**Exo #2 (Coloration des sommets d'un graphe)**

*A, B, C, D, E, F, G* et *H* désignent 8 espèces de poissons. Certaines espèces ne peuvent cohabiter ensemble dans un même aquarium, en raison de la température de l'eau, du degré de salinité, de la présence de certaines algues, … Le tableau ci-dessous indique les incompatibilités entre espèces.
Le problème consiste à déterminer le nombre minimal (noté *nb_opt*) d'aquariums qui sera nécessaire.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | × | × | × | | | × | × |
| B | × | | | | × | × | × | |
| C | × | | | × | | × | × | × |
| D | × | | × | | × | | | × |
| E | | × | | × | | × | × | |
| F | | × | × | | × | | | |
| G | × | × | × | | × | | | |
| H | × | | × | × | | | | |

***Q1.*** Modéliser sous la forme d'un problème de coloration des sommets d'un graphe (que l'on dessinera). On indiquera quels sont les sommets ? les arêtes ? et à quoi correspond *nb_opt* ?

Q1. Une ***arête*** entre 2 sommets correspond à une ***IN***COMPATIBILITE (et non pas une COMPATIBILITE).

Si une arête traduisait une compatibilité, alors l'exercice n'aurait ***plus aucun sens***.

En effet, soient 2 sommets i et j compatibles (donc adjacents), alors

(a) Les sommets i et j devront être de ***même couleur*** (on peut les mettre dans le même aquarium)

(b) Mais, en appliquant les principes de la coloration de sommets, i et j se verront forcément attribuer ***2 couleurs différentes*** car ces sommets sont adjacents.

(a) et (b) montrent l'absurdité

***Pour Q3 et Q4, il y a eu pas mal de confusions entre minorant et majorant.***

Q3. L'existence d'une 4-clique entraine que la coloration nécessitera au moins 4 couleurs. Donc, on ne pourra jamais faire « moins de 4 »

→ 4 est un minorant de nb_opt

Q4.

- A la question Q2, l'application de WELSH et POWELL a conduit à une 4 coloration. Donc nb_opt (nombre minimal de couleurs) sera forcément inférieur ou égal à 4

  → 4 est donc un majorant de nb_opt (i.e. nb_opt ≤ 4)

- A la question Q3, on a déduit

  → 4 est un minorant de nb_opt (i.e. 4 ≤ nb_opt)

→ On en déduit nb_opt = 4.

*Problème :* *A, B, C, E, F, G et H désignent 8 espèces de poissons.*
*On sait que :*

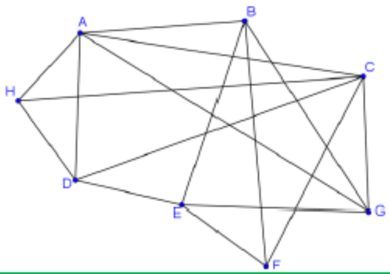
- *A ne peut pas vivre avec B, C, D, G, H*
- *B ne supporte pas A, E, F, G*
- *C ne peut pas cohabiter avec A, D, F, G, H*
- *D est incompatible avec A, C, E, H*
- *E ne supporte pas B, D, F, G*
- *F cohabite uniquement avec A, D, F, G, H*
- *G ne peut vivre qu'avec D, F, G, H*
- *H est compatible seulement avec B, E, F, G*

*La situation peut être représentée par le tableau suivant :*

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | × | × | × | | | × | × |
| B | × | | | | × | × | × | |
| C | × | | | × | | × | × | × |
| D | × | | × | | × | | | × |
| E | | × | | × | | × | × | |
| F | | × | × | | × | | | |
| G | × | × | × | | × | | | |
| H | × | | × | × | | | | |

*Combien faut-il d'aquarium au minimum ?*

*On peut représenter ce tableau par un graphe dont les sommets correspondent aux espèces, et les arêtes aux cohabitations impossibles :*




**Définition : Colorier un graphe**, c'est associer à chaque sommet une couleur de façon à ce que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes.
Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier ce graphe.

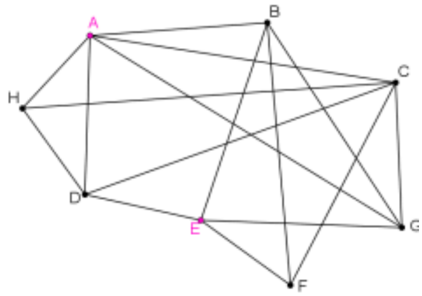
**Remarque importante:** Si un graphe est <u>complet</u>, son nombre chromatique est égal à son ordre. En effet, chaque sommet est adjacent à tous les autres. Il faut donc une couleur différente pour chaque sommet, et bien entendu, cela suffit.

Pour résoudre notre problème, on utilise l'algorithme de coloriage d'un graphe qui suit :

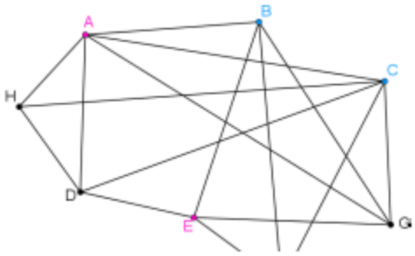
## *Algorithme de Welsh Powell :*

- Numéroter les sommets dans l'ordre des degrés décroissants
- Tant qu'il reste des sommets à colorier :
  - Choisir une nouvelle couleur (appelée couleur courante)
  - Chercher dans la liste ordonnée des sommets le premier sommet non colorié et le colorier avec la couleur courante
  - Colorier avec la couleur courante et en respectant leur ordre, tous les sommets non coloriés non adjacents au dernier sommet colorié et non adjacents entre eux.

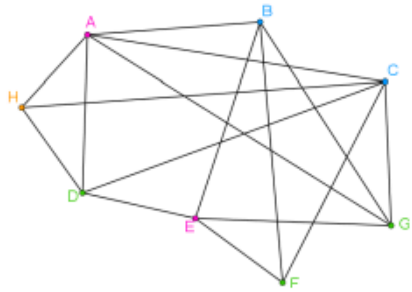
1) *On choisit la couleur rose. On colorie A en rose, et on regarde les autres sommets suivant l'ordre ci-dessus*
*C, B, D sont adjacents à A, donc on ne les colorie pas*
*E n'est pas adjacent à A, donc on le colorie en rose*
*G est adjacent à A, donc on ne le colorie pas*
*F n'est pas adjacent à A, mais il est adjacent à E (qui est désormais en rose), donc on ne le colorie pas*
*H est adjacent à A, donc on ne le colorie pas*



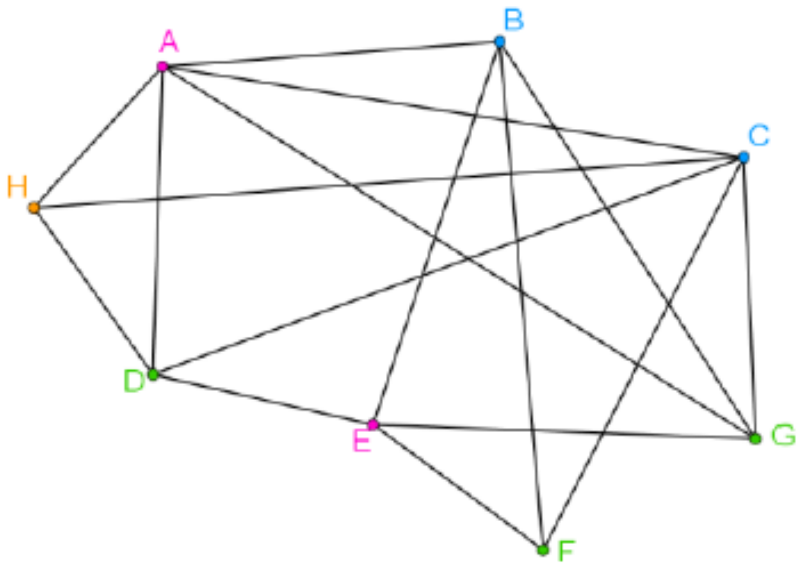

2) *On choisit la couleur bleu. On colorie C en bleu.*
*B n'est pas adjacent à C, donc on le colorie en bleu*
*D est adjacent à C, donc on ne le colorie pas*
*G, F, H sont adjacents à C, donc on ne les colorie pas*




3) *On choisit la couleur vert. On colorie D en vert.*
*G n'est pas adjacent à D, donc on le colorie en vert*
*F n'est pas adjacent à D, ni à G, donc on le colorie en vert*
*H est adjacent à D, donc on ne le colorie pas.*




4) *On choisit la couleur orange. On colorie G en orange.*
*Donc le nombre chromatique $\gamma$ est inférieur ou égal à 4.*




Réponse au problème : *Pour notre problème, on en déduit donc que $\gamma \geq 4$ car le sous-graphe ACDH est complet et d'ordre 4. D'où $4 \leq \gamma \leq 4$ ie : $\gamma = 4$. Ainsi il faut 4 aquariums pour qu'il n'y ait pas de soucis de cohabitation.*