习题 9.5(P201)

1. ．计算 $\iint\limits_S z^2dxdy$， S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分，取下侧.

解：， S 在 xoy 面上的投影区域 D_{xy} 为三角形区域： $x\ge 0$， $y\ge 0$， $x+y\le 1$；

$$\iint\limits_S z^2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)^2dxdy=-\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy$$

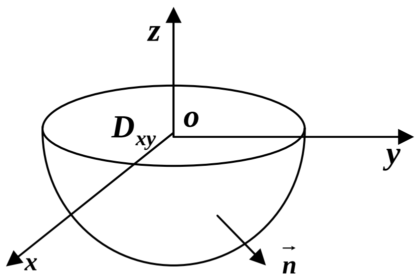
$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2d(1-x-y)=-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x)^3d(1-x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1=-\frac{1}{12}$$

2. 计算 $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$， S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分，取下侧.

解：设 S_1 是 S 在第五卦限的部分，S_1 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le R^2$，$x\ge 0$，

$y\ge 0$， 由于曲面 S 关于 zox 平面及 yoz 平面对称，被积函数关于变量 x 、 y 为偶函数，由对称性得：



$$\iint\limits_S x^2y^2zdxdy=4\iint\limits_{S_1}x^2y^2zdxdy$$

$$=-4\iint\limits_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho$$

$$\frac{\text{第2个积分}}{\text{令}\rho=R\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^7(\sin^5t-\sin^7t)dt$$

$$=4R^7(I_2-I_4)(I_5-I_7)=4R^7(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3})=\frac{2}{105}\pi R^7$$

3. 计算 $\oiint\limits_S z^2dxdy$， S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，取外侧.

解： 法 1（利用对称性）：由于 S 关于 $z=0$ 对称，被积函数关于变量 z 是偶函数，而积分变量不含变量 z，由第二类曲面积分的对称性得： $\oiint\limits_S z^2dxdy=0$

法 2（直接计算）：设 S_1、S_2 分别是上、下椭球面，它们在 xoy 面上的投影区域

D_{xy} ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$，则

$$\oiint\limits_{S} z^2dxdy=\iint\limits_{S_1} z^2dxdy+\iint\limits_{S_1} z^2dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} c^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dxdy=0$$

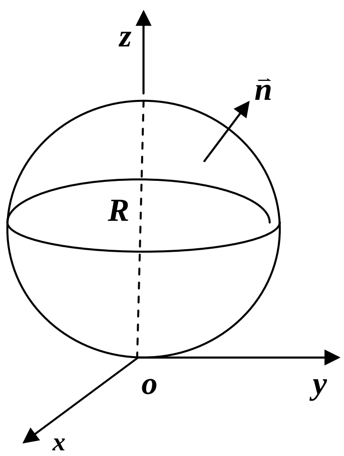
法 3（利用下节的高斯公式）：$\oiint\limits_{S} z^2dxdy=\iiint\limits_{V} 2zdxdydz \overset{\text{由对称性}}{=\!=\!=} 0$

4. 计算 $\oiint\limits_{S} z^2dxdy$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 的外侧.

解：法 1（直接计算）：设 S_1、S_2

分别是上、下球面，它们在 xoy 面上的投影区域

D_{xy} ：$x^2+y^2\le R^2$，则



$$\oiint\limits_{S} z^2dxdy=\iint\limits_{S_1} z^2dxdy+\iint\limits_{S_1} z^2dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(R+\sqrt{R^2-x^2-y^2})^2dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}(R-\sqrt{R^2-x^2-y^2})^2dxdy$$

$$=4R\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=4R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho=\frac{8}{3}\pi R^4$$

法 2（利用平移及对称性）：令 $z'=z-R$，则 S 的方程为 $x^2+y^2+z'^2=R^2$

$$\oiint\limits_{S} z^2dxdy=\oiint\limits_{S}(z'+R)^2dxdy=\oiint\limits_{S} z'^2dxdy+2R\oiint\limits_{S} z'dxdy+R^2\oiint\limits_{S} dxdy$$

$$\overset{\text{利用对称性}}{=\!=\!=} 0+4R\iint\limits_{S_{上}} z'dxdy+0=4R\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy \overset{\text{同法1}}{=\!=\!=} \frac{8}{3}\pi R^4$$

法 3（利用下节的高斯公式）：

$$\oiint_S z^2 dxdy=\iiint_V 2zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}2r^3\sin\varphi\cos\varphi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\times\frac{(2R)^4}{4}\sin\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi=16\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^5\varphi\,d(\cos\varphi)=\frac{8}{3}\pi\,R^4$$

5. 计算$\oiint_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$，$z=2$所围立体的全表面，取外侧.

解：法 1（直接计算）：设S_1、S_2、S_3分别是立体的上、下底及侧面，

$$\oiint_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{S_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint_{S_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint_{S_3}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le4}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy-\iint_{x^2+y^2\le1}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy-\iint_{1\le x^2+y^2\le4}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=e^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho-e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 e^{\rho}d\rho$$

$$=4\pi\,e^2-2\pi\,e-2\pi(e^2-e)=2\pi\,e^2$$

法 2（利用下节的高斯公式）：设S所围区域为V，锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围区域为V_1，锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=2$所围区域为V_2，

$$\oiint_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iiint_V\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

$$=\iiint_{V_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz-\iiint_{V_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

$$\xlongequal[\text{变换}]{\text{柱坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_\rho^2 e^z dz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_\rho^1 e^z dz=2\pi(e^2+1)-2\pi=2\pi\,e^2$$

6. 计算$\iint_S\vec v\cdot d\vec S$，$\vec v=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\vec i+y\vec j+z\vec k)$，$S$是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的下侧.

解：法 1（直接计算）：S在xoy面上的投影区域D_{xy}：$x^2+y^2\le R^2$，在yoz面上的投

影区域 D_{yz}：$y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$，则由变量轮换的对称性得

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}=\iint_S \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dydz+\iint_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdy$$

$$\xlongequal{\text{由对称性}} 4\iint_{S_{前}} \frac{x}{R}dydz+\iint_S \frac{z}{R}dxdy$$

$$=-\frac{4}{R}\iint_{Dyz}\sqrt{R^2-y^2-z^2}dydz-\frac{1}{R}\iint_{Dxy}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dydz$$

$$=-\frac{4}{R}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho-\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho$$

$$=-\frac{4}{R}\cdot\pi\cdot\frac{R^3}{3}-\frac{1}{R}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3}=-2\pi R^2$$

法 2（利用向量乘积法计算）：$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{R}\iint_S\{x,y,z\}\cdot d\vec{S}$

$$=\frac{1}{R}\iint_S\{x,y,z\}\cdot\left\{\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},1\right\}dxdy$$

$$=\frac{1}{R}\iint_S\frac{R^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=-R\iint_{D_{xr}}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=-R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=-2\pi R^2$$

法 3（利用下节的高斯公式）：补曲面 $S_1: x^2+y^2\le R^2, z=0$，取上侧，

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}=\iint_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{R}\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{R}\Big(\oiint_{S+S_1}xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint_{S_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{R}\Big(-\iiint_V 3dv-0\Big)=-\frac{3}{R}\cdot\frac{2}{3}\pi R^3=-2\pi R^2$$

注：与格林公式一样，利用高斯公式计算曲面积分时，必须注意：(1)要弄清 X、Y、Z，；(2) X、Y、Z 必须满足条件“在 V 上有连续的一阶偏导数”，否则会得出错误的结果。法

3 中若直接对 $\iint\limits_{S} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 补面后使用高斯公式，则是错误的解法，因为 X、Y、Z)不满足条件“在V上有连续的一阶偏导数”（原点在V上，原点处一阶偏导数不存在），法 3 的处理技巧应该掌握。

法 3 常见错误解法：

补曲面 $S_1: x^2+y^2 \le R^2, z=0$，取上侧，

$$\iint\limits_{S} \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \oiint\limits_{S+S_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \iint\limits_{S_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\xlongequal[\text{故该等式出现错误}]{\text{在}S_1\text{上},\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ne R} \frac{1}{R}\oiint\limits_{S+S_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$- \iint\limits_{S_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{1}{R}(-\iiint\limits_{V} 3dv - 0) = -\frac{3}{R}\cdot\frac{2}{3}\pi R^3 = -2\pi R^2$$

该题答案凑巧未错，该错误出现在其它题中，答案就有可能有误（见下题，很多学生出现类似错误）。

附：2005 级《微积分 A》期末试卷 (A 卷)

七、（8 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{2axdydz+(z-a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad(a>0)$ 的上侧.

正确答案：$I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}2axdydz+(z-a)^2dxdy$

补充平面 $S: z=0,\ x^2+y^2\le a^2$，取下侧，则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma+S}2axdydz+(z-a)^2dxdy=\iiint\limits_{V}[2a+2(z-a)]dxdydz$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a}r^3\cos\varphi\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi a^4}{2}$$

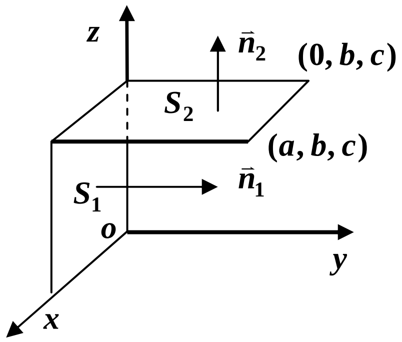
$$\iint\limits_S 2axdydz+(z-a)^2dxdy=\iint\limits_S a^2dxdy=-a^2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=-\pi a^4$$

$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+S}-\iint\limits_{S}=\frac{3\pi a^4}{2},\quad I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}=\frac{3\pi a^3}{2}.$$

7. 计算 $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$，$\vec{F}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+zxyz\vec{k}$，

S 由 S_1 和 S_2 组成，如图. S_1 取右侧，

S_2 取上侧.



解：$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}$

$$=\iint\limits_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+xyzdxdy+\iint\limits_{S_2}x^2dydz+y^2dzdx+xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{S_1}y^2dzdx+\iint\limits_{S_2}xyzdxdy=\iint\limits_{S_1}0dzdx+\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}xycdxdy=c\int_0^a dx\int_0^b xydy=\frac{a^2b^2c}{4}$$

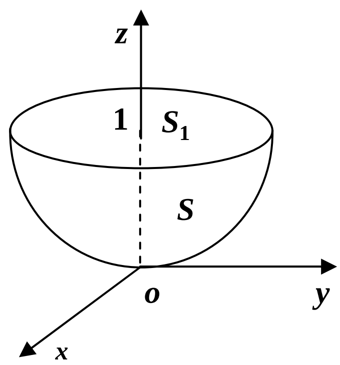
8. 计算 $\iint\limits_S zdxdy+xdydz+ydzdx$，$S$ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (z\le 1)$ 的上侧.

解：法 1（直接计算）：由变量轮换的对称性得

$$\iint\limits_S zdxdy+xdydz+ydzdx$$

$$=\iint\limits_S zdxdy+2xdydz$$

$$\underline{\underline{\text{由对称性}}}\ \iint\limits_S zdxdy+4\iint\limits_{S_{前}}xdydz$$



$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy+4\iint\limits_{y^2\le z\le 1}\sqrt{z-y^2}\,dydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho+4\int_{-1}^1dy\int_{y^2}^1\sqrt{z-y^2}\,dz=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

法 2（利用向量乘积法计算）：

$$\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx = \iint_S \{x, y, z\}\cdot\{-2x, -2y, 1\}dxdy$$

$$= \iint_S (-2x^2 - 2y^2 + z)dxdy = -\iint_S (x^2 + y^2)dxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2 + y^2)dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{\pi}{2}$$

法 3（利用下节的高斯公式）：补曲面 $S_1: x^2 + y^2 \le 1, z = 0$，取下侧，

$$\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$$

$$= \oint\!\!\oint_{S+S_1} zdxdy + xdydz + ydzdx - \iint_{S_1} zdxdy + xdydz + ydzdx$$

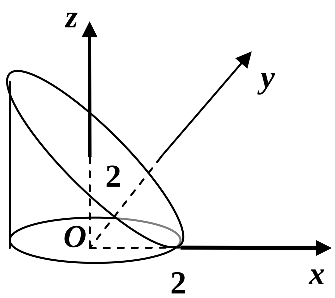
$$= -\iiint_V 3dv + \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy = -3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^1 dz + \pi\cdot 1^2$$

$$= -\frac{3}{2}\pi + \pi = -\frac{\pi}{2}$$

9. 计算 $\iint_S (z+1)dxdy - ydzdx$， S

为柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 被平面 $z = 0$，

$x + z = 2$ 所截部分的外侧.



解：法 1（直接计算）：

$$\iint_S (z+1)dxdy - ydzdx = -\iint_S ydzdx$$

$$= -\iint_S ydzdx \xlongequal{由对称性} -2\iint_{S_右} ydzdx = -2\iint_{\substack{-2\le x\le 2\\ 0\le z\le 2-x}} \sqrt{4-x^2}dzdx$$

$$= -2\int_{-2}^{2} dx\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}dz = -2\int_{-2}^{2}(2-x)\sqrt{4-x^2}dx$$

$$= -2\int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}dx = -8\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$$

$$\xlongequal{令x = 2\sin t} -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = -16I_2 = -32\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -8\pi$$

法 2（利用向量乘积法计算）： $\iint_S (z+1)dxdy - ydzdx$

$\iint_S \{0, -y, z+1\}\cdot\left\{\frac{x}{y}, 1, 0\right\}dzdx = -\iint_S ydzdx$，以后的步骤同法 1.

法 3（利用下节的高斯公式）：补曲面 $S_1: x^2+y^2\le 4, z=0$，取下侧，

$S_2: x^2+y^2\le 4, x+z=2$，取上侧，

$$\iint_S (z+1)dxdy - ydzdx$$

$$= \oiint_{S+S_1+S_2} (z+1)dxdy - ydzdx - \iint_{S_1}(z+1)dxdy - ydzdx - \iint_{S_2}(z+1)dxdy - ydzdx$$

$$= \iiint_V (0-1+1)dv + \iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy - \iint_{x^2+y^2\le 4}(3-x)dxdy + 0$$

$$= -2\iint_{x^2+y^2\le 4} dxdy + \iint_{x^2+y^2\le 4} xdxdy \xlongequal[\text{第2个积分由对称性}]{\text{第1个积分由几何意义}} -2\times\pi\cdot 2^2 + 0 = -8\pi$$