北京理工大学 2010-2011 学年第二学期

《微积分 A》期中试题

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 过点 $M_0(3,-2,-1)$ 和 y 轴的平面方程为______________________________.

2. 设 $u = x\arctan\dfrac{z}{y}$，点 $M_0(1,-2,2)$， $\vec{l} = \{1,1,-1\}$. 则梯度 $grad u|_{M_0} =$______________.

方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{M_0} =$______________________.

3. 交换累次积分次序 $I = \int_0^1 dx \int_{3x}^3 e^{y^2} dy =$___________________，积分值 $I =$____.

4. 曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 在点 $M_0(1, 1, 3)$ 处的单位法向量 $\vec{n}^0 =$____________________，

法线的标准方程为：__________________________________.

5. 设 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 y - \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$， 则 $f_x'(0,0) =$ __________，

$f_y'(0,0) =$________.

二、（8 分）已知向量 $\vec{a} = \{1,1,1\}$, $\vec{b} = \{1,2,-2\}$, $\vec{c} = \{3,-5,4\}$，

（1）求向量 $\vec{d} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$；（2）求 $\vec{d}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影；（3）求 $\vec{a}\times\vec{d}$.

三、（8 分）设 $z = f(xy, yg(x))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且

在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

四、（8 分）在极坐标系下计算二重积分 $I = \iint\limits_D 2(x^2+y^2)dxdy$，其中区域

$D: x \le x^2 + y^2 \le 2x$.

五、(8 分)求函数 $f(x,y)=x^2-4xy-2y^2+y^3$ 的极值，并判别是极大值还是极小值.

六、（8 分）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，其中 Ω 是由三坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的有界闭区域.

七、（8 分）设直线 L 过点 $M(1,-1,2)$，并与直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{2-z}{1}$ 垂直相交，求直线 L 的参数方程.

八、（8 分）设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{V}[f(x^2+y^2)+z^2]dV$，其中 $V: x^2+y^2\le t^2\ (t>0),\quad 0\le z\le 2$，试把 $F(t)$ 表示为定积分，并求 $\dfrac{dF}{dt}$.

九、（8 分）设方程 $F(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x})=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$，其中 F 可微，

求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

十、（8 分）试利用球坐标计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 和曲面 $z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的几何体.

十一、（8 分）横截面为长方形的半圆柱形的张口容器，使其表面积等于 S，当容器的长度 h 与断面半径 R 各为多少时，有最大容积？