习题 10.5(P265)

1.将下列函数展开为麦克劳林级数.

(1) $\dfrac{1}{a-x}\quad (a>0)$

解：由于 $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$ ，$|t|<1$

所以 $\dfrac{1}{a-x}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{a}}=\dfrac{1}{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}x^n$

由 $\left|\dfrac{x}{a}\right|<1$ 得 $|x|<a$ ，故函数展开式成立的区域为 $(-a,a)$.

(2) $\cos x^2$

解： 由于 $\cos t=1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ ， $t\in(-\infty,+\infty)$

所以令 $t=x^2$，代入上式得

$$\cos x^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}\,,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(3) $\sin^2 x$

解：由于 $\cos t=1-\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ ， $t\in(-\infty,+\infty)$

所以 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}\left(1-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\,,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(4) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

解： $\dfrac{1}{(1+x)^2}=-\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'=-\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right]'$

$$=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}\text{，}\quad R=1$$

当 $x=\pm 1$ 时，上述级数均发散，故函数展开式成立的区域为 $x\in(-1,1)$.

(5) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

解：由于 $\dfrac{1}{1-t}=1+t+t^{2}+\cdots+t^{n}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^{n}$ ，$|t|<1$

所以 $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n}\text{ , }x\in(-1,1)$$

上式中展开式成立的区域 $x\in(-1,1)$ 是由 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n}$,$|x|<1$；

$\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n}$ ，$\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$，取公共区域所得.

(6) $(1+x)\ln(1+x)$

解：因 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n}}{n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n}}{n}$，$x\in(-1,1]$

故 $(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n+1}}{n}$

$$\xlongequal[\text{再令}n=m]{\text{第2个级数先令}m=n+1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{提出首项}]{\text{第1个级数}}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n-1}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)x^{n}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n-1)}x^{n}\text{，}\quad x\in(-1,1]$$

(7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$

解：$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}\ \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$，$x\in(-\infty,+\infty)$

(8) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

解：$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left[1+(-x^2)\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{2}-n+1\right)\left(-x^2\right)^n$

$=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{2n}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$

(9) $\int_0^x\dfrac{\arcsin x}{x}dx$

解：$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{\text{由（8）题}}1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!}x^{2n}$，

两端积分得 $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!(2n+1)}x^{2n+1}$

$\dfrac{\arcsin x}{x}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!(2n+1)}x^{2n}$

$\int_0^x\dfrac{\arcsin x}{x}dx=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!(2n+1)^2}x^{2n+1}$，$R=1$

由于当 $x=\pm1$ 时，上述级数均收敛，故函数展开式成立的区域为 $x\in[-1,1]$.

注： 把函数展开为级数主要用间接展开法，可以依据函数形式与五个重要初等函数的麦克劳林级数展开式（见教材 P257）做对应，做相应的初等变形，再套用五个展开式；也可以运用幂级数的运算性质，特别要注意运用逐项求导、逐项求积分的性质，结合五个展开式把函数展开，

特别要注意的是:（1）运用五个展开式时，要注意展开区间，必要时，可以用适当的中间变量代换式中的自变量 x；

（2）一定要标注函数展开式成立的区域. 当经过初等变形后直接套用公式时，直接标注相应的收敛域即可；当用到逐项求导、逐项积分性质时，必须讨论展开式在区间端点的收敛性（因为逐项求导及逐项积分，级数的收敛半径不变，但在端点处的收敛性可能改变）,当用到多个公式展开时，收敛域为各个展开式收敛域的公共区域.

2. 把函数 $\cos x$ 展开为 $x+\dfrac{\pi}{3}$ 的幂级数.

解： $\cos x=\cos\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

3. 把函数 $\dfrac{1}{x}$ 展开为 $x-3$ 的幂级数.

解： $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+(x-3)}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{x-3}{3}\right)}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-3}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$ ，

$\left|\dfrac{x-3}{3}\right|<1$，即 $0<x<6$

4. 把函数 $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ 在点 $x=-1$ 处展开幂级数.

解： $\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

$\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{-4+(x+1)}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{4}}=-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+1}{4}\right)^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n+2}}(x+1)^n$,

$\left|\dfrac{x+1}{4}\right|<1$，即 $x\in(-5,3)$,

$\dfrac{1}{x-1}=\left[-2+(x+1)\right]^{-1}=-\dfrac{1}{2}\left[1+(-\dfrac{x+1}{2})\right]^{-1}$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)}{n!}(-\frac{x+1}{2})^n\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+1)^n\right]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n$$

$\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$，即 $x\in(-3,1)$，

所以 $\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}(x+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2}}(x+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x+1)^n\text{，}\quad x\in(-3,1)$$

5.用幂级数求近似值，误差不超过 10^{-4}.

(1) $\sqrt[5]{e}$

解：设 $f(x)=e^x$，　将 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上展开，则

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$|R_n(x)|=\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=e^{\xi}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\le e\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}<3\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\le 10^{-4}$$

令 $x=\frac{1}{5}$，当 $n=4$ 时，$\left|R_4(\frac{1}{5})\right|<3\cdot\frac{1}{5^5\cdot 5!}=\frac{1}{125000}<10^{-4}$

$$\sqrt[5]{e}=e^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}+\frac{1}{3!\cdot 5^3}+\frac{1}{4!\cdot 5^4}$$

$$\approx 1+0.2+0.02+0.00133+0.00007\approx 1.2214$$

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

解：$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(x^4)^n$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{4n}\ ,\quad x\in(-1,1]$$

两端积分得 $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}(4n+1)x^{4n+1}$， $R=1$`

令 $x=\frac{1}{2}$， 则 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(4n+1)2^{4n+1}}$

这是交错级数，因而 $|R_n|\le u_{n+1}$， 欲使 $|R_n|\le 10^{-4}$， 只要取 $n=2$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 2\cdot 9\cdot 2^9}\approx 0.5-0.00313+0.00008\approx 0.4970$$

6.设有级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(1) 求此级数的收敛域

(2) 证明：此级数的和函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-y=-1$

(3) 求微分方程 $y''-y=-1$ 的通解，并由此确定级数的和函数 $y(x)$.

解： (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\Big/\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$

得收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

或将级数化为标准形式： $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\xlongequal{t=x^2}2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(2n)!}$

收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n)!}\Big/\frac{1}{[2(n+1)]!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}2(n+1)=\infty$

即 $t\in(-\infty,+\infty)$， 从而 $x\in(-\infty,+\infty)$， 得原级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $y(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$y'(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\ \underset{\text{再令}n=m}{\overset{\text{令}m=n-1}{=\!=\!=\!=\!=}}\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

故 $y'' - y = -1$

(3)这是二阶常系数线性非齐次微分方程，由特征根法得对应的齐次方程的通解为

$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

由观察得 $y_0 = 1$ 是非齐次方程的一个特解

故非齐次方程的通解为 $y = \overline{y} + y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + 1$

由(2)可得初始条件 $y(0) = 2$， $y'(0) = 0$

代入上式得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$，解得 $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$，

故 $y = \dfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) + 1$

即 $2 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \dfrac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) + 1$