10.5 函数的幂级数展开式

前面，我们利用幂级数的性质求出了某些幂级数的和函数。现在，我们讨论相反的问题：给定一函数 $f(x)$，能否找到一个相应的幂级数，使它在某区间收敛，且其和函数就是给定的函数 $f(x)$。这样的幂级数称为**函数 $f(x)$ 的幂级数展开式**，或说 $f(x)$ 在该区间内可以展开为幂级数。

问题： 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?

10.5.1 泰勒级数

先解决前两个问题：

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 能展开成某个幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

$$x\in N(x_0)$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots3\cdot2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

令 $x = x_0$，即得 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

a_n 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒系数。它是唯一的.

$\therefore$ $f(x)$ 在点 x_0 的展开式是唯一的 .

再解决最后一个问题： 由泰勒公式得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$， ξ 在 x 和 x_0 之间.

上页 下页 返回

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

其中 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\cdots$

此级数称为由函数 $f(x)$ 产生的泰勒级数.

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为由 $f(x)$ 产生的麦克劳林级数.

泰勒级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$的前$n+1$项和为

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

由泰勒公式得$f(x)=S_n(x)+R_n(x)$，其中$R_n(x)$为泰勒余项。

按和函数的定义，当 $x \in D$，若余项满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = 0$

则泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 的和函数就是函数 $f(x)$。

此时称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点展开的泰勒级数，记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \qquad x \in D$$

其中 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$。

由上述讨论可得**以下结论**：

(1) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个区间内有任意阶导数，则由 $f(x)$ 能产生相应的泰勒级数，即

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{其中} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

(2) 由 $f(x)$ 产生的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在其收敛域 D 内的和函数为 $f(x)$ 的充分必要条件是泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 趋于 0，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} = 0 \quad x \in D$$

此时有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad x \in D$

上页 下页 返回

验证“泰勒余项 R_n 趋于 0”一般很困难，只有当函数 $f(x)$ 的任意阶导数满足适当的条件时才满足。

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有任意阶导数，且存在 $M>0$，使得 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\quad n = 1,2,\cdots$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

因为 $\left|R_n(x)\right| = \left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \cdot \dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \le \dfrac{\left|M(x-x_0)\right|^{n+1}}{(n+1)!}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|M(x-x_0)\right|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

10.5.2 函数的幂级数展开

1. 直接展开法(麦克劳林级数展开法)

步骤: (1) 求出函数值 $f(0)$及$f(x)$在$x=0$的各阶导数值 $f^{(n)}(0)$; 若$f(x)$在$x=0$的某阶导数不存在，则$f(x)$不能展开为麦克劳林级 数。

(2) 写出$f(x)$产生的麦克劳林级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,

并求出其收敛半径，进 而确定收敛域 D。

(3) 考察在收敛区间内余项 R_n的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$是否为 0;

或是否存在 $M>0$，使得 $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M^{n}$，$(n=1,2,\cdots)$ $x\in D$ 成立.

若是，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$ 在区间 D 内等于 $f(x)$；

若否，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}$ 即使收敛，其和也不是 $f(x)$。

先介绍五个重要初等函数的麦克劳林展开式。

例1 将 $f(x)=e^x$ 展开成麦克劳林级数

解 $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1.$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$e^x \sim 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$\forall X>0$, 在 $[-X,X]$ 上 $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le e^X=M\le M^n$

$(n=0,1,2,\cdots)$

$$\therefore e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

由于 X 的任意性, 即得

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例2 将$f(x)=\sin x$展开成 x的幂级数．

解 $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$, $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$,

$\therefore f^{(2n)}(0)=0$, $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$, $(n=0,1,2,\cdots)$

且$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin(x+\frac{n\pi}{2})\right|\le 1=1^n \quad x\in(-\infty,+\infty)$

$$\therefore \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

上页 下页 返回

2. 间接展开法

根据泰勒系数的唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

例3 将$f(x)=\cos x$展开成x的幂级数.

解 $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

对上式两端求导, 用幂级数逐项求导性质可得

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

上页 下页 返回

例4 将$f(x)=\ln(1+x)$展开成x的幂级数.

解　由几何级数知

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

$$x\in(-1,1)$$

对上式两端求积分, 用幂级数逐项求积分性质可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$x\in(-1,1)$,上式对$x=1$也成立，$x\in(-1,1]$

上页 下页 返回

例5 将$f(x)=(1+x)^{\alpha}\ (\alpha\in R)$展开成$x$的幂级数.

$(1+x)^{\alpha}$ 牛顿二项式展开式

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots$$

$x\in(-1,1)$

注意: 在$x=\pm1$处收敛性与α的取值有关.

$\alpha\le-1$ 收敛域为 $(-1,1)$;

$-1<\alpha<0$ 收敛域为 $(-1,1]$;

$\alpha>0$ 收敛域为 $[-1,1]$.

上页 下页 返回

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$$

当$\alpha=-1,\pm\frac{1}{2}$时，有

双阶乘

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad x\in(-1,1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$

$$x\in[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots$$

$$x\in(-1,1]$$

$$(2n)!!=2*4*6\cdots(2n)$$

其中$(2n-1)!!=1*3*5\cdots(2n-1)$

上页 下页 返回

总结: 由于直接展开法必须求 $f^{(n)}(x)$，一般不容易求出 $f^{(n)}(x)$ 的通式，而且余项的讨论也较为复杂，所以将函数展开为幂级数多采用间接展开法，要用好间接展开法，至少要记住以下几个基本展开式及其收敛域:

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2)\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

上页 下页 返回

$$(3)\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(4)\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$(5)\ (1+x)^\alpha$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$\alpha \le -1$ 收敛域为$(-1,1)$; $x \in (-1,1)$

$-1 < \alpha < 0$ 收敛域为 $(-1,1]$;

$\alpha > 0$ 收敛域为 $[-1,1]$.

$$(6)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$x\in(-1,1)$$

例6 将$f(x)=e^{-\frac{x}{3}}$展开成 x的幂级数。

解 $\because e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$

用变量代换法，即 x 换成 $-\frac{x}{3}$

$$\therefore e^{-\frac{x}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^{2}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{3}\right)^{n}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{3^{n}n!}x^{n} \qquad \left(-\infty<-\frac{x}{3}<+\infty\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例7 将$f(x)=\sin^2 x$展开成 x的幂级数。

解 原式变形为： $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\therefore \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

上页 下页 返回

$$\therefore \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{2(2n)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

例8 将$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$展开成 x的幂级数。

解 原式变形为：

$$\frac{x}{x^2-x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}\right)$$

$$\because \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2<x<2)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^n}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{2^n}\right]x^n \quad (-1<x<1)$$

例9　将 $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数。

解　$\because \dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

即设法使 x 处变为 $x-2$　　$(-1<x<1)$

$$\therefore \frac{1}{5-x}=\frac{1}{3-(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n$$

$$-1<\frac{x-2}{3}<1$$　收敛区间为 $-1<x<5$

上页　下页　返回

例10 将 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$展开成 x的幂级数。

解 若先求出导函数后再展开太繁;

应先展开后求导。

$$\because e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\therefore \frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots \quad (x \neq 0)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}x + \cdots + \frac{n-1}{n!}x^{n-2} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

例11 将$f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$在$x=1$处展开成泰勒级数

($展开成x-1$的幂级数)并求$f^{(n)}(1)$.

解 $\because \dfrac{1}{4-x}=\dfrac{1}{3-(x-1)}=\dfrac{1}{3(1-\dfrac{x-1}{3})}$,

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-1}{3}+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x-1}{3}\right)^n+\cdots\right] \quad |x-1|<3$$

$$\therefore \frac{x-1}{4-x}=(x-1)\frac{1}{4-x}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(x-1)^3}{3^3}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots$$

于是 $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=\dfrac{1}{3^n}$, 故 $f^{(n)}(1)=\dfrac{n!}{3^n}$.

例12（书中例3）

求函数 $f(x)=\arctan x$ 的麦克劳林展开式 .

解 $\because \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+\cdots+(-x^2)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$

两端积分，得 $(-1<x<1)$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx$$

$$\arctan x-\arctan 0=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

即 $$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ 收敛半径 $R=1$

上页 下页 返回

当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

此交错级数收敛 .

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$

此交错级数也收敛 .

由于 $\arctan x$在$x=\pm1$时都连续，故

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(-1\le x\le 1)$$

上页 下页 返回

10.5.3 幂级数的应用

1. 函数值的近似计算

$\because\ A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$

$\therefore\ A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$

误差 $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$

两类问题:

1.给定项数,求近似值并估计精度;

2.给出精度,确定项数.

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

上页 下页 返回

例13 利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$计算$\sin 9^0$的近似值，并估计误差.

解 $\sin 9^0 = \sin \dfrac{\pi}{20} \approx \dfrac{\pi}{20} - \dfrac{1}{6}(\dfrac{\pi}{20})^3$,

$$\approx 0.157079 - 0.000646 \approx 0.156433$$

$$|R_2| \le \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{20})^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{300000} < 10^{-5},$$

$$\therefore \sin 9^0 \approx 0.156433$$

其误差不超过10^{-5}.

上页 下页 返回

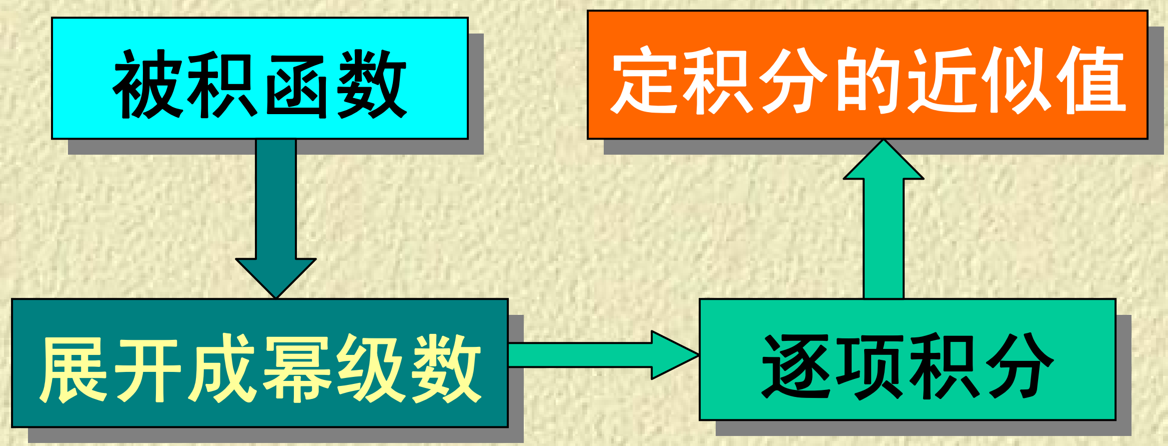
估计误差时，若幂级数是交错级数，则余项的绝对值小于等于余项首项的绝对值；若幂级数不是交错级数，则将余项适当放大为某个几何级数，求出该几何级数的和，即得其误差上限（见10.5.3 幂级数的应用例6）。

上页 下页 返回

2. 计算定积分的近似值

例如函数 $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$，原函数不能用初等函数表示，难以计算其定积分．

解法



上页 下页 返回

例14 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值，精确到10^{-4}.

解 $\because \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

收敛的交错级数

第四项 $\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{3000} < 10^{-4}$,

取前三项作为积分的近似值,得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461$$

3. 求数项级数的和　阿贝尔法(构造幂级数法)

例15　求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}$ 的和.

解　　令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n,\qquad(-\infty,+\infty)$

$$\because\ s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n\Big)'=x\Big(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\Big)'$$

$$=x\Big(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\Big)'=x(xe^x)'=x(1+x)e^x$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}=s\Big(\frac{1}{2}\Big)=e^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{e}.$$

4. 欧拉公式

当自变量为复数时，指数函数的级数展开式仍然成立，即

$$e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots,$$

其中z为复数. 特别地，取 $z=ix$, x为实数，则有

$$e^{ix}=1+ix+\frac{1}{2!}(ix)^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^{n}+\cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots$$

$$= \underbrace{(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots)}_{\cos x}$$

$$+ i\underbrace{(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots)}_{\sin x}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\because e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

又 $\because e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$$\therefore \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

欧拉公式

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

揭示了三角函数和复变数指数函数之间的一种关系.

上页 下页 返回

5.微分方程的幂级数解

例 15(书中例 8)　设有初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + \dfrac{1}{1+x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

，求它的幂级数解.

解　设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

由初值, 得　$a_0 = 1$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

又　$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

上页　下页　返回

代入方程, 得

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots = (1 + a_1 x + \cdots$$

$$+ a_n x^n + \cdots) + (1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots)$$

比较两端各系数, 可得

常数项 $a_1 = 2$

x 的系数 $2a_2 = a_1 - 1 = 1$, 故 $a_2 = \dfrac{1}{2}$

x^2 的系数 $3a_3 = a_2 + 1 = \dfrac{3}{2}$, 故 $a_3 = \dfrac{1}{2}$

x^3 的系数 $4a_4 = a_3 - 1 = -\dfrac{1}{2}$, 故 $a_4 = -\dfrac{1}{8}$

依次进行计算，比较 x^n 的系数，可得递推公式

$$(n+1)a_{n+1}=a_n+(-1)^n,\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left[a_n+(-1)^n\right]$$

由此，得初值问题的解

$$y=1+2x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^4+\cdots$$

其中系数 a_n 可由上面的递推公式确定，也可以

记为 $$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

其中 $$a_0=1,\ a_n=\frac{1}{n}\left[a_{n-1}+(-1)^{n+1}\right],\ n=1,2,\cdots$$

小结

1.泰勒级数收敛于函数的条件;

2.函数展开成泰勒级数的方法.

3.幂级数的应用

函数值的近似计算;

求不可积类函数的定积分的近似值;

求常数项级数的和;

欧拉公式的证明;

微分方程的幂级数的解法.

例.(89,6)将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$展为$x$的幂级数.

解：由于$f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}$

$$=\frac{1}{1+x^2}$$

则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(-1<x<1)$

上页 下页 返回

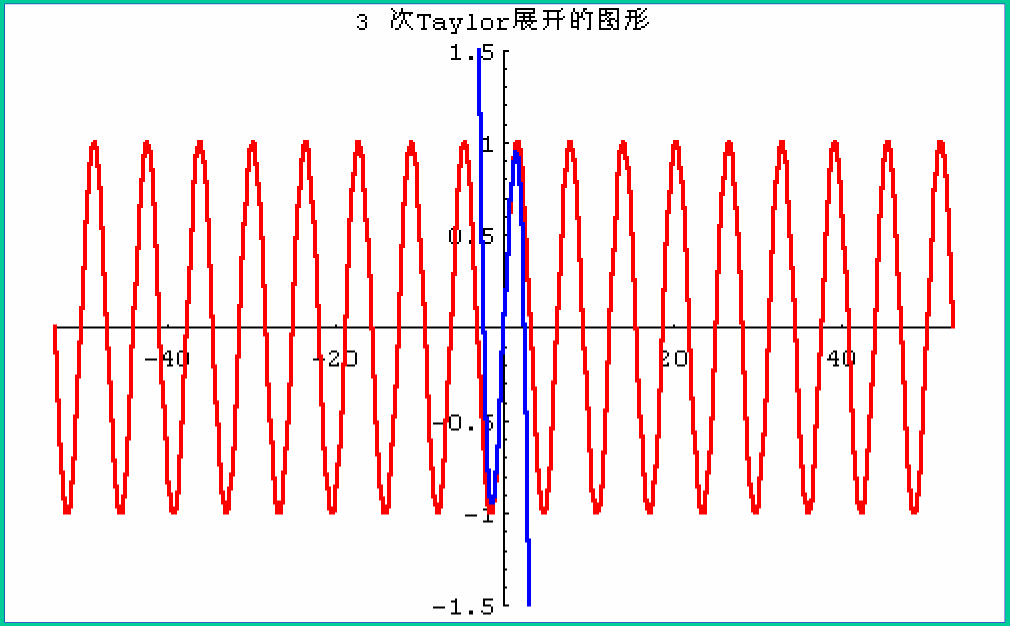
两边积分得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

上页 下页 返回

Taylor 级数的收敛性---局部逼近.



播放

上页 下页 返回

例 16　用幂级数求微分方程

$$xy'' + y' + xy = 0$$ 的解

解　设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a_n 待定.

则 $$xy = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n$$

代入方程得

$$xy'' + y' + xy = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n = 0$$

由各项系数为 0，得

$$a_1 = 0$$

$$(n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0, n = 1,2,\cdots$$

或记为

$$n^2 a_n + a_{n-2} = 0, n = 2,3,\cdots$$

即 $$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}, n = 2,3,\cdots$$

由 $a_1 = 0$,

可推出 $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{2k-1} = 0, k = 1,2,\cdots$

由 $a_{2k} = -\frac{1}{(2k)^2} a_{2(k-1)}$ 推出

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}, \cdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2k)^2}, k = 1,2,\cdots$$

取 $a_0 = 1$, 得方程的一个解为

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2}$$

此方程称为零阶贝塞尔方程, 上面的解称为零阶贝塞尔函数. 它是特殊函数, 不能用有限形式表达.

作业：

P265：　1(3)(4)(5)(7)(8)(9).

3.　　4.　　6.