一、已知矩阵 A, X 满足关系式 $2A^{-1}X+I=X$,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$, 求 X.

解：$2A^{-1}X+I=X$, 两边同时左乘 A $\longrightarrow$

$2X+A=AX$, $\longrightarrow$ $(A-2I)X=A$, $\longrightarrow$

$$X=(A-2I)^{-1}A$$

利用伴随矩阵求逆矩阵的公式，解得

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$X=(A-2I)^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

二、提示：方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

$\longrightarrow$ $\lambda=0$ 或者 $\lambda=1$。

当 $\lambda=0$ 时，一般解为 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=1$ 时，一般解为 $k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

当有非零解时，三个平面相交于过原点的一条直线。

当 $\lambda=0$ 时，直线过 $(0,0,0,)^T$ 和 $(-1,1,1)$;

当 $\lambda=1$ 时，直线过 $(0,0,0,)^T$ 和 $(-1,2,1)$.

三、

$$BAB^{-1}(I+B^{T})^{T}-[AB(BA)^{-1}]^{-1}A$$

$$=BAB^{-1}(I+B)-(BA)(AB)^{-1}A$$

$$=BAB^{-1}+BA-BAB^{-1}=BA$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 8 & 14\end{bmatrix}$$

四、

解： 根据所求（1）和（2），可考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&a-1&1-a\\0&a-1&0&1-a\\0&1-a&1-a&1-a^2\end{pmatrix}$$

显然 $a=1$ 时，秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=1$;

$a \neq 1$时，

$$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

显然$a=-3$时，秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$;

$a \neq 1$, 且$a \neq -3$时，秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$。

（2）当$a=1$时，$\dim(L)=1$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$任取一个都可作为基;

当$a=-3$时，$\dim(L)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可作为基;

当$a \neq 1$且$a \neq -3$时，$\dim(L)=4$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可作为基;

五、

(1) 特征根 -3 有两个线性无关的特征向量时，A 可对角化。

$$-3I-A=\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -b \\ -4 & -a & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 2-a & 0 \end{bmatrix}$$

当 $a=2, b=2$ 时，$r(-3I-A)=1$，此时 A 可以对角化。

当 $a=2, b=2$ 时，A 是实对称矩阵，故存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角形。

可取

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

六、

取 $X = CY$, 其中
$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ 则

$f(x_1, x_2, x_3) = -y_1^2 + y_2^2$, 不正定，

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示双曲柱面

七、(1) 设$\boldsymbol{X}$是$\boldsymbol{A}$对应特征值λ的特征向量，因λ是实数，$\boldsymbol{A}$为实矩阵，故$\boldsymbol{X}$是实向量，且

$$\boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{X}$$

则

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X}$$

因$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 故

$$\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{X}^T = \lambda \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{AX} = \lambda^2 \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X}$$

$$(\lambda^2 - 1)\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X} = 0$$

因 $X^T X \neq 0$, 故 $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda = 1$ 或 -1.

(2) $|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$ 无实根，

故A的特征值为复数，不为1或-1.