习题 1.6(P68)

1. 讨论下列函数在指定点的连续性. 若是间断点，说明它的类型.

(1). $y=\sqrt{x}$； $x=1$， $x=0$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1=f(1)$，故函数在 $x=1$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f(0)$，故函数在 $x=0$ 处右连续.

(2). $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ ； $x=3$， $x=-3$

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x=\pm 3$ 处无定义，故在 $x=\pm 3$ 是间断点，

又 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处为可去间断点（第一类间断点）；

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}=\infty$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处为无穷间断点（第二类间断点）

(3). $y=\cos x$； $x=x_0$ $(x_0\in R)$

解：因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0=f(x_0)$，故函数在 $x=x_0$ 处连续.

(4). $y=e^{\frac{1}{x-1}}$； $x=1$

解：因为函数在 $x=1$ 处无定义，故在 $x=1$ 是间断点，又 $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}=0$， $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

所以函数在 $x=1$ 处为无穷间断点（第二类间断点）

(5). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & -1\le x\le 0\\ 3-x & 0<x\le 1\end{cases}$ ； $x=0$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{3}=0$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3-x=3$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，故 $x=0$ 是函数的间断点，且为第一类间断点.

(6). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & x\neq k\pi \\ 0 & x=k\pi\end{cases}$ ； $k=0,\pm1,\pm2\cdots$； $x=k\pi$， $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1\neq f(0)$

$k\neq0$， $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{\tan x}{x}=0=f(k\pi)$，

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{x}=\infty$$

故函数在 $x=0$ 处间断，且为可去间断点（第一类间断点），在 $x=k\pi\,(k\neq0)$ 处连续，

在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处间断，且为无穷间断点（第二类间断点）。

2. 指出下列函数的间断点，并说明它的类型.

(1). $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处无定义，故 $x=\pm1$ 为函数的间断点，又

$\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$，故 $x=\pm1$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

(2). $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

解：因为函数在 $x=0$ 处无定义，故在 $x=0$ 是间断点，又 $\lim\limits_{x\to0-0}e^{\frac{1}{x}}=0$， $\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

所以函数在 $x=0$ 处为无穷间断点（第二类间断点）

(3). $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 为函数的间断点，又

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点）.

(4). $f(x)=x\cos^2\dfrac{1}{x}$

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 为函数的间断点，又

$\lim\limits_{x\to 0} x\cos^2\frac{1}{x}=0$，故 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点）

(5). $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $x=1$ 为函数的间断点，又

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$ 故 $x=1$ 为第一类间断点（跳跃间断点）.

(6). $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & x\le 0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases}$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x-1=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-1)=-1$，故 $x=1$ 为第一类间断点（跳跃间断点）.

3. 求下列函数的极限.

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{x+1}}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)+(1-\sqrt{x+1})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{-x/2}{x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)$

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln(\tan x)=\ln\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x\right]=\ln 1=0$

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{x}{2}}=2$

(5). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{x}{a})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{a}}{x}=\dfrac{1}{a}$

(6). $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

解: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}\overset{x-e=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(e+t)-\ln e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{t}{e})}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{t}{e}}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}$

(7). $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-1\right)x$

解: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-1\right)x=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{x})\cdot x=-\dfrac{1}{2}$

（8）. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\ln(1+x)}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(9). $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(10). $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}})}=1$

(11). $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2^x(1+\dfrac{1}{2^x})\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln 2+\dfrac{1}{2^x})\cdot\dfrac{3}{x}=3\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2+\dfrac{1}{x\cdot 2^x})=3\ln 2$

(12). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos\dfrac{1}{x}}{2}=\dfrac{3}{2}$

(13). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan^3\dfrac{1}{n}\cdot\arctan\dfrac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{3}{n^3}\cdot\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\dfrac{7}{n}}$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan^3\dfrac{1}{n}\cdot\arctan\dfrac{3}{n\sqrt{n}}}{\sin\dfrac{3}{n^3}\cdot\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\arcsin\dfrac{7}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^3\cdot\dfrac{3}{n\sqrt{n}}}{\dfrac{3}{n^3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{7}{n}}=\dfrac{1}{7}$

4. 证明：方程 $\sin x-x+1=0$ 在 0 和 π 之间有实根.

证明：设 $f(x)=\sin x-x+1$，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(\pi)=1\times(1-\pi)<0$，

由零点定理得：至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi-\xi+1=0$，亦即 ξ 是方程 $\sin x-x+1=0$ 在 0 和 π 之间的实根.

5. 证明：方程 $x-a\sin x-b=0\quad(a,b>0)$ 至少有一个正根，且不大于 $a+b$.

证明：设 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续，且

$$f(0)\cdot f(a+b)=b\times a[1-\sin(a+b)]\le 0,$$

（1） 若 $f(0)\cdot f(a+b)=0$，即 $\sin(a+b)=1$，则取 $\xi=a+b$，有 $f(\xi)=0$；

（2） 若 $f(0)\cdot f(a+b)<0$，则由零点定理得：至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$，使得 $f(\xi)=0$；

由（1）、（2）即知 ξ 是方程 $x-a\sin x-b=0\quad(a,b>0)$ 在 $(0,a+b]$ 上的正根.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\le f(x)\le 1$，证明：在 $[0,1]$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

证明：设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由条件 $0\le f(x)\le 1$ 可得：

$$F(0)\cdot F(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]\le 0$$

（1）若 $f(0)=0$，则取 $\xi=0$，有 $f(\xi)=\xi$；

（2）若 $f(1)-1=0$，则取 $\xi=1$，有 $f(\xi)=\xi$；

（3）若 $f(0)\ne 0$ 且 $f(1)-1\ne 0$，此时 $F(0)\cdot F(1)<0$，由零点定理得：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

由（1）、（2）、（3）即知在 $[0,1]$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$，$f(a)\ne f(0)$ 求证：至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明：设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则由 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续得：$F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，由条件 $f(0)=f(2a)$，$f(a)\ne f(0)$ 可得

$$F(0)\cdot F(a)=[f(0)-f(a)]\cdot[f(a)-f(2a)]$$

$$=[f(0)-f(a)]\cdot[f(a)-f(0)]=-[f(0)-f(a)]^2<0$$

由零点定理得：至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$

8. 求证：方程 $x^3+px+q=0 \quad (p>0)$ 有且只有一个实根.

证明：（1）证根的存在性：设 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$，由无穷大的定义知：$\exists\, a<0$，使得

$f(a)<0$；$\exists\, b>0$，使得 $f(b)>0$，由零点定理得：至少存在一点 $\xi\in(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$，

使得 $f(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $x^3+px+q=0 \quad (p>0)$ 的一个实根；

（2）证根的惟一性（反证法）：设存在 x_1，$x_2\in R$，$x_1\neq x_2$，使得

$$x_1^3+px_1+q=0\text{，且 } x_2^3+px_2+q=0$$

两式相减有 $x_1^3-x_2^3+p(x_1-x_2)=0$，即 $(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+p)=0$

由 $x_1\neq x_2$，有 $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+p)=0$ 推出 $p=-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

而 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2\geq x_1^2-|x_1x_2|+x_2^2\geq x_1^2-2|x_1x_2|+x_2^2=(|x_1|-|x_2|)^2\geq 0$

从而有 $p\leq 0$，与已知 $p>0$ 矛盾！

因而，方程 $x^3+px+q=0 \quad (p>0)$ 有且只有一个实根.

注：在学习了利用导数研究函数的单调性之后，惟一性可以用函数的单调性来证明.

9. 一个登山运动员从早上 7：00 开始攀登某座山峰，在下午 7：00 到达山顶，第二天早上 7：00 再从山顶开始沿着上山的路下山，下午 7：00 到达山脚，试利用介值定理说明：这个运动员在这两天的某一相同时刻经过登山路线的同一地点.

说明：设上山路线高度函数为 $f(t)$，下山路线高度函数为 $g(t)$，$t\in[7,19]$，山的高度为

$M>0$，则 $f(t)$、$g(t)$ 是 $[7,19]$ 上的连续函数.

令 $F(t)=f(t)-g(t)$，则 $F(t)$ 是 $[7,19]$ 上的连续函数，且有

$$F(7)\cdot F(19)=[f(7)-g(7)]\cdot[f(19)-g(19)]=-M^2<0$$

由介值定理(零点定理)得：至少存在一点 $\xi\in(7,19)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$

由于上下山是沿着同一路线，故该运动员在两天的某一相同时刻经过登山路线的同一地点.