8.3 三重积分的计算

8.3.1三重积分在直角坐标系下的计算

在直角坐标系中，如果 三重积分可积，则可用平行于坐标面的平 面来划分积分区域 V，

即 $dV = dxdydz$.

三重积记为

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

其中 $dxdydz$ 叫做直角坐标系中的体 积元素.

为了使三重积分化为三次积分的过程更为清晰，我们常常把三重积分化为一个二重积分和一个定积分，逐次积分进行运算。

根据二重积分与定积分的次序，三重积分在直角坐标系下的计算有下列两种方法：

(1)坐标面投影法 先确定二重积分的积分区域 D，再确定定积分的积分限；

(2)轴截面法 先确定定积分的积分限，再确定二重积分的积分区域 D.

1. 坐标面投影法

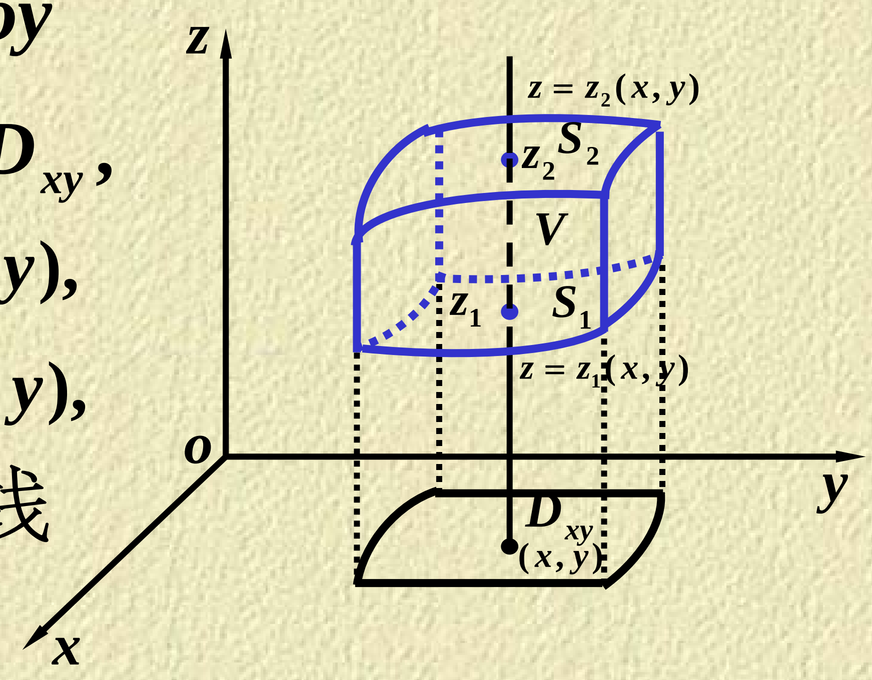
如图， 闭区域 V 在 xoy 面上的投影为闭区域 D_{xy}，

下边界曲面S_1： $z = z_1(x, y)$，

上边界曲面S_2： $z = z_2(x, y)$，

过点 $(x, y) \in D_{xy}$ 作直线

从 z_1 穿入，从 z_2 穿出.



XY-型积分域的特点：

平行于 z 轴且穿过闭区域 V 内部的直线与闭区域 V 的边界曲面相交不多于两点.

积分区域可表示为：$V:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}$

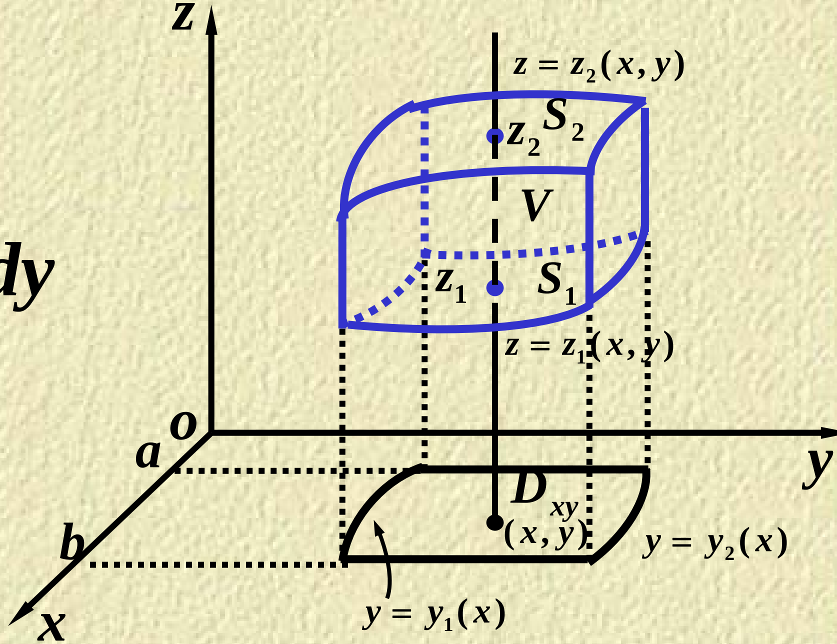
则有三重积分公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

$$\triangleq\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

先一后二



若 $D_{xy}: a\le x\le b,\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)$

上页 下页 返回

则有 $V:\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$

故 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

注意：计算 $\int_{z_{1(x,y)}}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ 时，将 x、y 视为常数.

依据积分区域 V 图形的形状及被积函数的形式，可以向其它坐标面作投影。

若积分区域很复杂，可以把 V 分为几块简单的区域，分别计算后再相加。

坐标面投影法的一般步骤:

(1)把积分区域V 向某坐标面（例如 xoy 面）作投影，得投影区域D_{xy}；

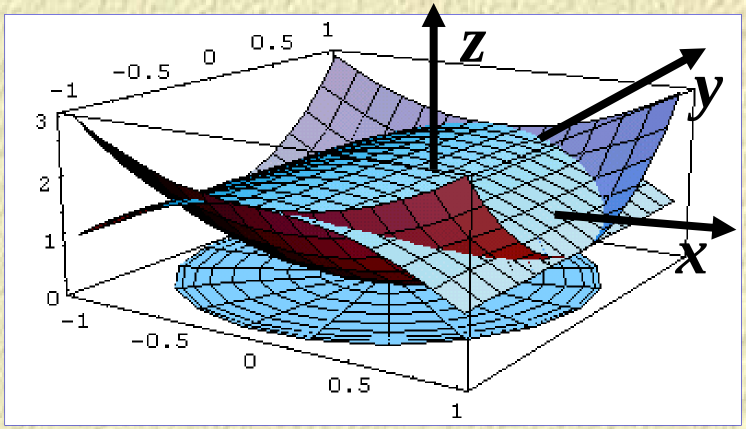
(2)对$\forall(x,y)\in D_{xy}$,用垂直于xoy平面的直线与V的下边界面$z=z_1(x,y)$及上边界面$z=z_2(x,y)$相交;

(3)计算定积分$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$，其结果为$x$、$y$的函数$F(x,y)$;

(4)最后计算二重积分$\iint\limits_{D_{xy}} F(x,y)dxdy$ 即得三重积分值.

上页 下页 返回

例 1 化三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域V 为由曲面 $z=x^2+2y^2$及 $z=2-x^2$所围成的闭区域.



解 由$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$，

得交线投影区域 $x^2+y^2\le 1,$

故 V：$\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}, \\ x^2+2y^2\le z\le 2-x^2 \end{cases}$

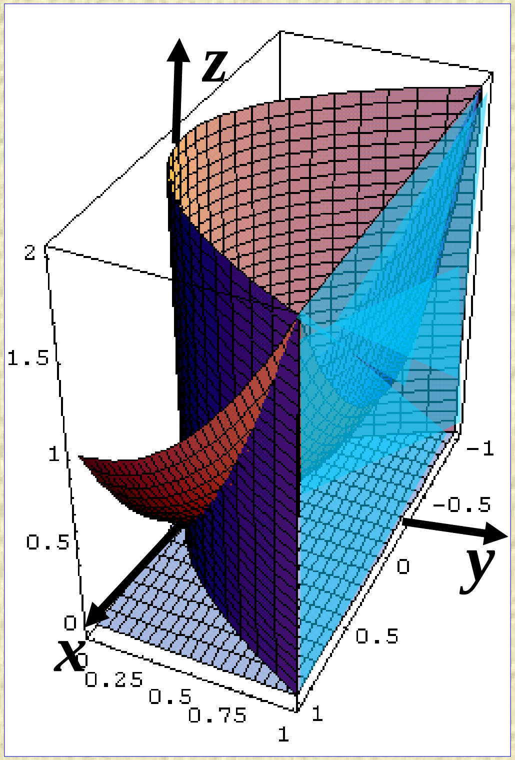
$$\therefore I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz.$$

上页 下页 返回

例2　化三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中 积分区域V 为由曲面

$$z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$$

所围成的空间闭区域. 如图,



解：V 在 xoy 面上的投影区域

$$D_{xy}: \quad y=x^2, \quad y=1$$

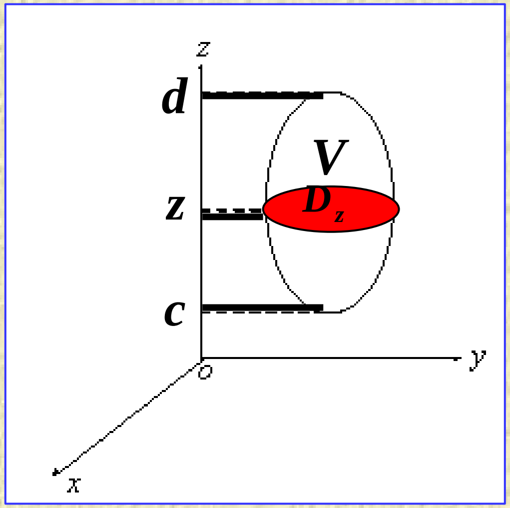
$$V:\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x^2\le y\le 1 \\ 0\le z\le x^2+y^2 \end{cases}$$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_{0}^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz.$$

2. 轴截面法

(1)把积分区域V 向某轴（例如Z轴）作投影，得投影区间$[c,d]$； Z−型积分域

(2)对$\forall z\in[c,d]$,用过点$(0,0,z)$且垂直于z轴的平面去截V，得截面D_z；



(3) 计算二重积分$\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

其结果为z的函数$F(z)$；

(4)最后计算定积分$\int_c^d F(z)dz$即得三重积分值.

上页 下页 返回

积分区域可表示为：$V:\begin{cases} c \le z \le d \\ (x,y) \in D_z \end{cases}$

先二后一

即 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$= \int_c^d \left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right] dz \triangleq \int_c^d dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

若 $D_z:\begin{cases} x_1(z) \le x \le x_2(z) \\ y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z) \end{cases}$

则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$= \int_c^d dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy$$

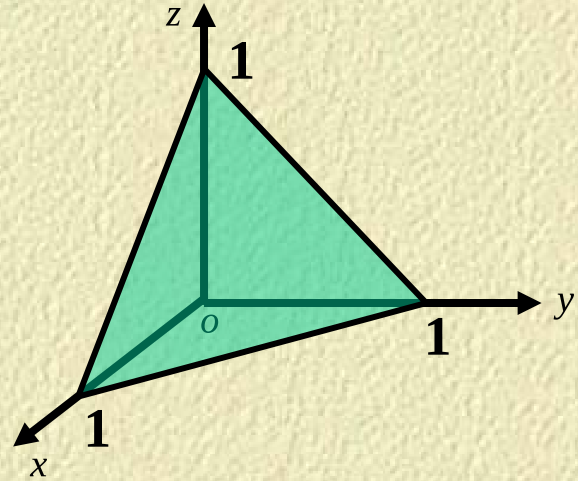
依据积分区域V图形的形状及被积函数的形式，可以向其它坐标轴作投影及作截面。

若积分区域很复杂，可以把分为几块简单的区域，分别计算后再相加。

当D_z为一规则图形——便于求面积（即面积值为关于z的函数），而被积函数只是关于z的函数，此时选择用轴截面法非常简便（少计算两个定积分）。其他情形类似。

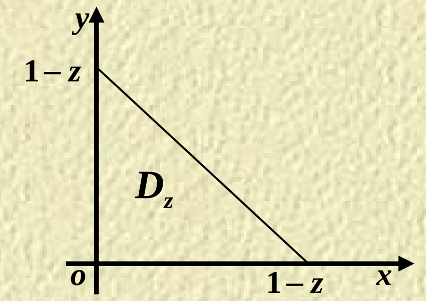
例 3　计算三重积分 $\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中 V 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域.

解 法 1：（轴截面法）



$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^1 z\,dz \iint\limits_{D_z} dxdy,$$

D_z 是由 $x+y=1-z,\ x=0,\ y=0$ 围成的三角形区域



$$\iint\limits_{D_z} dxdy = \frac{1}{2}(1-z)(1-z)$$

原式 $= \int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz = \frac{1}{24}.$

上页　下页　返回

例3 计算三重积分 $\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中 V 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域.

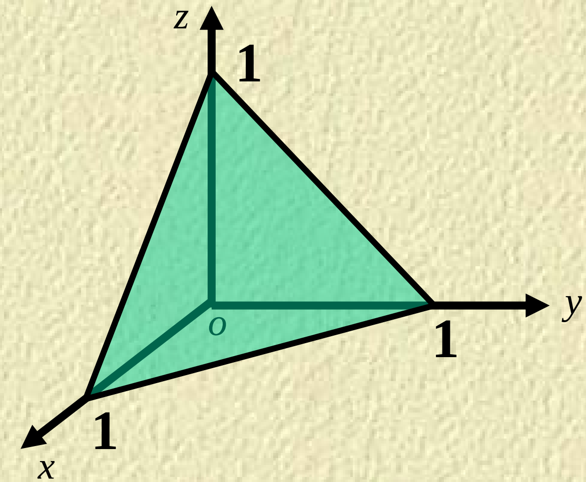
法 2：（坐标面投影法）

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\iint\limits_{D_{yz}} z\,dydz\int_0^{1-y-z}dx$$

$$=\int_0^1 z\,dz\int_0^{1-z}dy\int_0^{1-y-z}dx$$

$$=\int_0^1 z\,dz\int_0^{1-z}(1-y-z)\,dy$$

$$=\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=\frac{1}{24}.$$

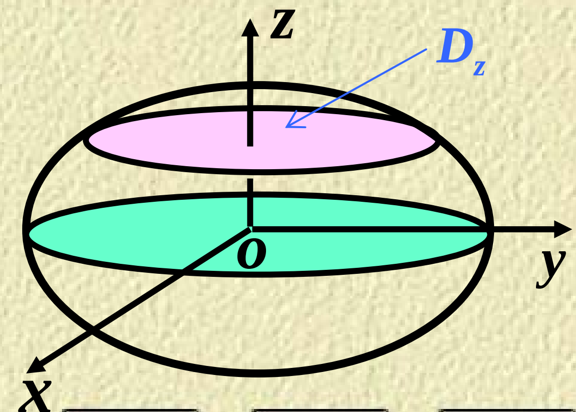


上页 下页 返回

例 4（书中例 3） 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所成的空间闭区域.

解 $V: -c\le z\le c,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$

$$\therefore \iint\limits_{D_z} dxdy = \pi\sqrt{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\cdot\sqrt{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} = \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})$$



$$原式 = \int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$= \int_{-c}^{c} \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}) z^2 dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 5 计算三重积分 $\iiint\limits_V y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中 V 由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.

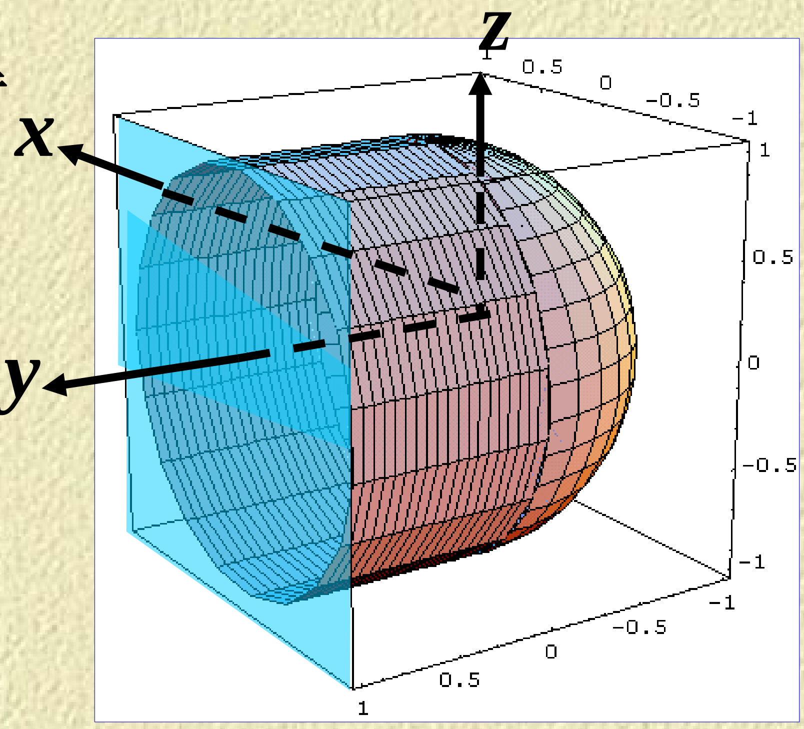
解 如图,

将 V 投影到 zox 坐标面得

$$D_{xz}: x^2+z^2\le 1$$

先对 y 积分,

再求 D_{xz} 上的二重积分.



$$V:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\end{cases}$$

上页 下页 返回

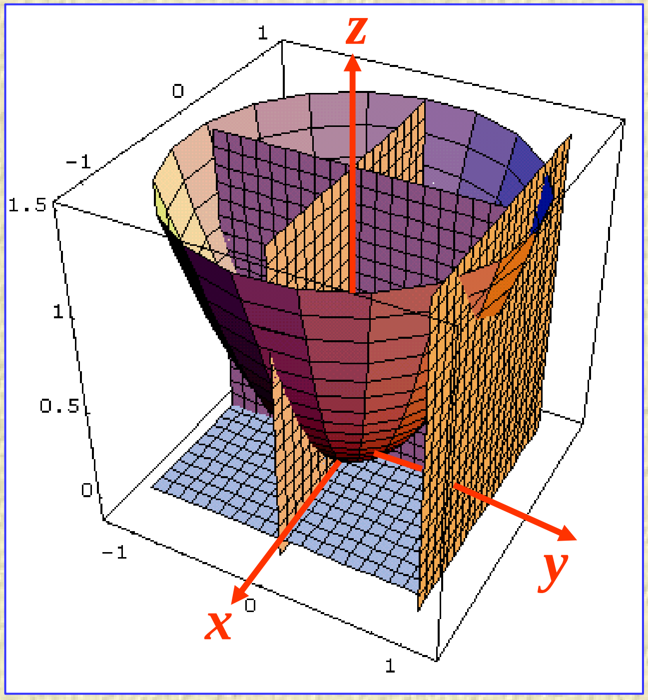
$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\,dxdz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,\frac{x^2+z^2}{2}\,dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\,dx=\frac{28}{45}.$$

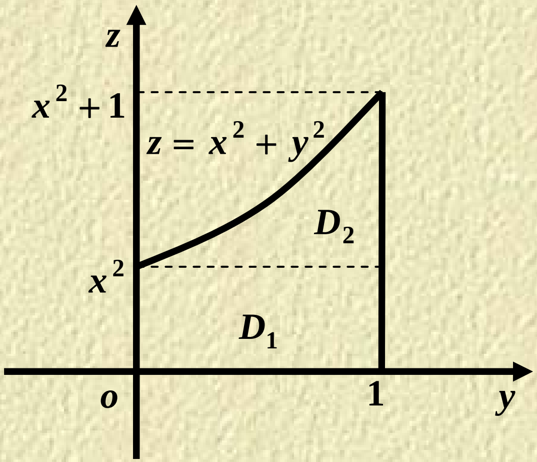
例 6 将$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$按$y,z,x$的次序积分.



解 若像二重积分交换次序那样，先将积分区域还原，再重新按要求的次序确定各次积分的积分限，将非常麻烦，原因在于积分区域图是立体的，需要空间想象。

而采用将三次积分看作“先一后二”或“先二后一”，再利用二重积分交换次序的方法就简单多了.

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$



$$=\int_0^1 dx\iint_{D_x} f(x,y,z)dydz$$

$$=\int_0^1 dx\iint_{D_1} f(x,y,z)dydz+\int_0^1 dx\iint_{D_2} f(x,y,z)dydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy$$

$$D_1:\begin{cases}0\le z\le x^2\\0\le y\le 1\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}x^2\le z\le x^2+1\\\sqrt{z-x^2}\le y\le 1\end{cases}$$

问题： 若将次序积分按 z,x,y ，如何做？按 y,x,z 呢？

上页 下页 返回

小结1

三重积分在直角坐标系中的计算

在直角坐标系下的体积元素

$$dV = dxdydz$$

(1)坐标面投影法　（先一后二）

(2)轴截面法　（先二后一）

当 D_z 为一规则图形——便于求面积（即面积值为关于 z 的函数），而被积函数只是关于 z 的函数，此时选择用轴截面法非常简便（少计算两个定积分）。其他情形类似。

上页　下页　返回

思考题

选择题：V 为六个平面 $x=0$，$x=2$，$y=1$，$x+2y=4$，$z=x$，$z=2$围成的区域，$f(x,y,z)$在V 上连续，则累次积分_____ $=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$.

(A) $\int_0^2 dx\int_{2-\frac{x}{2}}^{1} dy\int_2^x f(x,y,z)dz$;

(B) $\int_0^2 dx\int_1^{2-\frac{x}{2}} dy\int_2^x f(x,y,z)dz$;

(C) $\int_0^2 dx\int_{2-\frac{x}{2}}^{1} dy\int_x^2 f(x,y,z)dz$;

(D) $\int_0^2 dx\int_1^{2-\frac{x}{2}} dy\int_x^2 f(x,y,z)dz$.

上页 下页 返回

8.3.2 三重积分在柱坐标系下的计算

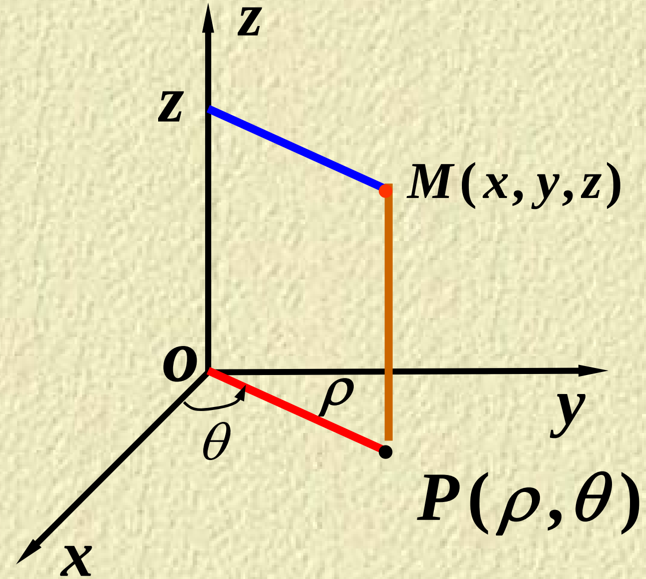
设 $M(x,y,z)$ 为空间内任一点，M 在xoy 面上的投影点 P 的极坐标为 (ρ,θ), 则称(ρ,θ,z) 为点 M 的柱坐标.

三个坐标的取值范围：

$$0 \le \rho < +\infty,$$

$$0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$-\infty < z < +\infty.$$



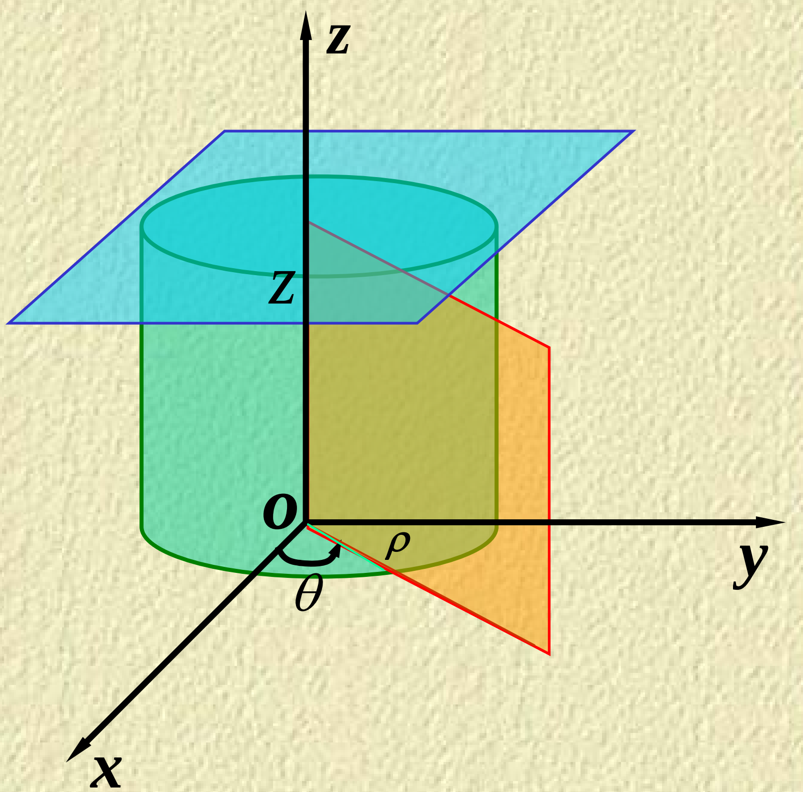
上页 下页 返回

如图，柱坐标系的三族坐标面分别为

ρ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆柱面；

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面；

z 为常数 $\Longrightarrow$ 平　面.



柱坐标是平面上的极坐标与z坐标的组合，

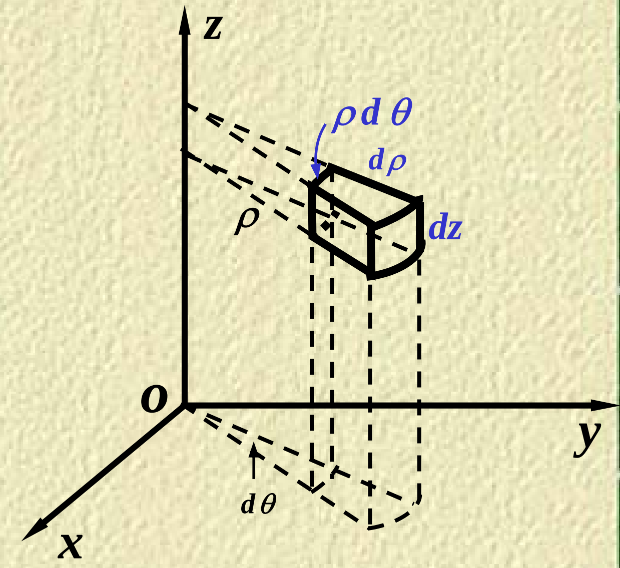
它与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

上页 下页 返回

如图，柱面坐标系中的体积元素为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz,$$



$$\therefore \iiint_{V_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint_{V_{\rho\theta z}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

柱坐标系下一般按先 z，后 ρ，再 θ 的次序计算三重积分.

“先一后二”法中，若“二”是极坐标系，则三重积分就是柱坐标。

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{\rho\theta}} \rho d\rho d\theta \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

何时利用柱坐标来计算三重积分能使计算较为简便呢？

一.考虑积分区域的形状：　当积分区域 V在xoy坐标面上的投影的边界　方程用极坐标方程表示较简单时，比如　D是圆、扇形、环形或圆、扇形、环形的一部　分；

特别当积分区域　V为圆柱体时，尤其简单　.

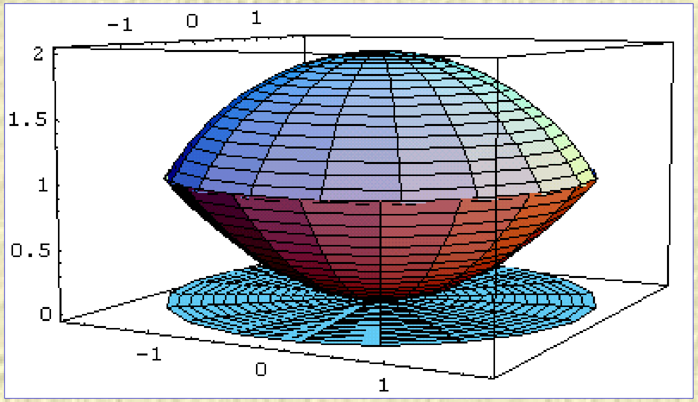
二.考虑被积函数的形式：　当被积函数为

$f(x^2+y^2,\ z)$、$f(\frac{y}{x},z)$、$f(\frac{x}{y},z)$等形式时 .

当$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$时，　$f(y^2+z^2,x)$等

上页　下页　返回

例1 计算 $I=\iiint\limits_V zdxdydz$，其中 V 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围的立体.



解 由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$，

知交线为 $\begin{cases} \rho^2+z^2=4 \\ \rho^2=3z \end{cases} \Rightarrow z=1,\quad \rho=\sqrt{3},$

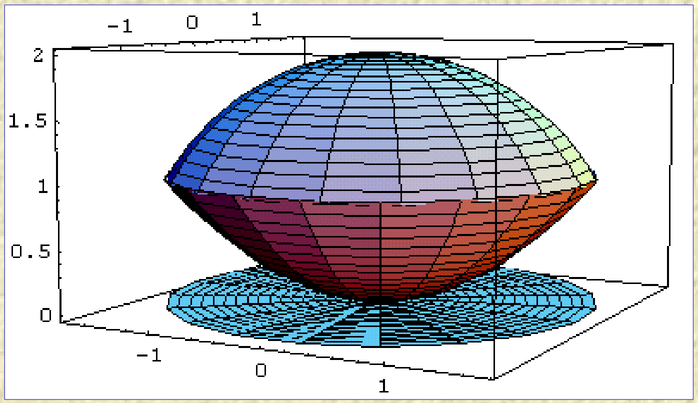
上页 下页 返回

例1 计算 $I=\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中 V 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围的立体.

$\Rightarrow z=1,\quad \rho=\sqrt{3},$

把闭区域 V 投影到 xoy 面上，则投影区域为 $\rho\le\sqrt{3}$

$$V:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le\sqrt{3},\\ \dfrac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}.\end{cases}$$



$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\cdot z\,dz=\frac{13}{4}\pi.$$

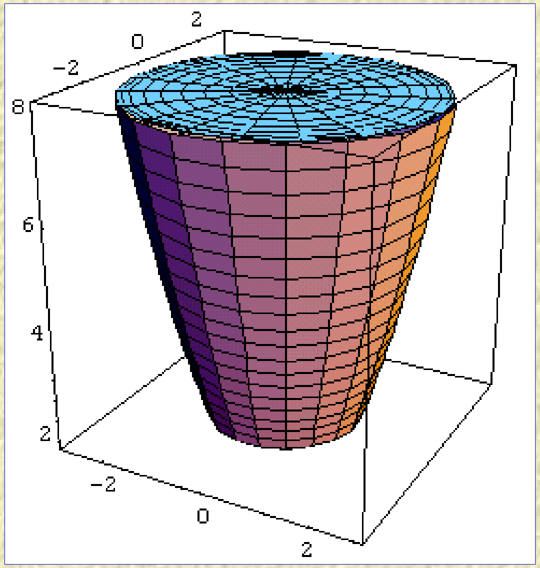
或 $\int_0^1 z\pi 3z\,dz+\int_1^2 z\pi(4-z^2)\,dz$

例 2　计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2, z=8$ 所围的立体.

解 由 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转得，

旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$，

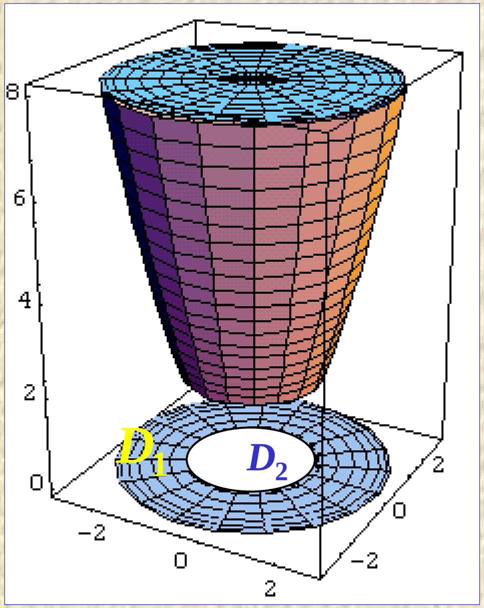
所围成的立体如图，



例 2　计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2, z=8$ 所围的立体.

所围成立体的投影区域如图，

$x^2+y^2=2z$



$D_1: x^2+y^2\le 4^2,$

$D_1:\ \rho\le 4,$

$z=\dfrac{\rho^2}{2}$

$$V_1:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 4\\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 8\end{cases},$$

$D_2: x^2+y^2\le 2^2,$

$D_2:\ \rho\le 2$

$$V_2:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 2\\ \dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 2\end{cases}.$$

上页 下页 返回

$$V_1: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 4 \\ \dfrac{\rho^2}{2} \le z \le 8 \end{cases}, \qquad V_2: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 2 \\ \dfrac{\rho^2}{2} \le z \le 2 \end{cases}.$$

$$\therefore I = I_1 - I_2$$

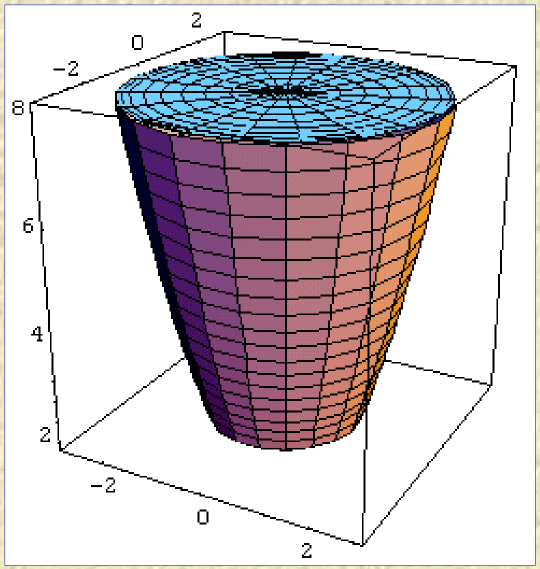
$$= \iiint_{V_1} (x^2 + y^2)dxdydz - \iiint_{V_2} (x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$I_1 = \iint_{D_1} \rho d\rho d\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8} fdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8} \rho \cdot \rho^2 dz = \frac{4^5}{3}\pi,$$

$$I_2 = \iint_{D_2} \rho d\rho d\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} fdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} \rho \cdot \rho^2 dz = \frac{2^5}{6}\pi,$$

原式$I = \dfrac{4^5}{3}\pi - \dfrac{2^5}{6}\pi = 336\pi.$

例 2　计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中$V$是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕z轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围的立体.



解　旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$,

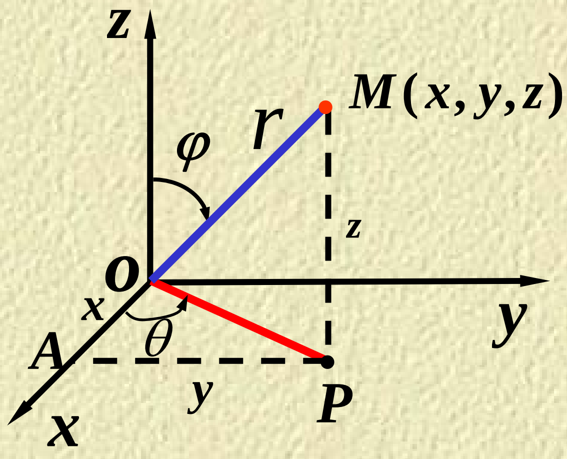
轴截面法

$$I=\int_2^8 dz\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3 d\rho=336\pi$$

8.3.3 三重积分在球坐标系中的计算

设 $M(x,y,z)$ 为空间内任一点， M在xoy面上的投影点为 $P(x,y,0)$，设r 为原点 O 与点M 间的距离， θ 为向线段 $\overrightarrow{OP}$与 x轴正向的夹角， φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$与 z轴正向的夹角，则点 M 可用有序数组 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 来确定， 数组 $(r,\ \theta,\ \varphi)$称为点 M 的球坐标.

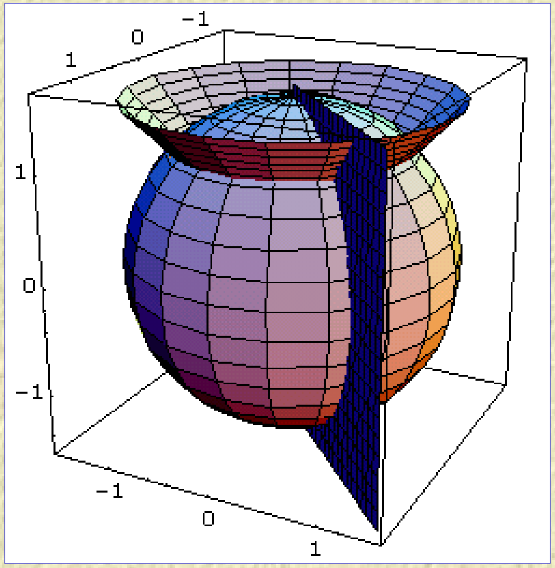


上页 下页 返回

三个坐标的取值范围为：

$$0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

如图，三坐标面分别为



r 为常数 $\Longrightarrow$ 球　面;

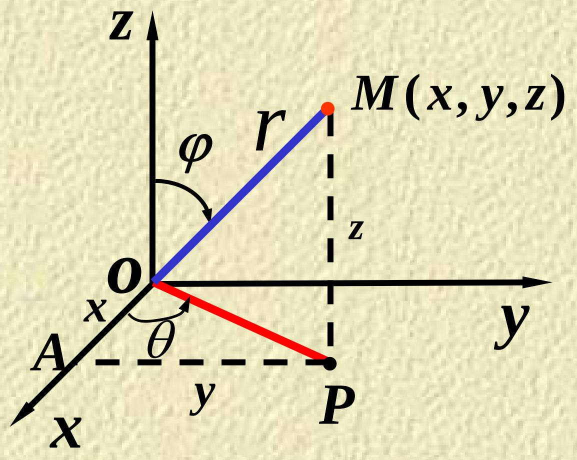
φ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆锥面;

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面.

如图，

设点 M 在 xoy 面上的投影为 P，

点 P 在 x 轴上的投影为 A，



则 $OA = x,\ AP = y,\ PM = z.$

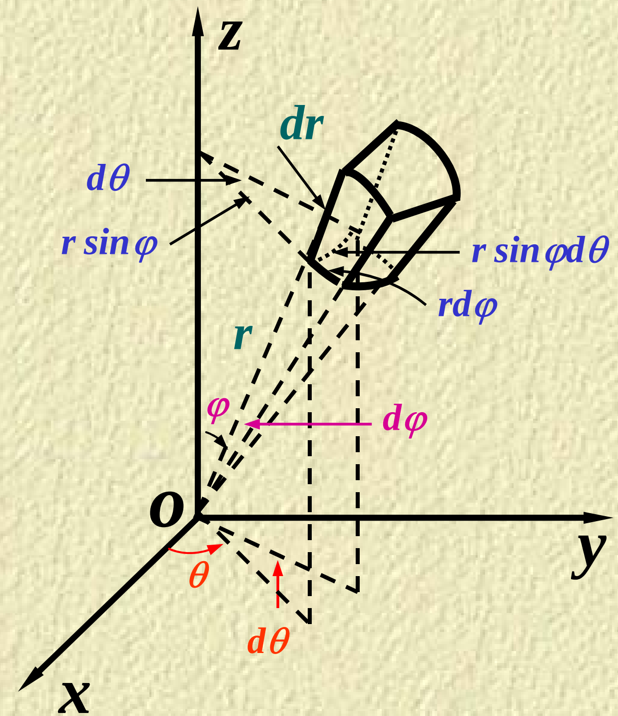
球面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

如图,

球坐标系中的体积元素为

$$dv = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta,$$



$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz =$$

$$\iiint_V f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

何时利用球面坐标来计算三重积分能使计算较为简便呢？

一.考虑积分区域的形状：　当积分区域 V在xoy坐标面上的投影的边界 方程是圆、扇形、环形或圆、扇形、环形 的一部分；

二.考虑被积函数的形式：　当被积函数为 $f(x^2+y^2+z^2)$时,特别当积分区域 V为球面或球面与圆锥面围成时 ，尤其简单．

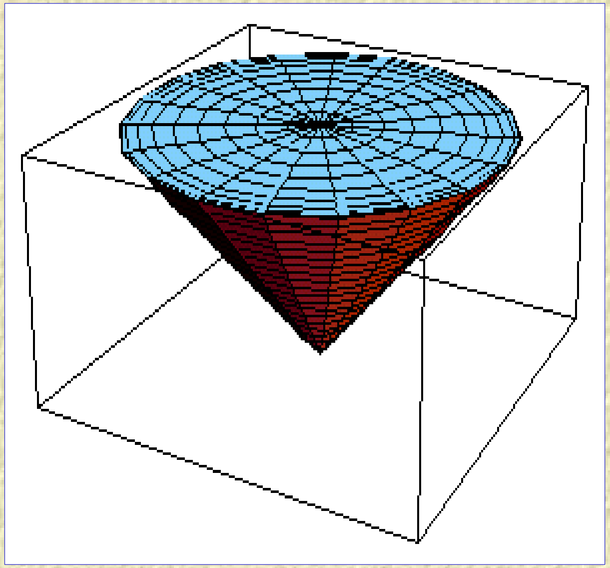
球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \Rightarrow r=a$

圆锥面 $x^2+y^2=az^2\ (a>0), \Rightarrow \varphi=\varphi_0$

上页　下页　返回

例 3 计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是锥面 $x^2+y^2=z^2$，与平面 $z=a \quad (a>0)$ 所围的立体.

解 1 采用球坐标



$$\because \quad z=a \Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore V:\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad ,0\le r\le\frac{a}{\cos\varphi}$$

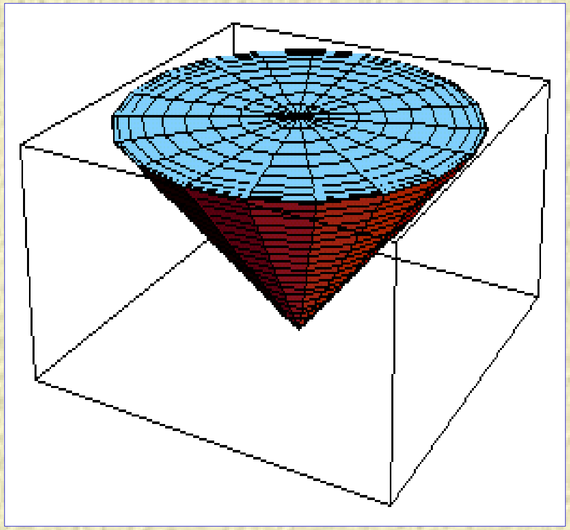
$$\therefore V:\ 0 \le \theta \le 2\pi,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\quad ,0 \le r \le \frac{a}{\cos\varphi}$$

$$I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^4 \sin^3\varphi dr$$

$$= \frac{\pi}{10} a^5.$$

例 3 计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中$V$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$， 与平面$z=a$ $(a>0)$所围的立体.



解 2 采用柱坐标

$\because x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho,$

$D:\quad x^2+y^2\le a^2,$

$V:\quad 0\le\theta\le 2\pi,\qquad 0\le\rho\le a,\qquad \rho\le z\le a,$

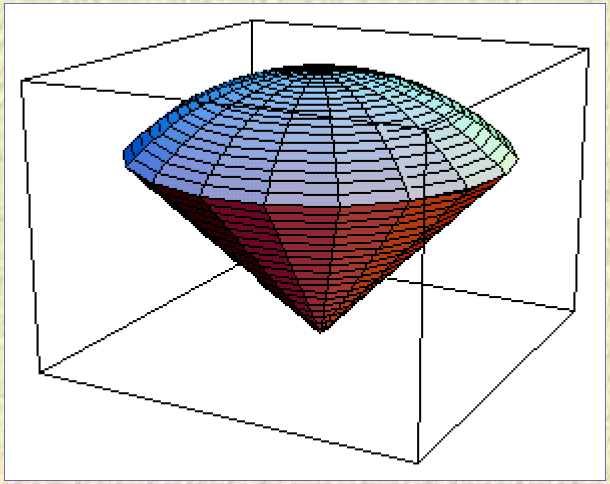
$$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho d\rho\int_\rho^a\rho^2dz$$

$$=2\pi\int_0^a\rho^3(a-\rho)d\rho=2\pi[a\cdot\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}]=\frac{\pi}{10}a^5.$$

上页 下页 返回

例 4 求曲面 $x^2+y^2+z^2 \le 2a^2$ 与 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成的立体体积.

解1 V 由锥面和球面围成，采用球坐标，



由 $x^2+y^2+z^2=2a^2$

$$\Rightarrow \quad r=\sqrt{2}a,$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$V: \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}a,$$

$$V:\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le r\le\sqrt{2}a,$$

由三重积分的性质知

$$V=\iiint_V dxdydz,$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr$$

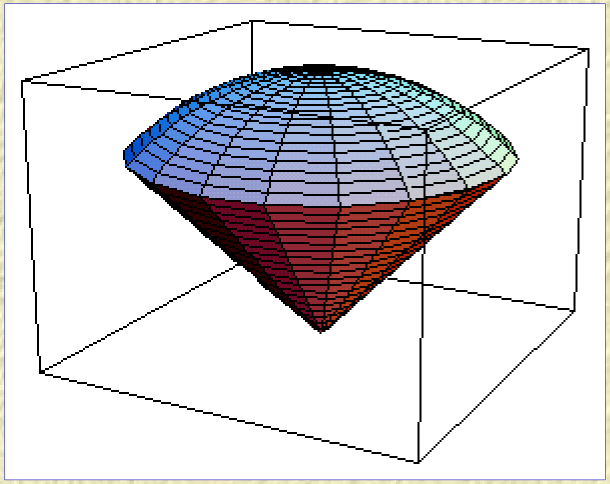
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

例 4　求曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2a^2$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成的立体体积.

解2　V 由圆锥面和球面围成，采用轴截面法。

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \quad z=a,$



由三重积分的性质知

$$V=\iiint_V dxdydz$$

$$=\int_0^a dz\iint_{D_z} dxdy+\int_a^{\sqrt{2}a} dz\iint_{D_z} dxdy$$

$$=\int_0^a \pi z^2 dz+\int_a^{\sqrt{2}a} \pi(2a^2-z^2)dz$$

利用对称性化简三重积分计算

使用对称性时应注意：

1、积分区域关于坐标面的对称性；

2、被积函数在积分区域上的关于三个坐标轴的 奇偶性.

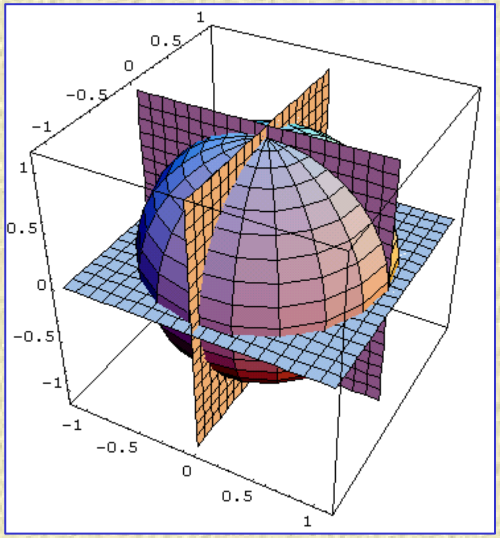
一般地，当积分区域V关于xoy平面对称，且被积函数$f(x,y,z)$是关于z的奇函数，则三重积分为零，若被积函数$f(x,y,z)$是关于z的偶函数，则三重积分为V在xoy平面上方的半个闭区域的三重积分的两倍.

例 5　利用对称性简化计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz$$

其中积分区域 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

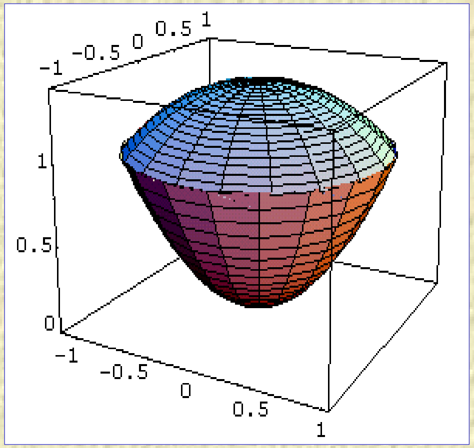
解　积分域关于三个坐标面都对称，



被积函数是 **z** 的奇函数，

$$\iiint_{V} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz = 0.$$

例 6　计算 $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz$，其中 V 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围成的空间闭区域.



解　$\because (x+y+z)^2$

$= x^2+y^2+z^2+2(\underline{xy+yz}+zx)$

其中 $xy+yz$ 是关于 y 的奇函数,

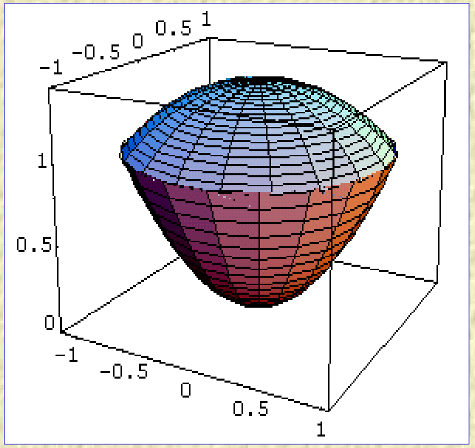
且 V 关于 zox 面对称, $\therefore \iiint\limits_V (xy+yz)dv = 0$,

同理　$\because zx$ 是关于 x 的奇函数,

且 V 关于 yoz 面对称, $\therefore \iiint\limits_V xzdv = 0$,

上页　下页　返回

由对称性知 $\iiint\limits_V x^2 dv = \iiint\limits_V y^2 dv$，



则 $I = \iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz$

$$= \iiint\limits_V (2x^2 + z^2)dxdydz,$$

投影区域 D_{xy}： $x^2 + y^2 \le 1,$

在柱坐标系下：

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \qquad \rho^2 \le z \le \sqrt{2-\rho^2},$$

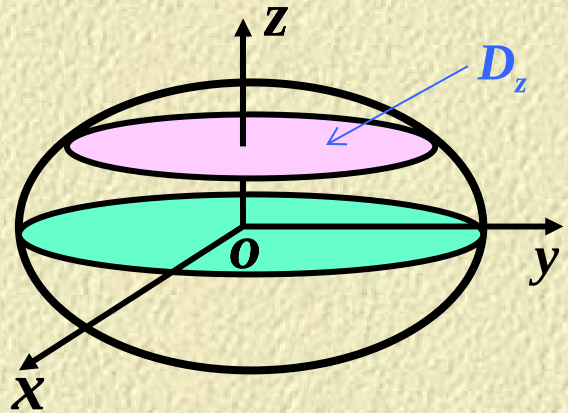
$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho(2\rho^2\cos^2\theta + z^2)dz$$

$$= \frac{\pi}{60}(90\sqrt{2} - 89).$$

上页 下页 返回

例 5（书中例 3） 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所成的空间闭区域.

解 V： $\{(x,y,z)\,|\,-c\le z\le c,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\}$

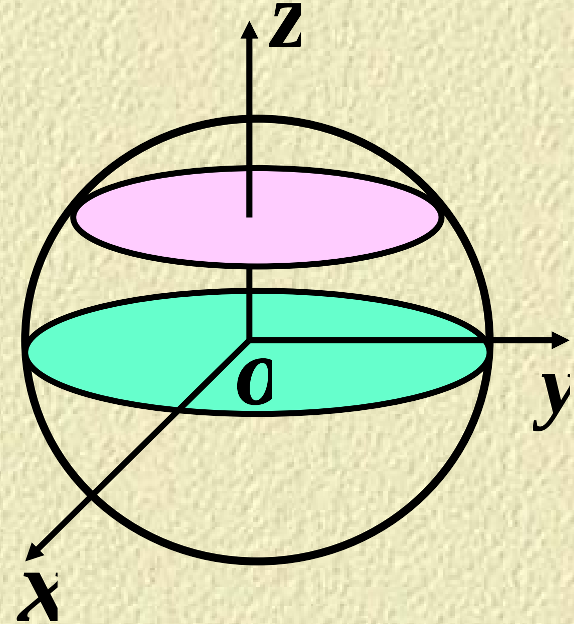


原式 $=\int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy=\frac{4}{15}\pi abc^3$

变量轮换的对称性:

例 5(改书中例 3) 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所成的空间闭区域.

解



原式

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{4}{15}\pi R^5$$

小结2

$$\text{三重积分换元法}\begin{cases}\text{柱坐标}\\ \text{球坐标}\end{cases}$$

（1） 柱坐标的体积元素

$$dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$$

（2） 球坐标的体积元素

$$dxdydz = r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi$$

（3） 对称性简化运算

思考题

若V为R^3中关于 xoy 面对称的有界闭区域，$f(x,y,z)$为V上的连续函数，则

当$f(x,y,z)$关于 $\underline{z}$ 为奇函数时，$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=0$;

当$f(x,y,z)$关于 $\underline{z}$ 为偶函数时，

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\underline{2}\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dv$$

其中V_1为V在xoy面上方的部分．

历年研究生试题

三重积分计算部分

1.(97,5).计算$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv$,其中$\Omega$为

平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的

曲面与平面 $z=8$所围成的区域 .

分析：平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面方程为$x^2+y^2=2z$,积分区域$\Omega$在$xoy$平面上的投影区域为圆域$x^2+y^2\le 16$，故本题有两种解法：一种是利用柱坐标，另一种是在直角坐标下先二（因是圆域，故利用极坐标）后一。

解1: 利用柱坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

$z = z, dv = rdrd\theta dz,$ 则

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2 dz$$

$$= 2\pi \int_0^4 r^3 (8 - \frac{r^2}{2}) dr = \frac{1024}{3}\pi$$

解2: $I = \int_0^8 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z} (x^2 + y^2) dxdy$

$$= \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 \cdot rdr = \frac{1024}{3}\pi$$

上页 下页 返回

2.(91,5)求$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$，其中$\Omega$是由

曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面

与平面$z=4$所围成的立体。

解：利用柱坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$

$z=z, dv=rdrd\theta dz$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}(4r^3+8r-\frac{5}{8}r^5)dr=\frac{256}{3}\pi$$

上页 下页 返回

3.(89,5)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$,其中 Ω

是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

所围成的区域 .

解 1.利用球坐标进行计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1[r\sin\varphi\cos\theta+r\cos\varphi]r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

上页 下页 返回

解 2. $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV=\iiint\limits_{\Omega}xdV+\iiint\limits_{\Omega}zdV$

由于积分域 Ω 关于 yoz 坐标面前后对称，而被积函数 x 是 x 的奇函数，则 $\iiint\limits_{\Omega}xdV=0$

对积分 $\iiint\limits_{\Omega}zdV$ 采用先二后一的方法，则

$$\iiint\limits_{\Omega}zdV=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}zdxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}zdxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi z^3dz+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi z(1-z^2)dz=\frac{\pi}{8}$$

4.(03,12)设函数 $f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$,

(1)讨论 $F(t)$在区间 $(0,+\infty)$内的单调性 .

(2)证明当 $t>0$时， $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

上页 下页 返回

分析：本题中出现了变域上的二重积分

$$\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma$$ 和变域上的三重积分

$$\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv,$$ 此时一般都是将变

域上的重积分化为累次积分，从而进一步化为变上限的定积分再作处理 .

化为累次积分时由被积函数的形式及积分区域的形状（球域、圆域），故三重积分化为球面坐标计算、二重积分化为极坐标计算 .

上页 下页 返回

(1)解：由于 $F(t)=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{t}f(r^2)rdr}$

$$=\frac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2dr}{\int_0^{t}f(r^2)rdr}$$ 则

$$F'(t)=\frac{2f(t^2)t^2\int_0^{t}f(r^2)rdr-2f(t^2)t\int_0^{t}f(r^2)r^2dr}{\left(\int_0^{t}f(r^2)rdr\right)^2}$$

$$=\frac{2tf(t^2)\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)dr}{\left(\int_0^{t}f(r^2)rdr\right)^2}>0 \quad t\in(0,+\infty)$$

故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2)证：由于 $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$,

要证明当 $t>0$时， $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$,

只需证明当 $t>0$时， $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$

即$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-(\int_0^t f(r^2)rdr)^2>0$

令$\varphi(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-(\int_0^t f(r^2)rdr)^2$

则 $\varphi'(t) = f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)dr +$

$$f(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2dr - 2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)rdr$$

$$= f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr > 0$$

故 $\varphi(t)$在$(0,+\infty)$上单调增加.

又$\varphi(t)$在$t=0$处连续，$\varphi(0)=0$,

则当 $t>0$时，$\varphi(t)>0$,

故当 $t>0$时，$F(t) > \dfrac{2}{\pi}G(t)$.

作业：

P133：　1(1)(3).　　2(2)(3).

P160：　1(1)(3)(4)(6)(8).　　2(2)(3).　　4.

作业：

P133： 3奇. 4 (2)(3)(4). 5. 7.

P160： 3. 11.