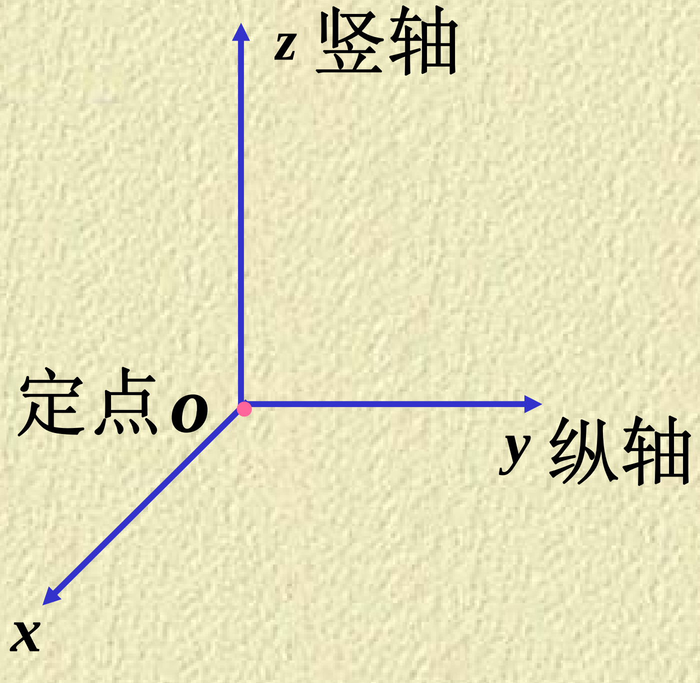
第6章　向量代数与空间解析几何

6.1　　空间直角坐标系

1.空间直角坐标系

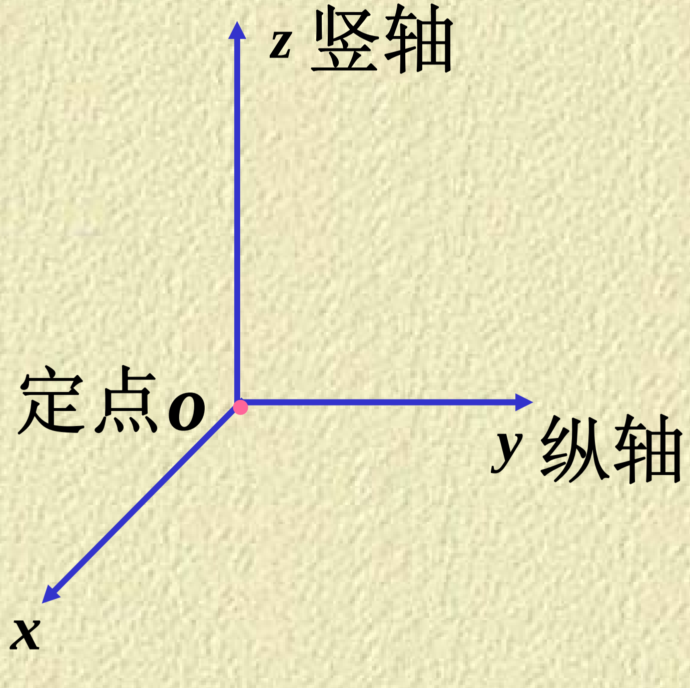
过空间一个定点O，作三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴，就构成了**空间直角坐标系**.



点O叫做坐标原点，三条数轴分别叫做 x轴、y 轴、z轴.

三个坐标轴的正方向符合右手系.

即以右手握住z轴，当右手的四个手指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向y轴正向时，大拇指的指向就是z轴的正向.



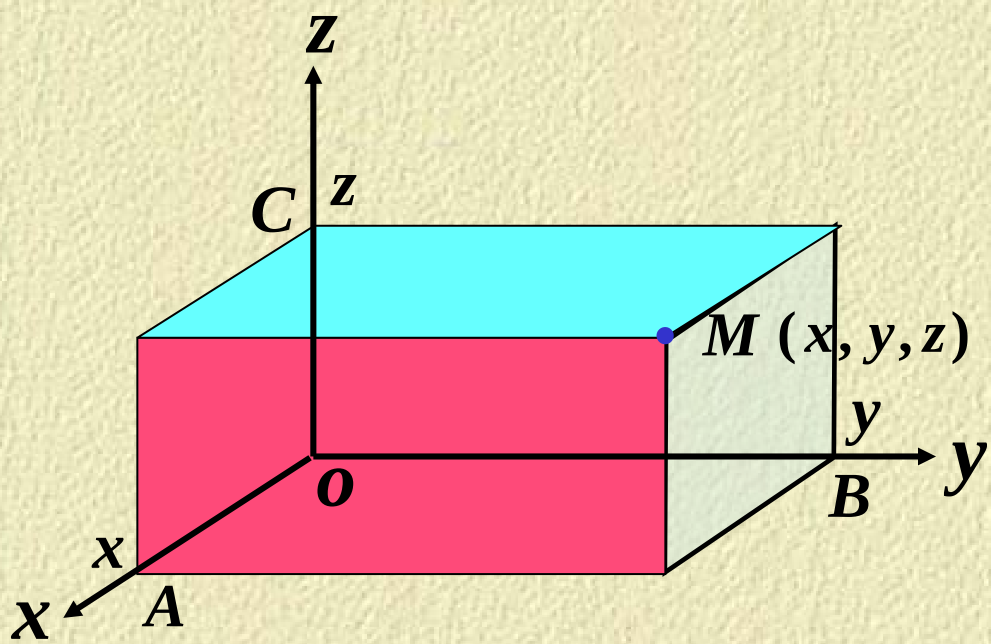
空间直角坐标系

设 M 是空间中的一个点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，与三个坐标轴分别交于 A、B、C 三点，设这三点在三个坐标轴上的坐标分别是 x、y、z，则称

有序数组 (x,y,z)

为点 M 的坐标.

横坐标　纵坐标　竖坐标

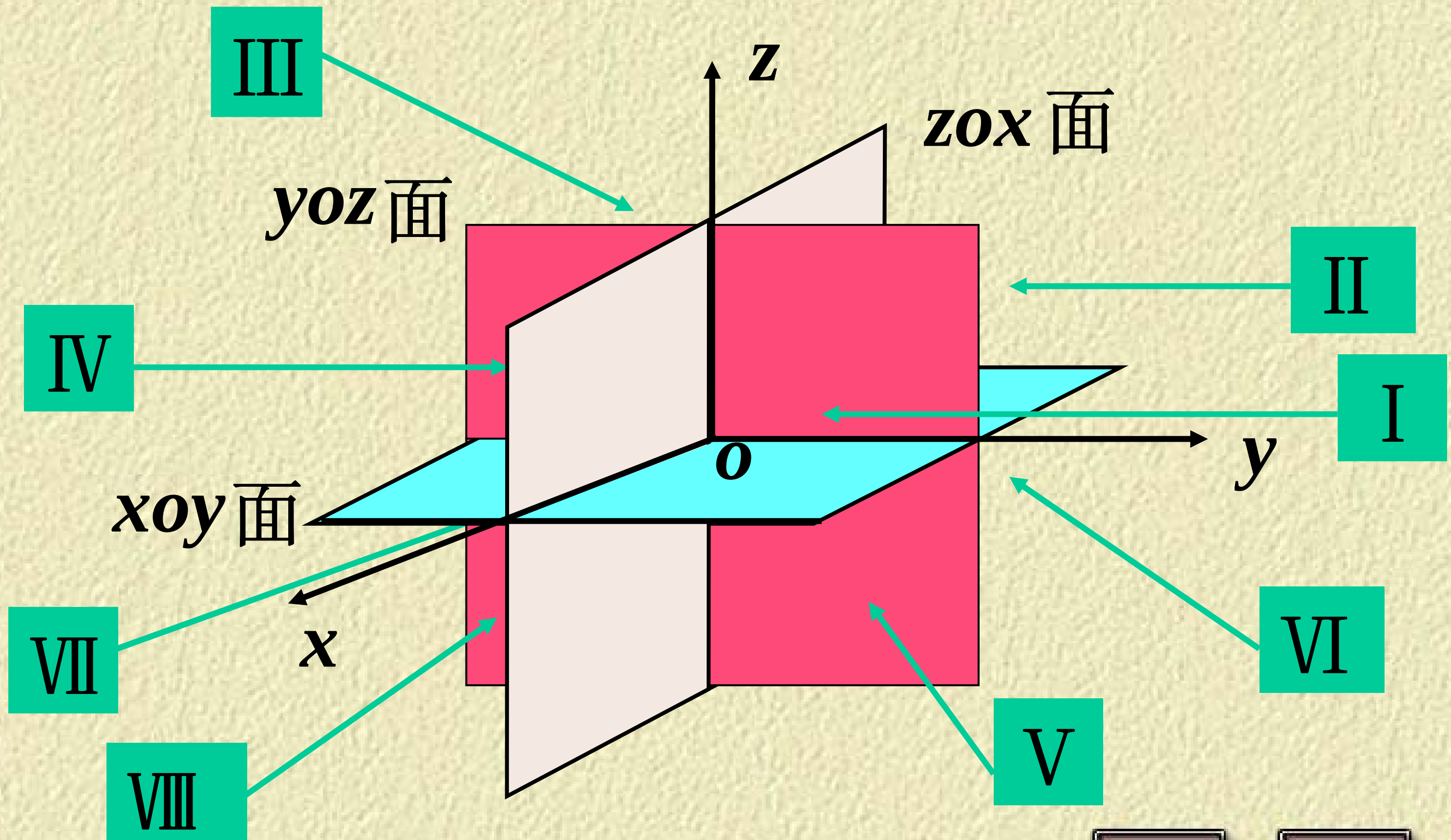


空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x,y,z)

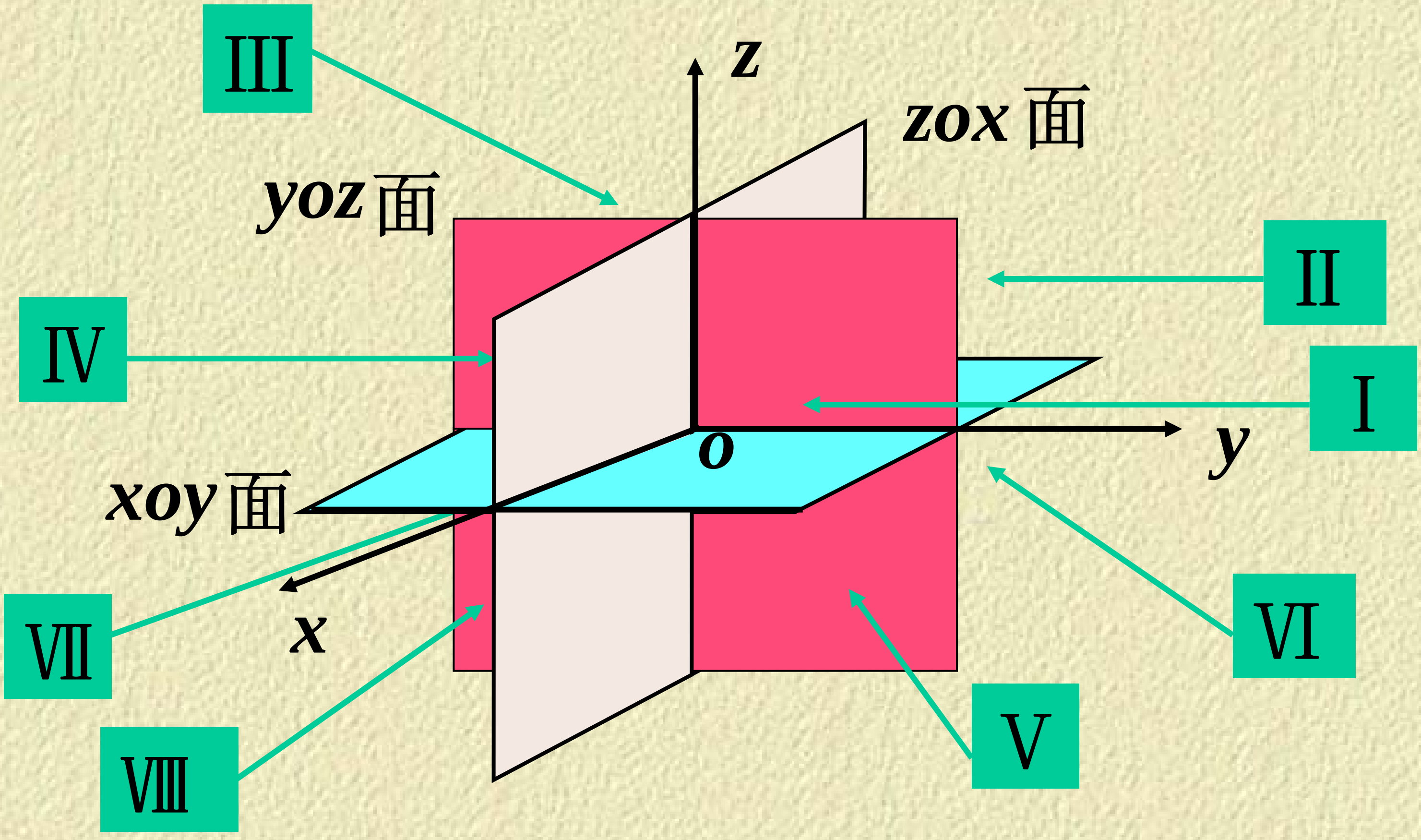
上页 下页 返回

每两条坐标轴所确定的平面叫做**坐标面**.

三个坐标面所分成的每个部分叫做一个**卦限**.



上页 下页 返回



每个卦限中点的坐标符号为

Ⅰ $(+,+,+)$, Ⅱ $(-,+,+)$, Ⅲ $(-,-,+)$, Ⅳ $(+,-,+)$

Ⅴ $(+,+,-)$, Ⅵ $(-,+,-)$, Ⅶ $(-,-,-)$, Ⅷ $(+,-,-)$

上页 下页 返回

特殊点的坐标:

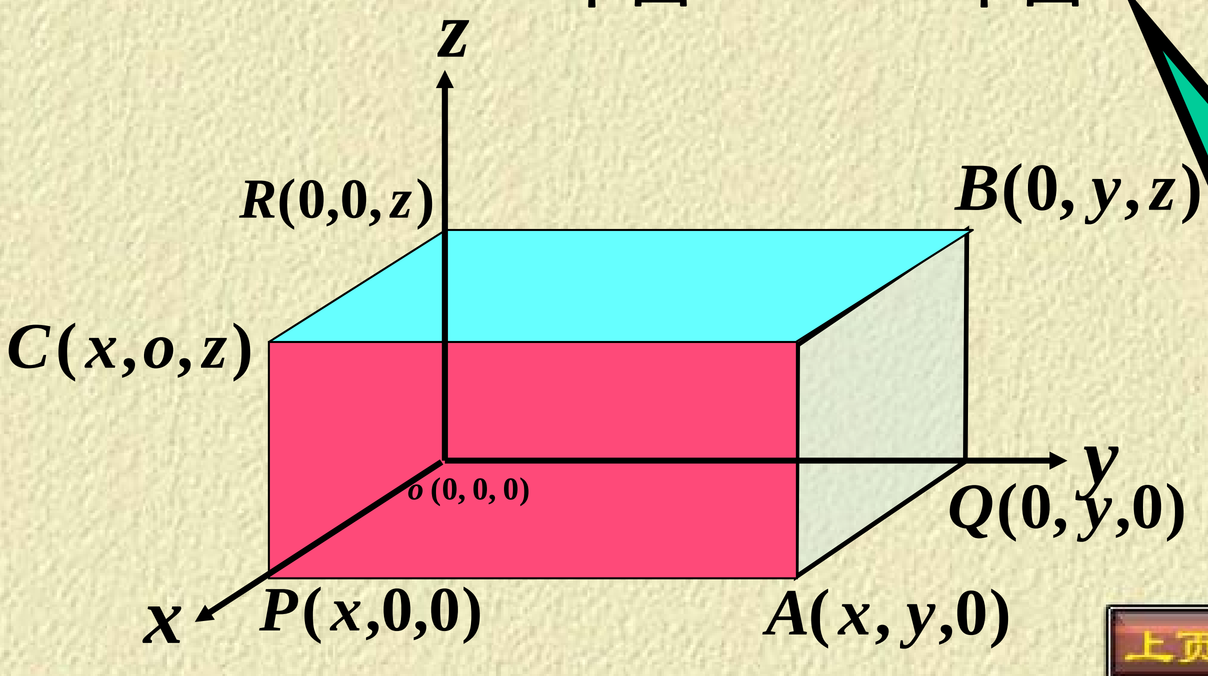
原点 $O(0,0,0)$,

坐标轴上的点 $P(x,0,0)$, $Q(0,y,0)$, $R(0,0,z)$

x 轴 y 轴 z 轴

坐标面上的点 $A(x,y,0)$, $B(0,y,z)$, $C(x,0,z)$

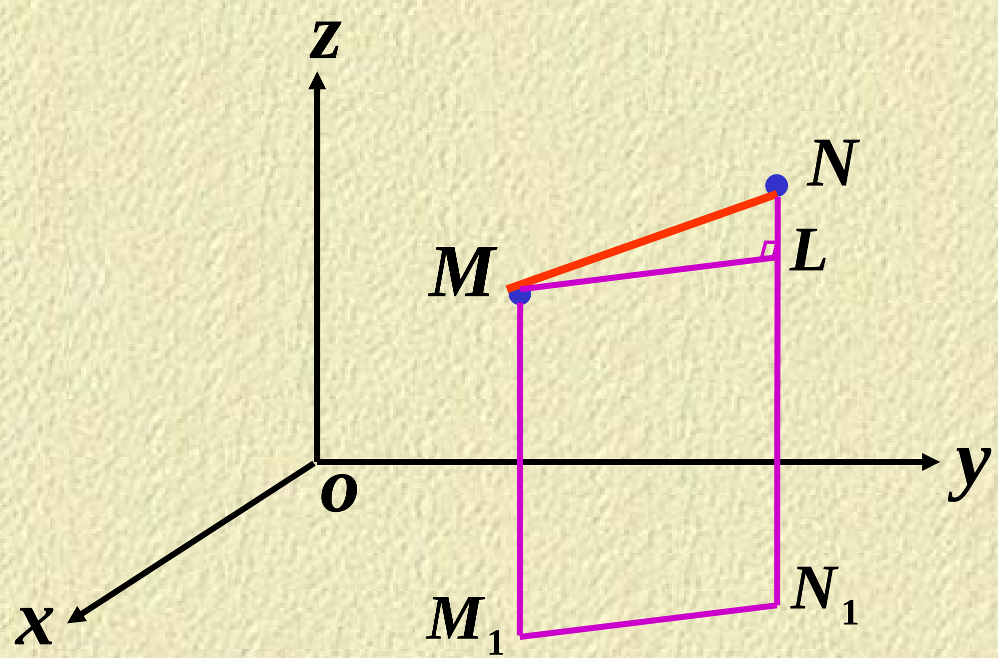
xoy 平面 yoz 平面 xoz 平面



特殊点的坐标特征，在解题时要注意利用，否则，会因缺已知条件解不出题。

2. 空间两点间的距离

设 $M(x_1,y_1,z_1)$、$N(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点



$$d=|MN|=?$$

$$d^2=|ML|^2+|LN|^2$$

$$|ML|=|M_1N_1|$$

$$M_1(x_1,y_1,0)$$

$$N_1(x_2,y_2,0)$$

$$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

空间两点间距离公式

特殊地：点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

与平面解析几何中两点间的距离公式相比较，空间中两点间的距离公式中只是增加了$(z_2 - z_1)^2$一项.

此外，空间直角坐标系平移后点的新旧坐标之间的关系式与平面情形相比较只是增加了一项, 即

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \\ z = c + z' \end{cases}$$

其中(a,b,c)是新原点O'的坐标，(x',y',z')是点在新坐标系中的坐标，(x,y,z)是点在旧坐标系中的坐标.

例 1 求证以$M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 $|M_1M_2|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2 = 14,$

$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2 = 6,$

$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2 = 6,$

$\therefore |M_2M_3| = |M_3M_1|,$ 原结论成立.

例 2 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上, 设P点坐标为 $(x,0,0)$,

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$$\because |PP_1| = 2|PP_2|, \quad \therefore \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$\Rightarrow x = \pm 1$, 所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

小结

空间直角坐标系（符合右手系）

（坐标轴、坐标面、卦限）

特殊点的坐标

（坐标轴上的点、坐标面上的点）

空间两点间距离公式

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

上页 下页 返回

作业：

P3： 2. 3. 6.