omega_{de,0}}{(\lambda_+ - \lambda_-)} , \quad (1.119)$$

$$\tilde{C}_- \equiv \frac{C_-}{\rho_{crit,0}} = \frac{(\lambda_+ + \gamma_{dm})\Omega_{dm,0} + (\lambda_+ + \gamma_{de})\Omega_{de,0}}{(\lambda_+ - \lambda_-)} . \quad (1.120)$$

Desta forma obtemos uma solução analítica geral pra o acoplamento $\Gamma = \alpha\rho_{dm} + \beta\rho_{de}$. Na literatura frequentemente nos referimos a três tipos de modelo fenomenológicos que estão contidos desse modelo mais geral, a saber: (i) $\Gamma = \xi\rho_{dm}$, (ii) $\Gamma = \xi\rho_{de}$ e (iii) $\Gamma = \xi(\rho_{dm} + \rho_{de})$.

1.13.1 Modelo I: $\Gamma = \xi\rho_{dm}$

Nesse modelo, temos o acoplamento proporcional à densidade de energia da matéria escura. Nesse caso, $\alpha = \xi$ e $\beta = 0$. Considerando $\gamma_{dm} = 1$ e $\gamma_{de} = 1 + \omega$, obtemos de (1.115)

$$\lambda_+ = -(1 - \xi) , \quad \lambda_- = -(1 + \omega) , \quad (1.121)$$

e de (1.119) e (1.120)

$$\tilde{C}_+ = \frac{\omega}{\xi + \omega}\Omega_{dm,0} , \quad \tilde{C}_- = \Omega_{de,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega}\Omega_{dm,0} . \quad (1.122)$$

Por fim, a evolução das densidades de matéria escura e energia escura em função do redshift são

$$\rho_{dm}(z) = \rho_{dm,0}(1 + z)^{3(1-\xi)} , \quad (1.123)$$

$$\rho_{de}(z) = \left(\rho_{de,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega}\rho_{dm,0} \right) (1 + z)^{3(1+\omega)} - \frac{\xi}{\xi + \omega}\rho_{dm,0}(1 + z)^{3(1-\xi)} , \quad (1.124)$$

e a função de Hubble normalizada

$$E(z)^2 = \Omega_{b,0}(1 + z)^3 + \Omega_{r,0}(1 + z)^4 + \frac{\omega}{\xi + \omega}\Omega_{dm,0}(1 + z)^{3(1-\xi)} + \left(\Omega_{de,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega}\Omega_{dm,0} \right) (1 + z)^{3(1+\omega)} . \quad (1.125)$$

1.13.2 Modelo II: $\Gamma = \xi \rho_{de}$

Nesse modelo temos o acoplamento proporcional a densidade de energia escura, sendo $\alpha = 0$ e $\beta = \xi$. Para este modelo temos

$$\lambda_+ = -1 , \quad \lambda_- = -(1 + \xi + \omega) , \quad (1.126)$$

e

$$\tilde{C}_+ = \Omega_{dm,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega} \Omega_{de,0} , \quad \tilde{C}_- = \frac{\omega}{\xi + \omega} \Omega_{de,0} . \quad (1.127)$$

Portanto, a evolução das densidades da energia escura e da matéria escura são respectivamente

$$\rho_{de}(z) = \rho_{de,0}(1 + z)^{3(1+\xi+\omega)} , \quad (1.128)$$

$$\rho_{dm}(z) = \left(\rho_{dm,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega} \rho_{de,0} \right) (1 + z)^3 - \frac{\xi}{\xi + \omega} \rho_{de,0}(1 + z)^{3(1+\xi+\omega)} , \quad (1.129)$$

e a função de Hubble normalizada dada por

$$\begin{aligned} E(z)^2 &= \Omega_{b,0}(1 + z)^3 + \Omega_{r,0}(1 + z)^4 \\ &+ \left(\Omega_{dm,0} + \frac{\xi}{\xi + \omega} \Omega_{de,0} \right) (1 + z)^3 + \frac{\omega}{\xi + \omega} \Omega_{de,0}(1 + z)^{3(1+\xi+\omega)} . \end{aligned} \quad (1.130)$$

1.13.3 Modelo III: $\Gamma = \xi(\rho_{dm} + \rho_{de})$

Neste modelo o acoplamento é proporcional a densidade de energia total do setor escuro, com $\alpha = \beta = \xi$, e

$$\lambda_{\pm} = -1 - \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\omega(\omega + 4\xi)} , \quad (1.131)$$

além de

$$\tilde{C}_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\Omega_{dm,0} + \Omega_{de,0} \pm \frac{\omega}{\sqrt{\omega(\omega + 4\xi)}} (\Omega_{dm,0} - \Omega_{de,0}) \right] . \quad (1.132)$$

As soluções analíticas para a densidade de matéria escura, energia escura, assim como a função de Hubble normalizada são obtidas substituindo devidamente (1.131) e (1.132) em (1.116), (1.117) e (1.118) respectivamente. Na figura (1.8) temos a evolução das densidades de matéria escura e energia escura no modelo I ($\Gamma = \xi \rho_{dm}$) ao longo da história do universo. Ao contrário do modelo Λ CDM em que as duas densidades evoluem

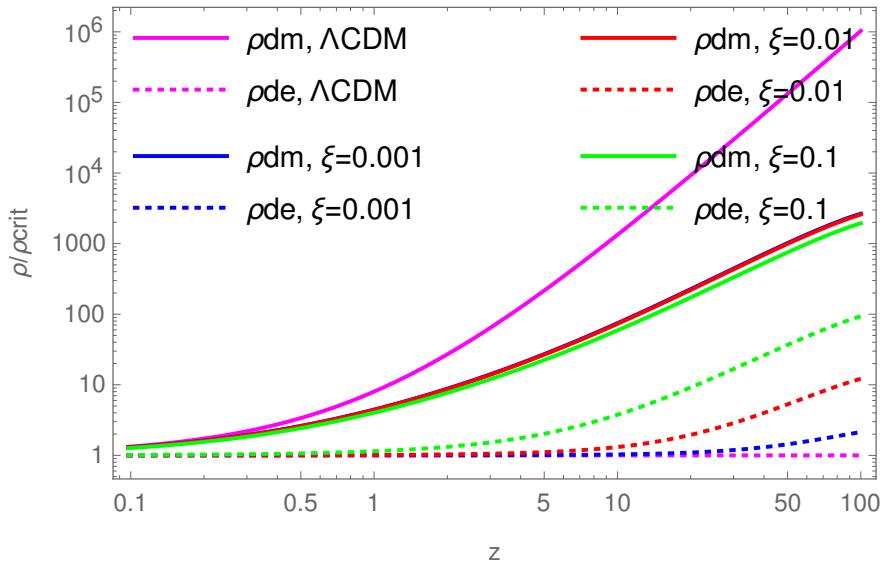


Figura 1.8: Evolução das densidades de matéria escura e energia escura para o modelo com $\Gamma = \xi \rho_{dm}$, com $\omega_{dm} = -1.01$ e $\xi = 0.001, 0.01$ e 0.1 . Também temos as respectivas evoluções para o modelo Λ CDM.

independentemente e só assumem valores próximos da unidade hoje ($z \approx 0$), no modelo de interação as duas densidades evoluem conjuntamente trocando energia entre si, o que pode ser medido pelo valor da constante de acoplamento ξ . Dessa maneira, vemos que a presença de uma interação no setor escuro alivia o problema da coincidência.

Capítulo 2

Teoria das perturbações cosmológicas

2.1 Introdução

No capítulo anterior, discutimos a cosmologia no *background* de FLRW homogêneo e isotrópico. No background, conseguimos estudar a taxa de expansão do universo pela função $H(z)$, as medidas de distância comóvel, luminosa e diâmetro angular; assim como intervalos temporais (“*Lookback Time*”), volumes e contagens de galáxias, além da história térmica do universo, temas que não foram abordados nessa tese.

No entanto, se vivêssemos em um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico, não teríamos formações de estruturas como aglomerados de galáxias, galáxias, estrelas, planetas e vida. Para descrevermos o processo de formação de estruturas, assim como as anisotropias da radiação cósmica de fundo, devemos considerar pequenos desvios (perturbações) em torno da métrica homogênea e isotrópica de FLRW. Nesse capítulo revisaremos a teoria linear das perturbações cosmológicas, partindo da perturbação na métrica de fundo de FLRW, a construção das equações de Einstein nos *gauge* síncrono e Newtoniano, as condições de estabilidade das perturbações e se os modelos de energia escura apresentados no capítulo 1 atendem a essas condições.

2.2 Perturbações da métrica

A teoria das perturbações lineares parte de pequenas perturbações na métrica de FLRW, sendo a métrica total escrita como

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

em que $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica não perturbada de FLRW (ordem zero) e $\delta g_{\mu\nu}$ é a perturbação em torno da métrica de fundo, sendo $\delta g_{\mu\nu} \ll \bar{g}_{\mu\nu}$.

Consideraremos sempre a curvatura nula ($k = 0$) e trabalharemos no tempo conforme $\tau = \int a^{-1} dt$. A métrica de FLRW no tempo conforme é dada por

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau) (-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j) . \quad (2.2)$$

Também é importante definir o parâmetro de Hubble conforme:

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = aH . \quad (2.3)$$

A métrica perturbada pode ser escrita da forma mais geral possível como uma soma de perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Sendo assim, as componentes de $\delta g_{\mu\nu}$ são escritas como

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &= -E , \\ \delta g_{0i} &= w_i , \\ \delta g_{ij} &= h_{ij} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para simplificar o tratamento dessas perturbações, que em casos mais gerais pode ser muito complicado, é conveniente escolher um sistema de coordenadas especial. Com o intuito de manter a métrica não perturbada $\bar{g}_{\mu\nu}$ invariante durante o processo, escolhemos uma classe de transformações infinitesimais que deixam a métrica não perturbada invariante, enquanto a perturbada $\delta g_{\mu\nu}$ pode variar. Essa classe de transformações é conhecida como *transformações de gauge*, enquanto que cada um desses sistemas de coordenadas que respeitam as transformações de gauge, são conhecidos como *gauge*.

O primeiro deles foi o *gauge síncrono* ou *comóvel*, introduzido por Lifshitz em 1946 [113], em que os observadores estão sobre uma hipersuperfície de tempo constante ortogonal a quadri-velocidade u^μ do fluxo de Hubble, e sobre a qual as perturbações de velocidade v_i são nulas.

Também temos o *gauge Newtoniano* ou *longitudinal* [114] em que os observadores detectam um campo de velocidade devido a queda livre de partículas em direção a um poço de potencial gravitacional.

No gauge síncrono temos $E = 0$ e $w_i = 0$, então o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \} , \quad (2.5)$$

em que h_{ij} é a perturbação da métrica, que pode ser decomposta numa parte com traço nulo $h \equiv h_{ii}$ e uma parte com traço não nulo da forma

$$h_{ij} = \frac{h\delta_{ii}}{3} + h_{ij}^{\parallel} + h_{ij}^{\perp} + h_{ij}^T , \quad (2.6)$$

em que as divergências $\partial^i h_{ij}^{\parallel}$ e $\partial^i h_{ij}^{\perp}$ são longitudinais e transversais, respectivamente, e h_{ij}^T é transverso, satisfazendo

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_l h_{jk}^{\parallel} = 0 , \quad \partial_i \partial_j h_{ij}^{\perp} = 0 , \quad \partial_i h_{ij}^T = 0 . \quad (2.7)$$

Ou seja: temos uma parte com rotacional nulo (h_{ij}^{\parallel}) e uma parte com divergência nula (h_{ij}^{\perp}). Sendo assim, podemos escrever h_{ij}^{\parallel} em termos de um campo escalar B e h_{ij}^{\perp} em termos de um campo vetorial de divergência nula

$$h_{ij}^{\parallel} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) B , \quad (2.8)$$

$$h_{ij}^{\perp} = \partial_i A_j + \partial_j A_i , \quad \partial_i A_i = 0 . \quad (2.9)$$

Os campos escalares h e B caracterizam as perturbações escalares e o campo vetorial A_i caracteriza as perturbações vetoriais.

No estudo das perturbações, é de praxe trabalhar no espaço de Fourier (espaço \mathbf{k} dos vetores de onda). A transformada de Fourier 3-dimensional de uma função $f(\tau, \mathbf{x})$ é

$$f(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\tau, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3 k , \quad (2.10)$$

enquanto a transformada inversa de Fourier é dada por

$$f(\tau, \mathbf{k}) = \int f(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x . \quad (2.11)$$

Em que V é o volume no espaço das posições. As derivadas de f ficam são dadas por

$$\partial_i f \rightarrow -ik_i f_{\mathbf{k}} , \quad \nabla^2 f \rightarrow -k^2 f_{\mathbf{k}} .$$

A vantagem de se trabalhar no espaço de Fourier é que podemos converter equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, visto que as derivadas espaciais somem e são substituídas pelo vetor de onda \mathbf{k} .

Usando a função $\eta(\tau, \mathbf{x})$ introduzida por [94], dada por $\eta = \frac{1}{6}(-h + \nabla^2 B)$, que no espaço de Fourier fica escrita como $\eta = \frac{1}{6}(-h - k^2 B)$, podemos escrever as perturbações escalares de (2.6) da forma

$$h_{ij} = \hat{k}_i \hat{k}_j h + \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) 6\eta , \quad (2.12)$$

em que $\hat{k}_i = k_i/k$. O gauge síncrono tem uma série desvantagem, já que a escolha da hipersuperfície inicial é arbitrária, o que não fixa todos os graus de liberdade de gauge completamente. Outro problema é que o gauge síncrono é definido para observadores em queda livre, o que significa que quando as trajetórias de dois observadores se cruzam, uma singularidade de coordenadas aparece.

Outro gauge comumente utilizado é o gauge Newtoniano ou longitudinal (ou também *sem cisalhamento*). Neste gauge temos $E = -2\Psi$, $w_i = \partial_i F = 0$ e $h_{ij} = 2\Phi\delta_{ij}$. O elemento de linha fica dado por

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -(1 + 2\Psi) d\tau^2 + (1 + 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \} . \quad (2.13)$$

A vantagem deste gauge é que nele a métrica é diagonal, o que simplifica muito os cálculos, e a função Ψ pode ser interpretada como o potencial gravitacional.

2.3 Equações de Einstein

Para obtermos as equações de Einstein em primeira ordem, decomponemos o tensor de Einstein G^μ_ν e o tensor energia-momento T^μ_ν em uma parte não perturbada (ordem zero)

e uma parte perturbada (primeira ordem): $G^\mu_\nu = \bar{G}^\mu_\nu + \delta G^\mu_\nu$ e $T^\mu_\nu = \bar{T}^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu$. Dessa forma, as equações de Einstein em primeira ordem ficam dadas por

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu . \quad (2.14)$$

Para obtermos δG^μ_ν , precisamos calcular a perturbação do símbolo de Christoffel

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\nu \delta g_{\mu\sigma} + \partial_\mu \delta g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu}) . \quad (2.15)$$

Obtendo os componentes não nulos de $\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, construímos o tensor de Ricci perturbado

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \delta \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \delta \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} , \quad (2.16)$$

e o escalar de Ricci perturbado

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} , \quad (2.17)$$

obtendo o tensor de Einstein perturbado

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta R , \quad (2.18)$$

$$\delta G^\mu_\nu = \delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta G_{\mu\nu} . \quad (2.19)$$

No gauge síncrono, as componentes de (2.19) são dadas (no espaço de Fourier) por

$$\begin{aligned} \delta G^0_0 &= a^{-2} [2k^2 \eta - \mathcal{H} h'] , \\ \delta G^0_i &= -\delta G^i_0 = a^{-2} [-2ik_i \eta'] , \\ \delta G^i_j &= a^{-2} \left[-\frac{1}{2} h'' - \eta'' - \mathcal{H}(h' + 2\eta') + k^2 \eta \right] \delta^i_j \\ &\quad - k_i k_j a^{-2} \left[\eta - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} h'' + 3\eta'' + \mathcal{H}h' + 6\mathcal{H}\eta' \right) \right] , \\ \delta G^i_i &= a^{-2} [-h'' + 2k^2 \eta - 2\mathcal{H}h'] , \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que ' representa a derivada em relação ao tempo conforme. Já no gauge Newtoniano dado por (2.13), as componentes de (2.19) são dadas por

$$\begin{aligned} \delta G^0_0 &= 2a^{-2} [k^2 \Phi + \mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi')] , \\ \delta G^0_i &= -\delta G^i_0 = 2a^{-2} ik_i [\mathcal{H}\Psi - \Phi'] , \\ \delta G^i_j &= 2a^{-2} [(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi + \mathcal{H}\Psi' - \Phi'' - 2\mathcal{H}\Phi'] \delta^i_j \\ &\quad - a^{-2} [k^2 (\Psi + \Phi) \delta^i_j - k_i k_j (\Psi + \Phi)] . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para perturbar o tensor energia-momento é necessário primeiramente perturbar a quadri-velocidade $u^\mu = dx^\mu/\sqrt{-ds^2}$. Assim, em primeira ordem, temos

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{1}{a}[1 - \Psi, v^i] \quad , \\ u_\mu u^\nu &= g_{\mu\nu}u^\nu = -a[1 + \Psi, -v_i] \quad , \\ u_\mu u^\nu &= -1 \quad , \end{aligned} \tag{2.22}$$

com $v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ representando a velocidade peculiar das partículas com relação ao fluxo de Hubble. Também fazemos perturbações na densidade de energia $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$ e na pressão $P = \bar{P} + \delta P$. Assim, as componentes do tensor energia-momento perturbado até primeira ordem são dadas por

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho \quad , \tag{2.23}$$

$$\delta T_i^0 = -\delta T_0^i = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i \quad , \tag{2.24}$$

$$\delta T_j^i = \delta P \delta_j^i + \Sigma_j^i \quad , \quad \Sigma_i^i = 0 \quad , \tag{2.25}$$

sendo $\Sigma_j^i \equiv \delta T_j^i - \frac{1}{3}\delta_j^i\delta T_k^k$ o *stress anisotrópico*. Para um fluido perfeito temos $\Sigma_j^i = 0$.

Agora podemos escrever (2.14) nos gauge síncrono e Newtoniano. No gauge síncrono, temos

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\mathcal{H}h' = -4\pi Ga^2\delta\rho(\text{Sinc}) \quad , \tag{2.26}$$

$$k^2\eta' = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta(\text{Sinc}) \quad , \tag{2.27}$$

$$h'' + 2\mathcal{H}h' - 2k^2\eta = -24\pi G\delta P(\text{Sinc}) \quad , \tag{2.28}$$

$$h'' + 6\eta'' + 2\mathcal{H}(h' + 6\eta') - 2k^2\eta = -24\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\Theta(\text{Sinc}) \quad . \tag{2.29}$$

As variáveis θ e Θ são definidas como

$$\theta \equiv ik_jv_j \quad , \quad (\bar{\rho} + \bar{P})\Theta \equiv -\left(\hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Sigma_j^i \quad . \tag{2.30}$$

No gauge Newtoniano as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem são

$$k^2\Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = -4\pi Ga^2\delta\rho(\text{Newt}) \quad , \tag{2.31}$$

$$k^2(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta(\text{Newt}) \quad , \tag{2.32}$$

$$\Phi'' + \mathcal{H}(\Psi' + 2\Phi') + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \frac{k^2}{3}(\Phi - \Psi) = 4\pi Ga^2\delta P(\text{Newt}) \quad , \tag{2.33}$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\Theta(\text{Newt}) \quad . \tag{2.34}$$

Denotamos "Sinc" e "Newt" as componentes do tensor energia-momento no gauge síncrono e Newtoniano respectivamente.

2.4 Conservação do tensor energia-momento

Podemos obter equações úteis a partir da conservação do tensor energia-momento

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} T^\beta_\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} T^\beta_\nu . \quad (2.35)$$

Fazendo para $\nu = 0$ obtemos a *equação da continuidade perturbada* e para $\nu = i$ obtemos a *equação de Euler*. Essas equações não são independentes das equações de Einstein, mas são bem úteis. No gauge síncrono as equações da continuidade e de Euler são dadas respectivamente por

$$\delta' = -(1 + \omega) \left(\theta + \frac{h'}{2} \right) - 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta , \quad (2.36)$$

$$\theta' = - \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{1 + \omega} \right] \theta + k^2 \left(\frac{c_s^2}{1 + \omega} \delta - \Theta \right) . \quad (2.37)$$

Já no gauge Newtoniano essas equações são escritas como

$$\delta' = -(1 + \omega)(\theta - 3\Phi') - 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta , \quad (2.38)$$

$$\theta' = - \left[\mathcal{H}(1 - 3\omega) + \frac{\omega'}{1 + \omega} \right] \theta + k^2 \left(\frac{c_s^2}{1 + \omega} \delta - \Theta + \Psi \right) . \quad (2.39)$$

Nas equações acima, usamos o contraste de densidade

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} , \quad (2.40)$$

que representa o desvio da densidade em cada ponto com relação à densidade média.

Usamos também a equação de estado $\omega \equiv \frac{P}{\rho}$ e a velocidade do som

$$c_s^2 \equiv \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{dP}{d\rho} = \frac{P'}{\rho'} . \quad (2.41)$$

A última passagem só é válida se a densidade de energia e a pressão dependem somente do tempo. No geral, a pressão também depende da entropia interna do fluido s , portanto, temos

$$c_s^2 = \frac{\delta P(\rho, s)}{\delta \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial s}{\partial \rho} = c_{s(a)}^2 + c_{s(na)}^2 , \quad (2.42)$$

em que $c_{s(a)}$ é chamada de velocidade do som *adiabática* e $c_{s(na)}$ é a velocidade do som não adiabática.

No gauge Newtoniano é possível combinar as equações (2.31) e (2.32) e assim obter a equação de Poisson relativística

$$k^2\Phi = 4\pi Ga^2\rho[\delta + 3\mathcal{H}(1 + \omega)\theta/k^2] = 4\pi Ga^2\rho\delta^* , \quad (2.43)$$

com

$$\delta^* \equiv \delta + 3\mathcal{H}(1 + \omega)\theta/k^2 . \quad (2.44)$$

Para um fluido perfeito, o stress anisotrópico é nulo, i.e., $\Sigma_j^i = 0$. Então da equação (2.34), obtemos que os potenciais Ψ e Φ estão relacionados pela equação

$$\Psi = -\Phi . \quad (2.45)$$

Combinando (2.31), (2.33) e (2.45), obtemos uma equação para de evolução para o potencial Φ

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + ((k^2 + 3\mathcal{H}^2)c_s^2 + 2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 0 . \quad (2.46)$$

E combinando (2.43) com (2.46), obtemos uma equação de evolução para δ^* :

$$(\delta^*)'' + (1 + 3c_2^2 - 6\omega)\mathcal{H}(\delta^*)' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \left[1 - 6c_2^2 - 3\omega^2 + 8\omega - \left(\frac{2k^2c_s^2}{3\mathcal{H}^2} \right) \right] \delta^* = 0 . \quad (2.47)$$

2.4.1 Escalas menores que o raio de Hubble

Olhemos para o caso em que $k \gg \mathcal{H}$, ou seja, escalas dentro do raio de Hubble (também chamado *escalas sub-horizonte*). De (2.44), temos que $\delta^* = \delta$. Para um fluido não-pressurizado $\omega = 0$, mas com uma velocidade do som pequena

$$c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} \ll 1 . \quad (2.48)$$

Assim, a equação (2.47) fica reduzida a

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(k^2c_s^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \right) \delta = 0 . \quad (2.49)$$

A equação (2.49) nos mostra que as perturbações irão oscilar amortecidamente ao invés de crescer se

$$k^2c_s^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 > 0 , \quad (2.50)$$

ou seja, se o comprimento de onda físico $\lambda_p = (2\pi/k)a$ for menor do que o *comprimento de onda de Jeans*

$$\lambda_J \equiv c_s^2 \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}} . \quad (2.51)$$

Para escalas menores do λ_J , a perturbação irá para um regime de oscilações amortecidas. Para a matéria não-pressurizada, as perturbações crescem livremente por que a atração gravitacional supera a pressão interna do fluido. Esse é o regime das *instabilidades gravitacionais*, em que ocorre a formação de estruturas. Nesse regime, as perturbações de matéria evoluem pela equação

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0 . \quad (2.52)$$

Passando para a variável $N = \ln a$, a equação (2.52) fica reescrita como

$$\frac{d^2\delta}{dN^2} + \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dN} - \frac{3}{2}\delta = 0 , \quad (2.53)$$

que admite uma solução de crescimento e uma de decaimento:

$$\delta_+ = Aa , \quad \delta_- = Ba^{-3/2} . \quad (2.54)$$

A solução de decaimento se tornará negligenciável e a solução de crescimento dominará. Substituindo δ_+ na equação de Poisson (2.43), vemos que $\Phi \propto a^2 H^2 \delta_+ \propto a^2 a^{-3} a^1 \propto$ constante. Portanto, o potencial gravitacional permanece constante durante a época dominada pela matéria.

2.4.2 Modelos de unificação matéria escura/energia escura e instabilidades de Jeans

Os modelos de unificação matéria escura/energia escura conseguem descrever bem a evolução do background. No entanto, podem apresentar problemas ao evoluir suas perturbações lineares. Tomemos o modelo do GCG: nesse modelo temos a pressão e a densidade de energia do fluido relacionados pela equação de estado (1.89) e o parâmetro ω evoluindo pela equação (1.93). Sendo assim, a velocidade do som para o GCG fica dada por

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = -\alpha\omega = \alpha \left[1 + \frac{\Omega_m^*}{1 - \Omega_m^*} (1+z)^{3(1+\alpha)} \right]^{-1} . \quad (2.55)$$

Como ω é sempre negativo, c_s^2 é positivo para $\alpha > 0$ e negativo para $\alpha < 0$. As perturbações de matéria δ_m^* obedecem (2.47) e precisam satisfazer a condição de crescimento pelas instabilidades gravitacionais

$$|c_s^2| \lesssim \frac{3\mathcal{H}^2}{2k^2} . \quad (2.56)$$

Caso $c_s^2 > 0$, as perturbações abaixo em escalas abaixo do comprimento de Jeans λ_J irão oscilar ao invés de crescer. Por outro lado, se $c_s^2 < 0$, as perturbações são muito instáveis e tendem a crescer exponencialmente. Na presente época, com $|\omega|$ da ordem da unidade, temos $|c_s^2| \sim |\alpha|$. Nas escalas típicas das perturbações ($k = 0.1 h \text{Mpc}^{-1}$), temos que os valores de α permitidos pela condição (2.56) ficam limitados a

$$|\alpha| \lesssim 10^{-5} . \quad (2.57)$$

Isso significa que os valores de α para os quais o modelo do GCG é viável são muito próximos de zero, ou seja, valores para os quais o GCG é indistinguível do modelo ΛCDM . Esse problema se deve essencialmente ao papel da pressão no modelo do GCG. Durante a era da matéria, o efeito da pressão do fluido precisa ser suprimido para que possa ocorrer a formação de estruturas. No entanto, uma pressão negativa é necessária para uma expansão acelerada, dois pré-requisitos que são difíceis de serem satisfeitos ao mesmo tempo.

2.5 Função de crescimento e razão de crescimento

No desenvolvimento das perturbações apresentado até aqui consideramos apenas um fluido de matéria não presurizada ($c_s^2 = 0$). No entanto, devemos lembrar que o fluido cosmológico é constituído de três espécies: a radiação, a matéria (escura e bariônica) e a energia escura. Devemos substituir $\rho\delta^*$ por um $\rho_{\text{tot}}\delta_{\text{tot}}^*$ na equação (2.43), que nas escalas sub-horizonte fica escrita como

$$k^2\Phi \simeq 4\pi Ga^2\rho_{\text{tot}}\delta_{\text{tot}} = \frac{3}{2}\mathcal{H}(\Omega_m\delta_m + \Omega_r\delta_r + \Omega_\Lambda\delta_\Lambda) . \quad (2.58)$$

Durante a era dominada pela matéria a densidade de radiação é desprezível ($\Omega_r \approx 0$). Além disso, ρ_Λ é constante, logo $\delta_\Lambda = 0$. Sendo assim, a equação (2.52) será modificada

da forma

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m = 0 \quad , \quad (2.59)$$

que terá como solução

$$\delta_m(\tau, \vec{x}) = \epsilon_m^+(\vec{x})D_m^+(\tau) + \epsilon_m^-(\vec{x})D_m^-(\tau) \quad , \quad (2.60)$$

que é a combinação linear de uma função de crescimento D_m^+ e de decrescimento D_m^- , sendo que esta última será negligenciada, pois a função de crescimento domina. O modo $\epsilon_m^+(\vec{x}) = \frac{\delta_{m,0}(\vec{x})}{D_{m,0}^+}$ e a evolução para o contraste de densidade de matéria é escrita como

$$\delta_m(z, \vec{x}) = \frac{\delta_{m,0}(\vec{x})}{D_{m,0}^+} D_m^+(z) = \delta_{m,0}(\vec{x})D_m(z) \quad , \quad (2.61)$$

em que $D_m(z) \equiv \frac{D_m^+(z)}{D_{m,0}^+}$ é a *função de crescimento normalizada*.

É conveniente definir a *razão de crescimento* linear das perturbações de matéria

$$f(z) \equiv \frac{d \ln \delta_m}{d \ln a} \quad , \quad (2.62)$$

que facilita o estudo do crescimento de estruturas a partir da equação (2.59).

2.6 Função de correlação e espectro de potência

Como já vimos, a densidade de matéria no background $\bar{\rho}_m$ se distribui de maneira estatisticamente homogênea, no entanto, a densidade de matéria local $\rho(\mathbf{x})$ pode desviar deste valor médio de fundo. Como já havíamos definido em (2.40), o contraste de densidade é dado por

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\bar{\rho}} \quad . \quad (2.63)$$

Para contagem de galáxias, temos uma densidade numérica discreta de galáxias \bar{n}_g , e o contraste de densidade numérico é definido analogamente como

$$\delta_g(\mathbf{x}) = \frac{n_g(\mathbf{x}) - \bar{n}_g}{\bar{n}_g} = \frac{\delta n_g(\mathbf{x})}{\bar{n}_g} \quad . \quad (2.64)$$

As distribuições de matéria e de galáxias são contínua e discreta, respectivamente. Elas são relacionadas por um fator de *bias* b da forma $\delta_g = b\delta$. Assim, o campo discreto de

galáxias segue o campo contínuo de matéria. A *função de correlação de dois pontos* é definida como o valor médio da distribuição $\delta(\mathbf{x})$ em dois pontos distintos

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y}) \rangle , \quad (2.65)$$

Devido a isotropia do espaço, podemos considerar a função de correlação como dependendo apenas da separação espacial $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Quando é assim, se diz que o campo é *estatisticamente homogêneo*.

Consideremos um certo elemento de volume dV , e o número de partículas nesse elemento de volume dado por $dN = \rho dV$ em que ρ é a densidade de matéria. Agora tomemos dois elementos de volume vizinhos dV_1 e dV_2 . Numa distribuição homogênea a densidade de partículas em cada elemento é respectivamente $dN_1 = \bar{\rho}dV_1$ e $dN_2 = \bar{\rho}dV_2$, e $d\bar{N}_{12}$ é o número de pares vizinhos randomicamente distribuídos sendo dado por

$$d\bar{N}_{12} = \langle dN_1 dN_2 \rangle = \bar{\rho}dV_1 dV_2 . \quad (2.66)$$

Agora consideremos as flutuações de densidade devido às instabilidades gravitacionais, sendo o contraste de densidade $\delta(\mathbf{x})$ dado por (2.40). Assim, a densidade de matéria em cada elemento de volume dV varia em cada ponto em relação a distribuição homogênea. Sendo assim, o número de pares vizinhos é

$$\begin{aligned} dN_{12} &= \langle dN_1 dN_2 \rangle \\ &= \langle \rho(\mathbf{x})dV_1 \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})dV_2 \rangle \\ &= \langle \bar{\rho}[1 + \delta(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{y}) + \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y})]dV_1 dV_2 \rangle \\ &= \bar{\rho}^2 \langle 1 + \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y}) \rangle dV_1 dV_2 \\ &= d\bar{N}_{12}(1 + \xi(\mathbf{r})) , \end{aligned} \quad (2.67)$$

em que usamos o fato que $\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle = 0$. Pela equação (2.67), podemos interpretar a função de correlação de dois pontos como um desvio em relação ao número de pares na distribuição homogênea. Essa interpretação nos leva a definir um estimador para medir a função de correlação como

$$\hat{\xi}(r) \equiv \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 , \quad (2.68)$$

em que $DD(r)$ representa o número de pares separados por uma distância r em um catálogo real de galáxias e $RR(r)$ representa o número de pares de um catálogo gerado randômicamente. Como vimos nas seções anteriores, costumamos evoluir as perturbações no espaço de Fourier. Para isso, definimos um equivalente a função de correlação de dois pontos (2.65) no espaço de Fourier como

$$P(\mathbf{k}) \equiv \langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}) \rangle , \quad (2.69)$$

a qual denominamos *espectro de potência*. Aplicando a definição da transformada de Fourier inversa (2.11), podemos definir o espectro de potência como a transformada de Fourier da função de correlação

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}) &= \int \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3x d^3y \\ &= \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r , \end{aligned} \quad (2.70)$$

assim como o espectro de potências é a transformada de Fourier (2.10) da função de correlação

$$\xi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k . \quad (2.71)$$

Assumindo isotropia espacial, a função de correlação depende apenas do módulo da distância $r = |\mathbf{r}|$, o espectro de potência depende apenas de $k = |\mathbf{k}|$:

$$P(k) = \int \xi(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr . \quad (2.72)$$

Até aqui tomamos distribuições de matéria em um mesmo número de onda \mathbf{k} , mas podemos ter médias em diferentes números de onda. Tomemos uma média em $\delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}')$:

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle &= \int \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} d^3x d^3y \\ &= \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} d^3r d^3y \\ &= \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} d^3y \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r \\ &= (2\pi)^3 P(\mathbf{k}) \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') , \end{aligned} \quad (2.73)$$

com a função *delta de Dirac* definida como

$$\delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} d^3y . \quad (2.74)$$

A equação (2.73) nos mostra que se os diferentes vetores de onda são não-correlacionados, o campo de matéria é estatisticamente homogêneo.

O espectro de potência teórico pode ser obtido evoluindo as equações de perturbação lineares para as diferentes componentes do universo e comparado com o espectro de potência obtido a partir de levantamentos observacionais, sendo assim um importante observável para testar modelos cosmológicos. Na figura (2.1), temos o espectro de potência da matéria com $\Omega_m = 1$ (modelo CDM) e $\Omega_m = 0.3$ (modelo Λ CDM). O espectro de potência foi calculado usando o código CLASS [115].

Na figura (2.2) temos o espectro de potência da matéria para um modelo de GCG para diferentes valores de α . Quando $\alpha \lesssim -10^{-5}$, as perturbações crescem exponencialmente por que a velocidade do som é negativa. E quando $\alpha \gtrsim 10^{-5}$, as perturbações oscilam amortecidamente. Dessa forma, o modelo do GCG só é viável para valores de $\alpha \approx 0$, em que o modelo é indistinguível do modelo Λ CDM.

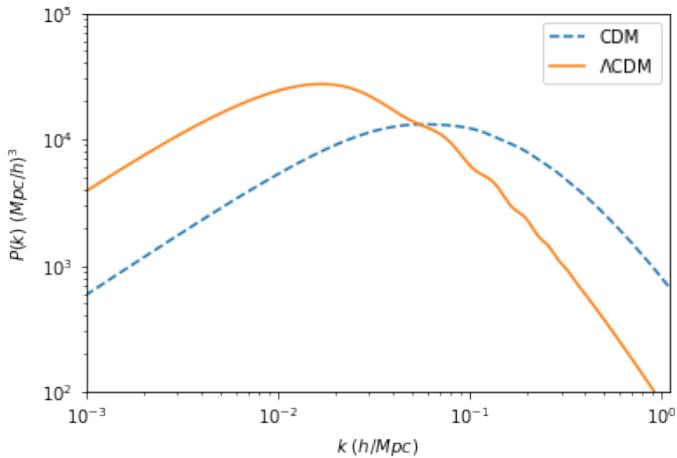


Figura 2.1: Espectro de potência da matéria em escala logarítmica para um modelo CDM e um modelo Λ CDM.

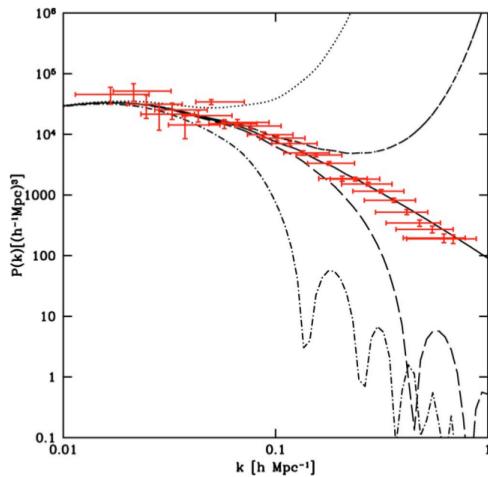


Figura 2.2: Espectro de potência da matéria em um modelo de GCG. De cima para baixo, cada curva corresponde respectivamente a $\alpha = -10^{-4}, -10^{-5}, 0, 10^{-5}, 10^{-4}$, respectivamente. Os dados plotados são do *2dF galaxy redshift survey*. O modelo do GCG só é viável para $\alpha = 0$ em que ele é indistinguível do modelo Λ CDM. Imagem retirada de [20].

2.6.1 Função janela e variância do espectro de potência

Na prática, os levantamentos observacionais catalogam galáxias discretas e não um campo contínuo de matéria, então precisamos *selecionar* a região em que o levantamento está sendo tomado. Para isso, é introduzida a *função janela* $W(\mathbf{x})$. Uma forma típica de seleção é considerar a função janela constante dentro da região e nula fora (função *top-hat*) e normalizada de forma

$$\int W(\mathbf{x}) dV = 1 \quad . \quad (2.75)$$

Com essa normalização, $W(\mathbf{x}) = 1/V$ dentro da região. A função janela esférica é aquela que seleciona uma região definida por uma esfera de raio R .

É importante expressar a variância do espectro de potência em termos da função janela. Tomemos uma contagem de galáxias n_i tomada dentro de uma célula finita, sendo

$$\sum_i \langle n_i^m \rangle = N_0 \quad , \quad (2.76)$$

em que $N_0 = \rho_0 V$ a contagem média e m é qualquer potência a qual n_i esteja elevado.

Para diferentes células, temos

$$\langle n_i n_j \rangle = \rho_0^2 (1 + \xi_{ij}) dV_i dV_j , \quad (2.77)$$

em que ξ_{ij} é a função de correlação.

A contagem em uma célula é $N = \sum_i n_i$. A variância (momento de segunda ordem) dessa contagem é dada por

$$M_2 = N_0^{-2} \langle (\Delta N)^2 \rangle = N_0^{-2} (\langle N^2 \rangle - N_0^2) , \quad (2.78)$$

em que $\Delta N = N - N_0$. O valor esperado $\langle N^2 \rangle$ é

$$\langle N^2 \rangle = \left\langle \sum n_i \sum n_j \right\rangle = \sum_i \langle n_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle = N_0 + N_0^2 \int W_i W_j (1 + \xi_{ij}) dV_i dV_j , \quad (2.79)$$

sendo que definimos a integral

$$\sigma^2 \equiv \int W_i W_j \xi_{ij} dV_i dV_j . \quad (2.80)$$

Uma vez que a função de correlação é a transformada de Fourier do espectro de potência (e vice-versa), teremos

$$\sigma^2 = (2\pi)^{-3} \int P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} W_i W_j d^3 k dV_i dV_j . \quad (2.81)$$

Tomando uma célula esférica de raio R e fazendo a integração angular, teremos

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi} \int dk k^2 W_R^2(k) P(k) , \quad (2.82)$$

em que $W_R^2(k) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} W_i dV_i \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} W_j dV_j$. Dessa forma, a integral (2.82) nos dá a variância do espectro de potência em uma dada região esférica de raio R . Se a célula possui um raio $R = 8h^{-1}$ Mpc, a variância σ_R é próxima de um. Sendo assim, definimos o parâmetro σ_8 que normaliza o espectro de potência.

Por sua vez, a variância da contagem (2.78) fica

$$M_2 = N_0^{-1} + \sigma^2 , \quad (2.83)$$

o que significa que ela é igual a variância do espectro de potências acrescida de um ruído N_0^{-1} .

A medida de σ_8 é tomada em um dado redshift (normalmente $z = 0$) e evolui como

$$\sigma_8(z) = \sigma_{8,0} D(z) , \quad (2.84)$$

em que $D(z)$ é a função de crescimento normalizada. A história da formação de estruturas normalmente é medida pela combinação entre a razão de crescimento $f(z)$ definida na em (2.62) multiplicada por $\sigma_8(z)$. A combinação $f\sigma_8(z)$ é interessante pois é independente do *bias* [116].

2.7 Espectro de potência angular da radiação cósmica de fundo

A radiação cósmica de fundo (CMB, do inglês *cosmic microwave background*) é a radiação residual do big bang, originada cerca de 300 mil anos após este quando os elétrons desacoplaram do fótons e estes puderam se propagar livremente pelo espaço. Foi descoberta por Arno Penzias e Robert Wilson em 1964 [117] o que lhes rendeu o prêmio Nobel de física em 1978. Se trata de uma radiação que premeia todo o universo vindo de todas as direções com uma temperatura bastante uniforme de cerca de $T_0 \approx 2.7255(6)$ K e flutuações de uma parte em 10^5 .

Essas flutuações de temperatura foram primeiramente descobertas pelo satélite COBE (Cosmic Background Explorer) em 1992 [118] e foram melhor estudadas pelo satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [119, 120] e pelo satélite Planck [3–5], que operou até 2013. Denotamos essas flutuações em relação a temperatura média por $\delta T(\hat{\mathbf{n}}) = T_0(\hat{\mathbf{n}}) - T_0$, sendo que o versor $\hat{\mathbf{n}}$ nos dá a direção em que está sendo feita a medição. As flutuações de temperatura são medidas ao longo de coordenadas angulares (θ, ϕ) e podem ser decompostas em séries de harmônicos esféricos

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \frac{\delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) , \quad (2.85)$$

sendo a_{lm} os coeficientes da expansão e podem ser obtidos pela relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos e $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$ as anisotropias na distribuição de fótons da CMB. Esses

coeficientes são variáveis estocásticas, sendo que sua média no ensemble tem a forma

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (2.86)$$

Podemos substituir a média no ensemble por uma média sobre m , definindo

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 . \quad (2.87)$$

Podemos então escrever o *espectro de potências angular* das anisotropias da radiação cósmica de fundo como

$$\langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}') \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta) , \quad (2.88)$$

em que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \equiv \cos \theta$ e P_l são os *polinômios de Legendre*. O que se busca medir são os coeficientes C_l 's do espectro angular¹ ao longo dos multipolos (de $l = 2$ até $l = 2500$) sendo que os multipolos estão relacionados com a escala angular por $\theta_l = \frac{\pi}{l}$ o que implica que pequenos multipolos são relacionados com grande ângulos e vice versa. O cálculo para obtenção do espectro de potência angular da CMB é bastante complexo, exigindo uso de computação numérica. Para isso, são utilizados os chamados *códigos de Einstein-Boltzmann*, cujo os mais utilizados atualmente são o CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background) em linguagem Fortran [121, 122] e o já referido CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System) em linguagem C [115].

2.7.1 Efeito Sachs-Wolfe e efeito Sachs-Wolfe integrado

A determinação das anisotropias $\Theta(\hat{\mathbf{n}})$ passa pelo cálculo da trajetória dos fótons da CMB desde a superfície de último espalhamento (quando os fótons passaram a se propagar livremente) até os observadores. Para isso, precisamos usar a equação da geodésica

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta , \quad (2.89)$$

em que $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$ é o quadri-momento dos fótons e λ é um parâmetro afim. A equação da geodésica resulta para o momento do fóton p (em que $p = g_{ij} P^i P^j$) na expressão

$$\frac{d}{d\tau} \ln(ap) = -\frac{d\Phi}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial \tau}(\Phi + \Psi) , \quad (2.90)$$

¹Na verdade o que é medido é a grandeza $\mathcal{D}_l \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$

em que Ψ e Φ são os potenciais do gauge newtoniano (2.13). Quando o fóton se propaga livremente (lado direito nulo) então $p \propto a^{-1}$ que é o redshift devido a expansão do universo. Os termos inhomogêneos descrevem o ganho e perda de energia quando o fóton passa por barreiras de potencial.

Ao integrarmos a geodésica (2.90) ao longo da linha de visada de um tempo τ_* quando ocorreu o último espalhamento até τ_0 hoje, obtemos

$$\ln(ap)_0 = \ln(ap)_* + (\Phi_* - \Phi_0) + \int_{\tau_*}^{\tau_0} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}(\Phi + \Psi) . \quad (2.91)$$

O momento do fóton se relaciona com as anisotropias $ap \propto aT_0(1 + \Theta)$. Por sua vez, a anisotropia em τ_* é $\Theta_* = \frac{1}{4}(\delta_\gamma)_*$ sendo $\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma$ ². Devemos adicionar a (2.91) um termo $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_e$ que representa um desvio Doppler extra devido ao espalhamento dos fótons com os elétrons. Por fim, a solução para as anisotropias da CMB é dada por

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \Phi + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_e \right)_* + \int_{\tau_*}^{\tau_0} d\tau (\Phi' + \Psi') . \quad (2.92)$$

O primeiro termo da solução é chamado termo de *Sachs-Wolfe* (SW) [123] e representa o redshift gravitacional que os fótons da CMB sofrem ao passar por barreiras de potencial durante o último espalhamento. Já o segundo é o termo de *Sachs-Wolfe integrado* (ISW) que descreve o redshift gravitacional oriundo da variação temporal dos potenciais ao longo da linha de visada.

Como apontado por [124] o efeito Sachs-Wolfe integrado pode ser um excelente observável para sondar a energia escura, pois se trata de um efeito observado tarde e está correlacionado com a função de crescimento de estruturas D , uma vez que $\Phi' \propto D$. Foi detectado no primeiro ano de tomada de dados do WMAP [125]. É um efeito que se pronuncia em grandes ângulos ($l \lesssim 10$) conforme podemos ver na figura (2.3) em que a amplitude do espectro de potências angular aumenta em baixos l a medida que a energia escura domina. Já o efeito da dominância da matéria é a redução do pico acústico. Para uma revisão mais completa, ver [126].

²O fator de 1/4 vem do fato que $\rho_\gamma \propto T_0^4$

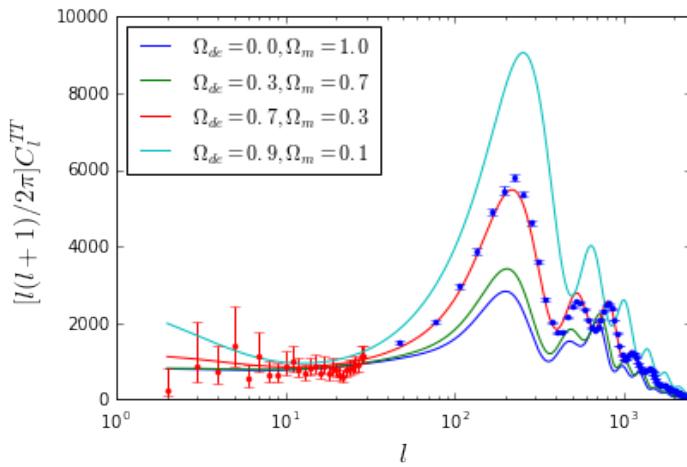


Figura 2.3: Espectro de potência angular da CMB para diferentes combinações entre Ω_m e Ω_{de} . Temos também as medidas de \mathcal{D}_l para baixos l 's (vermelho) e altos l 's (Azul) feitas pelo satélite Planck, em que vemos que a combinação que melhor se ajusta é $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_{de} = 0.7$.

Capítulo 3

Física de Ondas Gravitacionais

3.1 Introdução

Nos dois primeiros capítulos discutimos a cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), sendo o primeiro capítulo dedicado ao *background* homogêneo e isotrópico e o segundo capítulo dedicado às perturbações lineares. Neste terceiro capítulo, mudaremos um pouco o foco e trataremos da física de ondas gravitacionais. Assim como no capítulo anterior, investigaremos a teoria da relatividade geral no regime de perturbações lineares, só que desta vez a métrica de fundo será a métrica plana de Minkowski. Mostraremos que as Equações de Einstein no regime linear pode ser escrita como uma equação de onda, o que significa que a gravidade (identificada com a curvatura do espaço-tempo) se propaga como uma onda. Veremos como a passagem dessas ondas gravitacionais podem ser aferidas pela mudança periódica na distância entre massas teste e como elas são geradas por pares binários coalescentes. Por fim, falaremos de como ondas gravitacionais se propagam em um universo em expansão.

3.2 Relatividade Geral Linearizada

3.2.1 Métrica de Campo Fraco

De forma análoga a feita no capítulo anterior, consideramos um regime de campo gravitacional fraco, em que a métrica de fundo é a de Minkowski descrevendo um espaço-tempo plano, e o campo gravitacional é descrito como uma pequena perturbação em torno do espaço-tempo plano. Análogo à (2.1), temos que a métrica total é composta da métrica de Minkowski acrescida de uma pequena perturbação, *i.e.*

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.1)$$

A partir desta métrica, expandiremos as equações de movimento em primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, a qual chamamos de *teoria linearizada*. Precisamos escolher um referencial em que a equação (3.1) se mantenha válida em uma região suficientemente grande do espaço. No entanto, ao escolher um referencial quebramos a invariância da relatividade geral sob transformações de coordenadas. Portanto, ao escolhermos um referencial em que (3.1) seja válida, teremos uma liberdade de gauge residual.

Primeiro consideraremos uma transformação de coordenadas sob uma translação infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\mu), \quad (3.2)$$

em que a derivada do vetor ξ é da mesma ordem da métrica perturbada $|\partial_\mu \xi_\nu| \lesssim |h_{\mu\nu}|$. O tensor métrico se transforma pela lei

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \mathcal{O}(2), \end{aligned}$$

o que significa que a métrica perturbada se transforma como

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu). \quad (3.3)$$

A transformação (3.3) nos diz que a métrica $h_{\mu\nu}$ pode ser definida a menos de uma função vetorial, dando uma liberdade de gauge na escolha da métrica perturbada. Também

podemos considerar uma transformação de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad , \quad (3.4)$$

em que a métrica (3.1) se transforma como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &\rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}(x) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma} \quad , \end{aligned}$$

o que significa que a métrica perturbada se transforma como

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu h_{\rho\sigma}(x) \quad . \quad (3.5)$$

A equação (3.5) nos diz que $h_{\mu\nu}$ segue a lei de transformação de um tensor sob transformações de Lorentz. Isso significa que podemos tratar $h_{\mu\nu}$ como um campo tensorial de ordem-2 se propagando pelo espaço-tempo de Minkowski.

3.2.2 Equações de Einstein Linearizadas

Para obter as Equações de Einstein no regime linear precisamos do símbolo de Christoffel, do tensor de Riemann, do tensor de Ricci e do escalar de Ricci; dados respectivamente por

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_\beta h^\mu_\alpha + \partial_\alpha h^\mu_\beta - \partial^\mu h_{\alpha\beta}) \quad , \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\beta h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\beta}) \quad , \\ R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\alpha h^\alpha_\mu + \partial_\mu \partial_\alpha h^\alpha_\nu - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \quad , \\ R &= \frac{1}{2}(\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\beta \partial_\beta h) \quad , \end{aligned}$$

em que $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. As Equações de Einstein podem ser escritas de forma mais compacta se escrevermos em termos da métrica traço-reversa $\bar{h}_{\mu\nu}$ definida como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad . \quad (3.6)$$

Observe que o traço $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h$. Podemos linearizar o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ e obter as Equações de Einstein linearizadas como

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad , \quad (3.7)$$

sendo o operador D'Alambertiano $\square \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Podemos simplificar (3.7) escolhendo um gauge específico para $\bar{h}_{\mu\nu}$ chamado *gauge de Lorentz*

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Aplicando a transformação de gauge (3.3) a $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\xi_\sigma \quad , \quad (3.9)$$

e tomado a derivada em relação à x^ν obtemos

$$\partial^\nu h'_{\mu\nu} = \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square\xi_\mu \quad . \quad (3.10)$$

Se impusermos o gauge de Lorentz no sistema ' então teremos $\partial^\nu h_{\mu\nu} = f_\mu(x)$ sendo $f_\mu(x)$ alguma função de tal maneira que $\partial^\nu h'_{\mu\nu} = 0$. Sendo assim

$$\square\xi_\mu = f_\mu(x) \quad . \quad (3.11)$$

Usando o gauge de Lorentz (3.8) em (3.7), podemos escrever as Equações de Einstein Linearizadas como equação de onda

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.12)$$

o que significa que as perturbações gravitacionais se propagam como ondas no espaço de Minkowski.

3.3 Propagação das Ondas Gravitacionais no Vácuo

No vácuo (3.12) se reduz a

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (3.13)$$

que admite uma solução de onda plana

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu}e^{ik_\rho x^\rho}] \quad , \quad (3.14)$$

em que \Re denota que estamos tomando a parte real. Da equação de onda (3.13) temos o vínculo

$$k_\rho k^\rho = 0 \quad , \quad (3.15)$$

que nos diz que o vetor de onda k_ρ é nulo e portanto que a onda gravitacional se propaga com a mesma velocidade que a da luz no vácuo. Temos também o vínculo imposto pelo gauge de Lorentz (3.8)

$$A_{\mu\nu}k^\nu = 0 \quad , \quad (3.16)$$

que nos diz que a direção de propagação da onda é ortogonal a sua polarização, ou em outras palavras, a onda é transversa à direção de propagação. A métrica possui 10 componentes independentes, que reduzem para 6 devido à condição do Gauge de Lorentz. Podemos reduzir mais quatro graus de liberdade, se em (3.11) escolhermos $f_\mu(x)$ de forma que $\square\xi_\mu = 0$. Se esta condição valer, então vale $\square\xi_{\mu\nu} = 0$ em que $\xi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\sigma\xi_\sigma$, já que o D'Alambertiano e ∂_μ comutam.

O tensor $\xi_{\mu\nu}$ aparece na condição de gauge (3.9), sendo assim, podemos escolher ξ_0 de forma que o traço $\bar{h} = 0$, o que implica que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. E podemos escolher ξ_i de forma que $h_{0i} = 0$. Sendo assim, do gauge de Lorentz obtemos que a componente temporal h_{00} deve ser nula e que $\partial^i h_{ij} = 0$, ou seja, a parte espacial possui divergência nula. As três condições, a saber

$$h_{\mu 0} = 0 \quad , \quad h^i{}_i = 0 \quad , \quad \partial^i h_{ij} = 0 \quad , \quad (3.17)$$

definem o gauge *transverso de traço nulo* (Gauge TT). Neste gauge, restam apenas dois graus de liberdade. Da condição de traço nulo, temos que $h_{xx} = -h_{yy} = h_+$ e da condição de simetria da métrica, temos que $h_{xy} = h_{yx} = h_\times$. Os modos “+” e “×” correspondem as duas polarizações da onda gravitacional. Dado que a onda se propaga na direção z , $h_{\mu\nu}^{TT}$ pode ser escrito como

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t-z)] \quad . \quad (3.18)$$

3.4 Interação com massas teste

3.4.1 Referencial do Gauge TT

A detecção de ondas gravitacionais se dá pela interação com um detector, aqui representado por um anel de massas teste. A passagem de uma onda gravitacional provoca uma deformação nesse anel, e consequentemente, uma variação na separação espacial entre as massas teste. A trajetória de uma partícula no espaço-tempo é dada pela solução da equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad , \quad (3.19)$$

que nada mais é do que uma generalização da segunda lei de Newton. Também podemos considerar duas geodésicas separadas por uma distância infinitesimal ζ^μ no espaço-tempo, e obter a equação do *desvio geodésico*

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\zeta^\rho}{d\tau} + \zeta^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad . \quad (3.20)$$

Consideramos a massa teste em repouso em $\tau = 0$ ¹, logo

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{d\tau^2} &= - \left[\Gamma_{\nu\rho}^i \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right]_{\tau=0} \\ &= - \left[\Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \right]_{\tau=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

já que

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} (2\partial_0 h_{00}^i - \partial^i h_{00}) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Portanto a massa teste no referencial TT que inicialmente estava em repouso continua em repouso. Consideremos agora uma separação infinitesimal de coordenadas espaciais ζ^i entre duas massas teste inicialmente em repouso entre elas em $\tau = 0$. Da equação do

¹Aqui τ é o tempo próprio da partícula

desvio geodésico (3.20), temos que a separação espacial obedece

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta^i}{d\tau^2} &= - \left[2\Gamma_{0\rho}^i \frac{d\zeta^\rho}{d\tau} + \zeta^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{00}^i \right]_{\tau=0} \\ &= - \left[\dot{h}_{ij} \frac{d\zeta^i}{d\tau} \right]_{\tau=0} \\ &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

já que $\Gamma_{0j}^i = (1/2)\partial_0 h_{ij}$ e $d\zeta^i/d\tau = 0$ em $\tau = 0$. Este resultado nos mostra que duas massas separadas por uma separação de coordenadas ζ^i não apresentam variação entre elas, logo, as ondas gravitacionais não influenciam nas geodésicas nem no desvio geodésico.

Os efeitos físicos da passagem de uma onda gravitacional é mensurado pela variação na *distância própria* entre as duas massas teste. Consideremos dois eventos em $(t, x_1, 0, 0)$ e $(t, x_2, 0, 0)$ separados pela distância $L = x_2 - x_1$ no referencial do gauge TT. A distância própria é

$$\begin{aligned}s &= \int ds \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + h_+ \cos \omega t} \\ &\approx L \left(1 + \frac{1}{2} h_+ \cos \omega t \right) \quad .\end{aligned}\tag{3.21}$$

Portanto, a distância própria muda periodicamente no tempo.

3.4.2 Referencial Próprio do Detector

Para efeitos práticos, é apropriado escolher um referencial próprio para o detector capaz de medir variações na distância própria, ao invés de um referencial em queda livre caracterizado pelo gauge TT. Neste caso, o elemento de linha nas proximidades do detector é escrito como

$$ds^2 \approx -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O} \left(\frac{x^i x^j}{L_B^2} \right) \quad ,\tag{3.22}$$

em que L_B denota variações típicas da escala da métrica. Consideremos novamente a equação do desvio geodésico (3.20) para duas massas teste separadas por ζ^i . Consideremos que o detector se move não-relativisticamente, o que implica que $dx^i/d\tau \ll dx^0/d\tau$ e que

$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = 0$ no ponto P em que tomamos a expansão. Desse modo, temos

$$\frac{d^2\zeta^i}{d\tau^2} + \zeta^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad . \quad (3.23)$$

Do elemento de linha (3.22), teremos que as contribuições não nulas virão de termos somente com derivadas espaciais, logo, $\partial_0 \Gamma_{00}^i = 0$ e $\zeta^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{00}^i = \zeta^j \partial_j \Gamma_{00}^i$ e $R_{0j0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^j - \partial_0 \Gamma_{0j}^i$. Logo,

$$\frac{d^2\zeta^i}{d\tau^2} + R_{0j0}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad . \quad (3.24)$$

Podemos tomar o limite $dx^0/d\tau \approx 1$ e aproximar $\tau \approx t$, o que nos permite escrever

$$\ddot{\zeta}^i = -R_{0j0}^i \xi^j \quad . \quad (3.25)$$

E usando do fato que o tensor de Riemann é invariante sob a transformação de Gauge (3.3), podemos calcular seu valor no referencial do gauge TT ao invés do referencial do detector, o que significa que $R_{0j0}^i = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}$ e que

$$\ddot{\zeta}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \zeta^j \quad . \quad (3.26)$$

Essa equação nos diz que no referencial próprio do detector, a massa está sujeita a uma *força Newtoniana* devido a passagem da onda gravitacional. Porém, este resultado só pode ser usado se $L \ll \lambda$, em que L denota a escala de comprimento típica do detector e $\lambda = \lambda/(2\pi)$ é o comprimento de onda reduzido da onda gravitacional. Para o detector LIGO ($\lambda \approx 10^5$ m e $L \approx 10^3$ m) a equação de desvio geodésico é válida, enquanto que para o detector LISA ($\lambda \approx 10^{10}$ m e $L \approx 10^9$ m) não, sendo necessário um tratamento não aproximado.

Vamos considerar uma onda gravitacional se propagando na direção z e passando por um anel de massas teste localizado no plano (x, y) . As duas polarizações $+$ e \times são independentes e podem ser tratadas separadamente. Por exemplo, a polarização $+$ é dada por

$$h_{ab}^{TT} = h_+ \cos \omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.27)$$

em que $a, b = (1, 2)$. No referencial próprio do detector a posição das massas é denotada por $\zeta^a(t) = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t))$, em que (x_0, y_0) são as posições não perturbadas e

$(\delta x(t), \delta y(t))$ são as perturbações devido a passagem da OG. A evolução de $\zeta^a(t)$ causada pela polarização + é dada por (3.26)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\delta x} \\ \ddot{\delta y} \end{pmatrix}_+ &= -\frac{h_+}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \delta x \\ y_0 + \delta y \end{pmatrix} \omega^2 \cos \omega t \\ &\approx -\frac{h_+}{2} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \omega^2 \cos \omega t , \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que estamos tomando somente os termos de $\mathcal{O}(h)$. Resolvendo (3.28), obtemos que a polarização + provoca um desvio na posição das massas teste dada por

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}_+ = \frac{h_+}{2} \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} \cos \omega t . \quad (3.29)$$

Semelhantemente, obtemos que a polarização \times é descrita por

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}_\times = \frac{h_\times}{2} \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \cos \omega t . \quad (3.30)$$

O efeito das deformações podem ser visualizados na fig. (3.1) abaixo, e que podemos entender porque as polarizações recebem o nome de + e \times .

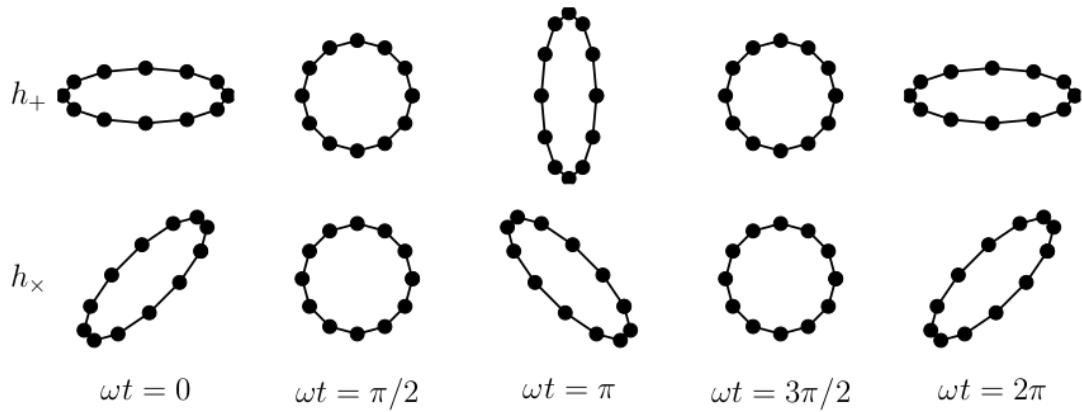


Figura 3.1: Deformações no anel de massas teste causado pelas polarizações + e \times . Extraído de [96].

3.5 Energia e momento das ondas gravitacionais

Como vimos, a passagem de ondas gravitacionais desloca massas teste de suas posições originais, o que indica que GW's transportam energia e momento. No entanto, segundo a teoria da relatividade geral, qualquer fonte de energia contribui para a curvatura do espaço-tempo, que sentimos como a gravitação. Ora, se as GW's tem energia e momento associada, logo, elas também contribuem para a curvatura do espaço-tempo. Fisicamente falando, *a própria gravitação gravita*. Isso indica que para descrevermos os efeitos do transporte de energia e momento das GW's, teremos que considerar uma expansão até segunda ordem na métrica

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} , \quad (3.31)$$

em que $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo que será curvada, $h_{\mu\nu}^{(1)}$ e $h_{\mu\nu}^{(2)}$ são as perturbações de primeira e segunda ordem respectivamente. Nessa aproximação, o tensor de Ricci é escrito como

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(1)}] + R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] + R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(2)}] , \quad (3.32)$$

com $\bar{R}_{\mu\nu}$ sendo o termo de ordem zero. O termo $R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}]$ representa o tensor de Ricci de segunda ordem em relação ao termo de primeira ordem da perturbação da métrica, enquanto $R_{\mu\nu}^{(1)}h^{(2)}$ representa o termo de primeira ordem do tensor de Ricci em relação ao termo de segunda ordem da expansão da métrica.

Em geral, não existe uma forma não ambígua de distinguir a perturbação do background, já que a métrica do background pode variar devido a variações locais do potencial gravitacional, o que dificulta a definição de uma densidade de energia associada as GW's. No entanto, podemos separar o background das ondas gravitacionais por meio de escalas de comprimento características. Temos a escala de comprimento L_B que nos dá a distância característica da métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$, e a escala λ para o qual a perturbação $h_{\mu\nu}$ varia. Introduzimos a *aproximação de onda curta*, em que assumimos que as variações de comprimento típicas da GW's são muito menores que a da métrica de fundo, i.e. $\lambda \ll L_B$. Também introduzimos uma escala de comprimento intermediária l para a qual $\lambda \ll l \ll L_B$ e assim separamos a parte suave das flutuações devido a GW.

Tomamos uma média sobre o volume espacial limitado pelo comprimento l , denotada

$\langle \dots \rangle$. As flutuações próximo da escala de λ oscilam muito rápido e na média tendem a zero, enquanto as na escala de L_B tendem a ficar constantes. Assim, podemos separar o tensor de Ricci em uma parte suave e uma parte flutuante

$$R_{\mu\nu}^{(\text{suave})} = \bar{R}_{\mu\nu} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] \rangle_l \quad , \quad (3.33)$$

$$R_{\mu\nu}^{(\text{flut})} = R_{\mu\nu}^{(1)}[h^{(1)} + h^{(2)}] + R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] - \langle R_{\mu\nu}^{(2)}[h^{(1)}] \rangle_l \quad . \quad (3.34)$$

Consideremos somente a parte suave do tensor de Ricci (3.33) e podemos escrever as equações de Einstein da forma

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = 8\pi G t_{\mu\nu} \quad , \quad (3.35)$$

em que $t_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento das ondas gravitacionais definido como

$$t_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \right\rangle_l \quad , \quad (3.36)$$

em que $R^{(2)} = \bar{g}^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^{(2)}$. A forma explícita do tensor de Ricci de segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} - h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{\alpha\mu} \right. \\ & + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} + \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\alpha\nu} \\ & \left. + \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta} \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\mu h_{\alpha\nu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha h \partial_\nu h_{\alpha\mu} \right] \quad . \quad (3.37) \end{aligned}$$

Podemos simplificar a expressão acima ao tomarmos a média sobre o comprimento l . Fazendo integração por partes, fazendo os termos de superfície indo a zero e usando das condições de gauge $\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0$, $h = 0$ e a equação de onda $\square h_{\alpha\beta} = 0$, o tensor de Ricci de segunda ordem se reduz a

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad . \quad (3.38)$$

Substituimos (3.38) em (3.36), obtemos

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad . \quad (3.39)$$

Desta expressão, decorre que a energia e o momento irradiado por unidade de tempo através de uma esfera de raio r através da emissão de ondas gravitacionais (assumindo o

gauge TT) é

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r^2}{32\pi G} \int_{\Omega} d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle_l \quad , \quad (3.40)$$

$$\frac{dP^k}{dt} = -\frac{r^2}{32\pi G} \int_{\Omega} d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \partial^k h_{ij}^{TT} \rangle_l \quad . \quad (3.41)$$

3.6 Geração de ondas gravitacionais

3.6.1 Expansão de multipolos

Na presença de fontes, as equações de Einstein linearizadas são escritas como

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad , \quad (3.42)$$

que pode ser resolvida pelo método da função de Green

$$\square_x G(x-y) = \delta^4(x-y) \quad . \quad (3.43)$$

Aqui denotamos que o operador D'Alambertiano \square_x atua na variável x . A solução correspondente a (3.42) é dada por

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -16\pi G \int d^4y G(x-y) T_{\mu\nu}(y) \quad . \quad (3.44)$$

A forma da função de Green apropriada é a da função de Green retardada

$$G(x-y) = -\frac{1}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} \delta(x_{ret}^0 - y^0) \quad , \quad (3.45)$$

em que $x_{ret}^0 = t_{ret} = t - |\vec{x} - \vec{y}|$ é o tempo retardado. Considerando (3.45), a solução (3.44) passa a ser dada por

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3\vec{y} \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (3.46)$$

No gauge TT, a solução é dada fazendo a projeção $h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}$, resultando em

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = 4G \Lambda_{ij,kl} \int d^3\vec{y} \frac{T_{kl}(t - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad , \quad (3.47)$$

em que o operador projeção é definido por

$$\Lambda_{ij,kl} \equiv P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad , \quad P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j \quad , \quad (3.48)$$

em que n_i é a direção de propagação da GW.

Podemos simplificar o tensor Energia-Momento tomando o limite em que a velocidade típica das fontes é muito pequena se comparada à velocidade da luz. A fonte tem uma frequência típica $\omega_s \sim v/d$ em que v é a velocidade típica dentro das fontes e d é o tamanho desta. Se $v \ll c$, o comprimento de onda reduzido da GW gerada $\lambda \sim \frac{c}{v}d \gg d$ é muito maior que o tamanho da fonte. Nesse regime de baixas velocidades, podemos fazer a expansão de multipolos

$$\begin{aligned} T_{kl}(t - r + \vec{y} \cdot \vec{n}, \vec{y}) &\approx T_{kl}(t - r, \vec{y}) + y^i n^i \partial_0 T_{kl}(t - r, \vec{y}) \\ &+ \frac{1}{2} y^i y^j n^i n^j \partial_0^2 T_{kl}(t - r, \vec{y}) + \dots , \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que introduzimos os momentos de multipolo

$$S^{ij}(t) = \int d^3 \vec{y} T^{ij}(t, \vec{y}) , \quad (3.50)$$

$$S^{ijk}(t) = \int d^3 \vec{y} T^{ij}(t, \vec{y}) y^k , \quad (3.51)$$

$$S^{ijkl}(t) = \int d^3 \vec{y} T^{ij}(t, \vec{y}) y^k y^l . \quad (3.52)$$

Inserindo as expressões (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52) em (3.47), obtemos

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G\Lambda_{ij,kl}}{r} \left[S^{kl} + n_m \dot{S}^{klm} + \frac{1}{2} n_m n_p \ddot{S}^{klmp} + \dots \right]_{\text{ret}} , \quad (3.53)$$

em que o subscrito “ret” diz que a expressão dentro dos colchetes são evoluídas em relação ao tempo retardado $t_{\text{ret}} = t - r$. Podemos usar a conservação do tensor energia-momento para eliminar T^{ij} em favor das densidades de energia T^{00} e de momento T^{0i} . Portanto, podemos definir os momentos de densidade de energia (M):

$$M = \int d^3 \vec{y} T^{00}(t, \vec{y}) , \quad (3.54)$$

$$M^i = \int d^3 \vec{y} T^{00}(t, \vec{y}) y^i , \quad (3.55)$$

$$M^{ij} = \int d^3 \vec{y} T^{00}(t, \vec{y}) y^i y^j , \quad (3.56)$$

$$M^{ijk} = \int d^3 \vec{y} T^{00}(t, \vec{y}) y^i y^j y^k , \quad (3.57)$$

e de momento linear (P):

$$P^i = \int d^3\vec{y} T^{0i}(t, \vec{y}) , \quad (3.58)$$

$$P^{ij} = \int d^3\vec{y} T^{0i}(t, \vec{y}) y^j , \quad (3.59)$$

$$P^{ijk} = \int d^3\vec{y} T^{0i}(t, \vec{y}) y^j y^k . \quad (3.60)$$

Através de $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ podemos relacionar os momentos de densidade de energia e momento linear. Identidades úteis são

$$\dot{M} = 0 , \quad \dot{M}^i = P^i , \quad \dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i} , \quad \dot{M}^{ijk} = P^{i,jk} + P^{jk,i} + P^{ki,j} ,$$

$$\dot{P}^i = 0 , \quad \dot{P}^{i,j} = S^{ij} , \quad \dot{P}^{i,jk} = S^{ij,k} + S^{ik,j} .$$

Uma outra relação interessante é $P^{i,j} - P^{j,i} = S^{ij} - S^{ji} = 0$, o que significa que $P^{i,j} = P^{j,i}$. Combinando essas identidades, podemos escrever os dois primeiros termos da expansão (3.53) como

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij} , \quad (3.61)$$

$$S^{ijk} = \frac{1}{6} \ddot{M}^{ijk} + \frac{1}{3} (\ddot{P}^{ijk} + \ddot{P}^{jik} - 2\ddot{P}^{kij}) . \quad (3.62)$$

Dessa forma, os momentos estão escritos em termos da densidade de energia e momento linear.

3.6.2 Quadrupolo de massa

Tomemos o primeiro termo da expansão (3.53) aplicando a relação (3.61)

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} = \frac{2G}{r} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t-r) . \quad (3.63)$$

Este termo de primeira ordem é comumente denominado como *radiação do quadrupolo de massa*. É conveniente expressar (3.63) em termos do *memento de quadrupolo reduzido*

$$\begin{aligned} Q^{ij} &\equiv M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} \\ &= \int d^3\vec{x} \rho(t, \vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \right) , \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que convém lembrar que $\rho = T^{00}$. Usando a definição (3.64) em (3.63), obtemos

$$\begin{aligned} [h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} &= \frac{2G}{r} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}^{kl}(t-r) \\ &= \frac{2G}{r} \ddot{Q}_{ij}^{TT} . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Aqui fizemos uso do fato de que o operador projeção aplicado no segundo termo de (3.64) é nulo, de forma que $\Lambda_{ij,kl} M^{kl} = \Lambda_{ij,kl} Q^{kl}$. Podemos construir a forma dos modos de polarização h_+ e h_\times para uma onda viajando na direção z :

$$h_+ = \frac{G(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})}{r} , \quad (3.66)$$

$$h_\times = \frac{2G\ddot{M}_{12}}{r} . \quad (3.67)$$

Já a energia e o momento irradiado por unidade de tempo podem ser obtidas ao substituirmos (3.65) em (3.40) e (3.41) respectivamente:

$$\frac{dE_{\text{quad}}}{dt} = \frac{1}{8\pi G} \int d\Omega \ddot{Q}_{ij}^{TT} \ddot{Q}_{ij}^{TT} , \quad (3.68)$$

$$\frac{dP_{\text{quad}}^k}{dt} = -\frac{1}{8\pi G} \int d\Omega \ddot{Q}_{ij}^{TT} \partial^k \ddot{Q}_{ij}^{TT} . \quad (3.69)$$

Como toda a dependência angular está no operador projeção, podemos resolver a integral angular usando a identidade

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) , \quad (3.70)$$

e obtemos que a energia irradiada de quadrupolo é dada por

$$\frac{dE_{\text{quad}}}{dt} = \frac{G}{5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle . \quad (3.71)$$

Uma coisa importante a se observar é que a integral de momento (3.69) é nula, pois o momento de quadrupolo é invariante por troca de paridade $x^i \rightarrow -x^i$, no entanto a derivada não é. Logo, não há perda de momento devido a radiação de quadrupolo.

3.6.3 Radiação de quadrupolo emitida por pares binários

Pares binários são sistemas compostos por dois objetos de massa m_1 e m_2 orbitando um centro de massa comum. A distância entre os dois objetos é denotada por R e a

distância do sistema ao observador é denotada por r . Consideremos o observador estando no eixo z , o plano orbital intercepta o eixo x e a origem do sistema coincide com o centro de massa. O ângulo entre a linha normal ao plano orbital e a linha de visão do observador é chamado ι . O sistema está esquematizado na figura (3.2).

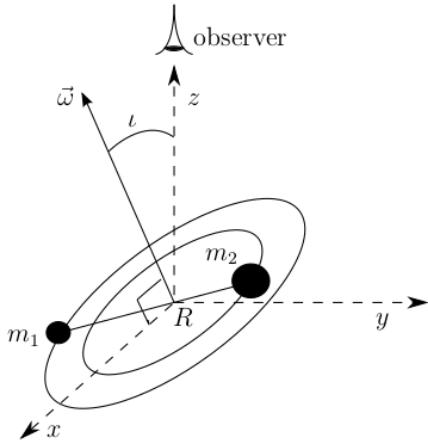


Figura 3.2: Sistema de pares binários de massa m_1 e m_2 separados por uma distância R e a uma distância r do observador localizado no eixo z . Extraído de [96].

Nesse sistema de coordenadas a localização das massas é dado por

$$\vec{y}_1(t) = \frac{\mu R}{m_1} \hat{e}(t) \quad , \quad (3.72)$$

$$\vec{y}_2(t) = -\frac{\mu R}{m_2} \hat{e}(t) \quad , \quad (3.73)$$

em que $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida e o versor $\hat{e}(t) = (\cos \omega t, \cos \iota \sin \omega t, \sin \iota \sin \omega t)$. Como a onda se propaga em $\hat{n} = (0, 0, 1)$, então a ação do operador projeção no quadrupolo de massa $\Lambda_{ij,kl} M^{kl}$ que aparece na expressão (3.63) é nulo para todas as componentes de $k, l = 3$, portanto, só iremos considerar as componentes de $i, j = 1, 2$ no quadrupolo de massa, cujo a forma é

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \int d^3 \vec{y} \rho(t, \vec{y}) y^i y^j \\ &= \int d^3 \vec{y} [m_1 \delta^3(\vec{y} - \vec{y}_1) + m_2 \delta^3(\vec{y} - \vec{y}_2)] y^i y^j \\ &= \mu R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \frac{1}{2} \cos \iota \sin 2\omega t \\ \frac{1}{2} \cos \iota \sin 2\omega t & \cos^2 \iota \sin^2 \omega t \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.74)$$

Usando (3.66) e (3.67), temos os modos de polarização dados por

$$h_+ = \frac{4G\mu\omega^2 R^2}{r} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega t_{\text{ret}}) \quad , \quad (3.75)$$

$$h_\times = \frac{4G\mu\omega^2 R^2}{r} \cos \iota \sin(2\omega t_{\text{ret}}) \quad . \quad (3.76)$$

Podemos considerar as massas suficientemente distantes para usar uma aproximação newtoniana e relacionar a frequência orbital com o raio pela terceira lei de Kepler

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3} \quad , \quad (3.77)$$

em que $M = m_1 + m_2$. E definimos convenientemente a *Chirp Mass*

$$\mathcal{M}_c \equiv M^{2/5} \mu^{3/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad , \quad (3.78)$$

de forma a usarmos (3.77) e (3.78) para eliminar R em (3.75) e (3.76)

$$h_+ = \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\omega t) \quad , \quad (3.79)$$

$$h_\times = \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3} \omega^{2/3}}{r} \cos \iota \sin(2\omega t) \quad . \quad (3.80)$$

Para obtermos a energia irradiada podemos usar (3.40)

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{quad}}}{dt} &= \frac{r^2}{16\pi G} \int_{\Omega} d\Omega \langle \dot{h}_+ + \dot{h}_\times \rangle \\ &= \frac{2G\mu^2 R^2 \omega^6}{\pi} \int_{\Omega} d\Omega g(\iota) \quad , \end{aligned}$$

em que

$$g(\iota) \equiv \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right)^2 + \cos^2 \iota \quad . \quad (3.81)$$

A integral da função $g(\iota)$ sobre o ângulo sólido resulta em

$$\int_{\Omega} \frac{d\Omega g(\iota)}{4\pi} = \frac{4}{5} \quad . \quad (3.82)$$

Por fim, temos a potência irradiada devido ao quadrupolo dada por

$$\frac{dE_{\text{quad}}}{dt} = \frac{32G\mu^2}{5} R^4 \omega^6 \quad . \quad (3.83)$$

Temos a energia orbital do sistema dada por $E_{\text{orb}} = -\frac{GM\mu}{2R}$ e a perda dessa energia é devido a emissão de ondas gravitacionais dada em (3.83), i.e., $\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = \frac{GM\mu}{2R^2} \dot{R} = -\frac{dE_{\text{quad}}}{dt}$.

Diferenciando (3.77) no tempo, obtemos a relação $\dot{R} = -\frac{2}{3}R\frac{\dot{\omega}}{\omega}$, e daí podemos combinar com a relação de perda de energia, para obter a taxa de variação da frequência orbital

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5}\omega^{11/3}G^{5/3}\mu M^{2/3} = \frac{96}{5}\omega^{11/3}(GM_c)^{5/3} , \quad (3.84)$$

ou em termos de $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\dot{f} = \frac{96}{5}\pi^{8/3}f^{11/3}(GM_c)^{5/3} . \quad (3.85)$$

Ao integrarmos (3.85), obtemos

$$f_{\text{gw}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{3/8} (GM_c)^{-5/8} , \quad (3.86)$$

em que $\tau = t_{\text{coal}} - t$, sendo t_{coal} o tempo de coalescência. A expressão (3.86) nos mostra que a frequência f_{gw} diverge em um tempo finito. E ao substituirmos (3.86) em (3.79) e (3.80), vemos que ao se aproximar da coalescência, tanto a amplitude quanto a frequência da onda divergem até infinito (fig. (3.3)). Esse comportamento é o que em inglês se chama de “*chirping*”, semelhante ao chilrear emitido por um pássaro.

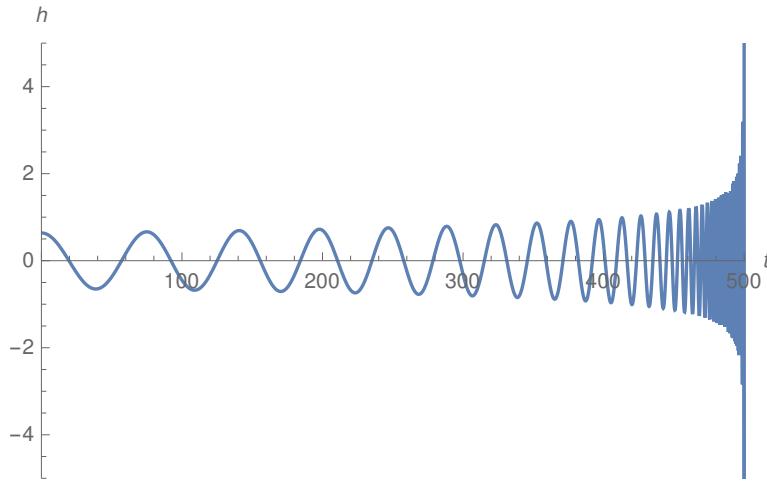


Figura 3.3: Evolução temporal da amplitude de uma onda gravitacional emitido por um par binário coalescente. Esta imagem tem caráter ilustrativo, em que foram utilizados valores fictícios para M_c e τ com intuito de gerar a forma da onda.

É importante frisar que o tratamento mostrado aqui é simplificado. Aproximamos o sistema como obedecendo as leis da mecânica newtoniana, sendo que a medida que as duas massas se aproximam da coalescência, é necessário um tratamento relativístico completo.

3.7 Propagação de ondas gravitacionais em distâncias cosmológicas

Até aqui consideramos as fontes emissoras suficientemente próximas para não levarmos em conta a expansão do universo. No entanto, é esperado que as detecções sejam provenientes de fontes na escala de distância de Mpc a Gpc, ou seja, em escalas cosmológicas. De fato, as recentes detecções pelo observatório LIGO confirmam essa expectativa. Por exemplo: a primeira detecção no evento GW150914 foi gerada pela colisão de dois buracos negros a uma distância estimada em 410^{+160}_{-180} Mpc [49], enquanto o evento GW170817 gerado pela colisão de um par de estrelas de nêutrons a uma distância de 40^{+8}_{-14} Mpc [53], sendo que sua contraparte eletromagnética (GRB170817A) corresponde a um redshift $z = 0.009$.

Para descrevermos a propagação da onda gravitacional num espaço-tempo de FLWR, ainda podemos considerar a equação da onda

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

mas agora percisamos da forma geral do operador D'Alambertiano

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \quad . \quad (3.87)$$

Aqui consideraremos um espaço-tempo de FLRW plano ($k = 0$) dada pelo elemento de linha (1.3)

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad ,$$

em que τ é o tempo conforme. Estamos interessados em soluções esfericamente simétricas na forma

$$h_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}(\tau, r)}{r} \quad , \quad (3.88)$$

semelhantes a (3.79) e (3.80). Usando (3.87), a equação da onda nos dá

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) h_{\alpha\beta} \\ &= \partial_r [a^2 r^2 \partial_r h_{\alpha\beta}] - \partial_\tau [a^2 r^2 \partial_\tau h_{\alpha\beta}] \\ &= \partial_r^2 A_{\alpha\beta} - A''_{\alpha\beta} - 2 \frac{a'}{a} A'_{\alpha\beta} \quad , \end{aligned} \quad (3.89)$$

em que $' = \partial_\tau$. No entanto, a solução deve cair com a distância física, por isso devemos considerar uma solução na forma

$$A_{\alpha\beta}(\tau, r) = \frac{B_{\alpha\beta}(\tau, r)}{a(\tau)} , \quad (3.90)$$

que satisfaz

$$\partial_r^2 B_{\alpha\beta} - B''_{\alpha\beta} + \frac{a''}{a} B_{\alpha\beta} = 0 . \quad (3.91)$$

A maioria das fontes de ondas gravitacionais devem ser originárias da era dominada pela matéria, em que $\rho_m \propto a^{-3}$ e $a(\tau) \propto \tau^2$ e $a''/a \propto \tau^{-2}$. Uma solução apropriada para (3.91) é $B(\tau, r) \propto e^{\pm i\omega(\tau-r)}$, e como $\omega^2 \gg \tau^{-2}$, podemos desprezar o último termo já que estamos considerando somente os modos de Fourier dentro do horizonte de Hubble e obter que $\partial_r^2 B_{\alpha\beta} - B''_{\alpha\beta} \simeq 0$. Sendo assim, a solução apropriada tem a forma

$$h_{\alpha\beta}(\tau, r) \simeq \frac{B_{\alpha\beta}(\tau - r)}{a(\tau)r} . \quad (3.92)$$

Podemos normalizar o tempo conforme de tal maneira que na presente época $\tau = t$. Portanto, a onda detectada no tempo presente tem a forma

$$h_{\alpha\beta}(t, r) \simeq \frac{B_{\alpha\beta}(t - r)}{a(t_0)r} . \quad (3.93)$$

Observemos que a diferença para a solução estática é que substituímos r por um fator $a(t_0)r$. Devemos também esperar que a frequência orbital das ondas gravitacionais emitidas sofra um desvio para o vermelho, i.e., $\omega_{\text{gw}} = (1+z)\omega_{\text{gw}}^{\text{obs}}$. Tomemos a amplitude das ondas em (3.79) e (3.80) que denominaremos h_c com as devidas substituições do espaço-tempo de FLRW:

$$\begin{aligned} h_c &= \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3}\omega_{\text{gw}}^{2/3}}{a(t_0)r} \\ &= \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3}(1+z)^{2/3}\omega_{\text{obs}}^{2/3}}{a(t_0)r} \\ &= \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3}(1+z)^{5/3}\omega_{\text{obs}}^{2/3}}{a(t_0)(1+z)r} \\ &= \frac{4(G\mathcal{M}_{c,\text{obs}})^{5/3}\omega_{\text{obs}}^{2/3}}{d_L} , \end{aligned} \quad (3.94)$$

em que definimos a *Chirp Mass* observada como

$$\mathcal{M}_{c,\text{obs}} \equiv (1+z)\mathcal{M}_c , \quad (3.95)$$

sendo que esta pode ser obtida da análise da frequência pela equação (3.86).

Basicamente, a amplitude da onda emitida pela coalescência de pares binários em um espaço-tempo de FLRW difere da solução estática pelas substituições $r \rightarrow d_L$ e $\mathcal{M}_c \rightarrow \mathcal{M}_{c,\text{obs}}$. Esse resultado é de suma importância, porque vemos que sabendo a amplitude do sinal da onda gravitacional, podemos extrair informação sobre sua distância luminosa d_L , e isso de forma totalmente independente de modelo. Por isso que se refere ao sinal gravitacional emitido por binários como *sirenes padrão*, em analogia as *velas padrão* de radiação eletromagnética. Para construir um catálogo $d_L - z$ com sirenes padrão, é necessário a obtenção do redshift da fonte, que pode ser obtido ao detectar a contraparte eletromagnética do evento de coalescência.

Capítulo 4

Unificação Matéria Escura/Energia Escura na Teoria de Horndeski

4.1 Introdução

No capítulo 1 vimos os modelos de unificação entre matéria escura e energia escura, a começar pelo modelo do Gás de Chaplygin Generalizado (GCG). No capítulo 2 vimos que o modelo do GCG não é estável nas perturbações lineares, apresentando oscilações amortecidas ou crescimento exponencial no espectro de potência da matéria.

Neste capítulo apresentarei a parte desenvolvida em [28] com a evolução do background em que o campo escalar sozinho se comporta como um fluido que evolui como matéria em altos redshifts e como energia escura em baixos redshifts. Isto é possível devido à simetria de desvio (*shift symmetry*), na qual a equação de movimento do campo escalar depende da primeira e segunda derivada de ϕ , mas não do campo escalar em si, o que permite escrever uma equação de movimento do tipo “Gás de Chaplygin” em que $p_U = p_U(\rho_U)$. Também será discutida a estabilidade das perturbações escalares.

Posteriormente, apresentarei a parte desenvolvida por mim em colaboração com Fabrizio F. Bernardi referente ao cálculo das equações de perturbação linear, funções α , a evolução das perturbações lineares no `hi-class` e a discussão sobre a viabilidade do modelo após o evento GW170817.

4.2 Energia escura ou gravitação modificada?

A despeito do sucesso observational do modelo Λ CDM, a real natureza das componentes do setor escuro (matéria escura e energia escura) continua desconhecida. Existem duas vias possíveis para explicar a natureza desse setor escuro: (i) novas “substâncias” não pertencentes ao modelo padrão da física de partículas, ou, (ii) uma modificação da teoria da gravitação padrão (i.e, a relatividade geral) em escalas cosmológicas.

A relatividade geral pode ser obtida a partir da ação de Einstein-Hilbert somada à ação dos campos de matéria

$$S_{\text{GR}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R[g_{\mu\nu}]}{16\pi G} + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi] , \quad (4.1)$$

sendo Ψ os campos de matéria. A extremização da ação (4.1) leva às equações de campo gravitacional de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} ,$$

sendo o tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}$.

Qualquer proposta de uma nova física passa por modificar a ação (4.1), seja na parte da matéria ou da gravitação. No capítulo 1 já vimos modelos como quintessência e k-essência que partem de uma modificação na matéria por meio da adição de um campo escalar dinâmico minimamente acoplado com a métrica. Agora exploraremos a outra via.

Teorias modificadas de gravitação podem ser classificadas em três tipos:

- As que quebram suposições fundamentais (dimensões extras, quebra de invariância local de Lorentz tais como as teorias de Hořava [127] e Einstein-Aether [128], teorias não-locais) ;
- As que tornam o graviton massivo [129, 130];
- As que consideram campos adicionais (campos escalares, vetoriais [131, 132] ou tensoriais [133, 134]).

Essa grande variedade de modelos está esquematizada na figura 4.1. Pode parecer confuso ao leitor ao que estamos nos referindo como “energia escura” e “gravidade modificada”. A rigor, energia escura se refere a componentes extras do lado direito das

equações de Einstein, enquanto gravidade modificada se refere a componentes extras do lado esquerdo. No entanto, energia escura e gravidade modificada podem ser colocadas em um único “*framework*”. Portanto, nos referiremos à “energia escura” como qualquer componente extra que procure explicar a expansão acelerada do universo, seja do lado direito ou esquerdo das equações de Einstein.

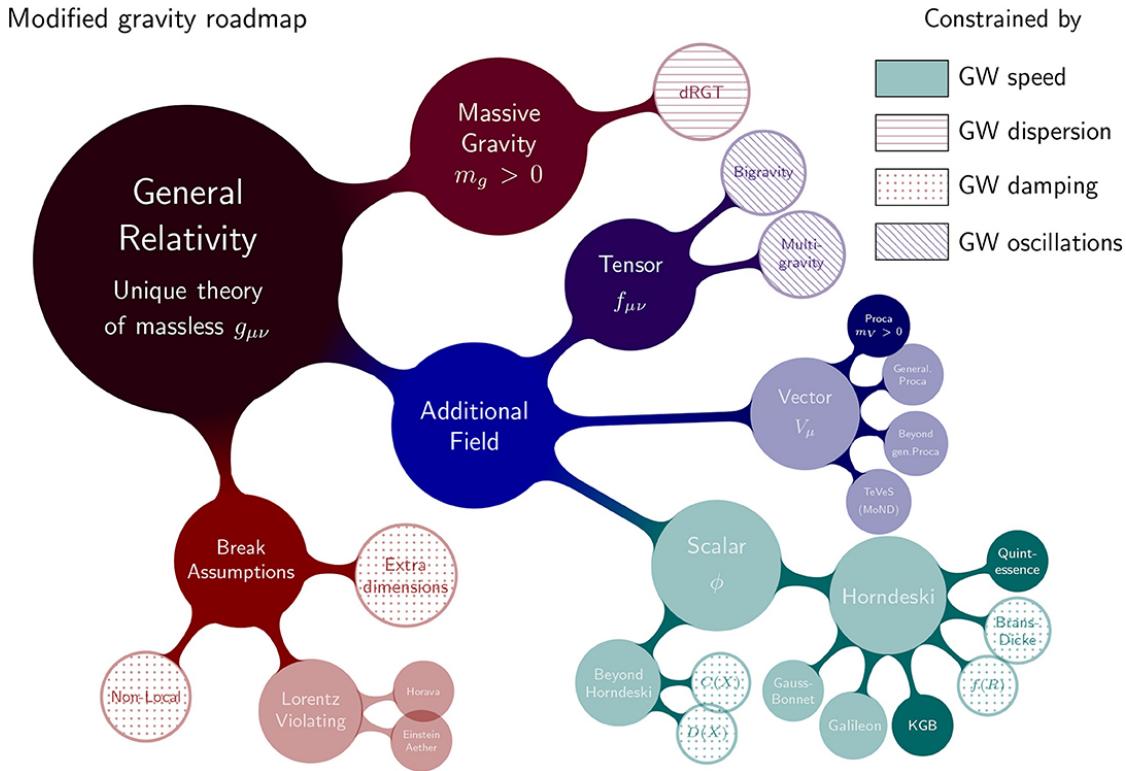


Figura 4.1: Mapeamento dos modelos de gravidade modificada esquematizando as possíveis vias de extensão da relatividade geral. Também está datacado os vínculos impostos em cada teoria pelas detecções de ondas gravitacionais (GW). Extraído de [59].

4.2.1 Teorias escalar-tensorial

A adição de um campo escalar como um grau de liberdade extra é a modificação mais simples que se pode fazer na teoria da gravitação. Por não possuírem nenhuma orientação preferencial, campos escalares não quebram a isotropia do espaço-tempo FLRW. Além do que, o termo de potencial pode mimetizar uma constante cosmológica no limite em que o campo varia lentamente (rolamento lento) que é a base de teorias como a inflação e a

quintessência. Essas características tornam o campo escalar para aplicações em cosmologia com objetivo de descrever a expansão acelerada do universo.

A classificação das teorias escalar-tensorial se baseia na ordem nas derivadas presentes nas equações de movimento, com três gerações de teorias

1. Teorias “Old-school”: Primeira ordem nas derivadas da ação e segunda ordem nas derivadas da equação de movimento.
2. Teorias de Horndeski: Segunda ordem nas derivadas da ação e segunda ordem nas derivadas das equações de movimento [27].
3. Teorias além de Horndeski: Segunda ordem nas derivadas da ação e ordens maiores nas derivadas das equações de movimento [135].

Essa classificação é motivada pelo teorema de Ostrogradsky [136], que diz que teorias de segunda ordem ou ordens maiores na ação possuem instabilidades do tipo “ghost”, i.e., elas não possuem um estado de mínima energia, podendo decair até estados infinitamente negativos. Essas são as *instabilidades de Ostrogradsky*, e podemos visualizá-la tomando a Lagrangeana com derivadas de segunda ordem

$$L = \frac{a}{2} \ddot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (4.2)$$

em que $a (\neq 0)$ é uma constante e $V(\phi)$ é um potencial arbitrário. Pelas equações de Euler-Lagrange obtidas de (4.2), obtemos uma equação de movimento de quarta ordem $a \ddot{\phi} - dV/d\phi = 0$, a qual necessitamos de quatro condições iniciais para resolvê-la. Isto implica em dois graus de liberdade dinâmicos, sendo assim, podemos decompor a Lagrangeana (4.2) em dois campos por meio da variável auxiliar ψ , de forma que

$$\begin{aligned} L &= a\psi\ddot{\phi} - \frac{a}{2}\dot{\psi}^2 - V(\phi) \\ &= -a\dot{\psi}\dot{\phi} - \frac{a}{2}\dot{\psi}^2 - V(\phi) + a\frac{d}{dt}(\psi\dot{\phi}) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que recuperamos (4.2) fazendo $\psi = \ddot{\phi}$. O último termo não contribui para as equações de movimento pois é um termo de superfície. Podemos definir as variáveis $q = (\phi + \psi)/\sqrt{2}$ e $Q = (\phi - \psi)/\sqrt{2}$ e reescrever (4.3) na forma

$$L = -\frac{a}{2}\dot{q}^2 + \frac{a}{2}\dot{Q}^2 - U(q, Q) . \quad (4.4)$$

Nesta Lagrangeana fica claro que o sistema possui dois graus de liberdade dinâmicos, sendo que um deles possui um termo cinético com sinal contrário, sinalizando a presença de instabilidades do tipo *ghost*. Este resultado pode ser generalizado para Lagangeanas de ordem maior.

Teorias do tipo “*Old School*” são aquelas que possuem derivada de ordem um no campo escalar, e podem ser expressas da forma

$$S_{\text{old school}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} [\omega(\phi)R - K(\phi, X)] + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi] , \quad (4.5)$$

sendo $X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi$ o termo cinético canônico do campo escalar. Nessa classe de teorias, se inclue a relatividade geral ($\omega = 1$, $K = \Lambda$), quintessência ($\omega = 1$, $K = X - V(\phi)$), teoria de Brans-Dicke ($\omega = \phi$, $K = \frac{\omega_{BD}}{\phi}X - V(\phi)$), k-essência ($\omega = 1$, $K = K(\phi, X)$).

A ação (4.5) pode descrever um acoplamento entre o campo escalar e o campo de matéria ao realizarmos uma mudança de referencial. No referencial definido pela métrica $g_{\mu\nu}$ não há nenhuma interação direta entre o campo escalar e o campo de matéria, sendo as equações de campo dadas por $G_{\mu\nu} + \Delta G_{\mu\nu}(\phi) = 8\pi GT_{\mu\nu}^{(m)}$ sendo que $\Delta G_{\mu\nu}(\phi)$ incorpora as modificações nas equações de Einstein devido a presença do campo escalar. Este é o chamado *referencial de Jordan*. Neste referencial, o tensor energia-momento da matéria se conserva independentemente, i.e., $\nabla_\mu T_{(m)}^{\mu\nu} = 0$.

Ao realizarmos uma transformação conforme na métrica, $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = C(\phi)g_{\mu\nu}$ de forma a obter as equações de Einstein usuais (i.e., sem o acoplamento com o campo escalar) e redefinindo o campo escalar da forma $\phi \rightarrow \tilde{\phi}(\phi)$, a ação (4.5) fica reescrita como

$$S_{\text{old school}} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{16\pi G} [\tilde{R} - \tilde{K}(\tilde{\phi}, \tilde{X})] + S_m[C(\phi)^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \Psi] . \quad (4.6)$$

Este é o *referencial de Einstein*, em que recuperamos as equações de Einstein da forma padrão $\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi G(\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} + \tilde{T}_{\mu\nu}^\phi)$. No entanto, como a nova métrica está acoplada com o campo escalar, o campo de matéria não se conserva de forma independente, e teremos uma interação da forma $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}_{(m)}^{\mu\nu} \propto \tilde{\nabla}^\nu \phi$. Dessa forma, vemos que modelos de gravitação modificada do tipo escalar-tensorial e modelos de interação do setor escuro estão relacionados por uma mudança de referencial. A conexão mais profunda entre modelos de interação e

modelos de gravidade modificada como $f(R)$ foram melhor exploradas em [137].

4.3 Teoria de Horndeski

4.3.1 A Lagrangeana de Horndeski

A Teoria de Horndeski corresponde a teoria escalar-tensorial mais geral possível para a qual as equações de movimento são de segunda ordem e que está livre das instabilidades de Ostrogradsky. É caracterizada pela ação

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_H , \quad \mathcal{L}_H = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i , \quad (4.7)$$

em que

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X) , \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\square\phi , \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)] , \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) \\ & - \frac{1}{6}G_{5,X}[(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + 2(\nabla^\mu\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\beta\nabla_\mu\phi)] . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aqui, K e G_i ($i = 3, 4, 5$) são funções do campo escalar ϕ e da energia cinética $X = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$, com derivadas parciais $G_{i,X} \equiv \partial G_i / \partial X$, R o escalar de Ricci e $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein. A ideia por trás da Lagrangeana (4.7) é encontrar uma estrutura antissimétrica para os coeficientes de forma que os termos com derivadas de ordem maior que 2 se cancelem na equação de movimento [138].

No caso de Minkowski, estudado em [139], em que o único grau de liberdade é o campo escalar, supõe-se que a ação obedeça à simetria

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + c_\mu , \quad c_\mu = \text{const.} , \quad (4.12)$$

que pode ser vista como uma generalização da invariância de Galileu. Portanto, a teoria é chamada de *Teoria de Galileon*. A Lagrangeana mais geral que obedece à simetria (4.12)

e que resulta em equações de movimento de segunda ordem é a soma das Lagrangeanas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{gal} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \quad , \quad \mathcal{L}_3^{gal} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2\Box\phi \quad , \\ \mathcal{L}_4^{gal} &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2[(\Box\phi)^2 - (\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2] \quad , \\ \mathcal{L}_5^{gal} &= -\frac{1}{4}(\partial\phi)^2[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2 + 2(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^3] \quad .\end{aligned}\tag{4.13}$$

Para generalizar a Lagrangeana acima em uma forma totalmente covariante, além de substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes, é necessário adicionar “contratermos gravitacionais” nas Lagrangeanas 4 e 5, com o intuito de cancelar as derivadas da métrica com ordem maior que dois. E por fim, substituir os coeficientes $(\partial\phi)^2$ por funções de ϕ e X . Fazendo essas modificações, obtemos a Lagrangeana de Horndeski [140] (4.7), e por isso a Teoria de Horndeski é chamada também de *Teoria de Galileons Generalizada*.

Na teoria de Horndeski também temos um acoplamento entre o campo escalar e o campo de matéria por meio de uma mudança de referencial. Enquanto nas teorias “old school” esse acoplamento se dá via transofrmações conformes, na teoria de Horndeski o acoplamento se dá por transformações mais gerais, chamadas de *transformações disformes* [141, 142]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = C(\phi)g_{\mu\nu} + D(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \quad .\tag{4.14}$$

Uma observação importante, é que é sempre possível definir um referencial de Jordan. No entanto, em geral nem sempre será possível encontrar um referencial de Einstein em que a ação gravitacional se reduz à ação de Einstein-Hilbert.

4.3.2 Evolução do background

Consideraremos a teoria de Horndeski em um espaço-tempo de FLRW plano, com o elemento de linha dado por

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad ,\tag{4.15}$$

em que introduzimos a função lapso $N(t)$ na parte temporal da métrica, enquanto x^i são as coordenadas comóveis espaciais.

A variação da Lagrangeana (4.7) em relação a $N(t)$ nos dá a primeira equação de Friedmann (componentes 00)¹ enquanto que a variação em relação a $a(t)$ nos dá a segunda equação de Friedmann (componentes ii), que na presença de matéria (escura e/ou bariônica) ficam dadas respectivamente por [143, 144]

$$\mathcal{E} \equiv \sum_{i=2}^5 \mathcal{E}_i = -\rho_m , \quad (4.16)$$

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{i=2}^5 \mathcal{P}_i = -p_m , \quad (4.17)$$

em que

$$\mathcal{E}_2 \equiv 2XK_{,X} - K , \quad (4.18)$$

$$\mathcal{E}_3 \equiv 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} , \quad (4.19)$$

$$\mathcal{E}_4 \equiv -6H^2G_4 + 24H^2X(G_{4,X} + XG_{4,XX}) - 12HX\dot{\phi}G_{4,\phi X} - 6H\dot{\phi}G_{4,\phi} , \quad (4.20)$$

$$\mathcal{E}_5 \equiv 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) , \quad (4.21)$$

e

$$\mathcal{P}_2 \equiv K , \quad (4.22)$$

$$\mathcal{P}_3 \equiv -2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) , \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4 \equiv & 2(2\dot{H} + 3H^2)G_4 - 12H^2XG_{4,X} - 4(H\dot{X} + 2\dot{H}X)G_{4,X} - 8HX\dot{X}G_{4,XX} \\ & + 2(\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi})G_{4,\phi} + 4XG_{4,\phi\phi} + 4X(\ddot{\phi} - 2H\dot{\phi})G_{4,\phi X} , \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5 \equiv & -2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} + 4GX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} \\ & + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

A variação da ação com respeito à ϕ nos dá a equação de movimento para o campo escalar

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 J) = P_\phi , \quad (4.26)$$

¹Nas equações, fazemos $N(t) \rightarrow 1$.

em que

$$\begin{aligned} J \equiv & \dot{\phi}K_{,X} + 6HXG_{3,X} - 2\dot{\phi}G_{3,\phi} + 6H^2\dot{\phi}(G_{4,X} + 2XG_{4,XX}) - 12HXG_{4,\phi X} \\ & + 2H^3X(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2\dot{\phi}(G_{5,\phi} + XG_{5,\phi X}) \quad , \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} P_\phi \equiv & K_{,\phi} - 2X(G_{3,\phi\phi} + \ddot{\phi}G_{3,\phi X}) + 6(\dot{H} + 2H^2)G_{4,\phi} + 6H(\dot{H} + 2HX)G_{4,\phi X} \\ & - 6H^2XG_{5,\phi\phi} + 2H^3X\dot{\phi}G_{5,\phi X} \quad . \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.3.3 Perturbações lineares

Nesta seção abordaremos as equações de perturbações lineares obtidas a partir da Lagrangeana (4.7). Consideremos uma perturbação na métrica de FLRW plana (4.15)

$$ds^2 = -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad , \quad (4.29)$$

em que

$$N = 1 + \alpha \quad , \quad N^i = \delta^{ij}\partial_j\beta \quad , \quad \gamma_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}\left(\delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj}\right) \quad , \quad (4.30)$$

e α , β e ζ são perturbações escalares e h_{ij} são perturbações tensoriais que satisfazem as condições do gauge TT. O procedimento padrão para a obtenção das equações de perturbações lineares tal como apresentado por [97, 143, 144] consiste em expandir a ação (4.7) em segunda ordem nas perturbações para obter equações de movimento de primeira ordem nas mesmas. Para isso, se escreve a ação (4.7) em termos de variáveis geométricas seguindo o formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [145] e descrito em detalhes nos *reviews* [146] e [147].

Perturbações tensoriais

A ação quadrática para as perturbações tensoriais é dada [97] por

$$S_T^{(2)} = \int d^4x d^3 \frac{M_*^2}{8} \left[\dot{h}_{ij}^2 - \frac{1 + \alpha_T}{a^2} (\vec{\nabla} h_{ij})^2 \right] \quad , \quad (4.31)$$

em que a *massa de Planck efetiva* M_*^2 e o *excesso na velocidade de propagação das perturbações tensoriais*

$$M_*^2 \equiv 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,\phi} - \dot{\phi}HXG_{5,X}) \quad , \quad (4.32)$$

$$M_*^2\alpha_T \equiv 2X(2G_{4,X} - 2G_{5,\phi} - (\ddot{\phi} - H\dot{\phi})G_{5,X}) \quad . \quad (4.33)$$

Note que no caso da relatividade geral ($G_4 = M_p^2/2$ e $G_5 = 0$), temos $M_*^2 = M_p^2$ e $\alpha_T = 0$. No entanto, em teorias escalares-tensoriais mais gerais como a de Horndeski a massa de Planck pode variar ao longo das eras cosmológicas (o que também implica que a constante gravitacional de Newton G varia já que $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$) e que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais pode apresentar um desvio em relação à velocidade da luz. A variação da massa de Planck e a velocidade de propagação das ondas gravitacionais são dadas respectivamente por

$$\alpha_M \equiv \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \ln M_*^2 = \frac{d \ln M_*^2}{d \ln a} \quad , \quad (4.34)$$

$$c_T^2 \equiv 1 + \alpha_T \quad . \quad (4.35)$$

Por fim, a equação de movimento para as ondas gravitacionais no gauge síncrono é dada por

$$h''_{ij} + (2 + \alpha_M)\mathcal{H}h'_{ij} + (1 + \alpha_T)k^2 h_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}^{TT}}{M_*^2} \quad , \quad (4.36)$$

em que ' representa derivada em relação ao tempo conforme e Σ_{ij}^{TT} é projeção do stress anisotrópico no gauge TT.

Outro aspecto que pode ser observado é o *amortecimento* na propagação das ondas gravitacionais, o que faz com que a distância luminosa medida por sinais gravitacionais seja diferente da medida por sinais eletromagnéticos devido a algum termo de fricção extra ν . Essa diferença pode ocorrer mesmo quando $c_g = c$ e é dada pela expressão

$$\frac{d_L^{\text{GW}}(z)}{d_L^{\text{EM}}(z)} = \exp \left[- \int_0^z \frac{\nu}{1+z'} dz' \right] \quad . \quad (4.37)$$

No caso de teorias escalar-tensorial, o termo de fricção extra $\nu = \alpha_M$. Usando (4.34), obtemos

$$\frac{d_L^{\text{GW}}(z)}{d_L^{\text{EM}}(z)} = \frac{M_*(0)}{M_*(z)} \quad , \quad (4.38)$$

em que $M_*(0)$ e $M_*(z)$ são as massas de Planck efetivas no tempo de observação e de emissão respectivamente. Como a massa de Planck está relacionada com a constante de gravitação G , temos que o amortecimento na propagação de GW's indica a presença de uma constante gravitacional *efetiva* através da expressão $\frac{d_L^{\text{GW}}(z)}{d_L^{\text{EM}}(z)} = \sqrt{\frac{G_{\text{eff}}(z)}{G_{\text{eff}}(0)}}.$

Perturações escalares

As perturbações escalares são oriundas das funções α , β e ζ . Ao expandirmos a ação até segunda ordem na métrica, obtemos [144]

$$S_s^{(2)} = \int d^4x a^3 \left[-3M_*^2 \dot{\zeta}^2 + \frac{M_*^2(1+\alpha_T)}{a^2} (\vec{\nabla}\zeta)^2 + \Sigma\alpha^2 - 2\Theta\alpha \frac{\vec{\nabla}^2}{a^2} \beta + 2M_*^2 \dot{\zeta} \frac{\vec{\nabla}^2}{a^2} \beta + 6\Theta\alpha \dot{\zeta} - 2M_*^2 \alpha \frac{\vec{\nabla}^2}{a^2} \zeta \right] , \quad (4.39)$$

sendo

$$\Sigma \equiv X \sum_{i=2}^5 \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial X} + \frac{1}{2} H \sum_{i=2}^5 \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial H} , \quad (4.40)$$

$$\Theta \equiv -\frac{1}{6} \sum_{i=2}^5 \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial H} . \quad (4.41)$$

Variando a ação (4.39) em relação a α e β , obtemos os vínculo Hamiltoniano e de momento respectivamente

$$\Sigma\alpha - \Theta \frac{\vec{\nabla}^2}{a^2} \beta + 3\Theta \dot{\zeta} - M_*^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{a^2} \zeta = 0 , \quad (4.42)$$

$$\Theta\alpha - M_*^2 \dot{\zeta} = 0 . \quad (4.43)$$

Usando as equações de vínculo acima, podemos eliminar α e β da ação (4.39). Também substituiremos as funções Σ e Θ usadas por [144] em prol das variáveis α_K e α_B usadas por [97], cuja a conversão é dada por $M_*^2 H^2 \alpha_K = 2\Sigma + 12H\Theta - 6H^2 M_*^2$ e $M_*^2 H \alpha_B = -2\Theta + 2HM_*^2$. Estas funções são dadas em termo das funções K e G' s por

$$\begin{aligned} H^2 M_*^2 \alpha_K &\equiv 2X(K_{,X} + 2XK_{,XX} - 2G_{3,\phi} - 2XG_{3,\phi X}) \\ &+ 12\dot{\phi}XH(G_{3,X} + XG_{3,XX} - 3G_{4,\phi X} - 2XG_{4,\phi XX}) \\ &+ 12XH^2(G_{4,X} + 8XG_{4,XX} + 4X^2G_{4,XXX}) \\ &- 12XH^2(G_{5,\phi} + 5XG_{5,\phi X} + 2X^2G_{5,\phi XX}) \\ &+ 4\dot{\phi}XH^3(3G_{5,X} + 7XG_{5,XX} + 2X^2G_{5,XXX}) , \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} HM_*^2 \alpha_B &\equiv 2\dot{\phi}(XG_{3,X} - G_{4,\phi} - 2XG_{4,\phi X}) \\ &+ 8XH(G_{4,X} + 2XG_{4,XX} - G_{5,\phi} - XG_{5,\phi X}) \\ &+ 2\dot{\phi}XH^2(3G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) . \end{aligned} \quad (4.45)$$

A função α_K é chamada de “*kineticity*” e modula as contribuições da energia cinética oriunda das perturbações no campo escalar [97]. Já a função α_B é chamada de *kinetic gravity brading*” e quantifica as contribuições cinéticas oriundas da mistura entre as perturbações do campo escalar e da métrica [97].

Finalmente, a ação de segunda ordem devido as perturbações escalares pode ser escrita como

$$S_S^{(2)} = \int d^4x a^3 Q_S \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{c_S^2}{a^2} (\partial_i \zeta)^2 \right] , \quad (4.46)$$

em que

$$Q_S \equiv \frac{2M_*^2 D}{(2 - \alpha_B)^2} , \quad D \equiv \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 , \quad (4.47)$$

e a velocidade do som ao quadrado é definida como

$$c_s^2 \equiv -\frac{(2 - \alpha_B)[\dot{H} - \frac{1}{2}H^2\alpha_B(1 + \alpha_T) - H^2(\alpha_M - \alpha_T)] - H\dot{\alpha}_B}{H^2 D} . \quad (4.48)$$

Escrevemos as ações escalar e tensorial de acordo com [97] de modo a escrever as equações de movimento em termos das funções α_K , α_B , α_M e α_T (ver apêndice A). Isso se deve ao fato que usaremos o código **hi-class**[66] para evoluir as perturbações lineares no modelo de Horndeski a ser estudado, e o código parametriza as equações de perturbação linear em termos as quatro funções mencionadas. Um outro código que resolve as perturbações lineares na teoria de Horndeski é o EFTCAMB [148, 149] que utiliza uma parametrização diferente do **hi-class**.

Condições de estabilidade

No capítulo 1, quando abordamos o modelo de k-essência, vimos que as condições de estabilidade (1.86) eram necessárias para que a Hamiltoniana (1.85) fosse positiva definida. Nesta subseção discutiremos as condições de estabilidade de teorias com campo escalar mais gerais de segunda ordem. De forma geral, consideremos um campo escalar descrito pela densidade lagrangeana²

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[A\dot{\varphi}^2 - B(\partial_i \varphi)^2] . \quad (4.49)$$

²Em geral, podemos adicionar um termo de massa e considerar o caso de uma massa negativa, chamado de *instabilidade taquônica*. No entanto, nos restringiremos a campos escalares não-massivos.

O momento canônicaamente conjugado é

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \quad , \quad (4.50)$$

e da densidade Hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[A^{-1}\Pi^2 + B(\partial_i\varphi)^2] \quad . \quad (4.51)$$

Essa Hamiltoniana tem um limite inferior se $A > 0$ e $B > 0$, tem um limite superior se $A < 0$ e $B < 0$ sendo indefinida se A e B possuírem sinais diferentes. No espaço de Fourier o campo escalar obedece à equação de movimento

$$\ddot{\varphi} + c_s^2 k^2 \varphi \quad , \quad c_s^2 = \frac{B}{A} \quad . \quad (4.52)$$

No caso em que a Hamiltoniana é indefinida, $c_s^2 \leq 0$, e a solução cresce exponencialmente. Nesse caso, temos a *instabilidade Laplaciana*. Para evitar essas instabilidades, impomos $c_s^2 \geq 0$.

Além disso, se $A \leq 0$, o campo apresentará patologias à nível clássico, pois isso implica em $B \leq 0$ pela condição $c_s^2 \geq 0$, e consequentemente em $E_\varphi \leq 0$. Sendo assim, temos estados fantasmas (*ghost*) que podem ser excitados arbitrariamente com energia negativa, levando as *instabilidades fantasmas (ghost instabilities)*. Dessa forma, para evitarmos tanto as instabilidades fantasmas quanto as instabilidades Laplacionas, impomos que $A > 0$ e $B \geq 0$.

Para garantirmos a ausência de patologias nas perturbações escalares e tensoriais dadas respectivamente por (4.39) e (4.31), temos que as seguintes condições precisam ser respeitadas para as perturbações escalares

$$Q_S = \frac{2M_*^2 D}{(2 - \alpha_B)^2} > 0 \quad , \quad D \equiv \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 \quad , \quad (4.53)$$

$$c_s^2 = -\frac{(2 - \alpha_B)[\dot{H} - \frac{1}{2}H^2\alpha_B(1 + \alpha_T) - H^2(\alpha_M - \alpha_T)] - H\dot{\alpha}_B}{H^2 D} > 0 \quad , \quad (4.54)$$

e para as perturbações tensoriais

$$Q_T = \frac{M_*^2}{8} > 0 \quad , \quad (4.55)$$

$$c_T^2 = 1 + \alpha_T > 0 \quad . \quad (4.56)$$

Descrição do código `hi-class`

O código `hi-class`³ [66] é uma modificação do código CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System)⁴ [115], que é um código desenvolvido para calcular perturbações cosmológicas no regime linear. O `hi-class` incorpora ao código CLASS teorias de Horndeski de gravidade modificada.

A proposta de [97] assume que a evolução da expansão cósmica do background segue a prevista por Λ CDM. A implementação da dinâmica de Horndeski descreve as perturbações lineares em termos das quatro funções α 's referidas (α_K , α_B , α_M e α_T), visto que essas quatro funções descrevem a modificação na teoria da gravitação em relação a relatividade geral. Entre as parametrizações para as funções α já implementadas no `hi-class` podemos citar

- $\alpha_i(a) = c_i \Omega_{de}(a);$
- $\alpha_i(a) = c_i a;$
- $\alpha_i(a) = c_i a^{n_i};$

sendo c_i os valores atuais (em $a = 1$) para cada função α . Sendo assim, temos que especificar a parametrização para as funções α característica do modelo de Horndeski específico que queremos estudar e fornecer como *input* os valores em $a = 1$ de cada função. As equações de Einstein linearizadas tal como escritas no código estão em apresentadas em (A.4)-(A.7). A esquematização do código `hi-class` está apresentada na figura 4.2.

O código `hi-class` verifica se as condições de ausência de *ghosts* e de instabilidades Laplacianas para as perturbações escalares (4.53)-(4.54) e para as perturbações tensoriais (4.55)-(4.56) são respeitadas. As perturbações no campo escalar são descritas pelo potencial de velocidades do campo escalar

$$V_X \equiv a \frac{\delta \phi}{\phi'} . \quad (4.57)$$

A dinâmica do campo escalar é descrita por uma equação diferencial de segunda ordem em V_X (ver apêndice) que requer duas condições iniciais para ser resolvida.

³Disponível em http://miguelzuma.github.io/hi_class_public/

⁴Disponível em <https://class-code.net/>

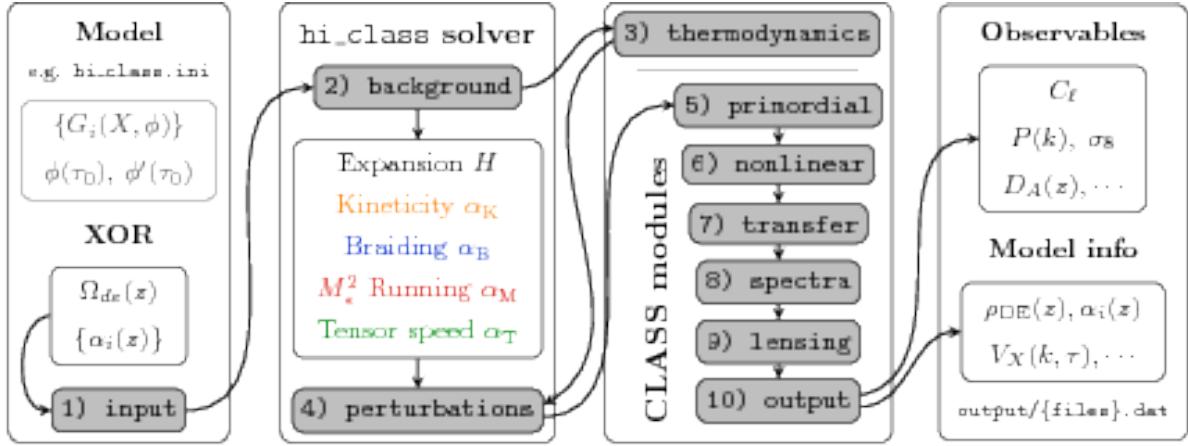


Figura 4.2: A estrutura do `hi-class`. É necessário especificar uma parametrização para o background e para as funções α , computando a função de Hubble e as funções α . O restante do código não é modificado em relação ao `CLASS` original. Extraído de [66].

O código fornece duas opções de condições iniciais. A mais simples é considerar que as perturbações iniciais do campo e de sua derivadas são nulas, i.e.,

$$V_X(\tau_0) = 0 , \quad V'_X(\tau_0) = 0 . \quad (4.58)$$

A outra opção chamada de “*single clock*” relaciona as perturbações no campo escalar com as perturbações na densidade de fótons

$$V_X(\tau_0) = -\frac{1}{4H} \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} , \quad V'_X(\tau_0) = 0 . \quad (4.59)$$

O código primeiramente resolve o background, obtendo o fator de escala a ao integrar a função de Hubble dada pela equação de Friedmann (1.12). As densidades relativas de cada componente (barions, fótons, neutrinos, matéria escura) são fornecidas pelo usuário e a densidade de energia escura é obtida pela relação de fechamento (1.35). A dinâmica de Horndeski é descrita pelas funções α cuja parametrização é fornecida pelo usuário. Este pode fornecer a massa de Planck efetiva $M_*^2(\tau)$ e a variação da massa de Planck α_M pode ser obtida a partir de uma derivada numérica de M_*^2 em relação ao tempo conforme, ou então pode fornecer α_M e M_*^2 é obtido por meio de integração numérica, necessitando o valor inicial de M_*^2 como input.

Posteriormente o código resolve o módulo das perturbações, ao resolver as equações de campo gravitacional, assim como a equação de movimento do campo escalar. É importante frisar que Horndeski modifica somente o setor gravitacional, e a modificação nos setores de matéria-energia se dá indiretamente por meio na mudança dos potenciais gravitacionais, visto que as perturbações nas componentes de matéria-energia se dá pelas equações da continuidade (2.36) e de Euller (2.37). O módulo das perturbações evolui sobre um intervalo de vetores de onda k e obtém como output o espectro de potência da matéria $P(k)$ e os multipolos C_l da radiação cósmica de fundo.

4.3.4 Teoria de Horndeski após GW170817

Recentemente, no dia 17 de agosto de 2017, o detector de ondas gravitacionais LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Observatory*) junto com o interferômetro Virgo detectou ondas gravitacionais advindas da colisão de um par de estrelas de nêutrons próximo da galáxia NGC 4993 [53], evento esse chamado de GW170817. A contraparte eletromagnética do evento foi detectada pelo telescópio FERMI na forma de um Gamma-Ray Burst curto (GRB170817A) com duração de 1.7 segundos [56]. Comparando o tempo de chegada do sinal gravitacional e do sinal eletromagnético, foi possível estabelecer um vínculo muito forte na velocidade das ondas gravitacionais c_g em relação à velocidade da luz c [53]

$$-3 \times 10^{-15} \leq c_g/c - 1 \leq 6 \times 10^{-16} . \quad (4.60)$$

Essa medida permitiu estabelecer vínculos muito fortes na teoria de Horndeski [61–65], limitando bastante o leque de possíveis alternativas à relatividade geral. Como havíamos visto, o desvio da velocidade das ondas gravitacionais em relação à velocidade da luz é dada pela equação (4.35), sendo que a função α_T representa esse desvio. A princípio, α_T pode adotar valores positivos ou negativos. No entanto, valores negativos de α_T foram vinculados em $\alpha_T > -10^{-15}$ devido à ausência de radiação Cerenkov gravitacional em raios cósmicos [150]. Já os limites positivos disponíveis eram obtidos pelo tempo de viagem da onda gravitacional entre os dois detectores do LIGO, o que dava $\alpha_T < 0.42$ [151, 152].

Como demonstrou [61], quando temos ambos os sinais, gravitacional e eletromagnético, os vínculos são muito mais fortes. Seja t_s o tempo de emissão das ondas gravitacionais e eletromagnéticas na fonte, t_T o tempo de detecção da onda gravitacional e t_c o tempo mensurado do pico de brilho do sinal eletromagnético. O tempo de trânsito do sinal gravitacional e eletromagnético são respectivamente, $c_T(t_T - t_s) = d_s$ e $(t_c - t_s) = d_s$, sendo $d_s \simeq 40$ Mpc a distância da fonte. Fazendo uma expansão em Taylor, temos $\alpha_T \simeq 2\Delta t/d_s$, em que $\Delta t \simeq 1.7$ segundos é o tempo de atraso entre os dois sinais, o que implica que

$$|\alpha_T| \lesssim 10^{-15} , \quad (4.61)$$

ou seja, para todos os efeitos, $\alpha_T \approx 0$.

Como vimos, na teoria de Horndeski, a massa de Planck efetiva é dada por (4.32) e α_T é dada por (4.33). Escrevendo as duas funções explicitamente

$$M_2^* \alpha_T = 2X[2G_{4,X} - 2G_{5,\phi} - (\ddot{\phi} - H\dot{\phi})G_{5,X}] , \quad (4.62)$$

$$M_2^* = 2(G_4 - 2XG_{4,X} + XG_{5,X} - H\dot{\phi}XG_{5,X}) , \quad (4.63)$$

Podemos ver que não é possível um cancelamento trivial a menos que $G_{5,X} \neq 0$. Para um cancelamento total, é necessário que

$$G_{4,X} \approx 0 , \quad G_5 \approx \text{const.} , \quad (4.64)$$

visto que são os termos de \mathcal{L}_4 e \mathcal{L}_5 que influenciam no desvio da velocidade de propagação das ondas gravitacionais. Como escrito em [65], a Lagrangeana de Horndeski compatível com o novo vínculo se reduz a

$$\mathcal{L}_H = \frac{f(\phi)}{2}R + K(\phi, X) - G(\phi, X)\square\phi , \quad (4.65)$$

o que restringe bastante a liberdade de modelos que pode ser obtidos a partir da teoria de Horndeski.

Os vínculos no amortecimento ν estabelecidos por GW170817 foram apresentados em [85]. Ao expandirmos o lado direito de (4.37) para $z \ll 1$, teremos que $\frac{d_L^{\text{GW}}(z)}{d_L^{\text{EM}}(z)} \approx 1 - z\nu(0)$, o que implica que $\nu(0) = \frac{d_L^{\text{EM}} - d_L^{\text{GW}}}{zd_L^{\text{EM}}}$. Como $d_L = z/H_0$ para $z \ll 1$, então o termo de fricção pode ser escrito da forma $\nu(0) = \frac{H_0^{\text{GW}} - H_0^{\text{EM}}}{zH_0^{\text{GW}}}$. Para H_0^{EM} foi usado o valor de

$73 \pm 1.66 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ de [153], enquanto $H_0^{\text{GW}} = 70_{-8}^{+12} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ obtido por [53], o que resulta em $\nu(0) = -5.1_{-11}^{+20}$. Por outro lado, a medida da distância luminosa da galáxia NGC4993 foi determinada em $d_L^{\text{EM}} = 40.7 \pm 1.4 \text{ (stat)} \pm 1.9 \text{ (sys)} \text{ Mpc}$ [154]. Com o valor de $d_L^{\text{GW}} = 40_{-14}^{+8} \text{ Mpc}$, temos que a fricção vinculada diretamente pela distância luminosa é $\nu(0) = -7.8_{-18.4}^{+9.7}$. Esses vínculos não são muito restritivos, mas futuramente com mais detecções pelos detectores 2G e 3G o fator de amortecimento pode ser vinculado com maior precisão [87].

4.4 Unificação do setor escuro

A proposta apresentada no trabalho de [28] é que o campo escalar da teoria de Galileons Generalizada descreva não apenas a energia escura, mas todo o setor escuro (matéria escura + energia escura) em um fluido unificado. A abordagem consistirá de considerar os termos da Relatividade Geral somados a termos extras advindos da Lagrangeana de Horndeski (4.7) que serão interpretados como termos advindos do tensor Energia-Momento nas equações de Friedmann. A Relatividade Geral será originada fazendo $G_4(\phi, X) = \frac{1}{2}$ na Lagrangeana (4.10), e os termos originados de $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ e \mathcal{L}_5 serão interpretados com a Lagrangeana do fluido unificado $\mathcal{L}_U = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_5$. Dessa forma, as equações de Friedmann (4.16) e (4.17) se reduzem a

$$3H^2 = \rho_U , \quad (4.66)$$

$$-(2\dot{H} + 3H^2) = p_U , \quad (4.67)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_U &= 2XK_{,X} - K + 6X\dot{\phi}HG_{3,X} - 2XG_{3,\phi} \\ &\quad + 2H^3X\dot{\phi}(5G_{5,X} + 2XG_{5,XX}) - 6H^2X(3G_{5,\phi} + 2XG_{5,\phi X}) , \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} p_U &= K - 2X(G_{3,\phi} + \ddot{\phi}G_{3,X}) - 2X(2H^3\dot{\phi} + 2H\dot{H}\dot{\phi} + 3H^2\ddot{\phi})G_{5,X} - 4H^2X^2\ddot{\phi}G_{5,XX} \\ &\quad + 4GX(\dot{X} - HX)G_{5,\phi X} + 2[2(\dot{H}X + H\dot{X}) + 3H^2X]G_{5,\phi} + 4HX\dot{\phi}G_{5,\phi\phi} , \end{aligned} \quad (4.69)$$

sendo a equação de estado do fluido unificado definida em termo das quantidades acima

$$\omega_U \equiv \frac{p_U}{\rho_U} . \quad (4.70)$$

É necessário escolher as funções $K(\phi, X)$, $G_3(\phi, X)$ e $G_5(\phi, X)$ de tal forma que ω_U reproduza o comportamento desejado de um fluido unificado, i.e., que $\omega_U \approx 0$ em altos redshifts se comportando como matéria não-relativística, transitando para o comportamento de energia escura a partir de $\omega_U < -1/3$ por volta de $z \sim 0.4 - 0.6$ e chegando em $\omega_U \approx -0.7$ em $z = 0$, reproduzindo assim o mesmo comportamento da equação de estado no modelo Λ CDM, já que $\omega_t = \Omega_m \omega_m + \Omega_\Lambda \omega_\Lambda \approx \Omega_\Lambda \omega_\Lambda \approx -0.7$.

Nesse modelo, a simetria de desvio (*shift symmetry*) (4.12) tem um papel crucial, já que graças a ela, a equação de movimento depende somente de $X(t)$ e $\dot{X}(t)$ (ou $\dot{\phi}(t)$ e $\ddot{\phi}(t)$) mas não do campo escalar $\phi(t)$ em si. Isto permite que a pressão seja expressa como uma função da densidade de energia $p_U = p_U(\rho_U)$ através da eliminação das derivadas do campo escalar. Dizemos então que a equação de estado do fluido é uma equação do tipo Gás de Chaplygin.

Para respeitar a simetria de desvio, é necessário que $K(\phi, X) = K(X)$, o que inclui um termo cinético canônico $\sim X$ e $G_3(\phi, X) = G_3(X)$. Note que da Lagrangeana (4.9) um termo $G_3 \sim \phi$ também obedece à simetria de desvio, pois $\phi \square \phi$ é igual a X à menos de uma integração por partes. Quanto à função $G_5(\phi, X)$, temos que ela pode ser expressa como $G_5 \sim \phi$, visto que (4.11) ao ser integrado por partes resulta em $G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi$. Este termo de acoplamento não mínimo entre o campo escalar e o tensor de Einstein pode ser interpretado como uma fricção atuando em largas escalas durante a evolução cosmológica.

4.5 O modelo específico

Dado as condições necessárias para um modelo de fluido unificado, o trabalho de [28] escolhe uma modelo específico de Galileons que respeita a simetria de desvio. Esse modelo é caracterizado pelas funções

$$\begin{aligned} K(\phi, X) &= \frac{X}{2} - \eta X^{1/2} \quad , \quad G_3(\phi, X) = \frac{\lambda_3}{2} X^{-1/2} \quad , \\ G_4(\phi, X) &= \frac{1}{2} \quad , \quad G_5(\phi, X) = -\frac{\lambda_5}{2} \phi \quad , \end{aligned} \tag{4.71}$$

em que η , λ_3 e λ_5 são constantes. Por essa escolha de funções, a ação de Horndeski (4.7) fica escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \left(\frac{X}{2} - \eta X^{1/2} \right) - \frac{\lambda_3}{2} X^{-1/2} \square \phi + \frac{\lambda_5}{2} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right] . \quad (4.72)$$

Por simplicidade, se escolhe $\eta = 1$. Também é feito $c = \hbar = 8\pi G = 1$. Para esse modelo específico

$$3H^2 \equiv \rho_U = \frac{X}{2} + 9\lambda_5 H^2 X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}} , \quad (4.73)$$

$$-(2\dot{H} + 3H^2) \equiv P_U = X^{1/2} + \frac{X}{2} - \lambda_5(2\dot{H} + 3H^2)X - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X} . \quad (4.74)$$

Portanto, a equação de estado do fluido (4.70) é

$$\omega_U \equiv \frac{P_U}{\rho_U} = \frac{X^{1/2} + \frac{X}{2} - \lambda_5(2\dot{H} + 3H^2)X - 2\lambda_5 H \dot{X} + \frac{\lambda_3 \dot{X}}{2\sqrt{2}X}}{\frac{X}{2} + 9\lambda_5 H^2 X - \frac{3\lambda_3 H}{\sqrt{2}}} . \quad (4.75)$$

É importante de se comentar sobre a dimensionalidade das constantes λ_3 e λ_5 . Em unidades naturais, a Lagrangeana possui unidade de GeV^4 e a constante de Hubble possui unidade de GeV . Pela análise dimensional de (4.73), teremos que λ_3 e λ_5 possuem unidades de GeV^3 e GeV^{-2} respectivamente. A equação (4.73) também nos permite determinar as escalas para qual as constantes λ_3 e λ_5 são da ordem da unidade. Observemos que $\frac{\rho_U}{3H_0^2} = 1$ e que todos os fatores de (4.73) divididos por $3H^2$ devem ser da ordem da unidade. Do primeiro termo temos que $X \sim 6H^2$, do segundo termo temos que $\lambda_5 \sim H^{-2}$ e do terceiro termo temos $\lambda_3 \sim H$. Sendo assim, definimos as constantes

$$\tilde{\lambda}_3 \equiv \lambda_3 H_0^{-1} , \quad \tilde{\lambda}_5 \equiv \lambda_5 H_0^2 , \quad (4.76)$$

que são da ordem de um.

A equação de movimento do campo escalar é obtida a partir de (4.26):

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2}X + \lambda_3 H + 6\sqrt{2}\lambda_5 H^2 X \right) \dot{X} + 12\sqrt{2}\lambda_5 H(2\dot{H} + 3H^2)X^2 \\ & + 6\sqrt{2}HX^2 - 6\sqrt{2}HX^{3/2} - 6\lambda_3(\dot{H} + 3H^2)X = 0 . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Repare que a equação de movimento não depende do campo escalar em si, mas apenas de sua primeira e segunda derivada. Isso é uma consequência da simetria de desvio

Podemos então combinar as equações (4.73), (4.74) e (4.77) de forma a eliminar X e \dot{X} e escrever a pressão em termos somente da densidade de energia:

$$\begin{aligned} p_U(\rho_U) = & \{-36\sqrt{3}\lambda_3^5 - 18\lambda_3^4\{2g(\rho_U) + \lambda_5f(\rho_U)[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)]\} - \frac{1}{2}f^{3/2}(\rho_U)[2 - 3\lambda_5f(\rho_U)]^2 \\ & \{-6\sqrt{2}\lambda_3\lambda_5f(\rho_U) - 2\sqrt{2}[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + 2f^{1/2}(\rho_U)[2\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] \\ & + \lambda_5f^{3/2}[11\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)]\} + \frac{3}{2}\lambda_3^2f(\rho_U)[3\lambda_5f(\rho_U) - 2]\{10\sqrt{3}\lambda_3 + 6g(\rho_U) \\ & - 12\sqrt{2}\lambda_5f^{1/2}(\rho_U)[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + \lambda_5f(\rho_U)[21\sqrt{3}\lambda_3 + 19g(\rho_U)]\}\} \\ & \{[3\lambda_5f(\rho_U) - 2]\{-3\lambda_3^2\{4 + \lambda_5f(\rho_U) - 28\}\}[\sqrt{3}\lambda_3 + g(\rho_U)] + f(\rho_U)[3\lambda_5f(\rho_U) - 2] \\ & \{\sqrt{3}\lambda_3\lambda_5f(\rho_U) - 14\} - \{4 + 6\lambda_5f(\rho_U)[\lambda_5f(\rho_U) - 1]\}g(\rho_U)\}\}^{-1} , \end{aligned} \quad (4.78)$$

em que

$$f(\rho_U) = \frac{\rho_U + 6\lambda_5\rho_U^2 + [6\lambda_3^2\rho_U(\frac{1}{2} + 3\lambda_5\rho_U)^2]^{1/2}}{(\frac{1}{2} + 3\lambda_5\rho_U)^2} , \quad (4.79)$$

$$g(\rho_U) = [3\lambda_3^2 + 2f(\rho_U) - 3\lambda_5f^2(\rho_U)]^{1/2} . \quad (4.80)$$

A equação (4.78) pode ser vista como uma generalização da equação de estado do Gás de Chaplygin Generalizado, advindo da simetria de desvio da Teoria de Galileons Generalizada. Das equações (4.73) e (4.74) podemos expressar X em termos de H e \dot{H} em termos de H e \dot{H}

$$X = \frac{3H(2H + \sqrt{2}\lambda_3)}{1 + 18\lambda_5H^2} \quad (4.81)$$

$$\dot{X} = \frac{2X\left[X\left(4\lambda_5\dot{H} - 1\right) - 4\dot{H} + 6H^2(\lambda_5X - 1) + 2\sqrt{X}\right]}{\sqrt{2}\lambda_3 - 8\lambda_5HX} \quad (4.82)$$

e substituindo as relações acima na equação de movimento (4.77), temos uma equação diferencial para $H(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{H} = & \{\sqrt{6}H^{3/2}(1 + 9\lambda_5H^2)\{(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2}(1 + 9\lambda_5H^2)^{1/2} \\ & - \sqrt{6H}[\lambda_3^2(1 - 3\lambda_5H^2) + 3\sqrt{2}\lambda_3H(1 + \lambda_5H^2) + 4H^2(1 + 3\lambda_5H^2)]\}\} \\ & \times \{\lambda_3^2(1 - 27\lambda_5H^2) + 6\sqrt{2}\lambda_3H(1 + 5\lambda_5H^2 + 36\lambda_5^2H^4) + 8H^2[1 + 9\lambda_5H^2(1 + 6\lambda_5H^2)]\}^{-1} . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Finalmente, inserindo (4.81), (4.82) e (4.83) em (4.75) obtemos

$$\begin{aligned} \omega_U = & \{-2\sqrt{6}(\sqrt{2}\lambda_3 + 2H)^{3/2}(1 + 9\lambda_5 H^2)^{3/2} + 3H\{8H^2(1 + 15\lambda_5 H^2) \\ & + 3\lambda_3^2(1 + 16\lambda_5 H^2 - 9\lambda_5^2 H^4) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H[1 + 3\lambda_5 H^2(5 - 6\lambda_5 H^2)]\}\} \\ & \times \{3H\{\lambda_3^2(1 - 27\lambda_5 H^2) + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1 + 5\lambda_5 H^2 + 36\lambda_5^2 H^4) \\ & + 8H^2[1 + 9\lambda_5 H^2(1 + 6\lambda_5 H^2)]\}\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

A estratégia para resolução do background consiste em resolver a equação (4.84) em $\omega_U(z = 0) = \Omega_m \omega_m + \Omega_\Lambda \omega_\Lambda = -0.7$ com $H(z = 0) = H_0$ e assim obter os pares $\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_5$ consistentes com a condição referida (Fig. 4.3). Depois, é resolvido a equação diferencial (4.83) para valores escolhidos de $\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_5$ e a condição inicial $H(z = 0) = H_0$. É importante salientar que ao fazermos $c = \hbar = 8\pi G = 1$, estamos trabalhando em unidades de Planck, portanto, o valor de H_0 tem que ser expresso adimensionalmente. Para isso, os autores de [28] fizeram $H_0 = \frac{h}{3000} \text{Mpc}^{-1} L_p$ em que $L_p = \sqrt{\frac{8\pi G \hbar}{c^3}} = 8.10766 \times 10^{-35} \text{m}$ é o *comprimento de Planck reduzido*. Sendo $h = 0.72$, $1 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{22} \text{ m}$, temos $H_0 \approx 6.48613 \times 10^{-61}$.

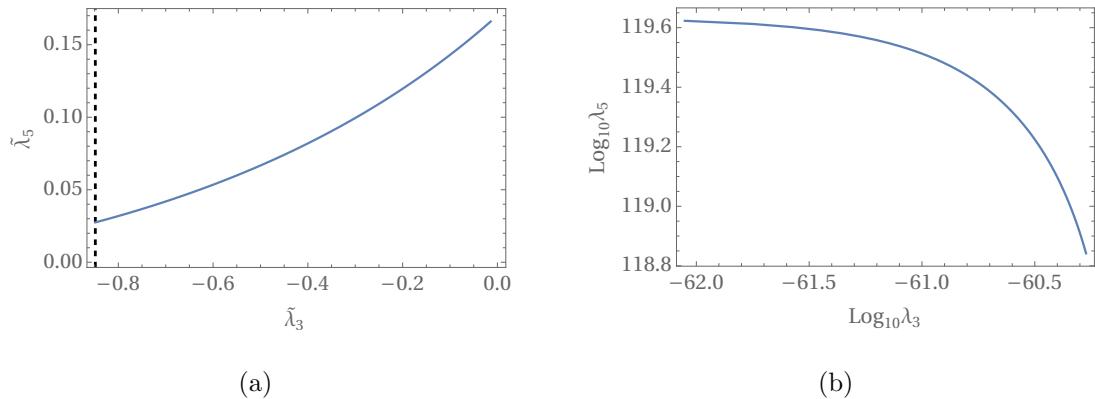


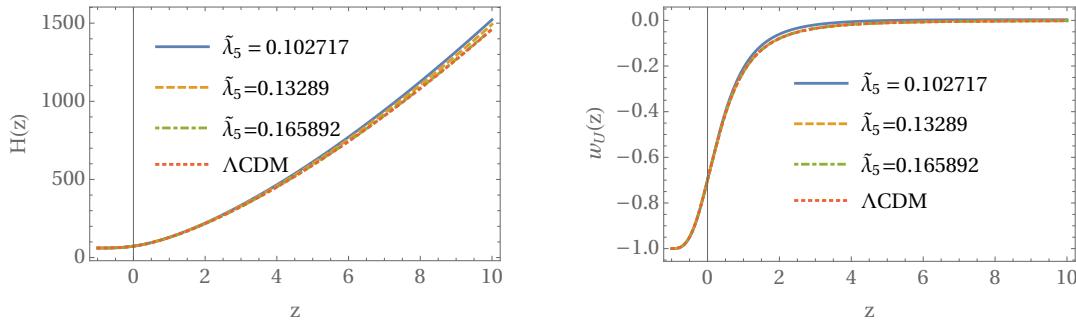
Figura 4.3: Possíveis pares de parâmetros $\lambda_3 - \lambda_5$ que satisfazem a condição $\omega_U(z = 0) = -0.7$ e $H_0 \approx 6 \times 10^{-61}$ em valores normalizados (a) e em escala logarítmica (b). A linha vertical pontilhada na esquerda representa o limite a partir da qual o modelo exibe instabilidades *ghost* e Laplacianas. reproduzida de [28].

Para obtermos a evolução da taxa de expansão do universo no referido modelo, é resolvida a equação diferencial (4.83) para $H(z)$ fazendo a transformação da variável tempo t para a variável redshift z através da relação $\dot{H} = -(1 + z)H(z)H'(z)$ em que

' representa derivada em relação ao redshift. Feito isso, podemos obter a evolução da equação de estado.

Na figura 4.4.a apresentamos a evolução de $H(z)$ para três escolhas de λ_3 e também a do modelos Λ CDM fiducial ($\Omega_\Lambda = 0.7$). E na figura 4.4.b temos a evolução de $\omega_U(z)$ que corresponde ao comportamento esperado, em que a equação de estado é nula até $z = 2 \sim 3$, a partir do qual começa a decrescer, passa pelo valor $-1/3$ por volta de $z = 0.4$ e assume hoje $z = 0$ o valor de -0.7 . No futuro, o valor de $\omega_U \rightarrow -1$.

Quanto a energia cinética $X(t)$, temos que ela parte de um valor constante em tempos remotos e apresenta um leve decrescimento quando ω_U transita de 0 para -1 (figura 4.5.a). Isto é previsto pela equação (4.81), em que para valores muito grandes de H , $X \rightarrow \frac{1}{3\tilde{\lambda}_5}$. Por outro lado, pela relação (4.73), temos que a densidade de energia ρ_U segue a evolução de H , o que corresponde com o gráfico obtido (figura 4.5.b).

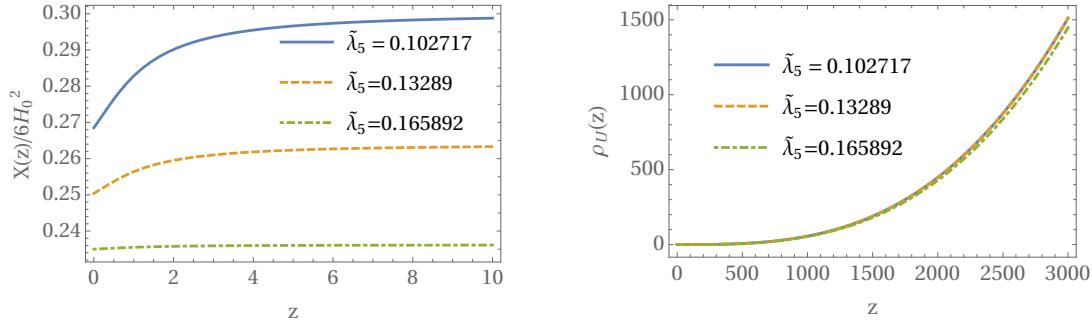


(a) A evolução do parâmetro de Hubble em unidades de $\text{km}\text{s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

(b) Evolução da equação de estado ω_U em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

Figura 4.4: Plots reproduzidos de [28]. Em ambos os casos, temos a comparação com um modelos Λ CDM fiducial, em que $\Omega_\Lambda = 0.7$.

Por fim, é verificado que o modelo está livre de *ghosts* e instabilidades Laplacionas que afetam a evolução das perturbações. A estabilidade das perturbações escalares são



(a) A evolução do termo cinético $X/6H_0^2$ em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

(b) Evolução da densidade de energia ρ_U em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

Figura 4.5:

dadas pelas condições (4.53), que para o modelo particular se torna

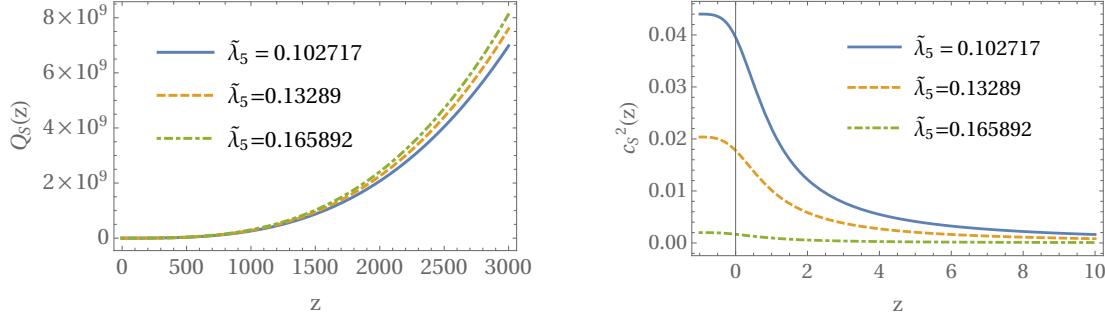
$$Q_s = -\{2(\lambda_5 - 1) \left\{ 3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1 - 5\lambda_5 X) + 8X \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_5 X + 3\lambda_5 X + 3\lambda_5 H^2(1 + 3\lambda_5 X) \right] \right\} \} \{[\sqrt{2}\lambda_3 + H(4 - 12\lambda_5 X)]^2\}^{-1} > 0 , \quad (4.85)$$

$$c_s^2 = \left\{ (\lambda_5 X - 1) \left\{ 3\lambda_3^2 + 6\sqrt{2}\lambda_3 H(1 + 5\lambda_5 X) + 8X \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_5 X + 3\lambda_5 H^2(1 + 3\lambda_3 X) \right] \right\} \right\}^{-1} \\ \{32\lambda_5^2 H^2 X^2 (3\lambda_5 - 1) - 8(\lambda_5 X - 1)^2 (3\lambda_5 - 1) \dot{H} + \lambda_3 [\lambda_3 + \lambda_3 \lambda_5 X - 4\sqrt{2}\lambda_5 (\lambda_5 X - 1) \dot{X}] - 2H \{ \sqrt{2}\lambda_3 [\lambda_5 X (2 + 7\lambda_5 X) - 1] - 4\lambda_5 (\lambda_5 X - 1)(1 + 3\lambda_5 X) \dot{X} \} \} \geq 0 , \quad (4.86)$$

e com o vínculo adicional $c_s^2 \leq 1$. Observamos que o modelo não apresenta *ghosts* e instabilidades Laplacianas para todos os casos testados (fig. 4.6). Outra coisa enfatizada pelos autores de [28] é a necessidade da escolha dos fatores $X^{1/2}$ e $X^{-1/2}$ nas funções $K(\phi, X)$ e $G_3(\phi, X)$ respectivamente. Esses fatores não são necessários para obtenção do comportamento desejado no background, no entanto, são necessários para que o modelo não apresente patologias em nível de perturbativo.

4.5.1 Equações de perturbações lineares

Uma vez que as equações do background para o modelo específico foram obtidas e resolvidas pelos autores de [28]. Próximo passo consiste em obter e resolver as equações



(a) A evolução da grandeza Q_S^2 em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

(b) A evolução da velocidade do som quadrático c_s^2 em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

Figura 4.6: Plots reproduzidos de [28]. Em ambos os casos, temos a comparação com um modelo Λ CDM fiducial, em que $\Omega_\Lambda = 0.7$.

de Einstein e a equação de movimento do campo escalar em nível perturbativo de primeira ordem. Para obtermos este sistema de equações, partimos do tensor energia-momento, obtido da ação (4.72) por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_U) . \quad (4.87)$$

e após executarmos variações na métrica (Ver apêndice B), obtemos $(T^\mu_\nu)^U = (T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_2} + (T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_3} + (T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_5}$, em que

$$(T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_2} = \left(1 - \frac{1}{4}X^{-1/2}\right) g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma \phi \nabla_\nu \phi + \delta_\nu^\mu \left(X - \frac{1}{2}X^{1/2}\right) , \quad (4.88)$$

$$(T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_3} = -\frac{\lambda_3 X^{-3/2}}{4} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma \phi \nabla_\nu \phi \square \phi + g^{\mu\sigma} \nabla_{(\sigma} X \nabla_{\nu)} \phi - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu \nabla_\lambda X \nabla^\lambda \phi\right) , \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} (T^\mu_\nu)^{\mathcal{L}_5} = & \lambda_5 \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma \phi \nabla_\nu \phi R - g^{\mu\sigma} 2\nabla_\alpha \phi \nabla_{(\sigma} \phi G_{\nu)}^\alpha - X G_\nu^\mu - \nabla^\alpha \phi \nabla^\beta \phi R_{\alpha\nu\beta}^\mu \right. \\ & - \nabla^\mu \nabla^\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\alpha \phi + \nabla^\mu \nabla_\nu \phi (\square \phi) - \delta_\nu^\mu \left(-\frac{1}{2} \nabla^\alpha \nabla^\beta \phi \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}(\square \phi)^2 - \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi R^{\alpha\beta} \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.90)$$

Como foi mostrado no capítulo 2, as perturbações escalares da métrica no gauge Síncrono são caracterizadas por duas funções h e η . Também temos que considerar per-

turbações de primeira ordem no campo escalar

$$\phi(\tau) \rightarrow \phi(\tau) + \delta\phi(\tau, \vec{x}) \quad . \quad (4.91)$$

Aqui apresentaremos as equações obtidas já no espaço de Fourier com auxílio do software **Wolfram Mathematica**:

Componente 00

$$\begin{aligned} 2k^2\eta - \mathcal{H}h' &= \frac{1}{2}\phi'\delta\phi' + \frac{\lambda_3 a}{2\sqrt{2}\phi'} [2k^2\delta\phi + h'\phi'] \\ &+ \lambda_5 a^{-2} [9\mathcal{H}^2\phi'\delta\phi' + 2\mathcal{H}\phi'k^2\delta\phi - \phi'^2k^2\eta] \quad . \end{aligned} \quad (4.92)$$

Componente 0i

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}\phi'\delta\phi + \frac{a\lambda_3}{\sqrt{2}\phi'} [3\mathcal{H}\delta\phi - \delta\phi'] \right. \\ &\left. + a^{-2}\lambda_5 [6\mathcal{H}(3\mathcal{H}\phi'\delta\phi - 2\phi'\delta\phi') + 6\phi'^2\eta'] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.93)$$

Componente ij ($i \neq j$)

$$\begin{aligned} \frac{h''}{2} + 3\eta'' + \mathcal{H}h' + 6\mathcal{H}\eta' - k^2\eta &= - \left\{ \lambda_5 a^{-2} k^2 \left[\phi''\delta\phi - \frac{1}{2}\phi'\phi''(h' + 6\eta') \right. \right. \\ &\left. \left. + \phi'^2 \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{4}(h'' + 6\eta'') \right) \right] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.94)$$

Componente ii ($i = j$)

$$\begin{aligned} 3h'' - 6k^2\eta + 6\mathcal{H}h' &= -\frac{3}{2}(\phi' - \sqrt{2}a)\delta\phi' \\ &- \frac{3\lambda_3 a}{2\sqrt{2}\phi'^2} [\phi''\delta\phi' - \phi'\delta\phi''] \\ &+ \lambda_5 a^{-2} \left\{ \phi''[2\phi''(k^2\delta\phi - 3\mathcal{H}\delta\phi') + \phi' \left(k^2\eta + \frac{1}{2}h'' \right)] \right. \\ &\left. + \phi'[\phi''h' + 3(2\mathcal{H}' - 3\mathcal{H}^2)\delta\phi' + 6\mathcal{H}\delta\phi''] \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.95)$$

É importante frisar que a equação das componentes ii em (4.95) é resultado da soma de todas as componentes diagonais da parte espacial. Como equação auxiliar, temos a

equação de movimento para a perturbação do campo escalar

$$\begin{aligned}
& (a^2 \phi'^2 + 3\sqrt{2}a^3\mathcal{H} + 6\lambda_5\mathcal{H}^2\phi'^2)\phi'^2\delta\phi'' - [3\sqrt{2}\lambda_3a^3\mathcal{H}\phi'\phi'' \\
& - (a^2 - 6\lambda_5\mathcal{H}^2)\phi'^2 - 3\sqrt{2}a^3\mathcal{H}\phi'^3 - 8\mathcal{H}\phi'^4(a^2 - 2\lambda_5(3\mathcal{H}' + k^2))]\delta\phi' \\
& + [\sqrt{2}\lambda_3a^3\phi'\phi'' + a^2\phi'^3(\phi' + \sqrt{2}a) - 2\phi'^4\lambda_5(5\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}') - 5\sqrt{2}\lambda_3a^3\mathcal{H}\phi'^2]k^2\delta\phi \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}}a^3\phi'^3h' - \frac{1}{\sqrt{2}}a^3\phi'^3\lambda_3(h'' + 6\mathcal{H}h') + \frac{1}{2}(a^2 + 2\lambda_5(3\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}'))\phi'^5h' \\
& - 4\lambda_5\phi'^5k^2\eta' + 2\lambda_5\phi'^4\phi''(\mathcal{H}h' + 2k^2\eta) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda_3a^3\phi'^2\phi''h' = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.96}$$

A equação (4.96) não é independente das equações de Einstein, pois pode ser obtida da condição de conservação da energia $\nabla_\mu T^{0\mu} = 0$, e pode substituir as equações (4.94) e (4.95). Sendo assim, temos três variáveis, sendo duas as funções escalares de perturbação da métrica h e η , e a perturbação do campo escalar $\delta\phi$, com suas respectivas equações (4.92), (4.93) e (4.96).

4.5.2 Funções α e vínculos de GW170807

A obtenção do sistema de equações (4.92), (4.93) e (4.96) se deu com o intuito de resolver esse sistema numericamente em um código de Einstein-Boltzmann como o CAMB ou o CLASS. No entanto, em 2017 o `hi-class` foi disponibilizado publicamente e por já ser um código criado para resolver modelos de Horndeski, resolvemos adotá-lo. Como foi explicado anteriormente, o código `hi-class` tem como *input* as funções α_K , α_B , α_M e α_T obtidas das funções originais $K(\phi, X)$ e $G_i(\phi, X)$ por (4.44), (4.45), (4.34) e (4.33). Cada modelo de Horndeski terá funções que o caracterizam.

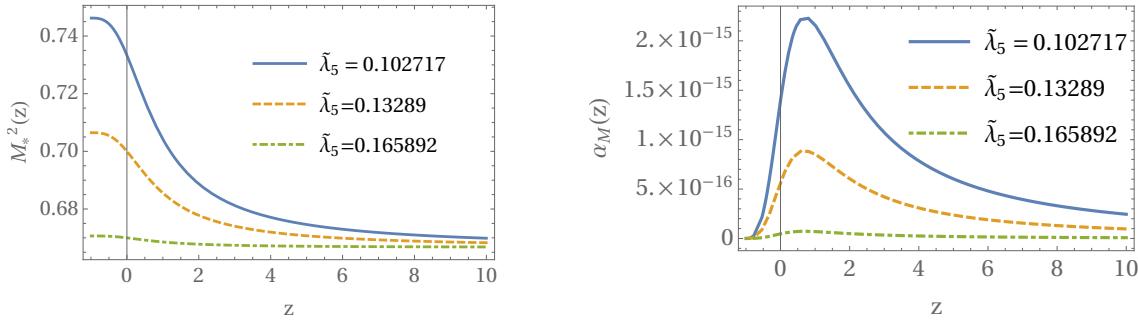
Para o modelo específico que estamos estudando, a massa de Planck efetiva evolui como $M_*^2 = 1 - \lambda_5X$, enquanto as funções α são dadas por

$$\alpha_K = \frac{(1 + 6\lambda_5H^2)X + \frac{3\lambda_3H}{\sqrt{2}}}{H^2(1 - \lambda_5X)} , \tag{4.97}$$

$$\alpha_B = -\frac{\sqrt{2}\lambda_3 - 8\lambda_5HX}{2H - 2\lambda_5HX} , \tag{4.98}$$

$$\alpha_M = -\frac{\lambda_5\dot{X}}{H(1 - \lambda_5X)} , \tag{4.99}$$

$$\alpha_T = \frac{2\lambda_5X}{1 - \lambda_5X} . \tag{4.100}$$

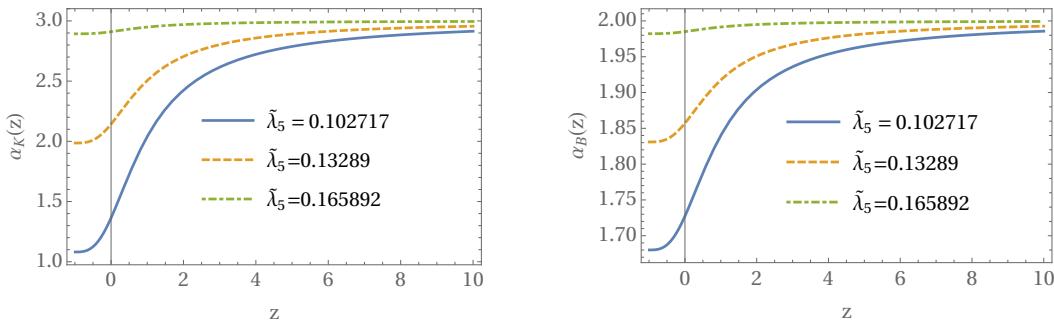


(a) Evolução da massa de Planck efetiva M_*^2 em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

(b) Evolução da variação da massa de Planck efetiva α_M em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

Figura 4.7:

Na figura 4.7.a e 4.7.b temos respectivamente a evolução da massa de Planck efetiva M_*^2 e de sua variação α_M . Observemos que $M_{*,0}^2 = (8\pi G_{\text{eff}})^{-1} \neq 1$ o que implica que $G_{\text{eff}} \neq G_N$, ou seja, segundo este modelo a constante gravitacional em escalas cosmológicas possui um valor diferente do valor da constante gravitacional G_N medida em escalas do sistema solar.



(a) Evolução de α_K em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

(b) Evolução de α_B em relação ao redshift z para três valores de $\tilde{\lambda}_5$.

Figura 4.8:

Nas figuras 4.8.a e 4.8.b temos respectivamente as funções “*kineticity*” α_K e ‘‘*braiding*’’ α_B , que são relacionados a contribuições cinéticas para as perturbações escalares. Ambas crescem a partir de um valor inicial em $z = 0$ até um valor assintótico. Quanto mais

intenso o acoplamento $\tilde{\lambda}_5$, mais próximo o valor inicial se encontra do valor assintótico.

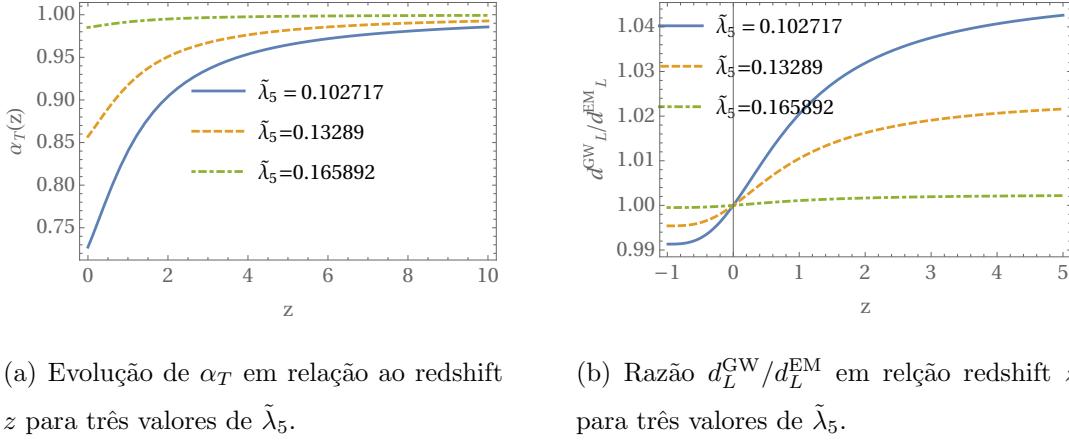


Figura 4.9:

O excesso na velocidade das perturbações tensoriais (fig. 4.9.a) excede em muito o limite imposto pelo evento GW170817 dado na equação (4.61). É importante salientar que o modelo específico foi proposto antes do referido evento, logo, a função G_5 ainda era viável quando o modelo foi proposto. Quanto à razão $d_L^{\text{GW}}/d_L^{\text{EM}}$ na figura 4.9.b temos uma razão entre as duas distâncias luminosas maior do que um, no entanto, menor que 1.01 para $z = 0.008$ correspondente a GW170817. O amortecimento em $z = 0$ fica em torno de -0.01 , o que está incluso nos limites estabelecidos por [85], que não são muito restritivos.

Determinaremos que valores a constante de acoplamento não mínimo λ_5 deve ter para ser compatível com os vínculos de GW170817. Invertendo a expressão (4.100), obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= \frac{\alpha_T}{(2 + \alpha_T)X} \\ &\approx \frac{\alpha_T}{2X} \quad , \end{aligned} \tag{4.101}$$

e como $X \approx H_0^2 \approx 10^{-120}$ e $\alpha_T \approx 10^{-15}$, então $\lambda_5 \approx 10^{105}$. Isso significa que para que o modelo seja compatível com o vínculo imposto pelo evento GW170817 é necessário que o acoplamento derivativo λ_5 seja cerca de 15–16 ordens de grandeza menor do que os valores impostos pela equação de estado (4.84) e pelas condições da não existência de *ghosts* e instabilidades laplacianas mostrados na figura 4.3. Tal discrepância pode ser visualizada na figura 4.10 em que podemos ver a variação de c_T^2 com λ_5 (em escala logarítmica).

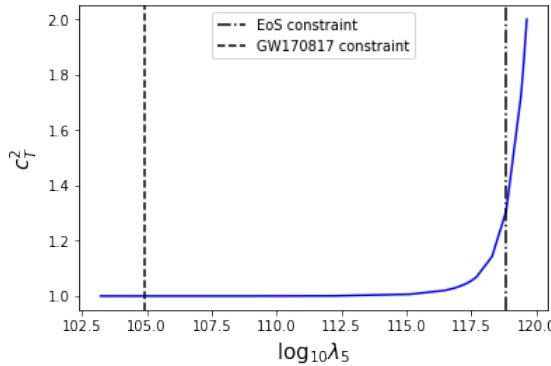


Figura 4.10: A variação de c_T^2 com o acoplamento derivativo λ_5 (em escala logarítmica), em que a velocidade de propagação das ondas gravitacionais cresce à medida que a fricção se torna mais intensa. A linha vertical tracejada delimita o vínculo em λ_5 imposto por GW170817, enquanto a linha vertical tracejada-pontilhada demarca o limite necessário para se obter a evolução cosmológica desejada.

4.5.3 Evolução da perturbações lineares no modelo específico

Mesmo que o vínculo das ondas gravitacionais emitidas pela colisão de um par de estrelas de neutrons na velocidade de propagação das perturbações tensoriais descarte o modelo específico, ainda assim vamos analisar a evolução das perturbações escalares obtidas no código `hi-class`.

Como vimos anteriormente, é necessário fornecer como *input* ao `hi-class` uma parametrização para as funções α que modelam a gravitação modificada. Pelas figuras 4.8 e 4.9 vemos que as funções α_K , α_B e α_T partem de um valor inicial em $z = 0$ e cresce assintoticamente até um valor final. Esse comportamento se deve ao fato de que a evolução das funções α é dirigida pelo termo cinético X e este cresce assintoticamente até $1/3\lambda_5$ em grandes valores de z .

Uma função que modela esse comportamento é a *tangente hiperbólica*. Sendo assim, as funções α_j com $j = \{K, B, T\}$ podem ser parametrizadas da forma

$$\alpha_j(z) = c_i + (c_f - c_i) \tanh\left(\frac{z}{s_i}\right) , \quad (4.102)$$

em que c_i é o respectivo valor inicial para cada função α , c_f é o respectivo valor final e s_i é a inclinação da tangente hiperbólica. Por sua vez, a massa de Planck efetiva (figura 4.7a) decai a partir de um valor inicial até um valor assintótico podendo ser parametrizada da

forma

$$M_*^2(z) = m_i + (m_i - m_f) \tanh\left(\frac{-z}{s_m}\right) , \quad (4.103)$$

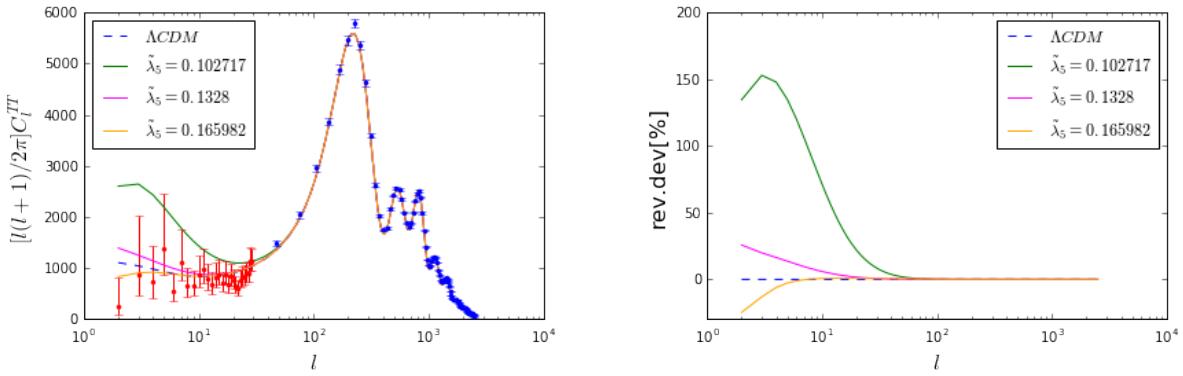
em que m_i é o valor de M_*^2 em $z = 0$ e m_f o valor assintótico, enquanto s_m é a inclinação da tangente hiperbólica. A variação da massa de Planck efetiva α_M é obtida ao derivar (4.103). Na tabela abaixo temos os valores de referência do acoplamento derivativo $\tilde{\lambda}_5$ e os valores iniciais correspondentes de M_*^2 e α_j .

$\tilde{\lambda}_5$	M_*^2	α_M	α_K	α_B	α_T
0.102717	0.74	1.59×10^{-15}	1.36	1.72	0.72
0.13289	0.7	5.65×10^{-16}	2.14	1.85	0.85
0.165982	0.67	4.72×10^{-17}	2.91	1.98	0.98

O valor para a inclinação da tangente hiperbólica que melhor se ajustou às funções exibidas nas figuras 4.7a, 4.8a, 4.8b e 4.9a foi o de $s_i = s_m = 2.6$. Tendo as funções α devidamente parametrizadas e seus respectivos valores iniciais, podemos estudar como as perturbações lineares evoluem de acordo com a intensidade do acoplamento λ_5 .

Primeiro obtemos o espectro de potências angular da radiação cósmica de fundo (C_l' s), exibido na figura 4.11.a. Notemos que a diferença entre o modelo específico e o Λ CDM é sentida em baixos valores de l (grandes ângulos) se tornando imperceptível para grandes valores de l (pequenos ângulos), e que o crescimento na intensidade do acoplamento derivativo λ_5 vai levando o espectro angular para valores menores, até o ponto em que a diferença relativa em relação ao previsto pelo modelo Λ CDM se torna negativa (figura 4.11.b). Dessa forma, o crescimento do termo λ_5 tende a aumentar a contribuição do efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW).

Quanto ao espectro de potência da matéria (figura 4.13.a), vemos que a amplitude do espectro é menor do que o Λ CDM para pequenas escalas ($k \lesssim 10^{-3}$) e o oposto em grandes escalas ($k \gtrsim 10^{-3}$). O desvio precentual relativo em relação ao Λ CDM fica em torno de $\leq |40\%|$ (figura 4.13.b), sendo que ele tende a aumentar em grandes escalas quanto mais intenso o acoplamento λ_5 . Esse efeito se deve ao fato de que o campo escalar comunica uma força extra e aumenta a interação atrativa entre as perturbações em pequenas escalas. Por sua vez, a função de crescimento $f\sigma_8(z)$ indica uma maior taxa no crescimento de



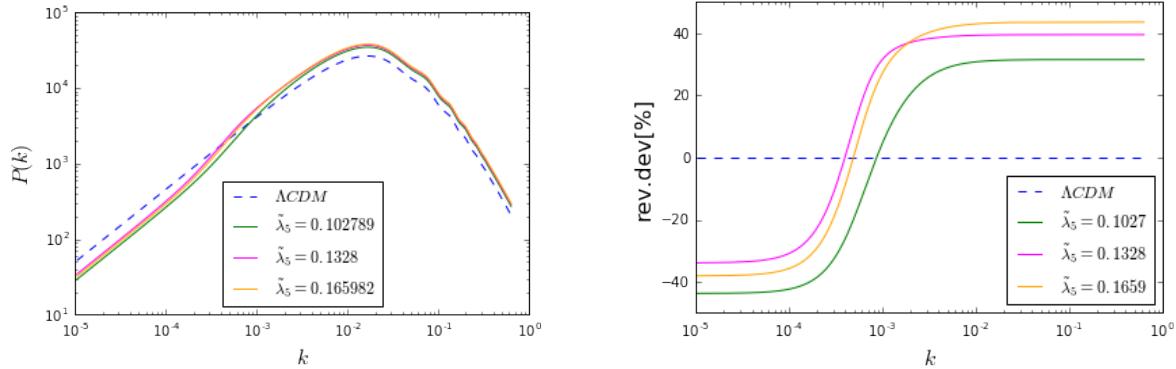
(a) Evolução do espectro de potência angular da radiação cósmica de fundo para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ (linhas contínuas), assim como o do modelo Λ CDM fiducial (linha tracejada). Vemos também a medida dos C'_l s feitas pelo satélite Planck para grandes ângulos (vermelho) e pequenos ângulos (azul) [3].

(b) Desvio percentual relativo do espectro de potência angular da radiação cósmica de fundo para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ em relação ao modelo Λ CDM fiducial.

Figura 4.11:

estruturas (figura 4.14) para o modelo específico em relação ao Λ CDM, sendo que ela vai aumentando de acordo com a intensidade do acoplamento λ_5 . O desvio relativo em relação ao previsto por Λ CDM começa a se fazer perceptível a partir de $z = 8$ e aumenta à medida que z diminui (figura 4.14.b).

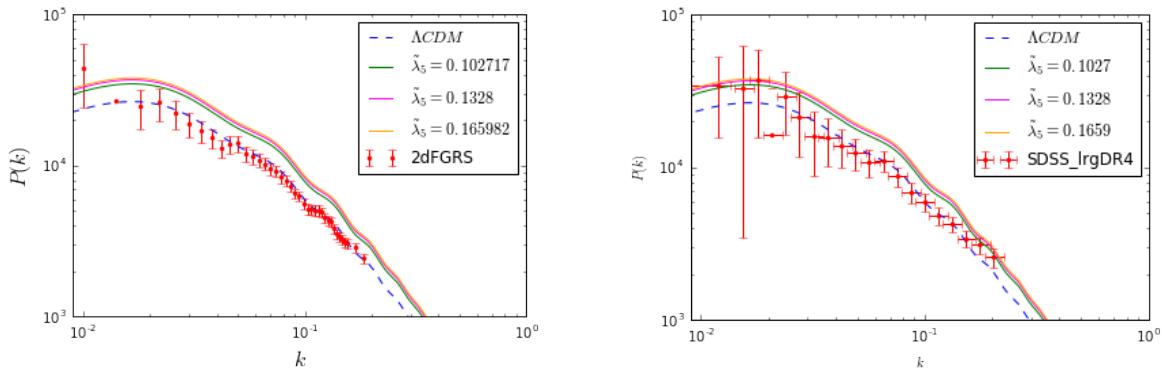
A comparação com os dados do espectro de potências [155, 156] e do crescimento de estruturas [157] indicam uma forte preferência pelo modelo Λ CDM, principalmente o 2nF Galaxy Redshift Survey. O mesmo se aplica aos dados de anisotropias da CMB. Reparemos que dados obtidos pelo espectro eletromagnético não excluem o modelo, ao contrário dos dados no espectro de ondas gravitacionais.



(a) Espectro de potência da matéria para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ (linhas contínuas), assim como o do modelo Λ CDM fiducial (linha tracejada).

(b) Desvio percentual relativo do espectro de potência da matéria para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ em relação ao modelo Λ CDM fiducial.

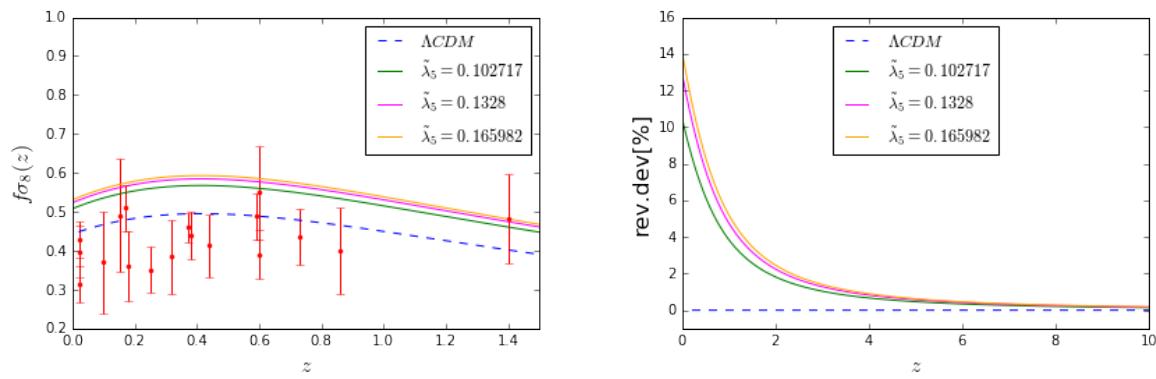
Figura 4.12:



(a) Comparaçāo entre o espectro de potências da matéria teoricamente previsto e os dados do 2dF Galaxy Redshift Survey [155].

(b) Comparaçāo entre o espectro de potências da matéria teoricamente previsto e os dados do SDSS Galaxy Survey [156].

Figura 4.13:



(a) Taxa de crescimento de estruturas medida pela função $f\sigma_8(z)$ para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ (linhas contínuas) e Λ CDM fiducial (linhas traçadas). Os dados plotados de $f\sigma_8$ estão disponíveis na referência [157] com suas respectivas referências.

(b) Desvio percentual relativo da taxa de crescimento de estruturas para três valores de $\tilde{\lambda}_5$ em relação ao modelo Λ CDM fiducial.

Figura 4.14:

Capítulo 5

Ondas Gravitacionais como Sirenes Padrão

5.1 Introdução

A detecção de ondas gravitacionais provenientes da fusão de duas estrelas de nêutrons no evento GW170817 junto à sua contraparte eletromagnética teve grande importância nas investigações sobre a natureza da energia escura. Como vimos no capítulo anterior, a diferença no tempo de chegada entre os sinais eletromagnético e gravitacional constatou que a diferença entre a velocidade das ondas gravitacionais e a velocidade da luz é virtualmente nula, o que levou a uma grande restrição nas teorias de gravitação modificada.

Como havíamos mostrado no capítulo 3, a distância luminosa da fonte pode ser diretamente obtida da amplitude do sinal gravitacional enquanto o redshift pode ser obtido da contraparte eletromagnética, o que nos permite construir um diagrama de Hubble $d_L - z$ e medir a história de expansão cósmica. A vantagem das sirenes padrão é que elas fornecem um método totalmente auto calibrável de obtenção da distância luminosa das fontes, pois a distância pode ser obtida diretamente da amplitude do sinal, e, ao contrário das velas padrão, não necessita de nenhum marcador intermediário de distância. Simulações demonstram que nos próximos cinco anos, com a expectativa de detectar 50 a 60 BNS com contraparte eletromagnética, é possível reduzir o erro em H_0 em até 2% como mostrado

na figura 5.1 [77]¹.

Os detectores futuros, especialmente detectores de terceira geração (3G) como o Telescópio Einstein (ET) [70] a ser construído na Europa em meados da década de 2030, pode detectar da ordem de $10^3 - 10^7$ eventos de colisão de estrelas de nêutrons binárias (BNS) e entre estrelas de nêutrons e buracos negros (NSBH) por ano, sendo que as estimativas é que desses eventos, a contraparte eletromagnética seja detectada na ordem da centena ($\mathcal{O}(10^2)$). O Telescópio Einstein consiste de três detectores no subsolo distribuídos na forma de um triângulo equilátero com 10 km cada lado, abrangendo um intervalo de frequências de $1 - 10^4$ Hz. As potencialidades do ET foram discutidas detalhadamente em dois trabalhos [78, 79], em que foram simulados de 100 a 1000 detecções, e procurou estabelecer como os vínculos nos parâmetros cosmológicos podem melhorar com o aumento no número de detecções. Esses dois trabalhos assumiram o modelo Λ CDM como cosmologia fiducial.

Neste capítulo discutiremos como são simulados os erros esperados nas detecções feitas pelo ET, como as fontes das ondas gravitacionais estão distribuídas com o redshift, como são obtidos os vínculos nos parâmetros cosmológicos a partir das observações pelo algoritmo MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*) e por fim, como as sirenes padrão podem ajudar a vincular modelos de interação no setor escuro que foram discutidos no capítulo 1.

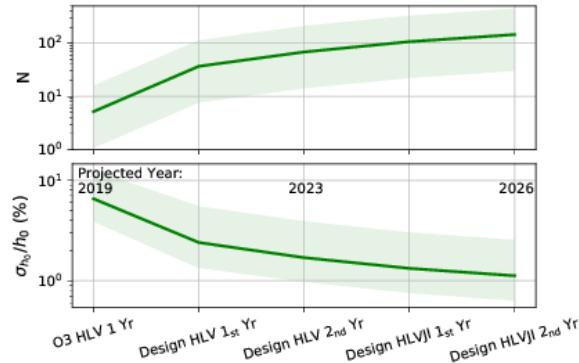


Figura 5.1: Número de detecções esperada de BNS e o correspondente erro relativo para a medida de H_0 . Extraído de [77].

¹Este trabalho é do ano de 2017, sendo já considerado desatualizado.

5.2 Detectores de ondas gravitacionais

Como vimos no capítulo 3, a passagem de uma onda gravitacional produz deformações espaciais que podem ser detectadas pelo alargamento e encurtamento na distância entre partículas teste. Os detectores atuais visam medir essas deformações por meio de interferometria. O conceito é simples: a passagem de uma onda gravitacional pelo detector produz distorções espaciais que geram padrões de interferência construtiva e destrutiva em feixes LASER que viajam pelos braços do detector. Os formatos de detector mais comum são aqueles em forma de “L” e os em formato triangular.

5.2.1 Funções feixe padrão

Detectores interferométricos medem a deformação espacial produzida pela passagem da onda gravitacional (*strain*) $h(t)$. Essa deformação depende da geometria do detector, e pode ser escrita de forma geral como

$$h(t) = \sum_{A=+, \times} D^{ij} h_{ij}^A(\hat{\mathbf{n}}, t) , \quad (5.1)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é a direção de propagação da onda gravitacional e D^{ij} é chamado de tensor de detecção, dado por

$$D^{ij} = \frac{1}{2} (\hat{u}^i \hat{u}^j - \hat{v}^i \hat{v}^j) , \quad (5.2)$$

sendo \hat{u}^i e \hat{v}^i os vetores unitários que denotam um sistema de eixos ortogonal a direção de propagação da Gw, que por sua vez é dada por $\hat{\mathbf{n}} = (\theta, \phi)$, que equivale aos ângulos polar e azimutal de localização da fonte na esfera celeste em relação ao detector. Também temos que levar em consideração o ângulo ψ formado entre os dois modos de polarização + e \times . A deformação $h(t)$ pode ser decomposta como

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi) h_\times(t) , \quad (5.3)$$

em que $F_{+,\times}$ são as funções feixe padrão do detector. Para um detector em forma de “L” como o LIGO em que os braços formam um ângulo de 90° entre si, as funções feixe

padrões são dadas por

$$F_+^{(90^\circ)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi , \quad (5.4)$$

$$F_x^{(90^\circ)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi . \quad (5.5)$$

Já para um detector em formato triangular como o ET (figura 5.2) em que os braços formam ângulos de 60° entre si, as funções feixe padrão são dadas por

$$F_+^{(60^\circ)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \right] , \quad (5.6)$$

$$F_x^{(60^\circ)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi \right] . \quad (5.7)$$

Comparado a um interferômetro de 90° , um interferômetro de 60° tem sensibilidade menor. No entanto, é possível instalar três detectores (um em cada vértice do triângulo) o que fornece uma vantagem em relação ao interferômetro em formato de “L”.

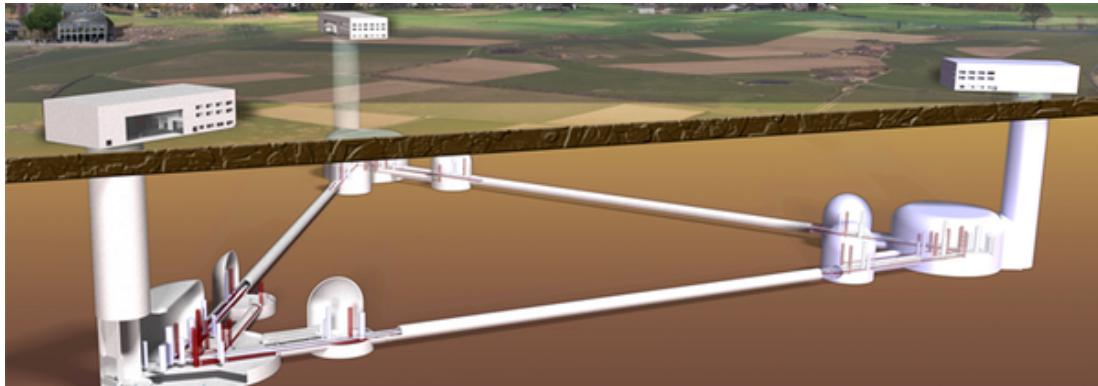


Figura 5.2: Design do Telescópio Einstein (ET). Extraído de www.aei.mpg.de/18498/03_Einstein_Telescope.

Cada detector tem sua curva de sensibilidade característica, como na figura 5.3), em que é mostrado a curva de sensibilidade para detectores em operação e projetados. O Telescópio Einstein abrange o maior intervalo de frequências entre os detectores em solo.

5.3 A razão sinal-ruído

Os detectores visam medir a deformação $h(t)$ que a passagem de uma onda gravitacional produz. No entanto, existem muitas fontes de ruído como o térmico, o sísmico e

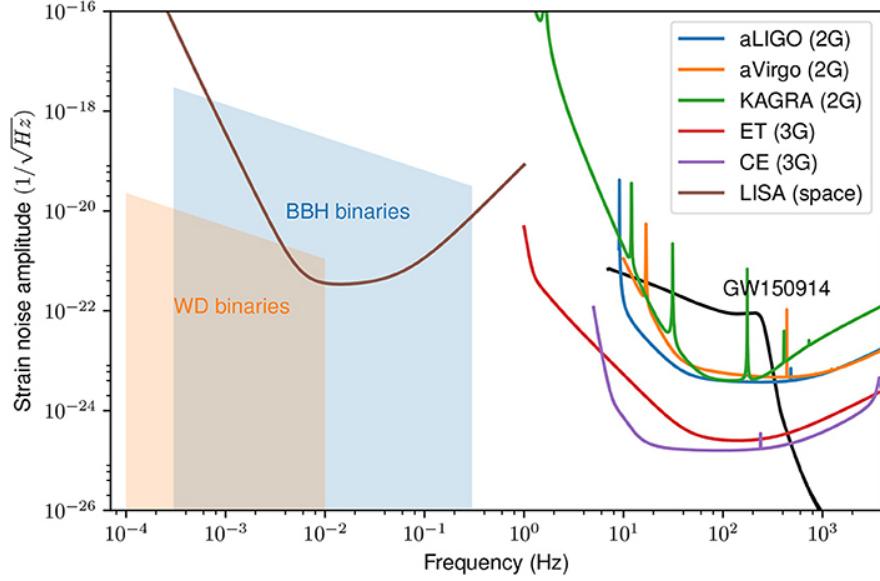


Figura 5.3: Curva de sensibilidade de diferentes detectores de GW. Vemos que dos detectores em solo, o ET é o que abrange o maior intervalo de frequências. O LISA por sua vez irá cobrir frequências que os detectores em solo não tem sensibilidade, o que o permite detectar colisões de binários de buracos negros supermassivos e anãs brancas. Extraído de [59].

o induzido pelo tráfego humano. A amplitude desses ruídos, que denotamos por $n(t)$ é muito maior que a deformação $h(t)$ produzida pela onda gravitacional, sendo que o sinal total $s(t)$ detectado é

$$s(t) = n(t) + h(t) , \quad |h(t)| \ll |n(t)| . \quad (5.8)$$

Portanto, é necessário entender como extrair a deformação do ruído de fundo

5.3.1 Caracterização do ruído

O ruído é caracterizado por um processo gaussiano estocástico, sua auto correlação pode ser considerada nula

$$\langle n(t) \rangle = 0 , \quad (5.9)$$

sendo que os brackets denotam uma média no ensemble. Se assumirmos que o sistema é ergódico, podemos considerar a média temporal igual a média do ensemble. A auto correlação é definida como

$$R(\tau) \equiv \langle n(t + \tau)n(t) \rangle , \quad (5.10)$$

que vai a zero quando $|\tau| \rightarrow \infty$. Podemos definir também o espectro de potência da densidade de ruído (PSD, do inglês *Power Spectrum Density*)

$$\frac{1}{2}S_h(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau)e^{i2\pi f\tau} . \quad (5.11)$$

Sendo $R(\tau)$ uma função real, implica que $S_h(-f) = S_h^*(f)$, enquanto a invariância por translação temporal implica que $S_h(f)$ é real. Portanto, temos que $S_h(-f) = S_h(f)$. Se invertermos a equação (5.11), obtemos

$$\begin{aligned} R(0) &= \langle n^2(t) \rangle \\ &= \int_0^{\infty} df S_h(f) , \end{aligned} \quad (5.12)$$

o que nos mostra que a integral do espectro de potência é igual a variância do ruído. Este resultado pode ser generalizado da forma

$$\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f') \rangle = \delta(f - f') \frac{1}{2}S_h(f) , \quad (5.13)$$

em que o sinal de “til” denota a transformada de Fourier.

5.3.2 Filtragem combinada

Uma vez caracterizado o ruído, temos que saber como separá-lo do sinal. Uma vez que a amplitude do ruído é muito maior que a da onda gravitacional, a única forma de extrair o sinal é conhecendo a forma de $h(t)$ e filtrar do sinal total. Para ilustrarmos como funciona esse processo de “filtragem”, tomemos a média do produto entre $s(t)$ e $h(t)$ ao longo de um período T

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt s(t)h(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt h^2(t) + \frac{1}{T} \int_0^T dt n(t)h(t) . \quad (5.14)$$

A primeira integral do lado direito é positiva definida e sua média ao longo do tempo T é dada por

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt h^2(t) \sim h_0^2 , \quad (5.15)$$

em que h_0 é a amplitude característica da função oscilante $h(t)$. Por outro lado, como $h(t)$ e $n(t)$ são não-correlacionados, a integral de $n(t)h(t)$ cresce com $T^{1/2}$ (típico de caminho aleatório), logo

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt n(t)h(t) \sim \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^{1/2} n_0 h_0 , \quad (5.16)$$

em que n_0 é a amplitude característica da função oscilante $n(t)$ e τ_0 é o período de oscilação de $h(t)$. Desta forma, quando $T \rightarrow \infty$ o segundo termo do lado direito de (5.14) vai a zero e assim “filtramos” o sinal $h(t)$ da onda gravitacional. Na prática T nunca vai a infinito, mas se $h_0 > (\tau_0/T)^{1/2}n_0$ podemos extrair o sinal da onda gravitacional do ruído de fundo.

Esse processo de filtragem pode ser otimizado pela técnica chamada *filtragem combinada*. Definimos

$$\hat{s} = \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) K(t) , \quad (5.17)$$

em que $K(t)$ é a *função filtro*. Se conhecermos a forma de $h(t)$, devemos procurar a função filtro de forma a maximizar a razão sinal-ruído (SNR) para este sinal. A função filtro é escolhida de forma a combinar com a do sinal que procuramos, daí o nome da técnica ser filtragem combinada. A razão sinal-ruído $\rho = S/N$ em que S é o valor esperado de \hat{s} quando o sinal está presente e N é o valor esperado de \hat{s} quando o sinal está ausente. Da relação (5.9), temos

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle s(t) \rangle K(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) K(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f) , \end{aligned} \quad (5.18)$$

em que $\tilde{h}(f)$ é a função $h(t)$ no espaço de Fourier. Já para o ruído temos

$$\begin{aligned} N^2 &= [\langle \hat{s}^2(t) \rangle - \langle \hat{s}(t) \rangle^2]_{h=0} \\ &= \langle \hat{s}^2(t) \rangle_{h=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' K(t) K(t') \langle n(t) n(t') \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' K(t) K(t') \int_{-\infty}^{\infty} df df' e^{2\pi i (ft - f't')} \langle \tilde{n}^*(f) \tilde{n}(f') \rangle . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Usando Eq. (5.13) obtemos

$$N^2 = \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_h(f) |\tilde{K}(f)|^2 , \quad (5.20)$$

e portanto

$$\rho = \frac{S}{N} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f) \tilde{K}^*(f)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} df (1/2) S_h(f) |\tilde{K}(f)|^2 \right]^{1/2}} . \quad (5.21)$$

Devemos encontrar o filtro $K(t)$ que maximiza a razão sinal-ruído ρ . Mas antes, introduziremos a definição do produto interno entre duas funções $a(t)$ e $b(t)$

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle &= \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{2} \frac{df}{(1/2)S_h(f)} \\ &= 4\Re \int_0^{\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{2} \frac{df}{S_h(f)} ,\end{aligned}\quad (5.22)$$

em que \Re denota a parte real. Tendo em mente essa definição, podemos escrever a equação (5.21) como

$$\rho = \frac{S}{N} = \frac{\langle \tilde{u}, \tilde{h} \rangle}{\langle \tilde{u}, \tilde{h} \rangle^{1/2}} ,\quad (5.23)$$

em que

$$\tilde{u}(f) = \frac{1}{2}S_h(f)\tilde{K}(f) .\quad (5.24)$$

Sendo o vetor unitário $\hat{n} = \tilde{u}/\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle^{1/2}$, devemos escolher \tilde{u} de tal maneira que o produto interno entre \hat{n} e \tilde{h} seja máximo. Ou seja, \hat{n} e \tilde{h} tem que ser paralelos o que significa que \tilde{u} tem que ser proporcional a \tilde{h} . Portanto, temos que

$$\tilde{K}(f) \propto \frac{\tilde{h}(f)}{S_h(f)} .\quad (5.25)$$

Essa equação determina o filtro combinado (também chamado de filtro de Wiener). Aplicando esse filtro, temos a razão sinal-ruído escrita como

$$\rho = \langle \tilde{h}, \tilde{h} \rangle^{1/2} ,\quad (5.26)$$

ou mais explicitamente

$$\rho^2 = 4 \int_0^{\infty} df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_h(f)} ,\quad (5.27)$$

que dá o valor que otimiza da razão sinal-ruído.

5.4 Análise estatística

5.4.1 Abordagem Bayesiana vs Abordagem Frequentista

Em física e astronomia é comum se deparar com situações em que é necessário tomar conclusões a partir de informação incompleta. Experimentos físicos são constantemente afetados por restrições instrumentais e tempos de mensuração finitos. Portanto,

os problemas típicos encontrados na física e astronomia (como o da detecção de ondas gravitacionais discutidos anteriormente) envolvem dados incompletos e com muito ruído. Métodos *Bayesianos* foram desenvolvidos como ferramenta de investigação em situações de informação incompleta. Esse campo foi inaugurado a partir da publicação póstuma por Richard Price em 1763 da obra “*An essay towards to solving a problem in the doctrine of chances*” de autoria do Reverendo Thomas Bayes (1701(?)–1761) e que foi aplicada a problemas físicos pela primeira vez por Pierre Simon Laplace no início do século XIX.

A principal diferença da abordagem Bayesiana para a abordagem clássica (ou *frequentista*) é a interpretação acerca do conceito de probabilidade. Para a escola frequentista, a probabilidade de um evento é definida como

“o total número de vezes que um evento ocorre sobre o número total de tentativas, no limite de uma série infinita de repetições equiprováveis”.

No entanto, essa definição de probabilidade é insatisfatória em muitos aspectos, como:

1. A definição de probabilidade em termo de frequência relativa de eventos é *circular*, pois assume que todas as tentativas são equiprováveis, sendo que é justamente o conceito de probabilidade que estamos tentando definir.
2. A definição só funciona para uma sequência infinita de tentativas, o que é impossível na prática. Sempre temos um número finito de medidas, e na maioria das vezes, esse número é pequeno.

A abordagem Bayesiana pode evitar essas dificuldades considerando que

“probabilidade é uma medida de quanto acreditamos em uma proposição”.

Essa definição de probabilidade pode ser aplicada para qualquer evento, tanto para experimentos que podem ser repetidos (por exemplo, qual a probabilidade de se obter 10 caras em um dado número de lançamentos de uma moeda?) ou situações únicas (por exemplo, qual a probabilidade de chover amanhã?). Existem diferenças mais significantes entre as duas abordagens. Para frequentistas os dados observacionais são considerados variáveis aleatórias enquanto os parâmetros do modelo estudado são considerados fixos. Já para

Bayesianos os dados observacionais são considerados o estado atual do conhecimento enquanto os parâmetros do modelo são quantidades incertas sujeitos a uma distribuição de probabilidades.

Essa diferença tem consequências filosóficas e práticas na análise de dados. E explica por que a abordagem Bayesiana é mais apropriada para Cosmologia, já que o universo é um experimento único.

5.4.2 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes é uma consequência dos axiomas da teoria da probabilidade. A *regra do produto* nos diz que a probabilidade de duas proposições A e B dado alguma informação I pode ser escrita como

$$p(A, B|I) = p(A|B, I)p(B|I) \quad , \quad (5.28)$$

que pode ser lido como “a probabilidade conjunta dos eventos A e B é igual a probabilidade do evento A dado que o evento B ocorreu multiplicado pela probabilidade de B ocorrer (ambos condicionados a uma informação I)”. Se estivermos interessado na probabilidade de B somente, podemos calcular a *probabilidade marginal* de B

$$p(B|I) = \sum_A p(A, B|I) \quad , \quad (5.29)$$

onde a soma corre sobre todos os resultados possíveis para a proposição A . Como a regra do produto é simétrica, i.e., $p(A, B|I) = p(B, A|I)$, chegamos ao *Teorema de Bayes*

$$p(B|A, I) = \frac{p(A|B, I)p(B|I)}{p(A|I)} \quad . \quad (5.30)$$

É importante frisar que o Teorema de Bayes pode ser obtido a partir de princípios mais fundamentais, conhecidos como *axiomas lógicos de Cox* [158].

A interpretação deste resultado simples pode ser melhor entendida se trocarmos A pelos dados observacionais D e B por uma hipótese H que queremos investigar, obtendo

$$p(H|D, I) = \frac{p(D|H, I)p(H|I)}{p(D|I)} \quad . \quad (5.31)$$

No lado esquerdo, $p(H|D, I)$ é chamada *probabilidade posterior* de uma hipótese estar correta dado os dados disponíveis. É proporcional a *distribuição de amostras* dos dados

$p(D|H, I)$ (também chamada de *função de verossimilhança*) assumindo que a hipótese é correta, multiplicada pela *probabilidade a priori* $P(H|I)$ (ou simplesmente *prior*) que representa o nosso estado de conhecimento antes de tomarmos ciência dos dados obtidos. A constante de normalização do lado direito é chamada de *verossimilhança marginal*, ou mais comumente, de *evidência Bayesiana* dada por

$$p(D|I) = \sum_H p(D|H, I)p(H|I) \quad , \quad (5.32)$$

sendo uma grandeza importante para a comparação de modelos. O Teorema de Bayes representa uma sequencia lógica em que passamos de um estado prévio de conhecimento (a priori) para um estado novo de conhecimento (a posteriori) considerando as novas informações fornecidas pelos dados. Esse processo de atualização de crenças é chamado *inferência Bayesiana*.

A principal crítica feita a abordagem Bayesiana é o subjetivismo. A escolha dos *priors* é um aspecto fundamental na estatística Bayesiana e esta escolha é subjetiva. No entanto, como argumentado por Trotta [98], essa questão deve ser entendida como uma característica da estatística Bayesiana e não como uma limitação. Como a verossimilhança carrega muito mais informação que o prior, dois priors diferentes serão progressivamente sobrepostos pelos dados e as duas verossimilhanças tenderão a convergir para um mesmo valor [98].

5.4.3 Inferência Bayesiana de parâmetros

A inferência de parâmetros consiste basicamente em escolhermos um modelo M contendo um conjunto de hipóteses na forma de um vetor de parâmetros $\vec{\Theta}$. Os parâmetros devem descrever algum aspecto do modelo, e representa alguma quantidade física. No contexto da cosmologia, temos por exemplo a densidade de matéria hoje $\Omega_{m,0}$, a equação de estado da energia escura ω , etc. Além de especificarmos o modelo, devemos especificar os priors para cada parâmetro. Priors devem summarizar nosso estado de conhecimento acerca dos parâmetros antes de considerar novos dados. Por exemplo: sabemos que a densidade de matéria hoje deve ser um valor entre 0 e 1.

Passamos de um conjunto discreto de hipóteses H para um espaço contínuo de parâmetros

$\vec{\Theta}$, logo, os somatórios devem ser substituídos por integrais. A função de verossimilhança passará a ser denotada por $\mathcal{L}(\vec{\Theta}) = p(D|\vec{\Theta}, M)$, e o Teorema de Bayes será reescrito como

$$p(\vec{\Theta}|D, M) = \mathcal{L}(\vec{\Theta}) \frac{p(\vec{\Theta}|M)}{p(D|M)} . \quad (5.33)$$

Sendo $p(\vec{\Theta}|D, M)$ a distribuição de probabilidade para $\vec{\Theta}$, ela deve ser normalizada à unidade da forma

$$\int p(\vec{\Theta}|D, M)d\vec{\Theta} = 1 = \frac{\int \mathcal{L}(\vec{\Theta})p(\vec{\Theta}|M)d\vec{\Theta}}{p(D|M)} , \quad (5.34)$$

e portanto, a evidência é dada por

$$p(D|M) = \int \mathcal{L}(\vec{\Theta})p(\vec{\Theta}|M)d\vec{\Theta} . \quad (5.35)$$

Uma vez que temos $p(\vec{\Theta}|D, M)$, precisamos obter o conjunto $\vec{\Theta}_{ML}$ que maximiza a posterior. Esse é o chamado *método de máxima verossimilhança*. Esse conjunto $\vec{\Theta}_{ML}$ é chamado *parâmetros globais de melhor ajuste*. Se quisermos obter o *melhor ajuste individual* para um dado parâmetro Θ_j , temos que marginalizar a posterior sobre os demais parâmetros

$$p(\Theta_j) = \int \cdots \int p(\vec{\Theta}|D, M)d\Theta_1 \cdots d\Theta_{j-1}d\Theta_{j+1} \cdots d\Theta_N . \quad (5.36)$$

Para obtermos as regiões de confiança $R(\alpha)$ devemos integrar a posterior²

$$\int_{R(\alpha)} p(\vec{\Theta}|D, M)d\vec{\Theta} = \alpha , \quad (5.37)$$

na região $R(\alpha)$ para a qual a integral é evoluída de $0 < \alpha < 1$. As escolhas típicas são $\alpha = 0.683, 0.954, 0.997$ (também denotadas 1, 2, and 3 σ respectivamente). Os dados D são a medida de alguma quantidade física ξ (o módulo da distância $\mu(z)$, por exemplo) com seus respectivo desvio padrão σ_ξ . No caso da distribuição de amostras (i.e., a verossimilhança) ser Gaussiana, temos

$$\mathcal{L}(\xi|\vec{\Theta}) = \prod_{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi_{obs} - \xi_{th}(\vec{\Theta})}{\sigma_\xi} \right)^2 \right] , \quad (5.38)$$

²Na verdade, a posterior dividida pela normalização N.

em que $\xi_{th}(\theta)$ é o valor teórico previsto para a quantidade ξ e ξ_{obs} é o valor mensurado da mesma. Podemos usar o logaritmo da função de verossimilhança, já que o logaritmo é monotonicamente crescente. Dessa forma, (5.38) se torna

$$\ln \mathcal{L}(\xi|\vec{\Theta}) = - \sum_{\xi} \frac{(\xi_{obs} - \xi_{th}(\vec{\Theta}))^2}{2\sigma_{\xi}^2} - \sum_{\xi} \ln(\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}}) . \quad (5.39)$$

Considerando que σ_{ξ} não depende dos parâmetros $\vec{\Theta}$, a verossimilhança (5.38) é maximizada ao encontrarmos o conjunto Θ_{ML} que minimiza a função

$$-2 \ln \mathcal{L}(\xi|\vec{\Theta}) \equiv \chi^2 \equiv - \sum_{\xi} \frac{(\xi_{obs} - \xi_{th}(\vec{\Theta}))^2}{2\sigma_{\xi}^2} . \quad (5.40)$$

Nesse caso, o método da máxima verossimilhança é equivalente ao método dos mínimos quadrados.

5.4.4 Monte Carlo Markov Chain (MCMC)

Calcular o conjunto Θ_{ML} que maximiza a probabilidade posterior em geral não é uma tarefa simples, dado o crescente número de parâmetros e de dados. Um dos métodos mais utilizados é o de *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC), uma subclasse de métodos de *Monte Carlo* (classe de métodos computacionais que utilizam algoritmos aleatórios). Já a Cadeia de Markov é um objeto matemático que consiste em uma sequência de estados e um conjunto de probabilidades descrevendo a transição entre esses estados. O processo é considerado *Markoviano* se a probabilidade de se mover para um novo estado depende somente do estado atual. O MCMC visa obter uma amostragem da distribuição desejada $P(x)$ usando um objeto que transita de uma localização no espaço de parâmetros para outra, sendo caracterizado por uma distribuição inicial $p^{(0)}(x)$ e uma probabilidade de transição $T(x', x)$. A distribuição de probabilidade do estado na $t + 1$ -ésima interação da cadeia de Markov é dado por

$$p^{(t+1)}(x') = \int dx' T(x', x)p^{(t)}(x) . \quad (5.41)$$

A cadeia deve satisfazer a *condição de balanceamento detalhado*

$$T(x_a, x_b)P(x_b) = T(x_b, x_a)P(x_a) , \quad (5.42)$$

que nos diz que a probabilidade de transição do estado a para o estado b é igual à probabilidade de transição do estado b para o estado a . Ou seja, o processo é reversível. Outra condição a ser satisfeita é a de *ergodicidade*

$$p^{(t)}(x) \rightarrow \Lambda(x) \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ para qualquer } p^{(0)}(x) . \quad (5.43)$$

Ou seja, a cadeia deve convergir para uma distribuição final $\Lambda(x)$ independente da distribuição inicial sorteada.

O algoritmo mais utilizado de MCMC é o *algoritmo de Metropolis-Hastings*, que funciona desta forma: uma nova amostra $x^{(t+1)}$ é gerada a partir de uma distribuição proposta $Q(x; x^{(t)})$. A transição de $x^{(t)}$ para $x^{(t+1)}$ depende da *aceptância* a definida como

$$a \equiv \frac{P(x')}{P(x^{(t)})} \frac{Q(x^{(t)}; x')}{Q(x'; x^{(t)})} . \quad (5.44)$$

Se a distribuição proposta for simétrica (como é o caso da Gaussiana), a aceptância se reduz a

$$a = \frac{P(x')}{P(x^{(t)})} . \quad (5.45)$$

A nova amostra $x^{(t+1)}$ é escolhida pelo critério de Metropolis:

$$p_a(x^{(t+1)} | x^{(t)}) = \min(1, a) , \quad (5.46)$$

em que a nova distribuição $x^{(t+1)}$ é aceita de acordo com

- Se $a \geq 1$:

$$x^{(t+1)} = x' \quad (5.47)$$

- Se $a < 1$:

$$x^{(t+1)} = \begin{cases} x' & \text{para probabilidade } a , \\ x^{(t)} & \text{para probabilidade } 1 - a . \end{cases} \quad (5.48)$$

Ao final do processo, são gerados uma lista de valores referidos como cadeia de amostras. Os valores mais frequentes são os mais prováveis de acordo com a posterior. Esse método tem como vantagem calcular a posterior como uma soma sobre valores de amostragem, ao invés de integrar em todo espaço de parâmetros. A desvantagem é que o algoritmo produz muitas amostras correlacionadas. Já foram desenvolvidos alguns códigos para o

algoritmo de Metropolis-Hastings com enfoque em aplicações na cosmologia. Podemos citar o COSMOMC [121] (em linguagem FORTRAN) e o Monte Python³. Neste trabalho, usaremos o código `emcee` [159], um código puramente escrito em linguagem Python.

5.4.5 Matriz de Fisher

Um método alternativo para o cálculo da máxima verossimilhança é o da *matriz de informação de Fisher*. Esse método é bem menos custoso computacionalmente do que o MCMC e consiste em aproximar a função de verossimilhança $\mathcal{L}(\Theta)$ em uma Gaussiana multivariada

$$\mathcal{L} \approx N \exp \left[-\frac{1}{2} (\Theta_i - \hat{\Theta}_i) \mathcal{F}_{ij} (\Theta_j - \hat{\Theta}_j) \right] , \quad (5.49)$$

em que $\hat{\Theta}_i$ são os estimadores de máxima verossimilhança e \mathcal{F}_{ij} é a matriz de informação de Fisher que é o inverso da matriz de correlação. Lembrando que a função de verossimilhança $\mathcal{L}(\Theta) = p(D|\Theta, I)$ depende do conjunto de dados D e contém toda a informação sobre o conjunto de parâmetros presente nos dados. Se quisermos focar na capacidade de um dado experimento de medir Θ podemos nos focar somente na função de verossimilhança.

Expandimos o logaritmo da função de verossimilhança próximo dos valores $\hat{\Theta}_i$ que a maximizam (ML)

$$\ln \mathcal{L}(\Theta_i) \approx \ln \mathcal{L}(\hat{\Theta}_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta_i)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \Big|_{ML} (\Theta_i - \hat{\Theta}_i)(\Theta_j - \hat{\Theta}_j) , \quad (5.50)$$

sendo que o termo de primeira ordem é nulo quando a verossimilhança é máxima. Sendo $D = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ um conjunto de M medidas, ao tomarmos o valor esperado de $\ln \mathcal{L}(\Theta)$ ao longo do conjunto D quando $M \rightarrow \infty$, identificamos a matriz de Fisher como o valor esperado do segundo termo da expansão (5.50), i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &\equiv - \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right\rangle \Big|_{ML} \\ &= - \int \mathcal{L}(x|\Theta_{ML}) \frac{\partial^2 \mathcal{L}(x|\Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \Big|_{ML} dx . \end{aligned} \quad (5.51)$$

³Disponível em <https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/monte-python/latest/monte-python.pdf>

A matriz de Fisher é um indicador do poder de resolução de um experimento e é uma técnica muito utilizada para “*forecasts*”, quando queremos saber quão bem um experimento pode vincular um conjunto de parâmetros. Os erros esperados seguem o *limite de Cramer-Rao*

$$\sigma^2(\Theta_i) \geq (\mathcal{F})_{ii}^{-1} , \quad (5.52)$$

o que nos diz que a diagonal do inverso da matriz de Fisher nos dá o limite inferior para a variância esperada de um experimento.

5.4.6 Erros esperados nas detecções de ondas gravitacionais

Usaremos o método da matriz de Fisher para estimar os erros esperados nos experimentos de detecção de ondas gravitacionais. O sinal detectado é dado pela equação (5.8)

$$s(t) = h(t, \Theta) + n(t) , \quad (5.53)$$

em que estamos considerando também a dependência em algum conjunto de parâmetros Θ . A distribuição de probabilidade na saída do detector é dada por

$$\begin{aligned} p(s|\Theta) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 n(t_1) \Omega(t_1, t_2) n(t_2) \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 [s(t_1) - h(t_1, \Theta)] \Omega(t_1, t_2) [s(t_2) - h(t_2, \Theta)] \right\} , \end{aligned} \quad (5.54)$$

sendo $\Omega(t_1, t_2) = R^{-1}(t_1, t_2)$ o inverso do tempo de correlação definido na equação (5.10). Consequentemente, a matriz de Fisher é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij} &= - \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right\rangle_{ML} \\ &= - \int \mathcal{D}_s dt_1 dt_2 \mathcal{L}(s|\hat{\Theta}) \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial \Theta_j \partial \Theta_i}(t_1, \hat{\Theta}) \Omega(t_1, t_2) [s(t_2) - h(t_2, \hat{\Theta})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial h}{\partial \Theta_i}(t_1, \hat{\Theta}) \Omega(t_1, t_2) \frac{\partial h}{\partial \Theta_j}(t_2, \hat{\Theta}) \right\} , \end{aligned} \quad (5.55)$$

em que $\int \cdots \mathcal{D}_s$ é a integração funcional sobre todos os possíveis conjuntos de dados. Desconsideramos o primeiro termo da integral acima pelo fato de a razão sinal-ruído ser alta e poder ser desprezada em relação ao segundo termo. Dessa forma a matriz de Fisher

se reduz a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ij} &\approx \int dt_1 dt_2 \left\{ \frac{\partial h}{\partial \Theta_i}(t_1, \hat{\Theta}) \Omega(t_1, t_2) \frac{\partial h}{\partial \Theta_j}(t_2, \hat{\Theta}) \right\} \int \mathcal{D}_s \mathcal{L}(s|\hat{\Theta}) \\ &\approx \int dt_1 dt_2 \left\{ \frac{\partial h}{\partial \Theta_i}(t_1, \hat{\Theta}) \Omega(t_1, t_2) \frac{\partial h}{\partial \Theta_j}(t_2, \hat{\Theta}) \right\} \\ &\approx \int df_1 df_2 \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_i}(f_1, \hat{\Theta}) \tilde{\Omega}(-f_1, -f_2) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_j}(f_2, \hat{\Theta}) \right\} .\end{aligned}\quad (5.56)$$

Da equação (5.11), temos que

$$\tilde{\Omega}(t_1, t_2) = \frac{\delta(f_1 + f_2)}{\frac{1}{2}S_h(f_1)} .\quad (5.57)$$

Inserindo (5.57) em (5.56), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ij} &\approx \int dt_1 dt_2 \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_i}(f_1, \hat{\Theta}) \frac{\delta(-f_1 - f_2)}{\frac{1}{2}S_h(-f_1)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_j}(f_2, \hat{\Theta}) \right\} \\ &\approx \int df_2 \left\{ \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_i}(-f_2, \hat{\Theta}) \frac{1}{\frac{1}{2}S_h(f_2)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_j}(f_2, \hat{\Theta}) \right\} \\ &\approx \int df_2 \left\{ \frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial \Theta_i}(f_2, \hat{\Theta}) \frac{1}{\frac{1}{2}S_h(f_2)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_j}(f_2, \hat{\Theta}) \right\} .\end{aligned}\quad (5.58)$$

Usando o fato de que $h(t)$ é real e a definição do produto interno (5.22), obtemos que a matriz de Fisher é dada por

$$\mathcal{F}_{ij} = \left\langle \frac{\partial h}{\partial \Theta_i}, \frac{\partial h}{\partial \Theta_j} \right\rangle ,\quad (5.59)$$

enquanto o erro instrumental é dado por

$$\sigma_{\text{inst}} = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_i}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \Theta_i} \right\rangle^{-1}} .\quad (5.60)$$

Portanto, o poder de resolução de um detector de ondas gravitacionais pode ser estimado a partir do conhecimento da função de onda e do espectro de potencia.

5.5 Simulação de detecções de ondas gravitacionais

Como a detecção de sirenes padrão é muito recente, ainda carecemos de um catálogo de detecções com objetivo de construir um diagrama de Hubble $d_L - z$ (ou $\mu - z$) buscando

obter vínculos bem restritivos nos parâmetros cosmológicos. Como alternativa, podemos *simular* um catálogo de sirenes padrão com fim de determinar quão restritivos podem ser os futuros detectores. Para isto seguiremos a metodologia de [78, 79] para simulação de futuras detecções pelo Telescópio Einstein (ET), cujo os passos são: 1) A geração das fontes de OG seguindo uma distribuição com o redshift; 2) A adoção de um modelo cosmológico fiducial; 3) A simulação dos erros esperados pelo detector; 4) A geração de um catálogo simulado de sirenes padrão; 5) os vínculos impostos por esse catálogo no modelo fiducial adotado via MCMC.

5.5.1 Distribuição das fontes

Estamos interessados na detecção de ondas gravitacionais geradas pela colisão de pares binários e suas respectivas contrapartes eletromagnéticas na forma de explosões de raios gama curtos (SGRBs, do inglês *Short Gamma-Ray Bursts*). Existem dois tipos de progenitores possíveis para esse tipo de evento: Binários de estrelas de nêutrons (BNS) e pares estrelas de nêutrons-buracos negros (NSBH). A massa das estrelas de nêutrons se distribuem uniformemente no intervalo $[1 - 2]M_{\odot}$ enquanto que a de buracos negros foi escolhido o intervalo uniforme de $[3 - 10]M_{\odot}$, em que M_{\odot} é a massa do Sol. Todos esses valores seguem as prescrições de [78, 79].

A distribuição de probabilidade de se detectar uma fonte em um dado redshift segue

$$\begin{aligned} P(z) &\propto \frac{dV_c}{dz} \frac{R(z)}{1+z} \\ &\propto \frac{4\pi d_c^2(z) R(z)}{(1+z)H(z)} , \end{aligned} \quad (5.61)$$

em que dV_c é o volume comóvel dado em (1.52), d_c é a distância comóvel dada em (1.38) (enfatizando que estamos assumindo uma geometria plana em que $S(\chi) = \chi = d_c$), e $R(z)$ é *razão local de eventos*. O fator $1+z$ é introduzido para converter a razão local em uma razão observada aqui na Terra. A função $R(z)$ é dada por

$$R(z) = \begin{cases} 1+2z & \text{para } z \leq 1 \\ \frac{3}{4}(5-z) & \text{para } 1 < z < 5 \\ 0 & \text{para } z \geq 5 \end{cases} , \quad (5.62)$$

que foi um *fit* criado por [160] baseado em modelos de história da formação estelar desenvolvidos por [161]. A distribuição gerada pode ser visualizada na figura 5.4, em que a probabilidade de detecção de uma fonte é crescente com redshift, atinge valor máximo próximo de $z = 1$ e decai até $z = 5$.

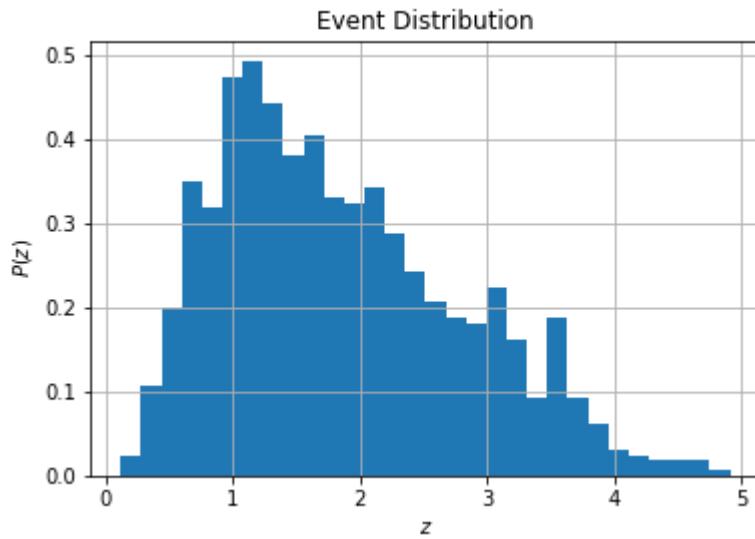


Figura 5.4: Distribuição simulada de eventos com o redshift usando (5.61) e (5.62).

5.5.2 Modelo cosmológico fiducial

A geração das fontes seguindo (5.61) necessita da função de Hubble $H(z)$, o que por sua vez pressupõe a adoção um modelo cosmológico. Nas referências [78, 79] foi assumido o modelo Λ CDM como modelo fiducial. No presente trabalho, assumiremos como modelo fiducial os modelos de interação no setor escuro apresentados na seção (1.13). Esses modelos possuem a nível de *background* quatro parâmetros: A densidade de matéria hoje Ω_m , a constante de Hubble H_0 (ou h), a equação de estado (EoS) da energia escura ω e a constante de acoplamento ξ . Como estamos analisando somente o *background*, não faremos distinção entre matéria escura e barions. O modelo I apresentado na subseção (1.13.1) tem sua função $H(z)$ dado pela equação (1.125) e a EoS restrita à região $\omega < -1$. Já o modelo II (subsec. 1.13.2) com $H(z)$ dado por (1.130) será dividido em duas partes: modelo IIA com $\omega < -1$ e modelo IIB com $-1 < \omega < -1/3$. E por fim o modelo III (subsec. 1.13.3)

Parâmetro	Modelo I	Modelo II A	Modelo II B	Modelo III
Ω_m	0.312	0.3265	0.2351	0.3059
h	0.6793	0.6876	0.6845	0.6866
ω	-1.06	-1.087	-0.9434	-1.067
ξ	0.0007273	0.03798	-0.09291	0.0002468

Tabela 5.1: Valores fiduciais

com $H(z)$ obtido ao substituir (1.131) e (1.132) em (1.118) e $\omega < -1$. Essas restrições na equação de estado se devem à estabilidade das perturbações de curvatura [162, 163]. Consideraremos como valores fiduciais os valores de melhor ajuste obtidos por [22] com dados do Planck2015 + BAO + SnIa + H_0 (Ver tabela 5.1).

Assumindo os valores fiduciais apresentados na tabela, podemos gerar uma distância luminosa fiducial d_L^{fid} e o respectivo módulo da distância fiducial μ^{fid} para cada modelo.

5.5.3 Erros esperados

Uma vez gerado a distribuição das fontes com o redshift e a respectiva distância luminosa de cada fonte seguindo o modelo fiducial adotado, precisamos simular os erros esperados pelo detector, no caso o ET. Os detectores medem a distorção espacial (“strain”) $h(t)$ provocada pela passagem da onda gravitacional e dada por (5.3), que por sua vez depende das funções feixe padrão F_+ e F_\times que para o caso de um interferômetro triangular são dadas respectivamente por (5.6) e (5.7).

Essas funções feixe dependem dos ângulos polar θ e azimutal ϕ que localizam a fonte em relação ao detector e do ângulo de polarização ψ da GW. Geramos aleatoriamente para o primeiro detector o ângulo θ no intervalo $[0 - \pi]$ e o ângulo ϕ no intervalo $[0 - 2\pi]$ para cada detecção. Para os outros dois detectores, as funções feixe estão relacionadas com a do primeiro detector por $F_{+,\times}^{(2)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+,\times}^{(1)}(\theta, \phi + 2\pi/3, \psi)$ e $F_{+,\times}^{(3)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+,\times}^{(1)}(\theta, \phi + 4\pi/3, \psi)$.

A forma da GW emitida por pares binários é dada por (3.79) e (3.80) para os modos “+” e “ \times ” respectivamente. Passando para o espaço de Fourier, a forma da onda fica dada

por

$$\tilde{h}(f) = \mathcal{A} f^{-7/6} e^{i\Psi(f)} , \quad (5.63)$$

em que $\Psi(f)$ é uma fase e a amplitude quadrática média da onda é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{d_L} \sqrt{F_+^2(1 + \cos \iota)^2 + 4F_x^2 \cos \iota} \times \sqrt{\frac{5\pi}{96}} \pi^{-7/6} \mathcal{M}_c^{5/6} , \quad (5.64)$$

sendo \mathcal{M}_c a “chirp mass” observada definida pelas expressões (3.78) e (3.95) e ι o ângulo de inclinação entre o momento angular orbital e a linha de visada. Acredita-se que o feixe de SGRBs seja fortemente direcionado e que $\iota < 20^\circ$. Para todos os efeitos, consideraremos $\iota = 0$, o que por sua vez implica que o ângulo de polarização ψ some na expressão (5.64).

Uma vez obtida a forma da onda gerada por cada uma das fontes, o próximo passo é calcular a respectiva razão sinal-ruído dada pela expressão (5.27). Como temos uma rede de três detectores, a razão sinal-ruído da rede é dada por

$$\rho_{\text{net}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\rho^{(i)})^2} . \quad (5.65)$$

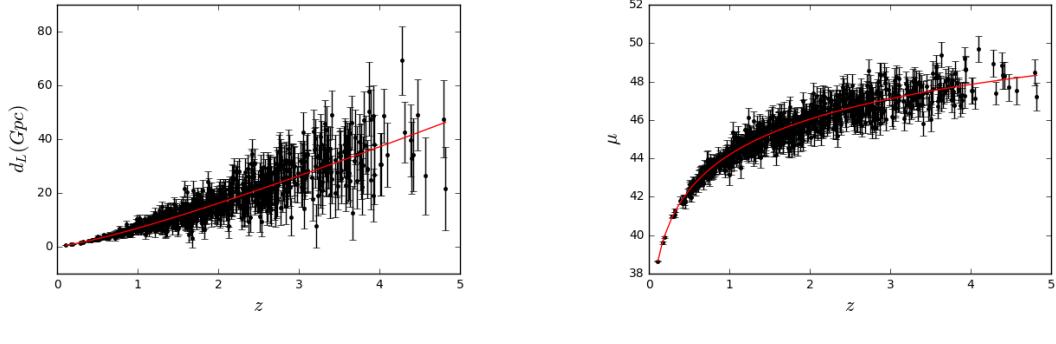
A integração na expressão (5.27) vai de um limite de frequências inferior até um limite de frequências superior. Para o ET, o limite inferior é $f_{\text{lower}} = 1$ Hz e o limite superior é $f_{\text{upper}} = 2/(6^{3/2} 2\pi M_{\text{obs}})$, sendo $M_{\text{obs}} = (1+z)M_{\text{phys}}$ a massa total do par binário observada, enquanto a PSD é dada por [78]

$$S_h(f) = S_0 \left[x^{p_1} + a_1 x^{p_2} + a_2 \frac{1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4} \right] , \quad (5.66)$$

com $x \equiv f/f_0$, $f_0 = 200$ Hz e $S_0 = 1.449 \times 10^{-52}$ Hz. Os outros parâmetros são $p_1 = -4.05$, $p_2 = -0.69$, $a_1 = 185.62$, $a_2 = 232.56$, $b_1 = 31.18$, $b_2 = -64.72$, $b_3 = 52.24$, $b_4 = -42.16$, $b_5 = 10.17$, $b_6 = 11.53$, $c_1 = 13.58$, $c_2 = 36.46$, $c_3 = 18.56$ e $c_4 = 27.43$. Detecções com $\rho_{\text{net}} > 8.0$ devem ser desconsideradas.

O erro instrumental é dado por (5.68). A amplitude (5.64) depende do conjunto de parâmetros $\{\iota, \psi, d_L\}$, no entanto, consideraremos que o erro em d_L não está correlacionado com o erro nos demais parâmetros. Sendo assim, o erro instrumental em d_L é dado por

$$\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq \sqrt{\left\langle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_L}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_L} \right\rangle^{-1}} . \quad (5.67)$$



(a) Catálogo simulado $d_L(z) - z$ para 1000 sirenes padrão detectadas. A linha vermelha mostra a distância luminosa fiducial para o Modelo I.

(b) Catálogo simulado $\mu(z) - z$ para 1000 sirenes padrão detectadas. A linha vermelha mostra o módulo da distância fiducial para o Modelo I.

Figura 5.5:

Sendo $\tilde{h} \propto d_L^{-1}$, obtemos $\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq d_L/\rho$. Devemos levar em conta que existem duas orientações possíveis para o ângulo ι ($\iota = 0^\circ$ e $\iota = 90^\circ$), o que implica em multiplicar o erro em d_L por um fator de 2, i.e,

$$\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq \frac{2d_L}{\rho} . \quad (5.68)$$

Também devemos considerar um erro adicional devido a lentes gravitacionais fracas, dado por $\sigma_{d_L}^{\text{lens}} = 0.05 zd_L$. Portanto, a incerteza total na distância luminosa é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{d_L} &= \sqrt{(\sigma_{d_L}^{\text{inst}})^2 + (\sigma_{d_L}^{\text{lens}})^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2d_L}{\rho}\right)^2 + (0.05 zd_L)^2} . \end{aligned} \quad (5.69)$$

A incerteza para o módulo da distância é propagada a partir da incerteza na distância luminosa da forma

$$\sigma_\mu = \frac{5}{\ln 10} \frac{\sigma_{d_L}}{d_L} , \quad (5.70)$$

que usaremos para gerar as barras de erro simuladas para o módulo da distância.

O último passo para gerar um catálogo simulado realista é considerar as detecções “reais” como dispersões gaussianas ao redor dos valores fiduciais, i.e., $d_L^{\text{real}} = \mathcal{N}(d_L^{\text{fid}}, \sigma_{d_L})$ e $\mu^{\text{real}} = \mathcal{N}(\mu^{\text{fid}}, \sigma_\mu)$. Na figura 5.5a temos a distância luminosa (em Gpc) para 1000 sirenes padrão simuladas tomando como modelo fiducial o modelo I. Na figura 5.5b temos o respectivo módulo da distância.

5.6 Outros conjuntos de dados

Além de investigarmos *quão bem* as sirenes padrão poderão restringir os parâmetros dos modelos de interação do setor escuro, buscaremos determinar *em quanto elas podem melhorar* os vínculos obtidos por observáveis cosmológicos atuamente em uso. Utilizaremos três desses observáveis: supernovas tipo Ia, relógios cósmicos e oscilações acústicas de bárions (BAO).

5.6.1 Supernovas tipo Ia (SnIa)

Como vimos na seção (1.9) foi por meios da medida do módulo de distância $m - M$ (1.58) das supernovas tipo Ia (SnIa) que se concluiu que o universo está passando por uma fase de expansão acelerada. Devido a essa grande descoberta, Adam Riess, Brian Schmidt e Saul Perlmutter ganharam o prêmio Nobel de física em 2011.

Após esses trabalhos pioneiros, o número de SnIa observadas cresceram em uma ordem de magnitude. Diferentes catálogos de SnIa disponíveis publicamente foram utilizados para vincular modelos cosmológicos: Union2 [164], Union2.1 [101], Constitution [165], JLA (Do inglês, “*Joint Light Analisys*”) [166] e o mais recente que é o Pantheon [167] contendo 1048 supernovas. Todos esses catálogos confirmam a expansão acelerada do universo.

O módulo da distância observado para as supernovas tipo Ia é dado por

$$\mu_{SN} = m_B - M_B + \alpha\mathcal{S} - \beta\mathcal{C} , \quad (5.71)$$

sendo m_B e M_B a magnitude de pico aparente e absoluta na banda do azul, os termos \mathcal{S} e \mathcal{C} são os termos de correção de alongamento e de cor da curva de luz. O conjunto $\{M_B, \alpha, \beta\}$ são parâmetros da curva de luz da supernova e devem ser tratados como parâmetros *nuisance* a serem marginalizados. Adotaremos o catálogo mais recente que é o Pantheon (ano de 2018) para o qual os parâmetros α e β são nulos e o módulo de distância observado se reduz a $\mu_{SN} = m_B - M_B$ [80, 167].

z	$H(z)$	Ref.	z	$H(z)$	Ref.
0.07	69.0 ± 19.6	[168]	0.4783	80.9 ± 9.0	[169]
0.09	69.0 ± 12.0	[170]	0.48	97.0 ± 62.0	[171]
0.12	68.6 ± 26.2	[168]	0.5929	104.0 ± 13.0	[172]
0.17	83.0 ± 8.0	[173]	0.6797	92.0 ± 8.0	[172]
0.1791	75.0 ± 4.0	[172]	0.7812	105.0 ± 12.0	[172]
0.1993	75.0 ± 5.0	[172]	0.8754	125.0 ± 17.0	[172]
0.2	72.9 ± 29.6	[168]	0.88	90.0 ± 40.0	[171]
0.27	77.0 ± 14.0	[173]	0.9	117.0 ± 23.0	[173]
0.28	88.8 ± 36.6	[168]	1.037	154.0 ± 20.0	[172]
0.3519	83.0 ± 14.0	[172]	1.3	168.0 ± 17.0	[173]
0.3802	83.0 ± 13.5	[169]	1.363	160.0 ± 33.6	[172]
0.4	95.0 ± 17.0	[173]	1.43	117.0 ± 18.0	[173]
0.4004	77.0 ± 10.2	[169]	1.53	140.0 ± 14.0	[173]
0.4347	87.1 ± 11.2	[169]	1.75	202.0 ± 40.0	[173]
0.4497	92.8 ± 12.9	[169]	1.965	186.5 ± 50.4	[169]

Tabela 5.2: Medidas de $H(z)$ (em $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$)

5.6.2 Medidas de $H(z)$ por relógios cósmicos

Como vimos na seção (1.4) a constante de Hubble H_0 nos dá a taxa de expansão local do universo. Essa medida só é válida para $z \ll 1$. Para medir a taxa de expansão cósmica em outros valores de redshift, Jimenez e Loeb [174] propuseram o *método da idade diferencial*. O método consiste em usar a relação

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} , \quad (5.72)$$

e medir a diferença de idades Δt entre duas galáxias próximas separadas por uma diferença de redshift Δz para obter $H(z)$. Este método é totalmente independente de modelo (cosmológico) para medir a taxa de expansão do universo, no entanto, está sujeito as imprecisões na determinação de idades de galáxias. As medidas utilizadas estão na tabela 5.2.

5.6.3 Oscilações acústicas de bárions (BAO)

Antes da época da recombinação, bárions estavam fortemente acoplado com os fótons e ondas acústicas podem ter ficado gravadas nas perturbações de bárions, gerando aglomerações de matéria bariônica em certas escalas de comprimento. Esse registro é chamado de oscilações acústicas de bárions (BAO, do inglês *baryon acoustic oscillations*) também gravadas nas anisotropias da radiação cósmica de fundo. Similarmente a SnIa como “velas padrão” ou as ondas gravitacionais como “sirenes padrão”, as oscilações acústicas de bárions fornecem uma “réguia padrão” para escalas de comprimento na cosmologia.

Para determinar a localização das BAOs, precisamos saber o horizonte sonoro na época de arraste, quando a pressão dos fótons (ou “arraste compton”) não podia impedir a instabilidade gravitacional nos bárions. O horizonte sonoro em $z = z_{\text{drag}}$ é

$$r_s(z_{\text{drag}}) = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz , \quad (5.73)$$

em que c_s é a velocidade do som no plasma primordial de bárions-fótons. Para determinar o redshift z_{drag} existe uma fórmula ajustada por Eisenstein e Hu [175]:

$$z_{\text{drag}} = \frac{1291\omega_m^{0.251}}{1 + 0.659\omega_m^{0.828}} (1 + b_1\omega_b^{b_2}) , \quad (5.74)$$

em que

$$b_1 = 0.313\omega_m^{-0.419} (1 + 0.607\omega_m^{0.675}) , \quad b_2 = 0.238\omega_m^{0.223} . \quad (5.75)$$

e $\omega_b = \Omega_{b,0}h^2$ e $\omega_m = \Omega_{m,0}h^2$.

Para medidas de aglomerados de galáxias, a escala do BAO é tanto transversa quanto paralela a linha de visada do observador; e correspondem as razões

$$\theta_s(z) = \frac{r_s(z_{\text{drag}})}{(1+z)d_A(z)} , \quad (5.76)$$

$$\delta z_s(z) = \frac{r_s(z_{\text{drag}})H(z)}{c} , \quad (5.77)$$

em que d_A é a distância diâmetro angular comóvel definida em (1.47).

Infelizmente os dados de BAO data não estão aptos para medir as razões (5.76) e (5.77) separadamente, mas é possível obter uma razão combinada da escala de distância para o espectro de médias esféricas

$$[\theta_s(z)^2 \delta z_s(z)]^{1/3} \equiv \frac{r_s(z_{\text{drag}})}{[(1+z)^2 d_A^2(z)/H(z)]^{1/3}} , \quad (5.78)$$

z	$r_{\text{BAO}}(z)$	Ref
0.106	0.336 ± 0.015	[177]
0.15	0.2239 ± 0.0084	[178]
0.32	0.1181 ± 0.0023	[179]
0.57	0.0726 ± 0.0007	[179]
2.34	0.0320 ± 0.0012	[180]
2.36	0.0329 ± 0.0012	[181]

Tabela 5.3: Medidas de $r_{\text{BAO}}(z)$

e medir a distância relativa de BAO

$$r_{\text{BAO}}(z) \equiv \frac{r_s(z_{\text{drag}})}{D_V(z)} , \quad (5.79)$$

em que a razão efetiva de distância $D_V(z)$ é definida como [176]

$$D_V(z) \equiv \left[(1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3} . \quad (5.80)$$

As medidas de $r_{\text{BAO}}(z)$ utilizadas podem ser vistas na tabela 5.3

5.7 Resultados

Finalmente apresentaremos os possíveis vínculos fornecidos pelos catálogos simulados de sirenes padrão aos quatro modelos de interação (I, IIA, IIB e III). Primeiro mostraremos os vínculos obtidos somente com dados simulados de ondas gravitacionais. Simulamos um número de 200, 500, 800 e 1000 detecções e procuraremos determinar *o quanto os vínculos melhoram de acordo com o aumento do número de detecções*. As distribuições de probabilidade 1D e 2D são obtidas ao minimizarmos

$$\chi_{\text{GW}}^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\bar{\mu}_{\text{GW}}^i - \mu_{\text{GW}}(\bar{z}_i; \vec{\Theta})}{\bar{\sigma}_{\mu_{\text{GW}}}^i} \right]^2 , \quad (5.81)$$

em que \bar{z}_i , $\bar{\mu}^i$ e $\bar{\sigma}_{\mu}^i$ são respectivamente o i -ésimo redshift, módulo da distância e erro no módulo da distância para cada detecção simulada.

Número de detecções	Ω_m	H_0	ω	ξ
200	0.47 ± 0.12	$68.7_{-3.7}^{+2.7}$	$-1.72_{-0.33}^{+0.65}$	$0.150_{-0.048}^{+0.13}$
500	$0.339_{-0.088}^{+0.069}$	$72.1_{-3.4}^{+2.7}$	$-1.78_{-0.56}^{+0.42}$	$0.011_{-0.083}^{+0.13}$
800	$0.324_{-0.062}^{+0.071}$	$72.3_{-2.5}^{+2.0}$	$-1.71_{-0.32}^{+0.55}$	$-0.003_{-0.063}^{+0.12}$
1000	$0.354_{-0.080}^{+0.072}$	$72.1_{-3.2}^{+2.1}$	$-1.65_{-0.27}^{+0.60}$	$0.062_{-0.069}^{+0.11}$

Tabela 5.4: Modelo I - Limites de 68% somente com Ondas Gravitacionais

Também adicionaremos 1000 sirenes padrão simuladas ao conjunto de dados de SnIa, relógios cósmicos e BAO discutidos na seção anterior. Primeiro obteremos as distribuições 1D e 2D ao minimizarmos $\chi_{\text{Tot}}^2 = \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{H(z)}^2 + \chi_{\text{BAO}}^2$ e depois as distribuições 1D e 2D ao minimizarmos $\chi_{\text{Tot}}^2 = \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{H(z)}^2 + \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{GW}}^2$. Também consideraremos um *prior gaussiano* em torno da medida local de H_0 dado em (1.25).

5.7.1 Modelo I

Começaremos pelo modelo I, com acoplamento $Q = 3H\xi\rho_{dm}$ e $\omega < -1$. Os limites de 68% obtidos com 200, 500, 800 e 1000 detecções estão mostrados na tabela 5.4.

Os contornos de confiança 1D e 2D estão mostrados na figura 5.6, em que podemos observar as melhorias nas restrições ao aumentarmos o número de detecções. No entanto, para a constante de acoplamento ξ não tivemos uma melhora significativa nos vínculos com o aumento do número de eventos. De 200 para 1000 detecções, as barras de erro reduziram em 1%. Entretanto, de 200 para 500 detecções o valor central de ξ fica mais próximo de zero, o que se mantém de 800 para 1000 detecções. O parâmetro que apresenta a melhor melhoria é a densidade de matéria Ω_m , em que o vínculo melhora em 35% de 200 para 500 detecções, permanecendo constante de 500 para 1000 detecções. Em H_0 temos uma diminuição de 17% in nas barras de erro de 200 para 1000 detecções e uma melhoria de 12% na equação de estado da energia escura.

Na tabela 5.5 apresentamos o limite dos 68% para o conjunto de dados de SN+ $H(z)$ +BAO e SN+ $H(z)$ +BAO+GW. Os contornos de confiança 1D e 2D são mostrados na figura 5.7. Para a constante de acoplamento ξ obtemos uma melhoria de 36% devido a

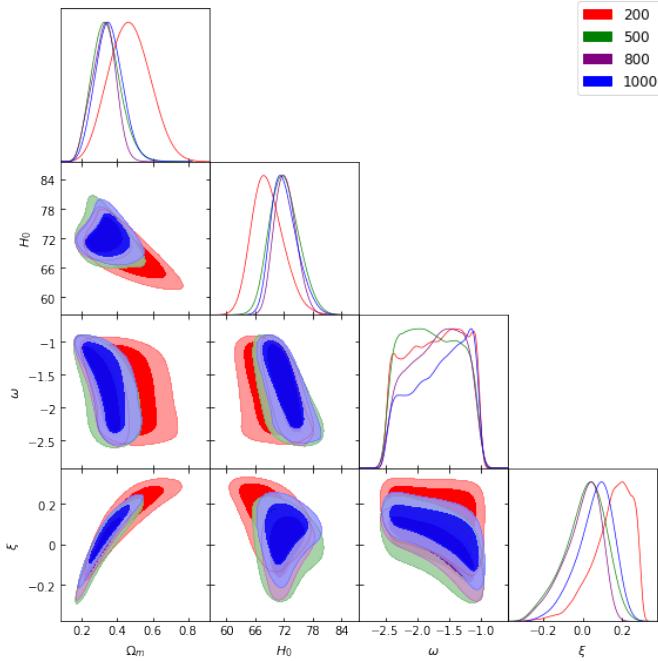


Figura 5.6: Contornos de confiança 1D e 2D para 200 (vermelha), 500 (verde), 800 (púrpura) e 1000 (azul) detecções de GWa para o IM1.

Data	Ω_m	H_0	ω	ξ
SN+H(z)+BAO	0.318 ± 0.016	69.0 ± 1.6	$-1.096^{+0.049}_{-0.037}$	0.020 ± 0.035
SN+H(z)+BAO+GW	0.309 ± 0.010	67.60 ± 0.34	$-1.070^{+0.038}_{-0.026}$	0.0007 ± 0.0221

Tabela 5.5: Modelo I - Limite dos 68% para todos os conjuntos de dados

adição das GWs. Além disso, a adição das GWs tornam o valor central de ξ virtualmente nulo. O parâmetro que apresenta a melhor melhoria devido a adição das GWs é a constante de Hubble H_0 , para a qual as barras de erro diminuem em 78%. Temos uma diminuição nas barras de erro de 37% para Ω_m e 15% para ω . Os dados predizem um valor para a equação de estado diferente de -1 . Outro efeito devido a adição das GWs é quebrar a degenerescência entre H_0 e demais parâmetros.

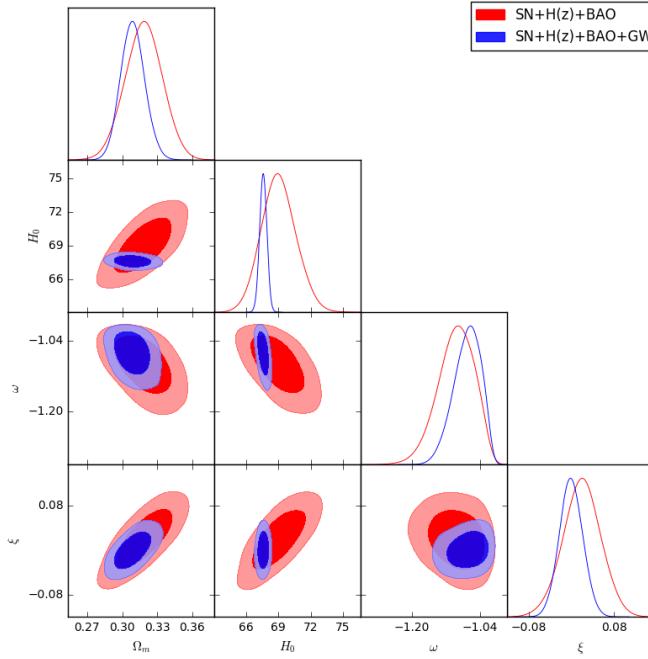


Figura 5.7: Contornos de confiança 1D e 2D para $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}$ (vermelho) e $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}+\text{GW}$ (azul) para o IM1.

5.7.2 Modelo IIA

O modelo 2A possui acoplamento $Q = 3H\xi\rho_{de}$ e $\omega < -1$. Na tabela 5.6 listamos os limites de confiança (C.L.) de 68% e na figura 5.8 as distribuições de probabilidade 1D e 2D. A melhoria na constante de acoplamento ξ é de 20% de 200 para 1000 detecções e os dados apontam para valores positivos da mesma. No mesmo intervalo de detecções, Ω_m tem uma melhoria de 12%, H_0 uma melhoria de 68% e para ω é de 49%.

Temos os 68% C.L. para $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}$ e $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}+\text{GW}$ (Tabela 5.7) e na

Número de detecções	Ω_m	H_0	ω	ξ
200	$0.320^{+0.10}_{-0.070}$	$71.6^{+1.9}_{-3.0}$	$-1.45^{+0.43}_{-0.14}$	$0.02^{+0.25}_{-0.12}$
500	$0.338^{+0.11}_{-0.050}$	$69.7^{+1.4}_{-1.6}$	$-1.24^{+0.22}_{-0.074}$	$0.063^{+0.22}_{-0.090}$
800	$0.352^{+0.093}_{-0.045}$	69.66 ± 0.79	$-1.21^{+0.18}_{-0.069}$	$0.085^{+0.19}_{-0.083}$
1000	$0.340^{+0.10}_{-0.050}$	69.85 ± 0.78	$-1.23^{+0.21}_{-0.082}$	$0.062^{+0.20}_{-0.099}$

Tabela 5.6: Modelo IIA - Limites de 68% somente com Ondas Gravitacionais

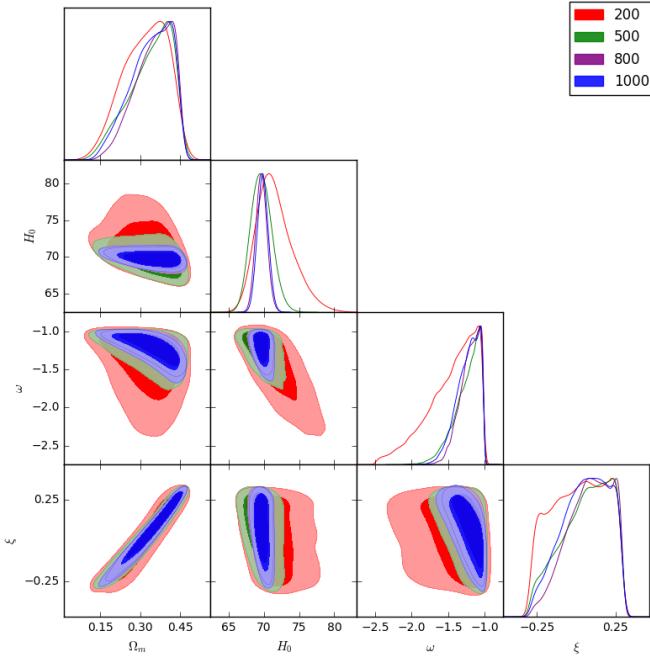


Figura 5.8: Contornos de confiança 1D e 2D para 200 (vermelha), 500 (verde), 800 (púrpura) e 1000 (azul) detecções de Gws para o IM2A.

Data	Ω_m	H_0	ω	ξ
SN+H(z)+BAO	0.2165 ± 0.0085	74.90 ± 0.95	$-1.0152^{+0.0053}_{-0.00098}$	-0.036 ± 0.024
SN+H(z)+BAO+GW	0.2079 ± 0.0071	72.59 ± 0.39	$-1.0158^{+0.0058}_{-0.00095}$	-0.043 ± 0.019

Tabela 5.7: Modelo IIA - Limite dos 68% para todos os conjuntos de dados

figura 5.9 as distribuições 1D e 2D. A adição das ondas gravitacionais fornecem uma melhoria de 20% em ξ e os dados preveem valores negativos para a mesma. Em H_0 as barras de erro diminuem em 58% e em Ω_m diminuem 16%. Para a EoS os dados apontam para $\omega = -1$ com nenhuma melhoria devido a adição das GWs. Como no modelo I, a adição das GWs ajudam a quebrar a degenerescência entre H_0 e os outros parâmetros.

5.7.3 Modelo IIB

No modelo IIB o acoplamento é proporcional a densidade de energia escura, i.e., $Q = 3H\xi\rho_{de}$ e $-1 > \omega > -1/3$. Temos listados os 68% C.L. para os parâmetros com 200,

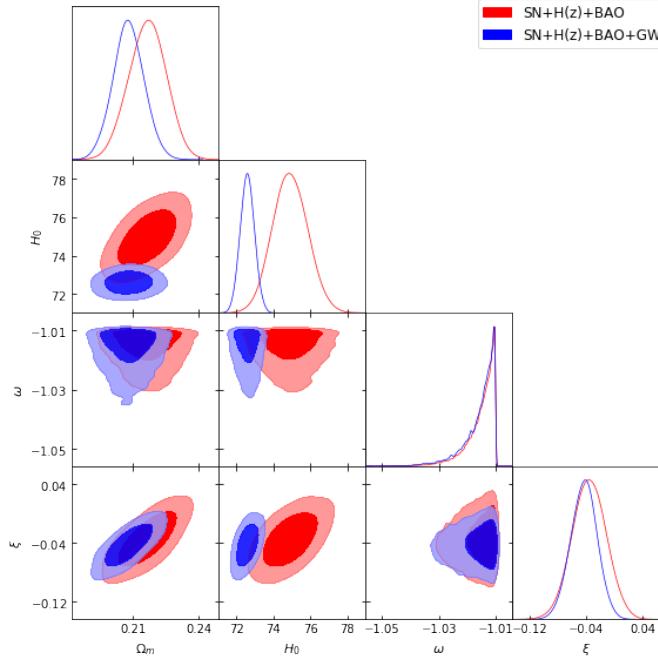


Figura 5.9: Contornos de confiança 1D e 2D para $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}$ (vermelho) e $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}+\text{GW}$ (azul) para o IM2A.

500, 800 e 1000 detecções na Tabela 5.8. Na figura 5.10 são mostardas as distribuições de probabilidade 1D e 2D. Os vínculos são mais restritivos à medida que o número de detecções aumenta, entretanto, de 800 a 1000 detecções as barras de erro aumentam novamente. O acoplamento é restrito a valores negativos, sendo que somente GWs não proveem bons vínculos em ξ . Para Ω_m , H_0 e ω , as melhorias quando aumentamos o número de detecções de 200 para 800 são respectivamente 37%, 49% e 46%.

O efeito da adição das GWs nos dados de $\text{SN}+\text{H}(z)+\text{BAO}$ podem ser vistos na tabela

Número de detecções	Ω_m	H_0	ω	ξ
200	$0.21^{+0.10}_{-0.13}$	58^{+10}_{-6}	$-0.66^{+0.14}_{-0.30}$	$-0.229^{+0.070}_{-0.16}$
500	$0.143^{+0.057}_{-0.090}$	$65.0^{+5.1}_{-2.4}$	$-0.818^{+0.055}_{-0.17}$	$-0.266^{+0.043}_{-0.13}$
800	$0.118^{+0.049}_{-0.096}$	$65.2^{+5.3}_{-2.8}$	$-0.811^{+0.065}_{-0.17}$	$-0.246^{+0.059}_{-0.14}$
1000	0.194 ± 0.080	$60.6^{+5.5}_{-3.9}$	$-0.71^{+0.15}_{-0.17}$	$-0.226^{+0.067}_{-0.16}$

Tabela 5.8: Modelo IIB - Limites de 68% somente com Ondas Gravitacionais

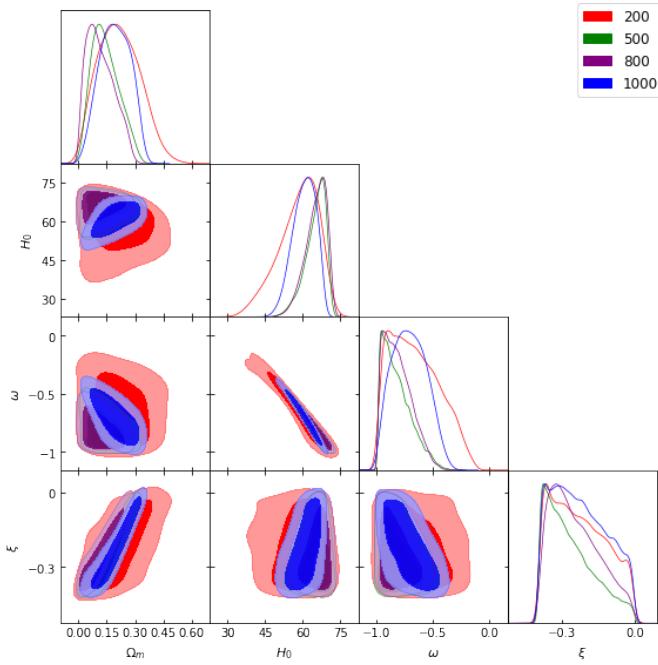


Figura 5.10: Contornos de confiança 1D e 2D para 200 (vermelha), 500 (verde), 800 (púrpura) e 1000 (azul) detecções de Gws para o IM2B.

Data	Ω_m	H_0	ω	ξ
SN+H(z)+BAO	0.150 ± 0.013	70.3 ± 1.6	$-0.815^{+0.039}_{-0.036}$	$-0.114^{+0.054}_{-0.042}$
SN+H(z)+BAO+GW	0.1465 ± 0.0070	68.71 ± 0.54	-0.821 ± 0.038	$-0.152^{+0.034}_{-0.028}$

Tabela 5.9: Modelo IIB - Limite dos 68% para todos os conjuntos de dados

5.9 e na figura 5.11. Os dados apontam para um acoplamento negativo, com uma melhoria de 35% devido a adição dos dados simulados de ondas gravitacionais. Temos uma melhoria de 66% em H_0 e 46% em Ω_m , com a degenerescência entre esses dois parâmetros quebrada. Para a equação de estado, os dados apontam para $\omega \neq -1$, com nenhuma melhoria devido a adição dos dados simulados.

5.7.4 Modelo III

Listamos só 68% C.L. para o modelo III ($Q = 3H\xi(\rho_{dm} + \rho_{de})$) e $\omega < -1$ na tabela 5.10. Existe um ganho de precisão de 16% na constante de acoplamento de 200 para 1000

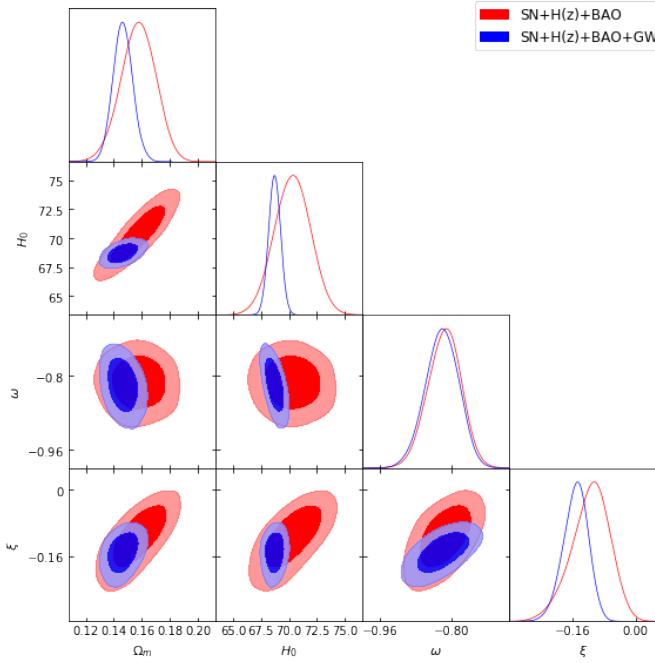


Figura 5.11: Contornos de confiança 1D e 2D para SN+ $H(z)$ +BAO (vermelho) e SN+ $H(z)$ +BAO+GW (azul) para o IM2B.

detecções, e os dados apontam para um acoplamento positivo. O maior ganho de precisão é na constante de Hubble, para o qual as barras de erro diminuem em 71% de 200 para 1000 detecções. Em Ω_m a melhoria é de 51% no mesmo intervalo de detecções, e sem bons vínculos na equação de estado. É importante notar que não há melhorias significantes de 800 para 1000 detecções (fig. 5.12).

A adição dos dados simulados de ondas gravitacionais aos dados de supernovas, relógios cósmicos e oscilações acústicas de bárions proveem boas melhorias nos vínculos (tabela

Número de detecções	Ω_m	H_0	ω	ξ
200	$0.376_{-0.073}^{+0.081}$	68.8 ± 1.9	$-1.23_{-0.088}^{+0.21}$	$0.075_{-0.051}^{+0.066}$
500	0.306 ± 0.053	68.8 ± 1.2	-1.24 ± 0.14	$0.021_{-0.053}^{+0.061}$
800	$0.355_{-0.032}^{+0.040}$	68.76 ± 0.52	$-1.26_{-0.20}^{+0.12}$	$0.071_{-0.042}^{+0.054}$
1000	0.329 ± 0.037	68.57 ± 0.54	$-1.20_{-0.070}^{+0.18}$	$0.030_{-0.058}^{+0.040}$

Tabela 5.10: Modelo III - Limites de 68% somente com Ondas Gravitacionais

Data	Ω_m	H_0	ω	ξ
SN+H(z)+BAO	0.2654 ± 0.0089	73.88 ± 0.74	$-1.0119^{+0.0019}_{-0.00032}$	0.1248 ± 0.0069
SN+H(z)+BAO+GW	0.3138 ± 0.0076	72.59 ± 0.29	$-1.0122^{+0.0022}_{-0.00038}$	0.1081 ± 0.0050

Tabela 5.11: Modelo III - Limite dos 68% para todos os conjuntos de dados

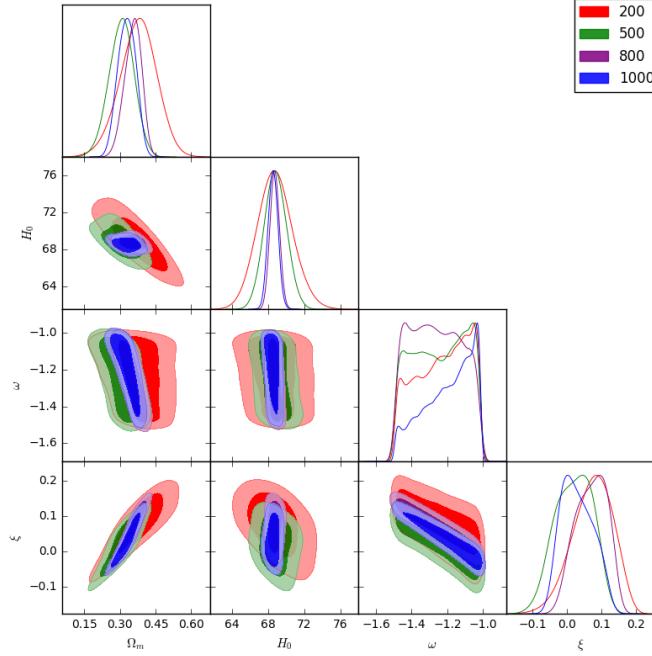


Figura 5.12: Contornos de confiança 1D e 2D para 200 (vermelha), 500 (verde), 800 (púrpura) e 1000 (azul) detecções de Gws para o IM3

5.11). Na constante de acoplamento o ganho de precisão devido aos dados de ondas gravitacionais é 27% com o acoplamento restrito a valores positivos e não compatível com $\xi = 0$. Como nos modelos anteriores, o parâmetro com a maior redução nas barras de erro é H_0 (60%). Em Ω_m a redução é de 14% e não há melhorias na equação de estado, com os dados apontando para $\omega = -1$. Em contraste com os modelos anteriores, não há uma quebra de degenerescência entre H_0 e demais parâmetros. Ao invés disso, existe uma inversão na correlação entre Ω_m e H_0 e entre ξ e H_0 , sendo que a correlação muda de positiva para negativa devido à adição dos dados simulados. Esse importante aspecto pode ser visualizado na figura 5.13 em que as distribuições de probabilidade 1D e 2D são

mostradas. Podemos também ver que a inclusão das GWs desloca os valores centrais de Ω_m e ξ em mais de 2σ .

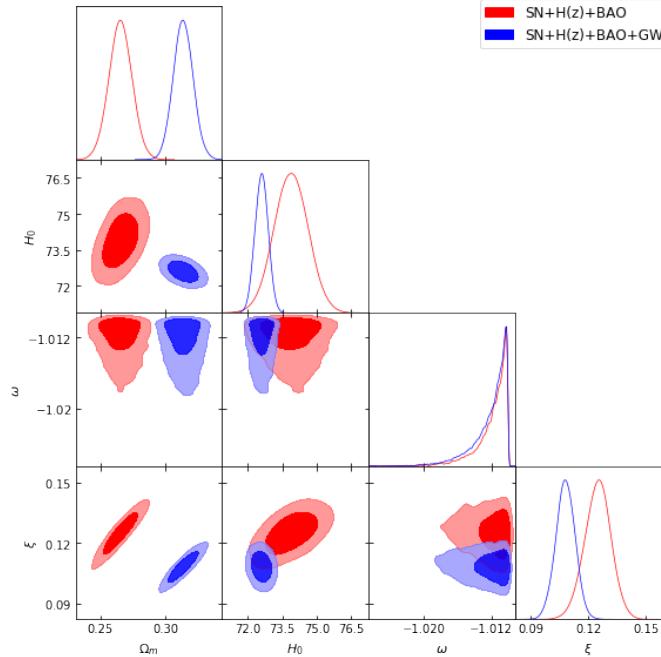


Figura 5.13: Contornos de confiança 1D e 2D para $\text{SN}+H(z)+\text{BAO}$ (vermelho) e $\text{SN}+H(z)+\text{BAO}+\text{GW}$ (azul) para o IM3.

Considerações Finais

Nesta tese procurei apresentar ao leitor as potencialidades da cosmologia de ondas gravitacionais que está apenas em seu alvorecer. Os capítulos 1 e 2 se dedicaram ao panorama atual da cosmologia em nível de *background* e perturbativo respectivamente. O capítulo 3 se dedicou à física de ondas gravitacionais em seu aspecto teórico. Juntos, esses três capítulos fornecem ao leitor as definições necessárias para o conhecimento da cosmologia de ondas gravitacionais.

Os capítulos 4 e 5 já tratam de temas mais específicos. O capítulo 4 apresenta as teorias escalar-tensorial, com destaque para a Teoria de Horndeski e um modelo específico oriundo desta. Aqui vemos a primeira aplicação efetiva de uma recente detecção de ondas gravitacionais a uma teoria cosmológica. No caso, o evento GW170817 e a forte restrição em teorias de gravitação modificada por meio da constatação que $c_g = c$. Exploramos as perturbações lineares do modelo específico e evoluímos o sistema de equações no código `hi-class`. É importante destacar que ao menos rudemente, o modelo específico é compatível com os dados de anisotropias da radiação cósmica de fundo e de crescimento de estruturas. Já os da distribuição de galáxias prefere fortemente o Λ CDM. Como o modelo prevê uma velocidade de propagação das ondas gravitacionais diferente da velocidade da luz e supraluminal, sendo incompatível com o vínculo de GW170817 em 15 – 16 ordens de grandeza na constante de acoplamento não mínima. Observemos que se levarmos em conta somente os dados obtidos pelo espectro eletromagnético o modelo não pode ser definitivamente excluído, precisando de uma observação no espectro gravitacional para descartá-lo.

Ao contrário do capítulo anterior em que é apresentado um resultado negativo, no capítulo 5 é apresentado um resultado positivo por meio das sirenes padrão. Discutimos

aspectos observacionais da física de ondas gravitacionais, como a geometria de detectores, a extração de ruído e os métodos de análise estatística. Para atestar a eficácia das sirenes padrão precisei realizar simulações, uma vez que temos somente uma siren padrão detectada. Para isso, segui uma distribuição de fontes, adotei modelos cosmológicos fiduciais (no caso, os modelos de interação discutidos no capítulo 1) e a razão sinal-ruído esperada para o Telescópio Einstein. As simulações atestaram no geral uma maior restrição nos contornos de confiança com o aumento do número de detecções (utilizei os valores de 200, 500, 800 e 1000 detecções) e que ao adicionarmos as sirenes padrão aos dados correntes de SnIa, relógios cósmicos e BAO tivemos uma significativa melhora na restrição de parâmetros. Destaque para a constante de acoplamento ξ com melhorias em torno de 30% e a constante de Hubble H_0 com melhorias de até 70%. Também verificou-se que ao adicionarmos as sirenes padrão, temos uma quebra de degenerescência entre H_0 e demais parâmetros, com exceção do modelo III. Esses resultados são compatíveis com trabalhos similares bem recentes de [81, 82].

Esta tese nem de longe visa esgotar o tema da astrofísica e cosmologia de ondas gravitacionais. Aplicações como a investigação da estrutura interna de estrelas de nêutrons, o amortecimento (damping) que ocorre na propagação das ondas devido a um fricção adicional o que leva a uma diferença na distância luminosa medida através de ondas gravitacionais e eletromagnéticas, as polarizações adicionais e as ondas gravitacionais de fundo originadas no universo primordial e que podem ser detectadas na CMB por meio dos modos B de polarização. Esses temas são melhor discutidos no já referido artigo de revisão de [59] e no recém lançado volume 2 do livro de Michelle Maggiore [182].

Entre perspectivas futuras, temos a questão da degenerescência entre a distância luminosa d_L e o ângulo de inclinação do binário ι que nas simulações foi desprezado mas que em detecções reais precisa ser levado em conta. Esta degenerescência pode ser quebrada com a adição de mais interferômetros à rede de detectores. Temos também a possível associação da emissão de ondas gravitacionais com os misteriosos *fast radio bursts* (FRB's) que se acredita que também possam ser gerados pela colisão de pares binários.

Estamos presenciando a abertura de uma *nova janela* para a exploração do universo, comparável a quando Galileu Galilei apontou pela primeira vez o telescópio para o céu.

Agora temos acesso a um espectro totalmente novo que é o de ondas gravitacionais, e que ao ser combinado com o espectro eletromagnético no que chamamos de astrofísica multi-mensageira certamente será uma fonte muito valiosa de informações para a astrofísica e cosmologia.

Apêndice A

Equações de perturbação linear do código **hi-class**

Neste apêndice iremos apresentar as Equações de Einstein no nível de perturbação de primeira ordem como escritas no código **hi-class**. As densidades de matéria estão definidas de forma que as equações de Friedmann são escritas como $H^2 = \sum_i \rho_i$. Ou seja: $\rho_{\text{CLASS}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{phys}}$. As variáveis são expressas no tempo conforme τ , enquanto o parâmetro de Hubble é o em relação ao tempo físico, i.e., $a' = a^2 H$, sendo o ' a derivada em relação ao tempo conforme.

O gauge adotado é o síncrono, cujo o elemento de linha é escrito da forma

$$ds^2 = a^2[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + \tilde{h}_{ij})dx^i dx^j] \quad , \quad (\text{A.1})$$

e

$$\tilde{h}_{ij}(\tau, \vec{k}) = \hat{k}_i \hat{k}_j h + 6 \left(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \eta + h_{ij} \quad . \quad (\text{A.2})$$

As funções h e η são as perturbações escalares e h_{ij} são as perturbações tensoriais (ondas gravitacionais). Também é usada a variável $\xi(\tau, \vec{k})$ definida como

$$\xi = \frac{h' + 6\eta'}{2k^2} \quad . \quad (\text{A.3})$$

As equações das perturbações escalares tem como varáveis as perturbações da métrica (h, η) , a perturbação do campo escalar ϕ escritas em termos do potencial V_X definido em (4.57) e as perturbações da densidade de matéria, velocidade, pressão e stress anisotrópico $(\delta\rho_m, \theta_m, \delta p_m, \sigma_m)$. As equações de Einstein são:

Componente 00

$$\begin{aligned} h' = & \frac{4k^2\eta}{aH(2-\alpha_B)} + \frac{6a\delta\rho_m}{HM_*^2(2-\alpha_B)} - 2aH\left(\frac{\alpha_K+3\alpha_B}{2-\alpha_B}\right)V'_X \\ & - 2\left[3aH' + \left(\frac{\alpha_K+3\alpha_B}{2-\alpha_B}\right)a^2H^2 + \frac{9a^2}{M_*^2}\left(\frac{\rho_m+p_m}{2-\alpha_B}\right) + \frac{k^2\alpha_B}{2-\alpha_B}\right]V_X . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Componente 0i

$$\eta' = \frac{3a^2\theta_m}{2k^2M_*^2} + \frac{aH}{2}\alpha_B V'_X + \left[aH' + \frac{a^2H^2}{2}\alpha_B + \frac{3a^2}{2M_*^2}(\rho_m+p_m)\right]V_X . \quad (\text{A.5})$$

Componente ij ($i \neq j$)

$$Dh'' = 2\lambda_1\eta + 2aH\lambda_3h' - \frac{9a^2\alpha_K\delta\rho_m}{M_*^2} + 3a^2H^2\lambda_4V'_X + 2a^3H^3\left[3\lambda_6 + \frac{k^2\lambda_5}{a^2H^2}\right]V_X . \quad (\text{A.6})$$

Componente ii ($i = j$)

$$\xi' = (1+\alpha_T)\eta - aH(2+\alpha_M)\xi + aH(\alpha_M-\alpha_T)V_X - \frac{9a^2\sigma_m}{2k^2M_*^2} . \quad (\text{A.7})$$

Além das equações de Einstein, temos a equação de evolução para as perturbações do campo escalar

$$\begin{aligned} D(2-\alpha-B)V''_X + 8aH\lambda_7V'_X + 2a^2H^2\left[\frac{k^2c_{sN}^2}{a^2H^2} - 4\lambda_8\right]V_X \\ = \frac{2c_{sN}^2}{aH}k^2\eta + \frac{3a}{2HM_*^2}[2\lambda_2\delta\rho_m - 3\alpha_B(2-\alpha_B)\delta p_m] . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A definição de todas as funções auxiliares é

$$D = \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 , \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda_1 = \alpha_K(1+\alpha_T) - 3\alpha_B(\alpha_M-\alpha_T) , \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_2 = -\frac{3(\rho_m+p_m)}{H^2M_*^2} - (2-\alpha_B)\frac{H'}{aH^2} + \frac{\alpha'_B}{aH} , \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(2+\alpha_M)D - \frac{3}{4}\lambda_2\alpha_B , \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda_4 = \lambda_2\alpha_K - \frac{2\alpha_k\alpha'_B - \alpha_B\alpha'_K}{aH} , \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda_5 = \frac{3}{2}\alpha_B^2(1+\alpha_T) + (D+3\alpha_B)(\alpha_M-\alpha_T) + \frac{3}{2}\lambda_2\alpha_B , \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda_6 = \left(1 - \frac{3\alpha_B H'}{aH^2\alpha_K}\right)\frac{\lambda_2\alpha_K}{2} - \frac{DH'}{aH^2}\left[2+\alpha_M + \frac{H''}{aHH'}\right] - \frac{2\alpha_K\alpha'_B - \alpha_B\alpha'_K}{2aH} - \frac{3\alpha_K p'_m}{2aH^3 M_*^2} , \quad (\text{A.15})$$

$$\lambda_7 = \frac{D}{8}(2 - \alpha_B) \left[4 + \alpha_M + \frac{2H'}{aH^2} + \frac{D'}{aHD} \right] + \frac{D}{8}\lambda_2 , \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \lambda_8 = & -\frac{\lambda_2}{8} \left(D - 3\lambda_2 + \frac{3\alpha'_B}{aH} \right) + \frac{1}{8}(2 - \alpha_B) \left[(3\lambda_2 - D) \frac{H'}{aH^2} - \frac{9\alpha_B p'_m}{2aH^3 M_*^2} \right] \\ & - \frac{D}{8}(2 - \alpha_B) \left[4 + \alpha_M + \frac{2H'}{aH^2} + \frac{D'}{aHD} \right] , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$c_{sN}^2 = \lambda_2 + \frac{1}{2}(2 - \alpha_B)[\alpha_B(1 + \alpha_T) + 2(\alpha_M - \alpha_T)] . \quad (\text{A.18})$$

O termo c_{sN}^2 é o numerador da velocidade do som quadrática, cujo o valor total é

$$c_s^2 = \frac{c_{sN}^2}{D} . \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Derivação do tensor energia-momento para o modelo específico

Consideremos a ação do modelo específico

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \left(\frac{X}{2} - \eta X^{1/2} \right) - \frac{\lambda_3}{2} X^{-1/2} \square \phi + \frac{\lambda_5}{2} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \right] , \quad (\text{B.1})$$

em que $X = -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi / 2$.

A variação do tensor de Ricci R nos dá o tensor de Einstein

$$\delta(\sqrt{-g}R/2) = \frac{\sqrt{-g}}{2} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

① Variando o primeiro termo de (B.1) com respeito a métrica, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} X \right) &= \frac{1}{2} \delta \left(-\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi / 2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right] \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} X + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

(2) A variação do segundo termo de (B.1) com respeito a métrica resulta em

$$\begin{aligned}
\delta(-\sqrt{-g}\eta X^{1/2}) &= -\eta[\delta(\sqrt{-g})X^{1/2} + \sqrt{-g}\delta(X^{1/2})] \\
&= -\eta\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}X^{1/2} + \frac{\sqrt{-g}}{2}X^{-1/2}\delta X\right] \\
&= -\eta\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}X^{1/2} + \frac{\sqrt{-g}}{2}X^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\right] \\
&= \frac{\eta\sqrt{-g}}{2}\left[g_{\mu\nu}X^{1/2} + \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi X^{-1/2}\right]\delta g^{\mu\nu} . \tag{B.4}
\end{aligned}$$

(3) Sendo a Lagrangeana 3

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\square\phi = \nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + b.t. , \tag{B.5}$$

em que *b.t.* significa termos de superfície. Variamos (B.5) com respeito à métrica

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_3) &= \delta(\sqrt{-g}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi) \\
&= \delta(\sqrt{-g})\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + \sqrt{-g}\delta(g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda G_3 \nabla_\sigma\phi) \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + \sqrt{-g}\delta(g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda G_3 \nabla_\sigma\phi) \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}(\nabla_\mu G_3 \nabla_\nu\phi + \nabla_\nu G_3 \nabla_\mu\phi) - \delta G_3 g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda\nabla_\sigma\phi\right) \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + \delta g^{\mu\nu}\nabla_{(\mu}G_3 \nabla_{\nu)} - G_{3,X}\delta X\square\phi\right) \\
&= \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + \delta g^{\mu\nu}\nabla_{(\mu}G_3 \nabla_{\nu)} - G_{3,X}\left(-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\right)\square\phi\right) \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(-g_{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi + 2\nabla_{(\mu}G_3 \nabla_{\nu)} + G_{3,X}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\square\phi\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Portanto, o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^{\mathcal{L}_3} = G_{3,X}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\square\phi + 2\nabla_{(\mu}G_3 \nabla_{\nu)} - g_{\mu\nu}\nabla^\lambda G_3 \nabla_\lambda\phi . \tag{B.6}$$

Para o modelo específico $G_3(\phi, X) = \frac{1}{2}\lambda_3 X^{-1/2}$, temos $G_{3,X} = -\frac{\lambda_3}{4}X^{-3/2}$ and $\nabla_\mu X = -\frac{\lambda_3}{4}X^{-3/2}\nabla_\mu X$. Dessa forma, o tensor energia-momento referente a Lagrangeana 3 é

$$T_{\mu\nu}^{\mathcal{L}_3} = -\frac{\lambda_3}{4}X^{-3/2}\left(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\square\phi + 2\nabla_{(\mu}X\nabla_{\nu)}\phi - g_{\mu\nu}\nabla^\lambda X\nabla_\lambda\phi\right) . \tag{B.7}$$

④ O termo de acoplamento não-mínimo é

$$\frac{\lambda_5}{2} \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi . \quad (\text{B.8})$$

Variando com respeito à métrica (não carregaremos as constantes), temos

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) &= \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \\ &= (\delta \sqrt{-g}) g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ &\quad + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\kappa} \delta g^{\lambda\nu} G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

O primeiro termo é

$$\delta \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} G^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi \delta g^{\mu\nu} . \quad (\text{B.10})$$

O segundo termo é

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} G_{\kappa\lambda} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi &= \sqrt{-g} \delta g^{\mu\kappa} G_\kappa^\nu \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \\ &= \sqrt{-g} G_\mu^\lambda \nabla_\nu \phi \nabla_\lambda \phi \delta g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g} G_{(\mu}^\lambda \nabla_{\nu)} \phi \nabla_\lambda \phi \delta g^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

em que

$$G_{(\mu}^\lambda \nabla_{\nu)} \phi = \frac{1}{2} (G_\mu^\lambda \nabla_\nu \phi + G_\nu^\lambda \nabla_\mu \phi) . \quad (\text{B.12})$$

O terceiro termo é identico ao segundo.

No último termo temos que variar o tensor de Einstein

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \delta G_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi . \end{aligned}$$

Variando o tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi &= \sqrt{-g} [\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda] \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
&= \sqrt{-g} \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi_{\mu\nu} - \sqrt{-g} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi \\
&= -\sqrt{-g} \delta \Gamma^\lambda \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi_{\mu\nu}) + \sqrt{-g} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&\quad + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\mu}) \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&= -\sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) + \frac{\sqrt{-g}}{2} \nabla^\lambda \delta g_{\mu\nu} \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&\quad + \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} \nabla_\mu \delta g_{\sigma\lambda} \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&= \sqrt{-g} g^{\lambda\sigma} \delta g_{\sigma\nu} \nabla_\mu \nabla_\lambda (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) - \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta g_{\mu\nu} \square (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&\quad - \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\lambda\sigma} \delta g_{\sigma\lambda} \nabla_\mu \nabla_\nu (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&= \sqrt{-g} [-\delta g^{\sigma\nu} \nabla_\mu \nabla_\sigma (\nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi) + \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \square (\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\lambda (\nabla^\sigma \phi \nabla^\lambda \phi)] \\
&= \sqrt{-g} [-\nabla_\sigma \nabla_{(\mu} \nabla^{\sigma} \phi \nabla_{\nu)} \phi + \frac{1}{2} \square (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \nabla_\lambda (\nabla^\sigma \phi \nabla^\lambda \phi)] \delta g^{\mu\nu} . \tag{B.13}
\end{aligned}$$

A variação da métrica resulta em

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} (\delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (R \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - R_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi) \delta g^{\mu\nu} \tag{B.14}$$

Variando $R_{\mu\nu}$ novamente

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda]\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu})\nabla_\lambda\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &\quad - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(\nabla_\mu\delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda\delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma\delta g_{\lambda\mu})\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta g_{\sigma\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
 &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\sigma\nu}\nabla_\mu\nabla^\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= +\frac{\sqrt{-g}}{2}\delta g^{\sigma\nu}\nabla_\nu\nabla_\sigma\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &= \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\right]\delta g^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Coletando todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 \delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) &= \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + 2G_{(\mu}^\lambda\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi\right. \\
 &\quad - \nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi) \\
 &\quad + \frac{1}{2}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
 &\quad \left.- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)\right]\delta g^{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Vamos tomar os termos de derivada superior:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda(\nabla^\sigma\phi\nabla^\lambda\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) , \tag{B.17}$$

e

$$-\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \tag{B.18}$$

Abrindo as derivadas em (B.17), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi) - \nabla_\beta\nabla^\beta(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi)] \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\color{blue}{\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi} + \color{red}{\nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi} + \square\phi\square\phi + \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\square\phi \\
&\quad - \square\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - \color{red}{\nabla^\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi} - \nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla_\beta\nabla_\alpha\phi - \nabla_\beta\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\nabla_\alpha\phi - \nabla^\alpha\phi\square\nabla_\alpha\phi] \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi + \nabla^\alpha\phi(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\nabla^\beta\phi] \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi] \quad , \tag{B.19}
\end{aligned}$$

em que usamos a relação

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\phi - \nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla^\beta\phi = -R_{\alpha\beta}\nabla^\beta\phi \quad . \tag{B.20}$$

Abrindo as derivadas em (B.18), obtemos

$$\begin{aligned}
& -\nabla_\sigma\nabla_{(\mu}\nabla^\sigma\phi\nabla_{\nu)}\phi + \frac{1}{2}\square(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) + \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
&= -\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\mu\phi) + \frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla^\alpha(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) \\
&\quad + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) + \frac{1}{4}\nabla_\nu\nabla_\mu(\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \\
&= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \square\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + \frac{1}{2}\nabla_\nu\nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
&\quad - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla_\nu\nabla_\mu\phi \\
&= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \square\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\mu\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\mu)\nabla_\nu\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla^\alpha\phi(\nabla_\nu\nabla_\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\nu)\nabla_\mu\phi \\
&= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \square\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}R_{\nu\alpha\mu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + \frac{1}{2}R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi \\
&= \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \square\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi \quad . \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi + 2G_{(\mu}^\lambda\nabla_{\nu)}\phi\nabla_\lambda\phi \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}R\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
&\quad + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\nabla_\beta\phi\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi] \\
&\quad \left. + \nabla_\mu\nabla^\alpha\phi\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi - \square\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + R_{\mu\alpha\nu\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi \right] \delta g^{\mu\nu} \quad .
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Podemos reagrupar os termos

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \\
&= -g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi + XG_{\mu\nu} \quad ,
\end{aligned} \tag{B.23}$$

e obter

$$\begin{aligned}
\delta(\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi) &= \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi R + 2\nabla_\alpha\phi\nabla_{(\mu}\phi G_{\nu)}^\alpha + \nabla^\alpha\phi\nabla^\beta\phi R_{\mu\alpha\nu\beta} \right. \\
&\quad + XG_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla^a\phi\nabla_\nu\nabla_a\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi(\square\phi) \\
&\quad \left. + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi + \frac{1}{2}(\square\phi)^2 - \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi R^{\alpha\beta} \right) \right) \quad .
\end{aligned} \tag{B.24}$$

O tensor energia-momento total é a soma de (B.3), (B.4), (B.6) e (B.24).

Referências Bibliográficas

- [1] SUPERNOVA SEARCH TEAM collaboration, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009 [[astro-ph/9805201](#)].
- [2] SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT collaboration, *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565 [[astro-ph/9812133](#)].
- [3] PLANCK collaboration, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13 [[1502.01589](#)].
- [4] PLANCK collaboration, *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16 [[1303.5076](#)].
- [5] PLANCK collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, [1807.06209](#).
- [6] SDSS collaboration, *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*, *Astrophys. J.* **633** (2005) 560 [[astro-ph/0501171](#)].
- [7] A. Kashlinsky, F. Atrio-Barandela, D. Kocevski and H. Ebeling, *A measurement of large-scale peculiar velocities of clusters of galaxies: results and cosmological implications*, *Astrophys. J.* **686** (2009) L49 [[0809.3734](#)].
- [8] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1.

- [9] I. Zlatev, L.-M. Wang and P. J. Steinhardt, *Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 896 [[astro-ph/9807002](#)].
- [10] L. Verde, T. Treu and A. G. Riess, *Tensions between the Early and the Late Universe*, 2019, 1907.10625.
- [11] C. Wetterich, *Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry*, *Nucl. Phys.* **B302** (1988) 668 [[1711.03844](#)].
- [12] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field*, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3406.
- [13] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V. F. Mukhanov, *k - inflation*, *Phys. Lett.* **B458** (1999) 209 [[hep-th/9904075](#)].
- [14] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, *Essentials of k essence*, *Phys. Rev.* **D63** (2001) 103510 [[astro-ph/0006373](#)].
- [15] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925.
- [16] A. Yu. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *An Alternative to quintessence*, *Phys. Lett.* **B511** (2001) 265 [[gr-qc/0103004](#)].
- [17] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, *Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification*, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 043507 [[gr-qc/0202064](#)].
- [18] M. d. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen, *Generalized Chaplygin gas and CMBR constraints*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 063003 [[astro-ph/0210468](#)].
- [19] M. C. Bento, O. Bertolami, M. J. Reboucas and P. T. Silva, *Generalized Chaplygin gas model, supernovae and cosmic topology*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 043504 [[gr-qc/0512158](#)].
- [20] H. B. Sandvik, M. Tegmark, M. Zaldarriaga and I. Waga, *The end of unified dark matter?*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 123524.

- [21] E. G. M. Ferreira, J. Quintin, A. A. Costa, E. Abdalla and B. Wang, *Evidence for interacting dark energy from BOSS*, *Phys. Rev.* **D95** (2017) 043520 [1412.2777].
- [22] A. A. Costa, X.-D. Xu, B. Wang and E. Abdalla, *Constraints on interacting dark energy models from Planck 2015 and redshift-space distortion data*, *JCAP* **1701** (2017) 028 [1605.04138].
- [23] R. J. F. Marcondes, R. C. G. Landim, A. A. Costa, B. Wang and E. Abdalla, *Analytic study of the effect of dark energy-dark matter interaction on the growth of structures*, *JCAP* **1612** (2016) 009 [1605.05264].
- [24] S. Kumar and R. C. Nunes, *Echo of interactions in the dark sector*, *Phys. Rev.* **D96** (2017) 103511 [1702.02143].
- [25] E. Di Valentino, A. Melchiorri and O. Mena, *Can interacting dark energy solve the H_0 tension?*, *Phys. Rev.* **D96** (2017) 043503 [1704.08342].
- [26] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela and D. Pavon, *Dark Matter and Dark Energy Interactions: Theoretical Challenges, Cosmological Implications and Observational Signatures*, *Rept. Prog. Phys.* **79** (2016) 096901 [1603.08299].
- [27] G. W. Horndeski, *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*, *International Journal of Theoretical Physics* **10** (1974) 363.
- [28] G. Koutsoumbas, K. Ntrekis, E. Papantonopoulos and E. N. Saridakis, *Unification of Dark Matter - Dark Energy in Generalized Galileon Theories*, *JCAP* **1802** (2018) 003 [1704.08640].
- [29] N. Chow and J. Khoury, *Galileon cosmology*, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 024037.
- [30] A. De Felice, R. Kase and S. Tsujikawa, *Vainshtein mechanism in second-order scalar-tensor theories*, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 044059.
- [31] E. N. Saridakis and M. Tsoukalas, *Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories*, *Phys. Rev.* **D93** (2016) 124032 [1601.06734].

- [32] C. de Rham and L. Heisenberg, *Cosmology of the Galileon from massive gravity*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 043503.
- [33] M. Rinaldi, *Mimicking dark matter in Horndeski gravity*, *Phys. Dark Univ.* **16** (2017) 14 [1608.03839].
- [34] B. F. Schutz, *Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations*, *Nature* **323** (1986) 310.
- [35] A. Einstein, *Approximative Integration of the Field Equations of Gravitation*, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916** (1916) 688.
- [36] J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri and G.-F. Smoot, *A Brief History of Gravitational Waves*, *Universe* **2** (2016) 22 [1609.09400].
- [37] F. A. E. Pirani, *On the Physical significance of the Riemann tensor*, *Acta Phys. Polon.* **15** (1956) 389.
- [38] J. Weber, *Detection and Generation of Gravitational Waves*, *Phys. Rev.* **117** (1960) 306.
- [39] J. Weber, *Observation of the Thermal Fluctuations of a Gravitational-Wave Detector*, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1228.
- [40] J. Weber, *Evidence for discovery of gravitational radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **22** (1969) 1320.
- [41] J. Weber, *Anisotropy and polarization in the gravitational-radiation experiments*, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 180.
- [42] D. W. Sciama, G. B. Field and M. J. Rees, *Upper Limit to Radiation of Mass Energy Derived from Expansion of Galaxy*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 1514.
- [43] P. Kafka, *Are Weber's Pulses Illegal?*, *Gravity Research Foundation: Babson Park, MA, USA* (1972) .

- [44] J. H. Taylor, L. A. Fowler and P. M. McCulloch, *Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16*, *Nature* **277** (1979) 437.
- [45] H. G. and, *The GEO 600 status*, *Classical and Quantum Gravity* **27** (2010) 084003.
- [46] C. Bradaschia et al., *VIRGO: Very wide band interferometric gravitational wave antenna*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **28A** (1992) 54.
- [47] A. Abramovici et al., *LIGO: The Laser interferometer gravitational wave observatory*, *Science* **256** (1992) 325.
- [48] LIGO SCIENTIFIC collaboration, *Advanced LIGO*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 074001 [1411.4547].
- [49] LIGO SCIENTIFIC, VIRGO collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016) 061102 [1602.03837].
- [50] C.-M. Chen, J. M. Nester and W.-T. Ni, *A brief history of gravitational wave research*, *Chin. J. Phys.* **55** (2017) 142 [1610.08803].
- [51] VIRGO collaboration, *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 024001 [1408.3978].
- [52] LIGO SCIENTIFIC, VIRGO collaboration, *GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs*, 1811.12907.
- [53] LIGO SCIENTIFIC, VIRGO collaboration, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 161101 [1710.05832].
- [54] A. Goldstein et al., *An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L14 [1710.05446].

- [55] V. Savchenko et al., *INTEGRAL Detection of the First Prompt Gamma-Ray Signal Coincident with the Gravitational-wave Event GW170817*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L15 [1710.05449].
- [56] LIGO SCIENTIFIC, VIRGO, FERMI-GBM, INTEGRAL collaboration, *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L13 [1710.05834].
- [57] DES, DARK ENERGY CAMERA GW-EM collaboration, *The Electromagnetic Counterpart of the Binary Neutron Star Merger LIGO/Virgo GW170817. I. Discovery of the Optical Counterpart Using the Dark Energy Camera*, *Astrophys. J.* **848** (2017) L16 [1710.05459].
- [58] LIGO SCIENTIFIC, VIRGO, 1M2H, DARK ENERGY CAMERA GW-E, DES, DLT40, LAS CUMBRES OBSERVATORY, VINROUGE, MASTER collaboration, *A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant*, *Nature* **551** (2017) 85 [1710.05835].
- [59] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, *Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy*, *Front. Astron. Space Sci.* **5** (2018) 44 [1807.09241].
- [60] B. F. Schutz, *Gravitational Wave Astronomy: Delivering on the Promises*, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A376** (2018) 20170279 [1804.06308].
- [61] T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller and I. Sawicki, *Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251301 [1710.06394].
- [62] J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, *Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251304 [1710.05901].
- [63] P. Creminelli and F. Vernizzi, *Dark Energy after GW170817 and GRB170817A*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251302 [1710.05877].

- [64] J. Sakstein and B. Jain, *Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 251303 [1710.05893].
- [65] L. Amendola, M. Kunz, I. D. Saltas and I. Sawicki, *The fate of large-scale structure in modified gravity after GW170817 and GRB170817A*, 1711.04825.
- [66] M. Zumalacárregui, E. Bellini, I. Sawicki, J. Lesgourgues and P. G. Ferreira, *hi-class: Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System*, *JCAP* **1708** (2017) 019 [1605.06102].
- [67] KAGRA collaboration, *Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector*, *Phys. Rev.* **D88** (2013) 043007 [1306.6747].
- [68] KAGRA collaboration, *The status of KAGRA underground cryogenic gravitational wave telescope*, in *15th International Conference on Topics in Astroparticle and Underground Physics (TAUP 2017) Sudbury, Ontario, Canada, July 24-28, 2017*, 2017, 1710.04823.
- [69] C. Pankow, E. A. Chase, S. Coughlin, M. Zevin and V. Kalogera, *Improvements in Gravitational-Wave Sky Localization with Expanded Networks of Interferometers*, *Astrophys. J.* **854** (2018) L25 [1801.02674].
- [70] B. Sathyaprakash et al., *Scientific Objectives of Einstein Telescope*, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012) 124013 [1206.0331].
- [71] LIGO SCIENTIFIC collaboration, *Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors*, *Class. Quant. Grav.* **34** (2017) 044001 [1607.08697].
- [72] LISA collaboration, *Laser Interferometer Space Antenna*, 1702.00786.
- [73] D. E. Holz and S. A. Hughes, *Using gravitational-wave standard sirens*, *Astrophys. J.* **629** (2005) 15 [[astro-ph/0504616](#)].

- [74] N. Dalal, D. E. Holz, S. A. Hughes and B. Jain, *Short grb and binary black hole standard sirens as a probe of dark energy*, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 063006 [[astro-ph/0601275](#)].
- [75] C. L. MacLeod and C. J. Hogan, *Precision of Hubble constant derived using black hole binary absolute distances and statistical redshift information*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 043512 [[0712.0618](#)].
- [76] W. Del Pozzo, *Inference of the cosmological parameters from gravitational waves: application to second generation interferometers*, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 043011 [[1108.1317](#)].
- [77] H.-Y. Chen, M. Fishbach and D. E. Holz, *A two per cent Hubble constant measurement from standard sirens within five years*, *Nature* **562** (2018) 545 [[1712.06531](#)].
- [78] W. Zhao, C. Van Den Broeck, D. Baskaran and T. G. F. Li, *Determination of Dark Energy by the Einstein Telescope: Comparing with CMB, BAO and SNIa Observations*, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 023005 [[1009.0206](#)].
- [79] R.-G. Cai and T. Yang, *Estimating cosmological parameters by the simulated data of gravitational waves from the Einstein Telescope*, *Phys. Rev.* **D95** (2017) 044024 [[1608.08008](#)].
- [80] J.-Z. Qi, S. Cao, Y. Pan and J. Li, *Cosmic opacity: cosmological-model-independent tests from gravitational waves and Type Ia Supernova*, [1902.01702](#).
- [81] W. Yang, S. Pan, E. Di Valentino, B. Wang and A. Wang, *Forecasting Interacting Vacuum-Energy Models using Gravitational Waves*, [1904.11980](#).
- [82] W. Yang, S. Vagnozzi, E. Di Valentino, R. C. Nunes, S. Pan and D. F. Mota, *Listening to the sound of dark sector interactions with gravitational wave standard sirens*, [1905.08286](#).

- [83] A. Gupta, D. Fox, B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, *Calibrating the cosmic distance ladder using gravitational-wave observations*, 1907.09897.
- [84] E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa and M. Maggiore, *Gravitational-wave luminosity distance in modified gravity theories*, *Phys. Rev.* **D97** (2018) 104066 [1712.08108].
- [85] E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa and M. Maggiore, *Modified gravitational-wave propagation and standard sirens*, *Phys. Rev.* **D98** (2018) 023510 [1805.08731].
- [86] LISA COSMOLOGY WORKING GROUP collaboration, *Testing modified gravity at cosmological distances with LISA standard sirens*, *JCAP* **1907** (2019) 024 [1906.01593].
- [87] E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, E. J. Howell, M. Maggiore and T. Regimbau, *Cosmology and dark energy from joint gravitational wave-GRB observations*, 1907.01487.
- [88] R. R. A. Bachega, E. Abdalla and K. S. F. Fornazier, *Forecasting the Interaction in Dark Matter-Dark Energy Models with Standard Sirens From the Einstein Telescope*, 1906.08909.
- [89] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy*. Cambridge University Press, 2015.
- [90] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2005.
- [91] S. Weinberg, *Cosmology*, . Oxford University Press, USA, oup ed., 2008.
- [92] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, . Academic Press, 1 ed., 2003.
- [93] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys.* **D15** (2006) 1753 [hep-th/0603057].
- [94] C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges*, *Astrophys. J.* **455** (1995) 7 [astro-ph/9506072].

- [95] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*, Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007.
- [96] T. G. F. Li, *Extracting Physics from Gravitational Waves: Testing the Strong-field Dynamics of General Relativity and Inferring the Large-scale Structure of the Universe*, Ph.D. thesis, Vrije U., Amsterdam, 2013.
- [97] E. Bellini and I. Sawicki, *Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity*, *JCAP* **1407** (2014) 050 [1404.3713].
- [98] R. Trotta, *Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology*, *Contemp. Phys.* **49** (2008) 71 [0803.4089].
- [99] E. Hubble *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929) .
- [100] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri and D. Scolnic, *Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM*, *Astrophys. J.* **876** (2019) 85 [1903.07603].
- [101] SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT collaboration, *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z \gtrsim 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample*, *Astrophys. J.* **746** (2012) 85 [1105.3470].
- [102] B. Wang, Y. Gong and E. Abdalla, *Thermodynamics of an accelerated expanding universe*, *Phys. Rev.* **D74** (2006) 083520 [gr-qc/0511051].
- [103] M. Chevallier and D. Polarski, *Accelerating universes with scaling dark matter*, *Int. J. Mod. Phys.* **D10** (2001) 213 [gr-qc/0009008].
- [104] E. V. Linder, *Exploring the expansion history of the universe*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 091301 [astro-ph/0208512].

- [105] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty and S. Mukohyama, *Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity*, *JHEP* **05** (2004) 074 [[hep-th/0312099](#)].
- [106] T. Padmanabhan, *Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter*, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 021301 [[hep-th/0204150](#)].
- [107] A. Sen, *Rolling tachyon*, *JHEP* **04** (2002) 048 [[hep-th/0203211](#)].
- [108] E. Silverstein and D. Tong, *Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from D-cceleration*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 103505 [[hep-th/0310221](#)].
- [109] S. Chaplygin *Sci. Mem. Moscow Univ. Math. Phys.* **21** (1904) .
- [110] N. Bilic, G. B. Tupper and R. D. Viollier, *Dark matter, dark energy and the chaplygin gas*, in *Dark matter in astro- and particle physics. Proceedings, 4th Heidelberg International Conference, DARK 2002, Cape Town, South Africa, February 4-9, 2002*, pp. 306–311, 2002, [astro-ph/0207423](#).
- [111] L. Amendola *Phys. Rev.* **D62** (2000) 043511 [[astro-ph/9908023](#)].
- [112] G. Olivares, F. Atrio-Barandela and D. Pavon *Phys. Rev.* **D74** (2006) 043521 [[astro-ph/0607604](#)].
- [113] E. Lifshitz *J. Phys. USSR* **10** (1946) .
- [114] V. Mukhanov, H. Feldman and R. Brandenberger *Phys. Rep.* **215** (1992) .
- [115] D. Blas, J. Lesgourgues and T. Tram, *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes*, *JCAP* **1107** (2011) 034 [[1104.2933](#)].
- [116] Y.-S. Song and W. J. Percival, *Reconstructing the history of structure formation using Redshift Distortions*, *JCAP* **0910** (2009) 004 [[0807.0810](#)].
- [117] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s*, *Astrophys. J.* **142** (1965) 419.

- [118] COBE collaboration, *Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps*, *Astrophys. J.* **396** (1992) L1.
- [119] WMAP collaboration, *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology*, *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377 [[astro-ph/0603449](#)].
- [120] N. Jarosik et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*, *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 14 [[1001.4744](#)].
- [121] A. Lewis and S. Bridle, *Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach*, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 103511.
- [122] A. Lewis, *Efficient sampling of fast and slow cosmological parameters*, *prd* **87** (2013) 103529 [[1304.4473](#)].
- [123] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background*, *Astrophys. J.* **147** (1967) 73.
- [124] R. G. Crittenden and N. Turok, *Looking for Lambda with the Rees-Sciama effect*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 575 [[astro-ph/9510072](#)].
- [125] S. Boughn and R. Crittenden, *A Correlation of the cosmic microwave sky with large scale structure*, *Nature* **427** (2004) 45 [[astro-ph/0305001](#)].
- [126] A. J. Nishizawa, *The integrated Sachs-Wolfe effect and the Rees-Sciama effect*, *PTEP* **2014** (2014) 06B110 [[1404.5102](#)].
- [127] P. Horava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084008 [[0901.3775](#)].
- [128] T. Jacobson, *Einstein-aether gravity: A Status report*, *PoS QG-PH* (2007) 020 [[0801.1547](#)].
- [129] G. D'Amico, C. de Rham, S. Dubovsky, G. Gabadadze, D. Pirtskhalava and A. J. Tolley, *Massive Cosmologies*, *Phys. Rev. D* **84** (2011) 124046 [[1108.5231](#)].

- [130] S. F. Hassan and R. A. Rosen, *Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity*, *JHEP* **02** (2012) 126 [[1109.3515](#)].
- [131] C. Armendariz-Picon, *Could dark energy be vector-like?*, *JCAP* **0407** (2004) 007 [[astro-ph/0405267](#)].
- [132] E. Ally, P. Peter and Y. Rodriguez, *Generalized Proca action for an Abelian vector field*, *JCAP* **1602** (2016) 004 [[1511.03101](#)].
- [133] C. Skordis, *The Tensor-Vector-Scalar theory and its cosmology*, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 143001 [[0903.3602](#)].
- [134] L. Heisenberg, *Scalar-Vector-Tensor Gravity Theories*, *JCAP* **1810** (2018) 054 [[1801.01523](#)].
- [135] M. Zumalacárregui and J. García-Bellido, *Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian*, *Phys. Rev.* **D89** (2014) 064046 [[1308.4685](#)].
- [136] M. Ostrogradsky, *Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres*, *Mem. Acad. St. Petersbourg* **6** (1850) 385.
- [137] J.-H. He, B. Wang and E. Abdalla, *Deep connection between $f(R)$ gravity and the interacting dark sector model*, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 123526 [[1109.1730](#)].
- [138] M. Mancarella, *An effective description of dark energy: from theory to phenomenology*, Ph.D. thesis, IPhT, Saclay, 2017. [1709.07795](#).
- [139] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *The Galileon as a local modification of gravity*, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 064036 [[0811.2197](#)].
- [140] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, *From k -essence to generalised Galileons*, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 064039 [[1103.3260](#)].
- [141] J. D. Bekenstein, *The Relation between physical and gravitational geometry*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 3641 [[gr-qc/9211017](#)].

- [142] D. Bettoni and S. Liberati, *Disformal invariance of second order scalar-tensor theories: Framing the Horndeski action*, *Phys. Rev.* **D88** (2013) 084020 [1306.6724].
- [143] A. De Felice, T. Kobayashi and S. Tsujikawa, *Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations*, *Phys. Lett.* **B706** (2011) 123 [1108.4242].
- [144] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011) 511 [1105.5723].
- [145] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *The Dynamics of general relativity*, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 1997 [gr-qc/0405109].
- [146] J. Gleyzes, D. Langlois and F. Vernizzi, *A unifying description of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys.* **D23** (2015) 1443010 [1411.3712].
- [147] S. Tsujikawa, *The effective field theory of inflation/dark energy and the Horndeski theory*, *Lect. Notes Phys.* **892** (2015) 97 [1404.2684].
- [148] B. Hu, M. Raveri, N. Frusciante and A. Silvestri, *Effective Field Theory of Cosmic Acceleration: an implementation in CAMB*, *Phys. Rev.* **D89** (2014) 103530 [1312.5742].
- [149] B. Hu, M. Raveri, N. Frusciante and A. Silvestri, *EFTCAMB/EFTCosmoMC: Numerical Notes v3.0*, 1405.3590.
- [150] G. D. Moore and A. E. Nelson, *Lower bound on the propagation speed of gravity from gravitational Cherenkov radiation*, *JHEP* **09** (2001) 023 [hep-ph/0106220].
- [151] D. Blas, M. M. Ivanov, I. Sawicki and S. Sibiryakov, *On constraining the speed of gravitational waves following GW150914*, *JETP Lett.* **103** (2016) 624 [1602.04188].

- [152] N. Cornish, D. Blas and G. Nardini, *Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017) 161102 [1707.06101].
- [153] A. G. Riess et al., *A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant*, *Astrophys. J.* **826** (2016) 56 [1604.01424].
- [154] M. Cantiello et al., *A Precise Distance to the Host Galaxy of the Binary Neutron Star Merger GW170817 Using Surface Brightness Fluctuations*, *Astrophys. J.* **854** (2018) L31 [1801.06080].
- [155] 2DFGRS collaboration, *The 2dF Galaxy Redshift Survey: Spectra and redshifts*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **328** (2001) 1039 [astro-ph/0106498].
- [156] G. Huetsi, *Acoustic oscillations in the sdss dr4 luminous red galaxy sample power spectrum*, *Astron. Astrophys.* **449** (2006) 891 [astro-ph/0512201].
- [157] M. Rezaei, *Observational constraints on the oscillating dark energy cosmologies*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **485** (2019) 550 [1902.04776].
- [158] R. T. Cox, *Probability, frequency and reasonable expectation*, *American journal of physics* **14** (1946) 1.
- [159] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang and J. Goodman, *emcee: The MCMC Hammer*, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **125** (2013) 306 [1202.3665].
- [160] C. Cutler and D. E. Holz, *Ultra-high precision cosmology from gravitational waves*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 104009 [0906.3752].
- [161] R. Schneider, V. Ferrari, S. Matarrese and S. F. Portegies Zwart, *Gravitational waves from cosmological compact binaries*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **324** (2001) 797 [astro-ph/0002055].
- [162] J.-H. He, B. Wang and E. Abdalla, *Stability of the curvature perturbation in dark sectors' mutual interacting models*, *Phys. Lett.* **B671** (2009) 139 [0807.3471].
- [163] M. B. Gavela, D. Hernandez, L. Lopez Honorez, O. Mena and S. Rigolin, *Dark coupling*, *JCAP* **0907** (2009) 034 [0901.1611].

- [164] R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin et al., *SPECTRA AND HUBBLE SPACE TELESCOPE LIGHT CURVES OF SIX TYPE Ia SUPERNOVAE AT $0.511 < z_i < 1.12$ AND THE UNION2 COMPILATION*Based in part on observations made with the NASA/ESA Hubble Space Telescope, obtained from the data archive at the Space Telescope Science Institute (STScI). STScI is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy (AURA), Inc. under the NASA contract NAS 5-26555. The observations are associated with programs HST-GO-08585 and HST-GO-09075. Based, in part, on observations obtained at the ESO La Silla Paranal Observatory (ESO programs 67. A-0361 and 169. A-0382). Based, in part, on observations obtained at the Cerro-Tololo Inter-American Observatory (CTIO), National Optical Astronomy Observatory (NOAO). Based on observations obtained at the Canada-France-Hawaii Telescope (CFHT). Based, in part, on observations obtained at the Gemini Observatory (Gemini programs GN-2001A-SV-19 and GN-2002A-Q-31). Based, in part on observations obtained at the Subaru Telescope. Based, in part, on data that were obtained at the WM Keck Observatory., *The Astrophysical Journal* **716** (2010) 712.
- [165] M. Hicken, W. M. Wood-Vasey, S. Blondin et al., *Improved dark energy constraints from 100 new CfA supernova type Ia light curves*, *The Astrophysical Journal* **700** (2009) 1097.
- [166] M. Betoule, R. Kessler, J. Guy et al., *Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples*, *Astronomy & Astrophysics* **568** (2014) A22.
- [167] D. M. Scolnic et al., *The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample*, *Astrophys. J.* **859** (2018) 101 [1710.00845].
- [168] C. Zhang, H. Zhang, S. Yuan, T.-J. Zhang and Y.-C. Sun, *Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven*, *Res. Astron. Astrophys.* **14** (2014) 1221 [1207.4541].

- [169] M. Moresco, R. Jimenez, L. Verde, A. Cimatti, L. Pozzetti, C. Maraston et al., *Constraining the time evolution of dark energy, curvature and neutrino properties with cosmic chronometers*, *JCAP* **1612** (2016) 039 [1604.00183].
- [170] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu and D. Stern, *Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and the CMB*, *Astrophys. J.* **593** (2003) 622 [astro-ph/0302560].
- [171] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski and S. A. Stanford, *Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010** (2010) 008.
- [172] M. Moresco et al., *Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z \approx 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers*, *JCAP* **1208** (2012) 006 [1201.3609].
- [173] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, *Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential*, *Phys. Rev.* **D71** (2005) 123001 [astro-ph/0412269].
- [174] R. Jimenez and A. Loeb, *Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages*, *Astrophys. J.* **573** (2002) 37 [astro-ph/0106145].
- [175] D. J. Eisenstein, W. Hu and M. Tegmark, *Cosmic complementarity: $H(0)$ and Ω_m from combining CMB experiments and redshift surveys*, *Astrophys. J.* **504** (1998) L57 [astro-ph/9805239].
- [176] SDSS collaboration, *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies*, *Astrophys. J.* **633** (2005) 560 [astro-ph/0501171].
- [177] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell et al., *The 6dF Galaxy Survey: Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **416** (2011) 3017 [1106.3366].

- [178] A. J. Ross, L. Samushia, C. Howlett, W. J. Percival, A. Burden and M. Manera, *The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample ? I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$* , *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **449** (2015) 835 [[1409.3242](#)].
- [179] BOSS collaboration, *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **441** (2014) 24 [[1312.4877](#)].
- [180] BOSS collaboration, *Baryon acoustic oscillations in the Ly? forest of BOSS DR11 quasars*, *Astron. Astrophys.* **574** (2015) A59 [[1404.1801](#)].
- [181] BOSS collaboration, *Quasar-Lyman α Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations*, *JCAP* **1405** (2014) 027 [[1311.1767](#)].
- [182] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018.