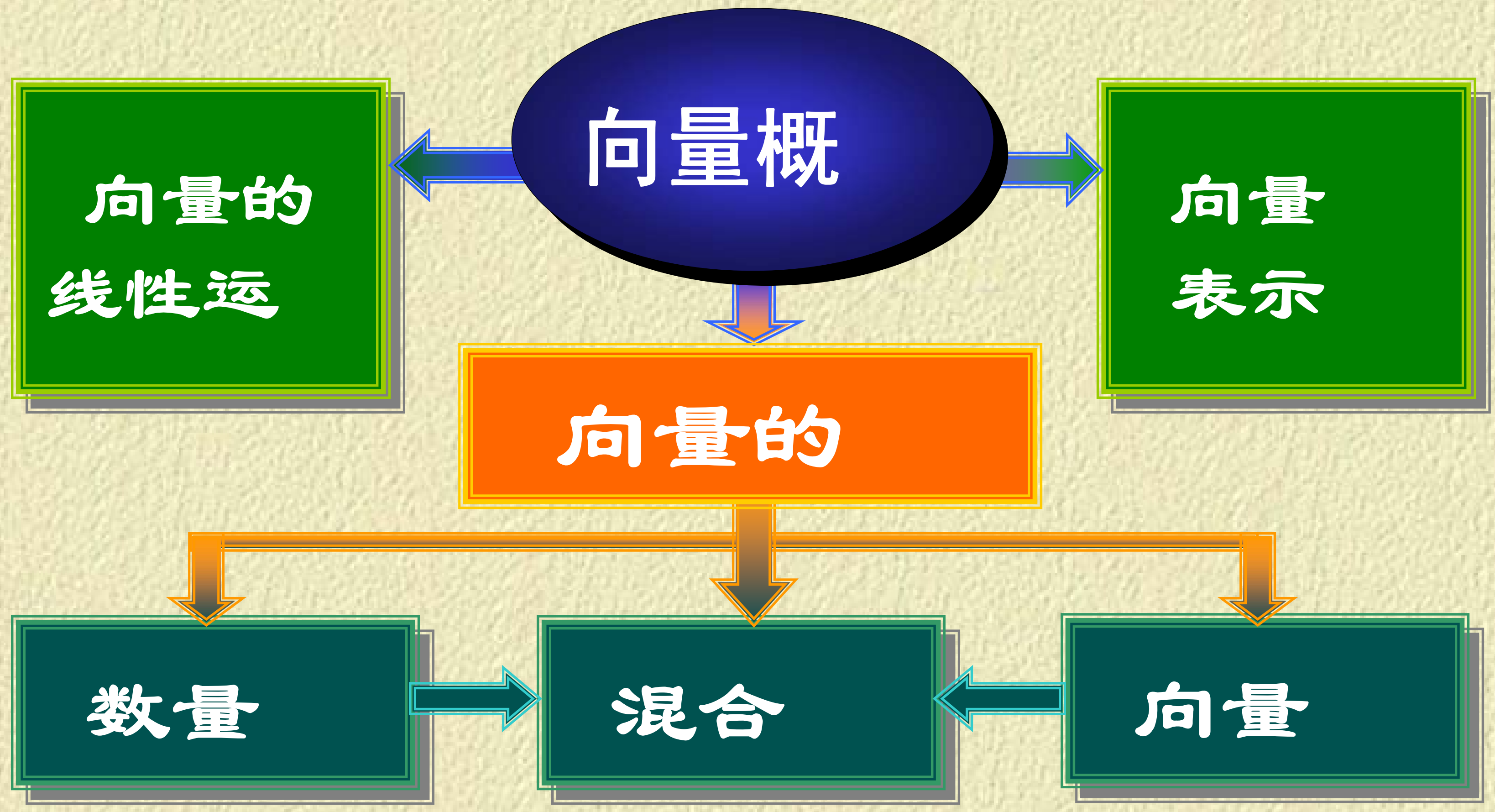
6.8　综合例题

一、主要内容

- （一）向量代数
- （二）空间解析几何

上页　下页　返回

（一）向量代数



上页 下页 返回

向量的
方向余

与 $\vec{a}$ 同方向
的单位向量

投

两个向
垂直的
充要条

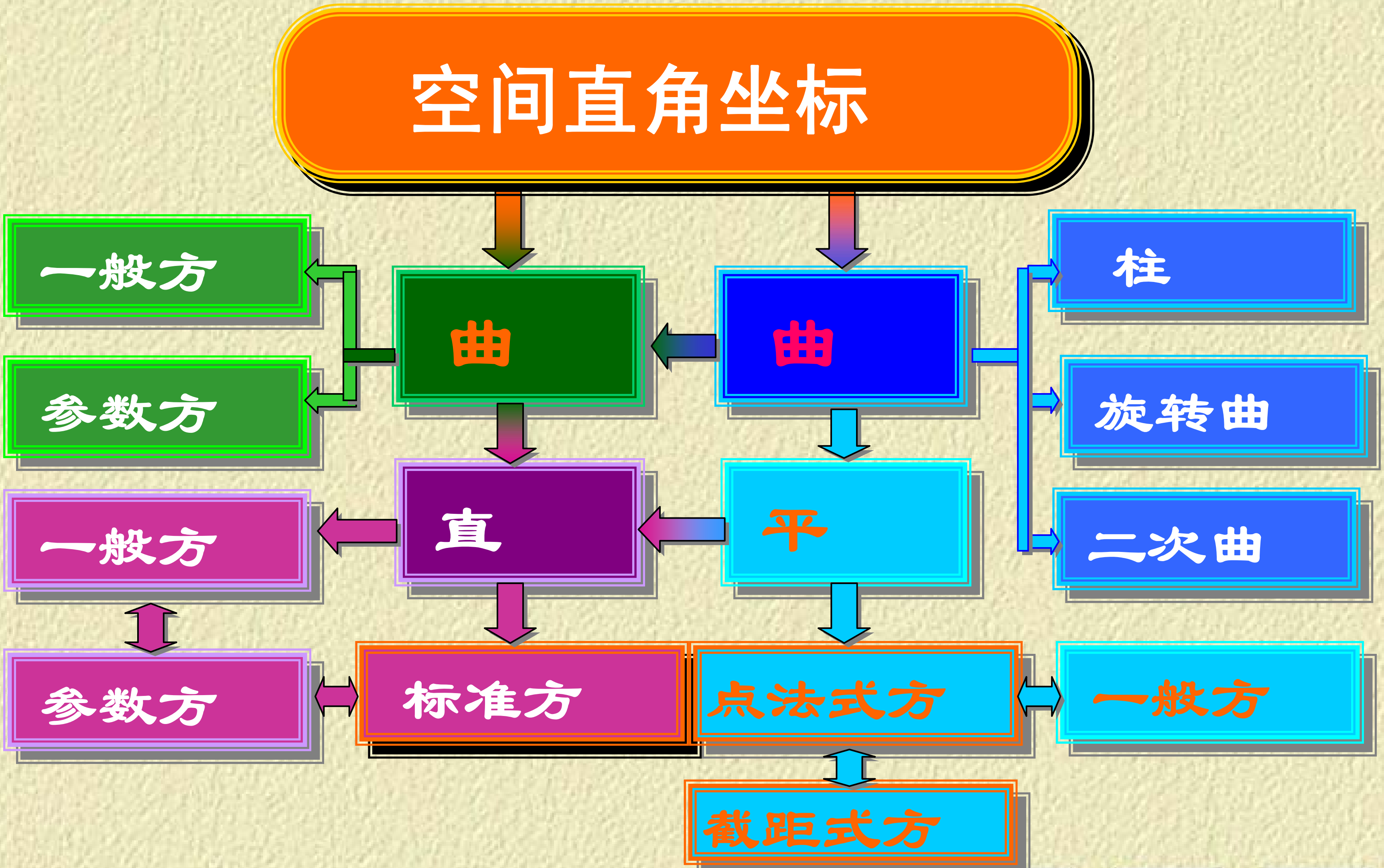
两个向量
行（共线）
的充要条

三个向
共面的
充要条

向量积的
的几何意

混合积的绝
值的几何意

（二）空间解析几何



上页 下页 返回

直线与直
的夹角

平面与平
的夹角

直线与平
的夹角

平面束方

曲线在坐标
上的投影方

点到平
的距离

(1) 点到直线的距离；
(2) 两条异面直线间的距
(3) 两条直线的公垂线方

下页 返回

综合例题

例 1 向量$\vec{d}$垂直于向量$\vec{a}=\{2,3,-1\}$和$\vec{b}=\{1,-2,3\}$，且与$\vec{c}=\{2,-1,1\}$的数量积为-6，求向量$\vec{d}$.

解 $\vec{d}$垂直于向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，

故$\vec{d}$平行于$\vec{a}\times\vec{b}$，

存在数λ使得$\vec{d}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

$$= \lambda\{2,3,-1\}\times\{1,-2,3\}$$

$$= \{7\lambda, -7\lambda, -7\lambda\}$$

因 $\vec{d}\cdot\vec{c} = -6$

故 $2\times7\lambda+(-1)\times(-7\lambda)+1\times(-7\lambda) = -6$

解得 $\lambda = -\dfrac{3}{7}$

故 $\vec{d} = \{-3, 3, 3\}$

例 3 设向量 $\vec{a}=\{-1,3,2\}$， $\vec{b}=\{2,-3,-4\}$，$\vec{c}=\{-3,12,6\}$，证明：三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，并用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\vec{c}$.

解 1 由于 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ 所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

向量共面
$\Rightarrow$ 线性表出

设 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，

则 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\lambda\vec{a}^2+\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$， $\vec{b}\cdot\vec{c}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})+\mu\vec{b}^2$

由于 $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=14$， $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=29$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=-19$，

所以 $51=\vec{a}\cdot\vec{c}=14\lambda-19\mu$，$-66=\vec{b}\cdot\vec{c}=-19\lambda+29\mu$

解得： $\lambda=5,\mu=1$，$\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$

例 3 设向量 $\vec{a}=\{-1,3,2\}$，$\vec{b}=\{2,-3,-4\}$，$\vec{c}=\{-3,12,6\}$，证明：三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，并用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\vec{c}$.

解 2 设 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，将 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的坐标代入得

$$\begin{cases} -\lambda+2\mu=-3 & (1) \\ 3\lambda-3\mu=12 & (2) \\ 2\lambda-4\mu=6 & (3) \end{cases}$$

解方程(1),(2)得

$\lambda=5,\ \mu=1$，

此解也满足方程(3)

故 $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}$

线性表出

$\Rightarrow$ 向量共面

由于 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(5\vec{a}+\vec{b})$

$=5(\vec{a},\vec{b},\vec{a})+(\vec{a},\vec{b},\vec{b})=0$ 所以 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

例 4 求过直线 $L:\begin{cases} x+28y-2z+17=0 \\ 5x+8y-z+1=0 \end{cases}$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面的方程.

解 由于球心 $(0,0,0)$ 到平面 $5x+8y-z+1=0$ 的距离

$$d=\frac{|1|}{\sqrt{5^2+8^2+(-1)^2}}\neq 1$$

故设所求平面为

$$x+28y-2z+17+\lambda(5x+8y-z+1)=0$$

即 $(1+5\lambda)x+(28+8\lambda)y-(2+\lambda)z+17+\lambda=0$

由题意，球心$(0,0,0)$到它的距离为 1，

即 $$\frac{|17+\lambda|}{\sqrt{(1+5\lambda)^2+(28+8\lambda)^2+(-2-\lambda)^2}}=1$$

解得 $\lambda=-\frac{250}{89}$ 或 $\lambda=-2$

所求平面为

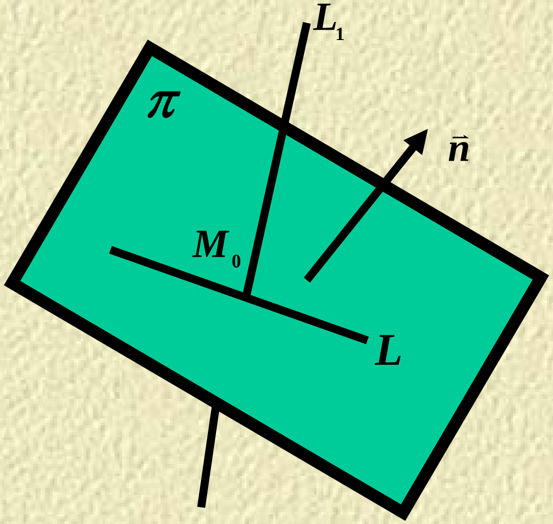
$$387x-164y-24z=421$$

或 $3x-4y=5$

例 5 设平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 与直线 $L_1: \begin{cases} x+2z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ 的交点为 M_0，在平面 π 上求一直线 L，使其过点 M_0，且与 L_1 垂直。

解 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+2z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$



得 $x=0, y=-1, z=0$

$(0,-1,0)$ 为直线 L_1 与已知平面 π 的交点 M_0.

直线 L 的方向向量 $\vec{s}$ 既垂直于 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1$

又垂直于平面 π 的法向量 $\vec{n}$,

所以，当 $\vec{s}_1$ 与 $\vec{n}$ 不平行时，可取 $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{n}$

由于 $\vec{s}_1 = \{1, 0, 2\} \times \{0, 1, 1\} = \{-2, -1, 1\}$

$\vec{n} = \{1, 1, 1\}$, 显然，$\vec{s}_1$ 与 $\vec{n}$ 不平行.

故 $\vec{s} = \{-2, -1, 1\} \times \{1, 1, 1\} = \{-2, 3, -1\}$

直线 L 的方程为 $$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

上页 下页 返回

例 9 求圆 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10y \\ x+2y+2z-19=0 \end{cases}$ 的圆心和半径 r.

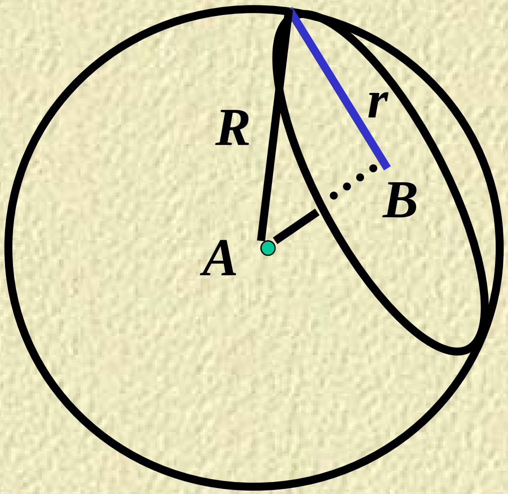
解 将球面方程化为标准方程

$$x^2+(y-5)^2+z^2=25$$

过球心 $A(0,5,0)$ 且与平面 $x+2y+2z-19=0$

垂直的直线方程为

$$x=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{2}$$



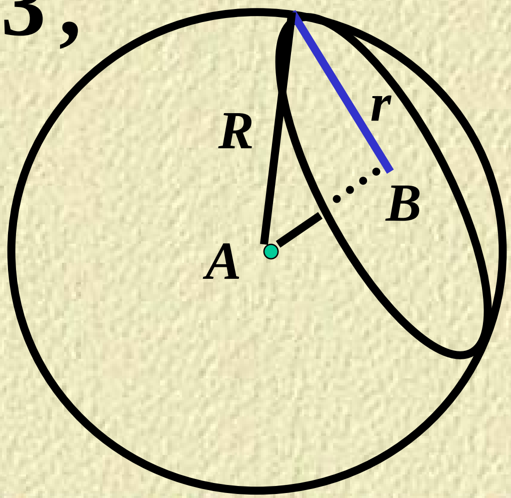
上页 下页 返回

解方程组 $\begin{cases} x = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{2} \\ x + 2y + 2z - 19 = 0 \end{cases}$

得平面与直线得交点 $B(1,7,2)$,

$B(1,7,2)$ 即为所求圆心.

因为球半径 $R = 5$, $|AB| = 3$,



故 $r = \sqrt{R^2 - |AB|^2}$

$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

上页 下页 返回

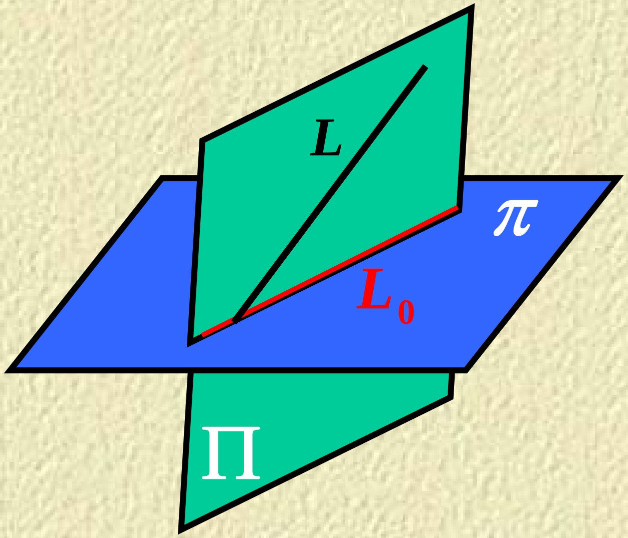
例 10 设直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$，

平面 $\pi: x-y+2z-1=0$

(1) 求直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_0 的方程。

(2) 求直线 L_0 绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面 S 的方程.

(3) 求曲面 S 以及平面 $y=1$ 及 $y=2$ 围成的立体的体积 V 。



上页 下页 返回

解 将直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 化为一般式: $\begin{cases}\pi_1: x-y-1=0\\ \pi_2: z+y-1=0,\end{cases}$

由于平面 π_2 的法向量 $n_2=\{0,1,1\}$ 与已知平面 π 的法向量 $n=\{1,-1,2\}$ 不垂直 $(n_2\cdot n=1\neq 0)$

故设过直线 L 且与平面 π 垂直的平面束方程为

$x-y-1+\lambda(z+y-1)=0$, 即 $x+(-1+\lambda)y+\lambda z-1-\lambda=0$

则有 $\{1,-1,2\}\cdot\{1,-1+\lambda,\lambda\}=1-(\lambda-1)+2\lambda=0$, 即 $\lambda=-2$,

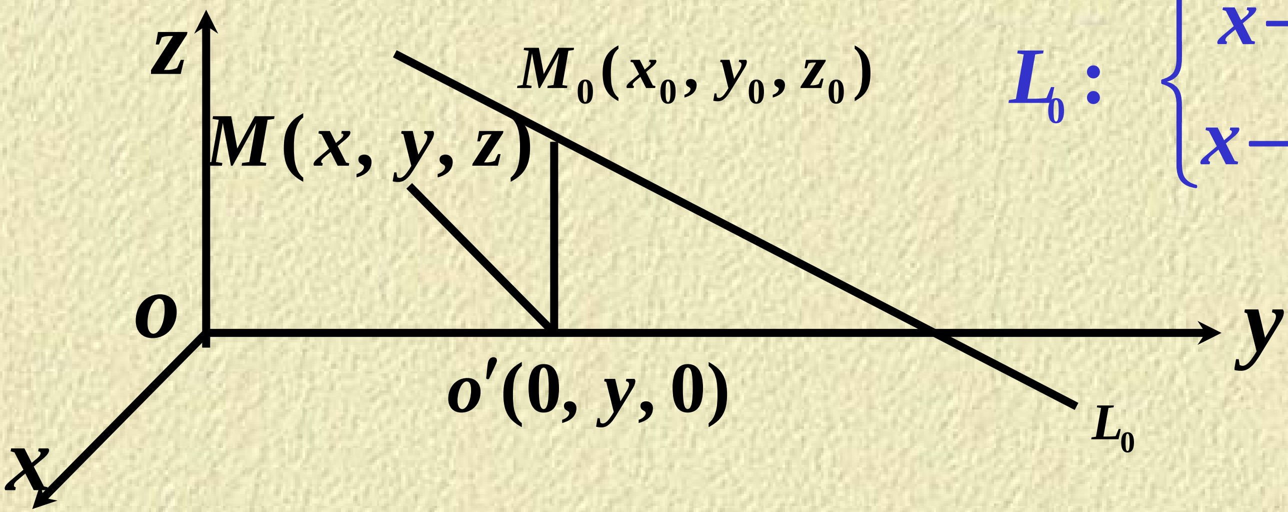
平面 Π 方程为: $x-3y-2z+1=0$

故直线 L_0 的方程 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$

例 10 设直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$，

平面 $\pi: x-y+2z-1=0$

(2) 求直线 L_0 绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面 S 的方程.



$$L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$$

设点 $M(x, y, z)$ 是旋转曲面 S 上的任一点，

它是由点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 旋转得到的， $\Rightarrow y=y_0$， $|O'M|=|O'M_0|$

上页 下页 返回

从而得 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$ (1)

将 L_0: $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$ 化为 L_0: $\begin{cases} x=2y \\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

由于点 M_0 在 L_0 上，故满足直线 L_0 的方程

即 $\begin{cases} x_0=2y_0=2y \\ z_0=-\dfrac{1}{2}(y_0-1)=-\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases}$ (2)

将(2)代入(1)得: $x^2+z^2=(2y)^2+(-\dfrac{1}{2}(y-1))^2$

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

上页 下页 返回

(2)另解：把L_0的方程化为

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = -\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

因此，直线L_0绕y轴旋转一周而成的

曲面S方程为 $x^2 + z^2 = (2y)^2 + (-\dfrac{1}{2}(y-1))^2$

即 $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$

例 10 设直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$，

平面 $\pi: x-y+2z-1=0$

（3） 求曲面 S 以及平面 $y=1$ 及 $y=2$ 围成的立体的体积 V。 $x^2+z^2=(2y)^2+(-\frac{1}{2}(y-1))^2$

旋转曲面 S 与平面 $y=1$ 及 $y=2$ 所围立体是一旋转体，

用平面 $y=h$ 截旋转体，截得的都是圆，设该圆面积为 $A(y)$，

则 $A(y)=\pi[(2y)^2+(-\frac{1}{2}(y-1))^2]$

$$V=\int_1^2 A(y)dy=\int_1^2 \pi[(2y)^2+(-\frac{1}{2}(y-1))^2]dy$$

$$=\frac{113}{12}\pi$$

上页 下页 返回

补充例题

例1 已知 $\vec{a}=\vec{i},\vec{b}=\vec{j}-2\vec{k},\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0\perp\vec{c}$, 且 $\vec{n}^0,\vec{a},\vec{b}$ 共面.

解 设 $\vec{n}^0=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, 由题设条件得

$$\begin{cases}|\vec{n}^0|=1\\ \vec{n}^0\perp\vec{c}\\ \vec{n}^0\perp\vec{a}\times\vec{b}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ 2x-2y+z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$$

解得 $\vec{n}^0=\pm(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k})$

例2 求过直线：$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解 平面 $x-z+4=0$ 与平面 $x-4y-8z+12=0$ 的夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|1\times1+0\times(-4)+(-1)\times(-8)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即平面 $x-z+4=0$ 为所求平面.

设过已知直线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$$

上页 下页 返回

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$

其法向量 $\vec{n}=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$.

又已知平面的法向量 $\vec{n}_1=\{1,-4,-8\}$.

由题设知 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}$

$$=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$, 由此解得 $\lambda=-\frac{3}{4}$.

代回平面束方程得 $x+20y+7z-12=0$

上页 下页 返回

练习：直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，

求旋转曲面的方程．

解1 设直线上一点 $M_1(1,y_1,z_1)$ 有 $y_1=z_1$,

旋转后 $M_1(1,y_1,z_1)$ 到达 $M(x,y,z)$ 位置

由于高度不变，有 $z=z_1$,

又 M 和 M_1 到 z 轴的距离 r 不因旋转而改变，

故 $r^2=1+y_1^2=x^2+y^2$, 由于 $z=z_1=y_1$,

故所求旋转曲面方程为 $x^2+y^2-z^2=1$.

上页 下页 返回

练习： 直线 $L: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程．

解2 直线L的方程化为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$

故所求旋转曲面方程为 $x^2+y^2=1+z^2$

即 $x^2+y^2-z^2=1.$

作业：

P45：8.　10.　11.　13(2).　14.

15.　16.　17.　20