习题 10.3(P244)

1.讨论下列级数的敛散性.如果收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

解：$x>\ln x\quad(x>1)$，故 $\frac{1}{\ln n}<\frac{1}{n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$，因为函数 $\ln x$ 单调递增，故数列 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减，即 $\frac{1}{\ln n}\geq\frac{1}{\ln(n+1)}$，

由莱布尼兹准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 条件收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

解：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{3^n}$

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n-1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n-1}}{3}=\frac{1}{3}<1$

由根值判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{3^n}$ 绝对收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$

解：$\frac{|\cos n|}{\sqrt{n^3}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^3}}$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 收敛，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3}}$ 绝对收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$

解：因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 发散，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\geq\frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$

由莱布尼兹准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$ 条件收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

解： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

因为级数 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

由莱布尼兹准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 条件收敛.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\neq 0$， 由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 发散.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$

解： $\because \frac{1}{n-\ln n}>0$ 　而 $\because \frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$ ，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

由比较判别法知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ 发散.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}}=0$ ，设 $f(x)=x-\ln x$ ，则

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}\geq 0 \quad (x\geq 1)$$

即 $n-\ln n$ 单调递增，也即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减，

由莱布尼兹准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 条件收敛

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{n^2}\right]$

解：由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均收敛，

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{n^2}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{n^2}$$

由级数的性质及比较判别法知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{n^2}\right]$ 绝对收敛.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2-(-1)^n}{n^2}$

解：$\frac{2-(-1)^n}{n^2}\le\frac{3}{n^2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

由比较判别法知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2-(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$

解：$\frac{n}{n^2+1}\le\frac{1}{n}$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ 发散.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$，　设 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，则 $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\le 0$

即 $\frac{n}{n^2+1}$ 单调递减，

由莱布尼兹准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ 条件收敛.

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$，其中 $\alpha>0$

解：$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\alpha^2}{2}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})$ 绝对收敛.

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin\frac{\pi}{b^n+1}\quad(0<a<b)$

解：$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}\sin\frac{\pi}{b^{n+1}+1}}{a^n\sin\frac{\pi}{b^n+1}}\right|=a\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{b^n+1}{b^{n+1}+1}\cdot\left|\frac{\left(\sin\frac{\pi}{b^{n+1}+1}\right)\Big/\frac{\pi}{b^{n+1}+1}}{\left(\sin\frac{\pi}{b^n+1}\right)\Big/\frac{\pi}{b^n+1}}\right|$$

$$=a\lim_{n\to\infty}\frac{b^n+1}{b^{n+1}+1}=\begin{cases}a & 当b<1时\\ a & 当b=1时\\ a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{b^n}}{b+\frac{1}{b^n}} & 当b>1时\end{cases}=\begin{cases}a<1 & 当b<1时\\ a<1 & 当b=1时\\ \dfrac{a}{b}<1 & 当b>1时\end{cases},$$

因而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin\frac{\pi}{b^n+1}\quad(0<a<b)$ 绝对收敛.

2. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 的敛散性.

分析: $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，因为函数 $\ln(1+x)$ 单调递增，故数列 $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

单调递减，即 $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$，由莱布尼兹准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}=1$$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其中 $a_n>0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\tan\frac{1}{n}\right)a_{2n}$ 的敛散性.

解：由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\tan\frac{1}{n}\right)a_{2n}}{a_{2n}}=1$$，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\tan\frac{1}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，常数 $\lambda>0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的敛散性.

解：由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$ 收敛及级数收敛的性质知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda})$ 收敛，

又 $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda})$，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也绝对收敛.

解：已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 收敛，则由级数收敛的性质知：$\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 收敛，

又 $|u_n+v_n|\le|u_n|+|v_n|$，由比较判别法知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 绝对收敛.