2008 级《微积分 A》期中试卷参考答案及评分标准

一、 填空（每小题 3 分，共 30 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}=\underline{-1}$.

2．设 $y=\arcsin\sqrt{x}+f^{2}(\arctan\dfrac{1}{x})$， f 可微，则 $dy=\underline{(\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^{2}}}-\dfrac{2f}{1+x^{2}}f')dx}$.

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+x^{2}} & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导，则 $a=\underline{-1}, b=\underline{2}$.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则 $f(b)-f(a),\ (b-a)f'(a),$ $(b-a)f'(b)$ 按由大到小的排列次序是：$\underline{(b-a)f'(b)>f(b)-f(a)>(b-a)f'(a)}$.

5．曲线 $\begin{cases}x=1+t^{2}\\ y=t^{3}\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的法线方程为：$\underline{x+3y-29=0}$.

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{6})^{n}=\underline{\dfrac{25}{6}}$.

7．设 $f(x)=(x^{200}-1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $g(1)=5,$ 则 $f'(1)=\underline{1000}$.

8．$x\to 0$ 时，$\sqrt{1-2x}=1+ax+bx^{2}+o(x^{2})$，则 $a=\underline{-1}$，$b=\underline{-\dfrac{1}{2}}$.

9．函数 $f(x)=xe^{-\frac{x^{2}}{2}}$ 的带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式为：$\underline{x-\dfrac{x^{3}}{2}+\dfrac{x^{5}}{8}+o(x^{5})}$.

10．设 $y=\dfrac{1}{x^{2}+5x-6}$，则 $y^{(n)}=\underline{\dfrac{(-1)^{n}n!}{7}[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+6)^{n+1}}]}$.

二、（10 分）设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+y^{3}-5x=0$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx},\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{x=0}$.

解:

$$e^{xy}(y+xy')+3y^{2}y'-5=0, \qquad (1)$$

$$y'=\frac{5-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^{2}}$$

（1）两端再求导。得

$$e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(2y'+xy'')+6yy'^2+3y^2y''=0,$$

由原方程得 $x=0, y=-1,\ \ y'=2$，代入上式得

$$y''=\frac{19}{3}.$$

三、（10 分）证明不等式：当 $x>1$ 时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

证明：设 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，有 $f(1)=0$.

$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1,$ 又有 $f'(1)=0$

$f''(x)=\dfrac{x-1}{x^2},$

当 $x>1$ 时，有 $f''(x)>0,$ 所以 $f'(x)$ 单增，

所以有 $f'(x)>f'(1)=0\quad (x>1)$，所以 $f(x)$ 单增，

所以有 $f(x)>f(1)=0\quad (x>1)$

即 $\qquad f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)>0$

又当 $x>1$ 时，$(x+1)>0,$ 所以 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}.$

四、（10 分）利用导数研究函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的性态，并画出其图形.

解：（1）函数的定义域为：$D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

（2）$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}$，$\quad f''(x)=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}$

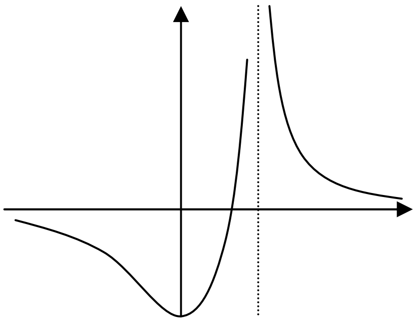
令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0;$ 令 $f''(x)=0$，得特殊点 $x=-\dfrac{1}{2}.$

（3）又 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty,$ 所以 $x=1$ 为其铅直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,$ 所以 $y=0$ 为其水平渐近线；曲线无斜渐近线。

（4）列表

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		$(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9})$		极小值 $f(0)=-1$		不存在	



五、（10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x^3\sin\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$，

（1） 求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解:（1）当$x<0$时，$f'(x)=\left(e^{-1/x^2}\right)'=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，

当$x>0$时，$f'(x)=\left(x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)'=3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}$，

显然，$f(x)$在$x=0$处连续，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0,$$

所以 $f'(0)=0$,

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x<0\\ 0 & x=0\\ 3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$$

（2）$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2t^3}{e^{t^2}}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{6t^2}{2te^{t^2}}=0=f'(0)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x})=0=f'(0)$

所以 $f'(x)$在$x=0$处连续.

六、（10 分）设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 (x_0,y_0) 处相切，且在这一点曲线 $y=f(x)$ 的曲率 k_1 比 $y=g(x)$ 的曲率 k_2 大，$f''(x_0)>0,g''(x_0)>0$.问在 (x_0,y_0) 附近，$y=f(x)$ 是在 $y=g(x)$ 的上方还是下方？并说明理由.

解：由题意可知， $f'(x_0)=g'(x_0)$,

$$k_1=\frac{|f''(x_0)|}{\left[1+f'^2(x_0)\right]^{3/2}}>\frac{|g''(x_0)|}{\left[1+g'^2(x_0)\right]^{3/2}}=k_2$$

又$f''(x_0)>0,g''(x_0)>0$, 得 $f''(x_0)>g''(x_0)$,

令$F(x)=f(x)-g(x)$,

有$F(x_0)=0,\quad F'(x_0)=0,\quad F''(x_0)>0$

由极值第二充分条件知，$F(x)$在x_0处取得极小值，

由极小值的定义知，在 x_0 的某邻域内有 $F(x)>F(x_0)=0$，即 $f(x)>g(x)$，

从而在点 (x_0,y_0) 附近，曲线 $y=f(x)$ 在曲线 $y=g(x)$ 的上方.

七、（10 分）在坐标平面上通过点 $(2,3)$ 引一条直线，要使它在两坐标轴上的截距均为正，且两截距之和为最小，求此直线的方程.

解：设此直线的斜率为k,则此直线的方程为：$y=k(x-2)+3$.

此直线在x,y坐标轴上的截距分别为:$2-\dfrac{3}{k},3-2k$.

则目标函数为：$d=5-2k-\dfrac{3}{k}$

$d'=-2+\dfrac{3}{k^2}$，令$d'=0$,得驻点$k_1=-\sqrt{\dfrac{3}{2}},k_2=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$(由题意，舍去）

又$d''=-\dfrac{6}{k^3}$，$d''|_{k_1}>0$，所以当当$k=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$时，d取得极小值，

又驻点唯一，所以当$k=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$时，d取得最小值,此时直线方程为：

$$y=-\sqrt{\frac{3}{2}}(x-2)+3.$$

八、（10 分）设 $f(x)$ 在$[0,\ \pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，且 $f(0)=0$，求证：

至少存在$\xi\in(0,\ \pi)$，使得 $2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}f(\xi)$.

证明：构造辅助函数：$F(x)=f(x)\cos\dfrac{x}{2}$,

则$F(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，

$\because f(0)=0,\therefore F(0)=0,$且$F(\pi)=f(\pi)\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

所以$F(x)$在$[0,\pi]$上满足罗尔定理的条件，故由罗尔定理知：

至少存在$\xi\in(0,\ \pi)$，使得$F'(\xi)=0$,而

$$F'(x)=f'(x)\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}f(x)\sin\frac{x}{2}$$

$$F'(\xi)=f'(\xi)\cos\frac{\xi}{2}-\frac{1}{2}f(\xi)\sin\frac{\xi}{2}=0$$

又$\xi\in(0,\ \pi)$,所以$\cos\dfrac{\xi}{2}\neq 0$,上式变形即得：

$2f'(\xi)=\tan\dfrac{\xi}{2}f(\xi)$.　　证毕.