习题 9.1(P171)

1．计算$\oint\limits_L xydl$，其中 L 是由直线 $x=0$， $y=0$， $x=4$， $y=2$ 围成的矩形。

解：设直线 $x=0$， $y=0$， $x=4$， $y=2$ 分别标记为 L_1， L_2， L_3， L_4；

在 L_1 上， $x=0$， $dl=dy$；在 L_2 上， $y=0$， $dl=dx$；在 L_3 上， $x=4$， $dl=dy$；

在 L_4 上， $y=2$， $dl=dx$

$$\oint\limits_L xydl=\int\limits_{L_1} xydl+\int\limits_{L_2} xydl+\int\limits_{L_3} xydl+\int\limits_{L_4} xydl$$

$$=\int_0^4 0dx+\int_0^2 4ydy+\int_0^4 2xdx+\int_0^2 0dy=24$$

2．计算$\int_L xdl$，其中 L 是抛物线 $y=2x^2-1$ 上介于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间的一段弧.

解：$dl=\sqrt{1+(4x)^2}dx=\sqrt{1+16x^2}dx$

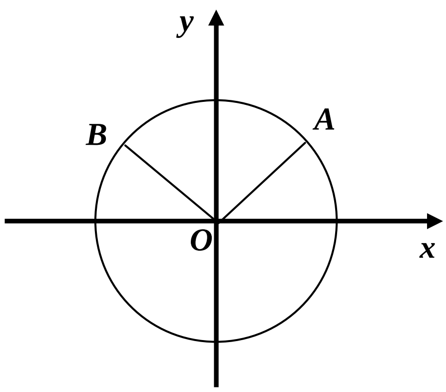
$$\int_L xdl=\int_0^1 x\sqrt{1+16x^2}dx=\frac{1}{32}\int_0^1\sqrt{1+16x^2}d(1+16x^2)$$

$$=\frac{1}{48}(1+16x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{17\sqrt{17}-1}{48}$$

3．计算$\oint\limits_L (x+y)e^{x^2+y^2}dl$， L 是圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与直线 $y=x$， $y=-x$ 围成的扇形区域的边界线.

解： L 如图，圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与直线 $y=x$ 交点

为$(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}})$，且在 $\overline{OA}$ 上， $y=x$， $dl=\sqrt{2}dx$，



$$\int\limits_{\overline{OA}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} xe^{2x^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2x^2}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{a^2}-1)$$

在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$, $\dfrac{\pi}{4}\le t\le\dfrac{3\pi}{4}$，$dl=adt$，

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl=a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos t+\sin t)\,e^{a^2}dt=a^2e^{a^2}\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin(t+\frac{\pi}{4})dt=\sqrt{2}a^2e^{a^2}$$

圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与直线 $y=-x$ 交点为 $(-\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}})$，且在 $\overline{BO}$ 上，$y=-x$，$dl=\sqrt{2}dx$

$$\int_{\overline{BO}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}0dx=0$$

$$\oint_L(x+y)e^{x^2+y^2}dl=\int_{\overline{OA}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl+\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl+\int_{\overline{BO}}(x+y)e^{x^2+y^2}dl$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{a^2}-1)+\sqrt{2}a^2e^{a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+2a^2)e^{a^2}-1]$$

4．计算 $\int_L zdl$， L 为圆锥截线 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t, \quad 0\le t\le t_0 \\ z=t \end{cases}$

解： $dl=\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}dt=\sqrt{2+t^2}dt$

$$\int_L zdl=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(2+t^2)^{\frac{1}{2}}d(2+t^2)=\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}]$$

5．计算 $\int_L ydl$， L 为心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的下半部分.

解：$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\theta=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}d\theta=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$,

$$\int_L ydl=\int_{-\pi}^0 a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot a\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta=-\sqrt{2}a^2\int_{-\pi}^0(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}d(1+\cos\theta)$$

$$=-\sqrt{2}a^2\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{16}{5}a^2$$

6．求空间曲线 L 的弧长， L 的方程为

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t\,, \quad 0 \le t < +\infty \\ z = e^{-t} \end{cases}$$

解：设曲线 L 的弧长为 l，$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{3}e^{-t}dt$，所以

$$l = \int_L dl = \int_0^{+\infty} \sqrt{3}e^{-t}dt = -\sqrt{3}e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{3}$$

7．曲线 $y = \ln x$ 的线密度 $\rho_l(x, y) = x^2$，试求曲线在 $x = \sqrt{3}$ 到 $x = \sqrt{15}$ 之间的质量.

解：$dl = \sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}\,dx$

所求质量为 $m = \int_L x^2 dl = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x\sqrt{x^2 + 1}dx = \frac{1}{3}(4^3 - 2^3) = \frac{56}{3}$

8. 设螺旋形弹簧一圈的方程为

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t\,, \quad 0 \le t < 2\pi \\ z = bt \end{cases}$$

其线密度 $\rho_l(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$，求它的质心及对 z 轴的转动惯量 J_z.

解：$m = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)dl = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt$

$$= \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2 + b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)$$

$$\int_L x(x^2 + y^2 + z^2)dl = \int_0^{2\pi} a\cos t(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt$$

$$= 4\pi ab^2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\int_L y(x^2 + y^2 + z^2)dl = \int_0^{2\pi} a\sin t(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt$$

$$= -4\pi^2 ab^2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\int_L z(x^2 + y^2 + z^2)dl = \int_0^{2\pi} bt(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt$$

$$= 2\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}(a^2 + 2\pi^2 b^3)$$

故 $\bar{x} = \dfrac{1}{m}\int_L x(x^2+y^2+z^2)dl = \dfrac{6ab^2}{3a^2+4\pi^2b^2}$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_L y(x^2+y^2+z^2)dl = \frac{-6\pi ab^2}{3a^2+4\pi^2b^2}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_L z(x^2+y^2+z^2)dl = \frac{3\pi b(a^2+2\pi^2b^2)}{3a^2+4\pi^2b^2}$$

$$J_z = \int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)dl = a^2\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt$$

$$= a^2m = \frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$$

9. 求柱面 $x^2+y^2=Rx$ 含于球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内的侧面积.

解：利用对称性求第一卦限内的侧面积即可，此时 $L_1: x^2+y^2=Rx \quad (x\ge 0, y\ge 0)$

在极坐标系下 $L_1: \rho = R\cos\theta \quad (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

$$S = 4\int_{L_1} z dl = 4\int_{L_1}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dl \xlongequal[\text{变换}]{\text{利用极坐标}} 4\mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\mathrm{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-\mathrm{R}^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = 4\mathrm{R}^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\mathrm{R}^2$$