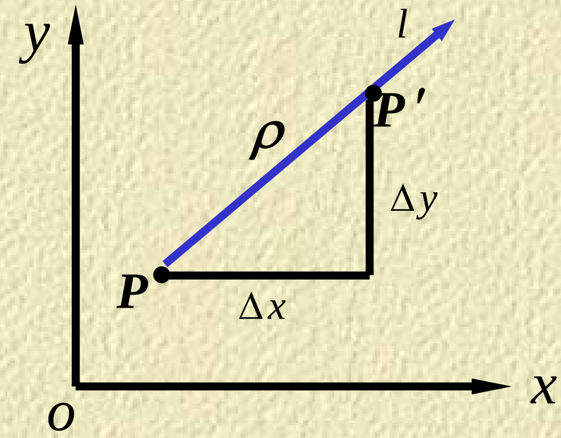
7.5 方向导数与梯度

1. 方向导数



设函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，从点P出发引射线l，在射线l上另取一点 $P'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$，

记 $\rho=|PP'|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$， 如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta_l z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$存在，

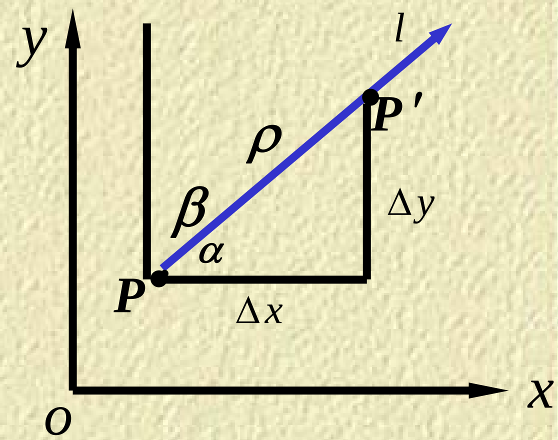
则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$处沿方向l的**方向导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

上页 下页 返回

函数 $f(x,y)$在点 P沿射线 l 的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}$ 反映了变量 z 在点 P沿射线 l 方向上的变化速率。

设e是l上的单位向量，e与x轴正方向及 y轴正方向的夹角分别为α和β，则$e=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$. 其中$\cos\alpha,\cos\beta$为$l$方向的方向余弦.



故沿 l方向的方向导数也称沿 e方向的方向导数，

$\frac{\partial z}{\partial l}$也记作 $\frac{\partial z}{\partial e}$.

上页 下页 返回

由方向导数的定义可知：

函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿着 x 轴正向 $\vec{i}$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

而在点 P 沿着 x 轴负向 $-\vec{i}$ 的方向导数为 $-\dfrac{\partial z}{\partial x}$；

同理可得：

函数 $f(x,y)$ 在点 P 沿着 y 轴正向 $\vec{j}$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

而在点 P 沿着 y 轴负向 $-\vec{j}$ 的方向导数为 $-\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

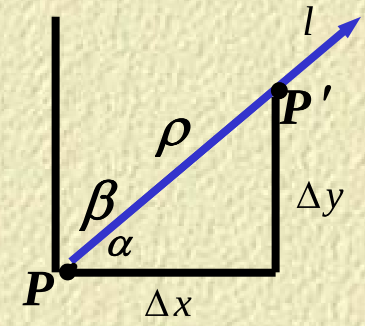
定理 如果函数$z = f(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$可微，那末函数在$P(x_0, y_0)$点沿任意方向l的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta$为方向l的方向余弦.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$$

方向导数的计算公式



例 1　求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解　这里方向 $\vec{l}$ 即为 $\overrightarrow{PQ} = \{1,-1\}$,

$$\vec{l}^{\,0} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\because \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

所求方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

例 2 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1，1）沿与 x 轴方向夹角为 α 的方向射线 $\vec{l}$ 的方向导数.并问在怎样的方向上此方向导 数有

（1）最大值（2）最小值（3）等于零？

返回

解　由方向导数的计算公式知

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)} = f_x'(1,1)\cos\alpha + f_y'(1,1)\sin\alpha$$

$$=(2x-y)|_{(1,1)}\cos\alpha+(2y-x)|_{(1,1)}\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

故（1）当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时， 方向导数达到最大值$\sqrt{2}$；

（2）当$\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$时， 方向导数达到最小值$-\sqrt{2}$；

（3）当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$和$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$时， 方向导数等于 0.

返回

注意： 本例中方向导数达到最大值时

$$\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\text{与}\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\right|_{(1,1)}=\{1,1\}$$

同方向.

方向导数达到最小值时

$$\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\text{与}\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\right|_{(1,1)}=\{1,1\}$$

反方向.

推广可得三元函数方向导数的定义

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，它在空间一点$P(x_0,y_0,z_0)$沿着方向l的方向导数，可定义为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta_l u}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$$

（其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$）

设方向 l 的方向角为 α,β,γ

则 l 的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = x_0 + (\cos\alpha)\rho \\ y = y_0 + (\cos\beta)\rho \\ z = z_0 + (\cos\gamma)\rho \end{cases} \quad (\rho \geq 0)$$

$$\Delta x = \rho\cos\alpha,\quad \Delta y = \rho\cos\beta,\quad \Delta z = \rho\cos\gamma,$$

同理：当函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 可微时，那末函数在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 沿任意方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

例3　求函数 $u = xye^z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处沿从点 $P(1,1,0)$ 到点 $Q(3,2,2)$ 的方向上的方向导数.

解　这里方向 $\vec{l}$ 即为 $\overrightarrow{PQ} = \{2, 1, 2\}$,

$$\vec{l}^{\,0} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,0)} = \left. ye^z + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{(1,1,0)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

上页　下页　返回

由对称性得： $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,0)}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,0)}=\left. xye^{z}+\frac{z}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}\right|_{(1,1,0)}=1$$

所求方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\frac{2}{3}+(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 数量场的梯度

设V是一区域（平面、空间等），如果V中的每一点都对应着某物理量的一个确定的值，则称V为该物理量的一个场。

如果形成场的物理量是矢量，就叫做向量场，例如：速度场、加速度场、引力场；

如果形成场的物理量是数量，就叫做数量场，例如：温度场，质量场。

给定一个数量场就相当于给定一个定义域为V的函数。例如：$z=f(x,y)$，$u=f(x,y,z)$.

上页 下页 返回

一般来说，函数 $z = f(x, y)$ 沿不同方向 l 的方向导数是不相同的。

问题 1：方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 沿哪个方向 l 取得最大值？

（函数在点 P 沿哪个方向增加的速度最快？）

问题 2：这个最大值是什么？

（函数在点 P 增加的最大速度是多少？）

问题 3：方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 沿哪个方向 l 取得最小值？

（函数在点 P 沿哪个方向下降的速度最快？）

问题 4：这个最小值是什么？

（函数在点 P 下降的最大速度是多少？）

见例2

上页 下页 返回

定义　设函数$z=f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y)\in D$，都可定出一个向量$\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$，这向量称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的**梯度**（gradient），记为

$$gradf(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

上页　下页　返回

设函数$z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$ 可微，则函数在点 P 沿方向 l 的方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

$$=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\vec{l}^{\,0}$$

$$=\left|\mathbf{grad}f(x,y)\right|\left|\vec{l}^{\,0}\right|\cos(\mathbf{grad}f(x,y),\vec{l}^{\,0})$$

$$=\left|\mathbf{grad}f(x,y)\right|\cos(\mathbf{grad}f(x,y),\vec{l}^{\,0})$$

当 l 与 $\mathbf{grad}f(x,y)$ 方向一致时，$\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 取得最大值；

这个最大值为 $$\left|\mathbf{grad}f(x,y)\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

当 l 与 $\mathbf{grad}f(x,y)$ 方向反向时，$\dfrac{\partial z}{\partial l}$ 取得最小值；

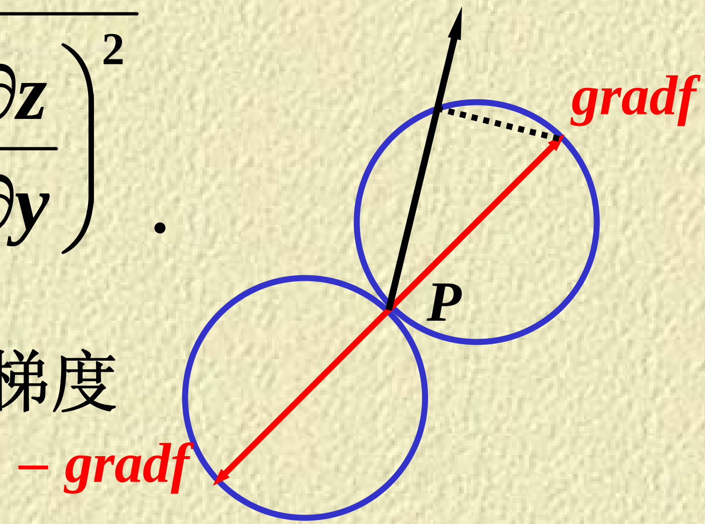
这个最小值为

$$-\left|\mathbf{grad}f(x,y)\right|=-\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

结论

函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致,而它的模为方向导数的最大值．梯度的模为

$$|\,\mathbf{grad}f\,(x,y)\,|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$



换句话说：函数在某点 P 的梯度是函数在该点增加速率最快的方向，而函数在该点增加速率最慢的方向（即减少速率最快的方向）是与梯度方向相反的方向 $-\mathbf{grad}f\,(P)$

上页 下页 返回

梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数$u=f(x,y,z)$在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y,z)\in G$，都可定义一个向量(梯度)

$$grad f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

类似于二元函数，此梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值.

某点方向导数的最大值就是该点梯度的模；某点方向导数的最小值，就是该点梯度的模的负值。

例 4　求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x - 2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度，并问在 哪些点处梯度为零？

解 由梯度计算公式得

$$gradu(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$= (2x+3)\vec{i} + (4y-2)\vec{j} + 6z\vec{k},$$

故　$gradu(1,1,2) = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k}.$

在 $P_0(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$ 处梯度为 $\vec{0}$.

例 5　设 $z = f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. 已知 $f(x,y)$ 在 $P(2,1)$ 点处沿方向 $\vec{e}$ 的方向导数取最大值，则此方向导数的最大值为 ________ .

解 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = (2x + y)\big|_P = 5$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = (x - 2y)\big|_P = 0$$

$$|\mathrm{grad} f(P)| = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P\right)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

例 6　设 $z = f(x,y) = 50 - 2x^2 - 4y^2$. 已知 $f(x,y)$ 在 $P(1,-2)$ 点处沿方向 $\vec{e}$ 的函数值减小最快，则 $\vec{e}$ 的单位向量为____________

解

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P = (-4x)\big|_P = -4$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = (-8y)\big|_P = 16$$

$$\vec{e} = -\mathrm{grad}f(P) = \{4, -16\}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{4^2 + (-16)^2} = 4\sqrt{17}$$

$$\vec{e}^{\,0} = \left\{\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right\}$$

上页　下页　返回

历年研究生考题（方向导数、梯度）

1．(96, 3)　函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为__________

?

2．(92, 3)　函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\left.\mathrm{grad}u\right|_M=$ ________

?

四、小结

1、方向导数的概念

（注意方向导数与一般所说偏导数的区别）

2、梯度的概念

（注意梯度是一个向量）

3、方向导数与梯度的关系

梯度的方向就是函数 $f(x,y)$ 在这点增长最快的方向．梯度的负方向就是函数 $f(x,y)$ 在这点下降最快的方向．

思考题

讨论函数$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$在$(0,0)$点处的偏导数是否存在？方向导数是否存在？

思考题解答

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

同理：$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$

故两个偏导数均不存在.

沿任意方向$\vec{l}=\{x,y\}$的方向导数,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1$$

故沿任意方向的方向导数均存在且相等.

1．（96, 3）　函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________

解　$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\dfrac{1}{2}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\} \qquad \vec{l}^{\,0}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

2. (92, 3) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu\big|_M=$ ________

解 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{4}{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right|_{(1,2,-2)}=-\frac{4}{9}$$

所以 $$gradu\big|_M=\frac{2}{9}\vec{i}+\frac{4}{9}\vec{j}-\frac{4}{9}\vec{k}$$

返回

作业：

P77： 1. 2. 3. 4. 6. 7.