习题 5.3(P301)

1. 求解下列方程.

(1) $(1+x^2)y''=1$

解：令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得 $(1+x^2)\dfrac{dP}{dx}=1$，$dP=\dfrac{dx}{1+x^2}$，

$P=\arctan x+C_1$，即 $y'=\arctan x+C_1$，

所以 $y=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$

(2) $xy''=y'$

解：令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得 $x\dfrac{dP}{dx}=P$，$\dfrac{dP}{P}=\dfrac{dx}{x}$，$P=C_0x$，即

$y'=C_0x$，所以 $y=C_1x^2+C_2$，其中 $C_1=\dfrac{1}{2}C_0$

(3) $xy''+3y'=0$

解：令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得 $xP'+3P=0$，$\dfrac{dP}{P}=-\dfrac{3}{x}dx$，

$\ln P=-3\ln x+\ln C_1$，$P=\dfrac{C_1}{x^3}$，即 $y'=\dfrac{C_1}{x^3}$，所以 $y=-\dfrac{C_1}{2x^2}+C_2=\dfrac{C_3}{x^2}+C_2$

(4) $2yy''=1+y'^2$

解：令 $y'=P(y)$，则 $y''=P\dfrac{dP}{dy}$，代入方程得 $2yP\dfrac{dP}{dy}=1+P^2$，所以 $\dfrac{2P}{1+P^2}dP=\dfrac{dy}{y}$，

$\ln(1+P^2)=\ln y+\ln C_1$，$1+P^2=C_1y$，即 $y'=\pm\sqrt{C_1y-1}$，所以 $dx=\dfrac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}$，

两端积分得，$x+C_2=\pm\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}$，即 $C_1^2(x+C_2)^2=4(C_1y-1)$

(5) $y''+\sqrt{1-y'^2}=0$

解：令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得 $P'+\sqrt{1-P^2}=0$，$-\dfrac{dP}{\sqrt{1-P^2}}=dx$，

$\arccos P = x + C_1$，$P = \cos(x + C_1)$，即 $y' = \cos(x + C_1)$，所以 $y = \sin(x + C_1) + C_2$

(注：本题既不显含自变量 x，也不显含未知函数 y，但若令 $y' = P(y)$，解方程过程很繁)

(6) $\begin{cases} (x^2+1)y'' = 2xy' \\ y(0)=1, y'(0)=3 \end{cases}$

解：令 $y' = P(x)$，则 $y'' = P'$，代入方程得 $(x^2+1)P' = 2xP$，所以 $\dfrac{dP}{P} = \dfrac{2x}{1+x^2}dx$，

$\ln P = \ln(1+x^2) + \ln C_1$，$P = C_1(1+x^2)$，即 $y' = C_1(1+x^2)$，所以

$y = \int C_1(1+x^2)dx = C_1 x + \dfrac{C_1}{3}x^3 + C_2$，由初始条件得 $C_1 = 3$，$C_2 = 1$，所以此微分方程的解为 $y = x^3 + 3x + 1$

(7) $\begin{cases} yy'' + y'^2 = 0 \\ y(0)=1 \quad y'(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

解：法 1：令 $y' = P(y)$，则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$，代入方程得 $yP\dfrac{dP}{dy} + P^2 = 0$，得 $P = 0$（不合题意，舍去），$y\dfrac{dP}{dy} + P = 0$，$\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{dy}{y}$，$\ln P = \ln y^{-1} + \ln C_1$，$P = \dfrac{C_1}{y}$，由初始条件得 $\dfrac{1}{2} = \dfrac{C_1}{1}$，得 $C_1 = \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$，$2ydy = dx$，所以 $y^2 = x + C_2$，由初始条件得 $C_2 = 1$，所以 $y^2 = x + 1$，由初始条件知所求特解为 $y = \sqrt{x+1}$

法 2：原方程可化为 $(yy')' = 0$，两端积分得：$yy' = C_1$，后面与解法 1 同。

(8) $\begin{cases} y^3 y'' + 1 = 0 \\ y(1)=1 \quad y'(1)=0 \end{cases}$

解：令 $y' = P(y)$，则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$，代入方程得 $y^3 P\dfrac{dP}{dy} - +1 = 0$，$PdP = -y^{-3}dy$，

$\therefore P^2 = \dfrac{1}{y^2} + C_1$，由初始条件 $y(1)=1, y'(1)=0$ 有 $0 = 1 + C_1$，所以 $C_1 = -1$，即

$y'^2=\frac{1}{y^2}-1$，$y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$，所以$\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=dx$，

两端积分得 $\pm\sqrt{1-y^2}=x+C_2$，或 $1-y^2=(x+C_2)^2$。由初始条件 $y(1)=1,$ 得

$C_2=-1$，所以满足初始条件得特解为$1-y^2=(x-1)^2$，或 $y=\sqrt{2x-x^2}$

(9) $\begin{cases} y''-2y'^2=0 \\ y(0)=0 \quad y'(0)=-1 \end{cases}$

解：法 1 令 $y'=P(y)$，则 $y''=P\frac{dP}{dy}$，代入方程得 $P\frac{dP}{dy}-2P^2=0$，得 $P=0$（不合题意，舍去），$\frac{dP}{dy}-2P=0$，$\frac{dP}{P}=2dy$，$\ln P=2y+\ln C_1$，$P=C_1e^{2y}$，由初始条件得

$-1=C_1e^0$，得 $C_1=-1$，即 $-e^{-2y}dy=dx$，$\frac{e^{-2y}}{2}=x+C_2$，由初始条件得 $\frac{e^0}{2}=0+C_2$，

得 $C_2=\frac{1}{2}$，所以 $e^{-2y}=2x+1$，即满足初始条件得特解为 $y=-\frac{1}{2}\ln(2x+1)$

法 2 令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得 $\frac{dP}{dx}-2P^2=0$，$-\frac{dP}{P^2}=-2dx$，

$\frac{1}{P}=-2x+C_1$，由初始条件得 $\frac{1}{-1}=0+C_1$，得 $C_1=-1$，$P=-\frac{1}{2x+1}$，即

$y'=-\frac{1}{2x+1}$，所以 $y=-\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{2}\ln C_2$，$y=-\frac{1}{2}\ln C_2(2x+1)$，由初始条件

得 $0=-\frac{1}{2}\ln C_2$，$C_2=1$，即满足初始条件得特解为 $y=-\frac{1}{2}\ln(2x+1)$

2. 求方程 $y''=x+\sin x$ 的一条积分曲线，使其与直线 $y=x$ 在原点相切.

解：直线 $y=x$ 在原点处有 $y(0)=0,\quad y'(0)=1$，由题意知本题是要求下列初值问题

$\begin{cases} y''=x+\sin x \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1 \end{cases}$，对方程 $y''=x+\sin x$ 连续两次积分：$y'=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1$，由

$y'(0)=1$ 得 $C_1=2$，再积分 $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+2x+C_2$，由 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$，

故所求积分曲线为 $y=\dfrac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$， $y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线与 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 A_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 A_2，并设 $2A_1-A_2$ 恒为 1，求此曲线的方程.

解：过 P 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$，则得切线与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(x-\dfrac{y}{y'},0)$，由题意得 $A_1=\dfrac{1}{2}y\cdot\left|x-(x-\dfrac{y}{y'})\right|=\dfrac{y^2}{2y'}$， $A_2=\int_0^x y(t)dt$，

从而 $$2\cdot\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)dt=1 \qquad (*)$$

等式两端对 x 求导得 $\dfrac{2y(y')^2-y^2y''}{(y')^2}-y=0$，即 $y^2y''=(y')^2y$，由初值知 $y\ne 0$，所以 $yy''=(y')^2$，由题设条件 $y(0)=1$ 及(*)式得 $y'(0)=1$，从而得到初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$.

方程 $yy''=(y')^2$ 不显含自变量 x，故令 $y'=P(y)$，则 $y''=P\dfrac{dP}{dy}$，代入方程得 $yp\dfrac{dp}{dy}=p^2$，得 $P=0$（不合题意，舍去），$y\dfrac{dp}{dy}=p$，这是一个可分离变量的微分方程，解得 $P=C_1y$，(或：方程 $yy''=(y')^2$ 化为 $\dfrac{yy''-(y')^2}{y^2}=0$，即 $\left(\dfrac{y'}{y}\right)'=0$，两端积分得：$\dfrac{y'}{y}=C_1$，即 $y'=C_1y$）由初始条件得 $C_1=1$，即 $\dfrac{dy}{dx}=y$，$\dfrac{dy}{y}=dx$，$\ln y=x+\ln C_2$，$y=C_2e^x$，由初始条件得 $C_2=1$，故所求曲线方程为 $y=e^x$

4. 设 $y=y(x)$ 是一条连续的凸曲线，其上任一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$，且此曲

线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

解：由题意知 $y''<0$，故 $\frac{-y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$，即 $\frac{y''}{1+(y')^2}=-1$，又有 $y(0)=1$，

$y'(0)=1$.

方程 $\frac{y''}{1+(y')^2}=-1$ 不显含未知函数 y，故令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$，代入方程得

$\frac{P'}{1+P^2}=-1$，$\arctan P=-x+C_1 \qquad (*)$

由 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{\pi}{4}$，即 $y'=P=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$，$y=\ln\left|\cos(\frac{\pi}{4}-x)\right|+C_2$，由 $y(0)=1$

得 $C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$，故所求曲线方程为 $y=\ln\left|\cos(\frac{\pi}{4}-x)\right|+1+\frac{1}{2}\ln 2$

由(*)式可得函数的定义域 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{2}$，即 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$，故所求曲线方程为

$y=\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)+1+\frac{1}{2}\ln 2$，由函数的定义域得 $0<\cos(\frac{\pi}{4}-x)\le 1$，故 $x=\frac{\pi}{4}$ 为函数

惟一的最大值点，也是惟一的极大值点，极大值为 $y(\frac{\pi}{4})=1+\frac{1}{2}\ln 2$，无极小值.

5. 求下列初值问题的解.

$$\begin{cases}(1-x^2)y'''+2xy''=0\\ y(2)=0,\ y'(2)=\frac{2}{3},\ y''(2)=3\end{cases}$$

解：令 $y''=P(x)$，则 $y'''=P'(x)$，代入方程整理得 $P'+\frac{2x}{1-x^2}P=0$，这是一个一阶

线性齐次方程，其解为 $y''=C_1e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=C_1(1-x^2)$，由 $y''(2)=3$ 得 $C_1=-1$，

$y''=x^2-1$，$y'=\frac{x^3}{3}-x+C_2$，由 $y'(2)=\frac{2}{3}$ 得 $C_2=0$，$y'=\frac{x^3}{3}-x$，

$y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+C_3$，由 $y(2)=0$ 得 $C_3=\frac{2}{3}$，故初值问题解为 $y=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}$

6.求方程 $y'y'''-3(y'')^2=0$ 的通解.

解：令 $y'=P(x)$，则 $y''=P'(x)$， $y'''=P''(x)$ 代入方程得 $PP''-3(P')^2=0$

法 1：这是一个二阶可降阶的不显含自变量 x 的方程，可设 $P'=T(P)$，则

$P''=\frac{dT}{dP}\cdot\frac{dP}{dx}=T\frac{dT}{dP}$，代入方程得 $PT\frac{dT}{dP}-3T^2=0$，故 $P\frac{dT}{dP}-3T=0$ 或 $T=0$，

解 $T=0$ 得 $y=E_1x+E_2$，因只有两个独立的任意的常数，则该解不是通解；

$P\frac{dT}{dP}-3T=0$ 是可分离变量的方程，解得 $\ln T=3\ln P+\ln C_1$， $P'=T=C_1P^3$，

$\frac{dP}{P^3}=C_1dx$， $-\frac{1}{2P^2}=C_1x+C_2$， $P^2=\frac{1}{D_1x+D_2}$ $(D_1=-2C_1,D_2=-2C_2)$，

$y'=P=\frac{1}{\pm\sqrt{D_1x+D_2}}$， $y=\pm\frac{2}{D_1}\sqrt{D_1x+D_2}+D_3$，

故方程的通解为 $(y-E_3)^2=E_1x+E_2$ $(E_1=\frac{4}{D_1},E_2=\frac{4D_2}{D_1^2}\ E_3=D_3)$.

法 2：变形为 $\frac{P''}{P'}=3\frac{P'}{P}$，则 $\ln P'=3\ln P+\ln C_1$， $P'=C_1P^3$（其它同法 1）

法 3：原方程化为 $\frac{y'y'''-3(y'')^2}{y^4}=0$，注意到：$\left(\frac{y''}{(y')^3}\right)'=\frac{y'''(y')^3-3(y')^2(y'')^2}{y^6}$，即

$\left(\frac{y''}{(y')^3}\right)'=0$，两端积分得：$\frac{y''}{(y')^3}=C_1$，得 $y''=C_1(y')^3$，这是一个不显含自变量 x 的二阶微分方程，可用降阶法（略）