习题 1.2(P39)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x}=0$， x 满足什么条件时，才能使 $\left|\frac{x-3}{x}\right|<0.001$？

解：$\left|\frac{x-3}{x}\right|<0.001$，即 $-\frac{1}{1000}<1-\frac{3}{x}<\frac{1}{1000}$，故 $\frac{3000}{1001}<x<\frac{1000}{333}$

2. 用函数极限的定义证明下列各式成立.

（1）$\lim\limits_{x\to 1}3x-2=1$ （2）$\lim\limits_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=6$ （3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}=-1$

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$ （5）$\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}e^{x}=1$

证明：（1）$\forall\varepsilon>0$，欲找 $\delta>0$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，使

$$|(3x-2)-1|=3|x-1|<3\delta=\varepsilon,\quad \text{故取 } \delta=\frac{\varepsilon}{3}$$

（2）$\forall\varepsilon>0$，欲找 $\delta>0$，当 $0<|x-9|<\delta$ 时，使

$$\left|\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}-6\right|=\left|\sqrt{x}+3-6\right|=\left|\sqrt{x}-3\right|=\left|\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}\right|\le\frac{|x-9|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

又保证 $x>0$，即 $|x-9|<9$，故取 $\delta=\min\{9,3\varepsilon\}$

（3）$\forall\varepsilon>0$，欲找 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，使

$$\left|\frac{2-x}{x}-(-1)\right|=\frac{2}{|x|}<\varepsilon,\ \text{即 } |x|>\frac{2}{\varepsilon},\ \text{故取 } X=\frac{2}{\varepsilon}$$

（4）$\forall\varepsilon>0$，欲找 $X>0$，当 $x>X$ 时，使

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\le\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right|=\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon,\ \Rightarrow x>\frac{1}{\varepsilon^2},\ \text{故取 } X=\frac{1}{\varepsilon^2}$$

（5）$\forall\varepsilon>0$，欲找 $\delta>0$，当 $0<|x-4|<\delta$ 时，使

$$\left|\sqrt{x}-2\right|=\frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}\le\frac{|x-4|}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

又保证 $x>0$，即 $|x-4|<4$，故取 $\delta=\min\{4,2\varepsilon\}$

（6）法 1：$\forall \varepsilon > 0$，欲找$\delta > 0$，当$0 < |x| < \delta$时，使 $|e^x - 1| < \varepsilon$

即$1 - \varepsilon < e^x < 1 + \varepsilon$， 亦即$\ln(1-\varepsilon) < x < \ln(1+\varepsilon)$

取$\delta = \min\{|\ln(1-\varepsilon)|,\ \ln(1+\varepsilon)\}$.

法 2：由指数函数的性质知，$\forall x$，均有$e^x \geq 1 + x$，或$e^{-x} \geq 1 - x$

故当$x < 0$时，有$0 > e^x - 1 \geq x$，即$|e^x - 1| \leq |x| \leq 2|x|$

又$e^x = \dfrac{1}{e^{-x}} \leq \dfrac{1}{1-x}$，所以$e^x - 1 \leq \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$，

故当限定$0 < x < \dfrac{1}{2}$时，有$e^x - 1 \leq 2x$，即$|e^x - 1| \leq 2|x|$

综上所述可得：$\forall x \in \overset{0}{N}(0, \dfrac{1}{2})$， 即$0 < |x| < \dfrac{1}{2}$，均有$|e^x - 1| \leq |x| \leq 2|x|$

因而$\forall \varepsilon > 0$，欲找$\delta > 0$，当$0 < |x| < \delta$时，使

$|e^x - 1| \leq 2|x| < 2\delta = \varepsilon$

又保证$0 < |x| < \dfrac{1}{2}$，故取$\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$

3. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在的充要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$、$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$都存在且相等.

证明:必要性:设$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,则$\forall \varepsilon > 0$,$\exists X > 0$,当$|x| > X$时,必有$|f(x) - A| < \varepsilon$,

由$|x| > X$，得$x > X$或$x < -X$，由定义知$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

充分性：设$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X_1 > 0$，当$x < -X_1$时，必有$|f(x) - A| < \varepsilon$；$\exists X_2 > 0$，当$x > X_2$时，必有$|f(x) - A| < \varepsilon$，

取 $X = \max\{X_1\ X_2\}$， 则， 当 $x < -X$ 且 $x > X$ 时， 亦即 $|x| > X$ 时， 必有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，由定义知$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

4. 给出下列极限的定义.

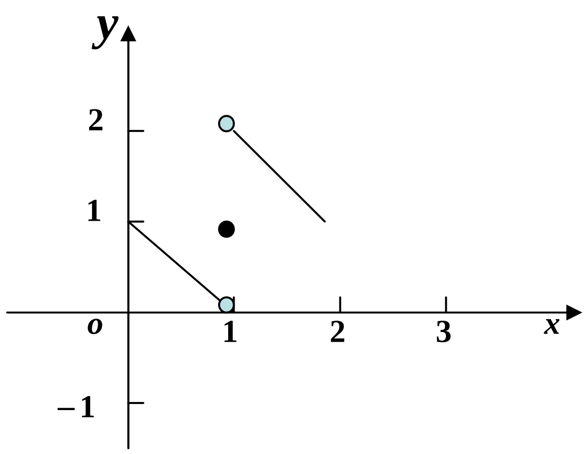
(1) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=A$　　　　　　(2) $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=A$

定义(1)设函数 $y=f(x)$ 在点 a 的去心右邻域内有定义，A 是常数，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<x-a<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 x 趋于 a 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=A$，简记为 $f(x)\to A\ (x\to a^{+})$ 或 $f(a+0)=A$

定义(2) 设函数 $y=f(x)$ 在点 a 的去心左邻域内有定义，A 是常数，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $-\delta<x-a<0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $y=f(x)$ 当 x 趋于 a 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=A$，简记为 $f(x)\to A\ (x\to a^{-})$ 或 $f(a-0)=A$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\le 2\end{cases}$，画出 $y=f(x)$ 的图形；求 $x\to 1$ 时函数的左、右极限，并讨论极限的存在性。

解：



$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^{-}}(-x+1)=0$，　$\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^{+}}(-x+3)=2$

左、右极限不相等，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ 0 & x=0\\ x & 0<x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$，求 $x\to 0$，$x\to 1$ 时函数的左、右极限，讨论极限的存在性。

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

左、右极限不相等，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$

左、右极限存在且相等，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$。

7. 证明函数极限的惟一性、局部有界性.

证明：（1）证惟一性：如果 $\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，则 $A=B$

（反证法）：假设 $A\neq B$，不妨设 $A<B$

由于 $\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，对于给定的 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$，必存在某个时刻（$\exists\delta$ 或 $\exists X$），使得在这个时刻之后（$0<|x-a|<\delta$，或 $|x|>X$），有 $|f(x)-A|<\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$ 与 $|f(x)-B|<\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}$ 同时成立，即 $f(x)>\dfrac{B+A}{2}$ 与 $f(x)<\dfrac{B+A}{2}$ 同时成立，这是不可能的，故必有 $A=B$.

（2）证局部有界性：如果 $\lim f(x)=A$，则必存在 $M>0$，使得在某个时刻（$\exists\delta$ 或 $\exists X$）之后（$0<|x-a|<\delta$，或 $|x|>X$），有 $|f(x)|\le M$

证：由于 $\lim f(x)=A$，对于给定的 $\varepsilon=1$，必存在某个时刻（$\exists\delta$ 或 $\exists X$），使得在这个时刻之后（$0<|x-a|<\delta$，或 $|x|>X$），有 $|f(x)-A|<\varepsilon=1$，即 $A-1<f(x)<A+1$，取 $M=\max\{|A-1|,|A+1|\}$，则 $|f(x)|\le M$

8. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，用定义证明：$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$.并举例说明反之未必成立.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，

而 $||f(x)|-|A||\le|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$

反之未必成立，例如：

$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x\le 0\\ -x-1 & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

*9．证明：当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\sqrt{x}$ 没有极限.

证明： 取 $x_n=(2n\pi)^2$，则当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{x_n}=0$

取 $y_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2$，则当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{y_n}=1$

x_n，y_n 均是 $x\to+\infty$ 时的子列，故 $\sin\sqrt{x}$ 没有极限.