

## 10.6 傅里叶(Fourier)级数

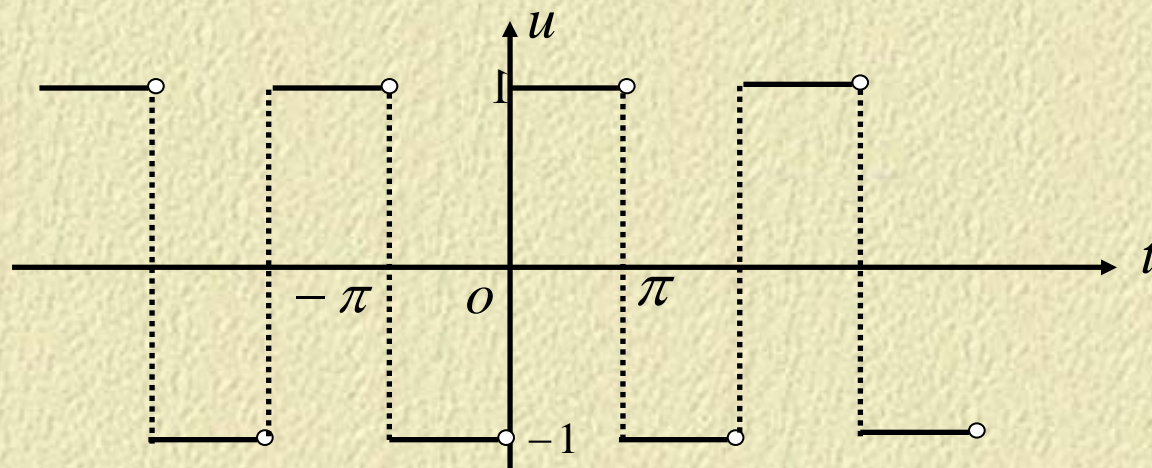
正弦函数是一种常见的最简单的周期函数，例如：描述简谐振动的正弦函数

$y = A \sin(\omega t + \varphi)$  就是一个以  $\frac{2\pi}{\omega}$  为周期的正弦函数. 其中  $y$  表示动点的位置， $t$  表示时间， $A$  表示振幅， $\omega$  表示角频率， $\varphi$  表示初相。



例如:

非正弦周期函数:矩形波  $u(t) = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\pi \leq t < 0 \\ 1, & \text{当 } 0 \leq t < \pi \end{cases}$



不同频率正弦波逐个叠加

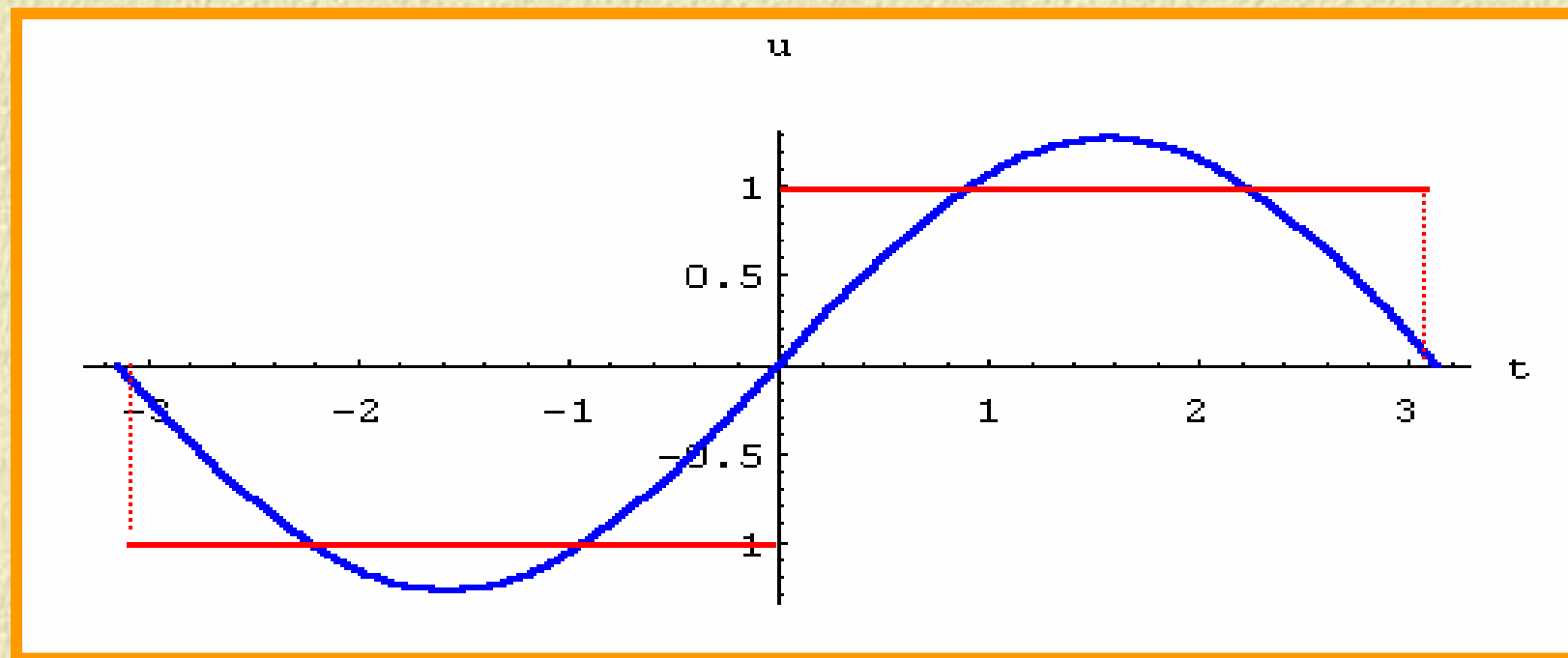
$$\frac{\pi}{4} \sin t, \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} \sin 3t, \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{5} \sin 5t, \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{7} \sin 7t, \dots$$

上页

下页

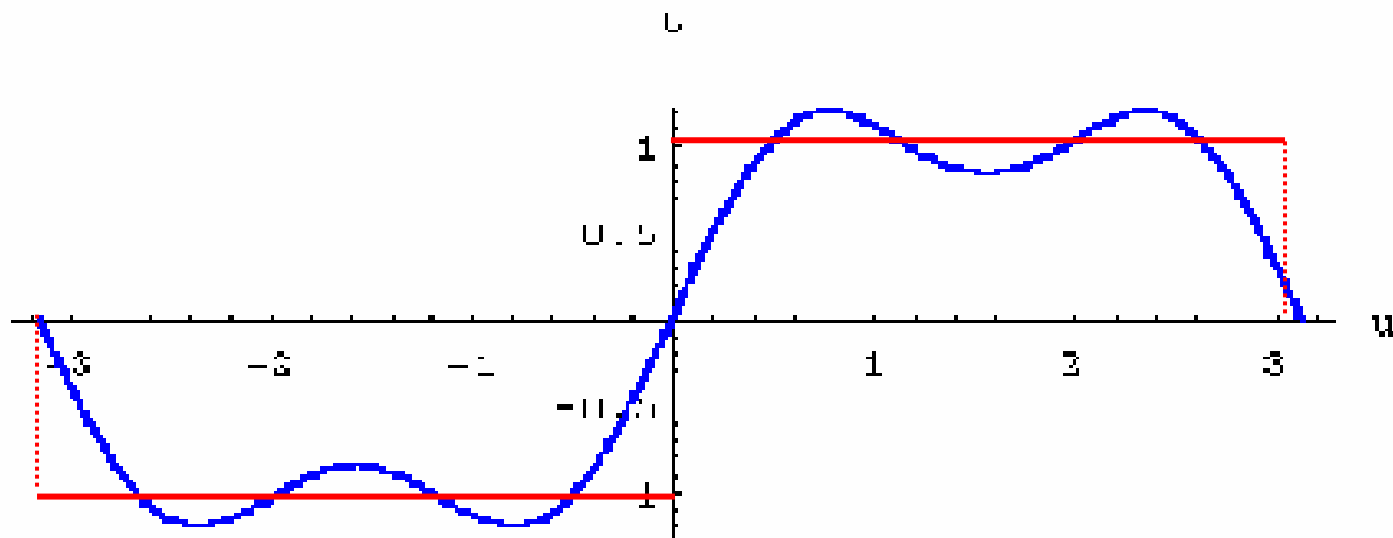
返回

$$u = \frac{4}{\pi} \sin t$$

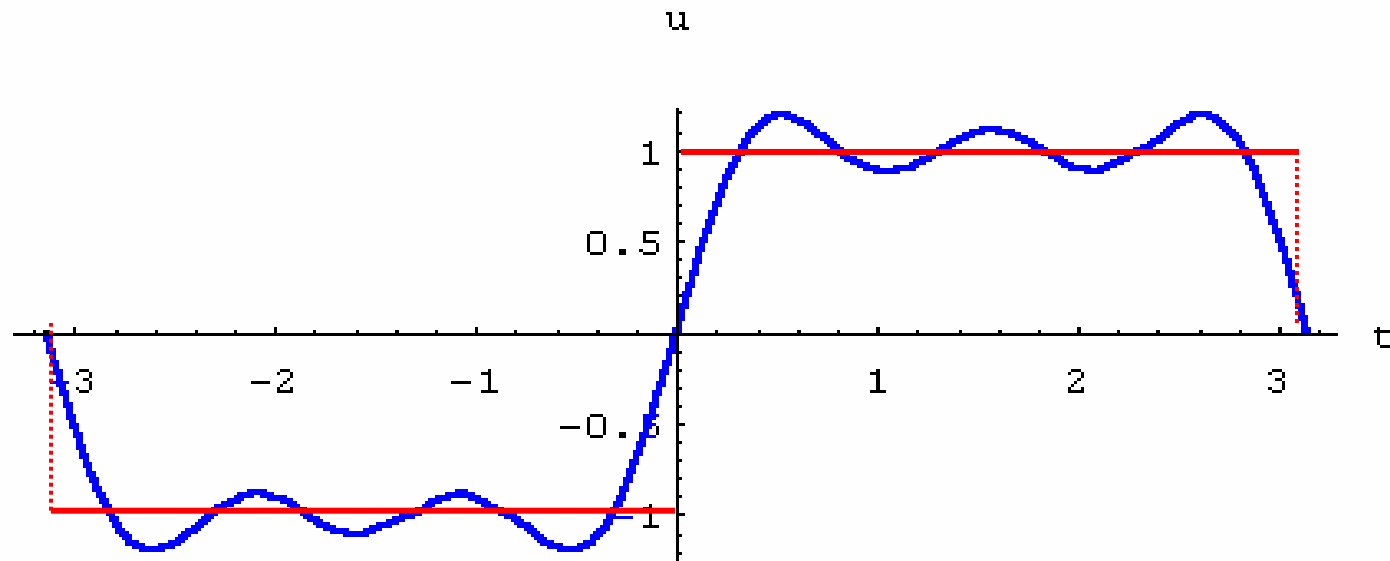




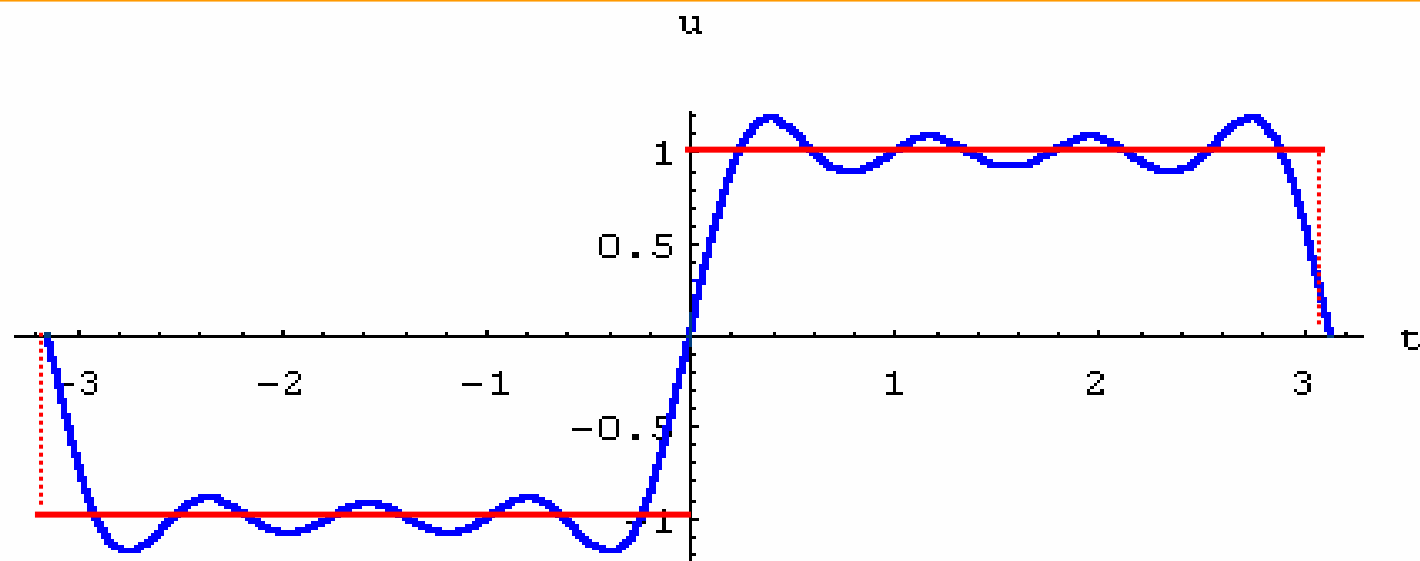
$$u = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$



$$u = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right)$$

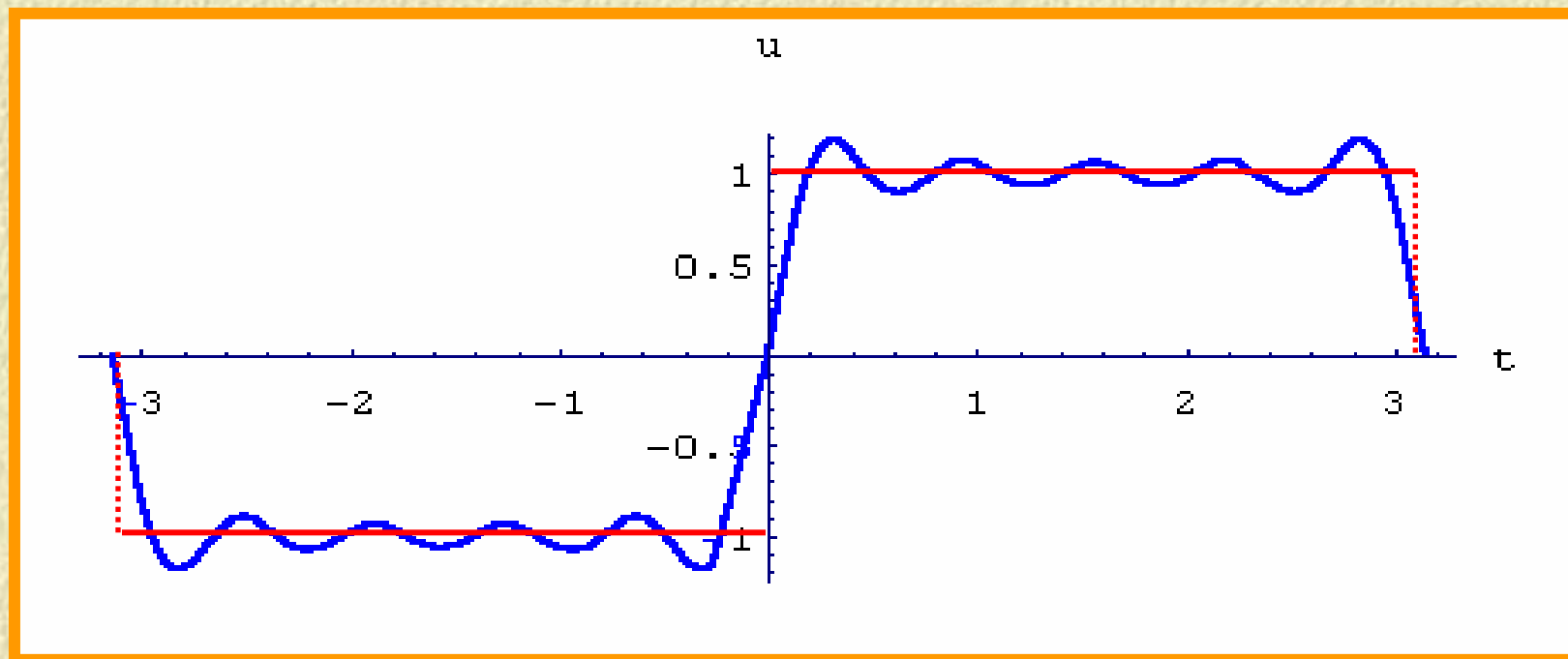


$$u = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t \right)$$





$$u = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \frac{1}{9} \sin 9t \right)$$



$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \cdots \right)$$

$(-\pi < t < \pi, t \neq 0)$

## 怎样研究非正弦的周期函数呢？

具体的说，将周期为  $T (= \frac{2\pi}{\omega})$  的周期函数用一系列三角函数  $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  之和来表示。

$$\begin{aligned} & \because A_n \sin \left[ n\omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi_n \right] \\ &= A_n \sin [2n\pi + n\omega t + \varphi_n] = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned}$$

即：  $T$  也是  $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  的周期。

( $T$  不一定是最小周期)



即  $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

以  $\frac{2\pi}{\omega}$  为周期 .

其中  $A_0, A_n, \varphi_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  都是常数 .

在物理上，就是把一个比较复杂的周期运动看成是许多不同频率的简谐振动的迭加。

谐波分析

上页

下页

返回



为了以后讨论方便，将正弦函数  
 $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  按三角公式变形：

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t) \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n, \quad \omega t = x,$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{三角级数}$$

周期为  $2\pi$

上页

下页

返回



## 1. 三角函数系的正交性

为了研究三角级数的收敛性，先探讨三角级数具有哪些特性？

### 三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$

正交性：

任意两个不同函数在  $[-\pi, \pi]$  上的积分等于零。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

上页

下页

返回



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \quad (\text{其中 } m, n = 1, 2, \dots)$$

三角函数系具有正交性。



## 2. 以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数

问题: (1).若能展开,  $a_n, b_n$  是什么?

(2).展开的条件是什么?

### (1). 傅里叶系数

若有 
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(I) 求 $a_0$ . 
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(II) 求 $a_n$ . 
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

即 
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

上页

下页

返回



(III) 求  $b_n$ .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

由上述公式确定的  $a_n$ ,  $b_n$  称为函数  $f(x)$  的

傅里叶系数



由此确定的三角级数称为由  $f(x)$  产生的  
傅里叶级数. 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

问题:

$$f(x) \stackrel{\text{条件?}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$



## (2). 狄利克雷 (Dirichlet) 充分条件 (收敛定理)

设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数. 如果它满足条件: 在区间  $[-\pi, \pi]$  上连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个极值点, 则  $f(x)$  的傅里叶级数收敛, 并且

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] & x \text{ 为间断点} \\ \frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(-\pi+0)] & x = \pm\pi \end{cases}$$

即傅里叶级数收敛到函数  $f(x)$  自身的充分条件是:

$f(x)$  满足连续条件。



基于狄里克雷定理，我们常说把函数  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上展开成傅里叶级数。

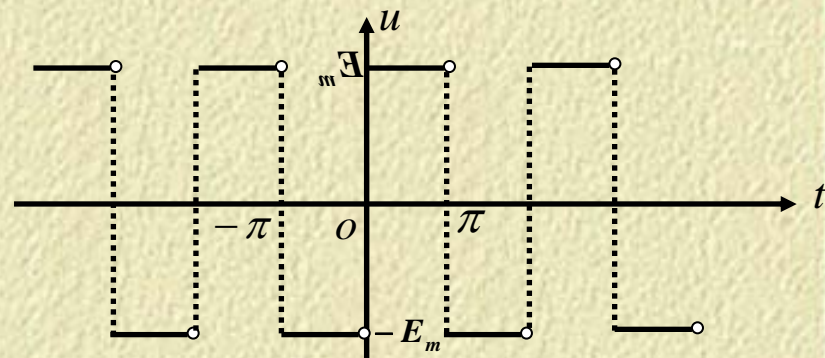
但要**注意**，展开后必须注明  $f(x)$  的傅里叶级数和函数  $S(x)$  与函数  $f(x)$  相等的区域。

函数展开成幂级数，要求函数具有任意阶导数——条件太苛刻；而函数展开成傅里叶级数，只要连续即可。



例 1 以  $2\pi$  为周期的矩形脉冲的波形

$$u(t) = \begin{cases} E_m, & 0 \leq t < \pi \\ -E_m, & -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$



将其展开成傅里叶级数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt = 0 \quad (u(t) \text{ 为奇函数})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos ntdt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-E_m) \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_m \cos ntdt$$

$$= 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

上页

下页

返回



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin ntdt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-E_m) \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E_m \sin ntdt$$

$$= \frac{2E_m}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2E_m}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} \frac{4E_m}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$



$$a_n = 0 \quad b_n = \begin{cases} \frac{4E_m}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, k = 1, 2, \dots \\ 0, & n = 2k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

在点  $t = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  处不连续。

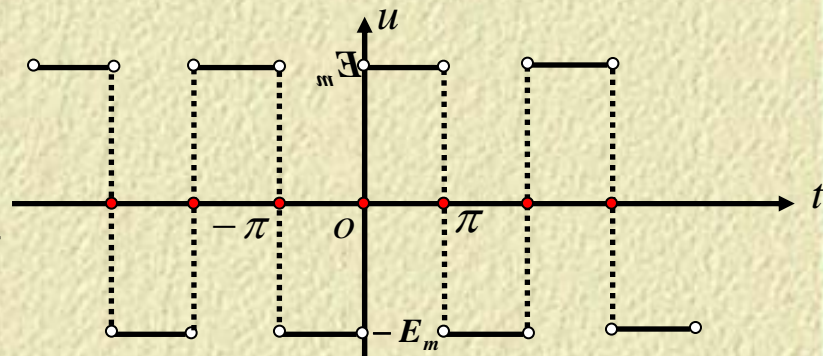
$$\text{收敛于 } \frac{-E_m + E_m}{2} = \frac{E_m + (-E_m)}{2} = 0,$$

$t \neq k\pi$  时, 收敛于  $u(t)$ .

和函数图象为

所求函数的傅氏展开式为

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E_m}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)t$$



$$(-\infty < t < +\infty; t \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots)$$

上页

下页

返回



**注意：**在具体讨论周期函数的傅里叶级数展开式时，常常只给出周期函数  $f(x)$  在  $(-\pi, \pi]$  (或  $[-\pi, \pi)$ ) 上的解析表达式(比如例 1)，此时大家应理解为函数  $f(x)$  是定义在整个数轴上以  $2\pi$  为周期的周期函数，即在  $(-\pi, \pi]$  以外的部分按函数在  $(-\pi, \pi]$  上的对应关系作**周期延拓**(区间端点只给出一个便于作周期延拓)。



即使  $f(x)$  只在  $[-\pi, \pi]$  上有定义 (即  $f(x)$  是非周期函数), 只要满足狄里克雷定理的条件, 那么先对  $f(x)$  作周期延拓,  $F(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 且在  $(-\pi, \pi)$  上,  $F(x) = f(x)$ , 对  $F(x)$  展开成傅里叶级数, 结合收敛定理, 将  $x$  限制在  $[-\pi, \pi]$  上得出  $f(x)$  的傅里叶级数。

作法:

周期延拓 ( $T = 2\pi$ )  $F(x) = f(x) \quad (-\pi, \pi)$

端点处收敛于  $\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)]$

上页

下页

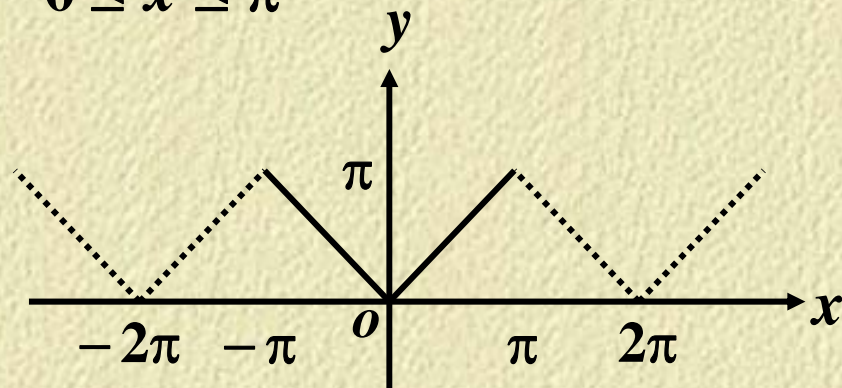
返回



即不论  $f(x)$  是否是定义在  $[-\pi, \pi]$  上的周期函数，由  $f(x)$  产生的傅里叶级数一定是以  $2\pi$  为周期的周期函数 (讨论傅里叶级数收敛性时，再确定  $x$  的收敛域)，故它的和函数  $S(x)$  也是以  $2\pi$  为周期的周期函数，是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数，即  $S(x + nT) = S(x)$ 。



例 2 将函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$  展开为傅里叶级数.



解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

拓广的周期函数的傅氏级数展开式在  $[-\pi, \pi]$  收敛于  $f(x)$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos nx - 1) = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = 0,$$



$$a_0 = \pi$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0$$

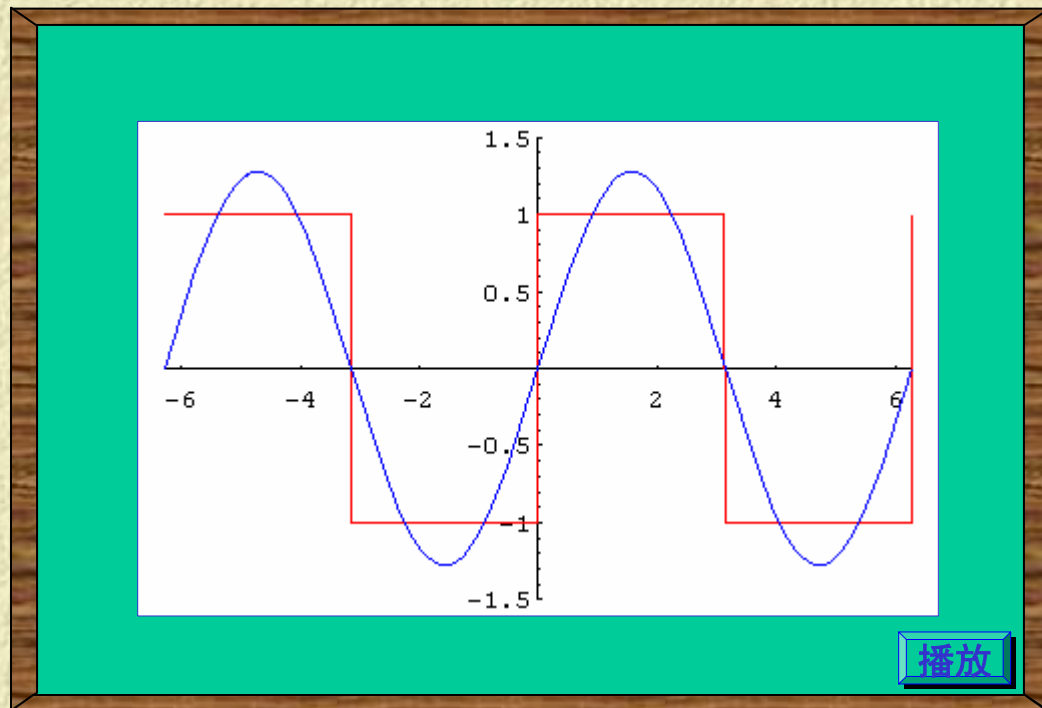
所求函数的傅氏展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$



# 小结

- 1.基本概念;
- 2.傅里叶系数;
- 3.狄利克雷充分条件;
- 4.非周期函数的傅氏展开式;
- 5.傅氏级数的意义——整体逼近



## 奇函数和偶函数的傅里叶级数

**定理** (1) 当周期为  $2\pi$  的奇函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(2) 当周期为  $2\pi$  的偶函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数时, 它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$



定义 如果  $f(x)$  为奇函数, 傅氏级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

称为**正弦级数**.

如果  $f(x)$  为偶函数, 傅氏级数  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

称为**余弦级数**.



例 1 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展开成傅氏级数.

解  $\because x \neq (2k+1)\pi$  时  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的奇函数,

$$\therefore a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$



例 1 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展开成傅氏级数.

---

$$a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$



例 1 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数,它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展开成傅氏级数.

---

所给函数满足狄利克雷充分条件.

在点  $x = (2k + 1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  处不连续 ,

$$\text{收敛于 } \frac{f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

在连续点  $x (x \neq (2k + 1)\pi)$  处收敛于  $f(x)$ ,

$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad (-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \dots)$$

上页

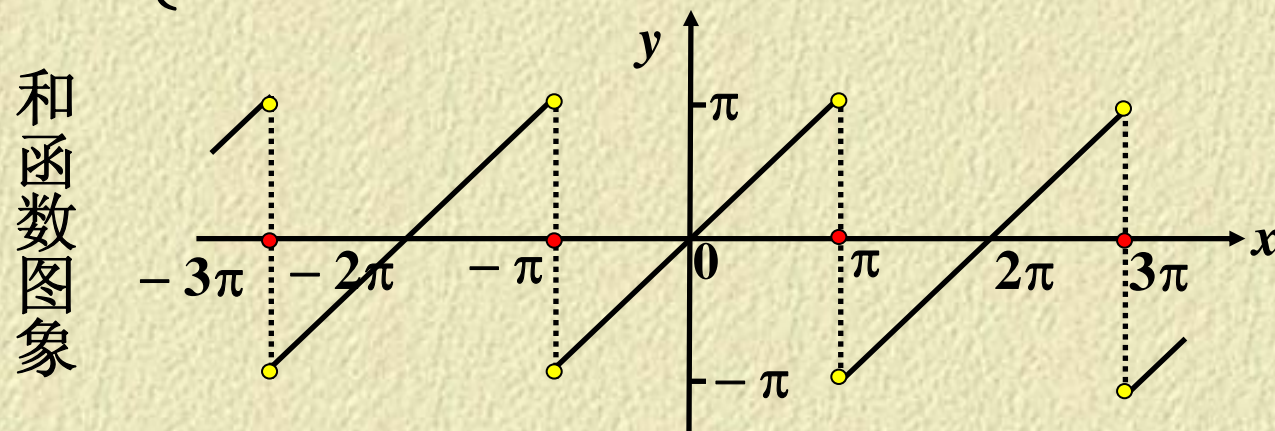
下页

返回



例 1 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数,它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为  $f(x) = x$ , 将  $f(x)$  展开成傅氏级数.

$$S(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases} \quad S(x + n \cdot 2\pi) = S(x)$$



下列写法是否正确:  $x = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$

$(-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm3\pi, \cdots)$

上页

下页

返回



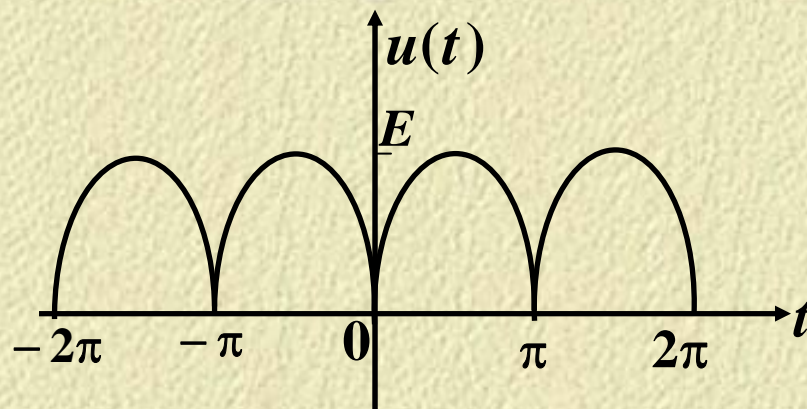
例 2 将周期函数  $u(t) = |E \sin t|$  展开成傅氏级数, 其中  $E$  是正常数.

解 所给函数满足狄利克雷充分条件, 在整个数轴上连续.

$\because u(t)$  为偶函数,

$$\therefore b_n = 0,$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$



$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} E \sin t dt = \frac{4E}{\pi},$$

上页

下页

返回



例2 将周期函数  $u(t) = |E \sin t|$  展开成傅氏级数, 其中  $E$  是正常数.

---

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t) \cos ntdt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E \sin t \cos ntdt \\ &= \frac{E}{\pi} \int_0^\pi [\sin(n+1)t - \sin(n-1)t] dt \\ &= \frac{E}{\pi} \left[ -\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1} \right]_0^\pi \quad (n \neq 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{4E}{[(2k)^2 - 1]\pi}, & \text{当 } n = 2k \\ 0, & \text{当 } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

上页

下页

返回



例2 将周期函数  $u(t) = |E \sin t|$  展开成傅氏级数, 其中  $E$  是正常数.

---

$$b_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4E}{[(2k)^2 - 1]\pi}, & \text{当 } n = 2k \\ 0, & \text{当 } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t) \cos t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E \sin t \cos t dt = 0,$$

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{15} \cos 4t - \frac{1}{35} \cos 6t - \dots \right)$$

$$= \frac{2E}{\pi} \left[ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} \right]. \quad (-\infty < t < +\infty)$$

上页

下页

返回



## 函数展开成正弦级数或余弦级数

在实际应用（如研究某种波动问题、热的传导及扩散问题）中，有时需要把定义在  $[0, \pi]$  上的函数展开成正弦级数或余弦级数。

解决方法：若函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上满足收敛定理的条件，我们在  $(-\pi, 0)$  内补充定义，将  $f(x)$  延拓成以  $2\pi$  为周期的函数  $F(x)$ 。

若将  $F(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内延拓为奇（偶）函数，按这种方式拓广函数定义域的过程，称为奇（偶）延拓。然后将函数展开成傅里叶级数，这个级数必定是正（余）弦函数，再限制  $x$  在  $(0, \pi)$  上，此时  $F(x) = f(x)$ 。



## 非周期函数的周期性延拓

设  $f(x)$  定义在  $[0, \pi]$  上, 且满足收敛定理的条件, 延拓成以  $2\pi$  为周期的函数  $F(x)$ .

$$\text{令 } F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ g(x) & -\pi < x < 0 \end{cases}, \text{ 且 } F(x + 2\pi) = F(x),$$

$F(x)$  可为奇函数, 偶函数, 非奇非偶函数,

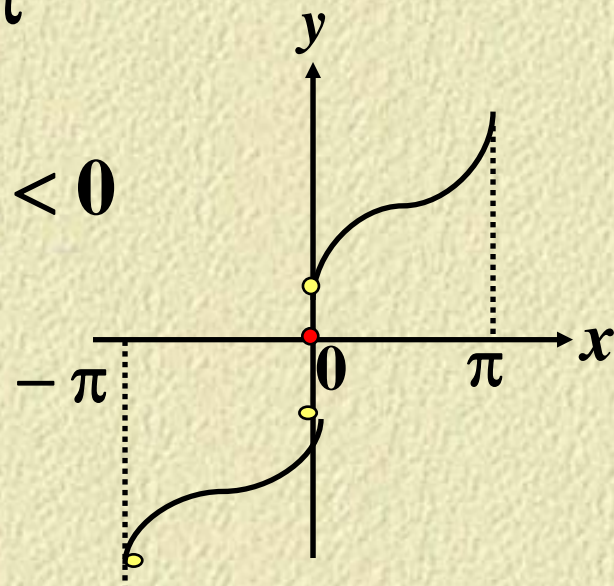
当  $F(x)$  为奇函数时, 其傅里叶级数为正弦级数;

当  $F(x)$  为偶函数时, 其傅里叶级数为余弦级数;



奇延拓:  $g(x) = -f(-x)$

$$\text{则 } F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$



$f(x)$ 的傅氏正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 < x < \pi)$$

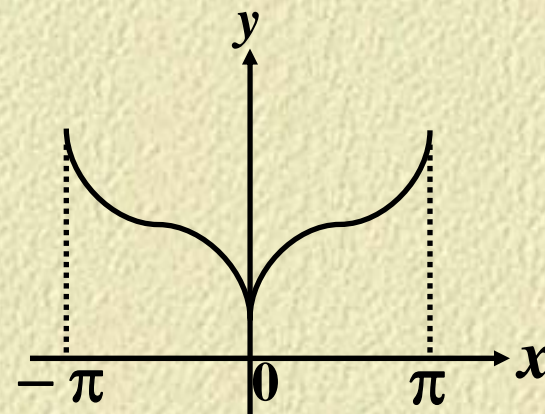


偶延拓:  $g(x) = f(-x)$

$$\text{则 } F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$  的傅氏余弦级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$





例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值.

解 (1) 求正弦级数. 对  $f(x)$  进行奇延拓,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 1) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \pi \cos n\pi - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} [1 - (\pi + 1)(-1)^n] \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + 2}{2k - 1} & \text{当 } n = 2k - 1 \\ -\frac{1}{k} & \text{当 } n = 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$



例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值。

---

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + 2}{2k - 1} & \text{当 } n = 2k - 1 \\ -\frac{1}{k} & \text{当 } n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} [(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3}(\pi + 2) \sin 3x - \dots]$$

$$\text{或 } x + 1 = \frac{2}{\pi} [(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3}(\pi + 2) \sin 3x - \dots]$$
$$(0 < x < \pi)$$



例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值。

---

$$S(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

$$S(-2\pi) = S(0 - 2\pi) = S(0) = 0$$

$$S(-1) = -2, \quad S(1) = 2$$



例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值.

---

(2) 求余弦级数. 对  $f(x)$  进行偶延拓 ,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) dx = \pi + 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{当 } n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} & \text{当 } n = 2k-1 \end{cases}$$

$(k = 1, 2, \dots)$

上页

下页

返回



例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值.

---

$$a_0 = \pi + 2,$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{当 } n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} & \text{当 } n = 2k-1 \end{cases}$$

$$x + 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right)$$

$$(0 \leq x \leq \pi)$$

上页

下页

返回



例 3 将函数  $f(x) = x + 1$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 分别展开成正弦级数和余弦级数. 分别写出和函数  $S(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式, 并求  $S(-2\pi)$ ,  $S(-1)$ , 和  $S(1)$  的值。

---

$$S(x) = \begin{cases} -x + 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x < \pi \\ \pi + 1 & x = \pm\pi \end{cases}$$

$$S(-2\pi) = S(0 - 2\pi) = S(0) = 1$$

$$S(-1) = 2, \quad S(1) = 2$$



# 小结

## 1、基本内容:

奇函数和偶函数的傅氏系数;正弦级数与余弦级数;非周期函数的周期性延拓;

## 2、需澄清的几个问题.(误认为以下三情况正确)

a.只有周期函数才能展成傅氏级数;

b.在 $[0, \pi]$ 上,展成周期为  $2\pi$ 的傅氏级数唯一 ;

c.在 $[-\pi, \pi]$ 上连续且只有有限个极值点时,级数处处收敛于  $f(x)$ .



### 3. 以 $2l$ 为周期的函数的傅氏级数

$$\because T = 2l, \quad \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}. \quad \text{代入傅氏级数中}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega x + b_n \sin n \omega x)$$

定理 设周期为  $2l$  的周期函数  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数展开 式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}),$$



其中系数  $a_n, b_n$  为

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) 如果  $f(x)$  为奇函数，则有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

其中系数  $b_n$  为  $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$



(2) 如果 $f(x)$ 为偶函数, 则有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

其中系数  $a_n$  为  $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$



例 1 设  $f(x)$  是周期为 4 的周期函数,它在  $[-2,2)$

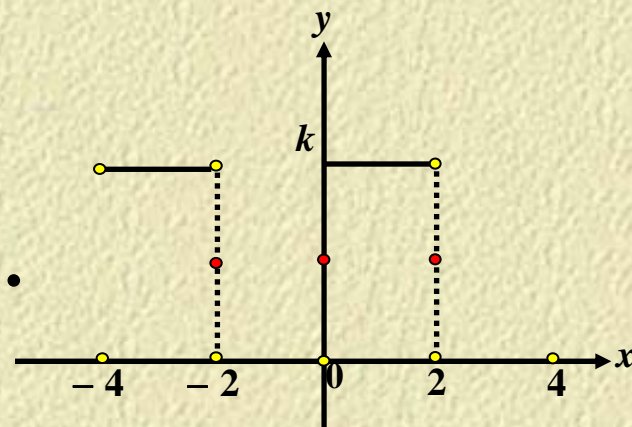
上的表达式为  $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < 0 \\ k & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ , 将其展

成傅氏级数.

解  $\because l = 2$ , 满足狄氏充分条件.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 k dx = k,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x dx = 0, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$





$$a_0 = k \quad a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 k \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{k}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \frac{2k}{n\pi} & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots)$$

上页

下页

返回



例2 (91,8)将函数  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 内展开成以 2 为周期的付氏级数, 并由此求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

解  $\because f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 是偶函数,

$$\therefore a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 (2 + x) dx = 5,$$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (2 + x) \cos \frac{n\pi x}{1} dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x = \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$



(91,8)将函数  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 内展开成以 2 为周期的付氏级数, 并由此求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$b_n = 0,$$

$$\text{故 } 2 + |x| = \frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi x$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}. \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

上页

下页

返回



取  $x = 0$ , 由上式得  $2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ ,

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

见书中P275例4(答案一致)

上页

下页

返回



# 小结

以 $2L$ 为周期的傅氏系数;

求傅氏展开式的步骤;

1.画图形验证是否满足狄氏条件(收敛域,奇偶性);

2.求出傅氏系数;

3.写出傅氏级数,并注明它在何处收敛于 $f(x)$ .



## 思考题

若函数  $\varphi(-x) = \psi(x)$ ，问： $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  的傅里叶系数  $a_n$ 、 $b_n$  与  $\alpha_n$ 、 $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 之间有何关系？



## 思考题解答

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \varphi(-t) \cos(-nt) d(-t) \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-x) \cos nx dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \varphi(-t) \sin(-nt) d(-t)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-x) \sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$a_n = \alpha_n, \quad b_n = -\beta_n.$$



## 思考题

设 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上定义的函数, 应如何选择 $A, B$ , 才能使 $F(t) = f(At + B)$ 成为 $[-\pi, \pi]$ 上定义的函数.

## 思考题解答

应使 $A(-\pi) + B = a, \quad A\pi + B = b,$

$$\text{即 } A = \frac{b-a}{2\pi}, \quad B = \frac{b+a}{2}.$$



# 作业：

P277: 1. 2.

4. 5. 7. 9. 10.