习题 10.1(P232)

1．求下列级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$

解： $S_n=\sum_{k=1}^{n}100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k=100\cdot\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=200\cdot\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}200\cdot\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=200$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

解： $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{-\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}-\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]=-\frac{2}{5}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

解： $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$

解： $S_n=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}=3\cdot\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{2}}$

$$=3\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\right\}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

解： $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2-1}{n^2}$

解： $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\ln\dfrac{k^2-1}{k^2}=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\ln\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$$=\ln\left[\frac{1\cdot3}{2^2}\times\frac{2\cdot4}{3^2}\times\frac{3\cdot5}{4^2}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]=\ln(\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(\frac{1}{2}\times\frac{n+2}{n+1})=\ln\frac{1}{2}=-\ln2$$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

解： $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left((1-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\right)+\left((\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\right)+\cdots+\left((\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})\right] = \frac{1}{4}$$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

解：$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\ ) = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\ ) - (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\ )\right]$

$$= \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1`)\right] + \left[(\sqrt{4} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}`)\right] + \left[(\sqrt{5} - \sqrt{4}) - (\sqrt{4} - \sqrt{3}`)\right] +$$

$$+ \cdots + \left[(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\ )\right]$$

$$= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + 1 - \sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + 1 - \sqrt{2}\right] = 1 - \sqrt{2}$$

2．判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$

解：$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \neq 0$

由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

解：$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$，由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1} \neq 0$

由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ 发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

解：$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2}$，因为 $S_{4m} = 0$，$S_{4m+1} = 1 \quad (m = 1, 2, \cdots)$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n} == \lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}} = \pi \neq 0$

由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$ 发散.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$

解：由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，由级数的性质得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}\right)$ 发散.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$

解：法 1 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3^k+2^k}{6^k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\right] = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}} + \dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{3}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\right\} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ 收敛.

法 2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n\right]$，由于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$ 都收敛，由级数的性质得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$ 收敛.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{3^n}$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 3}{3}\right)^n$,由于 $\frac{\ln 3}{3} < 1$，故几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{3^n}$ 收敛.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由级数的性质得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

解：$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$，由级数收敛的必要条件知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散.

3．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{2n}{n+1}$，求此级数的通项 u_n，并判别级数的敛散性.

解：$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{(n-1)+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$$

故该级数收敛.

4．设$a_n \le b_n \le c_n$ $(n=1,2,\cdots)$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

证明：法 1（利用数列的单调有界准则及级数收敛的性质）：

设$u_n = c_n - a_n$，$v_n = c_n - b_n$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的前n项部分和分别为S_n 及σ_n，

则　$u_n \ge v_n \ge 0$，S_n 及σ_n均为单调递增数列，且有$S_n \ge \sigma_n$，

由题设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，据级数收敛的性质得，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

即有$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，由单调有界准则知 $S \ge S_n \ge \sigma_n$，即数列σ_n有上界，

由单调有界准则知$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，也即级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

由级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性，据级数收敛的性质知

级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}[c_n - (c_n - b_n)] = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - v_n)$收敛。

法 2（利用正项级数收敛的判别准则及级数收敛的性质）：

设$u_n = c_n - a_n$，$v_n = c_n - b_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，

由题设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，据级数收敛的性质得，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

由于$u_n \ge v_n$，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，

由级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性，据级数收敛的性质知

级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}[c_n - (c_n - b_n)] = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - v_n)$收敛。

5．已知$\lim_{n\to\infty} nu_n = 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1} - u_n)$收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收

敛.

证明：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和分别为 S_n 及 σ_n，则有

$$S_n = 2(u_2-u_1)+3(u_3-u_2)+\cdots\cdots+(n+1)(u_{n+1}-u_n)$$

$$=-u_1+(n+1)u_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}u_i=-u_1+(n+1)u_{n+1}-\sigma_n$$

即 $\sigma_n=-u_1+(n+1)u_{n+1}-S_n$

由题设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(u_{n+1}-u_n)$ 收敛（设其和为 S）及 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$ 得

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=-u_1-S$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。