第9章　曲线积分和曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间	平面	空间	曲线	曲面

$$\text{曲线积分}\begin{cases}\text{对弧长的曲线积分} & \text{（第一类）}\\ \text{对坐标的曲线积分} & \text{（第二类）}\end{cases}$$

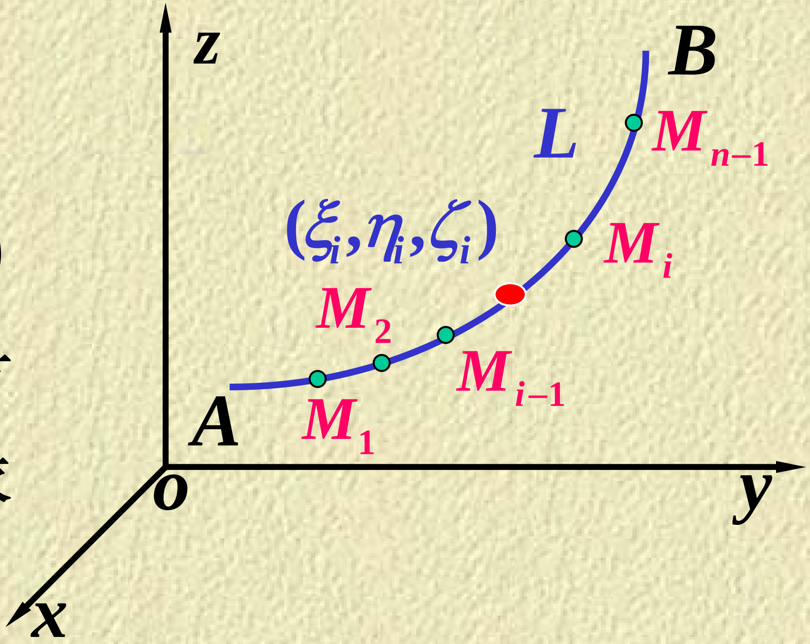
$$\text{曲面积分}\begin{cases}\text{对面积的曲面积分} & \text{（第一类）}\\ \text{对坐标的曲面积分} & \text{（第二类）}\end{cases}$$

9.1 第一类曲线积分

1.概念与性质

引例:曲线形构件的质量

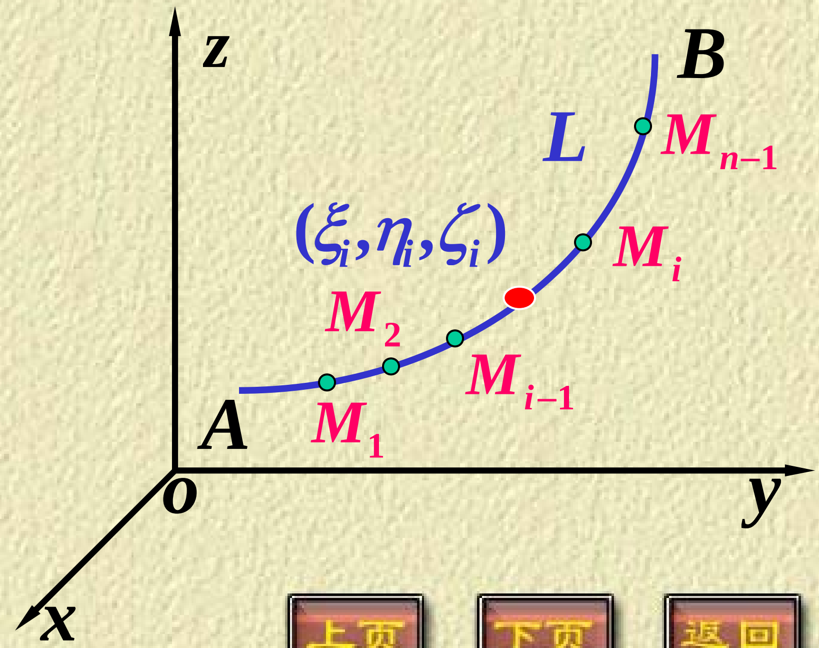
有一条物质曲线 $L(\overset{\frown}{AB})$ 其上任一点 $P(x,y,z)$ 处有线密度 $\rho=\rho(x,y,z)$ 如何求它的总质量呢?



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$$

上页 下页 返回

定义 设曲线 $L(\widehat{AB})$ 是光滑或逐段光滑的曲线，$f(x,y,z)$ 是定义在曲线 $L(\widehat{AB})$ 上的有界函数，把 $L(\widehat{AB})$ 任意地分成 n 个子弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}(i=1,2,\ldots,n, M_0=A, M_n=B)$ 其长度记作 Δl_i，



上页 下页 返回

在每个子弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 任取一点 $Q_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 作和式再记 $\lambda=\max\{\Delta l_1,\Delta l_2,\ldots,\Delta l_n\}$ 如果当 $\lambda\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在 曲线 $L(\widehat{AB})$ 上的第一类曲线积分，或称为对弧长的曲线积分记作 $\int_L f(x,y,z)dL$ 或 $\int_{AB} f(x,y,z)dl$，

被积函数

即 $$\int_L f(x,y,z)dl=\lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta l_i}$$

积分和式

积分路径

曲线弧长元素 ds

由第一类曲线积分的定义，引例中的物质曲线的质量可表示为

$$m=\int_L \rho(x,y,z)dl$$

当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时，有

$$\int_L dl=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = l$$

l 为积分曲线 L 的长度。

若 L 为封闭曲线，常用“$\oint_L$ ”代替“$\int_L$ ”。

第一类曲线积分存在条件:

当 $f(x,y,z)$在光滑曲线弧 L上连续时，

对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y,z)dl$ 存在.

性质 (常用)

(1) $\int_L kf(x,y,z)dl = k\int_L f(x,y,z)dl$ (k为常数).

(2) $\int_L [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dl = \int_L f(x,y,z)dl \pm \int_L g(x,y,z)dl.$

(3) $\int_L f(x,y,z)dl = \int_{L_1} f(x,y,z)dl + \int_{L_2} f(x,y,z)dl.$

$(L = L_1 + L_2).$

(4) $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z)dl$

当积分曲线对称、被积函数具有奇偶性时，第一类曲线积分具有与重积分相同的对称性质。

当 L 为平面曲线时，$\int_L f(x,y)dl$ 与 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 有相同的性质：

(1)若 L 对称于 x (或 y)轴， $f(x,y)$ 为 y (或 x)的奇函数，则 $\int_L f(x,y)dl=0$

(2)若 L 对称于 x (或 y)轴， $f(x,y)$ 为 y (或 x)的偶函数，则 $\int_L f(x,y)dl=2\int_{L_1} f(x,y)dl$

$L=L_1+L_2$ 且 L_1 与 L_2 关于 x (或 y)轴对称.

当 L 为空间曲线时， $\int_L f(x,y,z)dl$ 与 $\iiint_V f(x,y,z)dV$ 有相同的性质：

(1) 若 L 对称于 xoy(或 yoz 、或 zox)坐标面，$f(x,y,z)$ 为 z (或 x 、或 y)的奇函数，则

$$\int_L f(x,y,z)dl = 0$$

(2)若 L 对称于 xoy(或 yoz 、或 zox)坐标面，$f(x,y,z)$ 为 z (或 x 、或 y)的偶函数，则

$$\int_L f(x,y,z)dl = 2\int_{L_1} f(x,y,z)dl$$

$L = L_1 + L_2$,且 L_1 和 L_2 关于 xoy(或 yoz 、或 zox)面对称.

2. 对弧长曲线积分的计算

思路: 曲线积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 定积分

积分路径的曲线方程的表达形式不同，曲线积分进行相应的转化.

上页 下页 返回

2. 对弧长曲线积分的计算

设曲线 $L(\overset{\frown}{AB})$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

且 $x(t), y(t), z(t)$ 有连续的一阶偏导数，则曲线 L 的弧长微分

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

$$\int_L f(x,y,z)dl$$

$$= \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

如果积分路径 L 是由一般方程给出，即

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = g(x, y) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

此时需要把它化为参数方程（选择 x, y, z 中某一个为参数），再按上述方法计算。

注意

(1)定积分的上限 β 必须大于下限 α; $(dl \geq 0)$

(2)积分式中 x, y, z的不是彼此独立的，而 是相互有关的;

(3)若t由α到β不是单增的，需对曲线 L进行划分，使每一段均是单增的，再利 用积分路径的可加性 .

特殊情形(曲线 L 为平面曲线）

(1) $L: x=\varphi(t), y=\psi(t) \qquad a \le t \le b.$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

(2) $L: y=y(x) \qquad a \le x \le b.$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

$$=\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}dy.$$

(3) $L: \rho=\rho(\theta) \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f[\rho\cos\theta,\rho\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta.$$

计算第一类曲线积分的步骤:

(1)根据积分曲线及被积函数的形式，计算弧微分 dl

(2)变换被积表达式。

(3)确定积分上、下限。（上限大于下限）。

计算口诀: 一代:将曲线方程代入被积函数;

二换:将弧微分 dl 进行相应的变换;

三定限：确定定积分的上下限。

例1 求 $I=\int_L xyds$, L: 椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ (第I象限).

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}dt$

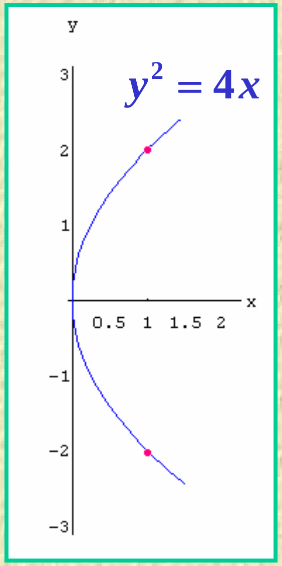
$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{ab}{a^2-b^2}\int_b^a u^2du \quad (\text{令} u=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})$$

$$=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

例2 求$I=\int_L yds,$

其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,–2)一段.



解 $I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+(\frac{y}{2})^2}dy=0.$

例3(书中例1) 求$I=\int_L xyzds,$ 其中$L: x=a\cos\theta,$

$y=a\sin\theta, z=k\theta$的一段. $(0\le\theta\le 2\pi)$

解 $I=\int_0^{2\pi} a^2\cos\theta\sin\theta\cdot k\theta\sqrt{a^2+k^2}d\theta$

$=-\frac{1}{2}\pi ka^2\sqrt{a^2+k^2}.$

上页 下页 返回

例4 求$I=\int_{\Gamma}x^2ds$,

其中Γ为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

解 由对称性，知 $\int_{\Gamma}x^2ds=\int_{\Gamma}y^2ds=\int_{\Gamma}z^2ds.$

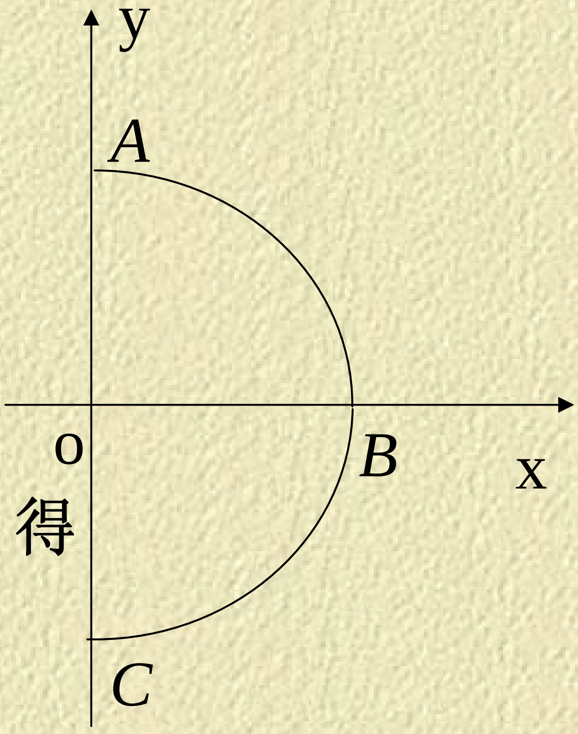
故 $I=\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)ds$

$=\frac{a^2}{3}\int_{\Gamma}ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$ ($2\pi a=\int_{\Gamma}ds$,球面大圆周长)

被积函数中的变量是积分曲线L上的点的坐标，故它们满足曲线L的方程，据此我们可以化简被积函数.

切记:重积分无此特点

例 5(书中例 2)　计算$\int_L |y| dl$，其中 L 是右半圆，即 $x^2+y^2=R^2\ (x\ge 0)$



分析　此题曲线 L 关于 x 轴对称，被积函数 $|y|$ 为 y 的偶函数，故有

$$\int_L |y| dl = 2\int_{AB} y dl$$

解　1　方程 $x^2+y^2=R^2$ 对 x 求导，得

$$y'_x = -\frac{x}{y},$$ 故

$$dl=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx=\frac{R}{|y|}dx$$

$$\int_L |y| dl = 2\int_0^R y\cdot\frac{R}{y}dx = 2R\int_0^R dx = 2R^2$$

上页　下页　返回

解 2 将曲线方程变为参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$dl = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = R\,dt$$

$$\int_L |y|\,dl = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t \cdot R\,dt = 2R^2$$

解 3 将曲线方程变为极坐标方程

$$\rho = R \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$dl = \sqrt{R^2 + 0^2}\,d\theta = R\,d\theta$$

$$\int_L |y|\,dl = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta \cdot R\,d\theta = 2R^2$$

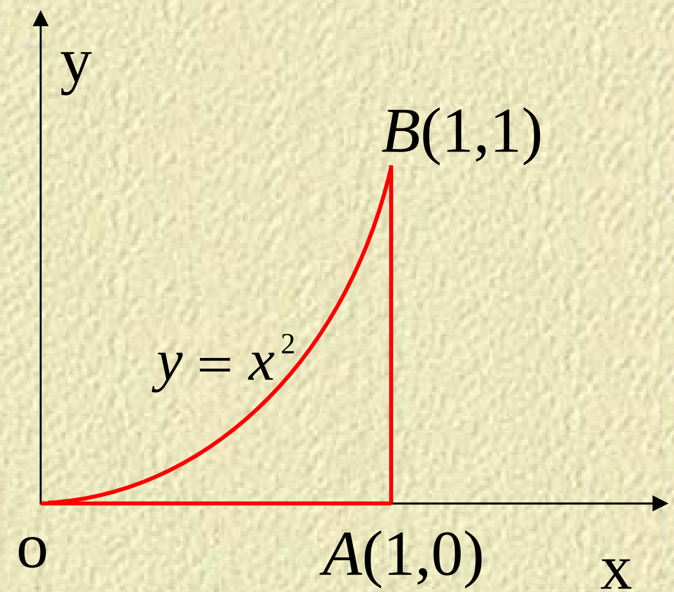
例 6(书中例 3) 计算$\int_L xydl$，其中 L 如图是封闭路径 $OABO$

解 $\int_L xydl=\int_{OA} xydl+\int_{AB} xydl+\int_{BO} xydl$ 其 中

$$\int_{OA} xydl=\int_0^1 0\cdot dx=0 \quad (y=0)$$

$$\int_{AB} xydl=\int_0^1 1\cdot ydy=\frac{1}{2}$$

(此时 $dl=dy$)



$$\int_{BO} xydl=\int_0^1 x\cdot x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

上页 下页 返回

令 $x^2 = t$

$$\frac{1}{8}\int_0^1 4t\sqrt{1+4t}\,dt \quad = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}$$

因此 $\int_L xydl = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{61}{120}$ $\int_L xydl = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{61}{120}$

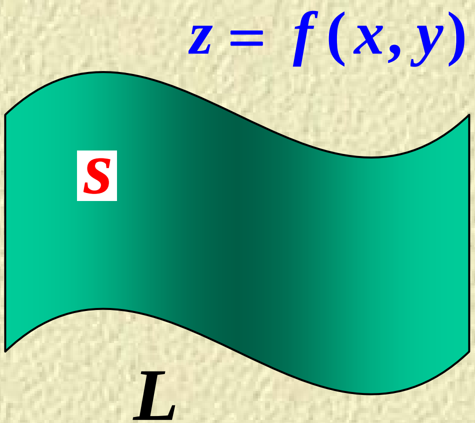
3.几何与物理意义

几何意义

(1) 当 $f(x,y,z)\equiv 1$时，$L_{\text{弧长}}=\int_L dl$;

(2) 当 $f(x,y)$表示立于 xoy面曲线L上的柱面在点 (x,y)处的高时(即$f(x,y)\geq 0$)，第一类曲线积分$\int_L f(x,y)dl$的值等于该柱面的面积.

$$S_{\text{柱面面积}}=\int_L f(x,y)dl.$$



物理意义

(1) 当 $\rho(x,y,z)$ (或 $\rho(x,y)$)表示 L 的线密度时，

$$M=\int_L \rho(x,y,z)dl\ ;$$

或 $$M=\int_L \rho(x,y)dl\ ;$$

(2) 曲线弧的质心坐标

xoy 坐标面上的曲线弧 L 的质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)dl}{\int_L \rho(x,y)dl},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)dl}{\int_L \rho(x,y)dl}.$$

空间曲线弧 L的质心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)dl}{\int_L \rho(x,y,z)dl},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y,z)dl}{\int_L \rho(x,y,z)dl},$$

$$\bar{z}=\frac{\int_L z\rho(x,y,z)dl}{\int_L \rho(x,y,z)dl}.$$

(3) 曲线弧对 坐标轴的转动惯量

xoy坐标面上的曲线弧 L对 x轴, y轴

及原点的转动惯量

$$J_x=\int_L y^2\rho(x,y)dl,\quad J_y=\int_L x^2\rho(x,y)dl.$$

$$J_o=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y)dl$$

空间曲线弧 L对 x轴, y轴, z轴及原点的转动惯量

$$J_x = \int_L (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl,$$

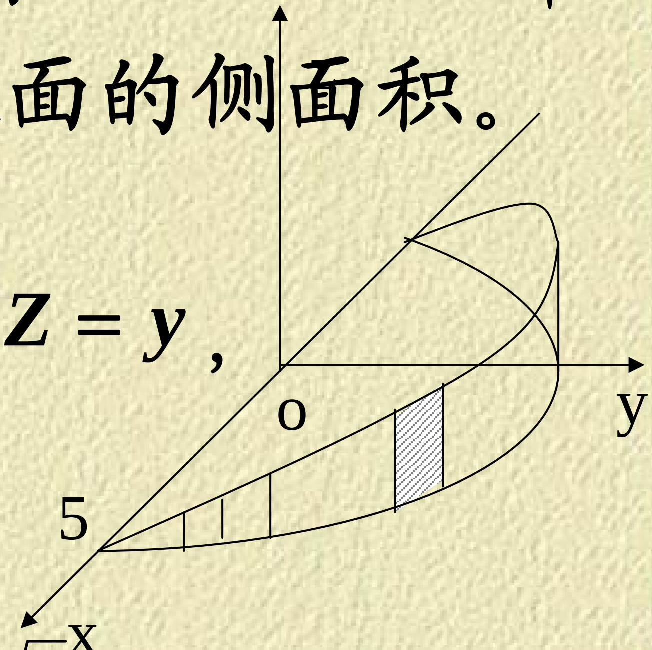
$$J_y = \int_L (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl.$$

$$J_z = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dl$$

$$J_o = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dl$$

上页 下页 返回

书中例 4 设有平面 $z=y$ 与椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 相截，求此平面的 $z\geq 0, y\geq 0$ 部分与 xoy 平面之间的椭圆柱面的侧面积。



解：侧面积为 $A=\int_L z\,dl$，因为 $Z=y$，

所以 $A=\int_L y\,dl$

此处积分路径采用参数方程 $x=\sqrt{5}\cos t$，$y=3\sin t\,(0\leq t\leq \pi)$ 计算方便，于是

$$A=\int_L y\,dl=\int_0^{\pi} 3\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt$$

$$= -3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2 t}\,d(\cos t)$$

令 $\cos t = u$

$$= -3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}\,du = 6\int_0^{1}\sqrt{5+4u^2}\,du$$

$$= 12\left[\frac{u}{2}\sqrt{\frac{5}{4}+u^2}+\frac{5}{8}\ln\left[u+\sqrt{\frac{5}{4}+u^2}\right]\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 9+\frac{5}{4}\ln 5$$

上页 下页 返回

五、小结

1、对弧长曲线积分的概念

2、对弧长曲线积分的计算

3、对弧长曲线积分的应用(曲线的弧长、立于曲线弧上的柱面的面积、物质曲线的质量、质心、绕坐标轴转动的转动惯量）

思考题

对弧长的曲线积分的定义中 Δl_i 的符号可能为负吗?

思考题解答

Δl_i 的符号永远为正，它表示弧段的长度.

历年研究生试题

第一类曲线积分

上页 下页 返回

1.(89,3)设平面曲线 L为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，

则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$ ________ .

解1: 下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$的参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\quad \pi\le t\le 2\pi \quad \text{则}$$

$$\int_L (x^2+y^2)ds$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt=\pi$$

解2: 由于下半圆周上的点 (x,y)满足$x^2+y^2=1$

则$\int_L (x^2+y^2)ds=\int_L 1ds=\pi$

上页 下页 返回

2.(98,3)设l是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，

则$\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)ds =$ ______ .

解：椭圆 l的方程可改写为 $3x^2+4y^2=12$，

将上式代入积分得 $\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)ds$

$$= \oint_l (2xy+12)ds = 2\oint_l xyds + 12\oint_l ds$$

由于 xy是x的奇函数，曲线 l关于y轴对称，

则 $\oint_l xyds = 0$ 而 $\oint_l ds = a$

则$\oint_l (2xy+3x^2+4y^2)ds = 12a$

作业：

P170：　1.　3.　5.　6.　8.　9.