9.6 高斯公式与散度

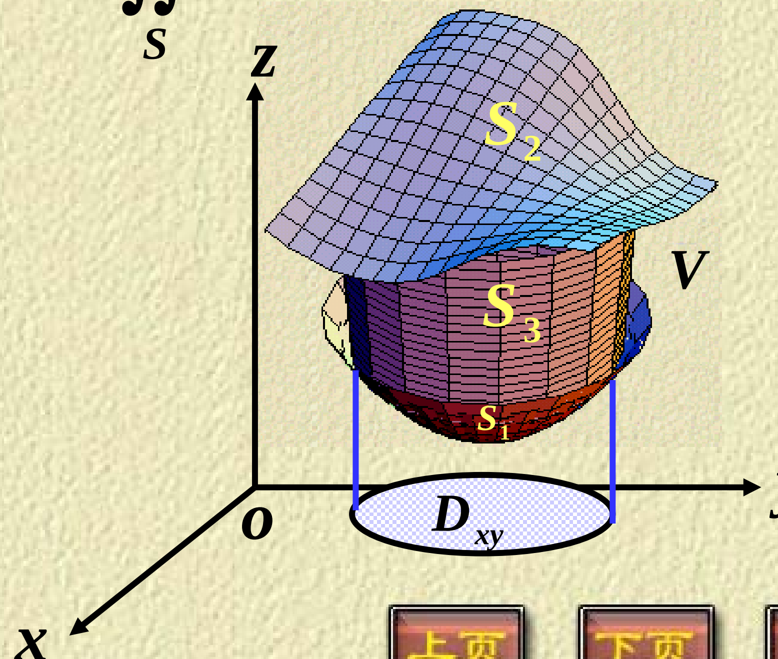
格林公式建立了平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，而高斯(*Gauss*)公式建立了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系。

1. 高斯（Gauss）公式

定理 1　设函数 $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ 在空间区域 V 上有一阶连续偏导数，V 的边界曲面 S 是分片光滑的曲面，则有

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint\limits_S Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$$

其中曲面积分是对 S 的外侧积分.



跳过证明

证明:（凸区域）设闭区域 V 在 xy 坐标上的投影区域为 D_{xy}，把 S 分成 S_1, S_2, S_3 三部分根据三重积分的计算法，有

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z}dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy\int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)}\frac{\partial Z}{\partial z}dz$$

$$= \iint_{D_{xy}}[Z(x,y,z_2(x,y)) - Z(x,y,z_1(x,y))]dxdy$$

根据曲面积分计算法，有

$$\iint_{S_1} Z(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} Z(x,y,z_1(x,y))dxdy$$

$$\iint_{S_2} Z(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} Z(x,y,z_2(x,y))dxdy$$

因为S_3上任意一块曲面在 xy 平面上的投影为零，所以直接根据对坐标的曲面积分的定义可知

$$\iint_{S_3} Z(x,y,z)dxdy = 0$$

把以上三式相加，得

$$\oiint_{S} Z(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} [Z(x,y,z_2(x,y)) - Z(x,y,z_1(x,y))]dxdy$$

比较以上两式，得

上页 下页 返回

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dxdydz = \oiint_S Z(x, y, z) dxdy$$

类似地，可得

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dxdydz = \oiint_S Y(x, y, z) dzdx$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dxdydz = \oiint_S X(x, y, z) dydz$$

三式相加得 $\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz$

$$= \oiint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

由两类曲面积分之间的关系知

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv$$

$$=\oiint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

$$=\oiint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)dS.$$

这里 S 是 V 的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 上点(x,y,z)处的法向量的方向余弦. 方向与 S 的外侧一致.

Gauss公式的实质

表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

上页 下页 返回

使用Guass公式时应注意:

1. 分清 X,Y,Z；且 X,Y,Z 分别对 x,y,z 求偏导;

2. 是否满足高斯公式的条件:

函数 X，Y，Z 在空间区域 V 上有一阶连续偏导数，V 的边界曲面 S 为逐片光滑的封闭曲面。

3. S 是取闭曲面的外侧.

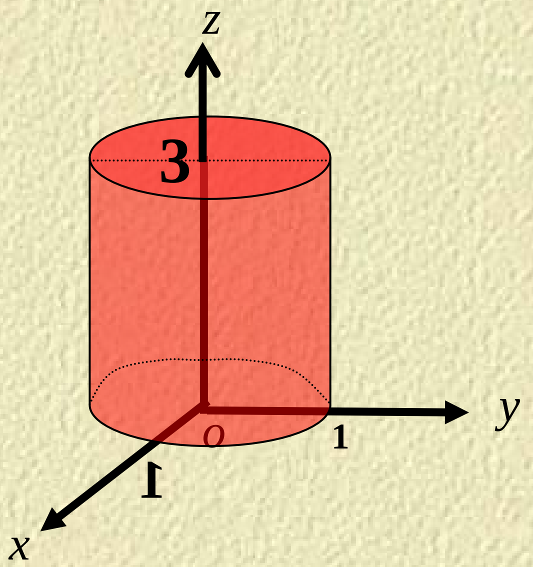
高斯公式中的曲面是一个封闭的曲面。如果曲面积分中的积分曲面不是封闭曲面，有时可以添加辅助曲面（往往是平面），使得积分曲面变为封闭曲面，然后用高斯公式。

上页 下页 返回

高斯公式简单的应用1

例1（书中例 1）计算曲面积分

$$\oiint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$



其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的内侧.

解 $X=(y-z)x, \quad Y=0, \quad Z=x-y,$

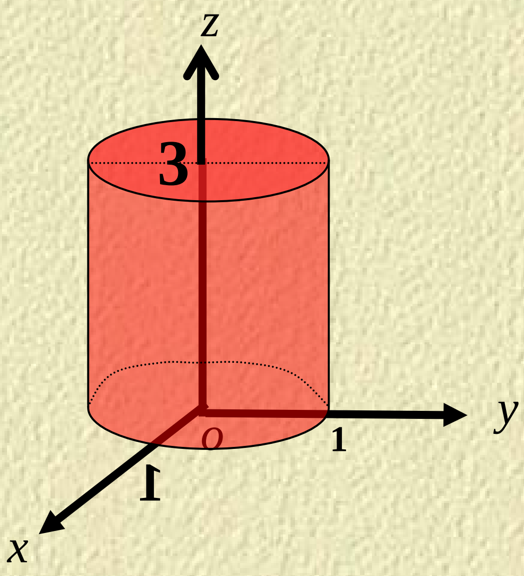
$$\frac{\partial X}{\partial x}=y-z, \quad \frac{\partial Y}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial Z}{\partial z}=0,$$

高斯公式的应用

例1（书中例 1）计算曲面积分

$$\oiint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的内侧.



$$\text{原式}=-\iiint_V (y-z)dxdydz \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_V zdxdydz$$

$$\xlongequal{\text{轴截面法}} \int_0^3 zdz\iint_{D_z} dxdy = \pi\int_0^3 zdz = \frac{9\pi}{2}.$$

上页 下页 返回

例 2(书中例 2)　计算曲面积分

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds$$

，其中 S 为

锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面

$z=0$ 及 $z=h(h>0)$

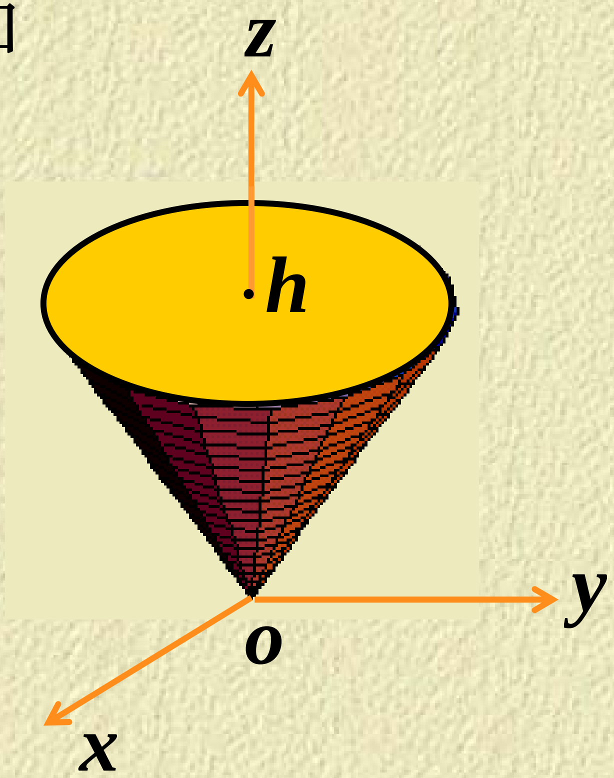
之间的部分的下侧，

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

是 S 在 (x,y,z) 处

的法向量 $\vec{n}$ 的方向余弦，

$\vec{n}$ 与 S 的侧一致.



解　曲面S不是封闭曲面，为利用高斯公式

补充 S_1：$z = h \quad (x^2 + y^2 \le h^2)$　S_1取上侧，

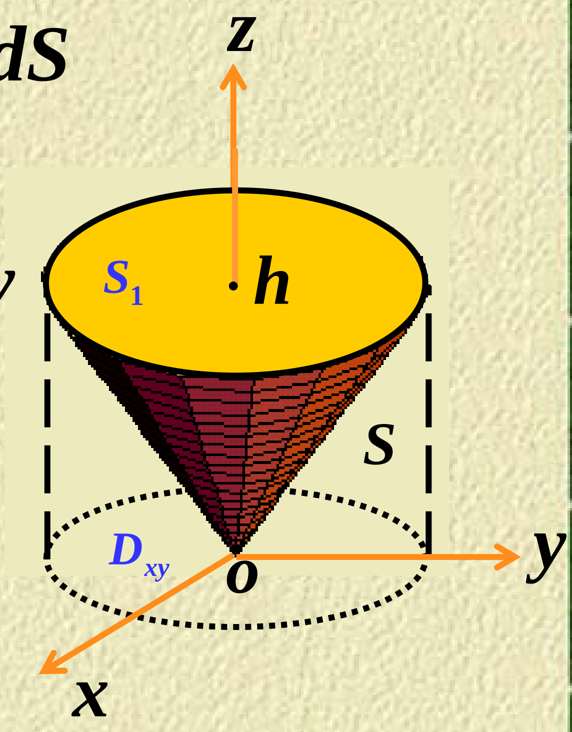
$S + S_1$构成封闭曲面，　$S + S_1$围成空间区域 V.

$$\iint\limits_{S+S_1}\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc\;\;(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$$

$$= 2\iiint\limits_V (x+y+z)dv \xlongequal{\text{由对称性}} 2\iiint\limits_V zdv$$

$$= 2\int_0^h zdz \iint\limits_{D_z} dxdy \qquad (\text{轴截面法}\quad)$$

$$= 2\int_0^h z\pi z^2 dz \;= \frac{1}{2}\pi h^4$$



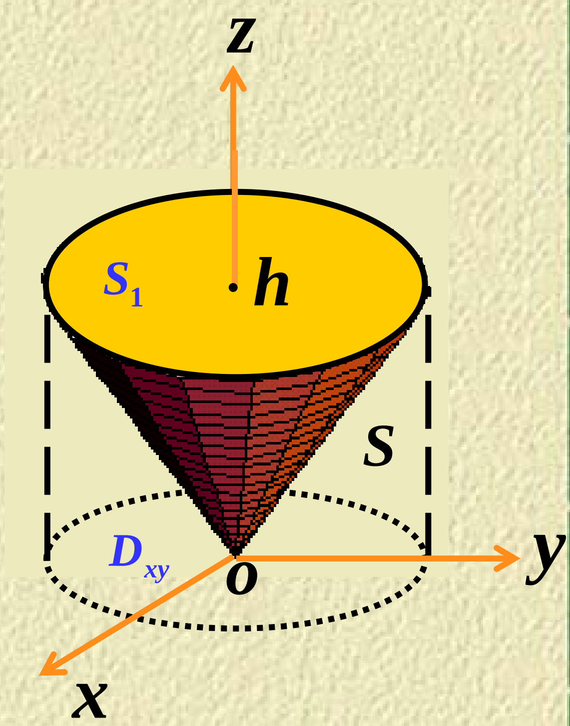
$$\because \iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_{S_1} z^2 dS = \iint_{D_{xy}} h^2 dxdy = \pi h^4.$$

故所求积分为

$$\iint_{S} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4.$$



例 3 计算 $I=\oiint\limits_S \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧。

解 因S是闭曲面，故可用高斯公式计算，而

$$X=\frac{x}{r^3},\quad Y=\frac{y}{r^3},\quad Z=\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

$$I=-\iiint\limits_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv=0$$

上面利用高斯公式的解法是不正确的，其原因是由于 X, Y, Z 及 $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ 在区域 V 内的原点处不存在，当然就更谈不上连续了，故不满足高斯公式条件，不能直接用高斯公式。

上页 下页 返回

例 3 计算 $I=\oiint\limits_{S}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧。

正确解法如下：

[法1] 利用变量轮换对称性，三个积分只需计算一个，然后再3倍即可。

$$I=3\oiint\limits_{S}\frac{zdxdy}{r^3}=\frac{3}{a^3}\oiint\limits_{S}zdxdy\xlongequal{\text{对称性}}\frac{6}{a^3}\oiint\limits_{S_{\text{上}}}zdxdy$$

$$=-\frac{6}{a^3}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\xlongequal{\text{极坐标变换}}-4\pi$$

上页 下页 返回

例 3 计算 $I=\oint\!\!\!\oint_S \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧。

[法 2]：由于 X,Y,Z 在原点处无定义，不满足高斯公式的条件，故不能直接用高斯公式求解。现设法转化被积函数的形式后再用高斯公式，由于曲面积分被积函数中的变量 x,y,z 满足曲面方程，故

上页 下页 返回

$$I=\oiint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^3}\oiint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$\underline{\underline{\text{利用高斯公式}}}\ \frac{1}{a^3}\left(-\iiint_V 3\,dv\right)$$

$$=\frac{1}{a^3}(-3)\cdot(\text{半径为 } a \text{ 的球的体积})$$

$$=\frac{1}{a^3}(-3)\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=-4\pi$$

修改例 3　1. 计算 $I=\oiint\limits_S \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，S 为包含原点的任意给定的封闭曲面的内侧。

解　由于曲面 S 包含原点，故不能直接用高斯公式求解

为了使用高斯公式，在 S 内做一个以原点为中心，充分小的数 ε 为半径的球面 S_1，且 S_1 取外侧，则 $S+S_1$ 构成封闭曲面，在 $S+S_1$ 围成的区域 V_1 上 X,Y,Z 满足高斯公式条件

$$\therefore\ I = \oiint_{S+S_1} - \oiint_{S_1}$$

$$= \oiint_{S+S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$$

$$- \oiint_{S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$$

由前面的讨论知:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \oiint_{S+S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy = 0$$

$$\oiint_{S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy = 4\pi$$

（S_1的方向与前面例 3 的S相反）

$$\therefore I = \oiint_{S+S_1} - \oiint_{S_1} = 0 - 4\pi = -4\pi$$

上页 下页 返回

修改例 3　2. 计算 $I=\oiint\limits_S \frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中 $r=\sqrt{x^2+4y^2+z^2}$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧。

解 由于曲面 S 包含原点，故不能直接用高斯公式求解

为了使用高斯公式，在 S 内做一个椭球面 S_1： $x^2+4y^2+z^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$ 为充分小的数），且 S_1 取外侧，则 $S+S_1$ 构成封闭曲面，在 $S+S_1$ 围成的区域 V_1 上 X,Y,Z 满足高斯公式条件

上页　下页　返回

$$\therefore\ I = \oiint_{S+S_1} - \oiint_{S_1}$$

$$= \oiint_{S+S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$$

$$- \oiint_{S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$$

则: $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$, $\quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{r^2 - 3\cdot 4y^2}{r^5}$$

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0}$$

$$\therefore \oiint_{S+S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy = 0$$

$$\oiint_{S_1} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_E 3\,dv = \frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon = 2\pi$$

$$\therefore I = \oiint_{S+S_1} - \oiint_{S_1} = 0 - 2\pi = -2\pi$$

上页 下页 返回

高斯公式的应用2

曲面 S 的体积可由曲面积分求出:

$$V=\frac{1}{3}\oiint_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{3}\oiint_{S}\{x,y,z\}\cdot\vec{n}^{0}dS$$

2. 高斯公式的物理意义----通量与散度

在介绍梯度时，我们介绍了数量场和向量场的概念，如果场中的物理量不随时间的变化而变化，只是位置的函数（可以是平面上的，也可以是空间上的），则称这个场为稳定场。

给定一个空间上的数量场，就相当于给定一个三元函数 $u = u(x, y, z)$，且假设它有连续的一阶偏导数，三个偏导数不同时为零；

给定一个空间上的向量场，就相当于给定一个向量函数

$$\vec{A} = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

即给定了三个三元函数 X，Y，Z，且假设它们有连续的一阶偏导数。

设稳定流动的不可压缩流体（假定密度为1）的速度场由

$$\vec{v}(x,y,z)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$$

给出，其中 X, Y, Z 具有一阶连续导数，有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\vec{n}^{\,0}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$$

则单位时间内流体经过 S 流向指定侧的流量 Φ 可用曲面积分来表示

上页 下页 返回

$$\Phi = \iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

$$= \iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)ds$$

$$= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}^0 ds = \iint_S v_{\vec{n}} ds = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

这种形式的曲面积分在其它向量场中也会碰到。

例如：在电位移向量为 $\vec{D}$ 的电场中，穿过曲面 S 的电通量为 $\Phi = \iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}$

又如：在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的磁场中，穿过曲面 S 的磁通量为 $\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

上页 下页 返回

定义　设给定一个空间上的向量场

$$\vec{A}=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$$

S 为向量场中的曲面，则称

$$\Phi=\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_S Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$$

为向量场 $\vec{A}$ 穿过曲面 S 指定一侧的通量.

在实际问题中，此通量为正、为负、为零都有一定的物理意义.

例如：在流速场 $\vec{v}$ 中，通量即流量

$$\Phi=\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$$

若 S 为封闭曲面，则穿过 S 外侧的流量

$$\Phi = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

即流出曲面 S 的流体量与流入 S 的流体量之差.

当 $\Phi > 0$ 时，则表示流出曲面 S 的流体量多于流入 S 的流体量，这表明 S 所围的区域 V 内必有产生流体的“源”（正源），它不断散发出流体;

当 $\Phi < 0$ 时，则表示流出曲面 S 的流体量少于流入 S 的流体量，这表明 S 所围的区域 V 内有漏掉流体的“洞”（负源），它不断吸收流体.

当 $\Phi=0$ 时，则表示流出曲面 S 的流体量与流入 S 的流体量相等，这时 S 所围的区域 V 内可能既没有正源，也没有负源；也可能既有正源，也有负源，当正源所散发出的流体与负源所吸收的流体达到平衡.

上页 下页 返回

为了简便起见，把高斯公式写为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv = \oiint_S \vec{v}_{\vec{n}}\,ds$$

以闭区域V的体积V除上式的两端，得

$$\frac{1}{V}\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv = \frac{1}{V}\oiint_S \vec{v}_{\vec{n}}\,ds$$

上式左端表示 V 内的源头在单位时间单位体积内所产生的流体质量的平均值。应用积分中值定理，

得 $$\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\Bigg|_{(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{V}\oiint_S \vec{v}_{\vec{n}}\,ds$$

令V缩向一点 $M(x,y,z)$，取极限，得

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \lim_{V\to M}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{v}_{\vec{n}}\,ds$$

设有向量场$\vec{v}(x,y,z)$，在场内作包围点M的闭曲面S, S包围的区域为V，记体积为V. 若当V收缩成点M时，

极限$\lim\limits_{V\to M}\dfrac{\displaystyle\oiint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}}{V}$存在，

则称此极限值为 $\vec{v}$在点M处的**散度**，记为$div\vec{v}$.

即
$$div\vec{v}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

高斯公式可写成 $\iiint_V div\,\vec{v}\,dv = \oiint_S \vec{v}_{\vec{n}}\,dS$

其中 S 是空间闭区域 V 的边界曲面，

$\vec{v}_{\vec{n}}$ 是向量 $\vec{v}$ 在曲面 S 指定侧法向量上的投影．

$$\vec{v}_{\vec{n}} = \vec{v}\cdot\vec{n}^0 = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$$

小结

1、高斯公式

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv=\oiint_S Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$$

2、高斯公式的实质

（1）应用的条件

（2）物理意义 $\iiint_V div\vec{v}dv=\oiint_S v_{\vec{n}}dS$

上页 下页 返回

历届研究生试题

第二类曲面积分

- 高斯公式
- 散度

上页 下页 返回

1.(87,10)　计算曲面积分

$$I=\iint_S x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

其中 S 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 y 轴

旋转一周所形成的曲面，它的法向量与 y 轴

正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

分析：本题所给第二类曲面积分直接化成二重积分显然很不方便，所以通常采用补面的方法．

上页　下页　返回

解：补平面 $S_1:\begin{cases} x^2+z^2\le 2 \\ y=3 \end{cases}$,其法线方向与

y轴正向相同．

设S_1和S所围成的区域为 Ω，由高斯公式得

$$\iint_S x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$=\oiint_{S_1+S} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$-\iint_{S_1} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} (8y + 1 - 4y - 4y) dv - \iint_{S_1} 2(1 - y^2) dzdx$$

$$= \iiint_{\Omega} dv + \iint_{x^2+z^2 \le 2} 16 dzdx$$

$$= \pi \int_1^3 (y - 1) dy + 16 \times 2\pi$$

$$= 2\pi + 32\pi = 34\pi$$

2.(88,5)设S为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$

解：由高斯公式知

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)dv \quad (\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1)$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{12}{5}\pi$$

注释：本题主要考察高斯公式.本题最容易出现的错误是把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$中的$x^2+y^2+z^2$用1代换，与曲面积分相混淆，望同学们特别注意.

上页 下页 返回

3.(90,8)求曲面积分 $I = \iint_S yzdzdx + 2dxdy$ 其中

S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

分析：本题是第二类面 积积分问题，但直接计算不方便，而曲面 S 又不是封闭曲面，此时一般都是采用补面后利 用高斯公式.

解：补 xoy 面上的平面 S_1 : $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$,其法线方向与 z 轴负向相同， S 与 S_1 围成的区域记为 Ω,

则 $I = \iint_S yzdzdx + 2dxdy$

上页 下页 返回

$$= \oiint_{S+S_1} yzdzdx + 2dxdy - \iint_{S_1} yzdzdx + 2dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} zdv + \iint_{x^2+y^2\le 4} 2dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr + 8\pi$$

$$= 4\pi + 8\pi = 12\pi$$

注释：本题主要考察第　二类曲面积分和高斯公式.本题在计算中出现的三　重积分 $\iiint_{\Omega} zdv$ 也可在直角坐标下利用先　二后一的方法计算　.

上页 下页 返回

4.(92,8)计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$

其中Σ为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧．

解：记Σ_1为平面$\begin{cases}x^2+z^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$的下侧，$\Omega$为$\Sigma_1$

和Σ所围成的区域，则由高 斯公式可知

原式

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$

上页 下页 返回

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dv + a \iint_{x^2+y^2\le a^2} y^2 dxdy$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} r^4 \sin\varphi dr + a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r^3 \sin^2\theta dr$$

$$= \frac{29}{20}\pi a^5$$

上页 下页 返回

二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} y^2 dxdy$ 还有一种简便算法：

$$\because \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} y^2 dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2 dxdy$$

$$\therefore \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (x^2+y^2) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{4}a^4$$

上页 下页 返回

5.(93,6)计算 $\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^2dxdy$，

其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与

$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体表面的外侧 .

解：由高斯公式得 $\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz + yzdzdx - z^2dxdy$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2z+z-2z)dv=\iiint\limits_{\Omega} zdv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cos\varphi\sin\varphi dr=\frac{\pi}{2}$$

其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

所围成的区域 .

6.(96,6)计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy$，

其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 \quad (0 \le z \le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角 .

解1：补平面 $S_1 : \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$ 的下侧，则

$$\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy$$

$$= \oiint_{S+S_1} (2x+z)dydz + zdxdy - \iint_{S_1} (2x+z)dydz + zdxdy$$

$$= -\iiint_\Omega (2+1)dv + \iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy \ (\Omega \text{为} S \text{和} S_1 \text{围成的区域})$$

$$= -3\int_0^1 \pi z dz + \pi = -\frac{\pi}{2}$$

上页 下页 返回

解2：直接计算

$$\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy = \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z-y^2}+z)(-dydz)$$

$$+\iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z-y^2}+z)dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$$

$$= -4\iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy$$

$$= -4\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \sqrt{z-y^2}dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr$$

$$= -4\times\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

7.(04,12)计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中Σ是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

解：取Σ_1为xoy平面上被圆$x^2+y^2=1$所围部分的下侧，记Ω为由Σ与Σ_1围成的空间闭区域，则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

上页 下页 返回

由高斯公式知 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z)dxdydz$$

$$= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2)rdz = 2\pi$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2<1} (-3)dxdy = 3\pi$$

因此 $I = 2\pi - 3\pi = -\pi$

8.(94,6)计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$,

其中S是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$及两平面 $z = R$, $z = -R\ (R > 0)$所围成立体表面的外侧 .

分析：S是包含原点的封闭曲面，由于被积函数

$$X(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad Z(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在原点处一阶偏导数不连续，故不能用高斯公式.

解：设S_1, S_2, S_3依次为S的上下底和圆柱面部分，

则$\iint\limits_{S_1} \dfrac{xdydz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint\limits_{S_2} \dfrac{xdydz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

记S_1, S_2在xoy面上的投影区域为D_{xy},则

$$\iint_{S_1+S_2} \frac{z^2 dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{R^2 dxdy}{x^2+y^2+R^2} - \iint_{D_{xy}} \frac{(-R)^2 dxdy}{x^2+y^2+R^2} = 0$$

又 $$\iint_{S_3} \frac{z^2 dxdy}{x^2+y^2+z^2} = 0$$

记S_3在yoz平面上的投影区域为D_{yz},则

上页 下页 返回

$$\iint_{S_3} \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{z^2+R^2} - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}dydz}{z^2+R^2}$$

$$= 2\iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{z^2+R^2}dydz$$

$$= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{dz}{z^2+R^2} = \frac{\pi^2}{2}R$$

$\therefore$ 原积分 $= \frac{\pi^2}{2}R$

上页 下页 返回

9.(98,7)计算 $\iint_{\Sigma} \dfrac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中

Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧,

a为大于零的常数 .

分析：本题有两种解法 ，一种是补面用高斯公式，另一种是直接计 算.若采用补面法，按常规应补 $z = 0$，但应特别注意在原点 (0,0,0) 处，被积函数分母为零 ，故这里还要作处理 .

解1：采用补面法，根据前 面分析不能直接补 $z = 0$. 由于下半球面 $Z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 上的点

上页 下页 返回

(x, y, z)应满足 $x^2+y^2+z^2=a^2$,则

$$\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy$$

补平面$S:\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le a^2 \end{cases}$,其法线与$z$轴正向相反，则

$$\text{原式}=\frac{1}{a}[\oiint_{\Sigma+S}axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$-\iint_{S}axdydz+(z+a)^2dxdy]$$

上页 下页 返回

$$= \frac{1}{a}\left[-\iiint_{\Omega} (3a + 2z)dv + \iint_{D} a^2 dxdy \right]$$

其中Ω为Σ和S围成的区域， D为xoy面上的圆域$x^2 + y^2 \le a^2$.于是

$$原式 = \frac{1}{a}\left[-2\pi a^4 - 2\iiint_{\Omega} zdv + \pi a^4 \right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[-\pi a^4 - 2\int_{-a}^{0} \pi (a^2 - z^2) zdz \right] = -\frac{\pi}{2} a^3$$

解2：直接分块计算：$\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{1}{a}\left[\iint_{\Sigma}axdydz+\iint_{\Sigma}(z+a)^2dxdy\right]$$

若用D_{xy}表示下半球面 Σ在xoy平面的投影域

$x^2+y^2\le a^2$,用D_{yz}表示下半球面 Σ在yoz平面的

投影域$\begin{cases}y^2+z^2\le a^2\\ z\le 0\end{cases}$,则

$$\iint_{\Sigma}axdydz=-2a\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}dydz$$

$$= -2a\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = -\frac{2}{3}\pi a^4$$

$$\iint_{\Sigma} (z + a)^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} \left[a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}\right]^2 dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2) r dr = \frac{1}{6}\pi a^4$$

则　原式 $= \dfrac{1}{a}\left[-\dfrac{2}{3}\pi a^4 + \dfrac{1}{6}\pi a^4\right] = -\dfrac{\pi}{2} a^3$

注释：本题按常规应补 *xoy*面上的圆，然后用高斯 公式，但本题由于原点在要补 的圆域上，而在原点处 被积函数分母为零，故本题先将 被积函数中的分母用球 面方程代入，再补*xoy*面的圆域，使问题得到 解决，望特别注意．

上页　下页　返回

11.(89,3) 向量场

$$u(x,y,z)=xy^2\vec{i}+ye^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$$

在点 $P(1,1,0)$处的散度 $divu=$ ______

解： 设 $u=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$

由散度计算公式

$$divu=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$divu\big|_P=\left(y^2+e^z+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\bigg|_{(1,1,0)}$$

$=1+1=2$

12.(93,3)设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则

$div(gradu)=$ ____

解： $gradu=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

$$div(gradu)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\because u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

由对称性知 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

故 $$div(gradu)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

13.(01,3)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$div(gradr)\big|_{(1,-2,2)}=\underline{\qquad\qquad}.$$

解： $$gradr=\left\{\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right\}$$

$$div(gradr)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\left.\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right|_{(1,-2,2)} = \left.\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,-2,2)} = \frac{8}{27}$$

$$\left.\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right|_{(1,-2,2)} = \left.\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,-2,2)} = \frac{5}{27}$$

$$\left.\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right|_{(1,-2,2)} = \left.\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,-2,2)} = \frac{5}{27}$$

$$div(gradr)\Big|_{(1,-2,2)} = \frac{8}{27}+\frac{5}{27}+\frac{5}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

上页 下页 返回

作业：

P209： 1(2)(4)(6)(7). 2(2). 3(2)(3).

自学： 第9节

P226： 2至10.(共9题)