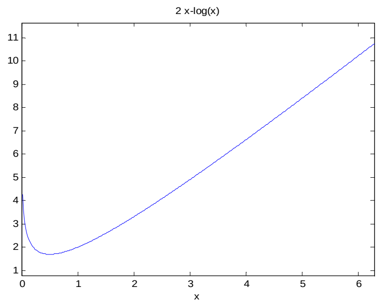
习题 3.4(P176)

1. 试求下列函数的单调区间及极值点.

(1) $y = 2x - \ln x$

解：令 $y' = 2 - \dfrac{1}{x} = 0$，得驻点 $\dfrac{1}{2}$，定义域内无不可导点

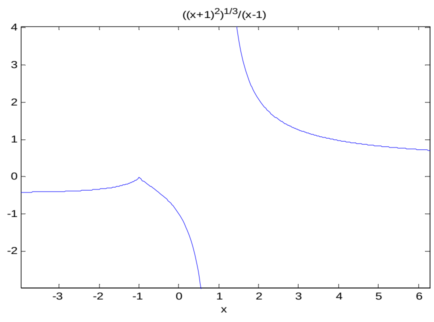
x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
y'	—		+
y	减	极小	增



(2) $y = \dfrac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{x-1}$

解： $y' = \dfrac{-\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}}{(x-1)^2\sqrt[3]{x+1}} = 0$，得驻点 -5，不可导点为 -1，1

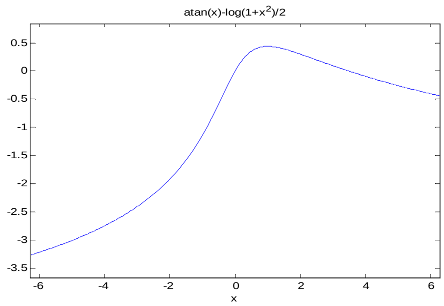
x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	—		+		—		—
y	减	极小	增	极大	减		减



(3) $y = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

解：令 $y' = \dfrac{1-x}{1+x^2} = 0$，得驻点 1，定义域内无不可导点

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+		—
y	增	极大	减



(4) $y = x + |\sin 2x|$

解：在 $x = k\pi$ 处，由导数的定义可得，函数在 $x = k\pi$ 处不可导。

$$y' = \begin{cases} 1+2\cos 2x & \sin 2x > 0 \\ 1-2\cos 2x & \sin 2x < 0 \\ \quad \text{不存在} & \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+2\cos 2x & k\pi < x < k\pi + \dfrac{\pi}{2}\,(\text{一、三象限}) \\ 1-2\cos 2x & k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < (k+1)\pi\,(\text{二、四象限}) \\ \quad \text{不存在} & x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ x = (k+1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $k\pi + \dfrac{\pi}{3}$ 或 $k\pi + \dfrac{5\pi}{6}$，$k \in Z$，不可导点为 $k\pi + \dfrac{\pi}{2}, (k+1)\pi$，

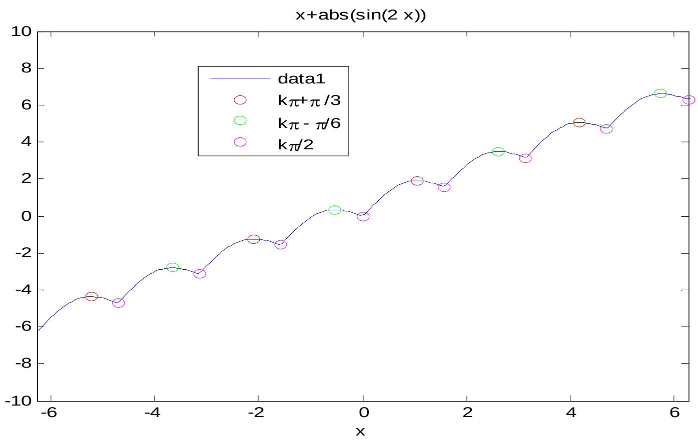
($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。

对于给定的 k，我们只在第一、二象限中或第三、四象限中讨论

由驻点及不可导点的情况列表如下：$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

x	$(k\pi,\ k\pi+\frac{\pi}{3})$	$k\pi+\frac{\pi}{3}$	$(k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$	$k\pi+\frac{\pi}{2}$
y'	+		—	
y	增	极大	减	极小

x	$(k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{5\pi}{6})$	$k\pi+\frac{5\pi}{6}$	$(k\pi+\frac{5\pi}{6},\ (k+1)\pi)$	$(k+1)\pi$
y'	+		—	
y	增	极大	减	极小

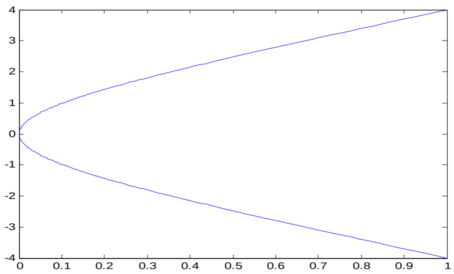


(5) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$

解：设 $x = x(y)$，则 $\frac{dx}{dy} = \frac{x'_t}{y'_t} = \frac{2t}{3(1+t^2)}$，令 $\frac{dx}{dy} = 0$，得 $t = 0$

由驻点的情况列表如下：

t	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
x'	—		+
x	减	极小	增



2. 求下列函数的极值点及极值.

(1) $y = e^x \cos x$

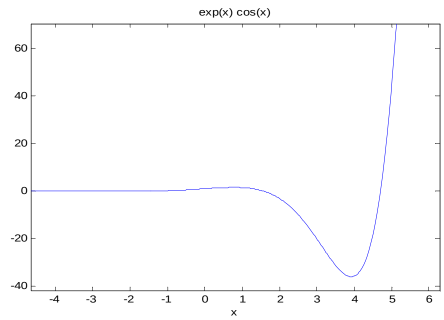
解： 令 $y' = e^x(\cos x - \sin x) = 0$，得驻点 $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{4}$，$k \in Z$，

$y'' = -2e^x \sin x$。当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时，$y'' < 0$，所以 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 是极大值点，极大值

为 $y(2k\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$；

当 $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$ 时，$y'' > 0$，所以 $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$ 是极小值点，极小值为

$y(^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$。



(2) $y = \left| x(x^2 - 1) \right|$

解：$y' = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x(x^2 - 1) > 0 \\ 1 - 3x^2 & x(x^2 - 1) < 0 \\ \text{不存在} & x(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$，

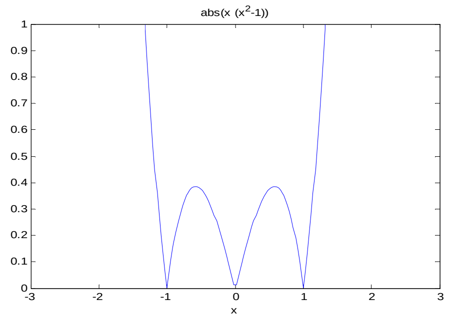
令 $y' = 0$，得驻点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，不可导点为 0，-1，1.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$	0
$x(x^2-1)$	<0		>0		>0	
y' 表达式	$1-3x^2$		$3x^2-1$		$3x^2-1$	
y' 符号	—		+		—	
y	减	极小	增	极大	增	极小

所以 $x=-1$ 是极小值点，极小值为 0；$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极大值点，极大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$；

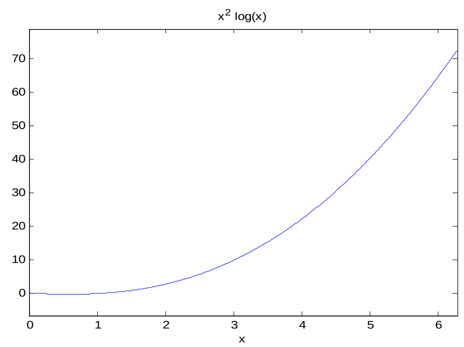
$x=0$ 是极大值点，极大值为 0；由于此函数是偶函数，对称的，有 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极大值点，

极大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$； $x=1$ 是极小值点，极小值为 0。



(3) $y=x^2\ln x$

解：令 $y'=x(2\ln x+1)=0$ 得驻点 $x=e^{-\frac{1}{2}}$， $y''=2\ln x+3$， $y''|_{x=e^{-\frac{1}{2}}}=2>0$，所以 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 是极小值点，极小值为 $-\frac{1}{2e}$.



(4) $y=(x-1)^2(x+1)^3$

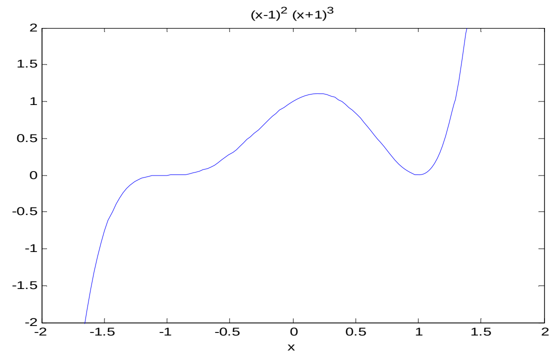
解：令 $y'=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)(x+1)^2(5x-1)=0$，得驻点

-1，1，$\dfrac{1}{5}$.

当 $x<-1$ 时， $y'>0$，当 $-1<x<0$ 时， $y'>0$，所以 $x=-1$ 不是极值点；

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时， $y'<0$，当 $x>1$ 时， $y'>0$，所以 $x=1$ 是极小值点；极小值为 0；

当 $x<\dfrac{1}{5}$ 时， $y'>0$，当 $\dfrac{1}{5}<x<1$ 时， $y'<0$，所以 $x=\dfrac{1}{5}$ 是极大值点；极大值为 $\dfrac{3456}{3125}$.



3. a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？并求此极值.

解： $f'(x)=a\cos x+\cos 3x$， $f''(x)=-a\sin x-3\sin 3x$

由费马定理知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则必有 $f'(\dfrac{\pi}{3})=0$，即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，

故 $a=2$，而 $f''(\dfrac{\pi}{3})=-2\sin\dfrac{\pi}{3}-3\sin\pi=-\sqrt{3}<0$，由判别极值的第二充分定理知：

$f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极大值 $f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{3}\sin\pi=\sqrt{3}$

注： 题目要求求极值时，必须指出是极大值还是极小值.

4. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1$， $x_2=2$ 处取得极值，试求 a 与 b 的值，并计算

极值.

解： $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$， $f''(x)=-\frac{a}{x^2}+2b$，由费马定理知 $f'(1)=a+2b+1=0$，

$f'(2)=\frac{a}{2}+4b+1=0$，解得： $a=-\frac{2}{3}$， $b=-\frac{1}{6}$；所以， $f''(x)=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$，又

$f''(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$， $f''(2)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0$，由判别极值的第二充分定理知：

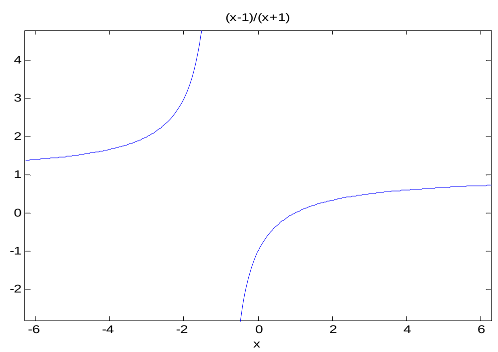
$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-\frac{2}{3}\cdot\ln 1+(-\frac{1}{6})\cdot 1^2+1=\frac{5}{6}$

$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=-\frac{2}{3}\cdot\ln 2+(-\frac{1}{6})\cdot 2^2+2=\frac{2(2-\ln 2)}{3}$

5．求下列函数的最值.

(1) $y=\frac{x-1}{x+1}$， $x\in[0,4]$

解： $y=1-\frac{2}{x+1}$， $y'=\frac{2}{(x+1)^2}>0$，当 $x\in[0,4]$时，函数无不可导点，所以此函数在此区间内单调增，最小值点是 $x=0$，最小值 $y_{\min}=-1$，最大值点是 $x=4$，最大值 $y_{\max}=\frac{3}{5}$。

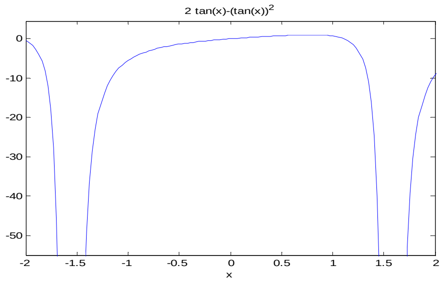


(2) $y=2\tan x-\tan^2 x$， $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

解：令 $y'=2\sec^2 x(1-\tan x)=0$ 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，函数

$y = 2\tan x - \tan^2 x$ 无不可导点， $x \in (\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4})$ 时， $y' > 0$； $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \delta)$ 时，

$y' < 0$，故最大值点是 $x = \frac{\pi}{4}$，最大值 $y_{\max} = 1$。



(3) $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$， $a > b > 0$， $x \in (0, 1)$

解：因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$，所以函数无最大值。 $y' = -\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(1-x)^2}$，令 $y' = 0$，得

$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(1-x)^2}$，因为 $a > b > 0$， $x \in (0, 1)$，所以 $\frac{a}{x} = \frac{b}{1-x}$，解得驻点 $x = \frac{a}{a+b}$。

因为 $y'' = \frac{2a^2}{x^3} + \frac{2b^2}{(1-x)^3} > 0, x \in (0,1)$，所以函数在 $x = \frac{a}{a+b}$ 取得极小值，由于

$x \in (0, 1)$ 时，函数无不可导点，所以 $x = \frac{a}{a+b}$ 是最小值点，最小值 $y_{\min} = (a+b)^2$。

(4) $y = \max\{x^2, (1-x)^2\}$

解：因为 $y = \max\{x^2, (1-x)^2\} \geq x^2$， $y = x^2$ 无最大值，故 $y = \max\{x^2, (1-x)^2\}$ 也无最大值。

$$y = \max\{x^2, (1-x)^2\} = \begin{cases} x^2 & x^2 \geq (1-x)^2 \\ (1-x)^2 & x^2 < (1-x)^2 \end{cases}，即 y = \begin{cases} x^2 & x \geq \frac{1}{2} \\ (1-x)^2 & x < \frac{1}{2} \end{cases}，$$

$$y' = \begin{cases} 2x & x > \frac{1}{2} \\ 2(x-1) & x < \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \frac{1}{2} \end{cases}，$$ 令 $y' = 0$，无解所以无驻点，所以最小值点是不可导点 $x = \frac{1}{2}$，

最小值为 $y_{\min}=\dfrac{1}{4}$。

6. 设 $f(x)=x-\cos x\ \ (0\le x\le\pi)$，求适合下列条件的点 x.

(1) $f(x)$ 的最大、最小值点.

(2) $f(x)$ 增加最快、最慢的点.

(3) $f(x)$ 图像的切线斜率增加最快的点.

解：(1) $f'(x)=1+\sin x\ge 0$，故 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的最大值点为 $x=\pi$，最小值点为 $x=0$.

(2) $f(x)$ 增加最快、最慢的点，即求 $f'(x)=1+\sin x\overset{\Delta}{=}g(x)$ 的最大、最小值点. 令

$g'(x)=\cos x=0$，得驻点 $x=\dfrac{\pi}{2}$，由于 $g(0)=1$，$g(\dfrac{\pi}{2})=2$，$g(\pi)=1$，故 $g(x)$ 最大值点（即 $f(x)$ 增加最快的点）为 $x=\dfrac{\pi}{2}$；最小值点（即 $f(x)$ 增加最慢的点）为

$x=0,\ x=\pi$.

(3) $f(x)$ 图像的切线斜率增加最快的点，即求 $f''(x)=\cos x\overset{\Delta}{=}h(x)$ 的最大值点. 由于

$h'(x)=-\sin x\le 0$，故 $h(x)$ 单调递减，故 $h(x)$ 最大值点（即 $f(x)$ 图像的切线斜率增加最快的点）为 $x=0$.

注：（2）、（3）小题说明时候可不按照严格求导办法，因为 $\sin x$，$\cos x$ 都是最基本初等函数，最大最小值点在哪里产生应可以直接使用

7. 甲乙两地用户共用一台变压器，问变压器 C 设在输电干线何处时，所用输电线最短（见图 3-16）

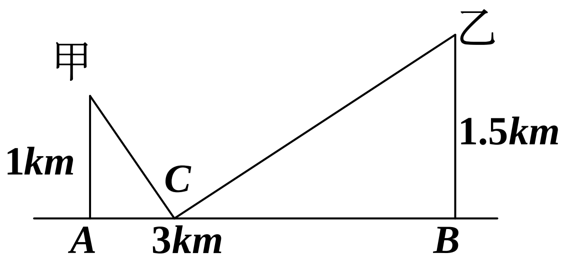


图 3−16

解：将点 A 设为原点，A、B 两点的连线（输电干线）设为 x 轴，x 轴的正向与有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 相同，设变压器 C 置于 x 处

时，所用输电线长度为 $L(x)$，所用输电线最短即求 $L(x)$ 的最小值．由题意知：

$$L(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(3-x)^2+1.5^2}\quad (0\le x\le 3)$$

则 $L'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{3-x}{\sqrt{(3-x)^2+1.5^2}}$，令 $L'(x)=0$，得唯一驻点 $x=1.2$

由问题的实际意义知唯一驻点 $x=1.2$ 即是使输电线最短的位置，故变压器 C 应置于距 A 点 $1.2km$ 处.

8. 设曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=2x+1$ 相交于 A、B 两点，C 为弧段 AB 上的一点，问 C 在何处时，ΔABC 的面积最大？并求此最大面积.

解法 1：联立曲线方程 $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=2x+1 \end{cases}$ 得交点 $A(-3,-5)$，$B(1,3)$，

设 $C(x_0,4-x_0^2)\quad (-3\le x_0\le 1)$，$C$ 到弦 AB 的垂足为 D，则

直线段 CD 的方程为 $y-(4-x_0^2)=-\dfrac{1}{2}(x-x_0)$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x+4-x_0^2+\dfrac{1}{2}x_0$

联立直线段 CD 与直线段 AB 的方程得 $D(\dfrac{2}{5}[-x_0^2+\dfrac{x_0}{2}+3],\ \dfrac{4}{5}[-x_0^2+\dfrac{x_0}{2}+3]+1)$

所以 $|AB|=\sqrt{(1+3)^2+(3+5)^2}=4\sqrt{5}$，

$$|CD|=\sqrt{(\frac{2}{5}[-x_0^2+\frac{x_0}{2}+3]-x_0)^2+(\frac{4}{5}[-x_0^2+\frac{x_0}{2}+3]+1-4+x_0^2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{(x_0^2+2x_0-3)^2}$$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2\sqrt{(x_0^2+2x_0-3)^2}$，函数 $d=(x_0^2+2x_0-3)^2$ 与函数 $S_{\Delta ABC}$ 有相同的极值点，而 $d'=2(x_0^2+2x_0-3)(2x_0+2)=4(x_0-1)(x_0+3)(x_0+1)$

令 $d'=0$，得惟一驻点 $x_0=-1$，又 $S_{\Delta ABC}(-3)=0$，$S_{\Delta ABC}(-1)=8$，$S_{\Delta ABC}(1)=0$

故 $C(-1,3)$，$\max\{S_{\Delta ABC}\}=8$

解法 2：本题等价于在弧段 AB 上找一点 C，使点 C 到直线 AB 的距离最大，由几何知识，曲线在点 C 的切线应该平行于直线 AB，因此曲线在点 C 的切线的斜率为 2。设 C 点坐标为 (x_0,y_0)，则应有 $y'|_{x=x_0}=-2x_0=2$，解得 $x_0=-1$，故 $C(-1,3)$，由点到直线距离

公式，知此最大三角形的高为 $h=\dfrac{|2(-1)-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，

$|AB|=\sqrt{(1+3)^2+(3+5)^2}=4\sqrt{5}$，所以 $\max\{S_{\Delta ABC}\}=8$

9. 设测变量 x 的值时，得到 n 个略有偏差的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，问怎样取 x，才能使函数 $f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ 达到最小.

解：令 $f'(x)=2(x-a_1)+2(x-a_2)+\cdots+2(x-a_n)=0$，得驻点

$x=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，由于是实际问题，且驻点唯一，此即为最小值点。

10. 设货车以每小时 xkm 的速度匀速行驶 $130km$，规定 $50\le x\le 100$. 假设汽油的价格是 $2元/L$，汽车耗油与行驶速度的关系是 $(2+\dfrac{x^2}{360})L/h$，司机的工资是 $14元/h$. 试问最经济的车速是多少？行驶的总费用是多少？（L—升，h—小时）.

解：当货车以每小时 xkm 的速度行驶时，设行驶的总费用为 $R(x)$ 元，则每小时的费用为

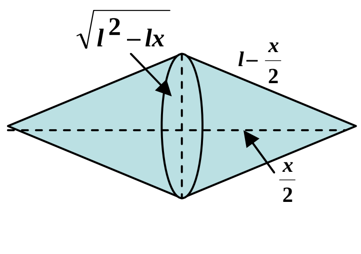
$2\cdot(2+\dfrac{x^2}{360})+14=2\cdot(9+\dfrac{x^2}{360})$，共行驶了 $\dfrac{130}{x}$ 小时，最经济的车速即 $R(x)$ 的最小值，

因而，$R(x)=2\cdot(9+\dfrac{x^2}{360})\cdot\dfrac{130}{x}=260(\dfrac{9}{x}+\dfrac{x}{360})$，令 $R'(x)=260(\dfrac{x^2-3240}{360x^2})=0$，

得惟一驻点 $x=18\sqrt{10}\approx 57$（由于题中假设 $50\le x\le 100$，故 $x=-18\sqrt{10}$ 舍去），由问题的实际意义即知 $x=18\sqrt{10}\approx 57$ 为 $R(x)$ 的最小值点，$R(57)\approx 82.8$

故最经济的车速是 $57km/h$，行驶的总费用 82.2 元.

11.周长为 $2l$ 的等腰三角形，绕其底边旋转形成旋转体，求所得体积为最大的那个等腰三角形.



解：设等腰三角形的底边边长为 x，则其腰长为 $l-\dfrac{x}{2}$，如图，则形成的旋转体可视为两个同体积的圆锥，圆锥的高为 $\dfrac{x}{2}$、母线长为 $l-\dfrac{x}{2}$，则底半径为 $\sqrt{l^2-lx}$，故

旋转体的体积$V=\frac{2}{3}\pi(l^2-lx)\cdot\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}(l^2x-lx^2)$，令$V'=\frac{\pi}{3}(l^2-2lx)=0$，得惟一驻点$x=\frac{l}{2}$，由问题的实际意义即知$x=\frac{l}{2}$为体积的最大值点，$V_{\max}=\frac{\pi l^3}{12}$，故等腰三角形的底边边长为$\frac{l}{2}$，腰长为$\frac{3l}{4}$时，旋转体体积最大.

12.将正数S分为两个正数之和，使其乘积最大.

解：设其中一个正数是x，则另一正数是$S-x$，问题转化为求函数$f(x)=x(S-x)$（$x>0$）的最大值。令$f'(x)=S-2x=0$得唯一驻点$x=\frac{S}{2}$，由于实际问题最大值存在，所以此即为最大值点。即$S=\frac{S}{2}+\frac{S}{2}$

13. 将正数P分为两个正数之积，使其和最小.

解：设其中一个正数是x，则另一正数是$\frac{P}{x}$，问题转化为求函数$f(x)=x+\frac{P}{x}$（$x>0$）的最小值。令$f'(x)=1-\frac{P}{x^2}=0$得唯一驻点$x=\sqrt{P}$，由于实际问题最小值存在，所以此即为最小值点。即$P=\sqrt{P}\cdot\sqrt{P}$

14. 求下列函数的上下凸区间及拐点.

(1) $y=e^{-x^2}$

解：$y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=(4x^2-2)e^{-x^2}$，令$y''=0$，得$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$y''<0$，$x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$y''>0$，$x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$时，$y''>0$，

故上凸区间为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，下凸区间为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y=e^{-\frac{1}{2}}$，故拐点为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(2) $y=x+\frac{1}{x}$

解：$y'=1-\frac{1}{x^2}$，有不可导点$x=0$，$y''=\frac{2}{x^3}$，无$y''=0$的点，

$x\in(-\infty,0)$时，$y''<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$y''>0$，

故上凸区间为$(-\infty,0)$，下凸区间为$(0,+\infty)$，无拐点。

(3) $y=x^2+\frac{1}{x}$

解：函数的定义域为：$x\neq 0$. $y'=2x-\frac{1}{x^2}$，$y''=2+\frac{2}{x^3}$，令$y''=0$得 $x=-1$

$x\in(-\infty,-1)$时，$y''>0$，$x\in(-1,0)$时，$y''<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$y''>0$，

故上凸区间为$(-1,0)$，下凸区间为$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，故拐点为$(-1,0)$.

(4) $\begin{cases}x=t^2\\ y=3t+t^3\end{cases}$

解：设$y=y(x)$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{3+3t^2}{2t}$，$\left(\frac{3+3t^2}{2t}\right)'=\frac{3t^2-3}{2t^2}$，

令$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\frac{3t^2-3}{2t^2}}{2t}=\frac{3(t^2-1)}{4t^3}=0$，得$t=\pm1$，且$t=0$处，二阶导数不存在，

$t\in(-\infty,-1)$，$\frac{d^2y}{d^2x}<0$，$t\in(-1,0)$，$\frac{d^2y}{d^2x}>0$，$t\in(0,1)$，$\frac{d^2y}{d^2x}<0$，$t\in(1,+\infty)$，

$\frac{d^2y}{d^2x}>0$，故上凸区间为$(-\infty,-1)$，$(0,1)$，下凸区间为$(-1,0)$，$(1,+\infty)$. $t=-1$时，

$x=1,\ y=-4$，$t=1$时，$x=1,\ y=4$，$t=0$时，$x=0,\ y=0$，故拐点为$(1,-4)$，$(1,4)$，

$(0,0)$.

15. 证明下列不等式成立.

(1) $\left|3x - x^3\right| \le 2, \quad x \in [-2, 2]$

证明：(最大最小值法) 即证 $(3x - x^3)^2 \le 4, \quad x \in [-2, 2]$，设 $f(x) = 4 - (3x - x^3)^2$，

令 $f'(x) = -6x(3 - x^2)(1 - x^2) = 0$， $x = 0$， $x = \pm 1$， $x = \pm\sqrt{3}$， $f(0) = 4$，

$f(\pm 1) = 0$， $f(\pm\sqrt{3}) = 4$， $f(\pm 2) = 0$，故 $f(x) \ge f_{\min}(x) = 0 \quad x \in [-2, 2]$.

(2) $(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})\ln(1 + x) > 1, \quad x \in (0, +\infty)$

证 明 ： （ 利 用 单 调 性 ） 即 证 $(2 + x)\ln(1 + x) - 2x > 0, \quad x \in (0, +\infty)$ ， 设

$f(x) = (2 + x)\ln(1 + x) - 2x$，则 $f'(x) = \dfrac{(1 + x)\ln(1 + x) - x}{1 + x}$（看不出符号情况），令

$g(x) = (1 + x)\ln(1 + x) - x$ ， 由 $g'(x) = \ln(1 + x) > 0$ ， $g_{\min}(x) = g(0) = 0$ ， 得

$g(x) > 0$ ， 从 而 $f'(x) = \dfrac{(1 + x)\ln(1 + x) - x}{1 + x} > 0$ ， 由 $f_{\min}(x) = f(0) = 0$ 知 ，

$f(x) > 0 \quad x \in (0, +\infty)$.

(3) $e^x \le \dfrac{1}{1 - x} \quad x \in (-\infty, -1)$

证明：即证 $1 - (1 - x)e^x \ge 0$，设 $f(x) = 1 - (1 - x)e^x$，$f'(x) = xe^x$，$f''(x) = e^x(1 + x)$，

法 1（利用单调性）$f'(x) < 0 \quad x \in (-\infty, -1)$，故 $f(x) \ge f_{\min}(x) = f(-1) = 1 - \dfrac{2}{e} > 0$

法 2（利用函数的凸性）由于 $f''(x) < 0 \quad x \in (-\infty, -1)$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上

是 上 凸 的 ， $f(-1) = 1 - \dfrac{2}{e} > 0$ ， $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 - (1 - x)e^x = 1 > 0$ ， 所 以

$f(x) \ge \min\{f(-1), f(-\infty)\} > 0$

(4) $x\ln x + y\ln y > (x + y)\ln\dfrac{x + y}{2}$

证 明 ：（ 利 用 函 数 的 凸 性 ） 设 $f(x) = x\ln x \quad (x > 0)$ ， 则 $f'(x) = 1 + \ln x$ ，

$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格下凸的，由严格下凸函数的定义

$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)>f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$，取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，则对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$，均

有 $\dfrac{x\ln x+y\ln y}{2}>(\dfrac{x+y}{2})\ln\dfrac{x+y}{2}$，即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$

(5) $2\arctan\dfrac{a+b}{2}>\arctan a+\arctan b\quad(a>0,b>0)$

证明：（利用函数的凸性）设 $f(x)=\arctan x\quad(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，

$f''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$，故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格上凸的，由严格上凸函数的定义 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)<f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$，取 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，则对

$\forall a,b\in(0,+\infty)$，均有 $\dfrac{\arctan a+\arctan b}{2}<\arctan\dfrac{a+b}{2}$，

即 $2\arctan\dfrac{a+b}{2}>\arctan a+\arctan b\quad(a>0,b>0)$

(6) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2}$

证明：$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，

$f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，

法 1 (最大最小值法)令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=0$，又 $f''(0)=1>0$，故 $x=0$ 为最小值点，即 $f(x)\geq f_{\min}(x)=f(0)=0$

法 2 (利用拉格朗日公式) $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理，故在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上应有

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}=x\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间)，当 $x\leq 0$ 时，$x\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})\geq 0$；当 $x>0$ 时，$x\ln(\xi+\sqrt{1+\xi^2})>0$，总之，

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\geq 0$

16. 试求 k 的值，使曲线 $y=k(x^2-3)^2$ 的拐点处的法线通过原点.

解：$y'=4kx(x^2-3)$，$y''=12k(x^2-1)$，令 $y''=0$，得 $x=\pm 1$，且在 $x=\pm 1$ 的两侧 y'' 变号，故拐点为 $(-1,4k)$，$(1,4k)$；又 $y'(-1)=8k$，$y'(1)=-8k$，故点 $(\pm 1,4k)$ 处的法线为 $y-4k=\pm\dfrac{1}{8k}[x-(\pm 1)]$，即 $-4k=-\dfrac{1}{8k}$，推得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

17. a ,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解：$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$，欲使点 $(1,3)$ 为曲线的拐点，则必有 $y''(1)=0$，即 $6a+2b=0$，又点 $(1,3)$ 满足曲线方程，即 $a+b=3$，解得 $a=-\dfrac{3}{2}$， $b=\dfrac{9}{2}$

18. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，证明：点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

证明：法 1：因为 $f'''(x_0)\neq 0$，不妨设 $f'''(x_0)>0$，由三阶导数的定义及 $f''(x_0)=0$，

有 $$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$$

由极限的保号性知，$\exists\, x_0$ 的去心邻域 $\overset{0}{N}(x_0,\delta)$，使得 $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，因此，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f''(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内严格上凸；当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f''(x)>0$，即 $f(x)$ 在区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内严格下凸；于是点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

法 2：对函数 $f''(x)$ 运用一阶泰勒公式：$f''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

即 $f''(x)=f'''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

当 $|x-x_0|$ 很小时，右端的符号取决于 $f'''(x_0)(x-x_0)$ 的符号，故在 x_0 的较小邻域内，

$x > x_0$ 与 $x < x_0$ 时 $f''(x)$ 的符号相反，故点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

19. 设 $f'(x)$ 的图形分别如图 3—17 所示，指出 $f(x)$ 的单调区间、上下凸区间，极值点及曲线拐点的横坐标.

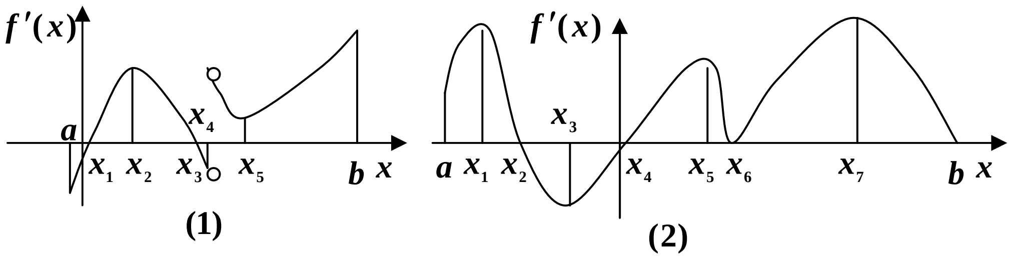


图　3－17

解：（1）因 $x \in (a, x_1)$ 时，$f'(x) < 0$，所以 (a, x_1) 是单调减区间；

$x \in (x_1, x_3)$ 时，$f'(x) > 0$，所以 (x_1, x_3) 是单调增区间；

$x \in (x_3, x_4)$ 时，$f'(x) < 0$，所以 (x_3, x_4) 是单调减区间；

$x \in (x_4, b)$ 时，$f'(x) > 0$，所以 (x_4, b) 是单调增区间；

可能的极值点：驻点 x_1，x_3，不可导点 x_4，根据左右两侧一阶导数符号的变化，可知 $x = x_1$ 或 x_4 是极小值点，$x = x_3$ 是极大值点。

因 $f'(x)$ 在 $x = x_2$，x_5 处有水平切线，所以 $f'(x)$，$f''(x_5) = 0$

当 $x \in (a, x_2)$ 时，$f'(x)$ 单调增，即 $f''(x) > 0$，所以 (a, x_2) 是下凸区间；

当 $x \in (x_2, x_4)$ 时，$f'(x)$ 单调减，即 $f''(x) < 0$，所以 (x_2, x_4) 是上凸区间；

当 $x \in (x_4, x_5)$ 时，$f'(x)$ 单调减，即 $f''(x) < 0$，所以 (x_4, x_5) 是上凸区间；

当 $x \in (x_5, b)$ 时，$f'(x)$ 单调增，即 $f''(x) > 0$，所以 (x_5, b) 是下凸区间；

拐点的横坐标可能为：x_2，x_5（二阶导数为 0），不可导点 x_4，

根据左右两侧二阶导数符号的变化，可知 $x = x_2$，$x = x_5$ 是拐点的横坐标。

（2）因 $x \in (a, x_2)$ 或 (x_4, b) 时，$f'(x) > 0$，所以 (a, x_2) 或 (x_4, b) 是单调增区间；

$x \in (x_2, x_4)$ 时，$f'(x) < 0$，所以 (x_2, x_4) 是单调减区间；

可能的极值点：驻点 x_2， x_4， x_6， 根据左右两侧一阶导数符号的变化，可知 $x=x_2$ 是极大值点， $x=x_4$ 是极小值点， $x=x_6$ 不是极值点。

因 $f'(x)$ 在 $x=x_1$，x_3，x_5，x_6，x_7 处有水平切线，所以 $f''(x_1)=0$，$f''(x_3)=0$，$f''(x_5)=0$， $f''(x_6)=0$， $f''(x_7)=0$，

当 $x\in(a,x_1)$ 时， $f'(x)$ 单调增，即 $f''(x)>0$，所以 (a,x_1) 是下凸区间；

当 $x\in(x_1,x_3)$ 时， $f'(x)$ 单调减，即 $f''(x)<0$，所以 (x_1,x_3) 是上凸区间；

同理 (x_3,x_5)，(x_6,x_7) 是下凸区间，(x_5,x_6)，(x_7,b) 是上凸区间，

拐点的横坐标可能为： $x=x_1$， x_3， x_5， x_6， x_7，

根据左右两侧二阶导数符号的变化，可知 $x=x_1$， x_3， x_5， x_6， x_7 都是拐点的横坐标。

20. 图 3—18 中有两幅包含三条曲线 a、b、c 的图形，试判断每幅图中 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$ 分别对应着 a、b、c 中的哪条曲线？

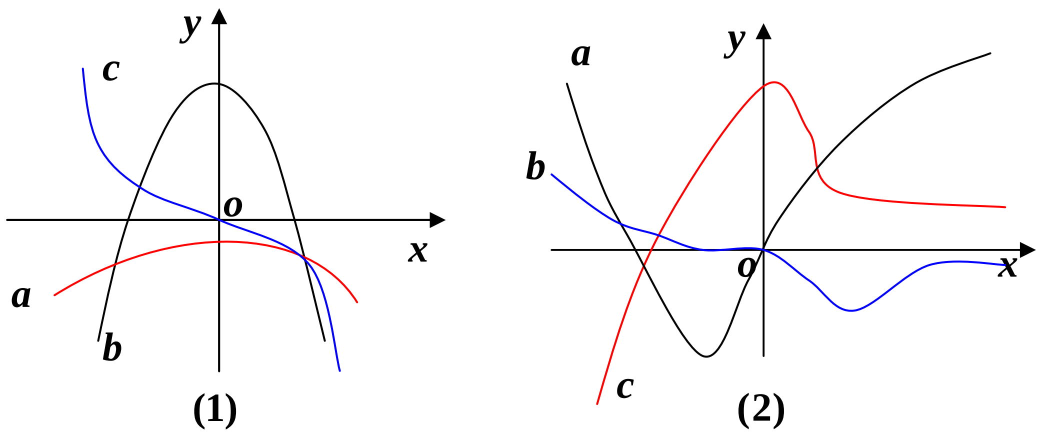


图 3－18

解： a、b 不可能是 $f(x)$，否则 $f''(x)<0$，所以 c 是 $f(x)$，由于 c 单调减，所以 a 是 $f'(x)$，因而 b 是 $f''(x)$。

（2） a 不可能是 $f(x)$，假设 a 是 $f(x)$，当 a 单调减时，b、c 均有函数值大于 0，这说明 b、c 都不可能是 $f(x)$ 的导数图像；

b 不可能是 $f(x)$，假设 b 是 $f(x)$，从 x 轴负半轴看，当 b 单调减时，a、c 已有函数值大于 0，所以 a、c 不可能是它的一阶导数；

因此 c 是 $f(x)$，x 轴负半轴，c 单增；x 轴正半轴，c 单减，故 b 是 $f'(x)$，因而 a 是 $f''(x)$。

21. 求下列函数的渐近线.

(1) $y = x\ln(e+\frac{1}{x})$

解：因为 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{e}+0} x\ln(e+\frac{1}{x}) = +\infty$，故 $x=-\frac{1}{e}$ 为函数的一条铅直渐近线，

$$\text{又}\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left[x\ln(e+\frac{1}{x})-x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e+x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e+x}}{1}=\frac{1}{e}$$

故 $y = x+\frac{1}{e}$ 为函数的一条斜渐近线.

(2) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty$，故 $x=1$ 为函数的一条铅直渐近线，

$$\text{又}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2}=5,$$

故 $y=x+5$ 为函数的一条斜渐近线.

(3) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$，故 $x=1$ 为函数的一条铅直渐近线，

$\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$，故 $x=-1$ 为函数的一条铅直渐近线，

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=-1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)}=0$，

故 $y=-x$ 为函数的一条斜渐近线，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\cdot\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=0$，

故 $y=x$ 为函数的一条斜渐近线.

(4) $y=x-2\arctan x$

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2\arctan x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\arctan x-x\right)=-\pi$，

故 $y=x-\pi$ 为函数的一条斜渐近线，

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2\arctan x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2\arctan x-x\right)=\pi$，

故 $y=x+\pi$ 为函数的一条斜渐近线