习题 8.5(P147)

1．计算 $\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，其中 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

解：做变换 $x=a\rho\cos\theta$，$y=b\rho\sin\theta$，变换后区域 $D':0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1$，

$J=ab\rho$，所以 $\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=\iint\limits_{D'}\rho^2\cdot ab\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^1 ab\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{2}ab$

2．计算 $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV$，其中 $V:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

解：做变换 $x=ar\sin\varphi\cos\theta$，$y=br\sin\varphi\sin\theta$，$z=cr\cos\varphi$，

变换后区域 $V':0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le r\le 1$，$J=abcr^2\sin\varphi$

所以 $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot abcr^2\sin\varphi dr$

$$=4abc\pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r^2 dr=\frac{1}{4}\pi^2 abc$$

3．计算 $\iiint\limits_V (x+y+z)dV$，其中 $V:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$

解：做变换 $u=x-a$，$v=y-b$，$w=z-c$，变换后区域 $V':u^2+v^2+w^2\le R^2$，

$J=1$，所以 $\iiint\limits_V (x+y+z)dV=\iiint\limits_{V'}(a+u+b+v+c+z)dV'$

$$=\iiint\limits_{V'}(a+b+c)dV'+\iiint\limits_{V'}(u+v+w)dV'$$

利用重积分的几何意义 $\iiint\limits_{V'}(a+b+c)dV'=(a+b+c)\iiint\limits_{V'}dV'=\frac{4}{3}(a+b+c)\pi R^3$，

利用对称性 $\iiint\limits_{V'}(u+v+w)dV'=0$，所以 $\iiint\limits_V (x+y+z)dV=\frac{4}{3}\pi(a+b+c)R^3$

4．证明：$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_{-1}^1 f(u)du$，其中 $D:|x|+|y|\le 1$

证明：做变换 $u=y+x$，$v=y-x$，变换后区域 $D':-1\le u\le 1,\quad -1\le v\le 1$，$J=\frac{1}{2}$，

所以$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}f(u)\cdot\frac{1}{2}du=\int_{-1}^{1}f(u)du$

5．求在第一象限内由坐标面和曲面$(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2=1$围成的立体的体积.

解：做变换$x=ar\sin\varphi\cos^2\theta$，$y=br\sin\varphi\sin^2\theta$，$z=cr\cos\varphi$，

变换后区域$V':0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le 1$，$J=2abcr^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta$

所以$\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dV=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 2abcr^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta dr$

$$=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2dr=2abc\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}abc$$