习题 1.5(P57)

1. 下列函数在指定的变化过程中哪些是无穷小量，哪些是无穷大量？

(1). $\dfrac{x-2}{x}\quad (x\to 0)$　　(2). $\ln x\quad (x\to 0^{+})$　　(3). $e^{\frac{1}{x}}\quad (x\to 0^{+})$

(4). $e^{\frac{1}{x}}\quad (x\to 0^{-})$　　(5). $1-e^{\frac{1}{x^2}}\quad (x\to \infty)$　　(6). $\tan x\ (x\to -\dfrac{\pi}{2})$

答：(4)、(5)为无穷小量；(1)、(2)、(3)、(6)为无穷大量.

2. 下列函数在 x 的什么趋势之下为无穷小量，什么趋势之下为无穷大量？

(1). $\dfrac{x+1}{x^3-1}$　　(2). $\sqrt{3x-2}$　　(3). $\dfrac{x^2-1}{x-2}$

(4). e^{-x}　　(5). $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\quad (0\le x\le 2\pi)$

答：无穷小量：(1). $x\to -1$ ， $x\to \infty$　(2). $x\to \dfrac{2}{3}^{+}$　(3). $x\to 1$ 或 $x\to -1$

(4). $x\to +\infty$　(5). $x\to 0$ 或 $x\to 2\pi$

无穷大量：(1). $x\to 1$　(2). $x\to +\infty$　(3). $x\to 2$

(4). $x\to -\infty$　(5). $x\to \pi$

3. 下列各题中的无穷小量是等价无穷小、同阶无穷小、还是高阶无穷小？

(1). $\sqrt{1-x}-1$ 与 $x\quad (x\to 0)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x}{2}}{x}=-\dfrac{1}{2}$，故当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1-x}-1$ 与 x 为同阶无穷小.

(2). $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}\quad (x\to \infty)$

解：
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{|x|}=0$$

故当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{x^2}$ 是 $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$ 的高阶无穷小.

(3). $\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}\quad (x\to 1)$

解： $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)\cdot(1+\sqrt{x})}{(1+x)\cdot(1-x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+\sqrt{x})}{(1+x)}=1$

故当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小.

(4). $\arcsin x$ 与 x $(x\to0)$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{令t=\arcsin x}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

故当 $x\to0$ 时 $\arcsin x$ 与 x 是等价无穷小.

(5). $\arctan x$ 与 x $(x\to0)$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}\overset{令t=\arctan x}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\tan t}=1$

故当 $x\to0$ 时 $\arctan x$ 与 x 是等价无穷小

(6). $\sin^p x$ 与 x $(p>0)$ $(x\to0)$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^p x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sin^{p-1}x=\begin{cases}0 & p>1\\ 1 & p=1\\ \infty & 0<p<1\end{cases}$

故当 $x\to0$ 时, $p>1$ 时 $\sin^p x$ 是 x 的高阶无穷小； $p=1$ 时 $\sin^p x$ 与 x 是等价无穷小；

$0<p<1$ 时 x 是 $\sin^p x$ 的高阶无穷小.

(7). $x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x^2 $(x\to0)$

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x}}{x^2}=1+\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1+0=1$

故当 $x\to0$ 时， $x^2+x^3\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x^2 是等价无穷小.

(8). $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 与 $\sqrt[8]{x}$ $(x\to0^+)$

解法 1： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^{\frac{1}{4}}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}}=0$

解法 2：$0 \le \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x}} \le \dfrac{\sqrt{2\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x}} \le \dfrac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}} = 2\sqrt[8]{x} \quad x \in (0,1)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[8]{x} = 0$ ，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[8]{x}} = 0$

故当 $x \to 0^+$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 是 $\sqrt[8]{x}$ 的高阶无穷小.

4. 当 $x \to 0$ 时，试确定下列无穷小量的阶.

(1). $\sqrt{x} + \sin x$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x}} = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}) = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{x}{\sqrt{x}}) = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 1$

故 $\sqrt{x} + \sin x$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(2). $\sqrt{x} + x + 3x^2$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+x+3x^2}{\sqrt{x}} = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}) = 1$

故 $\sqrt{x} + x + 3x^2$ 为 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

(3). $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x^{\frac{1}{4}}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1$

故 $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 为 $\dfrac{1}{8}$ 阶无穷小.

(4). $x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{3}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to 0} (x^{\frac{5}{12}} + 1) = 1$

故 $x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{3}}$ 为 $\dfrac{1}{3}$ 阶无穷小.

(5). $\tan x-\sin x$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x^2/2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

故 $\tan x-\sin x$ 为 3 阶无穷小.

(6). $\sqrt[3]{\cos x}-1$

解法 1：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2/2}{x^2(\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1)}=-\frac{1}{6}$$

解法 2：利用等价无穷小代换：$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}\quad(x\to0)$

$$\sqrt[3]{\cos x}-1=\sqrt[3]{1+(\cos x-1)}-1\sim\frac{1}{3}(\cos x-1)\sim\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{1}{6}x^2\quad(x\to0)$$

故 $\sqrt[3]{\cos x}-1$ 为 2 阶无穷小.

(7). $\sqrt{1+\tan^2 x}-1$

解法 1：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x}{x^2(\sqrt{1+\tan^2 x}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+\tan^2 x}+1)}=\frac{1}{2}$$

解法 2：$\sqrt{1+\tan^2 x}-1\sim\dfrac{1}{2}\tan^2 x\sim\dfrac{1}{2}x^2\quad(x\to0)$

故 $\sqrt{1+\tan^2 x}-1$ 为 2 阶无穷小.

(8). $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\quad(x\to0^+)$

解法 1：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$\overset{\text{同(5)}}{=\!=}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

解法 2：$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=(\sqrt{1+\tan x}-1)-(\sqrt{1+\sin x}-1)$

$$\sim \frac{1}{2}(\tan x - \sin x) = \frac{1}{2}\tan x(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{4}$$

故 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$ 为 3 阶无穷小.

5. 利用等价无穷小的替换性质，求下列极限.

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{5x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

(2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\tan x)^m}$ $(m, n\text{为正整数})$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\tan x)^m} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0}x^{n-m} = \begin{cases} 0 & n>m \\ 1 & n=m \\ \infty & n<m \end{cases}$

(3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{(\sin x)^2}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{(\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(mx)^2/2}{x^2} = \dfrac{m^2}{2}$

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \cdot x^2/2}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

(5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{x\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{x\sin x(\sqrt{1+\tan^2 x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\cdot x(\sqrt{1+\tan^2 x}+1)} = \dfrac{1}{2}$

或 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{x\sin x} \xlongequal{\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan^2 x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x} = \dfrac{1}{2}$

(6). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{6x^3+4\sin^2 x}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{6x^3+4\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-2\sin^2 x)}{6x^3+4\sin^2 x}$$

$$\xlongequal[\text{同除}x^2]{\text{分子分母}}\frac{5-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}{6\lim\limits_{x\to 0}x+4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{5-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}}{6\lim\limits_{x\to 0}x+4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}}=\frac{3}{4}$$

(7). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$

解： 见教材 P72 例 10

（8）. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(-x^2/2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=-\frac{1}{4}$$