习题 8.3(P133)

1．把三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ 化为直角坐标系下的累次积分，其中积分区域 V 为如下区域：

(1)由抛物面 $z=x^2+y^2$，平面 $x+y=1$ 及三个坐标面围成的区域.

解：V 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x+y\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$，又 $0\le z\le x^2+y^2$，

故 $I=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

(2) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 围成的区域

解：两个曲面的交线为 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$

V 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，

故 $I=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz$

(3) 由曲面 $z=xy$，$x^2+y^2=R^2$ 和平面 $z=0$ 围成的区域在第一卦限的部分.

解：V 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le R^2$，$x\ge 0,\quad y\ge 0$

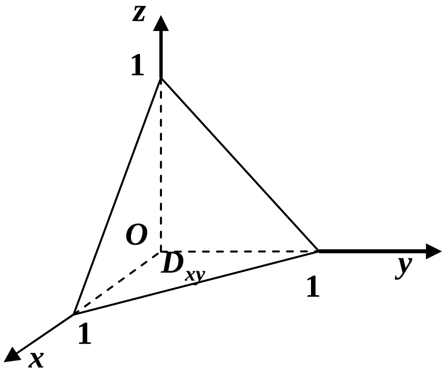
故 $I=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$

2. 在直角坐标系下计算下列积分.

(1) $\iiint\limits_V \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}dV$，其中 V 是由平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成的区域.

解： V 在 xOy 平面上的投影

$D_{xy}: x+y\le 1$，$x\ge 0,\quad y\ge 0$



$$\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dV$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz$$

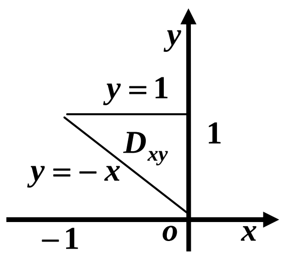
$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)\right]dx=\frac{1}{2}(\ln 2-\frac{5}{8})$$

(2) $\iiint\limits_V e^{x+y+z}dV$,其中 V 是由平面 $x=0,y=-x,y=1$ 和 $z=0,z=-x$ 围成的区域.

解：V 在 xoy 平面上的投影区域 D_{xy} 的边界方程为 $x=0$， $y=-x,y=1$，

所以 $V:\begin{cases}0\le y\le 1\\ -y\le x\le 0\\ 0\le z\le -x\end{cases}$



或 $V:\begin{cases}-1\le x\le 0\\ -x\le y\le 1\\ 0\le z\le -x\end{cases}$

故 $\iiint\limits_V e^{x+y+z}dV=\int_0^1 e^y dy\int_{-y}^0 e^x dx\int_0^{-x}e^z dz=\int_0^1 e^y dy\int_{-y}^0 e^x(e^{-x}-1)dx$

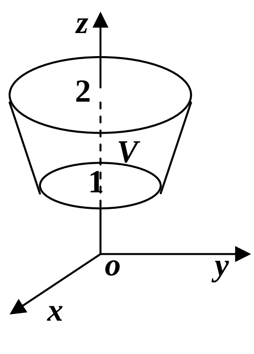
$=\int_0^1 e^y(y-1+e^{-y})dy=3-e$

或 $\iiint\limits_V e^{x+y+z}dV=\int_{-1}^0 e^x dx\int_{-x}^1 e^y dy\int_0^{-x}e^z dz$

(3) $\iiint\limits_V zdV$,其中 $V:\begin{cases}z\ge\sqrt{x^2+y^2}\\ 1\le z\le 2\end{cases}$

解：轴截面法：V 往 z 轴上投影，

则 $D_z: x^2+y^2\le z^2$



$$\iiint\limits_V zdV=\int_1^2 dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int_1^2 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy$$

$$=\int_1^2 z\cdot\pi z^2dz=\frac{15\pi}{4}$$

3．在柱坐标系或球坐标系下计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_V zdV$，V 是由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\ge 0)$ 及抛物面 $z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ 围成的

区域.

解：两个曲面的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$

V 在 xOy 平面上的投影 $D_{xy}: x^2+y^2\le 3$，由柱坐标变换，

$$\iiint_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}zdz=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(4-\rho^2-\frac{1}{9}\rho^4)\rho d\rho=\frac{13}{4}\pi$$

(2) $\iiint_V (x^2+y^2)dV$，其中 $V:\begin{cases} a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2 \\ z\ge 0 \end{cases}$

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ a\le r\le b$

$$\iiint_V (x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_a^b r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_a^b r^4dr\right)$$

$$=2\pi I_3\cdot\frac{b^5-a^5}{5}=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{b^5-a^5}{5}=\frac{4}{15}\pi(b^5-a^5)$$

(3) $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV$，其中 $V:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le r\le R$

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^R r^4dr\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5$$

(4) $\iiint_V (x^2+y^2)dV$，其中 $V:\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le 2$

解：V 在柱坐标变换下 $V_{z\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2,\ \dfrac{1}{2}\rho^2\le z\le 2$

$$\iiint_V (x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2\rho^3dz=2\pi\int_0^2\rho^3(2-\frac{1}{2}\rho^2)d\rho=\frac{16}{3}\pi$$

(5) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dV$，其中$V$是由抛物面$z=3(x^2+y^2)$与锥面$z=4-\sqrt{x^2+y^2}$围成.

解：两个曲面的交线为$\begin{cases} z=3(x^2+y^2) \\ z=4-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$，即$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$

V在xOy平面上的投影$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，

V在柱坐标变换下$V_{z\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1, 3\rho^2\le z\le 4-\rho$，

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{3\rho^2}^{4-\rho}\rho\cdot\rho dz=2\pi\int_0^1\rho^2(4-\rho-3\rho^2)d\rho=\frac{29}{30}\pi$$

(6) $\iiint\limits_V zdV$,其中$V:\begin{cases} 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\le 2x \end{cases}$

解：V在柱坐标变换下$V_{z\rho\theta}: -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 2\cos\theta, 0\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$，

$$\iiint\limits_V zdV=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}z\cdot\rho dz=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(4\rho-\rho^3)d\rho$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(8\cos^2\theta-4\cos^4\theta)d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$$

(7) $\iiint\limits_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}dV$,$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z\ge\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

解：V在球坐标变换下$V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le 1$

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2 dr=2\pi\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\pi^2(2-\sqrt{2})}{16}$$

(8) $\iiint\limits_V zdV$,$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 2z \\ z\ge\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le r\le 2\cos\varphi$

$$\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=-8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi d(\cos\varphi)=\frac{7\pi}{6}$$

4．选取适宜的坐标计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_V xyzdV$,V 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 在第一卦限的部分.

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r\le R$

$$\iiint\limits_V xyzdV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^R r^5dr\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}R^6=\frac{1}{48}R^6$$

(2) $\iiint\limits_V zdV$，V 由曲面 $x^2+y^2=8$，$z=\sqrt{x^2+2y^2}$ 及平面 $z=0$ 围成.

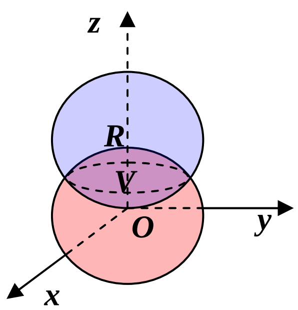
解：V 在柱坐标变换下 $V_{z\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2\sqrt{2},\ 0\le z\le\rho\sqrt{1+\sin^2\theta}$

$$\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\rho d\rho\int_0^{\rho\sqrt{1+\sin^2\theta}}zdz=\left(\int_0^{2\pi}(1+\sin^2\theta)d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho^3d\rho\right)$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2})d\theta\right)\cdot 8=3\pi\cdot 8=24\pi$$

(3) $\iiint\limits_V z^2dV$，V 是球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 的公共部分.

解：轴截面法：两个球面的交线为 $\begin{cases} z=\dfrac{R}{2} \\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2 \end{cases}$



V 在 z 轴上投影为 $0\le z\le R$，

当 $0\le z\le\dfrac{R}{2}$ 时，$D_{z1}: x^2+y^2\le 2Rz-z^2$

当$\dfrac{R}{2}\le z\le R$时，$D_{z2}: x^2+y^2\le R^2-z^2$

故$\iiint\limits_V z^2dV=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\iint\limits_{D_{z1}}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2dz\iint\limits_{D_{z2}}dxdy$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}}\pi(2Rz-z^2)z^2dz+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi(R^2-z^2)z^2dz=\frac{1}{40}\pi R^5+\frac{47}{480}\pi R^5=\frac{59}{480}\pi R^5$$

(4) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dV$，$V$ 由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=2-x^2-y^2$围成.

解：两曲面交线$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=2-x^2-y^2\end{cases}$，即$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$

所围立体在 xoy 平面上的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，

V 在柱坐标变换下$V_{z\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ \rho\le z\le 2-\rho^2$

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}\rho^3dz=2\pi\int_0^1\rho^3(2-\rho^2-\rho)d\rho=\frac{4}{15}\pi$$

5. 计算由曲面$x^2+y^2=2x$，$z=x^2+y^2$及平面$z=0$所围成立体的体积.

解：法 1（利用二重积分极坐标变换）

所围立体在 xoy 平面上的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 2x$，$\therefore D_{\rho\theta}:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 2\cos\vartheta\end{cases}$

故$V=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3d\rho=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=8I_4=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

法 2（利用三重积分柱坐标变换）

在柱坐标变换下，$V_{\rho\theta z}:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le z\le\rho^2\end{cases}$

$$V=\iiint\limits_V dV=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_0^{\rho^2}\rho\,dz=\frac{3\pi}{2}$$

法 2（利用三重积分柱坐标变换）:下面两个式子中 z 的变化范围有变化

在柱坐标变换下，$V_{\rho\theta z}:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le z\le\rho^2\end{cases}$

$$V=\iiint\limits_V dV=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_0^{\rho^2}\rho dz=\frac{3\pi}{2}$$

6. 设立体$V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 5,\ x^2+y^2\le 4z\}$，求$V$ 的体积.

解：曲面 $x^2+y^2+z^2=5$ 与曲面 $x^2+y^2=4z$ 的交线为

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ x^2+y^2=4z\end{cases}$， 即$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=1\end{cases}$

在柱坐标系下，$V_{\rho\theta z}:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 2\\ \dfrac{\rho^2}{4}\le z\le\sqrt{5-\rho^2}\end{cases}$

故$V=\iiint\limits_V dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}}\rho dz=2\pi\int_0^2\rho(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4})d\rho=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4)$

7. 球体 $x^2+y^2+z^2\le 4z$ 被曲面 $z=4-x^2-y^2$ 分成两部分，求两部分体积的比值.

解：球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 与曲面 $z=4-x^2-y^2$ 的交线为

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4z\\ z=4-x^2-y^2\end{cases}$， 即$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=1\end{cases}$

设曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上方的体积为V_1，下方的体积为V_2，则V_2 在 xoy 平面上的投影区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le 3$，

$$V_2=\iiint\limits_{V_2}dV=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{4-x^2-y^2}dz=\iint\limits_{D_{xy}}(4-x^2-y^2-2+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(4-\rho^2-2+\sqrt{4-\rho^2})\rho d\rho=\frac{37}{6}\pi$$

$$V_1=\text{球体的体积}-V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3-\frac{37}{6}\pi=\frac{27}{6}\pi$$

因而V_1：$V_2=27:37$