

# 高等动力学——作业

- 姓名：李融冰
- 学号：3120250024

## P 6.36

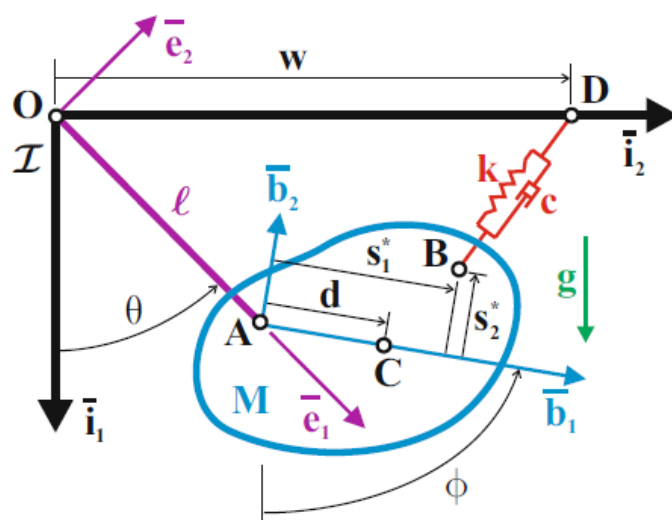


图 1: P6.36 题图

### (1) 画自由体图 (FBD)

取分离刚体，其受力有：杆的轴向力  $T$ ；重力  $mg$ ；弹簧弹力  $F_k$ ；阻尼器的阻力  $F_c$ 。受力图如下：

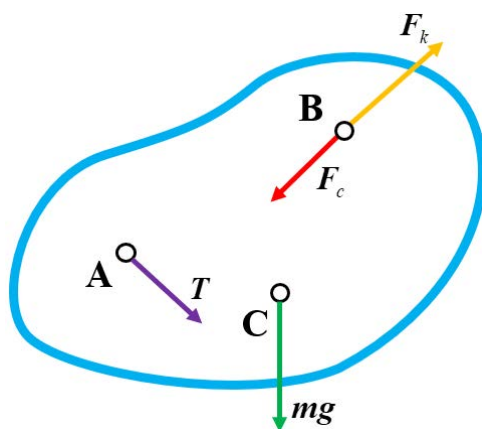


图 2: 受力分析图

## (2) 推导动力学方程

系统共两个自由度，取  $\theta$  和  $\phi$  作为广义坐标，首先，可以推导质心距离 OD 面的距离为

$$h = l \cos \theta + d \cos \phi \quad (1)$$

然后，考虑质心速度为

$$\vec{v}_C = -(l\dot{\theta} \sin \theta + d\dot{\phi} \sin \phi)\vec{i}_1 + (l\dot{\theta} \cos \theta + d\dot{\phi} \cos \phi)\vec{i}_2 \quad (2)$$

刚体角速度大小为

$$\omega = \dot{\phi} \quad (3)$$

接下来，考虑向量  $\vec{BD}$ ，根据

$$\vec{OA} = l \cos \theta \vec{i}_1 + l \sin \theta \vec{i}_2 \quad (4)$$

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{bmatrix} = (s_1^* \cos \phi - s_2^* \sin \phi)\vec{i}_1 + (s_1^* \sin \phi + s_2^* \cos \phi)\vec{i}_2 \quad (5)$$

$$\vec{OD} = w\vec{i}_2 \quad (6)$$

根据向量加法，可知

$$\begin{aligned} \vec{BD} &= -\vec{AB} - \vec{OA} + \vec{OD} \\ &= (-s_1^* \cos \phi + s_2^* \sin \phi - l \cos \theta)\vec{i}_1 + (-s_1^* \sin \phi - s_2^* \cos \phi - l \sin \theta + w)\vec{i}_2 \end{aligned} \quad (7)$$

因此，BD 长度为

$$|BD| = \sqrt{(-s_1^* \cos \phi + s_2^* \sin \phi - l \cos \theta)^2 + (-s_1^* \sin \phi - s_2^* \cos \phi - l \sin \theta + w)^2} \quad (8)$$

而 B 点处的速度矢量为

$$\vec{v}_B = (-l\dot{\theta} \sin \theta - s_1^*\dot{\phi} \sin \phi - s_2^*\dot{\phi} \cos \phi)\vec{i}_1 + (l\dot{\theta} \cos \theta + s_1^*\dot{\phi} \cos \phi - s_2^*\dot{\phi} \sin \phi)\vec{i}_2 \quad (9)$$

沿阻尼器方向的分量为

$$\begin{aligned} v_{Bd} &= \vec{v}_B \cdot \frac{\vec{BD}}{|BD|} \\ &= \frac{1}{|BD|} \left[ (l\dot{\theta} \sin \theta + s_1^*\dot{\phi} \sin \phi + s_2^*\dot{\phi} \cos \phi)(s_1^* \cos \phi - s_2^* \sin \phi + l \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + (l\dot{\theta} \cos \theta + s_1^*\dot{\phi} \cos \phi - s_2^*\dot{\phi} \sin \phi)(-s_1^* \sin \phi - s_2^* \cos \phi - l \sin \theta + w) \right] \\ &= \dots \quad (\text{此处省略部分中间化简步骤，以原图为准}) \end{aligned} \quad (10)$$

综上，刚体块动能为

$$T = \frac{1}{2}m \left[ l^2\dot{\theta}^2 + d^2\dot{\phi}^2 + 2ld\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right] + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 \quad (11)$$

系统的总势能为

$$\begin{aligned}
V &= -mg(l \cos \theta + d \cos \phi) + \frac{1}{2}k|BD|^2 \\
&= -mg(l \cos \theta + d \cos \phi) \\
&\quad + \frac{1}{2}k \left[ w^2 - 2w(s_1^* \sin \phi + s_2^* \cos \phi + l \sin \theta) + l^2 \right. \\
&\quad \left. + s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_1^* l \cos(\theta - \phi) + s_2^* l \sin(\theta - \phi) \right]
\end{aligned} \tag{12}$$

拉格朗日量为

$$\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{1}{2}m \left[ l^2 \dot{\theta}^2 + d^2 \dot{\phi}^2 + 2ld\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 + mg(l \cos \theta + d \cos \phi) \\
&\quad - \frac{1}{2}k \left[ w^2 - 2w(s_1^* \sin \phi + s_2^* \cos \phi + l \sin \theta) + l^2 \right. \\
&\quad \left. + s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_1^* l \cos(\theta - \phi) + s_2^* l \sin(\theta - \phi) \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

针对广义坐标的阻尼力

$$Q_\theta = -cv_{Bd} \frac{l \sin \theta - l \cos \theta + w}{|BD|} \tag{14}$$

$$Q_\phi = -cv_{Bd} \frac{s_1^* \sin \phi - s_1^* \cos \phi + s_2^* \cos \phi + s_2^* \sin \phi}{|BD|} \tag{15}$$

根据拉格朗日方程，得到系统的动力学方程为

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m \left[ l^2 \ddot{\theta} + ld\ddot{\phi} \cos(\theta - \phi) - ld\dot{\phi}(\dot{\theta} - \dot{\phi}) \sin(\theta - \phi) \right] \\
&\quad + ld\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) + mgl \sin \theta \\
&\quad + \frac{1}{2} [2wl \cos \theta - s_1^* l \sin(\theta - \phi) + s_2^* l \cos(\theta - \phi)] \\
&= Q_\theta
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= m \left[ d^2 \ddot{\phi} + ld\ddot{\theta} \cos(\theta - \phi) + ld\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) \right] + J\ddot{\phi} \\
&\quad - mld\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\theta - \phi) + mgd \sin \phi \\
&\quad + \frac{1}{2} [-2w(s_1^* \cos \phi - s_2^* \sin \phi) + s_1^* l \sin(\theta - \phi) - s_2^* l \cos(\theta - \phi)] \\
&= Q_\phi
\end{aligned} \tag{17}$$

### (3) 求杆的载荷

在每一个运动瞬时，与杆方向重合的空间固定向量为

$$\vec{r} = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{i}_2 \tag{18}$$

刚体质心的速度向量如式 (2) 所示, 因此, 每一时刻, 质心加速度为

$$\begin{aligned}\vec{a}_C = & -(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta + d\ddot{\phi} \sin \phi + d\dot{\phi}^2 \cos \phi)\vec{i}_1 \\ & + (l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta + d\ddot{\phi} \cos \phi - d\dot{\phi}^2 \sin \phi)\vec{i}_2\end{aligned}\quad (19)$$

因此, 质心加速度在杆方向上的投影为

$$a_r = -l\dot{\theta}^2 \cos(\theta - \phi) + d\ddot{\phi} \sin(\theta - \phi) - d\dot{\phi}^2 \cos(\theta - \phi) \quad (20)$$

重力在杆方向上的分量为

$$G_r = mg \cos \theta \quad (21)$$

式 (7) 所示的  $BD$  在杆方向上的投影为

$$BD_r = -s_1^* \cos(\phi - \theta) + s_2^* \sin(\phi - \theta) - l + w \sin \theta \quad (22)$$

因此, 弹簧力与阻尼力在杆方向上的投影分别为

$$F_{kr} = kBD_r \quad (23)$$

$$F_{cr} = -cv_{Bd} \frac{BD_r}{|BD|} \quad (24)$$

根据达朗贝尔原理, 杆的载荷为 (拉正压负)

$$T_r = ma_r + G_r + F_{kr} + F_{cr} \quad (25)$$

## P 6.37

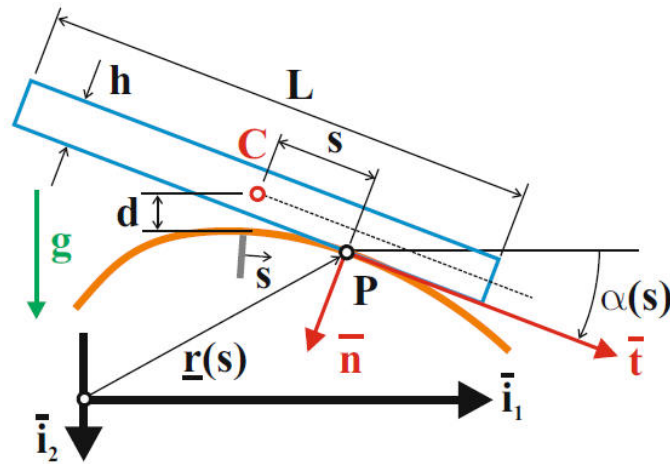


图 3: P6.37 题图

### (1) 考虑法向接触力做功

法向力的方向始终与接触点位移的方向始终相互垂直, 因此, 法向接触力不做功。

## (2) 考虑切向摩擦力做功

由于杆在曲面上没有滑动，因此，切向摩擦力与接触点无相对滑动位移，摩擦力不做功。

## (3) 系统的动能变化

根据上述讨论，法向接触力和切向摩擦力均不做功，因此，杆的动能改变完全由重力做功引起。因此，当杆的质心高度从  $d_1$  变化为  $d_2$  时，系统的动能变化为

$$\Delta K = Mg(d_1 - d_2)$$

由上式可见，系统的动能变化仅仅由系统的质心高度变化决定。

## (4) 机械能是否守恒

系统的运动过程中只有重力做功，能量在杆的动能与重力势能之间相互转化，因此机械能守恒。

## (5) 角动量是否守恒

在系统运动的某一时刻，杆所受合力对接触点的力矩，等于重力的力矩不等于 0，因此，杆的角动量不守恒。

## P 6.40

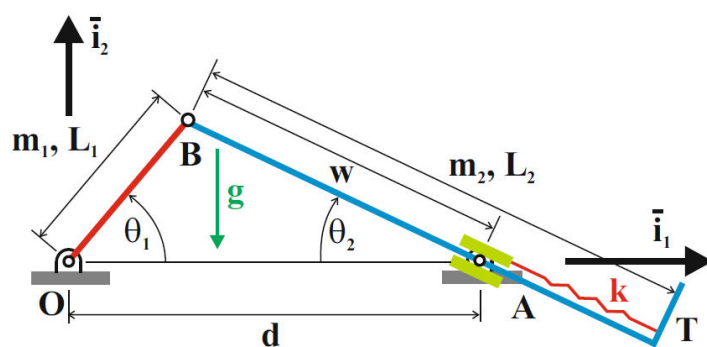


图 4: P6.40 题图

## (1) 推导动力学方程

系统只有一个自由度，因此，选择广义坐标  $\theta_1$ 。左侧杆的角速度为

$$\omega_L = \dot{\theta}_1 \quad (26)$$

B 点处瞬时速度沿杆分量大小为

$$\dot{\theta}_1 L_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (27)$$

B 点处瞬时速度垂直于杆分量大小为

$$\dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (28)$$

在 A 点处，瞬时速度只有沿杆分量，由此可得，右侧杆的角速度为

$$\omega_R = \dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{w} \quad (29)$$

根据余弦定理得到

$$w = \sqrt{L_1^2 + d^2 - 2L_1 d \cos \theta_1} \quad (30)$$

从而得到导数关系

$$\frac{\partial w}{\partial \theta_1} = \frac{L_1 d \sin \theta_1}{w} \quad (31)$$

根据正弦定理，可得到

$$\sin \theta_2 = \frac{L_1}{w} \sin \theta_1 \quad (32)$$

由于  $\theta_1, \theta_2$  均为三角形内角，因此

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{\frac{d^2}{w^2} - \frac{2L_1 d}{w^2} \cos \theta_1 + \frac{L_1^2}{w^2} \cos^2 \theta_1} = \frac{d}{w} - \frac{L_1}{w} \cos \theta_1 \quad (33)$$

由此得到导数关系

$$\dot{\theta}_2 = \frac{L_1 \cos \theta_1}{w \cos \theta_2} \dot{\theta}_1 - \frac{d \sin^2 \theta_1}{w \cos \theta_2} \dot{\theta}_1 = \dots = \frac{L_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{w} \dot{\theta}_1 \quad (34)$$

上式与式 (29) 的结果一致。右侧杆质心速度大小为

$$v_c = \sqrt{\dot{\theta}_1^2 L_1^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) + \left(w - \frac{L_2}{2}\right)^2 \frac{\dot{\theta}_1^2 L_1^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{w^2}} \quad (35)$$

因此系统的总动能为

$$T = \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 \frac{L_2^2 L_1^2}{w^2} \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} m_2 \frac{L_2 L_1^2}{w} \cos^2(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \quad (36)$$

系统的势能为

$$V = m_1 g \frac{L_1 \sin \theta_1}{2} + m_2 g \left(w - \frac{L_2}{2}\right) \sin \theta_2 + \frac{1}{2} k (L_2 - w)^2 \quad (37)$$

系统的拉格朗日量  $L = T - V$ ，代入拉格朗日方程得到（公式较长，从略，详见原文档 Eq 38）。

## （2）无量纲化与数值求解

将式（38）左右两侧同乘下式

$$\frac{1}{(m_1 + m_2)L_1^2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad (38)$$

从而得到如下无量纲方程（Eq 40）。

## （3）角度 $\theta_1, \theta_2$ 的变化



图 5: \*  
角度变化

## （3）无量纲角速度 $\theta'_1, \theta'_2$ 的变化

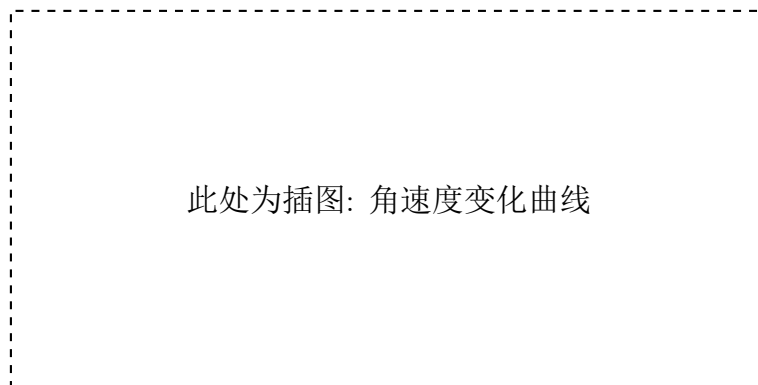


图 6: \*  
角速度变化

#### (4) 无量纲角加速度 $\theta_1'', \theta_2''$ 的变化

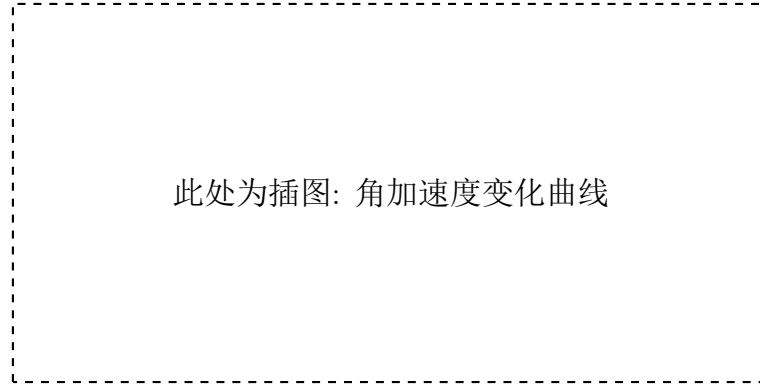


图 7: \*  
角加速度变化

角加速度  $\theta_2''$  按照下式计算为:

$$\theta_2'' = \frac{\theta_1'' \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\bar{w}} - \dots \quad (\text{Eq 41}) \quad (39)$$

#### (5) 弹簧伸长量 $\bar{\Delta}$ 的变化

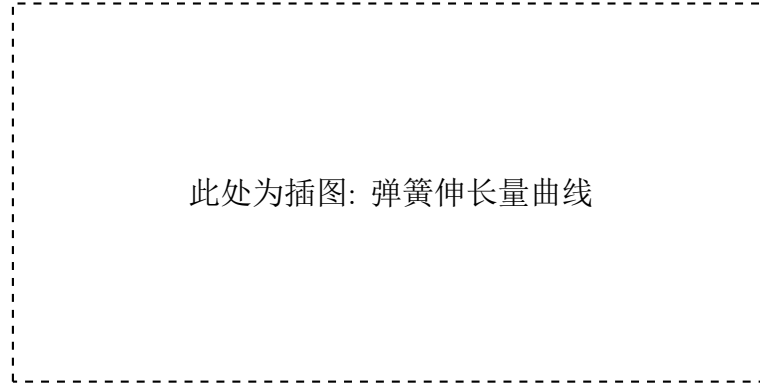


图 8: \*  
弹簧伸长量变化

#### (6) 无量纲摩擦力 $\bar{F}^f$ 和反力 $\bar{S}$ 的变化

$$\bar{F}^f = 2\xi\theta_1' \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (40)$$

$$\bar{S} = \frac{\mu_2 \bar{L}_2^2 \theta_2''}{3\bar{w}} - \dots \quad (\text{Eq 43}) \quad (41)$$





图 9: \*  
摩擦力和反力

### (7) 耗散能量的变化

$$D_k = \frac{2d \sin\left(\frac{\theta_{1,k}^2 - \theta_{1,k-1}^2}{2}\right)}{w_k + w_{k-1}} \xi(\theta'_{1,k} + \theta'_{1,k-1}) \sin \dots \quad (\text{Eq 44}) \quad (42)$$

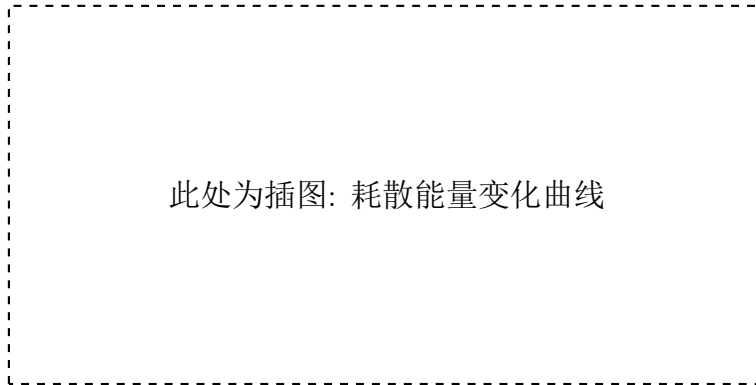


图 10: \*  
耗散能量变化

## (8) 能量守恒验证



图 11: \*  
各能量变化

## P 10.17

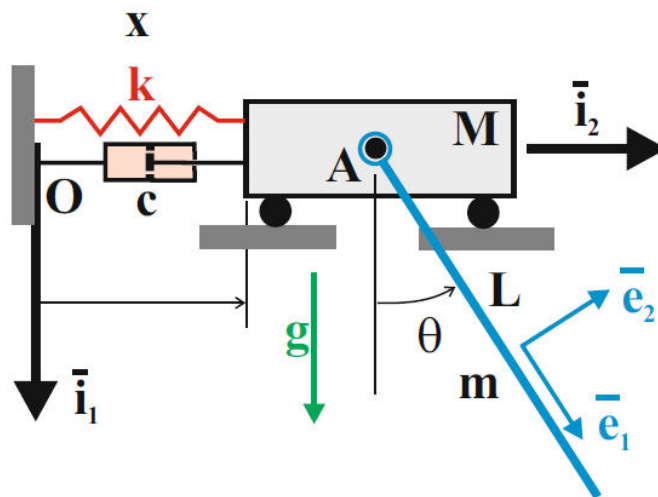


图 12: P10.17 题图

## (1) 推导动力学方程

系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_{A1} - \frac{1}{2}\dot{\theta}L\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_{A2} + \frac{1}{2}\dot{\theta}L\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{24}mL^2\dot{\theta}^2 \quad (43)$$

系统的势能为

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mgL\cos\theta - mgr_{A1} \quad (44)$$

拉格朗日量的变分为

$$\delta L = \dots \quad (\text{Eq 47}) \quad (45)$$

阻尼力虚功为

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x \quad (46)$$

拉格朗日乘子项为

$$\delta(C\lambda) = \delta r_{A1}\lambda_1 + (\delta r_{A2} - \delta x)\lambda_2 \quad (47)$$

根据哈密顿变分原理

$$\int_{t_0}^{t_f} (\delta L + \delta W + \delta(C\lambda))dt = 0 \quad (48)$$

得到动力学方程为（矩阵形式）：

$$\begin{bmatrix} M & & & & 1 \\ & \frac{1}{3}mL^2 & -\frac{1}{2}L\sin\theta m & \frac{1}{2}L\cos\theta m & \\ & -\frac{1}{2}mL\sin\theta & m & & -1 \\ & \frac{1}{2}mL\cos\theta & & m & -1 \\ & & -1 & & \\ 1 & & & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{r}_{A1} \\ \ddot{r}_{A2} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kx - c\dot{x} \\ -\frac{1}{2}mgL\sin\theta \\ \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2L\cos\theta + mg \\ \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

## （2）说明拉格朗日乘子的物理意义

拉格朗日乘子的物理意义为铰接点 A 处，确保杆与质量块铰接在一起的约束内力，并且  $\lambda_1$  对应  $\vec{i}_1$  方向的约束力分量， $\lambda_2$  对应  $\vec{i}_2$  方向的约束力分量。

## （3）绘制质量块位移 $x$ 的变化图



图 13: \*  
小车位移随时间变化

#### (4) 绘制摆杆角度 $\theta$ 的变化图



图 14: \*  
杆角度随时间变化

#### (5) 绘制杆端点的轨迹图



图 15: \*  
杆端点轨迹

(6) 绘制质量块速度  $\dot{x}$  的变化图



图 16: \*  
小车速度随时间变化

(7) 绘制杆摆动角速度  $\dot{\theta}$  的变化图




图 17: \*  
杆角速度随时间变化

(8) 绘制系统的能量变化曲线

系统的动能和势能可以直接由每一时刻的位置、速度、加速度进行计算，而系统在两个时刻之间的阻尼耗散能量可以由以下公式近似计算

$$D_k = \frac{\dot{x}_k + \dot{x}_{k-1}}{2} (x_k - x_{k-1}) \quad (50)$$




此处为插图: 能量变化曲线

图 18: \*  
能量随时间变化

从图中可见，系统能量守恒，耗散能量不断增加。

#### (9) 绘制 A 点处内力变化



此处为插图: 内力变化曲线

图 19: \*  
内力随时间变化