09级《微积分A》（下）期末试题(A卷)

一、填空题（每小题4分，共28分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\sin x+3y-z=e^{z}$ 所确定，则 $dz=$____________________.

2. 已知曲面 $z=4-x^{2}-y^{2}$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $\pi:2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是____________________.

3. 设 $L:x=t,\ y=t^{2},\ z=\dfrac{2}{3}t^{3},\ -1\le t\le 1$，则 $I=\int_{L}(x+y+z)dl=$_______________.

4. 向量场 $\vec{A}=\{e^{x},\sin(xy),\sin(xz)\}$ 在点 $P(1,0,0)$ 处的散度 $div\vec{A}=$_________________.

5. 已知 $(axy^{p}-3x^{3})dx+(6x^{q}y^{2}+4y^{5})dy$ 是某二元函数的全微分，则常数 $a=$________，$p=$___________，$q=$___________.

6. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n}}$ 的敛散性是___________________.（若收敛，请指明是绝对收敛还是条件收敛）.

7. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^{2}}$ 的麦克劳林级数为_________________________________；收敛域为_____________________________.

二、(9分)一平面 π 通过直线 $L:\begin{cases}4x-y+3z-6=0\\ x+5y-z+10=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi_{1}:2x-y+5z-5=0$ 垂直，求平面 π 的方程.

三、(9分)设 Ω 是由曲面 $z=x^{2}+y^{2}$ 与平面 $z=1$ 围成的实心体，其质量分布是均匀的(密度为k)，求 Ω 的体积和 Ω 的质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

四、(9分)设 $f(x,y)=xe^{x}-(1+e^{x})\cos y$，试判断点 $(0,0)$ 和点 $(-2,\pi)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点，说明理由，并指出是 $f(x,y)$ 极大值点还是极小值点.

五、(9分)设 D 是由直线 $y=x-1$ 和抛物线 $y^2=2x+6$ 所围成的闭区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_D ydxdy$ 的值.

六、(9分)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

七、(9分)设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，当 $x\in(-\pi,\pi]$ 时， $f(x)=x^2-2x,$ 又设

$f(x)$ 的Fourier级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，记其和函数为 $S(x)$，

求 a_4、$S(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式及 $S(\frac{10}{3}\pi)$ 的值.

八、(9分)设有曲线积分 $I=\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}$，试在以下两种情况下求积分 I 的值：

（1） L 为椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的逆时针方向；

(2) L 为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=36$ 的逆时针方向.

九、(9分)利用高斯公式计算第二类曲线积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+yz)dydz+(y^3+e^xz)dzdx+(z^3+3)dxdy ,$$

其中 Σ 为半球面 $z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$，积分沿 Σ 的上侧.