习题 5.6(P318)

1. 求下列方程的通解.

(1) $y''-7y'+12y=x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-7r+12=0$，特征根为 $r_1=3$， $r_2=4$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$，

设非齐次方程的特解为 $y_0=ax+b$ （0 不是特征根）

代入非齐次方程得 $12ax+12b-7a=x$，从而 $\begin{cases}12a=1\\12b-7a=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=1/12\\b=7/144\end{cases}$，

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\dfrac{x}{12}+\dfrac{7}{144}$

(2) $y''-3y'=2-6x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r=0$，特征根为 $r_1=3$， $r_2=0$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{3x}+C_2$，

设非齐次方程的特解为 $y_0=x(ax+b)$ （0 是特征根）

代入非齐次方程得 $2a-3(2ax+b)=2-6x$，从而 $\begin{cases}-6a=-6\\2a-3b=2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2+x^2$

(3) $2y''+y'-y=2e^x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $2r^2+r-1=0$，特征根为 $r_1=\dfrac{1}{2}$， $r_2=-1$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}$，

设非齐次方程的特解为 $y_0=ae^x$ （1 不是特征根）

代入非齐次方程得 $2a+a-a=2$，从而 $a=1$

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^x$

(4) $y''-3y'+2y=3e^{2x}$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$，特征根为 $r_1=1$， $r_2=2$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$，

设非齐次方程的特解为 $y_0=axe^{2x}$（2 是特征根）

代入非齐次方程得 $a=3$，

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$

(5) $y''+y=\cos 2x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，

法 1 设辅助微分方程 $y''+y=e^{2ix}$

设辅助方程的特解为 $y^*=ae^{2ix}$ （$2i$ 不是特征根）

代入辅助方程得 $-3a=1$，从而 $a=-\frac{1}{3}$，所以 $y^*=-\frac{1}{3}e^{2ix}=-\frac{1}{3}\cos 2x+(-\frac{1}{3}\sin 2x)i$

由于原方程的自由项是辅助方程的实部，由线性非齐次方程解的性质知：辅助方程特解的实部是原方程的特解，即原方程的特解 $y_0=-\frac{1}{3}\cos 2x$，

法 2 设原方程的特解为 $y_0=a\cos 2x+b\sin 2x$ （$0+2i$ 不是特征根）

代入原方程得 $-3a\cos 2x-3b\sin 2x=\cos 2x$，故得 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$，即 $y_0=-\frac{1}{3}\cos 2x$

所以原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$

(6) $y''+y=\sin x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，

法 1 设辅助微分方程 $y''+y=e^{ix}$

设辅助方程的特解为 $y^* = axe^{ix}$ （i 是特征根）

代入辅助方程得 $2ia = 1$，从而 $a = -\frac{1}{2}i$，所以 $y^* = -\frac{1}{2}ie^{ix} = \frac{1}{2}x\sin x + (-\frac{1}{2}x\cos x)i$

由于原方程的自由项是辅助方程的虚部，由线性非齐次方程解的性质知：辅助方程特解的虚部是原方程的特解，即原方程的特解 $y_0 = -\frac{1}{2}x\cos x$，

法 2 设原方程的特解为 $y_0 = x(a\cos x + b\sin x)$（$0+i$ 不是特征根）

代入原方程得 $-2a\sin x + 2b\cos x = \sin x$，故得 $a = -\frac{1}{2}$， $b = 0$，即

$y_0 = -\frac{1}{2}x\cos x$，所以原方程的通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

(7) $y'' + 4y = x\cos x$

解:：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 4 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm 2i$

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$，

法 1 设辅助微分方程 $y'' + y = xe^{ix}$，

设辅助方程的特解为 $y^* = (ax+b)e^{ix}$ （i 不是特征根）

代入辅助方程得 $a = \frac{1}{3}$， $b = -\frac{1}{9}i$

所以 $y^* = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})e^{ix} = (\frac{1}{3}x - \frac{1}{9})(\cos x + i\sin x)$

$= \frac{1}{9}(3x\cos x + 2\sin x) + \frac{1}{9}(3x\sin x - 2\cos x)i$

由于原方程的自由项是辅助方程的实部，由线性非齐次方程解的性质知：

辅助方程特解的实部是原方程的特解，即原方程的特解 $y_0 = \frac{1}{9}(3x\cos x + 2\sin x)$

法 2 设原方程的特解为 $y_0 = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$ （$0+i$ 不是特征根）

代入原方程得 $(3cx + c + 3d - 2a)\sin x + (3ax + 3b + c)\cos x = x\cos x$，

$3c=0$，$c+3d-2a=0$，$3a=1$，$3b+c=0$，即$a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=0$，$d=\dfrac{2}{9}$

原方程的特解 $y_0=\dfrac{x}{3}\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

所以原方程的通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{x}{3}\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

(8) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$

解：对应的齐次方程的特征方程为$r^2-6r+9=0$，特征根为$r_{1,2}=3$，

对应的齐次方程的通解为$\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$，

设原方程的特解为 $y_0=x^2(ax+b)e^{3x}$ （3 是 2 重特征根）

代入原方程得$(6ax+2b)e^{3x}=(x+1)e^{3x}$，故得$a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{2}$，

即 $y_0=x^2(\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{2})e^{3x}$，所以原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3)e^{3x}$

(9) $y''+y=e^x+\cos x$

解：对应的齐次方程的特征方程为$r^2+1=0$，特征根为$r_{1,2}=\pm i$，

对应的齐次方程的通解为$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，

设 y_1 为方程 $y''+y=e^x$ 的一个特解， $y_1=ae^x$ （1不是特征根）

代入方程得$a=\dfrac{1}{2}$， $y_1=\dfrac{1}{2}e^x$

设 y_2 为方程 $y''+y=\cos x$ 的一个特解， $y_2=x(b\cos x+c\sin x)$ （$0+i$ 是特征根）

代入方程得$b=0$， $c=\dfrac{1}{2}$， $y_2=\dfrac{x}{2}\sin x$

由线性非齐次方程解的性质知：原方程的特解 $y_0=y_1+y_2=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{x}{2}\sin x$

所以原方程的通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{x}{2}\sin x$

(10) $y^{(4)} + 3y'' - 4y = e^x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^4 + 3r^2 - 4 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm 1$， $r_{3,4} = \pm 2i$

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$，

设原方程的特解为 $y_0 = axe^x$ （1 是特征根），代入原方程得 $10a = 1$，故得 $a = \frac{1}{10}$，

即 $y_0 = \frac{1}{10}xe^x$，

所以原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \frac{1}{10}xe^x$

(11) $y'' - 2y' + 2y = e^x$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = 1 \pm i$

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$，

设非齐次方程的特解为 $y_0 = ae^x$ （1 不是特征根）

代入非齐次方程得 $a = 1$， $y_0 = e^x$

所求通解为 $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^x$

(12) $y'' - 4y = e^{2x}$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm 2$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$，

设原方程的特解为 $y_0 = axe^{2x}$ （2 是特征根），代入原方程得 $4a = 1$，故得 $a = \frac{1}{4}$，

即 $y_0 = \frac{1}{4}xe^{2x}$，所以原方程的通解为 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$

2. 求解下列初值问题.

(1) $\begin{cases} y''+4y=12\cos^2 x \\ y(0)=2, \quad y'(0)=1 \end{cases}$

解：原方程变形为 $\begin{cases} y''+4y=6\cos 2x+6 \\ y(0)=2, \quad y'(0)=1 \end{cases}$ 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+4=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$， 对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，

设 y_1 为 $y''+4y'=6\cos 2x$ 方程的一个特解， $y_1=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$（$0+2i$ 是特征根），代入方程得 $a=0$，$b=\frac{3}{2}$， $y_1=\frac{3}{2}x\sin 2x$

设 y_2 为方程 $y''+4y=6$ 的一个特解， $y_2=a$（$0+2i$ 不是特征根）

代入方程得 $a=\frac{3}{2}$， $y_2=\frac{3}{2}$

由线性非齐次方程解的性质知： $y_0=y_1+y_2=\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{2}$

所以原方程的通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{2}$

代入初始条件得 $C_1=\frac{1}{2}$， $C_2=\frac{1}{2}$

所求初值问题的解为 $y=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{2}$

$$\text{即}\quad y=\frac{1}{2}\left[\cos 2x+(1+3x)\sin 2x+3\right]$$

(2) $\begin{cases} 2y''+y'=8\sin 2x+e^{-x} \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{cases}$

解：对应的齐次方程的特征方程为 $2r^2+r=0$，特征根为 $r_1=0$， $r_2=-\frac{1}{2}$

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1+C_2e^{-\frac{x}{2}}$，

设 y_1 为 $2y''+y'=8\sin 2x$ 方程的一个特解， $y_1=a\cos 2x+b\sin 2x$（$0+2i$ 不是特征

根），代入方程得 $a=-\dfrac{4}{17}$， $b=-\dfrac{16}{17}$， $y_1=-\dfrac{4}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)$

设 y_2 为方程 $2y''+y'=e^{-x}$ 的一个特解， $y_2=ce^{-x}$ （-1 不是特征根）

代入方程得 $c=1$， $y_2=e^{-x}$

由线性非齐次方程解的性质知： $y_0=y_1+y_2=-\dfrac{4}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)+e^{-x}$

所以原方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{4}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)+e^{-x}$

代入初始条件得 $C_1=6$， $C_2=-\dfrac{98}{17}$

所求初值问题的解为 $y=6-\dfrac{98}{17}e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{4}{17}(\cos 2x+4\sin 2x)+e^{-x}$

3.解下列方程.

(1) $\dfrac{d^2y}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dy}{dr}-\dfrac{n(n+1)}{r^2}y=0 \quad (r>0, n\text{为正整数})$

解：改写方程为 $r^2\dfrac{d^2y}{dr^2}+2r\dfrac{dy}{dr}-n(n+1)y=0$，这是欧拉方程

令 $r=e^t$，则 $t=\ln r$，代入方程得

$\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)+2\dfrac{dy}{dt}-n(n+1)y=0$，整理得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-n(n+1)y=0$

其对应的特征方程的特征根为 $r_1=n$， $r_2=-(n+1)$

通解为 $y=C_1e^{nt}+C_2e^{-(n+1)t}=C_1e^{n\ln r}+C_2e^{-(n+1)\ln r}=C_1r^n+C_2r^{-(n+1)}$

(2) $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$

解：这是欧拉方程，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，代入方程得

$\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)+\dfrac{dy}{dt}+y=2\sin t$，整理得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程，对应的齐次方程的特征根为$r_{1,2}=\pm i$，

对应的齐次方程的通解为$\overline{y}=C_1\cos t+C_2\sin t$

设y_1为$\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$方程的一个特解，$y_1=x(a\cos t+b\sin t)$（$i$是特征根）

代入方程得 $a=-1$， $b=0$， $y_1=-t\cos t$，原方程的通解为

$y=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x-\ln x\cdot\cos\ln x$

(3) $x^3y''-x^2y'+xy=x^2+1$

解：这是欧拉方程，令$x=e^t$，则$t=\ln x$，代入方程得

$\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)-\dfrac{dy}{dt}+y=e^t+e^{-t}$，整理得$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=e^t+e^{-t}$

这是一个二阶线性常系数非齐次方程，对应的齐次方程的特征根为$r_{1,2}=1$，

对应的齐次方程的通解为$\overline{y}=(C_1+C_2t)e^t$

设y_1为$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=e^t$方程的一个特解，$y_1=at^2e^t$（$1$是二重特征根）

代入方程得$a=\dfrac{1}{2}$，　$y_1=\dfrac{t^2}{2}e^t$

设y_2为$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=e^{-t}$方程的一个特解，$y_2=be^{-t}$（$-1$不是特征根）

代入方程得$b=\dfrac{1}{4}$，　$y_2=\dfrac{1}{4}e^{-t}$

由线性非齐次方程解的性质知：$y_0=y_1+y_2=\dfrac{t^2}{2}e^t+\dfrac{1}{4}e^{-t}$

原方程的通解为$y=(C_1+C_2t)e^t+\dfrac{t^2}{2}e^t+\dfrac{1}{4}e^{-t}=(C_1+C_2\ln x)x+\dfrac{x}{2}\ln^2x+\dfrac{1}{4x}$