2007 级《微积分 A》期中试卷参考答案

一、　填空

1. $\underline{\quad 5 \quad}$.　　2. $\underline{\ 1\ }$.　　3. $\underline{y = x + \frac{1}{e}}$.　　4. $a = \underline{2}$，$b = \underline{0}$.

5. $\underline{2(\varphi' \sec^2 x \tan x + \frac{x}{\sqrt{1-x^4}})dx}$.　　6. $a = \underline{-4}$，$b = \underline{2}$.

7. $f(0) = \underline{0}$，$f'(0) = \underline{\frac{1}{3}}$.　　8. $\underline{e^4}$.　　9. $\underline{a \geq 2 - 2\ln 2}$.　　10. $\underline{45 \times 2^9}$.

二、　解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{4t^3/(1+t^4)}{1/(1+t^2)} = \dfrac{4t^3(1+t^2)}{1+t^4}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t^2(3+5t^2-t^4+t^6)(1+t^2)}{(1+t^4)^2}$$

$t = 0$时，$\dfrac{dy}{dx} = 0, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$，

曲率为：$k = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\Big|_{t=0} = 0.$

三、解：由已知得：$\theta = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$,

$$\lim_{\theta\to 0}\theta = \lim_{\theta\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

四、证明：设 $f(x) = 1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$，则 $f(0) = 0.$

$f'(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) > 0,$

所以当$x > 0$时，$f(x)$单增，从而 $f(x) > 0.$ 即

$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}.$

五、解：（1）由已知条件知：$f'(1)=(3x^2+2ax+b)_{x=1}=3+2a+b=0,$

$f(1)=1+a+b=-2,$ 解得：$a=0, b=-3.$

（2）$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，令 $f'(x)=0,$ 得驻点

$x=-1, x=1.$

$x<-1$ 时，有 $f'(x)>0,$ $-1<x<1$ 时，有 $f'(x)<0,$

$x>1$ 时，$f'(x)>0.$ 知 $x=-1$ 为极大值点，$x=1$ 为极小值点；

极大值为 $f(-1)=2,$ 极小值为 $f(1)=-2.$

（3）$f''(x)=6x$，令 $f''(x)=0,$ 得 $x=0$，

$x<0$ 时，$f''(x)<0$，曲线为凸弧；$x>0$ 时，$f''(x)>0$，曲线为凹弧.

拐点为（0，0）.

六、 解：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x\arctan x}{1+x^2}-\arctan^2 x}{x^2}$

$$=\frac{\arctan x[2x-(1+x^2)\arctan x]}{x^2(1+x^2)}.$$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan^2 x}{x^2}=1$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x[2x-(1+x^2)\arctan x]}{x^2(1+x^2)} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x[2x-(1+x^2)\arctan x]}{x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-(1+x^2)\arctan x}{x}=1$$

$$=f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

七、解：船航行一公里时的平均耗费函数为：$w=\frac{y}{24v}=\frac{a+kv^3}{24v},\quad v>0$，

$w'=\frac{2kv^3-a}{24v^2}$，令 $w'=0,$ 得唯一驻点 $v_0=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$，

又 $v<v_0$ 时，$w'<0, v>v_0$ 时，$w'>0,$

所以 w 在 v_0 处取得极小值，又因为驻点唯一，所以 w 在 v_0 处取得最小值。

故 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ 时可使得船航行一公里时的平均耗费最小。最小值 $\frac{a}{16}\sqrt[3]{\frac{2k}{a}}.$

八、 证明：做辅助函数；$F(x)=(1-x)^2 f'(x)$，

由已知条件知，$f(x)$ 在[0，1]上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理知：至少存在一点 $\tau\in(0,1),$ 使得 $f'(\tau)=0.$

易验证 $F(x)$ 在 $[\tau,1]$ 上满足罗尔定理的条件，所以至少存在一点

$\xi\in(\tau,1)\subset(0,1),$ 使得 $F'(\xi)=0,$ 即

$-2(1-\xi)f'(\xi)+(1-\xi)^2 f''(\xi)=0$，即

$2f'(\xi)=(1-\xi)f''(\xi).$ 结论成立。