习题 3.1(P145)

1．选择题

(1) 设函数 $f(x)=\sqrt[3]{x-x^2}$，则（　　）.

A．在任意区间 $[a,b]$ 上罗尔定理一定成立　　B．在区间 $[0,1]$ 上罗尔定理不成立

C．在区间 $[0,1]$ 上罗尔定理成立　　D．在任意区间 $[a,b]$ 上罗尔定理都不成立

解：$f'(x)=\dfrac{1-2x}{3\sqrt[3]{(x-x^2)^2}}$，故 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，

$f(0)=f(1)$，由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.(此处 $\xi=\dfrac{1}{2}$). 故选 C.

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，在开区间 $(-1,1)$ 上可导，且 $|f'(x)|\le M$，

$f(0)=0$,则必有（　　）.

A. $|f(x)|\ge M$　　B. $|f(x)|>M$　　C. $|f(x)|\le M$　　D. $|f(x)|<M$

解：$\forall x\in[-1,1]$，由拉格朗日中值定理：$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$

所以 $|f(x)|=|f'(\xi)x|\le|f'(\xi)|\le M$，故选 C.

(3) 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，恒有

$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_2-x_1)^2$ 则必有（　　）

A．$f'(x)\ne 0$　　B．$f'(x)=x$　　C．$f(x)=x$　　D．$f(x)=C$ (常数)

解：$\forall x\in(a,b)$，给 x 一个增量 Δx，使得 $x+\Delta x\in(a,b)$，

则由题意得：$|f(x+\Delta x)-f(x)|\le(\Delta x)^2$

故有 $|f'(x)|=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}\right|=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$

所以 $f'(x)=0$，故 $f(x)=C$. 故选 D.

(4)已有函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则方程 $f'(x)=0$ 有（　　）

A．分别位于区间 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 内的三个根

B．四个根，分别为 $x_1 = 1$， $x_2 = 2$， $x_3 = 3$， $x_4 = 4$.

C．四个根，分别位于区间内 $(0, 1)$， $(1, 2)$， $(2, 3)$， $(3, 4)$ 内

D．分别位于区间 $(1, 2)$， $(1, 3)$， $(1, 4)$ 内的三个根

解：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1, 2]$，$[2, 3]$，$[3, 4]$ 上连续，在开区间 $(1, 2)$，$(2, 3)$，$(3, 4)$ 内可导，且 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$，在区间 $[1, 2]$，$[2, 3]$，$[3, 4]$ 上分别应用罗尔定理，则 $\exists \xi_i \in (i, i+1) \quad (i = 1,2,3)$，使得 $f'(\xi_i) = 0$，故选 A.

(5) 方程 $5x - 2 + \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0$（　　）

A．无实根　B．有惟一的实根　C．有重实根　　D．有三个根

解：(ⅰ)证存在性：设 $f(x) = 5x - 2 + \cos\dfrac{\pi x}{2}$， $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0) = -1 < 0$， $f(1) = 3 > 0$，由零点定理：至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f(\xi) = 0$；

(ⅱ)证惟一性：法 1 反证法：假设存在一点 $\xi_1 \in (-\infty, +\infty)$， $\xi_1 \neq \xi$，使得 $f(\xi_1) = 0$，则 $f(x)$ 在以 ξ 及 ξ_1 为端点的区间上满足罗尔定理：故存在介于 ξ 与 ξ_1 之间的一点 ξ_2，使得 $f'(\xi_2) = 0$，而 $f'(x) = 5 - \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2} > 0$，矛盾！

法 2 证单调性说明惟一：若 $x_1 < x_2$，

$$f(x_2) - f(x_1) = 5(x_2 - x_1) + \cos\frac{\pi x_2}{2} - \cos\frac{\pi x_1}{2}$$

$$= 5(x_2 - x_1) - 2\sin\frac{\pi(x_2 + x_1)}{4}\sin\frac{\pi(x_2 - x_1)}{4} \geq 5(x_2 - x_1) - 2\cdot\frac{\pi(x_2 - x_1)}{4}$$

$$= (5 - \frac{\pi}{2})(x_2 - x_1) > 0$$　　（此处利用 $|\sin x| \leq 1$ 及当 $x > 0$ 时 $\sin x \leq x$ ）

即 $f(x)$ 单调递增（学习了 3.4 节后，可以利用导数符号判别单调性），故选 B.

2. 证明下列不等式：

(1)$|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$

证：当 $x=y$ 时，$|\arctan x-\arctan y|=|x-y|$

当 $x\ne y$ 时，设 $f(x)=\arctan x$，函数 $f(x)$ 在以 x 及 y 为端点的闭区间上应用拉格朗日

中值定理：$\arctan x-\arctan y=\dfrac{1}{1+\xi^2}(x-y)\quad(\xi\text{介于}x\text{与}y\text{之间})$

$|\arctan x-\arctan y|=\dfrac{1}{1+\xi^2}|x-y|<|x-y|$

(2)$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)\quad(n>1,b>a>0)$

证：设 $f(x)=x^n$，则 $f'(x)=nx^{n-1}$， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，

故有 $b^n-a^n=n\xi^{n-1}(b-a)\quad(a<\xi<b)$

从而有 $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$

(3)$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x,\ \ x\in(0,\pi)$

法 1：用拉格朗日中值定理证明：设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$，

在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理， 故有 $\dfrac{\sin x}{x}=\cos\xi>\cos x\quad x\in(0,\pi)$

法 2：用单调性证明：即证 $\sin x>x\cos x,\ \ x\in(0,\pi)$

(变形的目的是避开了商式求导，变形时要注意不等号的方向有否改变)

设 $f(x)=\sin x-x\cos x,\ \ x\in(0,\pi)$，则 $f'(x)=x\sin x>0\ \ x\in(0,\pi)$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 单调递增，而 $f(0)=0$，故 $f(x)>0\ \ x\in(0,\pi)$

(4)$a^b>b^a\quad(b>a>e)$

证：即证 $b\ln a>a\ln b\quad(b>a>e)$

法 1： $f(x)=x\ln a-a\ln x\quad x\in(a,b)$，则 $f'(x)=\ln a-\dfrac{a}{x}\quad x\in(a,b)$，所以 $f(x)$

在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理：$b\ln a-a\ln b=f'(\xi)(b-a)=\left(\ln a-\dfrac{a}{\xi}\right)(b-a)$

$\because \xi > a > e$，从而$\left(\ln a - \dfrac{a}{\xi}\right) > 0$， 故$b\ln a - a\ln b > 0$

法 2:（学习了第三章第 4 节后可用此法）只需证$\dfrac{\ln b}{b} < \dfrac{\ln a}{a} \quad (b > a > e)$

令$g(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad x \in (a, b)$，则$g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0, x > a > e$ 所以$g(x)$在$[a, b]$上

单调减，所以$\dfrac{\ln b}{b} < \dfrac{\ln a}{a} \quad (b > a > e)$

(5) $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x \quad (x > 0)$

证: 设$f(x) = \ln(1 + x) \quad (x > 0)$，则$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} \quad (x > 0)$

$f(x)$在$[0, x]$上满足拉格朗日中值定理， 故有$\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1 + \xi} \quad (0 < \xi < x)$

从而$x > \ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$

(6) $x > \arctan x > x - \dfrac{x^3}{3} \quad (x > 0)$

证：设$f(x) = \arctan x \quad (x > 0)$，$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$，

$f(x)$在$[0, x]$上满足拉格朗日中值定理， 故有$\arctan x = \dfrac{x}{1 + \xi^2} < x$

设$g(x) = \arctan x - x + \dfrac{x^3}{3}$，$g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 = x^2 - \dfrac{x^2}{1 + x^2} > x^2 - x^2 = 0$

$g(x)$在$[0, x]$上满足拉格朗日中值定理，故有$\arctan x - x + \dfrac{x^3}{3} = g'(\xi)x > 0$，

即$\arctan x > x - \dfrac{x^3}{3}$，因而 $x > \arctan x > x - \dfrac{x^3}{3} \quad (x > 0)$

(7) $\tan x + 2\sin x > 3x \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

证：即证 $\tan x+2\sin x-3x>0,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

设 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x>0,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

则 $f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$，

$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x-2\sin x=2\sin x\left(\frac{1}{\cos^3 x}-1\right)>0,\qquad x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

由单调性，$f'(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调增，所以 $f'(x)>f'(0)=0\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

由于 $f'(x)>0\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，又 $f(0)=0$，故 $f(x)>0$.

3. 当 $x\ge 1$ 时，证明：$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$

证明：设 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，

则 $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{2}{1+x^2}=0$

所以 $f(x)=C$，又 $f(1)=2\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$，故 $f(x)=\pi$

即 $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且 $0<f(x)<1$，$f'(x)\ne 1$，则存在惟一的 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证明：(1)证存在性：设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续 $F(0)=f(0)>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，由介值定理：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$；

(2)证惟一性（反证法）：假设另有 $\xi_1\ne\xi$，$\xi_1\in(0,1)$，使得 $F(\xi_1)=0$，则在以 ξ 及 ξ_1 为端点的区间上 $F(x)$ 满足拉格朗日定理，故存在介于 ξ 及 ξ_1 之间的 $\xi_2\in(0,1)$，使得 $F'(\xi_2)=\dfrac{F(\xi)-F(\xi_1)}{\xi-\xi_1}=0$，而由 $F(x)=f(x)-x$ 得 $F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-1$，因而推得

$f'(\xi_2)=1$，与已知条件 $f'(x)\neq 1$ 矛盾！

5. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$f(a)=g(a)$ 且恒有 $f'(x)<g'(x)$，证明：$f(b)<g(b)$

证明：设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(b)=f(b)-g(b)$，$F(a)=f(a)-g(a)=0$，

$F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，

法 1：在区间 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 满足拉格朗日定理：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)<0$，即 $f(b)-g(b)<0$，亦即 $f(b)<g(b)$

法 2：$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调减，因此 $F(b)<F(a)$，$\Rightarrow F(b)<0$，即 $f(b)<g(b)$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$. 证明：存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明：设 $F(x)=xf(x)$，则 $F(a)=0$，$F(0)=0$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$，且在区间 $[0,a]$ 上 $F(x)$ 满足罗尔定理：存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $a\cdot b>0$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

证明：（注：书中原题题缺少条件 $a\cdot b>0$）变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，故设

$g(x)=\ln|x|$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$，且 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，

由柯西中值定理：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，亦即：$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $(n-1)$ 阶连续导数，在 (a,b) 内有 n 阶导数，且 $f(b)=f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$. 试证：在 (a,b) 内至少有一点 ξ ，使 $f^{(n)}(\xi)=0$

证明：因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，所以 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $f(b)=f(a)$， $f(x)$ 满足罗尔定理，故 $\exists\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)=0$；

因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，所以 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，并且 $f'(a)=f'(\xi_1)$， $f'(x)$ 满足罗尔定理，故 $\exists\xi_2\in(a,\xi_1)$，使得 $f'(\xi_2)=0$；

如此下去…

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 $(n-1)$ 阶连续导数，在 (a,b) 内有 n 阶导数，所以 $f^{(n-1)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有可导， $f^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}(\xi_{n-1})$， $f^{(n-1)}(x)$ 满足罗尔定理，故 $\exists\xi\in(a,\xi_{n-1})\subset(a,b)$，使得 $f^{(n)}(\xi)=0$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq0$. 证明： $f(a)\neq f(b)$

证明：反证法：假设 $f(a)=f(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，与已知条件 $f'(x)\neq0$ 矛盾！

10. 证明：方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明：设 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$，由罗尔定理：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 的一个根.