习题 9.7(P213)

1. 利用斯托克斯公式计算下列积分.

(1) $\oint_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$， L 是任一条逐段光滑的正向闭曲线.

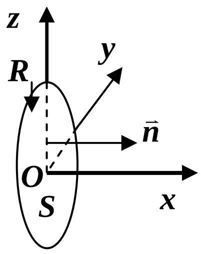
解：$\oint_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \end{vmatrix}$

$=\iint_S [-x-(-x)]dydz+[-y-(-y)]dzdx+[-z-(-z)]dxdy=0$

(2) $\oint_L (e^x+x^2y^2z^2)dx+(e^y-y^2z)dy+(e^z+yz^2)dz$，$L$ 为圆柱面 $z^2+y^2=R^2$，与平面 $x=0$ 的交线，面对 x 轴正向看去为逆时针方向.

解：法 1 （利用斯托克斯公式）

有向曲线 L 如图所示，



设 S 为平面 $z^2+y^2\le R^2, x=0$，

$X=e^x+x^2y^2z^2$，$Y=e^y-y^2z$，

$Z=e^z+yz^2$

$\oint_L (e^x+x^2y^2z^2)dx+(e^y-y^2z)dy+(e^z+yz^2)dz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$

$=\iint_S (z^2+y^2)dydz+2x^2y^2zdzdx-2x^2yz^2dxdy=\iint_{z^2+y^2\le R^2} (z^2+y^2)dydz$

$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho=\frac{\pi}{2}R^4$

法 2 （利用格林公式）

由于 L 为 yoz 平面上的曲线，由 $x=0$ 得 $dx=0$

$\oint_L (e^x+x^2y^2z^2)dx+(e^y-y^2z)dy+(e^z+yz^2)dz=\oint_L (e^y-y^2z)dy+(e^z+yz^2)dz$

$\xlongequal[\text{用格林公式}]{\text{在}yoz\text{平面上}} \iint_{z^2+y^2\le R^2} (z^2+y^2)dydz=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho=\frac{\pi}{2}R^4$

(3) $\oint\limits_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz$ ， L 为曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 和 $z=x^2+y^2+1$ 的交线，面对 z 轴正向看去为顺时针方向.

解：法 1　联立 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ z=x^2+y^2+1\end{cases}$ 得两个曲面的交线方程 $L: z=2,\ x^2+y^2=1$

取 $S: z=x^2+y^2+1$ 指向为下侧.； $S_1: z=2,\ x^2+y^2\le 1$ 指向为上侧.

$$\oint\limits_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz=\oint\limits_L x^2yzdx+(z-1)dy+(x+y+1)dz$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2yz & z-1 & x+y+1\end{vmatrix}=\iint\limits_S (x^2y-1)dzdx-x^2zdxdy$$

$$=\oiint\limits_{S+S_1}(x^2y-1)dzdx-x^2zdxdy-\iint\limits_{S_1}(x^2y-1)dzdx-x^2zdxdy$$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{由高斯}}\iiint\limits_V 0dV-\iint\limits_{S_1}-2x^2dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2dxdy\xlongequal[\text{的对称性}]{\text{由变量轮换}}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{\pi}{2}$$

法 2　联立 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ z=x^2+y^2+1\end{cases}$ 得两个曲面的交线方程 $L: z=2,\ x^2+y^2=1$，曲线 L 在 xoy 坐标面上的投影曲线 L_1： $x^2+y^2=1$，方向为顺时针方向.

由于 L 上， $z=2$，故 $dz=0$ ，所以

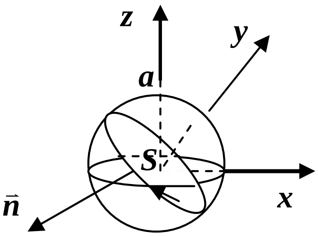
$$\oint\limits_L x^2yzdx+(x^2+y^2)dy+(x+y+1)dz=\oint\limits_{L_1}2x^2ydx+(x^2+y^2)dy$$

$$\xlongequal{\text{由格林公式}}-\iint\limits_{z^2+y^2\le 1}(2x-2x^2)dxdy\xlongequal{\text{由对称性}}\iint\limits_{z^2+y^2\le 1}2x^2dxdy$$

$$\xlongequal[\text{的对称性}]{\text{由变量轮换}}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho=\frac{\pi}{2}$$

(4) $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz$ 　L 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ ，面对 z 轴的正向看去取顺时针方向.

解：法 1 设 S 为平面 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，



$X=y$，$Y=z$，$Z=x$

曲面 S 的法向量 $\vec{n}=\{-1,-1,-1\}$

故 $\vec{n}^0=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$，即 $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\oint_L ydx+zdy+xdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S -dydz-dzdx-dxdy \xlongequal[\text{的对称性}]{\text{由变量轮换}} \iint_S -3dxdy=\iint_S -3\cos\gamma\, dS$$

$$=\sqrt{3}\iint_S dS=\sqrt{3}\cdot(S\text{的面积})=\sqrt{3}\pi a^2$$

法 2 圆周 L 在 xoy 坐标面上的投影曲线 L_1：$x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2}$，方向为顺时针方向.

由于 L 上，$z=-x-y$，故 $dz=-dx-dy$，所以

$$\oint_L ydx+zdy+xdz=\oint_{L_1}(y-x)dx-(2x+y)dy \xlongequal{\text{由格林公式}} -\iint_{z^2++xy+y^2\le\frac{a^2}{2}}(-2-1)dxdy$$

$$=3\iint_{z^2++xy+y^2\le\frac{a^2}{2}}dxdy$$

令 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}u-\frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}u+\frac{\sqrt{2}}{2}v \end{cases}$ （参见第 6 章第 7 节补充知识——轴的旋转变换）——旋转 $\frac{\pi}{4}$

则由二重积分换元法：雅可比行列式 $J=\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}=1$，

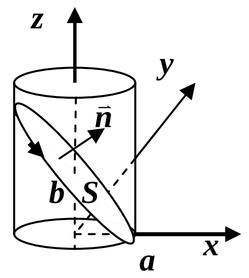
积分区域 $x^2+xy+y^2\le\dfrac{a^2}{2}$ 变为 $3u^2+v^2\le a^2$，即椭圆 $\dfrac{u^2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2}+\dfrac{v^2}{a^2}\le 1$

$$\iint\limits_{z^2++xy+y^2\le\frac{a^2}{2}} dxdy=\iint\limits_{3u^2+v^2\le a^2} dudv=\text{椭圆的面积}=\pi\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot a=\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$$

故原积分 $=3\cdot\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pi a^2$

(5) $\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$， L 为椭圆 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1\end{cases}$ $(a,b>0)$.

面对 z 轴的正向看去取逆时针方向.



解：法 1　设 S 为平面 $\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1\end{cases}$，

$X=y-z$， $Y=z-x$， $Z=x-y$

椭圆的短半轴为 a，长半轴为 $\sqrt{a^2+b^2}$，

曲面 S 的法向量 $\vec{n}=\{b,0,a\}$，故 $\vec{n}^0=\left\{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$，

即 $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\cos\beta=0$， $\cos\gamma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_S(-1-1)dydz-(1+1)dzdx+(-1-1)dxdy$$

$$=-2\iint\limits_S dydz+dzdx+dxdy=-2\iint\limits_S\cos\alpha\,dS+\cos\beta\,dS+\cos\gamma\,dS$$

$$=-2\iint\limits_S\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}dS=-\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(S\text{的面积})$$

$$=-\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\pi\, a\sqrt{a^2+b^2}=-2\pi\, a(a+b)$$

法 2　椭圆 L 在 xoy 坐标面上的投影曲线 L_1： $x^2+y^2=a^2$,方向为逆时针方向.

由于 L 上，$z=b-\dfrac{b}{a}x$，故 $dz=-\dfrac{b}{a}dx$，所以

$$\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\oint_{L_1}(y+\frac{b}{a}y-b)dx+(b-\frac{b}{a}x-x)dy$$

$$\overset{\text{由格林公式}}{=\!=\!=}-2(\frac{b}{a}+1)\iint_{z^2+y^2\le a^2}dxdy=-2(\frac{b}{a}+1)\pi a^2=-2\pi\, a(a+b)$$

2．已知 $\vec{A}=3xz^2\vec{i}-yz\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$，求 $rot\vec{A}$

解： $X=3xz^2$，$Y=-yz$，　$Z=x+2z$

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ X&Y&Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3xz^2&-yz&x+2z\end{vmatrix}$$

$$=(0+y)\vec{i}-(1-6xz)\vec{j}+(0-0)\vec{k}=y\vec{i}-(1-6xz)\vec{j}$$

3．已知 $\vec{A}=(3x^2y+z)\vec{i}+(y^3-xz^2)\vec{j}+2xyz\vec{k}$，求 $rot\vec{A}$

解： $X=3x^2y+z$，$Y=y^3-xz^2$，$Z=2xyz$

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ X&Y&Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y+z&y^3-xz^2&2xyz\end{vmatrix}$$

$$=(2xz+2xz)\vec{i}-(2yz-1)\vec{j}+(-z^2-3x^2)\vec{k}$$

$$=4xz\vec{i}-(2yz-1)\vec{j}+(-z^2-3x^2)\vec{k}$$