2007-2008 学年《微积分A》第二学期期末考试

参考答案及评分标准

2008 年 6 月 18 日

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $f'_x(0,0)=2,\quad f'_y(0,0)=-3;$　　2. $-10;$

3. 极小值点为 $(2,1)$，极大值点为 $(0,0)$；　　4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2});$

5. $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy;$　　6. 绝对收敛；　　7. $R=\dfrac{1}{2}.$

二、 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+yf_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'.$

$\because$ f有二阶连续偏导数，

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$=1+f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$$

三、解交点：$(1,1),\ (\frac{1}{2},2)$，$(2,2)$

$$I=\iint_D \frac{1}{x^2y^2}dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{1}{x^2y^2}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}\right)dy=\ln 2-\frac{3}{8}.$$

或 $$I=\iint_D \frac{1}{x^2y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{1}{x^2y^2}dy+\int_1^2 dx\int_x^2\frac{1}{x^2y^2}dy$$

四、解法 1　$\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$

Σ在xoy面的投影区域为$D: x^2+y^2\le R^2$,

$$I=\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS=\iint_D (x^2+y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho=\frac{4\pi R^4}{3}.$$

解法 2 令 $\boldsymbol{x=R\sin\varphi\cos\theta}$， $\boldsymbol{y=R\sin\varphi\sin\theta}$， 则 $\boldsymbol{dS=R^2\sin\varphi d\theta d\varphi}$

$$\boldsymbol{0\le\theta\le 2\pi},\quad \boldsymbol{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}$$

故 $\boldsymbol{I=\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\sin^2\varphi\cdot R^2\sin\varphi d\varphi}$

$$\boldsymbol{=2\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=2\pi R^4\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi R^4}$$

解法 3　设$\boldsymbol{\Sigma_{下}: x^2+y^2+z^2=R^2\quad (z<0)}$，$\boldsymbol{S=\Sigma+\Sigma_{下}}$

由变量轮换的对称性，得 $\boldsymbol{\iint_S x^2dS=\iint_S y^2dS=\iint_S z^2dS}$

$$\boldsymbol{\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS \overset{\text{由对称性}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\iint_S (x^2+y^2)dS \overset{\text{由变量轮换}}{\underset{\text{的对称性}}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS}$$

$$\boldsymbol{=\frac{R^2}{3}\iint_S dS=\frac{R^2}{3}\cdot\text{球面的面积}=\frac{R^2}{3}\cdot 4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^4}$$

五、　$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\dfrac{\pi}{2},$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases} 0 & n=2k,k=1,2,\cdots \\ -\dfrac{2}{n^2\pi} & n=2k-1,k=1,2,\cdots \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\},\quad x\in(-\pi,\pi).}$$

$$S(x)=\begin{cases} 0 & x\in(\pi,2\pi] \\ x-2\pi & x\in(2\pi,3\pi) \end{cases}.$$

六、补充平面$S:z=4,x^2+y^2\le 4,$取下侧，则由 Gauss 公式

$$I=\iint_{\Sigma+S}-\iint_{S}=-\iiint_V(2x+2y+2z)dxdydz+\iint_{D:x^2+y^2\le 4}4^2dxdy$$

$$=-2\iiint_V zdV+64\pi\quad（由对称性）$$

$$=-2\int_0^4 zdz\iint_{D_z:x^2+y^2\le z}dxdy+64\pi$$

$$=-2\int_0^4\pi z^2dz+64\pi=\frac{64\pi}{3}$$

七、由比值法：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=2|x|^2$，

当$2x^2<1$,即$:-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，幂级数绝对收敛;

当$2x^2>1$,即：$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，幂级数发散;

所以收敛区间为:　$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$时，级数发散，故收敛域为 $\boldsymbol{x\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}).}$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-1}}{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}2^n\int_0^x x^{2n-2}dx$$

$$=2x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(2x^2)^{n-1}dx=2x\int_0^x\frac{1}{1-2x^2}dx$$

$$=x\int_0^x\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}x}+\frac{1}{1+\sqrt{2}x}\right)dx=\frac{x}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}x}{1-\sqrt{2}x}.\quad x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

八、Ω在xoy面上的投影区域为$D: x^2+y^2\le 2x.$

$$J_z=\iiint_V \mu(x^2+y^2)dV$$

$$=\mu\iint_D(x^2+y^2)dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x}dz$$

$$=\mu\iint_D(x^2+y^2)(2x-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho d\rho$$

$$=\frac{2^6\mu}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=\frac{2\mu\pi}{3}.$$

九、法 1：记 $X=x^2y^3+2x^5+ky,\quad Y=xf(xy)+2y,$由题意，有

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},\quad 即\quad 3x^2y^2+k=f(xy)+xyf'(xy);$$

记$u=xy,$有 $\quad f'(u)+\frac{1}{u}f(u)=3u+\frac{k}{u}$

解得: $\quad f(u)=u^2+k+\frac{C}{u}. \qquad (1)$

选择折线路径:$(0,0)\to(t,0)\to(t,-t),$则有

$$\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}[tf(ty)+2y]dy=2t^2$$

即:$\dfrac{t^6}{3}+\int_0^{-t^2} f(u)du=t^2$

对t求导，得$f(-t^2)=-1+t^4$， 令$u=-t^2$,得 $f(u)=u^2-1.$

与(1)式比较得: $k=-1, C=0.$

此时 $(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$

$$=(x^2y^3+2x^5-y)dx+[x^3y^2-x+2y]dy$$

$$=d(\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{3}x^6-xy+y^2)$$

故此全微分的原函数为:$u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3y^3+\dfrac{1}{3}x^6-xy+y^2+C.$

（注：还可用曲线积分法和不定积分法求原函数。）

法 2：选择折线路径:$(0,0)\to(0,-t)\to(t,-t)$,则有

$$\int_0^{-t}2ydy+\int_0^t(-t^3x^2+2x^5-kt)dx=2t^2，得$$

$t^2-kt^2=2t^2$， $\Rightarrow k=-1$

（其余可同上）