习题 6.4（P21）

1．已知两点 $A(2,-1,2)$ 和 $B(8,-7,5)$，求过点 B 且与 A、B 两点的连线垂直的平面方程.

解：所求平面的法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\{6,-6,3\}$

故所求平面的方程为 $6(x-8)-6(y+7)+3(z-5)=0$

即 $2x-2y+z-35=0$

2．设平面过点 $(5,-7,4)$，且在三个坐标轴上的截距（不为零）相等，求这个平面方程.

解：由题意可设所求平面为 $x+y+z=R$，代入点 $(5,-7,4)$ 得 $R=2$

故所求平面为 $x+y+z=2$

3．求过点 $(1,1,-1)$、$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 的平面方程.

解：向量 $\overrightarrow{AB}=\{-3,-3,3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{0,-2,3\}$

则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-3,-3,3\}\times\{0,-2,3\}=\{-3,9,6\}=-3\{1,-3,-2\}$

取 $\vec{n}=\{1,-3,-2\}$

故所求平面为 $x-1-3(y-1)-2(z+1)=0$

即 $x-3y-2z=0$

4．求过点 $(1,1,1)$ 和 $(2,2,2)$ 且与平面 $x+y-z=0$ 垂直的平面方程.

解：记已知两点构成向量 $\vec{n}_1=\{1,1,1\}$，已知平面的法向量 $\vec{n}_2=\{1,1,-1\}$，

法 1：则所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-2,2,0\}$

故所求平面的方程为 $-2(x-1)+2(y-1)=0$

即 $x-y=0$

法 2：设所求平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

则所求平面的法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

因为已知两点在所求平面内，故应满足所设的平面方程，即

$$A+B+C+D=0 \qquad (1)$$

$$2A+2B+2C+D=0 \qquad (2)$$

又$\vec{n}\perp\vec{n}_2$，故 $\vec{n}\cdot\vec{n}_2=0$，即 $A+B-C=0$ (3)

联立方程(1)(2)(3)，解得：$C=0$，$D=0$，$B=-A$

故所求平面的方程为 $x-y=0$

5．求平行于 x 轴且经过点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 的平面方程.

解：法 1：因所求平面平行于 x 轴，故设其方程为 $By+Cz+D=0$，

将已知两点的坐标代入

$$\begin{cases}-2C+D=0\\ B+7C+D=0\end{cases} \qquad \text{解得：}\begin{cases}C=\dfrac{1}{2}D\\ B=-\dfrac{9}{2}D\end{cases}$$

故所求平面的方程为 $-9y+z+2=0$

法 2：记已知两点构成向量$\vec{n}_1=\{1,1,9\}$，

则所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{i}\times\vec{n}_1=\{0,-9,1\}$

由点法式方程得：$-9(y-0)+(z+2)=0$

故所求平面的方程为 $-9y+z+2=0$

6．求三平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$ 的交点.

解：设所求交点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，由于点 M 在已知的三个平面上，故点 M 的坐标满足三个平面方程，即求解

$\begin{cases} x_0 + 3y_0 + z_0 = 1 \\ 2x_0 - y_0 - z_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 + 2z_0 = 3 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 3 \end{cases}$

即交点 $M(1,-1,3)$

7．求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解：$d = \dfrac{|1+2\times 2+2\times 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{3}{3} = 1$

8．求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面夹角的余弦.

解：已知平面与 xoy 坐标面、yoz 坐标面、zox 坐标面的夹角可由平面的法向量 $\vec{n}$ 分别与 z 轴、x 轴、y 轴的方向角 γ 、α 、β 表示.

由 $\vec{n}=\{2,-2,1\}$ ，$\vec{n}^0 = \left\{\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right\} = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，得

平面与 xoy 坐标面夹角的余弦为 $\dfrac{1}{3}$；平面与 yoz 坐标面夹角的余弦为 $\dfrac{2}{3}$；平面与 zox 坐标面夹角的余弦为 $-\dfrac{2}{3}$

9. 已知三点 $A(1,2,3)$，$B(-1,0,0)$，$C(3,0,1)$ 求平行于 ΔABC 所在平面且与其距离为 2 的平面方程.

解：$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -2\{1,5,-4\}$，取法向量 $\vec{n}=\{1,5,-4\}$

则设所求的平面方程为 $x+5y-4z+D=0$

法 1：由点到平面的距离公式得 $\dfrac{|1\times 1+5\times 2+(-4)\times 3+D|}{\sqrt{1^2+5^2+(-4)^2}} = 2$

解得 $D = 1\pm 2\sqrt{42}$

法 2：ΔABC 所在平面的方程为 $(x-1)+5(y-2)-4(z-3)=0$

即 $x+5y-4z+1=0$

由两个平行平面的距离公式 $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 得 $\dfrac{|D-1|}{\sqrt{1^2+5^2+(-4)^2}}=2$

解得 $D=1\pm 2\sqrt{42}$

故所求平面的方程为 $x+5y-4z+1=\pm 2\sqrt{42}$

10．求参数 k，使平面 $x+ky-2z=9$ 满足下列条件之一：

(1) 过点 $(5,-4,-6)$

(2) 与平面 $2x+4y+3z=3$ 垂直

(3) 与平面 $2x-3y+z=0$ 成 45^0 角.

解：记 $\vec{n}_1=\{1,k,-2\}$，$\vec{n}_2=\{2,4,3\}$，$\vec{n}_3=\{2,-3,1\}$

(1) 将点 $(5,-4,-6)$ 代入平面方程 $5-4k+12=9$，解得：$k=2$

(2) 因 $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$，故 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$，即 $2+4k-6=0$，解得：$k=1$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_3|}=\dfrac{|2-3k-2|}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}}$，解得：$k=\pm\sqrt{\dfrac{35}{2}}$

11．在 z 轴上求一点，使它与两平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和 $16x-12y+15z-9=0$ 等距离.

解：设所求点为 $M(0,0,z)$，由题意得：

$$\frac{|20z-19|}{\sqrt{12^2+9^2+20^2}}=\frac{|15z-9|}{\sqrt{16^2+12^2+15^2}}$$

解得：$z=2$，或 $z=\dfrac{4}{5}$，故所求点为 $(0,0,2)$，或 $(0,0,\dfrac{4}{5})$

12．求与两平面 $4x-y-2z-3=0$ 和 $4x-y-2z-5=0$ 等距离的平面方程.

解：设所求的平面方程为 $4x-y-2z+D=0$

在两个已知平面上各取一点 $(0,-3,0)$，$(0,-5,0)$，这两点到所求平面的距离相等，

所以 $$\frac{|3+D|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|5+D|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

解得：$D=-4$，故所求的平面方程为 $4x-y-2z-4=0$

13．求两平面 $2x-y+z=7$ 和 $x+y+2z=11$ 夹角的平分面方程.

解：记两个已知平面的法向量分别为 $\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$，$\vec{n}_2=\{1,1,2\}$

法 1：设所求的平分面方程为 $2x-y+z-7+\lambda(x+y+2z-11)=0$

即 $$(2+\lambda)x(\lambda-1)y+(2\lambda+1)z-7-11\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}=\{2+\lambda,\lambda-1,2\lambda+1\}$

由题意得：$\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}||\vec{n}_2|}$，即 $|3\lambda+6|=|6\lambda+3|$

解得：$\lambda=1$，或 $\lambda=-1$

故所求的平分面方程为 $x+z-6=0$

或 $x-2y-z+4=0$

法 2：因所求的平分面过两个已知平面的交线，故交线上的点必是平分面上的点，联立两个已知平面方程，得点 $(0,-1,6)$ 在平分面上，

又 $\vec{n}_1{}^0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt6},-\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6}\right\}$，$\vec{n}_2{}^0=\left\{\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{1}{\sqrt6},\dfrac{2}{\sqrt6}\right\}$

则 $\vec{n}_1{}^0+\vec{n}_2{}^0=\dfrac{3}{\sqrt6}\{1,0,1\}$，$\vec{n}_1{}^0-\vec{n}_2{}^0=\dfrac{1}{\sqrt6}\{1,-2,-1\}$

将平分面的法向量取为 $\vec{n}=\{1,0,1\}$，或 $\vec{n}=\{1,-2,-1\}$

由点法式方程得 $(x-0)+0\times(y+1)+(z-6)=0$

或 $(x-0)-2(y+1)-(z-6)=0$

即 $x+z-6=0$

或 $x-2y-z+4=0$