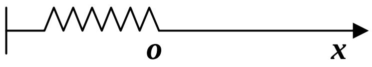
习题 4.7(P267)

1. 细杆的线密度 $\rho_l = 6 + 0.3x$（单位为 kg/m），其中 x 为与杆左端的距离，杆长 $10m$，求细杆的质量.

解：$dm = \rho_l dx$，故 $m = \int_0^{10} (6 + 0.3x)dx = 75$（$kg$）

2. 一根平放的弹簧，拉长 $10cm$ 时，要用 $49N$ 的力，求拉长 $15cm$ 时克服弹性力所做的功.

解：如图选取坐标系，将平衡位置设为原点，



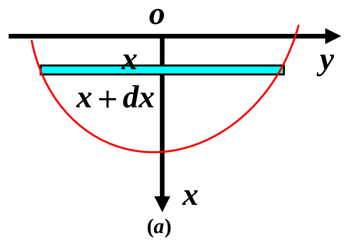
将弹簧拉长 x 时，弹性力为 $f(x) = kx$，

由已知 $x = 0.1m$ 时，$f = 49N$，故 $k = 490$，所以 $f(x) = 490x$，因为

$dW = f(x)dx = 490xdx$，故所求功为 $W = \int_0^{0.15} 490xdx = 5.5125$（焦耳）

3. 半径为 $20m$ 的半球形水池内存满水，求吸出池中全部水所做的功.

解法 1：如图 (a) 选取坐标系，图中半圆为半球体的截面，



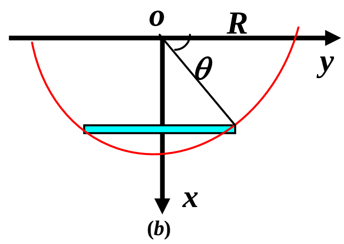
水的密度 $\rho = 1000kg/m^3$,半圆的方程为 $x^2 + y^2 = 20^2$，

将水池中位于 $[x, x+dx]$ 中的水吸出所作的功的微元为

$$dW = x \cdot \rho g \pi y^2 dx = 1000 g\pi x(20^2 - x^2)dx$$

$$W = 1000 g\pi \int_0^{20} x(20^2 - x^2)dx = 4 \times 10^7 g\pi \approx 1.2315 \times 10^9 \quad \text{（焦耳）}$$

解法 2：如图 (b) 选取坐标系，图中半圆为半球体的截面，



水的密度 $\rho = 1000kg/m^3$,设半球体的半径为 R

水池中位于 θ 的表面的水的面积为 $\pi(R\cos\theta)^2$，

表面距水面的距离为 $R\sin\theta$，故图中薄片的体积

为 $\pi(R\cos\theta)^2 d(R\sin\theta)$，因而将水池中位于 θ

的薄片的水吸出所作的功的微元为

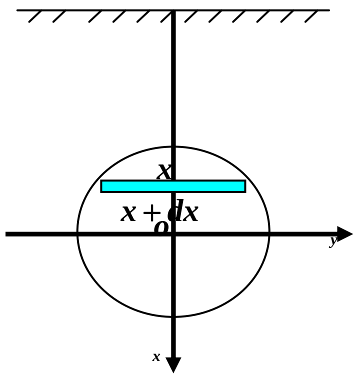
$$dW = \rho g\pi(R\cos\theta)^2 d(R\sin\theta) R\sin\theta = \rho g\pi R^4 \cos^3\theta \sin\theta d\theta$$

$$W = \rho g\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \rho g\pi R^4 \cdot \left.\frac{-\cos^4\theta}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\rho g\pi R^4$$

$$= 4 \times 10^7 g\pi \approx 1.2315 \times 10^9 \quad \text{（焦耳）}$$

4. 某加油站把汽油存放在地下一容器中，容器为水平放置的圆柱体. 如果圆柱的底面半径为 $1.5m$，长度为 $4m$，并且最高点位于地面下方 $3m$ 处，设容器装满了汽油，试求把容器中的汽油从容器中全部抽出所做的功(汽油的密度为 $6.73kg/m^3$).

解：如图选取坐标系，图中圆为圆柱体的截面，圆的方程为 $x^2+y^2=1.5^2$，



将容器位于区间 $[x, x+dx]$ 上的汽油抽出所作的功的微元

$$dW=(4.5+x)(\rho g 2y\cdot 4dx)$$

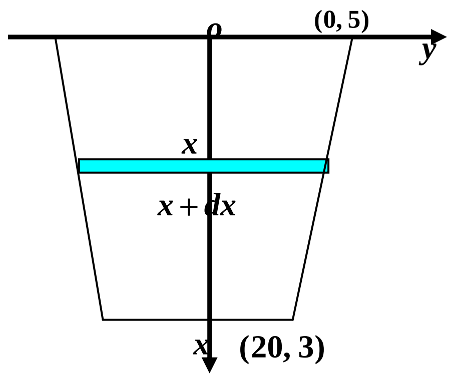
$$=8\rho g(4.5+x)\sqrt{1.5^2-x^2}dx$$

$$W=8\rho g\int_{-1.5}^{1.5}(4.5+x)\sqrt{1.5^2-x^2}dx=8\times 4.5\times\rho g\int_{-1.5}^{1.5}\sqrt{1.5^2-x^2}dx$$

$$\overline{\overline{\text{由定积分的}}}_{\text{几何意义}}\ 8\times 4.5\times\rho g\cdot\frac{\pi}{2}\times 1.5^2\approx 8\times 4.5\times 6.73\times 9.8\times\frac{\pi}{2}\times 1.5^2\approx 8387.37\ \text{（焦耳）}$$

5. 有一等腰梯形闸门垂直立于水中，上底长 $10m$，下底长 $6m$，高 $20m$，上底恰好在水面处，计算闸门所受的侧压力.

解：如图选取坐标系，则位于第一象限的侧边方程为 $y=5-\dfrac{x}{10}$，闸门位于区间 $[x, x+dx]$ 上的面积



微元 $dA=2ydx=2(5-\dfrac{x}{10})dx$，

侧压力微元为 $dP=\rho gxdA=2\rho gx(5-\dfrac{x}{10})dx$，

故 $P=2\rho g\int_0^{20}x(5-\dfrac{x}{10})dx=\dfrac{4400}{3}\rho g\approx 1467\times 10^3\times 9.8\approx 1.437\times 10^7$ （牛顿）

6. 一 $4m$ 长的水槽一侧面是竖直的矩形，另有一倾斜的矩形侧面及两个竖直的直角三角形端面，尺寸如图 4-39 所示，如果水槽中装满水，试分别计算水作用于各侧面及两个端面上的侧压力.

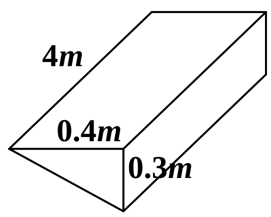
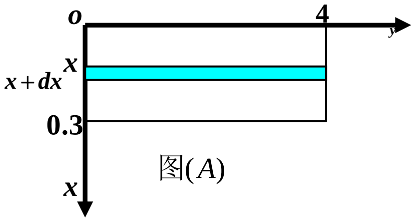


图 $4-39$

解：设竖直矩形侧面所受侧压力

为 P_1，由图(A)，其侧压力微元



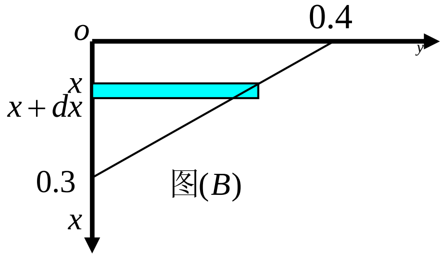
图(A)

$$dP_1 = \rho gx \times 4dx = 4\rho gxdx$$

$$P_1 = \int_0^{0.3} \rho gx \times 4dx = 4\rho g\int_0^{0.3} xdx$$

$= 0.18\rho g \approx 0.18 \times 1000 \times 9.8 = 1764$（牛顿）

设每个三角形侧面所受侧压力为 P_2，由图(B)，三角形斜边的方程为 $y = 0.4 - \frac{4}{3}x$，



图(B)

其侧压力微元 $dP_2 = \rho gx \cdot ydx = \rho gx(0.4 - \frac{4}{3}x)dx$

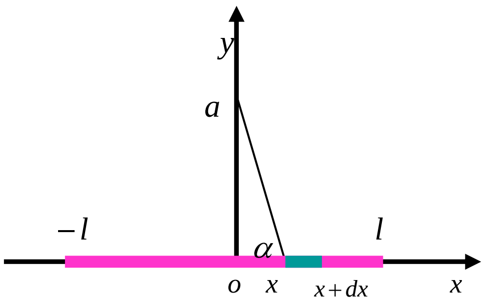
$$P_2 = \rho g\int_0^{0.3} x(0.4 - \frac{4}{3}x)dx = 0.006\rho g \approx 0.006 \times 1000 \times 9.8 \approx 58.8$$（牛顿）

设斜面所受侧压力为 P_3，由图(B)，三角形斜边的方程为 $y = 0.4 - \frac{4}{3}x$，则 $y' = -\frac{4}{3}$

其侧压力微元 $dP_3 = \rho gx \cdot 4ds = 4\rho gx\sqrt{1 + (-\frac{4}{3})^2}dx = \frac{20}{3}\rho gxdx$

$$P_3 = \frac{20}{3}\rho g\int_0^{0.3} xdx = \frac{10}{3}\rho g \cdot 0.09 = 0.3 \times 1000 \times 9.8 = 2940$$（牛顿）

7. 长为 $2l$ 的直导线，均匀带电，电荷线密度为 δ（单位长导线所带的电荷），在导线的中垂线上与导线相距 a 处有带电量 q 的点电荷，求：(1) 它与导线间的作用力（计算两个点电荷 q_1、q_2 间的作用力可用库仑定律 $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$）.



(2)点电荷由 a 点移到 b 点所做的功.

(3)点电荷由 a 点到无穷远点处所做的功.

解：如图选取坐标系，(1)在 $[-l, l]$ 上任取区间 $[x, x+dx]$，该小区间上的导线与 a 点的作用力微元

$dF = \frac{kq\delta dx}{x^2 + a^2}$，它在垂直方向上的分力

$$dF_y = dF \cdot \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{kq\delta dx}{x^2+a^2} = \frac{akq\delta}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$F_y = \int_{-l}^{l} \frac{akq\delta}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dx \xlongequal{x=a\tan t} \frac{2kq\delta}{a} \int_0^{\arctan\frac{l}{a}} \cos t dt = \frac{2kq\delta}{a} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}$$

由于导线关于 y 轴对称，且导线带电是均匀的，故导线在水平方向上的分力 $F_x = 0$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{2kq\delta}{a} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}$$

(2) 由(1)得 $F(y) = \dfrac{2kq\delta}{y} \cdot \dfrac{l}{\sqrt{l^2+y^2}}$

$$W_b = \int_a^b F(y)dy = 2kq\delta l \int_a^b \frac{dy}{y\sqrt{l^2+y^2}} \xlongequal{\frac{1}{\sqrt{l^2+y^2}}=t} 2kq\delta l \int_{\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{l^2+b^2}}} \frac{dt}{(lt)^2-1}$$

$$= 2kq\delta \int_{\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{l^2+b^2}}} \frac{d(lt)}{(lt)^2-1} = kq\delta \ln\left|\frac{lt-1}{lt+1}\right| \Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{l^2+b^2}}} = 2kq\delta \ln \frac{a(\sqrt{b^2+l^2}-l)}{b(\sqrt{a^2+l^2}-l)}$$

(3) $W_\infty = \lim\limits_{b\to\infty} W_b = \lim\limits_{b\to\infty} 2kq\delta \ln \dfrac{a(\sqrt{b^2+l^2}-l)}{b(\sqrt{a^2+l^2}-l)} = 2kq\delta \ln \dfrac{a}{\sqrt{a^2+l^2}-l}$

8. 在纯电阻电路中，已知电流 $i = I_m \sin\omega t$，其中 I_m、ω 为常数，t 为时间，计算一个周期的功率的平均值（电阻值为 R 时，瞬时功率 $P(t) = i^2 R$）.

解：$\overline{P(t)} = \dfrac{\varpi}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\varpi}} P(t)dt = \dfrac{\varpi R I_m^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\varpi}} \sin^2 \varpi t dt$

$$= \frac{\varpi R I_m^2}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\varpi}} \frac{1-\cos 2\varpi t}{2} dt = \frac{R I_m^2}{2}$$

9. 一汽车以速度 v（单位为 km/h）行驶，若其速度 v 的大小介于 $40km/h$ 和 $100km/h$ 之间，则它每消耗 $1L$ 汽油可行驶 $(8+\dfrac{1}{30}v)km$，假设作为时间 t 的函数的速度 v 由 $v = \dfrac{80t}{t+1}$ 给出（t 的单位为 h），问在 $t=2$ 和 $t=3$ 之间这段时间内汽车消耗了多少升汽油.

解：设时间 $[t, t+dt]$ 内汽车行驶的路程为 ds，消耗的汽油为 dy，则

$$dy=\frac{ds}{8+\frac{1}{30}v}=\frac{vdt}{8+\frac{1}{30}v}=\frac{\frac{80t}{t+1}dt}{8+\frac{1}{30}\cdot\frac{80t}{t+1}}=\frac{30t}{4t+3}dt$$

$$y=\int_2^3\frac{30t}{4t+3}dt=(\frac{15}{2}-\frac{45}{8}\ln\frac{15}{11})$$ （升）