Уравнение пьезопроводности

Уравнение пьезопроводности – основное уравнение подземной гидродинамики, которое описывает процесс фильтрации жидкости в пористых средах.
Уравнение пьезопроводности строится на трёх уравнениях: на уравнении неразрывности потока (т.е. уравнении переноса массы, записанном в дифференциальной форме), на законе Дарси и на соотношении для сжимаемости флюида.

Набор исходных уравнений для вывода уравнения пьезопроводности:

- неразрывность потока

$$\frac{\partial\left(\rho_f\,\varphi\right)}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho_f\,\varphi\,\boldsymbol{v_f}\right)=q_f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

  где ρ_f – истинная плотность флюида; φ – пористость; $\boldsymbol{v_f}$ – истинная скорость флюида; $q_f(\boldsymbol{x})$ – источниковое слагаемое

- закон Дарси

$$\boldsymbol{W}=-\frac{k}{\mu_f}\cdot\boldsymbol{\nabla}p, \tag{2}$$

  где $\boldsymbol{W}=\varphi\big(\boldsymbol{v_f}-\boldsymbol{v_s}\big)$ – потоковая скорость флюида; k – проницаемость пласта; μ_f – вязкость флюида; ∇p – градиент давления

- соотношение на сжимаемость флюида

$$p-p_0=K_f\frac{\rho_f-\rho_f^0}{\rho_f^0}, \tag{3}$$

  где K_f – объёмный модуль упругости флюида (величина, обратная коэффициенту сжимаемости)

Этих трёх уравнений достаточно, чтобы вывести уравнение пьезопроводности в случае недеформируемого пласта.
Если пласт упругий, то дополнительно необходимо использовать 3 уравнения пороупругости, накладывающие условия на тензор полных напряжений, тензор полных деформаций и пористость пласта.
Далее будет представлено 2 вывода уравнения пьезопроводности в случае недеформируемого пласта и 1 вывод уравнения пьезопроводности в случае упругого пласта.

Вывод уравнения пьезопроводности в векторной форме

В предположении неподвижности скелета ($\boldsymbol{v_s} \approx \mathbf{0}$ и $\varphi(t) = \text{const}$) верно равенство $\boldsymbol{W} \approx \varphi\, \boldsymbol{v_f}$. Подставляя это выражение в закон Дарси (2), получаем:

$$\varphi\, \boldsymbol{v_f} = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \tag{4}$$

Условие сжимаемости флюида (3) перепишем в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K_f}{\rho_f^0} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \tag{5}$$

Учитывая предположение о неподвижности скелета, перепишем уравнение неразрывности потока (1):

$$\varphi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho_f\, \varphi\, \boldsymbol{v_f}\right) = q_f(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

Подставляя (4) и (5) в (6), при отсутствии источникового слагаемого ($q_f(\boldsymbol{x}) = 0$) получаем:

$$\varphi \frac{\rho_f^0}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\rho_f \frac{k}{\mu_f} \boldsymbol{\nabla} p\right) = 0 \tag{7}$$

При дополнительном условии слабосжимаемости флюида ($\rho_f \approx \rho_f^0 = \text{const}$) получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k K_f}{\mu_f\, \varphi} \boldsymbol{\nabla}^2 p \tag{8}$$

Это уравнение пьезопроводности (без упругости пласта), полученное в приближении слабосжимаемого флюида, неподвижного и недеформируемого пласта.

Введя коэффициент пьезопроводности

$$\kappa = \frac{k K_f}{\mu_f\, \varphi} = \frac{k}{\mu_f c_f}, \tag{9}$$

где $c_f = \varphi / K_f$ – сжимаемость флюида, можем переписать уравнение пьезопроводности в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa\, \boldsymbol{\nabla}^2 p \tag{10}$$

Коэффициент пьезопроводности пласта κ – коэффициент, характеризующий темпы распределения пластового давления в условиях упругого режима, равный отношению проницаемости пласта к произведению вязкости жидкости и её сжимаемости.

Вывод уравнения пьезопроводности в покомпонентной форме с обезразмериванием (недеформируемый пласт, но учитываем зависимость пористости от давления)

Запишем **ЗСМ для флюида**:

$$\frac{\partial r_f}{\partial t} + \partial_i \Big(r_f \, v_i^f \Big) = 0, \tag{11}$$

где $r_f = \varphi \rho_f$ – эффективная плотность флюида; v_i^f – истинная скорость флюида.

Закон Дарси в дифференциальной форме:

$$W_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \, \partial_j p, \tag{12}$$

где $W_i = \varphi v_i^f$ – потоковая относительная скорость флюида (при неподвижном скелете), k_{ij} – тензор абсолютной проницаемости пласта, μ – вязкость флюида.

Учитывая связь эффективной и истинной плотностей ($r_f = \varphi \rho_f$), перепишем ЗСМ для флюида:

$$\frac{\partial \big(\rho_f \, \varphi \big)}{\partial t} + \partial_i \Big(\rho_f \, \varphi v_i^f \Big) = 0 \tag{13}$$

Подставляя (12) в (13), получаем:

$$\frac{\partial \big(\rho_f \, \varphi \big)}{\partial t} - \partial_i \left(\rho_f \, \frac{k_{ij}}{\mu} \, \partial_j p \right) = 0 \tag{14}$$

Замыкающее соотношение (**связь плотности флюида и давления**):

$$\rho_f = \rho_f^0 \left(1 + c_f \left(p - p_0 \right) \right), \tag{15}$$

где c_f – сжимаемость флюида (1/Па).

Замыкающее соотношение (**связь пористости и давления**):

$$\varphi = \varphi^0 + c_{\text{п}} \left(p - p_0 \right), \tag{16}$$

где $c_{\text{п}}$ – сжимаемость пор (не равно сжимаемости породы).

Производные по времени и пространству замыкающего соотношения (15) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t} \tag{17}$$

$$\partial_i \rho_f = c_f \rho_f^0 \partial_i p \tag{18}$$

А производные по времени и пространству замыкающего соотношения (16) примут вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_{\text{п}} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{19}$$

$$\partial_i \varphi = c_{\text{п}} \partial_i p \tag{20}$$

Раскрывая производные произведений в (14), получаем:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t}\varphi + \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\,\partial_j p\,\partial_i \rho_f - \rho_f\,\partial_j p\;\partial_i\!\left(\frac{k_{ij}}{\mu}\right) - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu}\left(\partial_i \partial_j p\right) = 0 \tag{21}$$

Подставляя (17), (18), (19) и (20) в (21), получаем:

$$\begin{aligned} c_f\,\rho_f^0 \frac{\partial p}{\partial t}\varphi + \rho_f c_{\text{п}} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\,\partial_j p\, c_f\,\rho_f^0\,\partial_i p - \frac{\rho_f}{\mu}\partial_j p\,\partial_i k_{ij} + \\ + \rho_f\,\partial_j p\, k_{ij}\,\frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{1}{\mu^2}\partial_i p - \rho_f \frac{k_{ij}}{\mu}\big(\partial_i \partial_j p\big) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Перед анализом физических уравнений всегда делают масштабный анализ, чтобы понять, какие слагаемые в уравнении важны, а какие не важны (пример: уравнение Навье-Стокса с числами Струхаля, Эйлера, Рейнольдса, Фруда).

Замечание. ГДМ симуляторы не решают уравнение пьезопроводности в классическом виде, а решают закон сохранения массы, в который они подставляют закон Дарси.

Далее необходимо выделить характерные масштабные факторы, обезразмерив каждую из функций в уравнении.

Введём безразмерные давление $\tilde{p}$, расстояние $\tilde{r}$, проницаемость $\tilde{k}_{ij}$ и вязкость $\tilde{\mu}$ такие, что:

$$p = \tilde{p} \cdot p_0, \;\; \vec{r} = \tilde{r} \cdot L, \;\; k_{ij} = \tilde{k}_{ij} \cdot k_0, \;\; \mu = \tilde{\mu} \cdot \mu_0, \tag{23}$$

где p_0 – пластовое давление, L – некое характерное расстояние (например, расстояние между скважинами), k_0 – некая характерная проницаемость, μ_0 – некая характерная вязкость.

Все безразмерные функции (с волной) порядка единицы.

Перепишем (22) в введённых безразмерных величинах, разделив обе части этого уравнения на ρ_f^0:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\cdot c_{\text{п}}\right) - \frac{k_0}{\mu_0}\frac{p_0^2}{L^2}c_f\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{k_0\,p_0}{\mu_0 L^2}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} +$$
$$+\frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{p_0\,k_0}{L^2\mu_0}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{k}_{ij}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{p}}\frac{1}{\tilde{\mu}^2}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{k_0}{\mu_0}\frac{p_0}{L^2}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\left(\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p}\right) = 0 \quad (24)$$

Вынесли все масштабные множители. Далее делим обе части уравнения на множитель перед старшей производной $\left(\text{на } \frac{k_0\,p_0}{\mu_0\,L^2}\right)$, т.е. обезразмериваем уравнение:

$$\frac{\mu_0 L^2}{k_0 p_0}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\left(\varphi c_f + \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\cdot c_{\text{п}}\right) - p_0 c_f\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} +$$
$$+\frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{p}}\frac{1}{\tilde{\mu}^2}\tilde{k}_{ij}\,\tilde{\partial}_j\tilde{p}\,\tilde{\partial}_i\tilde{p} - \frac{\rho_f}{\rho_f^0}\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\left(\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p}\right) = 0 \quad (25)$$

Сделаем 3 важных приближения:

1. $p_0 c_f \ll 1$ (прикинем: сжимаемость воды порядка 10^{-5} атм$^{-1}$ $= 10^{-10}$ Па$^{-1}$; характерные значения давлений на глубинах, равных нескольким километрам, составляют сотни атмосфер; таким образом, произведение порядка 10^{-3}, что много меньше единицы; но такое приближение не работает для газа: для него рассматриваемое произведение порядка единицы); это приближение фактически равносильно приближению $\rho_f \approx \rho_f^0$;

2. $\tilde{\partial}_i\tilde{k}_{ij} \ll 1$ (считаем, что на характерном масштабе задачи по данному направлению проницаемость изменяется незначительно, не больше 10 процентов);

3. $\dfrac{\partial\tilde{\mu}}{\partial\tilde{p}} \ll 1$ (считаем, что отмасштабированный график проницаемости от давления пологий – этот факт подтверждается экспериментально – вязкость слабо зависит от давления)

Тогда уравнение (25) перепишется в следующем виде (убрали слагаемые с пренебрежимо малыми множителями в рамках сделанных приближений):

$$\frac{\mu_0 L^2}{k_0 p_0}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\underbrace{\left(\varphi c_f + c_{\text{п}}\right)}_{c_t} - \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p} = 0 \quad (26)$$

Равносильно:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\underbrace{\left(\varphi c_f + c_\text{п}\right)}_{c_t} - \frac{k_0 p_0}{\mu_0 L^2}\cdot\frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\mu}}\,\tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\tilde{p} = 0 \tag{27}$$

Вернёмся от безразмерных функций с волной к обычным функциям:

$$\frac{\partial p}{\partial t}\underbrace{\left(\varphi c_f + c_\text{п}\right)}_{c_t} - \frac{k_{ij}}{\mu}\,\partial_i\partial_j p = 0 \tag{28}$$

(заметим, что если есть анизотропия проницаемости, то лапласиана в уравнении не будет; вместо него будет честный $\partial_i\partial_j p$).

Получаем классическое уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu c_t}\partial_i\partial_j p = 0, \tag{29}$$

где c_t – это полная сжимаемость.

Замечание. Но есть литература, в которой $c_t = c_f + \dfrac{c_\text{п}}{\varphi} = c_f + c_\text{породы}$, тогда уравнение пьезопроводности будет выглядеть так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_{ij}}{\mu\varphi c_t}\partial_i\partial_j p = 0 \tag{30}$$

Пусть тензор проницаемости изотропен $k_{ij} = k_0\cdot\delta_{ij}$, тогда:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t}\delta_{ij}\,\partial_i\partial_j p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k_0}{\mu c_t}\Delta p = 0 \tag{31}$$

(получили всем известный вид уравнения пьезопроводности).

Задача по моделированию фильтрации жидкости в пласте с помощью уравнения пьезопроводности.

Полубесконечный горизонтальный пористый пласт имеет вид прямоугольного параллелепипеда, все грани которого (кроме левой) непроницаемы для жидкости. Пласт насыщен жидкостью с коэффициентом объёмной сжимаемости $\beta = 1 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, давление которой во всех точках в начальный момент времени постоянно и равно $p_0 = 5$ МПа. На левой границе пласта давление в момент времени $t = 0$ мгновенно уменьшается до $p_e = 1$ МПа и в дальнейшем поддерживается постоянным.

Определить значение давления в момент времени $t = 100$ с в точке пласта, отстоящей на расстоянии $x = 10$ м от его левой границы, если зависимость скорости течения жидкости в пласте от давления описывается линейным законом Дарси. Известно, что пористость пласта $\varphi = 0.1$, проницаемость пласта $k = 10^{-14}$ м^2 и динамическая вязкость жидкости $\mu = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с

Решение задачи.

Решение задачи сводится к решению начально-краевой задачи для уравнения пьезопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = \overbrace{\left(\dfrac{k}{\varphi \mu \beta}\right)}^{\substack{\text{коэффициент} \\ \text{пьезопро-ти } \kappa}} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ p(x,0) = p_0 \, (\text{при } x \geqslant 0) \\ p(0,t) = p_e \, (\text{при } t > 0) \\ p(\infty, t) = p_0 \, (\text{при } t > 0) \end{cases} \tag{32}$$

Введём новую безразмерную переменную

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \tag{33}$$

и сведём задачу к нахождению давления p, зависящего только от новой переменной.

По правилу дифференцирования сложных функций получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dp}{d\xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right) \tag{34}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dp}{d\xi}\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\frac{dp}{d\xi}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\frac{d^2 p}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{4\kappa t}\frac{d^2 p}{d\xi^2} \tag{36}$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение пьезопроводности, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-2\cdot\xi\cdot\frac{dp}{d\xi} = \frac{d^2 p}{d\xi^2} \tag{37}$$

Начальные и граничные условия исходной начально-краевой задачи (32) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{cases} p|_{\xi=0} = p_e \\ p|_{\xi\to\infty} = p_0 \end{cases} \tag{38}$$

Для решения полученного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (37) введём новую переменную:

$$p_\xi = \frac{dp}{d\xi} \tag{39}$$

и перепишем уравнение (37) в следующем виде:

$$-2\cdot\xi\cdot p_\xi = \frac{dp_\xi}{d\xi} \tag{40}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\ln p_\xi = -\xi^2 + \ln C_1 \tag{41}$$

или

$$\frac{dp}{d\xi} = C_1 \exp\left(-\xi^2\right) \tag{42}$$

Интегрируя данное уравнение, получим общее решение дифференциального уравнения (37):

$$p = C_1 \cdot \int\limits_0^\xi \exp\left(-\xi^2\right) d\xi + C_2 \tag{43}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определим из условий (38):

$$\begin{cases} C_2 = p_e \\ \\ C_1 = \dfrac{p_0 - p_e}{\int\limits_0^\infty \exp\left(-\xi^2\right) d\xi} \end{cases} \tag{44}$$

Получаем следующее решение:

$$p = p_e + \frac{p_0 - p_e}{\int\limits_0^\infty \exp\left(-\xi^2\right) d\xi} \cdot \int\limits_0^\xi \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \tag{45}$$

Известно, что $\int\limits_0^\infty \exp\left(-\xi^2\right) d\xi = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, поэтому

$$p = p_e + \frac{2\left(p_0 - p_e\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^\xi \exp\left(-\xi^2\right) d\xi \tag{46}$$

Знаем, что $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\xi \exp\left(-\xi^2\right) d\xi = \operatorname{erf}\left(\xi\right)$ – это функция ошибок Гаусса, поэтому:

$$p = p_e + \left(p_0 - p_e\right) \operatorname{erf}\left(\xi\right) \tag{47}$$

или, подставляя выражение (33) для ξ, получаем:

$$p = p_e - \left(p_e - p_0\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\dfrac{k}{\varphi\mu\beta}\, t}}\right) \tag{48}$$

Подставляя в это выражение исходные данные задачи, получим, что давление в указанной точке и в указанный момент времени примерно равно 3.082 МПа.

Замечание. Но обычно уравнение пьезопроводности решают не аналитически, а численно, так как у реальных залежей геометрия гораздо более сложная.

Вывод уравнения пьезопроводности для «упругого пласта»

Для **упругого изотропного пласта** можем записать известные соотношения поро-упругости:

- на тензор полных напряжений

$$\boldsymbol{T} = \sigma^0 \boldsymbol{I} + (\lambda I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) - b\Delta p)\,\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{49}$$

  где $\boldsymbol{T}$ – тензор полных напряжений; $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор полных деформаций; $\lambda = K - 2G/3$ и $\mu = G$ – константы (параметры) Ляме; K – модуль всестороннего сжатия; G – модуль сдвига; $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$ – след тензора полных деформаций; b – константа Био; Δp – изменение давления; σ^0 – начальное напряжение

- на пористость

$$\varphi = \varphi_0 + bI_1(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{N}\Delta p, \tag{50}$$

  где φ_0 – начальная пористость; b – константа Био; $I_1(\boldsymbol{\varepsilon})$ – след тензора полных деформаций; N – модуль Био; Δp – изменение давления.

- условие равновесия

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} \tag{51}$$

Для **флюида** запишем:

- закон Дарси

$$\boldsymbol{W} = -\frac{k}{\mu_f} \cdot \boldsymbol{\nabla} p, \tag{52}$$

  где $\boldsymbol{W} = \varphi\left(\boldsymbol{v_f} - \boldsymbol{v_s}\right)$; k – проницаемость пласта; μ_f – вязкость флюида; $\boldsymbol{\nabla} p$ – градиент давления

- соотношение на сжимаемость флюида

$$p - p_0 = K_f \frac{\rho_f - \rho_f^0}{\rho_f^0}, \tag{53}$$

  где $\dfrac{1}{K_f}$ – сжимаемость флюида (K_f – объёмный модуль упругости флюида)

- уравнение неразрывности потока при отсутствии источникового слагаемого (уравнение переноса массы, записанное в дифференциальной форме):

$$\frac{\partial\left(\rho_f\,\varphi\right)}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho_f\,\varphi\,\boldsymbol{v_f}\right)=0 \tag{54}$$

Из **уравнения неразрывности** получаем:

$$\varphi_0\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\rho_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{W}+\rho_0\varphi_0\frac{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial t}=0, \tag{55}$$

где

$$\frac{\partial I_1(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial t}\equiv\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v_s} \tag{56}$$

А дальше через ряд свёрток и всяких операций получаем:

$$b\dot{I}_1(\boldsymbol{\varepsilon})+\left(\frac{1}{N}+\frac{\varphi_0}{K_f}\right)\dot{p}=\frac{k}{\mu_f}\boldsymbol{\nabla}^2p \tag{57}$$

В осесимметричном случае при условии отсутствия деформации на бесконечности получаем:

$$\dot{p}=a\boldsymbol{\nabla}^2p, \tag{58}$$

где

$$a=\frac{kM}{\mu_f}\text{ и }M=\frac{b\,(b+\varphi)}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{N}+\frac{\varphi}{K_f} \tag{59}$$