8.4 重积分的应用

把定积分的微元法推广到重积分的应用中.

若要计算的某个量U对于闭区域 Ω具有可加性(即当闭区域Ω分成许多小闭区域时，所求量U相应地分成许多部分量，且U等于部分量之和)，并且在闭区域 Ω内任取一个直径很小的闭区域 $d\Omega$ 时，相应地部分量可近似地表示为 $f(P)d\Omega$ 的形式,其中 P 在 $d\Omega$ 内．表达式 $f(P)d\Omega$ 称为所求量U的微元，记为 dU，所求量的积分表达式为

$$U=\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$U=\iiint_V f(x,y,z)dV$$

上页 下页 返回

1. 曲面的面积

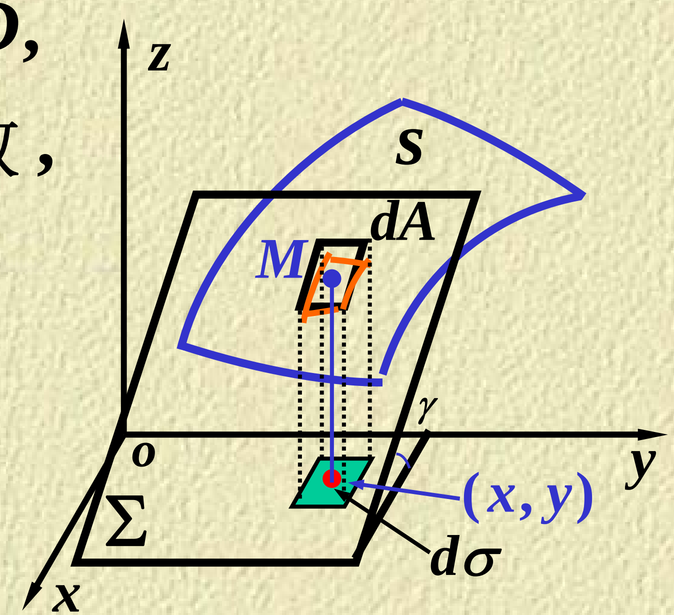
1． 设曲面的方程为：$z = f(x, y)$

在 xoy 面上的投影区域为 D,

$f(x, y)$在D上有连续的偏导数,

如图， 设小区域 $d\sigma \in D$,

点 $(x, y) \in d\sigma$,



Σ 为 S 上过 $M(x, y, f(x, y))$ 的切平面.

以 $d\sigma$ 边界为准线，母线平行于 z 轴的小柱面，截曲面 s 为 ds；截切平面 Σ 为 dA,

则有$dA \approx ds$.

上页 下页 返回

$\because d\sigma$ 为 dA 在 xoy 面上的投影，$\therefore \quad d\sigma = dA \cdot |\cos\gamma|$,

$$\because \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},$$

$$\therefore dA = \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,d\sigma$$ 曲面S的面积元素

$$\therefore A = \iint_D \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,d\sigma,$$

曲面面积公式为：$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

同理可得

2．设曲面的方程为：$x = g(y,z)$

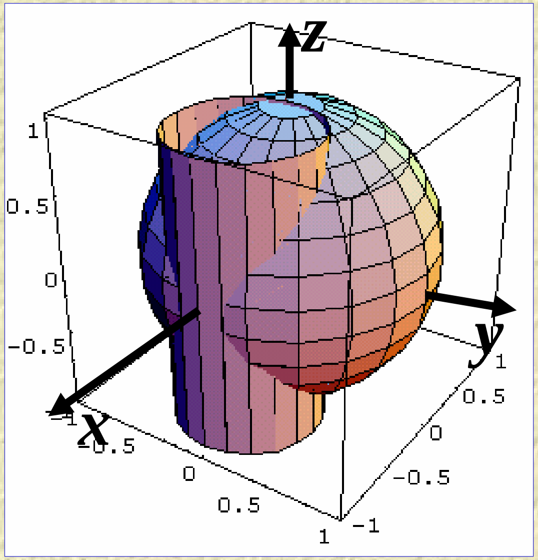
曲面面积公式为：$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz;$$

3．设曲面的方程为：$y = h(z,x)$

曲面面积公式为：$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dzdx.$$

例 1　求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体$x^2+y^2=ax$内部的那部分面积.

解　由对称性知$A=4A_1$,



$$D_1: \ x^2+y^2\le ax \quad (x,y\ge 0)$$

曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

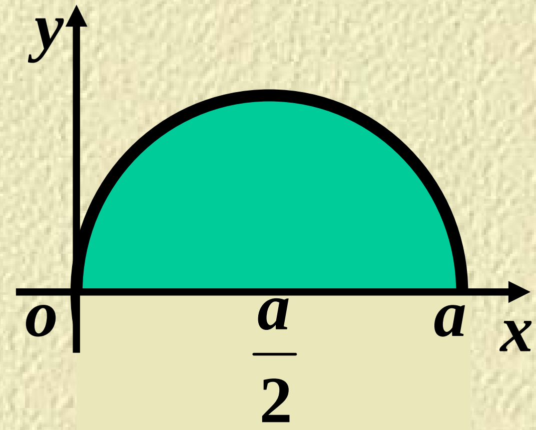
于是$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

面积 $A = 4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

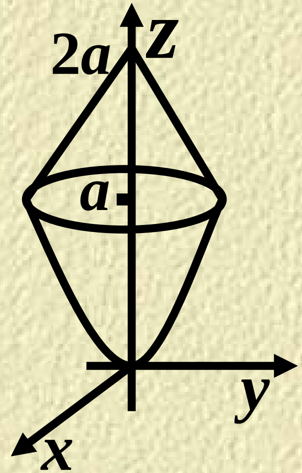
$$= 4\iint\limits_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho d\rho$$

$$= 2\pi a^2 - 4a^2.$$



例 2 求由曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围立体的表面积.



解 解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$,

得两曲面的交线为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases}$,

在 xy 平面上的投影域为 D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$,

由 $z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$ 得 $z'_x=\dfrac{2x}{a}$, $z'_y=\dfrac{2y}{a}$,

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2},$$

由 $z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$ 知 $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{2}$,

故 $S = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,dxdy + \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{2}\,dxdy$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{1}{a}\sqrt{a^2+4\rho^2}\cdot\rho d\rho \quad + \underline{\sqrt{2}\pi a^2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

2. 物体的质量

设有平板物体占有平面区域D,物体的面密度为$\rho(x,y)$

任意分割平面区域 D, 考虑小区域$d\sigma$,设$p(x,y)$为$d\sigma$内任意一点,物体的质量微元dm=$\rho(x,y)\,d\sigma$

则其质量为

$$m=\iint_D \rho(x,y)d\sigma$$

设物体占有空间区域V,物体的体密度为$\rho(x, y, z)$

则其质量为

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dv$$

上页 下页 返回

3. 物体的质心(重心)

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots, (x_n, y_n)$处，质量分别为$m_1, m_2, \cdots, m_n$. 则该质点系的**质心**的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

m为质点系的总质量；M_y为质点系关于y轴的静力矩；M_x为质点系关于x轴的静力矩.

上页 下页 返回

设有一平面薄片，占有 xoy 面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，平面薄片的质心

由微元法 $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$， $\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma}$.

当薄片是均匀的，质心称为**形心**.

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x d\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y d\sigma.$$ 其中 $A=\iint\limits_D d\sigma$

类似的，若物体占有空间区域 V，体密度为 $\rho(x,y,z)$，则物体的质心

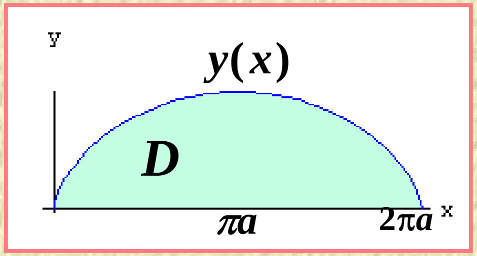
$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{V} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)dv} \qquad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{V} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)dv}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{V} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)dv}$$

例 3　设平面薄板由$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，$(0 \le t \le 2\pi)$

与x轴围成，它的面密度$\rho = 1$，求形心坐标.

解　先求区域D的面积A,



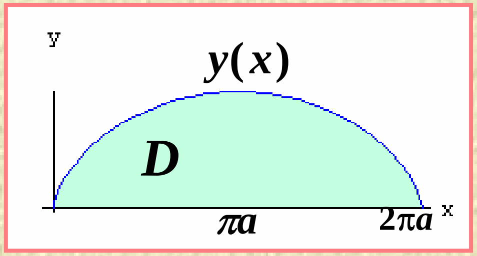
$\because 0 \le t \le 2\pi$，　$\therefore 0 \le x \le 2\pi a$

$$A = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)d[a(t - \sin t)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

上页　下页　返回

由于区域关于直线$x=\pi a$对称，



所以形心在$x=\pi a$上，　　即　$\bar{x}=\pi a,$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,dxdy=\frac{1}{A}\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y\,dy$$

$$=\frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi a}[y(x)]^2dx=\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}[1-\cos t]^3dt=\frac{5a}{6}.$$

所求形心坐标为 $(\pi a,\ \frac{5}{6}a)$.

均匀物体求质心时，对称性的应用大大地减少了计算量。

上页　下页　返回

当给定一个实际问题， 求质心坐标时，应注意什么?

求质心有固定的方法， 由于质心坐标是相对于某一坐标系而言 的，因此问题的关键是建立一个合适（可利 用对称性简化计算）的坐标系.一般说来，可考虑选取 中心(比如:球心、圆心)或固定点 P_0 作为坐标原点 .

上页 下页 返回

例 4（书中例 3）均匀物体的形状是一个半径为 b 的半球体挖去一个半径为 $a\ (b>a)$ 的同心半球体，求质心坐标.

解：以球心为原点，以物体的对称轴为 z 轴建立坐标系. 由于物体均匀，形状对称，质心必定在 z 轴上，即 $\bar{x}=\bar{y}=0$

设 $\rho(x,y,z)=k$，则

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\cdot k\,dv}{\iiint\limits_V k\,dv}=\frac{\iiint\limits_V z\,dv}{\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)}$$

上页 下页 返回

$$\because \iiint_V z dv = \iiint_V r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_a^b r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4}(b^4 - a^4)$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{4}(b^4 - a^4)}{\frac{2}{3}\pi(b^3 - a^3)} = \frac{3}{8}\frac{(b^4 - a^4)}{(b^3 - a^3)}$$

质心坐标为$(0,0,\bar{z})$

上页 下页 返回

4. 物体的转动惯量

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots,(x_n,y_n)$处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$. 则该质点系对于x轴和y轴的**转动惯量**依次为

$$j_x=\sum_{i=1}^{n}m_i y_i^2,\qquad J_y=\sum_{i=1}^{n}m_i x_i^2.$$

上页 下页 返回

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续，平面薄片对于x轴和y轴的转动惯量为

薄片对于x轴的转动惯量 $J_x = \iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,$

薄片对于y轴的转动惯量 $J_y = \iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma.$

薄片对于原点的转动惯量

$$J_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)d\sigma.$$

类似的，若物体占有空间区域V，体密度为$\rho(x,y,z)$

物体对于三个坐标轴的转动惯量

$$J_x=\iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

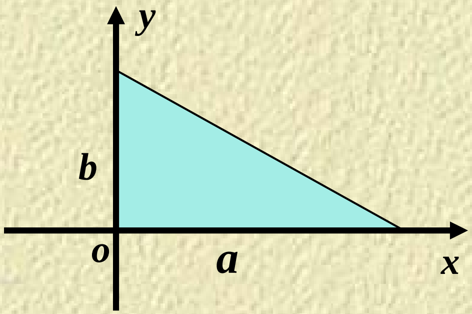
$$J_y=\iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

$$J_z=\iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$$

物体对于原点的转动惯量

$$J_O=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

例 5　设一均匀的直角三角形薄板，两直角边长分别为a、b，求这三角形对其中任一直角边的转动惯量.



解　设三角形的两直角边分别在x轴和y轴上，如图

对y轴的转动惯量为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\Rightarrow x=a(1-\frac{y}{b})$$

$$J_y=\rho\iint_D x^2dxdy,$$

$$=\rho\int_0^b dy\int_0^{a(1-\frac{y}{b})}x^2dx=\frac{1}{12}a^3b\rho.$$

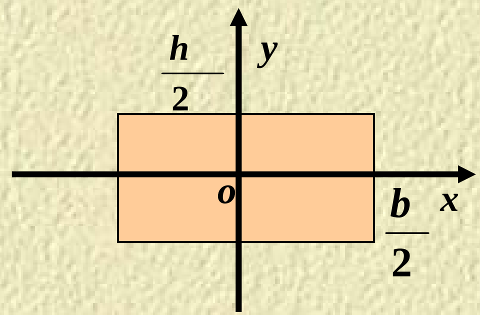
同理：对x轴的转动惯量为$J_x=\rho\iint_D y^2dxdy=\frac{1}{12}ab^3\rho$

上页　下页　返回

例 6 已知均匀矩形板（面密度为常数ρ）的长和宽分别为b和h，计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 先求形心 $\bar{x}=\dfrac{1}{A}\iint\limits_D x\,dxdy$, $\bar{y}=\dfrac{1}{A}\iint\limits_D y\,dxdy$.

区域面积 $A=b\cdot h$,



建立坐标系如图

因为矩形板均匀,

由对称性知形心坐标 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$.

上页 下页 返回

对 x 轴的转动惯量

$$J_x = \rho\iint_D y^2 dxdy$$

$$= \rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx = \frac{bh^3\rho}{12}.$$

对 y 轴的转动惯量

$$J_y = \rho\iint_D x^2 dxdy = \frac{b^3 h\rho}{12}.$$

例 7(书中例 4) 设球形物体的半径为 R，密度为常数ρ，求物体绕一直径的转动惯量.

解: 设球心为坐标原点，此直径为 z 轴，则

$$V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$$

$$=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\le r\le R, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta<2\pi\}$$

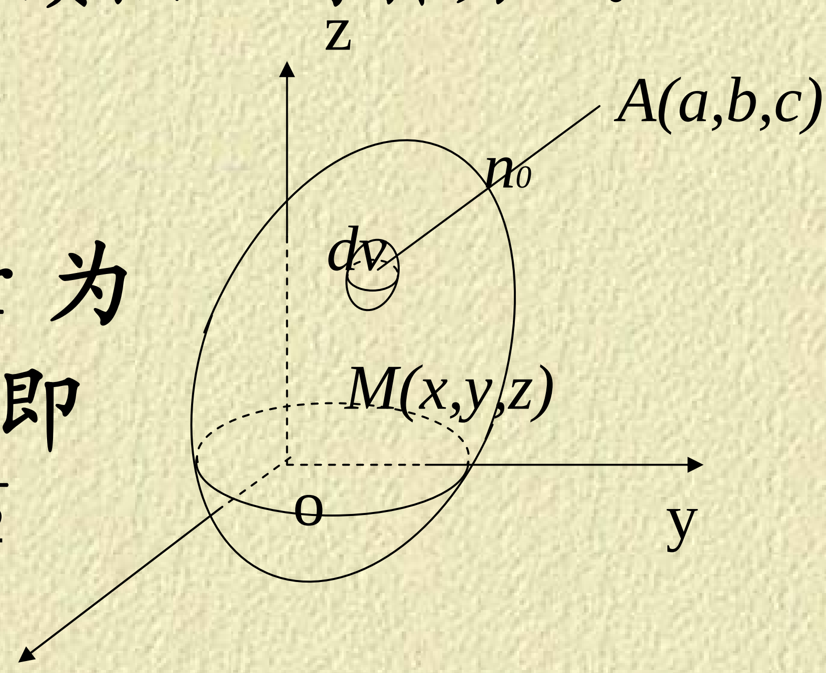
则 $$J_z=\iiint_V(x^2+y^2)\rho dV=\rho\iiint_V r^4\sin^3\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr$$

$$=2\pi\rho\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^4dr=\frac{8}{15}\pi R^5\rho$$

5. 物体对质点的引力

设物体占有空间区域 V，体密度为 $\rho(x,y,z)$，区域 V 之外有一质量为 m 的质点 A(a, b, c)，求物体 V 对质点 A 的引力 F。



$$d\vec{F}=\frac{km\rho(x,y,z)dv}{r^2}\vec{n}^0$$

其中 k 为引力常数，r 为点 M 到点 A 的距离，即

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

$\vec{n}^0$ 为 $\overrightarrow{AM}$ 的单位向量，即

$$\vec{n}^0=\frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|}=\frac{\overrightarrow{AM}}{r}=\left\{\frac{x-a}{r},\frac{y-b}{r},\frac{z-c}{r}\right\}$$

上页 下页 返回

引力在三个坐标方向的分量微元分别为

$$dF_x = \frac{km\rho(x,y,z)(x-a)}{r^3}dv$$

$$dF_y = \frac{km\rho(x,y,z)(y-b)}{r^3}dv$$

$$dF_z = \frac{km\rho(x,y,z)(z-c)}{r^3}dv$$

于是引力在三个坐标方向上的分量

$$F_x = \iiint_V \frac{km\rho(x,y,z)(x-a)}{r^3}dv$$

$$F_y = \iiint_V \frac{km\rho(x,y,z)(y-b)}{r^3}dv$$

$$F_z = \iiint_V \frac{km\rho(x,y,z)(z-c)}{r^3}dv$$

设有一平面薄片，占有xoy面上的闭区域D，在点(x, y)处的面密度为$\rho(x, y)$，假定$\rho(x, y)$在D上连续，计算该平面薄片对位于 z轴上的点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力．$(a > 0)$

薄片对z轴上单位质点的引力 $F = \{F_x, F_y, F_z\}$,

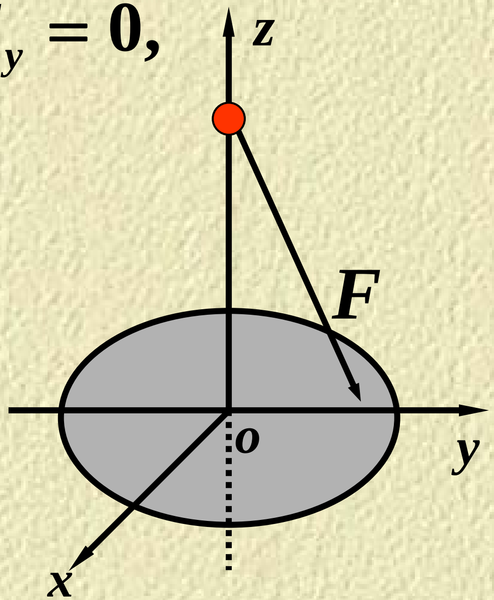
$$F_x = k\iint_D \frac{\rho(x, y)x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma, \quad F_y = k\iint_D \frac{\rho(x, y)y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma,$$

$$F_z = -ak\iint_D \frac{\rho(x, y)}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma.$$

k为引力常数

例 8　求面密度为常量、半径为R的均匀圆形薄片：$x^2+y^2\le R^2$，$z=0$对位于 z轴上的点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力．$(a>0)$

解　由积分区域的对称性知　$F_x=F_y=0$,



$$F_z=-ak\iint_D\frac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$=-ak\rho\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

上页　下页　返回

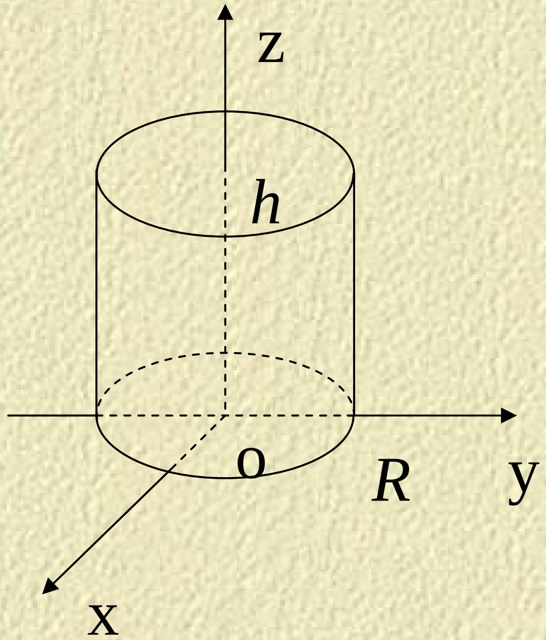
$$= -ak\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \frac{1}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}rdr$$

$$= 2\pi ka\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right).$$

所求引力为

$$\left\{0,\ 0,\ 2\pi ka\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)\right\}.$$

例 9(书中例 6) 求均匀圆柱体对位于圆柱体底面中心处质量为 m 的质点的引力。



解:取坐标系如图所示

设密度为常数 ρ, 圆柱体底半径为 R, 高为 h, 显然 $F_x = F_y = 0$ 则只需计算 F_z.

$$F_z = \iiint_V \frac{km\rho z dv}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

上页 下页 返回

$$F_z = \iiint_V \frac{km\ \rho z dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= km\mu \iint_D dxdy \int_0^h \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

$$= km\mu \iint_D \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right] dxdy$$

$$= km\ \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] \cdot \rho d\rho$$

$$= 2km\ \mu\pi\, [R + h - \sqrt{R^2 + h^2}]$$

小结

几何应用：曲面的面积

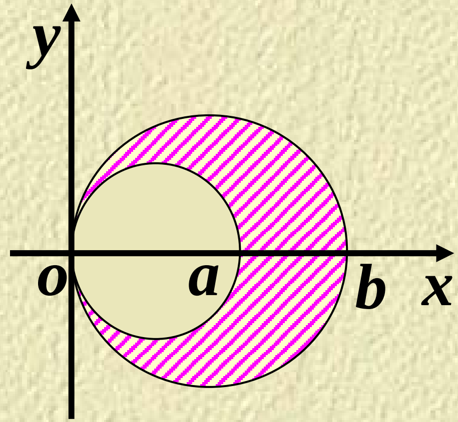
物理应用：质量、质心、转动惯量、
对质点的引力

（注意审题，熟悉相关物理知识）

思考题

求位于两圆 $r = a\cos\theta, r = b\cos\theta \quad (0 < a < b)$ 之间的均匀薄片的质心 .

思考题解答



薄片关于 x 轴对称

则 $\bar{y} = 0,$

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho d\sigma}{\iint\limits_D \rho d\sigma} = \frac{2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} r\cos\theta \cdot r dr}{\rho \cdot D}$$

$$= \frac{\frac{\pi\rho}{8}(b^3 - a^3)}{\frac{\pi\rho}{4}(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{2(b+a)}.$$

上页 下页 返回

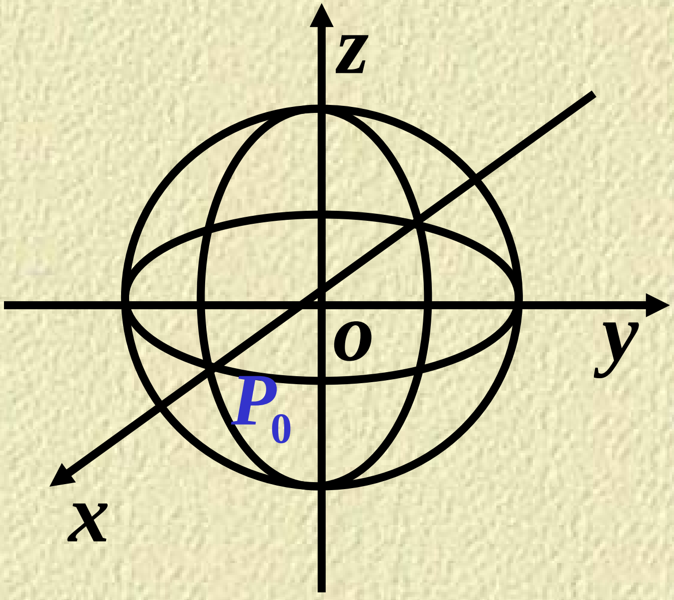
历届研究生考试试题

(00,7)设有一半径为 R 的球体， P_0 是此球表面上的一个定点，球 体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k > 0$)，求球体的质心位置 .

分析：求重心有固定的 方法，由于重心坐标是相对于某一坐标系而言 的，因此本题的关键是建立一个合适（可利用 对称性简化计算）的坐标系.一般说来，可考虑选取 球心或固定点 P_0 作为坐标原点，相应地有 两种求解方法 .

解1: 取球心为原点，球面与 x轴正向交点为 P_0，则 P_0坐标为 $(R,0,0)$，记所考虑球体为 Ω，则球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$



设Ω的质心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，

由对称性知： $\bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0$

$$\because \quad \bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} kx[(x-R)^2 + y^2 + z^2]dv}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]dv}$$

上页 下页 返回

而 $\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]dv$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv-2R\iiint\limits_{\Omega}xdv+\iiint\limits_{\Omega}R^2dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^4\sin\varphi dr+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x[(x-R)^2+y^2+z^2]dv$$

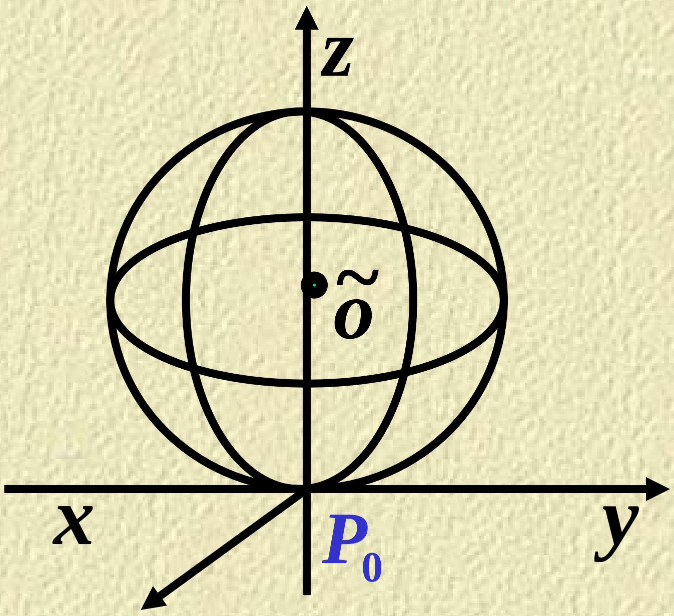
$$=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2dv+\iiint\limits_{\Omega}x(x^2+R^2+y^2+z^2)dv$$

$$=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x}=-\dfrac{R}{4}$

解2：取球心为 $\tilde{O}(0,0,R)$，
P_0点为原点，则球面方程为
$x^2+y^2+z^2=2Rz.$
设Ω的质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，
由对称性知：

$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,$ 则



$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)dv}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)dv}$$

上页 下页 返回

而 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr = \frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)dv$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr$$

$$= \frac{64}{3}\pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{z} = \dfrac{5}{4}R$

注释：本题主要考察质心求法及球坐标下三重积分的计算.本题解1中用到三重积分计算中常用的几个技巧（即两种对称性），如积分$\iiint\limits_{\Omega} xdv$和$\iiint\limits_{\Omega} x(x^2+R^2+y^2+z^2)dv$都为零，这是因为这两个积分的被积函数都是$x$的奇函数，而积分域$\Omega$关于$yoz$平面对称；另外还用到$\iiint\limits_{\Omega} x^2dv=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，这是因为$\iiint\limits_{\Omega} x^2dv=\iiint\limits_{\Omega} y^2dv=\iiint\limits_{\Omega} z^2dv$.这些技巧是经常要用到的，望同学们能特别注意。

上页 下页 返回

作业：

P141： 1(1)(3)(5). 2(2)(4).

3. 5. 6. 8.