2007-2008 学年第二学期期中试题(B 卷)参考解答及评分标准

2008 年 4 月 18 日

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ or $\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\}$；

出错及应注意的问题：

(1)未将所求向量单位化（审题不严）

(2)得出错误答案 $\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ 或 $\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\}$（有的同学缺乏下述概念：单位向量各坐标表示向量与各坐标轴正向的夹角余弦。由题意 $\cos\gamma>0$，据此把 $\pm\{1,1,1\}\times\{0,1,0\}$ 单位化后从中确定向量 $\vec{b}$）

2. $2x^2+y^2+2z^2=8,\quad -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ or $\{-1,1,1\}$ or $\{-4,4,4\}$；

3. $\frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{i}-4\vec{j})$ or $\{\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\}$；

出错及应注意的问题：（该题出错率很高）

(1) 明明函数 $f(x,y)$ 是二元函数，而居然有不少同学求出的向量是三个坐标.

晕！！！

(2) 很多同学求出的是 $\boldsymbol{grad} f(1,-2)$ 的单位向量 $\{-\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\}$(未理解梯度的概念：梯度的方向是函数值增加最快的方向，而函数值减小最快的方向是梯度的负方向).

4. $\frac{3}{5}$， $(\frac{418}{25},\frac{524}{25},\frac{131}{5})$

出错及应注意的问题：

(1) 很多同学算错交点坐标(粗心！)

5. $dx+2dy$

出错及应注意的问题：

(1) 有的同学得出的答案是 $-dx-2dy$ （估计是用隐函数求导法 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$ 、$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$ 时，使用公式时，漏掉了负号)

(2) 有的同学得出的答案是 3 （全微分概念不清，估计求的是 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ ）.

6. $\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$

出错及应注意的问题：

(1) 较多同学确定积分上下限出错（没有掌握二重积分如何化为二次积分）
(2) 部分同学结果未错，但形式复杂化了（按此计算积分，计算量多大啊！)，如：

$$\int_{-1}^{0}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx+\int_{0}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$$

$$\int_{-1}^{1}dy\int_{y^2}^{1}f(x,y)dx+\int_{-1}^{1}dy\int_{1}^{y+2}f(x,y)dx+\int_{1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)dx$$

二、(10 分)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+e^{x-y}f'_2 \quad \text{......................................} \ 3\text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf'_1-e^{x-y}f'_2 \quad \text{......................................} \ 6\text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1-e^{x-y}f'_2+xyf''_{11}+(x-y)e^{x-y}f''_{12}-e^{2(x-y)}f''_{22} \text{.....................} 10\text{ 分}$$

出错及应注意的问题：

(1) 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 时， f'_2 对 y 求导时，应该为 $f''_{21}x+f''_{22}\cdot(-e^{x-y})$，但有同学很粗心，算为 $f''_{21}y+f''_{22}\cdot(-e^{x-y})$；

(2) 不利用题中给出的条件“ f 有二阶连续偏导数” 对结果中的 f''_{12} 与 f''_{21} 合并;

(3) 未写出求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的过程，而是直接给出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 的结果（非填空题，一定要写过程，否则无法给出过程分，且易给人抄袭之嫌）

三、（12 分）

$$\begin{cases}2x-\dfrac{dz}{dx}=0\\3+2\dfrac{dy}{dx}=0\end{cases}$$ 将点 M 代入得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{dz}{dx}=2$

$\vec{T}=\{1,-\dfrac{3}{2},2\}$ ………………………………… 4 分

π：$(x-1)-\dfrac{3}{2}(y+2)+2(z-1)=0$，

即 $2x-3y+4z=12$ …………………………… 5 分

$\vec{s}=\{2,1,-1\}\times\{1,-1,1\}=\{0,-3,-3\}$ …………………………… 9 分

$(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},0)$ 是 L 上一点，L 的标准方程为

$$\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{2}{3}}{1}=\frac{z}{1}$$ ………………………10 分

$\sin\varphi=\dfrac{|\vec{T}\cdot\vec{s}|}{|\vec{T}||\vec{s}|}=\dfrac{1}{\sqrt{58}}$ $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{58}}$ ………………12 分

注：曲线 Γ 的切向量还可以这样求：$\vec{T}=\{2,0,-1\}\times\{3,2,0\}=\{2,-3,4\}$；

直线 L 上的点也有无穷多种选取，比如 $\left(\dfrac{1}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$、$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1\right)$、$\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

等等，因而直线方程不唯一.

出错及应注意的问题：

(1) 求切向量时，套用自造的公式：$\vec{T}=\left\{1,\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}\right\}=\left\{1,2,-\dfrac{3}{2}\right\}$；或由曲线 Γ 的方程推出 $z=\dfrac{(2y+1)^2}{9}$，$\vec{T}=\left\{1,\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dz}{dy}\right\}=\left\{1,2,-\dfrac{4}{3}\right\}$；$\vec{T}=\left\{\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dz}{dy},-1\right\}$.

(2) 计算直线 L 的方向向量时 $\vec{s}=\{2,1,-1\}\times\{1,-1,1\}$ 出错（叉积计算不过关）.

(3) L 上的点选取有误，比如：选 $\left(\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{3}\right)$，更有甚者，误将曲线 Γ 的点 M 当作直线 L 的点（审题不严）.

四、（10 分） $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$ ， $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{z+1}$ ……………….3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-ze^{-y^2}}{z+1}$ ……………….6 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}e^{-x^2}(z+1)-ze^{-x^2}\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}=\frac{-ze^{-x^2-y^2}}{(z+1)^3}$$ ……..……………….10 分

注：先化简 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ze^{-x^2}}{z+1}=e^{-x^2}(1-\frac{1}{z+1})$ 再求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 较为简单：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2}\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}=\frac{-ze^{-x^2-y^2}}{(z+1)^3}$$

出错及应注意的问题：

(1) 用隐函数求导法 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$ 求 F'_x 及 F'_y 时出错： $F'_x=2xe^{-x^2}$ ，

$F'_y=-2ye^{-y^2}$ （积分上限函数的求导不过关）；

(2) 方程两端对 x 求导时出错： $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2xe^{-x^2}=0$ （出错原因同(1)）.

五、（10 分） $f'_x=y-2x=0$ $f'_y=3y^2-2y+x=0$

解得 $x=0, y=0$ 或 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$

$f''_{x^2}=-2$ $f''_{xy}=1$ $f''_{y^2}=6y-2$ ……..……………….4 分

在 $x=0, y=0$， $AC-B^2=3>0$， $A=-2<0$

故 $(0,0)$ 是极大值点，极大值为 $f(0,0)=0$ …...……………….7 分

在 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$， $AC-B^2=-3<0$， $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ 不是极值点. …..……….10 分

出错及应注意的问题：

(1) 将驻点求错（粗心）;

(2) 求出驻点后，不给出判别，就指出是极值点（二元函数判别极值的充分条件未掌握.）.

六、（12 分） $y=\sqrt{8-x^2}$ 与 $2y=x^2$ 交点为 $(2,2)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$ ……7 分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho\cos\theta,\sin\theta)\rho\, d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2 d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8}{3}\frac{\sin^3\theta}{\cos^6\theta}d\theta+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi=\frac{16}{45}(\sqrt{2}+1)+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$ …...…….12 分

注：若先 θ 后 ρ 积分：$I=\int_0^{2\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{\arcsin\frac{\sqrt{1+\rho^2}-1}{\rho}}^{\frac{\pi}{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta$

出错及应注意的问题：

(1) 二重积分化为二次积分定上下限错误：很多同学定限为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{2\sqrt{2}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$，甚至有的同学连草图都画错（二重积分的计算未掌握）;

(2) 审题不严，未看见题中区域是“第一象限部分”，导致定限错误；

(3) 被积函数未化为极坐标系下的函数：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(x,y)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(x,y)\rho d\rho$$

(4) 把被积函数写为 $f(\rho,\theta)$：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(\rho,\theta)d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(\rho,\theta)d\rho$$ （注意： f 表示函数的一个已

知的对应，即 $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho=g(\rho,\theta)$)；

(5) 有的同学不会计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3\theta}{\cos^6\theta}d\theta$ （积分计算不过关）.

七、（10 分） $V=\iint\limits_D(x-y+2)dxdy$ ……………..…..……..……3 分

$=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}(x-y+2)dy$ ………….……..……7 分

$=\frac{81}{20}$ …..…………………………..………10 分

出错及应注意的问题：

(1)有的同学直接写为 $V=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}(x-y+2)dy$ 缺中间过程，一旦定限错误将导致此题得 0 分(的确有同学因此得了 0 分).

八、（12 分） 设 (x,y,z) 是椭球面上任一点，(x,y,z) 到平面 π 的距离为

$d=\frac{|x-y+2z-6|}{\sqrt{6}}$ ………………………2 分

考虑函数 $f(x,y,z)=(x-y+2z-6)^2$ 在限制条件 $x^2+y^2+2z^2=1$ 下的极值问题.

令 $F(x,y,z)=(x-y+2z-6)^2+\lambda(x^2+y^2+2z^2-1)$

由 $\begin{cases}F'_x=2(x-y+2z-6)+2\lambda x=0\\F'_y=-2(x-y+2z-6)+2\lambda y=0\\F'_z=4(x-y+2z-6)+4\lambda z=0\\x^2+y^2+2z^2=1\end{cases}$

解得 $x=\pm\frac{1}{2}$ $y=\mp\frac{1}{2}$ $z=\pm\frac{1}{2}$ …………………6 分

记 $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$， $N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，

$d\big|_M=\frac{4}{\sqrt{6}}$ $d\big|_N=\frac{8}{\sqrt{6}}$

由问题实际意义可判别出 M 为最近点， N 为最远点 ……….8 分

$$\vec{n}=\{2x,2y,4z\}$$

$$\vec{n}\big|_M=\{1,-1,2\}，\qquad \vec{n}\big|_N=\{-1,1,-2\}$$

$$\pi_M:\quad x-y+2z-2=0$$

$$\pi_N:\quad x-y+2z+2=0$$ ……………………………12 分

注：法 2：由问题实际意义可知椭球面上必有最远点及最近点，且椭球面上最远点及最近点 (x,y,z) 处的法向量 $n=\{x,y,2z\}$ 应与 π 的法向量 $n_1=\{1,-1,2\}$ 平行，即 $n=\lambda\{1,-1,2\}$ 得， $x=\lambda$， $y=-\lambda$， $z=\lambda$，代入椭球面方程得，

$$x=\frac{1}{2}，\ y=-\frac{1}{2}，\ z=\frac{1}{2} \text{或} x=-\frac{1}{2}，\ y=\frac{1}{2}，\ z=-\frac{1}{2}$$

又点 $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 到平面 π 的距离 $d=\frac{2}{3}\sqrt{6}$，点 $N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 到平面 π 的距离 $d=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，故 $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为最近点的坐标， $N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 为最远点的坐标.

由于 $n_1 // n$，取 $n_1=\{1,-1,2\}$ 做为点 $M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$、$N(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 切平面的法向量，则 $\pi_M:\quad x-y+2z-2=0$

$$\pi_N:\quad x-y+2z+2=0$$

法 3：由于椭球面上最远点及最近点 (x,y,z) 处的法向量 $n=\{x,y,2z\}$ 与 π 的法向量 $n_1=\{1,-1,2\}$ 平行，取 $n_1=\{1,-1,2\}$ 做为最远点及最近点 (x,y,z) 处的法向量，故设所求的切平面方程为 $x-y+2z+D=0$，则原问题转化为在条件 $x^2+y^2+2z^2=1$ 的限制下，求 D 的最值.

令 $F(x,y,z)=x-y+2z+D+\lambda(x^2+y^2+2z^2-1)$

$$\begin{cases} F_x' = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y' = -1 + 2\lambda y = 0 \\ F_z' = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$ 解得 $x = \frac{1}{2}$， $y = -\frac{1}{2}$， $z = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$， $y = \frac{1}{2}$， $z = -\frac{1}{2}$

由点到平面的距离公式及问题实际意义可判别出 $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为最近点的坐标，

$N(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 为最远点的坐标.

代入所设切平面方程得 $D = \mp 2$，故

$$\pi_M: \quad x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\pi_N: \quad x - y + 2z + 2 = 0$$

出错及应注意的问题：

(1) 利用拉格朗日函数法求出驻点后，未写“由问题实际意义可知椭球面上必有最远点及最近点”就将驻点当作最远点及最近点（由于驻点未必是极值点，故必须要指出这一点才说明你的概念是清楚的）.