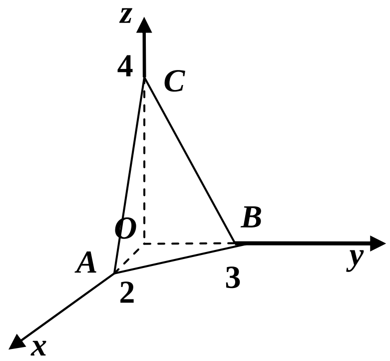
习题 9.4(P194)

1. . 计算 $\iint\limits_S (2x+\frac{4}{3}y+z)dS$， S 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分.



解：平面方程变形为 $2x+\frac{4}{3}y+z=4$，

由平面的截距式方程知

$OA=2$， $OB=3$

$AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

S 投影区域 D_{xy} 为 ΔOAB，

$z'_x=-2$， $z'_y=-\frac{4}{3}$， ，故 $dS=\sqrt{1+(-2)+(-\frac{4}{3})^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$

$$\iint\limits_S (2x+\frac{4}{3}y+z)dS=4\iint\limits_S dS=4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot S_{\Delta OAB}$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{1}{2}\times 2\times 3=4\sqrt{61}$$

2. 计算 $\iint\limits_S (x+y+z)dS$， S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h\ (0<h<a)$ 的部分.

解： S 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$

由隐函数求导法得 $z'_x=\frac{-x}{z}$， $z'_y=\frac{-y}{z}$， 故 $dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{a}{|z|}dxdy$

由变量轮换的对称性

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS=\iint\limits_S (2x+z)dS=a\iint\limits_{D_{xy}}(\frac{2x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}+1)dxdy$$

$$=2a\iint\limits_{D_{xy}}(\frac{x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy+a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$$\xlongequal[\text{第二个积分由几何意义}]{\text{第一个积分利用对称性}} 0+a\pi(a^2-h^2)=a\pi(a^2-h^2)$$

3. 计算 $\iint\limits_S |xyz|dS$， S 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 截得的下半部分.

解： 设 S_1 为 S 在第一卦限的部分， S_1 投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

由对称性得

$$\iint_S |xyz|\,dS = 4\iint_{S_1} xyz\,dS = 4\iint_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \sin\theta\cos\theta\cdot\rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^1\rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho$$

$$=2\int_0^1\rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho \xlongequal{令t=\sqrt{1+4\rho^2}} \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt5}(t^2-1)^2t^2dt$$

$$=\frac{1}{32}\int_1^{\sqrt5}(t^6-2t^4+t^2)dt=\frac{125\sqrt5-1}{420}$$

4. 计算 $\iint_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$， S 介于平面 $z=0$ 和 $z=h\ (h>0)$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$

解： S 关于 yoz 对称，被积函数关于 x 是偶函数，圆柱面在 yoz 坐标面前方的曲面方程为

$x=\sqrt{R^2-y^2}$， $dS=\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}dydz=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$，在 yoz 坐标面

上的投影区域 D_{yz}: $\begin{cases}-R\le y\le R\\ 0\le z\le h\end{cases}$，所以

$$\iint_S\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint_S\frac{dS}{R^2+z^2}=2\iint_{S_{前}}\frac{dS}{R^2+z^2}=2\iint_{D_{yz}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz$$

$$=2R\int_0^h\frac{1}{R^2+z^2}dz\cdot\int_{-R}^R\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}=2R\left(\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right)\Bigg|_0^h\cdot 2\arcsin\frac{y}{R}\Bigg|_0^R=2\pi\arctan\frac{h}{R}$$

5. 计算 $\iint_S\dfrac{1}{z}dS$， S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截得的上半部分.

解： S 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$

由隐函数求导法得 $z'_x=\dfrac{-x}{z}$， $z'_y=\dfrac{-y}{z}$，故 $dS=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}}dxdy=\dfrac{a}{|z|}dxdy$

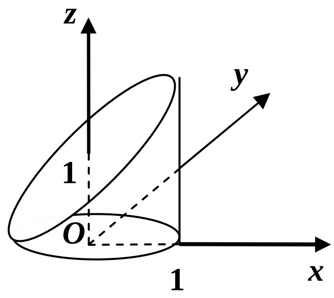
$$\iint\limits_S \frac{1}{z}dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy = a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a^2-h^2}\frac{\rho}{a^2-\rho^2}d\rho$$

$$= 2\pi a\left(-\frac{1}{2}\int_0^{a^2-h^2}\frac{1}{a^2-\rho^2}d(a^2-\rho^2)\right) = -\pi\, a\ln(a^2-\rho^2)\Big|_0^{a^2-h^2} = 2\pi\, a\ln\frac{a}{h}$$

$$\iint\limits_S zdS$$

6. 计算$\iint\limits_S zdS$， S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $z=0$， $z=1+x$ 所围立体的表面.

解： 设 $S_1: x^2+y^2=1$； $S_2: z=0$；



$S_3:\ z=1+x$

S_1 关于 zox 对称，被积函数关于 y 是偶函数，圆柱面在 zox 坐标面右方的曲面方程为 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，

$dS=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}dzdx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dzdx$， 在 zox 坐标面上的投影区域

$D_{zx}:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le z\le 1+x\end{cases}$，

S_2、 S_3 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，在 S_3 上， $z'_x=1$， $z'_y=0$

$$dS=\sqrt{1+1^2+0^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

$$\iint\limits_S zdS=\iint\limits_{S_1} zdS+\iint\limits_{S_2} zdS+\iint\limits_{S_3} zdS=2\iint\limits_{S_{前}} zdS+\iint\limits_{S_2} zdS+\iint\limits_{S_3} zdS$$

$$=2\iint\limits_{D_{zx}} z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dzdx+0+\iint\limits_{D_{xy}}(1+x)\sqrt{2}dxdy$$

$$=2\int_{-1}^1 dx\int_0^{1+x} z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dz+\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy+\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy$$

$$\overset{\text{第二个积分由几何意义}}{\underset{\text{第三个积分利用对称性}}{=}} I+\sqrt{2}\pi\cdot 1^2+0=I+\sqrt{2}\pi$$

$$I=2\int_{-1}^1 dx\int_0^{1+x} z\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dz=\int_{-1}^1\frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\ \overset{\text{由对}}{\underset{\text{称性}}{=}}\int_{-1}^1\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

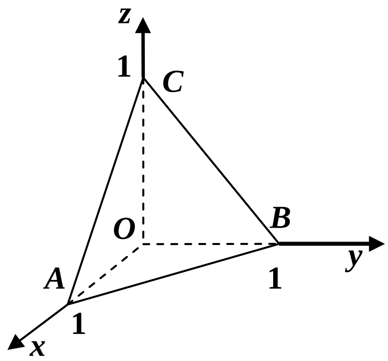
$$\xlongequal{令x=\sin t}2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\cos t}-\cos t\right)\cos t dt=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos 2t}{2}\right)dt=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\iint_S zdS=\frac{3}{2}\pi+\sqrt{2}\pi=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\pi$$

7. 计算$\displaystyle\oiint_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}$，$S$ 为四面体 $x+y+z\le 1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$ 的边界面.

解： 由变量轮换的对称性知：



$$\iint_{\Delta OAC}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint_{\Delta OBC}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$$

$$\oiint_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint_{\Delta ABC}+\iint_{\Delta OAB}+\iint_{\Delta OAC}+\iint_{\Delta OBC}$$

$$=\iint_{\Delta ABC}+\iint_{\Delta OAB}+2\iint_{\Delta OBC}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+y)^2}+\iint_{D_{xy}}\frac{dxdy}{(1+x+y)^2}+2\iint_{D_{yz}}\frac{dydz}{(1+y)^2}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}+2\int_0^1dy\int_0^{1-y}\frac{dz}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$

8. 求上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z\le h\ (h>0)$ 的质量，已知圆锥面的密度与该点到原点的距离成正比

解：设 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，S 在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le h^2$，

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}，\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}，\quad dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

圆锥面上点 $P(x,y,z)$ 的密度为 $\rho(x,y,z)$，由题意 $\rho(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

则圆锥面的质量

$$m=\iint_S \rho(x,y,z)dS=k\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=2k\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=2k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h \rho^2 d\rho=2k\cdot 2\pi\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{4}{3}k\pi h^3$$ （k 为比例系数）

9. 求密度为常数 ρ 的均匀半球壳 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心坐标及对于 z 轴的转动惯量.

解： 设 S： $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，其投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

由对称性知：$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$m=\iint_S \rho dS=\rho\iint_S dS=\rho\cdot 2\pi a^2=2\pi\rho a^2$$

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iint_S z\rho dS=\frac{\rho}{m}\iint_S zdS=\frac{\rho}{m}\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\frac{\rho a}{m}\iint_{D_{xy}}dxdy=\frac{\rho a}{m}\cdot\pi a^2=\frac{\pi\rho a^3}{m}=\frac{\pi\rho a^3}{2\pi\rho a^2}=\frac{a}{2}$$

$$J_z=\iint_S \rho(x^2+y^2)dS=\rho\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\rho a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=2\pi\rho a\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$\underline{\underline{\text{令}r=a\sin t}}\ 2\pi\rho a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt=2\pi\rho a^4 I_3=2\pi\rho a^4\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\pi\rho a^4$$