2010 级《微积分 A》第一学期期中试题参考答案

一、1. 6;　　　　　　　　2. 6;

3 $y'=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x})-\dfrac{1}{x^2}\cot\dfrac{1}{x}$;

4 $dy=\dfrac{e^{x+y}-y\cos x}{\sin x-e^{x+y}}dx$;　或 $dy=\dfrac{y(1-\cot x)}{1-y}dx$;

5 $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x}}=x^3-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{8}x^5+o(x^5)$

1. 解：利用等价无穷小 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$ 得：$\sqrt[10]{1+3x^6}-1\sim\dfrac{1}{10}(3x^6)$，

故当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\sqrt[10]{1+3x^6}-1$ 的阶为 6

2. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x\tan x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+x\tan x)-f(0)}{x\tan x}\cdot\dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x\tan x)-f(0)}{x\tan x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$$

$$\xlongequal[\text{无穷小替换}]{\text{由导数定义及}} f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=3\times 2=6$$

3. 解：$y=e^{\tan x\ln x}+\ln\sin\dfrac{1}{x}$

$$y'=e^{\tan x\ln x}\left[\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x}\right]+\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x^{\tan x}\left[\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x}\right]-\frac{1}{x^2}\cot\frac{1}{x}$$

4. 解：方程两端对 x 求导得：$e^{x+y}(1+y')-y'\sin x-y\cos x=0$

整理得：$y'=\dfrac{e^{x+y}-y\cos x}{\sin x-e^{x+y}}$，故 $dy=\dfrac{e^{x+y}-y\cos x}{\sin x-e^{x+y}}dx$

或方程两端求微分得：$e^{x+y}(dx+dy)-\sin x dy-y\cos x dx=0$

整理得：　$dy=\dfrac{e^{x+y}-y\cos x}{\sin x-e^{x+y}}dx$

由 $e^{x+y}-y\sin x=0$ 得 $e^{x+y}=y\sin x$ 可将上式化为 $dy=\dfrac{y(1-\cot x)}{1-y}dx;$

5．解：由二阶麦克劳林公式 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$$

故 $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x}}=x^3-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{8}x^5+o(x^5)$

二、证明：**有界性:**

$x_1>a>0,\ x_2=\sqrt{ax_1}>\sqrt{a\cdot a}=a$，

假设 $x_n>a$，则 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}>a$

由归纳法可知数列 $\{x_n\}$ 有下界;

单调性: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{ax_n}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{a}{x_n}}<1$，所以 $\{x_n\}$ 单减;

由单调有界准则知：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在等式 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$ 两边取极限，得 $A=a$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

三、解：设 $f(x)=x^2-2x\ln x-1$，则

$$f'(x)=2x-2\ln x-2$$

$$f''(x)=2-\frac{2}{x}>0,\quad (x>1)$$

$f'(x)$单增，又$f'(1)=0,\therefore\ f'(x)>f'(1)=0\quad(x>1)$

$f(x)$单增，又$f(1)=0,\therefore\ f(x)>f(1)=0\quad(x>1)$

即 $x^2 > 2x\ln x + 1 \quad (x > 1)$

四、解: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \csc t - \cot t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cot t\csc t + \csc^2 t}{\sin t} = \csc^2 t(\csc t - \cot t).$$

五、解: 因为 $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$，$\left(\dfrac{1}{a+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$

由莱布尼兹公式得:

$$y^{(10)} = (x^2\sin x)^{(10)} + (\frac{1}{x+2})^{(10)}$$

$$= x^2\sin(x+5\pi) + 20x\sin(x+\frac{9\pi}{2}) + 90\sin(x+4\pi) + \frac{10!}{(x+2)^{11}}$$

$$= (90 - x^2)\sin x + 20x\cos x + \frac{10!}{(x+2)^{11}}$$

六、解: $y' = \dfrac{a}{x} + 2bx + 1,$

$x_1 = 1, x_2 = 2$为极值点，有

$y'(1) = a + 2b + 1 = 0, \quad y'(2) = \dfrac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

得$a = -\dfrac{2}{3}, \quad b = -\dfrac{1}{6}$

$y' = -\dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x}$，

当$0 < x < 1$时，$y' < 0$; 当$1 < x < 2$时，$y' > 0$;

$x > 2$时，$y' < 0$

（或 $y'' = \dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{3}$， $y''(1) = \dfrac{1}{3} > 0; \quad y''(2) = -\dfrac{1}{6} < 0.$）

所以极小值: $y(1)=\dfrac{5}{6}$; 极大值: $y(2)=\dfrac{4-2\ln 2}{3}$.

七、(1)当 $x\neq 0$ 时, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 连续, 又

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0,$$

$g(0)=a,$ 所以要 $g(x)$ 处处连续, 只需 $a=0.$

(2)当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}=1$$

$$\therefore\quad g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

由已知条件及连续函数的运算性质知, 当 $x\neq 0$ 时, $g'(x)$ 连续;

在 $x=0$ 处, 有

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-1=f''(0)-1=1$$

$$=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

综上可知: $g'(x)$ 处处连续, 即 $g(x)$ 有一阶连续导数

八、定义域 $D=\Re$。

$$y'=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}},\quad y''=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

令 $y''=0$, 得可疑拐点横坐标为$x=-\dfrac{1}{2}$; $x=0$时，y''不存在.

当$x<-\dfrac{1}{2}$时，$y''<0$,曲线为上凸的;

当$-\dfrac{1}{2}<x<0$时，$y''>0$,曲线为上凹的;

当$x>0$时，$y''>0$,曲线为上凹的;

拐点坐标为$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{5}(\dfrac{1}{2})^{\frac{5}{3}}-\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{2})^{\frac{2}{3}}+1)$.

凸区间为: $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$; 凹区间为: $(-\dfrac{1}{2},0)$, $(0,+\infty)$。

九、解: 设 P 点坐标为(x_0,y_0),则过点 P 的切线方程为:

$$y-y_0=-\frac{4x_0}{9y_0}(x-x_0)$$

令$x=0$,得$y=\dfrac{4}{y_0}$, 令$y=0$,得$x=\dfrac{9}{x_0}$

则点 P 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为: $S=\dfrac{18}{x_0y_0}$,

简化目标函数，则问题转化为求函数:

$A=x_0y_0=2x_0\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{9}}$ $(x_0\in(0,3))$ 最大值。

$A'_{x_0}=\dfrac{1-2x_0^2/9}{\sqrt{1-x_0^2/9}}$，令$A'_{x_0}=0$,得唯一驻点$x_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

当 $x<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$A'_{x_0}>0$; 当 $x>\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$A'_{x_0}<0$ 。

所以A在$x_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$处取得极大值，有驻点唯一，

所以 A在$x_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$处取得最大值。

S在$x_0=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$处取得最小值。此时 $P(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，$S_{最小}=6$。

十、解:

$$\lim_{n\to\infty} n^2(n\tan\frac{1}{n}-1)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^2(x\tan\frac{1}{x}-1) \qquad 令 t=\frac{1}{x},$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{\tan t}{t}-1)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t-t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sec^2 t\tan t}{6t}=\frac{1}{3}.$$

（注：若直接令 $\boldsymbol{t=\frac{1}{n}}$，则后面不能用洛必达法则，因为此时 $\boldsymbol{t}$ 是离散变量，不连续，当然函数不可导）

十一、证明一: 设 $F(x)=(b-x)f'(x)-f(x)+f(a)$

则 $F(x)\in C[a,b],\ F(x)\in D[a,b],$

（1） 根的存在性: 因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单增，故 $f(b)>f(a)$

故有 $F(a)=(b-a)f'(a)>0$， $F(b)=f(a)-f(b)<0$，

由零点定理：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$

即方程 $(b-x)f'(x)-f(x)+f(a)=0$ 至少有一个实根

亦即方程 $f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$ 至少有一个实根

（2） 根的惟一性（利用单调性）: 因为 $f''(x)<0$， $f'(x)>0$

故 $F'(x)=(b-x)f''(x)-2f'(x)<0$，即 $F(x)$ 严格单减，

所以，方程有惟一的实根。

证明二：设 $F(x)=f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$

则 $F(x)\in C[a,b),\ F(x)\in D[a,b),$

（1） 根的存在性：因为 $f'(x)>0$，所以 $F(a)=f'(a)>0$，且 $f(b)>f(a)$

又 $f'(x)$ 连续，所以，$f'_-(b)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}=+\infty$

故 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=f'_-(b)-\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}=-\infty$

由 $F(x)$ 的连续性可得，存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $F(c)<0$

由零点定理：至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$

即方程 $f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$ 至少有一个实根

（2） 根的惟一性：因为 $F'(x)=f''(x)-\dfrac{(b-x)f'(x)+f(x)-f(a)}{(b-x)^2}$

因为 $f'(x)>0$，所以，$f(x)>f(a)\quad x\in(a,b)$，又 $f''(x)<0$

所以 $F'(x)<0$，故 $F(x)$ 严格单减，即：方程有惟一的实根。

证明三： 设 $F(x)=xf(x)-bf(x)-f(a)x$，

则 $F(x)\in C[a,b],\ F(x)\in D(a,b),$

（1）根的存在性：因为 $F(a)=-bf(a)=F(b)$，由罗尔定理知：

至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0,$

即方程 $F'(x)=0$ 至少有一个根，而

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)-bf'(x)-f(a)$$

$$F'(x)=0,\ \text{变形即为方程} f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{b-x}$$

所以方程$f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$至少有一个根.

（2）根的惟一性 $F'(x)=(x-b)f'(x)+f(x)-f(a)$

$$F''(x)=2f'(x)+(x-b)f''(x) \quad (\forall x\in(a,b)$$

由已知条件，$f'(x)>0, f''(x)<0, x-b<0,$ 可知，$F''(x)>0.$

$\therefore F'(x)$严格单增，$F'(x)$有惟一零点。

所以方程$f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$有惟一一个根.

证明四：设 $\boldsymbol{F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]}$

则 $F(x)\in C[a,b],\ F(x)\in D(a,b),$

（1） 根的存在性：因为 $\boldsymbol{F(a)=F(b)=0}$，由罗尔定理

至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$F'(\xi)=0,$

即方程 $F'(x)=0$ 至少有一个根，而

$\boldsymbol{F'(x)=(b-x)f'(x)-f(x)+f(a)}$

$F'(x)=0,$ 变形即为方程$f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$

所以方程$f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}$至少有一个根.

（2）根的惟一性：因为 $\boldsymbol{f''(x)<0}$， $\boldsymbol{f'(x)>0}$

故 $\boldsymbol{F''(x)=(b-x)f''(x)-2f'(x)<0}$，即 $\boldsymbol{F'(x)}$ 严格单减，

所以，方程 $\boldsymbol{F'(x)=0}$ 有惟一的实根，

即方程 $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{b-x}}$ 有惟一的实根。