习题 10.2(P239)

1.用比较判别法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+3)}$

解：$\frac{2}{n(n+3)}=\frac{2}{n^2+3n}\le\frac{2}{n^2+n^2}=\frac{1}{n^2}\quad(n\ge 3)$，或 $\frac{2}{n(n+3)}\le\frac{1}{n^2}$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较判别法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+3)}$ 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1+n}{1+n^3}}$

解：$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+n}{1+n^3}}\Big/\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n^3}{1+n^3}}=1>0$

故由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1+n}{1+n^3}}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 由相同的敛散性，因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1+n}{1+n^3}}$ 发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{4n}$

解：$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4n}\Big/\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4n}\Big/\frac{\pi}{4n}\right)=\frac{\pi}{4}>0$

故由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{4n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 由相同的敛散性，因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\frac{\pi}{4n}$ 发散.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

解：$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\Big/\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$

因为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

解：$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})\Big/\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(1+\dfrac{1}{n})\Big/\dfrac{1}{n}\right)$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}\right)=1>0$$

故由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 由相同的敛散性，因为级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 收敛.

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})$

解：法 1（不等式形式的比较判别法）：

由泰勒公式 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{\cos(\theta x+2\pi)}{4!}x^4$

得 $1-\cos\dfrac{\pi}{n}\le\dfrac{\pi^2}{2n^2}$

法 2（极限形式的比较判别法）：

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{2}>0,$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})$ 收敛.

（7）$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2n}$

解：$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2n} = +\infty \neq 0$

由级数存在的必要条件知：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2n}$ 发散.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$

解：当 $a>1$ 时， 因为 $\frac{1}{1+a^n} \le \frac{1}{a^n}$

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛

当 $0<a\le 1$ 时， 因为 $\frac{1}{1+a^n} \ge \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散，由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散.

2. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5} < 1$

由根值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ 收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$

解：$u_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$， $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2} = +\infty$

由比值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$ 发散.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

解： $u_n=\frac{2^n n!}{n^n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=2\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{2}{e}<1$

由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$

解： $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n n!}{(2n-1)!!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\frac{2}{3}<1$$

由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$ 收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$

解： $u_n=n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+`1)^3\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^3\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}\Big/\frac{\pi}{3^{n+1}}}{3\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\frac{\pi}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$$

由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

解： $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$

由根值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$

解：$u_n=\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0<1$，由根值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$ 收敛.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$

解：$u_n=\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n}=\frac{1}{e^4}<1$

由根值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$ 收敛.

(9) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$

解：由于积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^3 x}d(\ln x)=-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{2\ln^2 2}$，积分收敛，

由积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$ 收敛.

(10) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$

解：由于积分

$\int_4^{+\infty}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^2}dx=\int_4^{+\infty}\frac{1}{(\ln\ln x)^2}d(\ln\ln x)=-\frac{1}{\ln\ln x}\Big|_4^{+\infty}=\frac{1}{\ln\ln 4}$，积分收敛，

由积分判别法知级数 $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$ 收敛.

3. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}\quad (a>0)$

解：$u_n=\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$

由根值判别法知：当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$收敛；

当$0<a<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$发散；

当$a=1$时，$u_n=\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}$ ，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$发散，

综上所述得：当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$收敛；

当$0<a\le 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}$发散；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

解：$u_n=\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\le\frac{2}{n\sqrt{n+1}}\le\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ ，

因为$P-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$ (该例与习题 10. 4 的 1(4)重复)

解：$u_n=\frac{3+(-1)^n}{2^n}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2}=0<1$，

由根值判别法知：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$收敛.

其它解法见习题 10. 4 的 1(4)解答。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$

解：$u_n=\dfrac{1}{3^n-2^n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3^n-2^n}}{\dfrac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=1$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n-2^n}$ 也收敛.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$

解：$u_n=\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})$，

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=0$，

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$ 也收敛.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+a^n}{1+b^n}\quad(a>0,b>0)$

解：$u_n=\dfrac{1+a^n}{1+b^n}$，

当 $0<b\le a$ 时，$u_n\ge1$， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne0$，

当 $0<a<b$ 时，若 $b<1$（此时 $a<1$），$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a^n}{1+b^n}=1\ne0$，

若 $b=1$（此时 $a<1$），$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a^n}{1+b^n}=\dfrac{1}{2}\ne0$，

由级数收敛的必要条件知，上述条件下级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+a^n}{1+b^n}$ 发散；

当 $0<a<b$ 时，若 $b>1$ 且 $a<1$，则 $\dfrac{1+a^n}{1+b^n}<\dfrac{2}{b^n}$；

当 $0<a<b$ 时，若 $b>1$ 且 $a\ge1$，则 $\dfrac{1+a^n}{1+b^n}<\dfrac{2a^n}{b^n}=2\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$；

由于 $\frac{1}{b}<1$；$\frac{a}{b}<1$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ 收敛，由比较判别法知，

当 $0<a<b$ 且 $b>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}$ 收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$

解：$\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{2n}$，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\frac{1}{2n}}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{4}$，

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ 收敛.

4．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，且 $a_n>0$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.

证明：由于不等式 $\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})\geq\frac{a_n}{n}$ 成立

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由题设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，且 $a_n>0$，

由级数收敛的性质知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$ 收敛，再由正项级数的比较判别法知：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.