北京理工大学 2009-20120 学年第二学期高等数学

期中试题参考解答(A 卷)

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $k=-\dfrac{5}{3}$,　或 $\dfrac{7}{3}$;　　　　2. $dz=\dfrac{dx-f'dy}{2-3f'}$;

3. $d=\sqrt{5}$　　　　4. $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy$

5. $\vec{\tau}=\{8,10,7\}$,　$\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}$;　　　　6. $a=\dfrac{4}{3}$,　$n=-4$.

7. $\vec{n}=\{-2,-1,2\}$,　$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=-\dfrac{10}{3\sqrt{3}}$.

二、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xyf_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2xyf_1'+x^2f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2yf_1'+2xf_2'-2xyf_{11}''+(x^2-2xy^2)f_{12}''+x^2yf_{22}''.$$

三、

$$V=\iint_D |x-y|dxdy$$

$$=\iint_{D_1}(x-y)dxdy+\iint_{D_2}(y-x)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x-y)dx+\int_0^1 dx\int_x^{2-x}(y-x)dy$$

$$=\frac{4}{3}$$

四、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(1+e^y)(-\sin x)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^y\cos x-e^y-ye^y=0$$

解得驻点：$(\pi,-2)$, $(2\pi,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(1+e^y)(-\cos x),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(\cos x-2-y)e^y.$$

在点$(\pi,-2)$

$A=1+e^{-2},\quad B=0,\quad C=-e^{-2}$，$\Delta=B^2-AC=e^{-2}(1+e^{-2})>0$，

所以点$(\pi,-2)$不是极值点；

在点$(2\pi,0)$

$A=-2<0,\quad B=0,\quad C=-1,\quad \Delta=B^2-AC=-2<0$，

所以点$(2\pi,0)$是极大值点，且极大值为 $f(2\pi,0)=3.$

五、 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$

$$=\iiint\limits_V xdxdydz+\iiint\limits_V ydxdydz+\iiint\limits_V zdxdydz$$

$$=0+0+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{1}zdz$$

$$=\frac{2\pi}{3}.$$

六、 设直线L的方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$，

平面π的法向量为：$\vec{n}=\{2,-3,1\}$

由题意，$L/\!/\pi$，所以有$2m-3n+p=0$

又已知直线的方向向量为$\vec{s}_1=\{2,-1,-1\}$，$M(1,-1,2),N(1,0,2)$

$\overrightarrow{MN}=\{0,1,0\}$，由题意有：$\vec{s},\overrightarrow{MN},\vec{s}_1$共面，有

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=m+2p=0$$

有 $m=-2p, n=-p$

所以 $L:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$

七、Ω在xoy面上的投影区域为$D: x^2+y^2\le 1$，

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv \quad =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin^3\varphi dr$$

$$=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos^5\varphi d\varphi$$

$$=\frac{11}{30}\pi.$$

八、目标函数为：$V=x_0y_0z_0$

约束条件为：$\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0}{3}+\dfrac{z_0}{4}=1$

构造拉氏函数：$F(x_0,y_0,z_0)=x_0y_0z_0+\lambda(\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0}{3}+\dfrac{z_0}{4}-1)$

$$\begin{cases} F'_{x_0}=y_0z_0+\dfrac{\lambda}{2}=0 \\ F'_{y_0}=x_0z_0+\dfrac{\lambda}{3}=0 \\ F'_{z_0}=x_0y_0+\dfrac{\lambda}{4}=0 \\ \dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0}{3}+\dfrac{z_0}{4}=1 \end{cases} \quad \text{解得唯一驻点为：} \begin{cases} x_0=\dfrac{2}{3} \\ y_0=1 \\ z_0=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

由问题的实际意义知，当$\begin{cases} x_0=\dfrac{2}{3} \\ y_0=1 \\ z_0=\dfrac{4}{3} \end{cases}$时，此长方体的体积最大，

$V_{最大}=\dfrac{8}{9}.$