# 习题 9.2(P178)

1. 计算 $\int_L -x\cos y dx + y\sin x dy$， $L$ 为连接点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,2\pi)$ 的线段

解: $L: y=2x \quad 0\le x\le \pi$

$$\int_L -x\cos y dx + y\sin x dy = \int_0^{\pi}(-x\cos 2x + 2\cdot 2x\sin x)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-4x\cos x+4\sin x\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{4}+4\pi+\frac{1}{4}=4\pi$$

2. 计算 $\int_L (x^2-y^2)dx$， $L$ 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 和 $A(2,4)$ 的一段弧.

解: $\int_L (x^2-y^2)dx=\int_0^2 (x^2-x^4)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=-\frac{56}{15}$

3. 计算 $\oint_L (x+y)^2 dy$，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$，取正方向.

解: $L$ 的参数方程为: $\begin{cases} x=a+a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases} \quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\oint_L (x+y)^2 dy=\oint_L (x^2+y^2+2xy)dy=\oint_L (2ax+2xy)dy$$

$$=2\oint_L x(a+y)dy = 2\int_0^{2\pi}(a+a\cos\theta)(a+a\sin\theta)a\cos\theta d\theta$$

$$=2a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=2a^3\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta)d\theta$$

$$=2a^3\pi$$

或利用对称性: $\oint_L (x+y)^2 dy=\oint_L (2ax+2xy)dy$

$$\xlongequal[L\text{关于}x\text{轴对称,}]{\text{被积函数}2xy\text{关于}y\text{为偶函数}} 2a\oint_L xdy$$

$$=2a\int_0^{2\pi}(a+a\cos\theta)a\cos\theta d\theta$$

$$=2a^3\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=2a^3\pi$$

或利用下节的格林公式：$\oint\limits_L (x+y)^2 dy = \iint\limits_D 2(x+y)dxdy$

$$\xlongequal[D\text{关于 } x\text{轴对称}]{\text{被积函数 } 2y\text{关于 } y\text{为奇函数}} 2\iint\limits_D xdxdy$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \cos\theta d\rho$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 \cos\theta d\rho = 2\pi a^3$$

4. 计算 $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + 2yzdy - x^2 dz$ ,其中 $L$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}, \quad t = 0 \text{ 对应起点}, \quad t = 1 \text{ 对应终点}.$$

解: $\int\limits_L (y^2 - x^2)dx + 2yzdy - x^2 dz$

$$= \int_0^1 (t^4 - t^2 + 2\cdot t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2)dt$$

$$= \int_0^1 (-2t^4 - t^2 + 4t^6)dt = -\frac{17}{105}$$

5. 计算 $\oint\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ , $L$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分与三坐标面的交线，其方向是从点 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(0, 1, 0)$ ，到 $C(0, 0, 1)$ 再回到 $A(1, 0, 0)$ .

解： $\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

由积分曲线及积分表达式的特点（变量轮换——注意方向）：

$$I = \oint\limits_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= 3\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin^2 t-0)(-\sin t)+(0-\cos^2 t)\cos t+(\cos^2 t-\sin^2 t)\cdot 0]dt$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^3 t-\sin^3 t)dt=-6I_3=-6\times\frac{2}{3}=-4$$

6. 计算 $\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}$ .

(1) $\vec{F}(x,y)=-y\vec{i}+x\vec{j}$， $L$ 是由直线 $y=x$， $x=1$ 和 $y=0$ 围成的三角形，取正向.

（2） $\vec{F}(x,y)=\dfrac{y\vec{i}-x\vec{j}}{x^2+y^2}$， $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$，取正向.

解：(1) $\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}=\int_L -ydx+xdy=\int_{y=0}+\int_{x=1}+\int_{y=x}$

$$=0+\int_0^1 dy+\int_0^1(-xdx+xdx)=1$$

或利用下节的格林公式： $\int_L -ydx+xdy=\iint_D[1-(-1)]dxdy$

$$=2\cdot(\text{三角形的面积})=2\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=1$$

（2） $L$ 的参数方程为: $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}\quad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}=\int_L\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)d\theta-a\cos\theta\cdot a\cos\theta d\theta}{a^2}$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi$$

或利用下节的格林公式： $\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}=\dfrac{1}{a^2}\int_L ydx-xdy=\dfrac{1}{a^2}\iint_D(-1-1)dxdy$

$$=\frac{-2}{a^2}\times(\text{圆的面积})=\frac{-2}{a^2}\times\pi a^2=-2\pi$$

7．在椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$， $0\le t\le 2\pi$ 上每一点 $P$ 有作用力 $\vec{F}(x,y)$，大小等于从点 $P$ 到椭圆中心的距离，方向指向椭圆中心，计算质点沿椭圆在第一象限从点 $A(a,0)$ 到 $B(0,b)$ 时，

$\vec{F}$ 所作的功.

解：设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

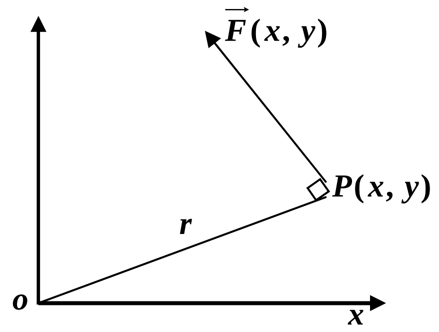
由题意得 $\vec{F}(x,y)=r\left\{\dfrac{-x}{r},\ \dfrac{-y}{r}\right\}=\{-x,\ -y\}$

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}=-\int_L xdx+ydy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos t\cdot(-a\sin t)+b\sin t\cdot b\cos t]dt$$

$$=(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin tdt=\frac{a^2-b^2}{2}$$

8. 一力场 $\vec{F}(x,y)$，大小为 $kr$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，方向与向径 $r$ 垂直，如图所示. 试求当质点沿星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限内由点 $A(a,0)$ 到 $B(0,a)$ 时，$\vec{F}$ 所作的功.




解：先求 $\vec{F}$

法 1：$\vec{r}=\{x,y\}$，设 $\vec{F}$ 的方向为 $\vec{n}=\{P,Q\}$，如图即知 $P<0,\ Q>0$，

则由 $\vec{r}\perp\vec{n}$ 得 $\vec{r}\cdot\vec{n}=xP+yQ=0$ 即 $\dfrac{Q}{x}=-\dfrac{P}{y}=\lambda$，

故 $\vec{n}=\{-\lambda y,\lambda x\}$，$\vec{n}^0=\left\{\dfrac{-\lambda y}{|\lambda|r},\dfrac{\lambda x}{|\lambda|r}\right\}=\left\{\dfrac{-y}{r},\dfrac{x}{r}\right\}$，

由题意得 $\vec{F}=kr\vec{n}^0=k\{-y,x\}$

法 2：设 $\vec{r}$ 与 $x$ 轴正向夹角为 $\theta$，则 $\vec{F}(x,y)$ 与 $x$ 轴正向夹角为 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$，又

$x=|\vec{r}|\cos\theta,\quad y=|\vec{r}|\sin\theta$， 故

$$\vec{F}(x,y)=|\vec{F}(x,y)|\left\{\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),\sin(\theta+\frac{\pi}{2})\right\}=k|\vec{r}|\{-\sin\theta,\cos\theta\}=k\{-y,x\}$$

再求功：

又星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$W=\int_L\vec{F}\cdot d\vec{l}=k\int_L -ydx+xdy$$

$$=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a\sin^3\theta\cdot 3a\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)+a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta\cdot\cos\theta)d\theta$$

$$=3ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=3ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)d\theta$$

$$=3ka^2(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4})=\frac{3k\pi a^2}{16}$$