一、已知矩阵 A, X 满足关系式 $2A^{-1}X + I = X$,

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$, 求 X.

解: $2A^{-1}X+I=X$, 两边同时左乘 A $\longrightarrow$

$2X+A=AX$, $\longrightarrow$ $(A-2I)X=A$, $\longrightarrow$

$X=(A-2I)^{-1}A$

利用伴随矩阵求逆矩阵的公式，解得

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$X=(A-2I)^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

二、提示: 方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

$\longrightarrow$ $\lambda=0$ 或者 λ=1。

当 $\lambda=0$ 时，一般解为 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=1$ 时，一般解为 $k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

当有非零解时，三个平面相交于过原点的一条直线。

当 $\lambda=0$ 时，直线过 $(0,0,0,)^T$ 和 $(-1,1,1)$;

当 $\lambda=1$ 时，直线过 $(0,0,0,)^T$ 和 $(-1,2,1)$.

三、

$$BAB^{-1}(I+B^T)^T-[AB(BA)^{-1}]^{-1}A$$
$$=BAB^{-1}(I+B)-(BA)(AB)^{-1}A$$
$$=BAB^{-1}+BA-BAB^{-1}=BA$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{bmatrix}$$

四、

解: 根据所求（1）和（2）, 可考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&a-1&1-a\\0&a-1&0&1-a\\0&1-a&1-a&1-a^2\end{pmatrix}$$

显然 $a=1$ 时，秩（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）$=1$;

$a\neq1$ 时，

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&1&-1\\0&1&0&-1\\0&1&1&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a+3\end{pmatrix}$$

显然 $a=-3$ 时，秩（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）$=3$;

$a\neq1$, 且 $a\neq-3$ 时, 秩（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$）$=4$。

（2）当 $a=1$ 时, $\dim(L)=1$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 任取一个都可作为基;

当 $a=-3$ 时, $\dim(L)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可作为基;

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-3$ 时, $\dim(L)=4$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, α_4 可作为基;

五、

(1) 特征根 -3 有两个线性无关的特征向量时，A可对角化。

$$-3I-A=\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-b\\-4&-a&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&2-b\\0&2-a&0\end{bmatrix}$$

当 $a=2, b=2$ 时，$r(-3I-A)=1$,此时A可以对角化。

当 $a=2, b=2$ 时，A 是实对称矩阵，故存在正交矩阵Q, 使得$Q^{-1}AQ$为对角形。

可取

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\quad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-3&&\\&-3&\\&&6\end{bmatrix}$$

六、

取 $X=CY$, 其中 $C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-2\\ 0&0&1\end{pmatrix}$, 则

$f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2+y_2^2$, 不正定，

$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示双曲柱面

七、(1) 设X是A对应特征值λ的特征向量，因λ是实数，A为实矩阵，故X是实向量，且

$$AX=\lambda X$$

则

$$A^TAX=\lambda A^TX$$

因A为正交矩阵，$A^TA=I$, 故

$$X=\lambda A^TX$$

$$X^T=\lambda X^TA$$

$$X^TX=\lambda X^TAX=\lambda^2X^TX$$

$$(\lambda^2-1)X^TX=0$$

因 $X^TX\neq 0$, 故 $\lambda^2-1=0$, $\lambda=1$ 或 -1.

(2) $|\lambda I-A|=(\lambda-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}$ 无实根，

故A的特征值为复数，不为1或-1.