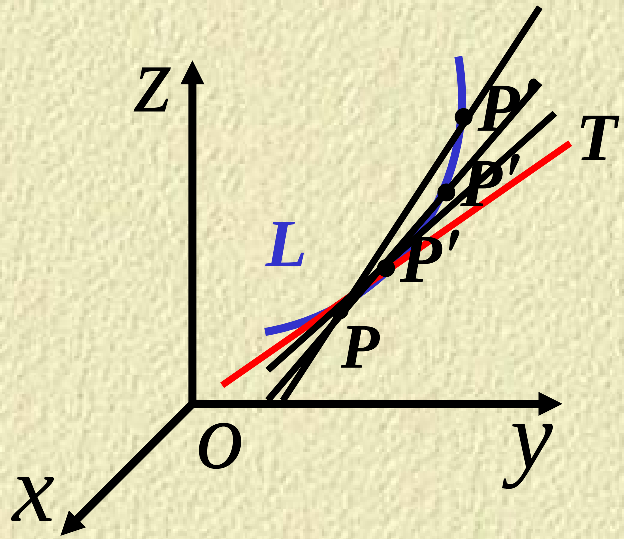
7.6 微分学在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面

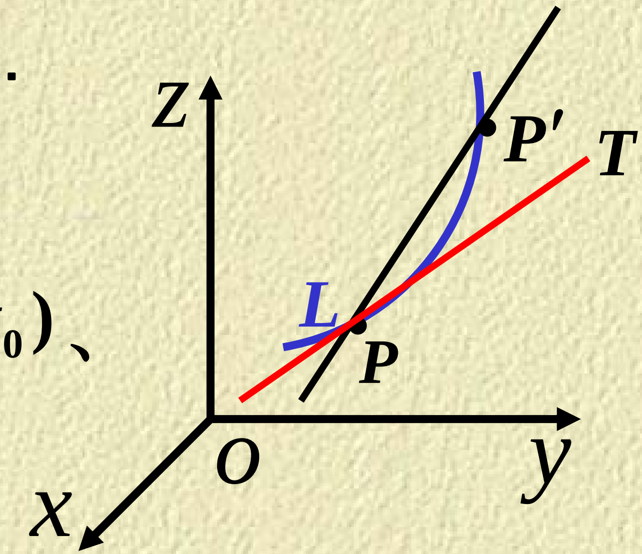
设 L 是一空间曲线，$P(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线上的一点，$P'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$ 是曲线上与 P 邻近的点，当 P' 沿曲线 L 趋于 P 时，割线 PP' 如果存在一个极限位置 PT，则将直线 PT 称为曲线 L 在点 P 处的**切线**.



过 P 且与切线垂直的平面称为曲线 L 在点 P 处的**法平面**.

(1) 设空间曲线的参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ (1)

其中 $x(t)$、$y(t)$、$z(t)$ 可导.



$t = t_0$ 和 $t = t_0 + \Delta t$ 分别对应点 P 和 P'. 且 $x'(t_0)$、$y'(t_0)$、$z'(t_0)$不同时为零。

切向量：切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{T} = \{x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\}$$

上页 下页 返回

曲线在P处的切线方程

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面方程为:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

例1　求曲线$\Gamma: x=\int_0^t e^u\cos u\,du$，$y=2\sin t+\cos t$，

$z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

解　当$t=0$时，　$x=0$,　$y=1$,　$z=2$,

$$x'=e^t\cos t,\quad y'=2\cos t-\sin t,\quad z'=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\ x'(0)=1,\qquad y'(0)=2,\qquad z'(0)=3,$$

切线方程　$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$,

法平面方程　$x+2(y-1)+3(z-2)=0$,

即 $x+2y+3z-8=0$.

上页　下页　返回

(2)空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

(Ⅰ)方程组若能解出：$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$（两个柱面相交）

此时视为参数方程：$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

在 $P(x_0, y_0, z_0)$处，$\vec{T} = \{1,\ y'(x_0),\ z'(x_0)\}$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} = \frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

法平面方程 $(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$

上页 下页 返回

推广到平面曲线方程 $y = y(x)$

在 $P(x_0, y_0)$处 $\vec{T} = \{1,\ y'(x_0)\}$

切线方程 $$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)}$$

法线方程 $$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) = 0$$

上页 下页 返回

(Ⅱ)方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$若能确定可导隐函数$\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

在$P(x_0,y_0,z_0)$处，$\vec{T}=\left\{1,\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_P,\ \dfrac{dz}{dx}\Big|_P\right\}$

切线方程
$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\dfrac{dy}{dx}\Big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{dz}{dx}\Big|_{P_0}},$$

法平面方程
$$(x-x_0)+\frac{dy}{dx}\Big|_{P_0}(y-y_0)+\frac{dz}{dx}\Big|_{P_0}(z-z_0)=0$$

或 $\vec{T}=\left\{\dfrac{dx}{dy}\Big|_P,\ 1,\ \dfrac{dz}{dy}\Big|_P\right\}$ $\quad\vec{T}=\left\{\dfrac{dx}{dz}\Big|_P,\ \dfrac{dy}{dz}\Big|_P,\ 1\right\}$

例 2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$， $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=\frac{z-x}{y-z}, \\ \frac{dz}{dx}&=\frac{x-y}{y-z}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0, \qquad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1,$$

由此得切向量 $\vec{T}=\{1,0,-1\}$,

所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为 $(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0$,

$$\Rightarrow \quad x-z=0$$

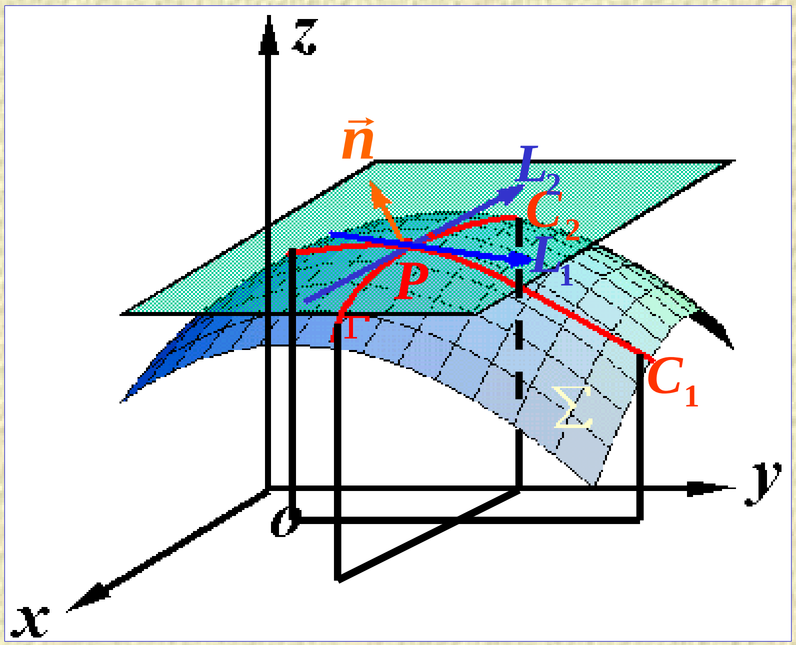
上页 下页 返回

2. 曲面的切平面与法线

设曲面Σ的方程为$z = f(x, y)$，

其中 f 在点(x_0, y_0)处可微，

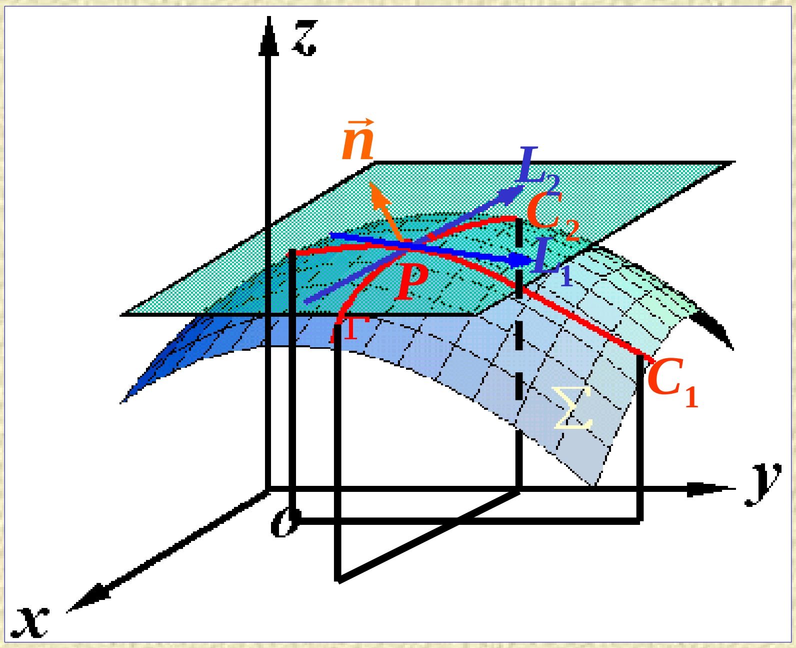
$P(x_0, y_0, z_0)$为曲面上的一点。



平面$x = x_0$在曲面Σ上截得一条曲线C_1，它在点P处有切线L_1，

平面$y = y_0$在曲面Σ上截得一条曲线C_2，它在点P处有切线L_2，由直线L_1与L_2所确定的平面π称为曲面Σ在点P处的切平面.

通过点$P(x_0,y_0,z_0)$而与切平面π 垂直的直线称为曲面Σ在点P 的法线.



切平面的性质:

如果C 是位于曲面Σ上经过点P 的曲线, 且曲线C 在点P 处有切线L , 则L 必定在切平面π 上.

即曲面Σ上通过P 的一切曲线在点P处的切线都在同一平面(切平面)上.

上页 下页 返回

证：设曲面方程为 $z = f(x, y)$

曲线 C_1 的参数方程： $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y \\ z = f(x_0, y) \end{cases}$ （y 为参数）

故其切线 L_1 的方向向量：$\vec{T}_1 = \left\{0, 1, f_y'(x_0, y_0)\right\}$

曲线 C_2 的参数方程： $\begin{cases} x = x \\ y = y_0 \\ z = f(x, y_0) \end{cases}$ （x 为参数）

故其切线 L_2 的方向向量：$\vec{T}_2 = \left\{1, 0, f_x'(x_0, y_0)\right\}$

上页 下页 返回

在曲面上任取一条通过点P(x_0,y_0,z_0)的曲线C

C的参数方程：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$

$t = t_0$对应点 P, 则曲线 C的切线 L的方向向量

$$\vec{T} = \{ x'(t_0), y'(t_0), f'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(t_0) \}$$

$$= y'(t_0)\{ 0,1, f'_y(x_0, y_0) \} + x'(t_0)\{ 1,0, f'_x(x_0, y_0) \}$$

$$= y'(t_0)\vec{T}_1 + x'(t_0)\vec{T}_2$$

$\vec{T}$可由$\vec{T}_1$与$\vec{T}_2$线性表出，即$\vec{T},\vec{T}_1,\vec{T}_2$共面，

故切线 L在平面 π上.

由上述证明可知，切平面π的法向量

$$\vec{n}=\vec{T}_1\times\vec{T}_2=\left\{0,1,f_y'(x_0,y_0)\right\}\times\left\{1,0,f_x'(x_0,y_0)\right\}$$

$$=\left\{f_x'(x_0,y_0),\ f_y'(x_0,y_0),-1\right\}$$

上页 下页 返回

(1) 曲面方程 $z = f(x, y)$ 在点P(x_0, y_0, z_0)处的切平面的法向量为

$$\vec{n} = \{f_x'(x_0, y_0),\ f_y'(x_0, y_0),\ -1\}$$

$$= \left\{ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)},\ -1 \right\}$$

方程为 $x = f(y, z)$、$y = f(x, z)$时，切平面的法向量?

曲面在P处的切平面与法线方程分别为

$$f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

推广：

平面解析几何中平面曲线 $y = y(x)$点P(x_0, y_0)处的法线向量为：$\vec{n} = \{y'(x_0), -1\}$

切线方程为：$y'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$

法线方程为：$$\frac{x - x_0}{y'(x_0)} = \frac{y - y_0}{-1}$$

上页 下页 返回

(2) 曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

假定 F 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续偏导数，且 $F_x'(P)$、$F_y'(P)$、$F_z'(P)$ 不同时为零。不妨设 $F_z'(P)\neq 0$

曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{F_x'(P),\ F_y'(P),\ F_z'(P)\}=gradF(P)$$

曲面在P处的切平面与法线方程分别为

$$F_x'(P)(x-x_0)+F_y'(P)(y-y_0)+F_z'(P)(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

推广： 若平面曲线为 $f(x,y)=0$

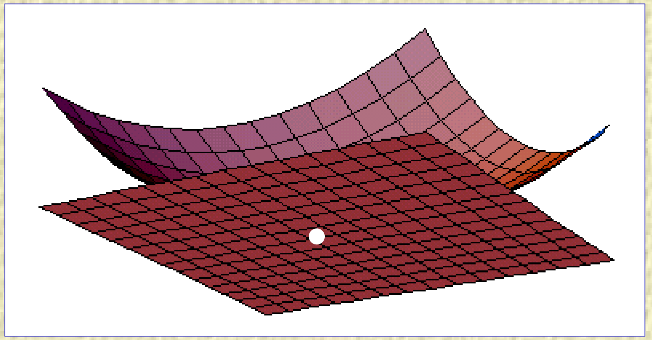
$$\left\{-\frac{f_x'(x_0,y_0)}{f_y'(x_0,y_0)},-1\right\}=-\frac{1}{f_y'(x_0,y_0)}\left\{f_x'(x_0,y_0),\ f_y'(x_0,y_0)\right\}$$

$$=-\frac{1}{f_y'(x_0,y_0)}\,\mathbf{grad}f\ (x_0,y_0)$$

$$\vec{n}=\mathbf{grad}f\ (x_0,y_0)$$

上页 下页 返回

例 3 求旋转抛物面$z=x^2+y^2-1$在点$(2,1,4)$处的切平面及法线方程.



解 $f(x,y)=x^2+y^2-1$,

$$\vec{n}\Big|_{(2,1,4)}=\{2x,2y,-1\}\Big|_{(2,1,4)}=\{4,2,-1\},$$

切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$

$$\Rightarrow\quad 4x+2y-z-6=0,$$

法线方程为 $$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例 4 求曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z) = z - e^z + 2xy - 3,$

$$F'_x\big|_{(1,2,0)} = 2y\big|_{(1,2,0)} = 4, \quad F'_y\big|_{(1,2,0)} = 2x\big|_{(1,2,0)} = 2,$$

$$F'_z\big|_{(1,2,0)} = 1 - e^z\big|_{(1,2,0)} = 0,$$

切平面方程 $4(x-1) + 2(y-2) + 0 \cdot (z-0) = 0,$

$$\Rightarrow \quad 2x + y - 4 = 0,$$

法线方程 $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{0}.$$

上页 下页 返回

例 5　求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程.

解　设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点,

切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6},\ \Rightarrow\ 2x_0=y_0=z_0.$$

因为 (x_0,y_0,z_0) 是曲面上的切点,

满足方程　$\therefore\ x_0=\pm 1,$

所求切点为 $(1, 2, 2)$, $(-1, -2, -2)$,

切平面方程(1)

$$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=21$$

切平面方程(2)

$$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=-21$$

上页 下页 返回

例 6　设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，求函数$u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$在此处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

解　令　$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,

$$F'_x\big|_P=4x\big|_P=4,\ F'_y\big|_P=6y\big|_P=6,\ F'_z\big|_P=2z\big|_P=2,$$

故　$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{4,6,2\}$,

$|\vec{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14}$,　　方向余弦为

上页　下页　返回

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

故 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$

(书中例 4) 在曲面 z=xy 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 x+3y+z+9=0 并写出这法线的方程.

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$

曲面上点 P (x, y, z) 处的法向量 $\vec{n} = \{y, x, -1\}$

由题意 $\vec{n}$ 与向量 {1, 3, 1} 平行 ，故

$\frac{y}{1} = \frac{x}{3} = \frac{-1}{1}$ 得 $x = -3, y = -1 \Rightarrow z = xy = 3$

所求点为 (−3, −1, 3)

过这点的法线方程为 $x + 3 = \frac{y+1}{3} = z - 3$

空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

在$P(x_0,y_0,z_0)$处,

$$\vec{T} = \left\{ 1, \frac{dy}{dx}\bigg|_{P_0}, \frac{dz}{dx}\bigg|_{P_0} \right\}$$

补充

举例

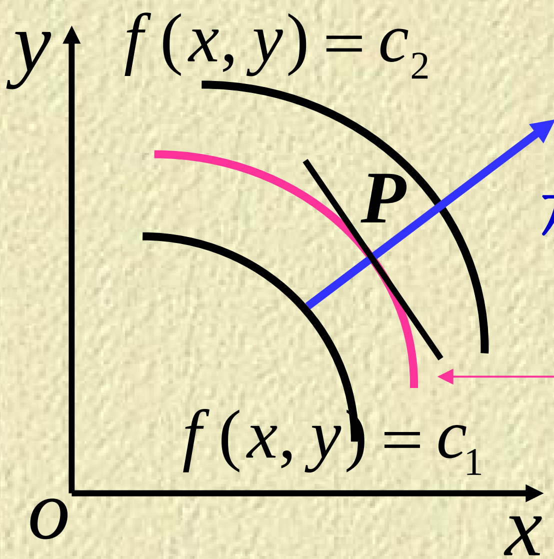
$$\vec{T} = \vec{n}_F \times \vec{n}_G$$
$$= \{F_x'(P), F_y'(P), F_z'(P)\} \times \{G_x'(P), G_y'(P), G_z'(P)\}$$

上页 下页 返回

在几何上 $z = f(x, y)$ 表示一个曲面

曲面被平面 $z = c$ 所截得 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$，

所得曲线在xoy面上投影如图



$gradf(x, y)$

梯度为等高线上的法向量

$f(x, y) = c$ 等高线

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = |gradf(P)|$$

梯度与等高线、方向导数的关系：

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度的方向与点 P 的等高线 $f(x, y) = c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等高线指向数值较高的等高线，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.

类似地,设曲面 $f(x,y,z)=c$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的等值面，此函数在点 $P(x,y,z)$ 的梯度的方向与过点 P 的等值面 $f(x,y,z)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等值面指向数值较高的等值面，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.

小结

1 .空间曲线的切线与法平面

$$(1)\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \vec{T} = \{x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\}$$

$$(2)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \vec{T} = \left\{1,\ \frac{dy}{dx}\Big|_P,\ \frac{dz}{dx}\Big|_P\right\}$$

$$\vec{T} = \vec{n}_F \times \vec{n}_G$$

$$= \{F_x'(P), F_y'(P), F_z'(P)\} \times \{G_x'(P), G_y'(P), G_z'(P)\}$$

2.曲面的切平面与法线

(1) 曲面方程 $z = f(x, y)$ 在点P(x_0, y_0, z_0)处的切平面的法向量为

$$\vec{n} = \{f_x'(x_0, y_0),\ f_y'(x_0, y_0),\ -1\}$$

(2) 曲面方程 $F(x, y, z) = 0$在点P(x_0, y_0, z_0)处的切平面的法向量为

$$\vec{n} = \{F_x'(P),\ F_y'(P),\ F_z'(P)\}$$

上页 下页 返回

思考题

如果平面$3x+\lambda y-3z+16=0$与椭球面$3x^2+y^2+z^2=16$相切，求λ.

思考题解答

设切点 (x_0, y_0, z_0), $\vec{n}=\{6x_0, 2y_0, 2z_0\}$,

依题意知切向量为 $\{3, \lambda, -3\}$

$$\frac{6x_0}{3}=\frac{2y_0}{\lambda}=\frac{2z_0}{-3} \Rightarrow y_0=\lambda x_0,\quad z_0=-3x_0,$$

切点满足曲面和平面方程

$$\begin{cases} 3x_0+\lambda^2x_0+9x_0+16=0 \\ 3x_0^2+\lambda^2x_0^2+9x_0^2-16=0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \lambda=\pm 2.$$

上页 下页 返回

作业：

P82： 1. 2. 3. 6. 8. 9. 10. 12. 14.