习题 5.4(P306)

1. 用观察法求下列方程的一个特解.

(1) $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$

解：由于方程中 y 及 y' 的系数有关系：$p(x)+xq(x)=0$，故 $y=x$ 为上述方程的一个特解.

(2) $xy''-(1+x)y'+y=0$

解：由于方程中 y 及其各阶导数的系数之和为零，故 $y=e^x$ 为上述方程的一个特解.

2. 用常数变易法求方程 $y''+y=\tan x$ 的通解.

解：方程所对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

故方程所对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

设非齐次方程的特解为 $y_0=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$，

则 $y_0'=C_1'(x)\cos x-C_1(x)\sin x+C_2'(x)\sin x+C_2(x)\cos x$

令 $C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \qquad (1)$

故 $y_0'=-C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$

$y_0''=-C_1'(x)\sin x-C_1(x)\cos x+C_2'(x)\cos x-C_2(x)\sin x$

代入原方程得 $-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\tan x \qquad (2)$

联立(1)(2)解得 $C_1'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$， $C_2'(x)=\sin x$，

解得 $C_1(x)=\int -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\sin x-\ln|\sec x+\tan x|$，

$C_2(x)=\int \sin x dx=-\cos x$，

故该方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln|\sec x+\tan x|$

3. 验证 $y_1=e^{x^2}$ 和 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

证明：$y_1' = 2xe^{x^2}$，$y_1'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$，把 y_1，y_1'，y_1'' 代入方程左端：

左 $= (2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}) - 4x \cdot 2xe^{x^2} + (4x^2 - 2)e^{x^2} = 0 =$ 右，所以 $y_1 = e^{x^2}$ 是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解；

$y_2' = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$，$y_2'' = 6xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2}$，把 y_2，y_2'，y_2'' 代入方程左端：

左$= (6xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2}) - 4x \cdot (e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}) + (4x^2 - 2)xe^{x^2} = 0 =$右，

所以 $y_2 = xe^{x^2}$ 是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解；

由于 $y_1 = e^{x^2}$ 和 $y_2 = xe^{x^2}$ 线性无关，故该方程的通解为 $y = C_1e^{x^2} + C_2xe^{x^2}$

4. 证明：如果 y_1 和 y_2 是二阶线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的两个线性无关解，则 $y_1 - y_2$ 是对应的齐次方程的解.

证明：因为 y_1 是二阶线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，所以

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f(x) \qquad (1)$$

因为 y_2 是二阶线性非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，所以

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f(x) \qquad (2)$$

（1） 式、（2）式左右两端分别相减，得

$$(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2) = 0$$

即 $y_1 - y_2$ 是对应的齐次方程的解.

5. 证明：已知二阶线性非齐次方程的三个特解为 $y_1 = x - (x^2 + 1)$，$y_2 = 3e^x - (x^2 + 1)$，$y_3 = 2x - e^x - (x^2 + 1)$，求该方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的特解.

证明：由于给定的三个特解线性无关，由习题 5.4 第 4 题知 $y_1 - y_2 = x - 3e^x$，$y_1 - y_3 = e^x - x$ 为对应的齐次方程的两个线性无关的特解，故对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1(x - 3e^x) + C_2(e^x - x)$，由线性非齐次方程通解的结构定理知其通解为

$y = C_1(x - 3e^x) + C_2(e^x - x) + x - (x^2 + 1)$，

代入初始条件得$\begin{cases} -3C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ -2C_1 + 1 = 0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ C_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

故线性非齐次方程满足初始条件的特解为 $y = e^x - x^2 - x - 1$

6. 已知微分方程$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6x - 6$有三个特解 $y_1 = 3$，

$y_2 = 3 + x^2$，$y_3 = 3 + x^2 + e^x$，求该方程的通解.

解：该方程是二阶线性非齐次微分方程，由于给定的三个特解线性无关，由习题 5.4 第 4 题知 $y_2 - y_1 = x^2$，$y_3 - y_2 = e^x$ 为对应的齐次方程的两个线性无关的特解，故对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1x^2 + C_2e^x$，由线性非齐次方程通解的结构定理知其通解为

$\overline{y} = C_1x^2 + C_2e^x + 3$