Модель Баклея-Леверетта

Исторически первой появилась не модель Баклея-Леверетта, а модель поршневого вытеснения.
Модель поршневого вытеснения далеко не совершенна и может быть использована для очень приближённых (оценочных) расчётов (например, для верхней оценки времени прихода фронта заводнения – фронт достигнет определённого положения не дольше, чем за время поршневого вытеснения).

Основные допущения модели поршневого вытеснения:
1) рассматривается несмешивающаяся фильтрация (т.е. существует явный раздел фаз);
2) жидкости и порода несжимаемы;
3) за фронтом вытеснения остаётся только остаточная нефтенасыщенность

При поршневом вытеснении граница фронта заводнения фактически определяется из накопленной закачки воды.

Достаточно быстро заметили, что с приходом фронта воды обводнились не сразу до 100%, а продолжаем добывать нефть. Это говорит о том, что несмотря на прорыв фронта за этим фронтом осталось достаточно много запасов (не только остаточная нефтенасыщенность). И эти запасы постепенно вымываются. Чтобы учесть подобное поведение, была разработана **модель Баклея-Леверетта**.

Основные допущения модели Баклея-Леверетта:
1) рассматривается несмешивающаяся фильтрация (т.е. существует явный раздел фаз);
2) жидкости и порода несжимаемы (нет зависимости плотностей флюидов и пористости от давления и времени);
3) жидкости движутся в соответствии с фазовыми проницаемостями (т.е. для каждой жидкости выполняется закон Дарси, но у каждой из жидкостей своя эффективная проницаемость);
4) капиллярное давление равно нулю (т.е. $p_o = p_w = p$)
С учётом введённых допущений рассмотрим двухфазную фильтрацию системы вода-нефть в пористой среде.
Закон Дарси для нефти (ось x направлена вдоль направления фильтрации; силами

гравитации пренебрегаем):

$$\varphi \cdot v_o = -\frac{k \cdot k_{ro}(S_w)}{\mu_o} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

Закон Дарси для воды (ось x направлена вдоль направления фильтрации; силами гравитации пренебрегаем):

$$\varphi \cdot v_w = -\frac{k \cdot k_{rw}(S_w)}{\mu_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

Из (1) и (2):

$$\frac{v_w}{v_o + v_w} = \frac{\dfrac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}}{\dfrac{k_{ro}(S_w)}{\mu_o} + \dfrac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w}} = \frac{1}{1 + \dfrac{k_{ro}\mu_w}{k_{rw}\mu_o}} \stackrel{\text{def}}{=} f_w(S_w) \tag{3}$$

получаем определение **функции Баклея-Леверетта** $f_w(S_w)$ (зависит от насыщенности, так как относительные фазовые проницаемости, входящие в определение, зависят от насыщенности).

Закон сохранения массы (неразрывности потока) для нефти (используем допущение о несжимаемости нефти; ось x направлена вдоль направления фильтрации):

$$\varphi\rho_o \frac{\partial (1 - S_w)}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

Закон сохранения массы (неразрывности потока) для воды (используем допущение о несжимаемости воды; ось x направлена вдоль направления фильтрации):

$$\varphi\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} + \rho_w \frac{\partial v_w}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Складывая (4) и (5), получаем:

$$\frac{\partial (v_o + v_w)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

(т.е. суммарная скорость двухфазного потока не зависит от координаты x: либо является постоянной величиной, либо известной функцией времени).

Выражая v_w из (3) и подставляя её в (5), получаем:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial (f_w(S_w) \cdot (v_o + v_w))}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Раскроем производную произведения:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial (f_w(S_w))}{\partial x} \cdot (v_o + v_w) + f_w(S_w) \cdot \frac{\partial (v_o + v_w)}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

Учитывая равенство (6), получаем:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial (f_w(S_w))}{\partial x} \cdot (v_o + v_w) = 0 \tag{9}$$

По правилу цепочки дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial (f_w(S_w))}{\partial x} = \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x}$$

Суммарная скорость двухфазного потока $(v_o + v_w)$ есть отношение расхода жидкости q_t к площади поперечного сечения фильтрации A.
Таким образом, из (9) получаем основное уравнение двухфазной фильтрации (уравнение Баклея-Леверетта) в классическом виде:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \frac{q_t}{A} \tag{10}$$

В процессе нагнетания воды в пласт её насыщенность будет меняться со временем вдоль направления движения x. Связь между S_w, x и t можно записать в функциональной форме $S_w = S_w(x,t)$ или в дифференциальной форме:

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt \tag{11}$$

Рассмотрим на плоскости (x,t) такие линии $x(t)$, вдоль которых насыщенность принимает заданное постоянное значение (т.е. рассмотрим изолинии насыщенности). Для любого заданного значения насыщенности S_{w0} можно установить такую связь между x и t, что выполняется равенство $S_w = S_w(x,t) = S_{w0} = \text{const}$ или в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial S_w}{\partial x} dx + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt = 0 \tag{12}$$

Таким образом, линия (фронт) распространения с заданной водонасыщенностью (т.е. связь между x и t при фиксированном значении S_{w0}) получается совместным решением уравнений (10) и (12):

$$\begin{cases} \varphi\dfrac{\partial S_w}{\partial t} + \dfrac{\partial f_w}{\partial S_w}\dfrac{\partial S_w}{\partial x}\dfrac{q_t}{A} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial S_w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial S_w}{\partial t}dt = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Для того, чтобы система (13) однородных и линейных (относительно частных производных водонасыщенности по координате и времени) уравнений имела отличное от нуля (нетривиальное) решение, необходимо, чтобы её определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \dfrac{\partial f_w}{\partial S_w}\dfrac{q_t}{A} \\ \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Откуда находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q_t}{A\varphi}\frac{\partial f_w}{\partial S_w}, \tag{15}$$

где производные $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{\partial f_w}{\partial S_w}$ вычисляются при постоянном значении водонасыщенности S_{w0}.

Уравнение (15) можно интерпретировать следующим образом: фронт с постоянной заданной насыщенностью движется с постоянной скоростью, пропорциональной $q_t/(A \cdot \varphi)$.

Итак, скорость движения фронта с данной водонасыщенностью S_{w0}:

$$v|_{S_{w0}} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{S_{w0}} = \left.\frac{q_t}{A\varphi}\frac{\partial f_w}{\partial S_w}\right|_{S_{w0}} \tag{16}$$

Т.е. скорость движения фронта с данной водонасыщенностью зависит от характера производной функции Баклея-Леверетта по насыщенности и конкретного значения этой насыщенности на рассматриваемом фронте.

Важно! Разные насыщенности движутся с разной скоростью.