习题 3.2(P153)

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$

解：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{m}{n}a^{m-n}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x-x}{x\cdot x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^x}{2}=\frac{3}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{\cos x}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{1}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x}{\frac{1}{1+x}}=2$

或：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=2$$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x}$

$=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!(\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$

(7) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

或：$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{t=x-1}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\cdot t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{2t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{2t}=\dfrac{1}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$ （利用了无穷小替换$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$）

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{-x\sin x}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

或：$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left(1+(\frac{\sin x}{x}-1)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

由于 $\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}-1)=0$，$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$，

$$\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x}-1)\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

故 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

(10) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}\ \overline{\overline{\text{无穷小}}}_{\text{替换}}\ \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}\lim_{x\to0}e^{\sin x}=1$

(11) $\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\frac{x}{1+x}\right]$

解：$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\frac{x}{1+x}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln x+\ln(1+x)\right]$

$$=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln x\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln x-(1+x)^2\ln x}{(1+x)^2}\right]=-\lim_{x\to0^+}(x^2+2x)\ln x$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{(x^2+2x)^{-1}}\ \overline{\overline{\text{洛必达}}}_{\text{法则}}-\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-(2x+2)(x^2+2x)^{-2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}x(x+2)^2=0$$

(12) $\lim_{x\to\pi}\left(1-\tan\frac{x}{4}\right)\sec\frac{x}{2}$

解：$\lim_{x\to\pi}\left(1-\tan\frac{x}{4}\right)\sec\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\tan\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{4}}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sec^2\frac{x}{4}}{\sin\frac{x}{2}}=1$

(13) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\tan x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-\frac{\ln x}{\cot x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}}=e^0=1$$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(\dfrac{\arcsin x}{x}-1)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\arcsin x}{x}-1)=\lim_{x\to 0}(\frac{\arcsin x-x}{x})=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\arcsin x}{x}-1)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}(\frac{\arcsin x-x}{x^3})\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{\sin^3 t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}=\frac{1}{6}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$

(15) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}=1^0=1$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}$

$$\underset{\text{替换}}{\overset{\text{无穷小}}{=\!=\!=}}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{e}{2}$$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}\quad(b>0)$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{be^x}{a+be^x}}{1}=\frac{1}{\sqrt{b}}$$

注： 第一步的处理很巧妙，避开了直接使用罗必达法则对根式求导的繁琐，值得借鉴.

或：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{a}{be^x}+1)be^x}{\sqrt{a+bx^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{a}{be^x}+1)+\ln b+x}{\sqrt{a+bx^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{a}{be^x}+1)+\ln b+x}{\sqrt{a+bx^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{a}{be^x}+1)}{\sqrt{a+bx^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln b}{\sqrt{a+bx^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a}{be^x}}{\sqrt{a+bx^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln b}{\sqrt{a+bx^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}=0+0+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$

2. 判断下列极限能否用洛必达法则计算，并计算极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

解：因为分子、分母分别求导后，极限不存在，故不能用洛必达法则计算.

(1) $\because\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ $\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x/x}{1+\sin x/x}=1$

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$.

解：因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}\overset{\text{无穷小}}{\underset{\text{代换}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(0+1-\cos x)-f(0)]\cdot(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{1-\cos x\to 0}\dfrac{[f(0+1-\cos x)-f(0)]}{(1-\cos x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

错误解法： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}\overset{\text{罗必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(1-\cos x)\cdot\sin x}{2x\sec^2 x^2}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

最后一步求极限用到了 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续可导性，但题目条件不足.

4. 设函数 $f(x)$ 二阶可导，求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$.

解：因为 $f(x)$ 二阶可导，故函数 $f(x)$ 在点 x 处连续，即有

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)=\lim_{h\to 0}f(x-h)=f(x)$$

所以 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

$\overset{\text{对}h\text{求导,}x\text{为常数}}{\underset{\text{用罗必达法则}}{=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$

$\overset{\text{题中没有二阶连续可导　的条件，故不}}{\underset{\text{能再应用洛必达法则，　用导数定义求}}{=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f'(x+h)-f'(x)]-[f'(x-h)-f'(x)]}{2h}$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x)$$

错误解法：

(1)用洛必达法则时，未弄清表达式中在求极限时 x 和 h 哪个是变量，不知道是对 x 求导还是对 h 求导

(2)应用了两次洛必达法则，误用了"函数 $f(x)$ 二阶连续可导"的条件，而题设中并没有二阶连续可导性.

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ f'(0) & x=0\end{cases}$$

试求 $g'(0)$，并判断在点 $x=0$ 处的连续性.

解：$g'(x)=\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\quad (x\neq 0)$

因为函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$

即函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续，

所以 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$$\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}$$

或由导数的定义 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

6. 确定 a,b，使 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}x^2(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=\lim\limits_{x\to 0}(x^{-1}\sin 3x+a+bx^2)=3+a=0$

$a=-3$

$\therefore b=-\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x-3x^{-2})=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-3x}{x^3}$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}-\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}-\lim_{x\to 0}\frac{-(3x)^2/2}{x^2}=\frac{9}{2}$$

7. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， $f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

解：因为函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，故 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=f''(0)$，且 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 均在 $x=0$ 处连续，

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可得 $\qquad f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0\times 0=0$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}}$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}}\xlongequal[\text{连续性}]{\text{二阶}}e^{\frac{f''(0)}{2}}=e^2$$

易出的错误： 有的同学没有说明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$ 就使用洛必达法则