10.3 任意项级数

1. 交错级数

定义: 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n \qquad (\text{其中 } a_n > 0)$$

莱布尼兹准则 如果交错级数满足条件:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; (ii) $a_n \geq a_{n+1}$ (当n充分大时),

则级数收敛, 且其和 $s \leq a_1$, 其余项 R_n 的绝对值 $|R_n| \leq a_{n+1}$.

上页 下页 返回

例 1 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的收敛性.

解 $\because\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)'=\frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0 \quad (x\ge 2)$

故函数$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$单调递减, $\therefore a_n > a_{n+1}$,

又$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0.$ 由莱布尼兹准则知原级数收敛.

利用莱布尼兹准则准则时, 经常要证明a_n(当n充分大时)单调减少, 此时可令$f(n)=a_n$, 利用函数求导证明$f(x)$单调减少即可。

注意: 莱布尼兹准则是判别交错级数收敛的充分条件, 而非必要条件.

如果交错级数不满足条件:(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ (当n充分大时), 不能判定级数一定发散。

例如交错级数,

$$\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^2}+\cdots$$

显然, 当 $n \geq 2$时, 有 $\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^2}$ 不满足条件（i i）,

但此级数仍是收敛的. 因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均收敛,

由级数的性质可知上述级数也收敛.

2. 绝对收敛与条件收敛

定义: 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

定理的作用:

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**绝对收敛**;

注意: 该定理的逆命题并不成立，即若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 未必收敛；

比如：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛，　但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 收敛，　而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛；

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ 发散，　$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n}$ 也发散。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**条件收敛**.

注意: 一个级数不可说既绝对收敛又条件收敛。

比如：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 是条件收敛级数。

例 2　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解　$\because \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，　而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛,

故由定理知原级数绝对收敛.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$ 的收敛性.

解1 $$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\bigg/\frac{n!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$$

所以级数绝对收敛。

上页 下页 返回

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ 的收敛性.

解2 该级数是交错级数，由于

$$0<\frac{n!}{n^n}\le\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\cdots\frac{1}{n}\le\frac{1}{n},$$

由夹逼定理得 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$$ 即 $a_{n+1}<a_n$

由莱布尼兹准则得, 级数收敛。

上页 下页 返回

例 4(书中例 3)　讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{n}$的敛散性，其中$a$为常数。

解　先考察$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的敛散性。

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|a|=|a|$

当$|a|<1$时，原级数绝对收敛；

当$|a|>1$时，原级数不绝对收敛，

此时$\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$，故原级数发散；

当 $a=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，此级数条件收敛；

当 $a=-1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，

此为调和级数，它发散。

综上述，当 $-1<a\leq 1$ 时，原级数收敛。

结论： 如用比值法(根值法)判别出绝对值级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必发散。

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1\text{或}+\infty,$$

当 n 充分大时必有 $|u_{n+1}|>|u_n|$,

故 $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$ 即 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$

上页 下页 返回

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，则称下面的级数

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \cdots +$$
$$(u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1) + \cdots$$

为两个级数的乘积(柯西乘积)。

$$\begin{array}{ccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & u_3v_4 & \cdots \\
u_4v_1 & u_4v_2 & u_4v_3 & u_4v_4 & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

有时要用到绝对收敛级数的下述性质。

(1)（绝对收敛级数的项具有可交换性）任意交换绝对收敛级数各项的次序后得到的新级数仍然绝对收敛，且其和不变。

一个条件收敛的级数，任意交换其各项的次序后得到的新级数可能收敛，也可能发散，即使收敛也不一定收敛于原来级数的和。

例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots$$

乘常数$\frac{1}{2}$后，得

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{A}{2}$$

上式变形为

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{A}{2}$$

上述级数与原级数相加就得到

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A$$

(2)(绝对收敛级数乘积的收敛性)设级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$，且二级数皆绝对收敛，则用上述乘积得到的新级数也绝对收敛，且和为 $S \cdot \sigma$。

作业：

P244： 1偶. 2. 4. 5.

上页 下页 返回