习题 7.1(P52)

1．若 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$

解：令 $u=x+y$，$v=\dfrac{y}{x}$，解得：$x=\dfrac{u}{1+v}$，　$y=\dfrac{uv}{1+v}$

所以　$f(x+y,\dfrac{y}{x})=(x-y)(x+y)=(\dfrac{u}{1+v}-\dfrac{uv}{1+v})u=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$

即　$f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$

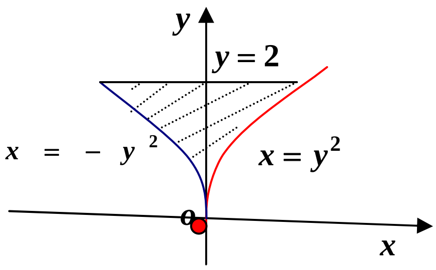
2．设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，如果当 $y=1$ 时 $z=x$，试确定 f 和 z

解：由题意得 $x=1+f(\sqrt{x}-1)$，即 $f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1+2)$

所以 $f(x)=x(x+2)$，从而　$z=\sqrt{y}+x-1$

3．求下列函数的定义域，并画出图形.

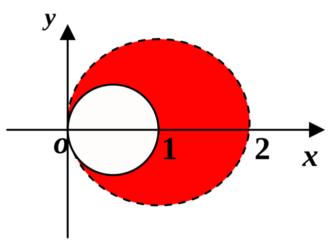
(1) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$



解：$\begin{cases}-1\le\dfrac{x}{y^2}\le 1\\ y\ne 0\\ -1\le 1-y\le 1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-y^2\le x\le y^2\\ 0<y\le 2\end{cases}$

(2) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$

解：$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}\ge 0\\ 2x-x^2-y^2\ne 0\end{cases}$，



解得 $\begin{cases}(x-\dfrac{1}{2})^2+y^2\ge(\dfrac{1}{2})^2\\ (x-1)^2+y^2<1\end{cases}$

(3) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\qquad (R>r>0)$

解：$\begin{cases} R^2-x^2-y^2-z^2\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2-r^2>0 \end{cases}$ 解得：$r^2<x^2+y^2+z^2\leq R^2$

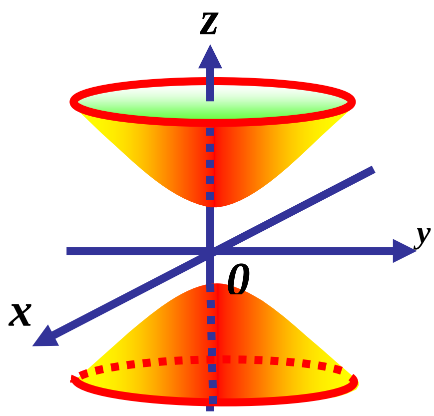
定义域是介于球心在原点、半径是 r 的小球与半径为 R 的大球之间含大球面不含小球面的区域.

(4) $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$

解：$-1-x^2-y^2+z^2>0$

即 $z^2>1+x^2+y^2$

定义域是双叶双曲面内部且不含双叶双曲面的区域.



4．求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\dfrac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

解：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)=0$， $\left|\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\leq 1$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left[(1+\dfrac{1}{x})^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}=e$

5．讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 的存在性

解：当点 (x, y) 沿 $y=0$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x}=1$

当点 (x, y) 沿 $x=0$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{-y}=-1$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

6．研究下列函数在点 $(0, 0)$ 处的连续性

(1) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

解：因为 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}}=\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}=0$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0, 0)$

即函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续.

(2) $f(x, y)=\begin{cases}1 & xy=0\\ 0 & xy\neq 0\end{cases}$

解：当点 (x, y) 沿 $y=0$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}1=1$

当点 (x, y) 沿 $y=x$ 趋近于 $(0, 0)$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}0=0$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)$ 不存在，从而函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续.

易出的错误：有同学得到的结论是正确的，但论证过程有错误：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x, y)=0\neq f(0, 0)$$

出错的原因： 一元函数极限中，我们强调 $x \to 0$ 即 $x \neq 0$.因而有同学认为 $x \to 0$，$y \to 0$ 即 $x \neq 0$，$y \neq 0$. 实际上，在二元函数极限中，$x \to 0$，$y \to 0$ 指的是 $(x, y) \neq (0, 0)$.