8.5 重积分的换元法

1. 二重积分的换元法

定理1 设 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的闭区域 D_{xy} 上连续，变换 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$将 uov 平面上的闭区域 D_{uv}变为 xoy 平面上的 D_{xy}，且满足

(1) $x(u,v), y(u,v)$ 在 D_{uv}上具有一阶连续偏导数；

(2) 在 D_{uv}上雅可比行列式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$;

(3) 变换 $D_{uv}\rightarrow D_{xy}$ 是一对一的，则有

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint_{D_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|J(u,v)\right|dudv$$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{J(x,y)}$$

极坐标变换 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 的雅可比行列式为

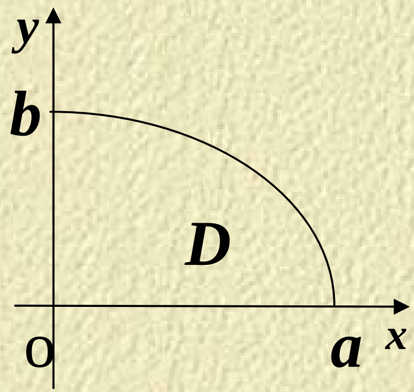
$$J(\rho,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho$$

变换 $\begin{cases} x=x_0+\rho\cos\theta \\ y=y_0+\rho\sin\theta \end{cases}$ 的雅可比行列式为

$$J(\rho,\theta)=\rho$$

例1 (书中例1) 计算 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,d\sigma$

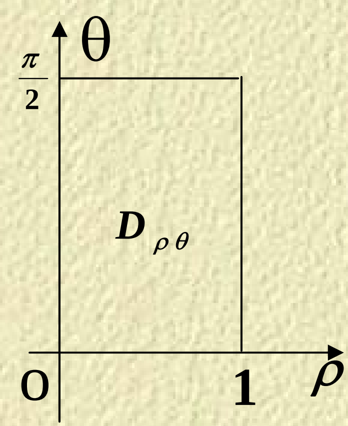
其中 D 是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0(a>0,b>0)$



解: 作广义极坐标变换

$$x = a\rho\cos\theta,\ \ y = b\rho\sin\theta$$

将积分区域 D 变为积分区域 $D_{\rho\theta}$



$$D_{\rho\theta}:\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$$

$$\because J(\rho,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

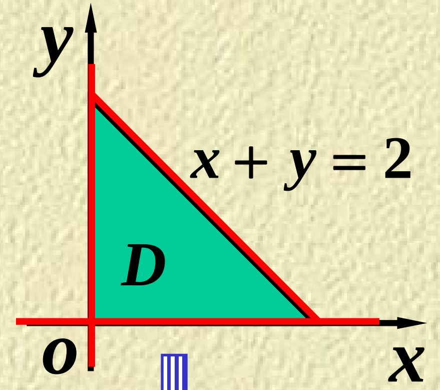
$$=ab\rho$$

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}d\sigma$$

$$=\iint_{D_{\rho\theta}} \sqrt{1-\rho^2}ab\rho d\rho d\theta$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{6}ab$$

例2（书中例3） 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，其中 D 由 x 轴、y轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.



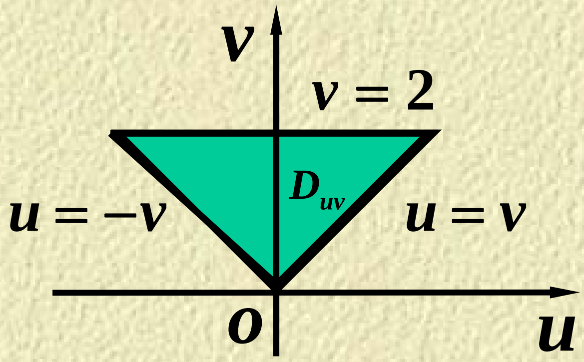
解 令 $u=y-x,\quad v=y+x,$

则 $x=\dfrac{v-u}{2},\quad y=\dfrac{v+u}{2}.$

$D\to D_{uv}$： $x=0\ \to u=v;$

$y=0\ \to u=-v;$

$x+y=2\ \to v=2.$

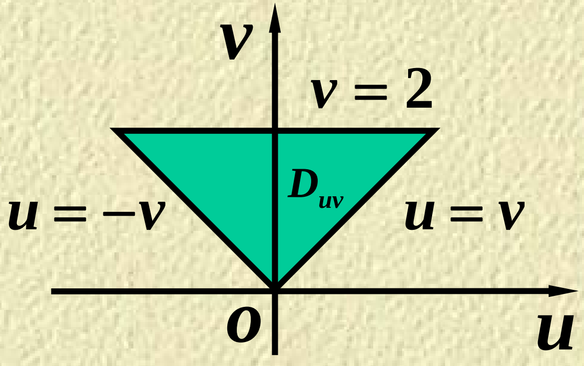


上页 下页 返回

令 $u=y-x,\quad v=y+x,$ 则 $x=\dfrac{v-u}{2},\quad y=\dfrac{v+u}{2}.$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2};$$

或 $J(x,y)=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,\ \Rightarrow J(u,v)=-\dfrac{1}{2}$



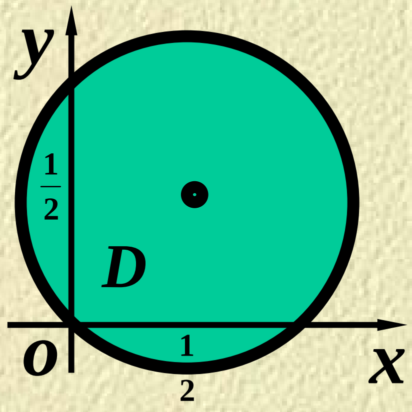
故 $$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\iint_{D_{uv}} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})vdv$$

$$=e-e^{-1}$$

上页 下页 返回

例3（书中例2） 计算 $\iint_D (x+y)dxdy$, 其中 D 由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 围成.



解1: $D:(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$

令 $x=\frac{1}{2}+\rho\cos\theta,\quad y=\frac{1}{2}+\rho\sin\theta$

$D_{\rho\theta}:0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 此时 $dxdy=\rho d\rho d\theta$

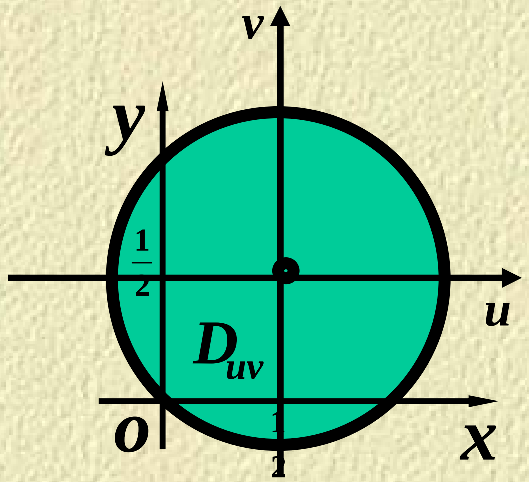
详解见教材 P144

问题: 若令 $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$

$D_{\rho\theta}:?\le\theta\le?,\ ?\le\rho\le?$

答案 $D_{\rho\theta}:\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\\0\le\rho\le\cos\theta+\sin\theta\end{cases}$

解2: $D:(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$



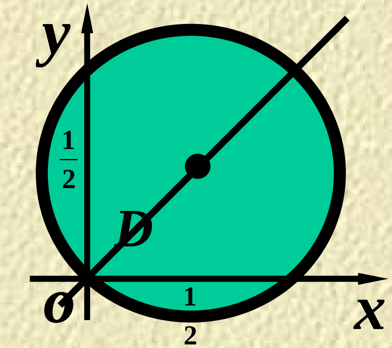
令 $x=\frac{1}{2}+u,\quad y=\frac{1}{2}+v$

$D_{uv}:u^2+v^2\le\frac{1}{2}$ 此时 $dxdy = dudv$

$$\iint_D (x+y)dxdy = \iint_{D_{uv}} (u+v+1)dudv$$

由对称性 $\iint_{D_{uv}} dudv = D_{uv}$的面积 $=\frac{\pi}{2}$

解3: $D:(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$



$$\iint_D (x+y)dxdy \xlongequal[\text{的对称性}]{\text{由变量轮换}} 2\iint_D xdxdy$$

$$\xlongequal[\text{坐标的公式}]{\text{由均匀薄板求质心}} 2\bar{x}\iint_D dxdy = 2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

非均匀薄板质心坐标:

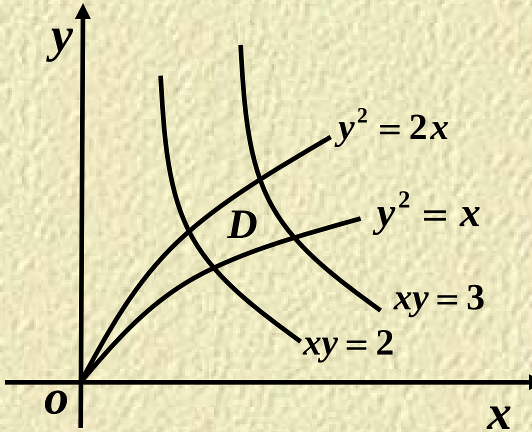
$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}.$$

当$\rho(x,y)=k$时, $\Rightarrow \iint_D xd\sigma=\bar{x}\iint_D d\sigma,\quad \iint_D yd\sigma=\bar{y}\iint_D d\sigma$

上页 下页 返回

例 4　计算二重积分 $I=\iint\limits_D dxdy$

其中 D 是由 $y^2=x, y^2=2x$ 及 $xy=2, xy=3$ 围成的区域。

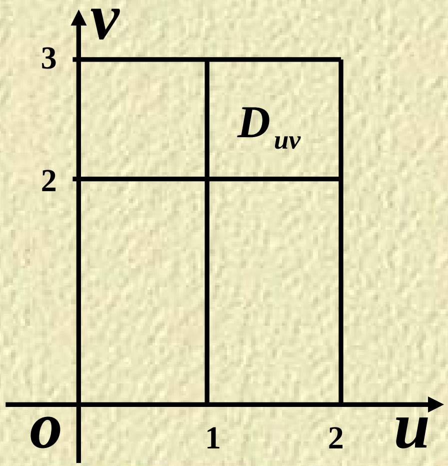


解: 作变换 $\begin{cases} y^2=ux \\ xy=v \end{cases}$

$y^2=x \to u=1,\ \ y^2=2x \to u=2,$

$xy=2 \to v=2,\ \ \ xy=3 \to v=3$

$D_{uv}:\begin{cases} 1\le u\le 2, \\ 2\le v\le 3 \end{cases}$



上页　下页　返回

作变换$y^2=ux,\ xy=v$ 即 $x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}},\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}$

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3u}$$

或由变换得 $u=\frac{y^2}{x},\ v=xy$

$$J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}=-3\frac{y^2}{x}=-3u\Rightarrow J(u,v)=-\frac{1}{3u}$$

$$I=\iint_D dxdy=\iint_{D_{uv}}\frac{1}{3u}dudv=\frac{1}{3}\int_2^3 dv\int_1^2\frac{1}{u}du=\frac{1}{3}\ln 2$$

上页 下页 返回

2. 三重积分的换元法

定理 2 设函数 $f(x,y,z)$ 在直角坐标系 $oxyz$ 空间的有界闭区域 V_{xyz} 上连续，变换

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

将直角坐标系 $ouvw$ 空间中的有界闭区域 V_{uvw} 变换成闭区域 V_{xyz}

且满足

(1) $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$

在区域V_{uvw}中有一阶连续偏导数;

(2) 在V_{uvw}上，雅可比行列式 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \neq 0$

(3) 变换: $V_{uvw} \to V_{xyz}$是一对一的

则有 $\iiint\limits_{V_{xyz}} f(x,y,z)dv =$

$$\iiint\limits_{V_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

上页 下页 返回

球坐标变换 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,y)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -r^2\sin\varphi$$

故球坐标系下的体积元 素

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,y)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| drd\varphi d\theta = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

上页 下页 返回

例 5（书中例 4）求椭球体 $V:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积。

解: 作广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta\sin\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\varphi \end{cases} \qquad V_{r\varphi\theta}: \begin{cases} 0\le\theta<2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi, \\ 0\le r\le 1 \end{cases}$$

$$\because \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi$$

$$V=\iiint\limits_{V} dv=\iiint\limits_{V_{r\varphi\theta}} abcr^2\sin\varphi\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^2dr=\frac{4}{3}\pi abc$$

小结

1. 作什么变换主要取决于积分区域 D 的形状，同时也兼顾被积函数 $f(x,y)$ 的形式.

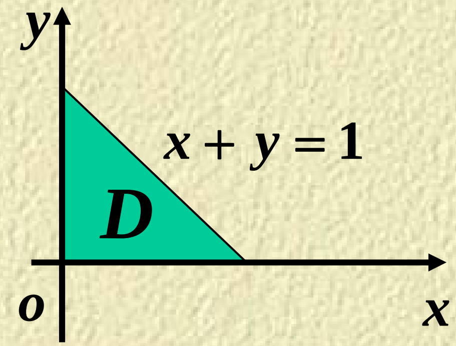
基本要求：变换后定限简便，求积分容易.

2. $$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{J(x,y)}.$$

思考题

计算$\iint\limits_D \dfrac{y}{x+y}e^{(x+y)^2}d\sigma$，其中 D：$x+y=1$，$x=0$和$y=0$所围成.

思考题解答



令$\begin{cases} u=x+y \\ v=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=u-v \\ y=v \end{cases}$,

雅可比行列式$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$,

变换后区域为

上页 下页 返回

令 $\begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases}$

$$D_{uv}: \quad x+y=1 \Rightarrow u=1$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow u = v$$
$$y = 0 \quad \Rightarrow v = 0$$

$$\iint_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma$$
$$= \iint_{D_{uv}} f(u,v)\,|J|\,dudv$$
$$= \int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{u} \cdot e^{u^2} dv = \int_0^1 \frac{u}{2} \cdot e^{u^2} du$$
$$= \frac{1}{4}(e-1).$$