北京理工大学 2006-2007 学年第一学期　　2007.1

2006 级《微积分 A》期末试卷(A 卷)参考答案及评分标准

一、1. $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}-\arctan\sqrt{x^2-1}-x\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}$ …….4 分

$=\dfrac{-x^2}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}-\arctan\sqrt{x^2-1}$ ……………………………7 分

2. 原式 $=\int\dfrac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}+\int x\ln x dx$ ………..2 分

$=-\arctan(\cos x)+\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{x}dx$ ………..5 分

$=-\arctan(\cos x)+\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$ ………..7 分

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{1+\ln x}\cdot\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\tan x}{1+\ln x}}$ …………2 分

其中 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\tan x}{1+\ln x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x}{\tan x}\sec^2 x=1$…..5 分

原式 $=e$ …………7 分

4. 令 $x=a\sin t, dx=a\cos tdt;\quad x=0,t=0;x=\dfrac{a}{2},t=\dfrac{\pi}{6}$…….2 分

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{a\cos tdt}{a^3\cos^3 t}=\dfrac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec^2 tdt$ ……….5 分

$=\dfrac{1}{a^2}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3a^2}$ ……….7 分

5. 对应齐次方程的特征方程为：$r^2-2r=0$

特征根：$r_1=0,r_2=2$；

齐次方程的通解：$Y(x)=C_1+C_2e^{2x}$ ………..2 分

设非齐次方程的特解为：$y^* = x(ax+b)$

代入方程得：$a=-1, b=-\frac{3}{2}$；$y^* = -x^2 - \frac{3}{2}x$ ………5 分

原方程的通解为：$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} - x^2 - \frac{3}{2}x$ …….7 分

二、1. 由泰勒公式得，当 $x \to 0$ 时，$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ ….2 分

$e^x - ax^2 - bx - c = (1-c) + (1-b)x + (\frac{1}{2} - a)x^2 + o(x^2)$

由题意，得$1-c=0, 1-b=0, \frac{1}{2}-a=0$ …………5 分

故当$a=\frac{1}{2}, b=1, c=1$时，$e^x - ax^2 - bx - c$ 是 x^2 的高阶无穷小。

（此题也可用高阶无穷小的定义及罗必达法则） ………….7 分

2. $f'(x) = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，又 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在，

列表： ……………….2 分

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	—	0	+
$f(x)$	↓	不取极值	↓	取极小值	↑

$f(x)$ 的单增区间：$(1,+\infty)$；单减区间：$(-\infty,0),(0,1)$；

极小值：$f(1)=-3.$ ………………..7 分

3. 令 $u+t=v, du=dv$；$x=\int_0^t \cos(u+t)du = \int_t^{2t} \cos v dv$

$\therefore x'_t = 2\cos(2t) - \cos t$ …………………2 分

$y^2 \sin t - \cos t - 1 = 0$ 两边求导，得

$$2yy_t'\sin t + y^2\cos t + \sin t = 0$$

$$\Rightarrow y_t' = -\frac{y^2\cos t + \sin t}{2y\sin t}$$ ……………….4 分

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = -\frac{y^2\cos t + \sin t}{2y\sin t[2\cos(2t) - \cos t]}.$$ ……………..7 分

4. 证明：$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_{\pi}^{2\pi} -\sin^2 x d\frac{1}{x}$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$ ……………….3 分

$$= \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx \overset{令u=2x}{=\!=\!=} \int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin u}{u}du$$

$$= \int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$ ……………….7 分

三、 由题意知：$\sqrt{y^2 - 1} = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx$ …………..2 分

两边对 x 求导，得 $\frac{yy'}{\sqrt{y^2 - 1}} = \sqrt{1 + y'^2}$

整理，得 $y' = \sqrt{y^2 - 1}$ …………..4 分

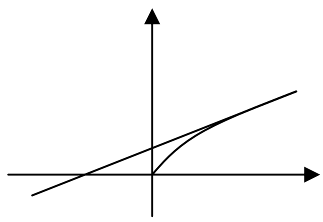
分离变量并积分，得 $y + \sqrt{y^2 - 1} = Ce^x$ …………..6 分

由初条件 $y(0) = 1$，得 $C = 1$，得 $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x$

$y - \sqrt{y^2 - 1} = e^{-x}$，$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$ …………8 分

四、 设切点为$(x_0, \sqrt{x_0})$，则切线方程为：

$$y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$$



将点(-1,0)代入切线方程，得 $x_0 = 1$

所以切点为(1,1)，切线方程为：$y = \frac{x+1}{2}.$ …………..2 分

(1) $S_D=\int_0^1[y^2-(2y-1)]dy=\dfrac{1}{3}$ …………….5 分

(2) $V_x=\pi\int_{-1}^1(\dfrac{x+1}{2})^2dx-\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx=\dfrac{\pi}{6}.$ …………….8 分

五、 证明：记 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt$，则

$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+e^{-\cos^2 x}\sin x.$$ ………….2 分

$\because\sqrt{1+x^4}\geq 1$且仅当$x=0$时等号成立。又

$0\leq e^{-\cos^2 x}\leq 1,\quad -1\leq\sin x\leq 1,\quad \therefore -1\leq e^{-\cos^2 x}\sin x\leq 1$，

则 $F'(x)>0,$即$F(x)$严格单增，又 …………..4 分

$$F(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0,\quad F(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}dt>0$$

由零点定理知$F(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内至少有一实根，又$F(x)$严格

单增，从而$F(x)$有且仅有一个实根。 …………...7 分

六、 设任意t 时刻桶内溶液的含盐量为$m(t)$.

考虑时间间隔$[t,t+dt]$内含盐量的改变量，得

$$\begin{cases} dm=20\times 5dt-\dfrac{m(t)}{500}\times 5dt \\ m(0)=5000g \end{cases}$$ 化简，得 ………4 分

$$\begin{cases} dm=(100-\dfrac{m}{100})dt \\ m(0)=10g \end{cases}$$，解方程得 $m(t)=10^4+Ce^{-\frac{t}{100}}$，

由初条件得 $C=-5000$ ………...6 分

任意t 时刻桶内溶液的含盐量为:

$$m(t)=10^4-5000e^{-\frac{t}{100}}.$$ ………..8 分

七、　证明：由积分中值定理知：$\exists\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$f(1)=\frac{2}{e}e^{\eta}f(\eta)\times\frac{1}{2}$，即 $ef(1)=e^{\eta}f(\eta)$，　…………2 分

构造辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$

则$F(x)$在$[\eta,1]$上满足 Rolla 定理的条件，知

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，又　…………4 分

$F'(x)=e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)$，有$F'(\xi)=e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.　…………6 分