2007-2008 学年第二学期期中试题(B 卷)参考解答及评分标准

2008 年 4 月 18 日

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ or $\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\}$；

2. $2x^2+y^2+2z^2=8,\quad -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ or $\{-1,1,1\}$ or $\{-4,4,4\}$；

3. $\frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{i}-4\vec{j})$ or $\{\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\}$；　　**4.** $\frac{3}{5},\quad (\frac{418}{25},\frac{524}{25},\frac{131}{5})$

5. $dx+2dy$　　6. $\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$

二、（10 分）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+e^{x-y}f_2' \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-e^{x-y}f_2' \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'-e^{x-y}f_2'+xyf_{11}''+(x-y)e^{x-y}f_{12}''-e^{2(x-y)}f_{22}'' \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

三、（12 分）

$$\begin{cases}2x-\frac{dz}{dx}=0\\ 3+2\frac{dy}{dx}=0\end{cases}$$ 将点 M 代入得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}\quad \frac{dz}{dx}=2$

$$\vec{T}=\{1,-\frac{3}{2},2\} \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

π:　$(x-1)-\frac{3}{2}(y+2)+2(z-1)=0$，

即　$2x-3y+4z=12$ 　　$\cdots\cdots$ 5 分

$\vec{s}=\{2,1,-1\}\times\{1,-1,1\}=\{0,-3,-3\}$ 　$\cdots\cdots$ 9 分

$(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0)$ 是 L 上一点, L 的标准方程为

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{2}{3}}{1}=\frac{z}{1} \qquad \cdots\cdots 10\text{ 分}$$

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{T}\cdot\vec{s}|}{|\vec{T}||\vec{s}|}=\frac{1}{\sqrt{58}} \qquad \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{58}} \qquad \cdots\cdots 12\text{ 分}$$

四、（10 分） $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$ ， $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{z+1}$ ……………….3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-ze^{-y^2}}{z+1}$ ……………….6 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}e^{-x^2}(z+1)-ze^{-x^2}\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}=\frac{-ze^{-x^2-y^2}}{(z+1)^3}$ ……..………………10 分

五、（10 分） $f'_x=y-2x=0$ $f'_y=3y^2-2y+x=0$

解得 $x=0,y=0$ 或 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$

$f''_{x^2}=-2$ $f''_{xy}=1$ $f''_{y^2}=6y-2$ ……..………………4 分

在 $x=0,y=0$， $AC-B^2=3>0$， $A=-2<0$

故 $(0,0)$ 是极大值点，极大值为 $f(0,0)=0$ …..………………7 分

在 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$， $AC-B^2=-3<0$， $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ 不是极值点. …..………10 分

六、（12 分） $y=\sqrt{8-x^2}$ 与 $2y=x^2$ 交点为 $(2,2)$

$$\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho}$$ ……..7 分

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}\rho^2d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\frac{\sin^3\theta}{\cos^6\theta}d\theta+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi=\frac{16}{45}(\sqrt{2}+1)+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$ …..………12 分

七、（10 分） $V=\iint_D(x-y+2)dxdy$ ……………..…..……..……3 分

$=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}(x-y+2)dy$ …………..……..……7 分

$=\frac{81}{20}$ …..…………………………..………10 分

八、（12 分） 设 (x,y,z) 是椭球面上任一点， (x,y,z) 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|x-y+2z-6|}{\sqrt{6}}$$ ……………………….2 分

考虑函数 $f(x,y,z)=(x-y+2z-6)^2$ 在限制条件 $x^2+y^2+2z^2=1$ 下的极值问题.

令 $F(x,y,z)=(x-y+2z-6)^2+\lambda(x^2+y^2+2z^2-1)$

由
$$\begin{cases} F_x'=2(x-y+2z-6)+2\lambda x=0 \\ F_y'=-2(x-y+2z-6)+2\lambda y=0 \\ F_z'=4(x-y+2z-6)+4\lambda z=0 \\ x^2+y^2+2z^2=1 \end{cases}$$

解得 $x=\pm\frac{1}{2}$ $y=\mp\frac{1}{2}$ $z=\pm\frac{1}{2}$ ………………….6 分

记 $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， $N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，

$$d\Big|_M=\frac{4}{\sqrt{6}} \qquad d\Big|_N=\frac{8}{\sqrt{6}}$$

由问题实际意义可判别出 M 为最近点， N 为最远点 ……….8 分

$$\vec{n}=\{2x,2y,4z\}$$

$$\vec{n}\Big|_M=\{1,-1,2\}, \qquad \vec{n}\Big|_N=\{-1,1,-2\}$$

π_M： $x-y+2z-2=0$

π_N： $x-y+2z+2=0$ …………………………….12 分