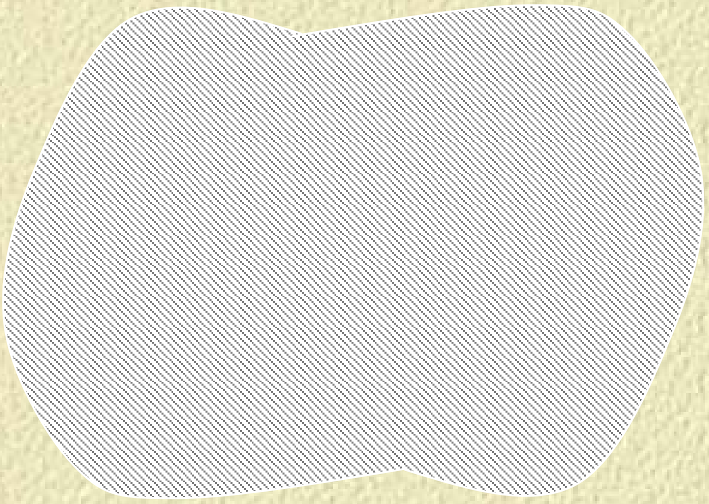
9.3 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件

通常，第二类曲线积分值与积分路径有关。而当被积函数满足一定的条件时，积分值只取决于积分路经的起点和终点，而与连接起点和终点的路径无关。

本节先介绍格林(Green)公式，它揭示了二重积分与沿二重积分积分区域边界线的第二类曲线积分之间的关系。然后，在格林公式的基础上，讨论第二类曲线积分与路径无关的条件。

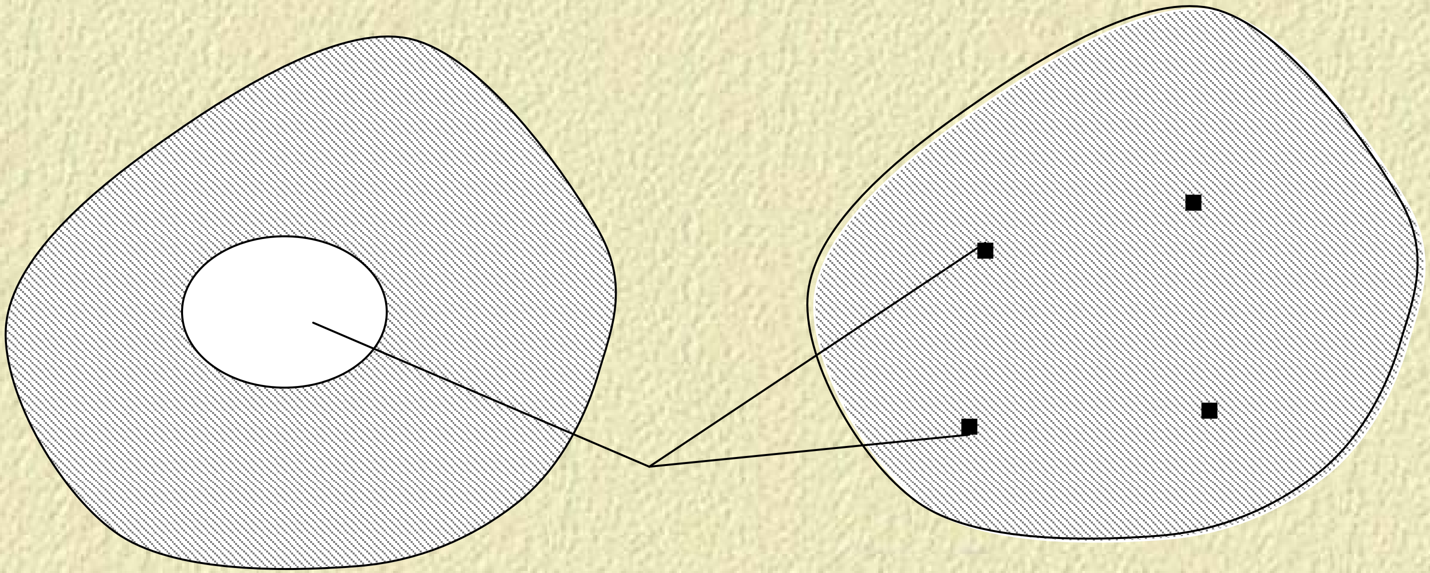
平面区域的分类:

设 D 为平面区域, 若 D 内任何闭曲线所包围的全体点仍属于 D , 则称 D 为单连通域, 否则称 D 为复连通域。



若区域D内任何曲线所包围的全体点仍属于D,

则称D为单连通域。



复连通域：D内存在闭曲线L至少包含一点M不属于D

形象地说，单连通域是无“孔”无“洞”的区域，有孔或有洞的区域就是复连通域。

上页 下页 返回

1. 格林(Green)公式

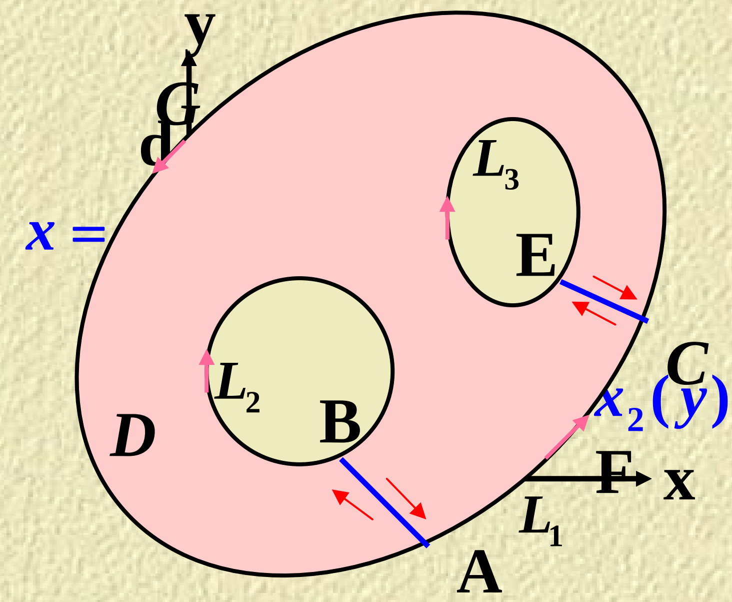
在一元函数积分学中，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则有莱布尼兹公式

$$F(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

即连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分等于其原函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$（积分区间）端点（边界）上的函数值的差。即积分运算可以转化为另一种形式计算，且转化时利用边界。

下面介绍的格林公式表明：在平面闭区域 D 上的二重积分等于沿二重积分积分区域 D 的边界闭曲线 L 上的第二类曲线积分。

定理1 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$X(x,y)$及$Y(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

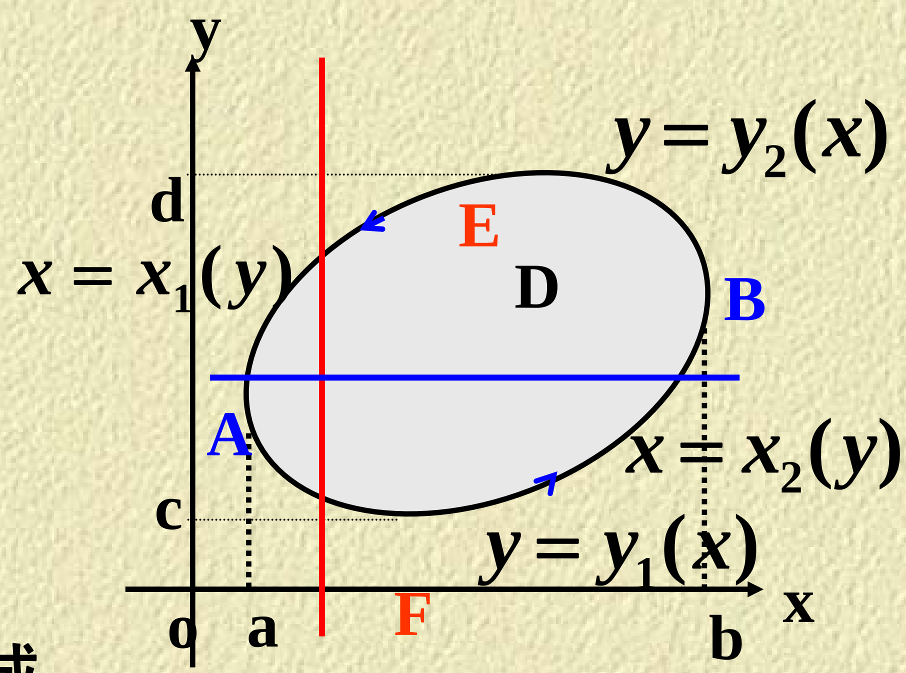


$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{L^+} Xdx + Ydy \qquad (1)$$

其中L^+是D的取正向的边界曲线，公式(1)叫做格林公式.

上页 下页 返回

若区域D既是X−型又是Y−型,即平行于两坐标轴的直线和边界线L至多交于两点. D称为凸区域, 否则称为凹区域.



证明(1) 凸的单连通域

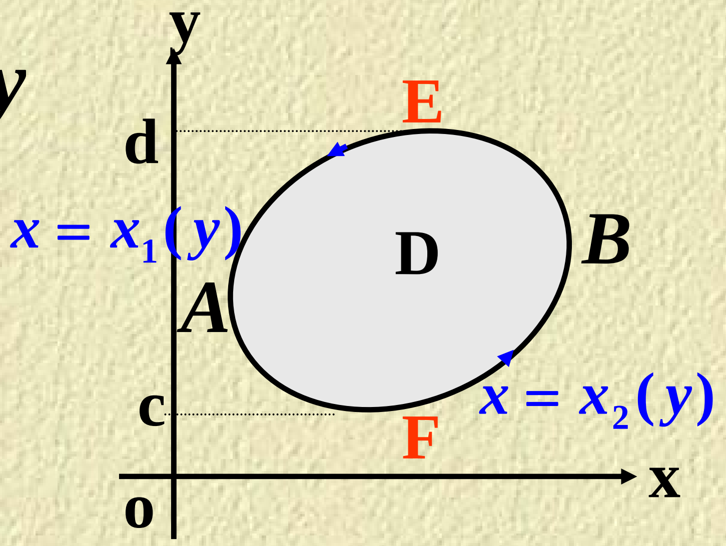
$$D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

$$D=\{(x,y)\,|\,x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Y}{\partial x} dx$$

$$= \int_c^d Y(x_2(y), y)dy - \int_c^d Y(x_1(y), y)dy$$

$$= \int_{FBE} Y(x,y)dy - \int_{FAE} Y(x,y)dy$$



$$= \int_{FBE} Y(x,y)dy + \int_{EAF} Y(x,y)dy$$

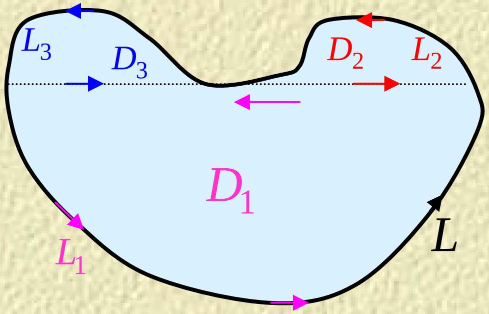
$$= \oint_{L^+} Y(x,y)dy$$

同理可证 $-\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \oint_{L^+} X(x,y)dx$

两式相加得 $\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{L^+} Xdx + Ydy$

证明(2)凹的单连通域

若区域D如图所示由按段光滑的闭曲线围成. 将D分成三个凸区域D_1, D_2, D_3.



$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{D_1+D_2+D_3}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

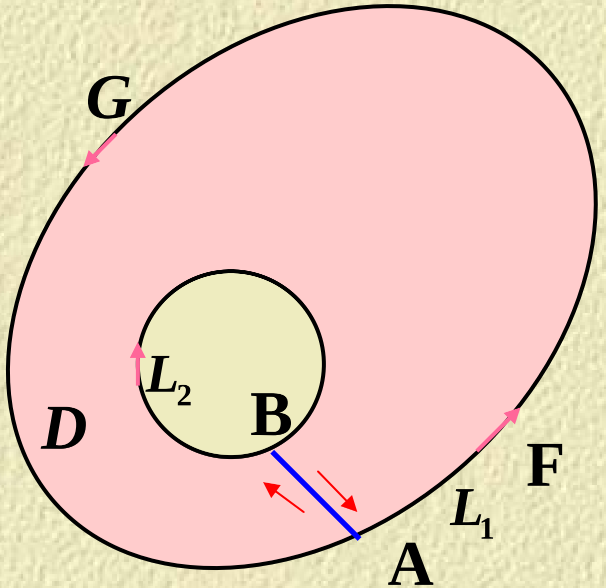
$$=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy+\iint_{D_3}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{L_1^+} Xdx+Ydy+\oint_{L_2^+} Xdx+Ydy+\oint_{L_3^+} Xdx+Ydy$$

$$=\oint_{L^+} Xdx+Ydy$$

上页 下页 返回

证明(3)复连通域



若区域如图所示. D的边界曲线$L^+ = L_1^+ + L_2^-$，添加辅助直线段AB，把D割开成单连通域，则D的边界曲线由AB，L_2^-，BA，L_1^+构成.

由(2)知
$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

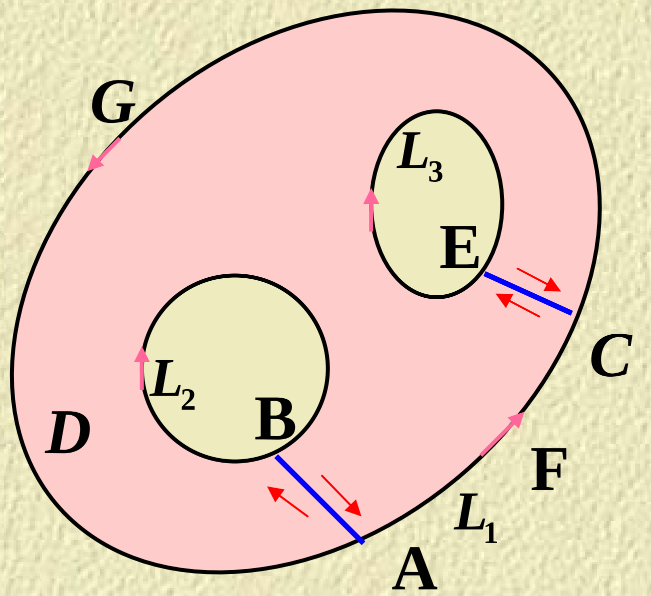
$$= \left\{\int_{AB} + \int_{L_2^-} + \int_{BA} + \int_{L_1^+}\right\}\cdot(Xdx + Ydy)$$

$$= \left(\oint_{L_2^-} + \oint_{L_1^+}\right)(Xdx + Ydy) = \oint_{L^+} Xdx + Ydy$$

上页 下页 返回

证明(3) 复连通域

若区域如图由多条闭曲线所围成. D的边界曲线 $L^+ = L_1^+ + L_2^- + L_3^-$, 添加直线段 AB, CE. 则D的边界曲线由 $AB,\ L_2^-,\ BA,\ AFC,\ CE,\ L_3^-,\ EC$ 及 CGA 构成.



由(2)知 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$

$$= \left\{\int_{AB} + \int_{L_2^-} + \int_{BA} + \int_{AFC} + \int_{CE} + \int_{L_3^-} + \int_{EC} + \int_{CGA}\right\} \cdot (Xdx + Ydy)$$

$$= \left(\oint_{L_2^-} + \oint_{L_3^-} + \oint_{L_1^+}\right)(Xdx + Ydy) = \oint_{L^+} Xdx + Ydy$$

上页 下页 返回

格林公式的实质: 沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系.

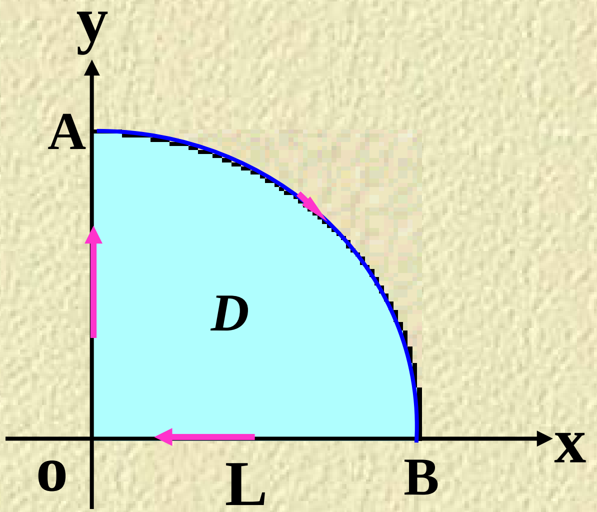
便于记忆形式:

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} dxdy = \oint_L Xdx + Ydy .$$

上页 下页 返回

格林公式的应用

(1). 简化曲线积分



例 1 计算 $\int_{AB} xdy$,其中曲线 AB 是半径为 r 的圆在第一象限部分.

解 引入辅助曲线 L, $L = \overline{OA} + \widehat{AB} + \overline{BO}$

应用格林公式, $X = 0,\ Y = x$ 有

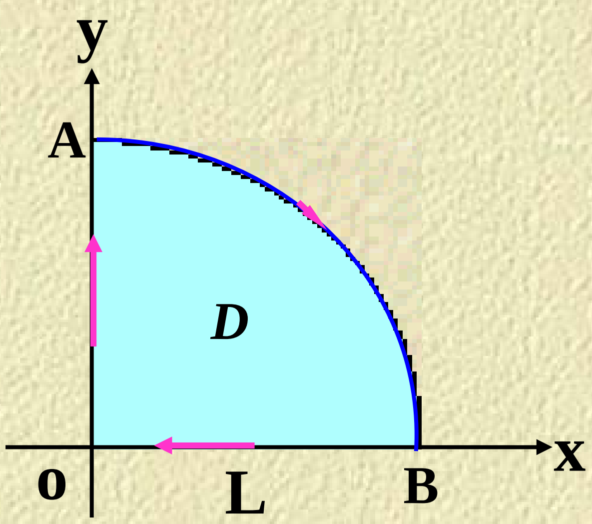
$$-\iint_D dxdy = \oint_L xdy$$

$$= \int_{OA} xdy + \int_{AB} xdy + \int_{BO} xdy,$$

上页 下页 返回

由于$\int_{OA} xdy = 0,\quad \int_{BO} xdy = 0,$

$$\therefore \int_{AB} xdy = -\iint_{D} dxdy = -\frac{1}{4}\pi r^2.$$



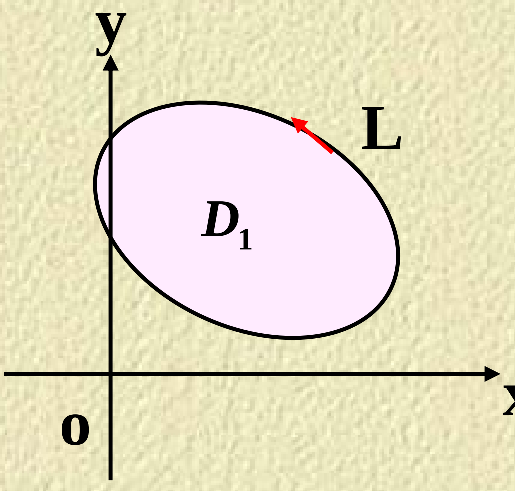
注意：对封闭曲线上的第二类曲线积分的计算，自然会想到使用格林公式（要求满足条件），对非封闭曲线上的第二类曲线积分的计算，常常会通过补曲线变为封闭曲线来使用格林公式，达到简化计算的目的，大家要学会这一技巧。

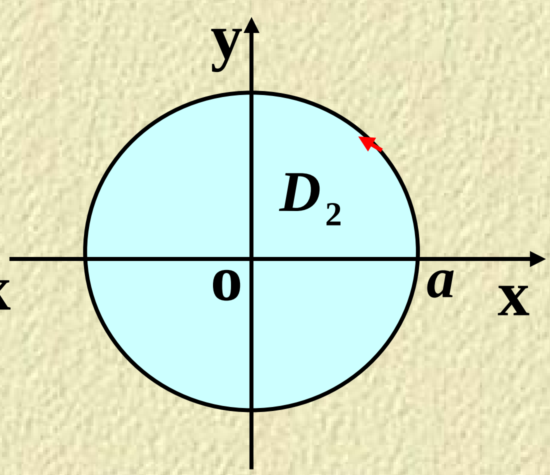
例 2(书中例 3) 计算$\oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$,其中积分路径为

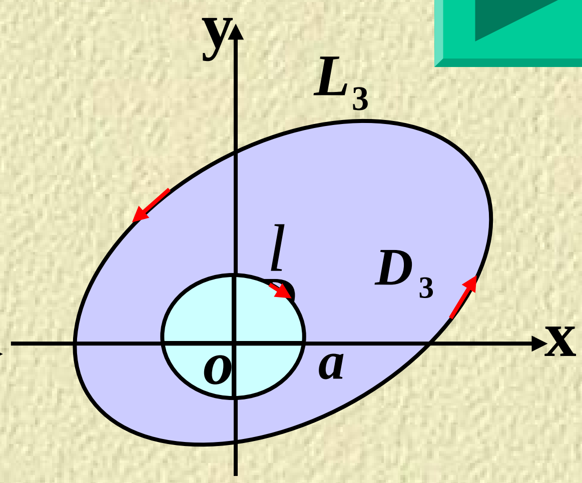
(1) L_1:不经过原点，且原点不在封闭曲线L_1所包围的区域中，L_1的方向为逆时针方向。

(2) $L_2: x^2 + y^2 = a^2$，L_2的方向为逆时针方向。

(3) L_3:包围原点的任一条闭曲线(逆时针方向)。



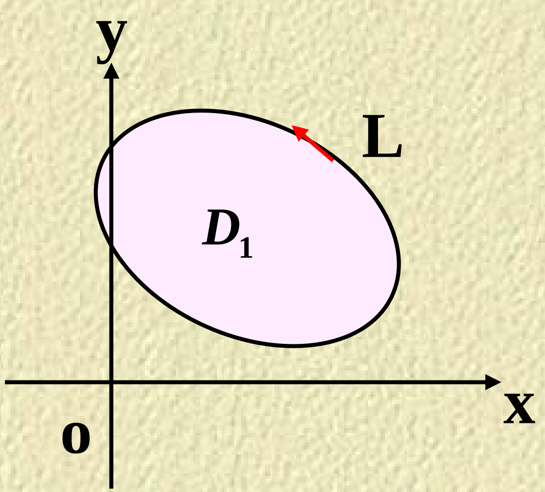




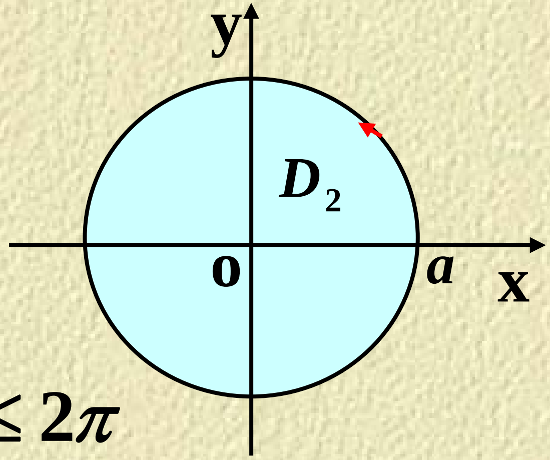
(1) $(0,0)\notin D_1$,

由格林公式知

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0dxdy=0$$



(2)解法 1 $(0,0)\in D_2$,不满足格林公式的条件，可直接计算。



圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

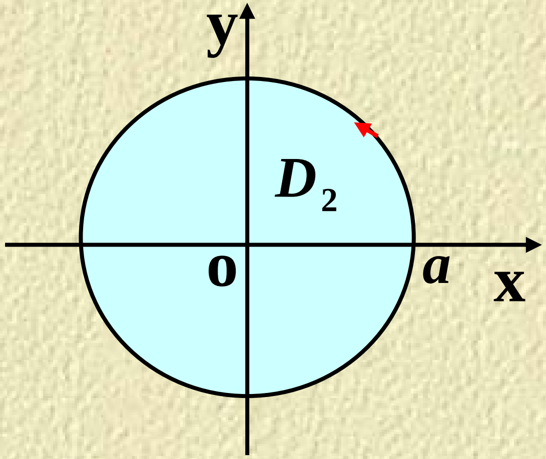
$$\oint_{L_2^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2}\oint_{L_2^+}(xdy - ydx)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

上页 下页 返回

(2)解法 2 $(0,0)\in D_2$,不满足格林公式的条件，可间接使用格林公式。

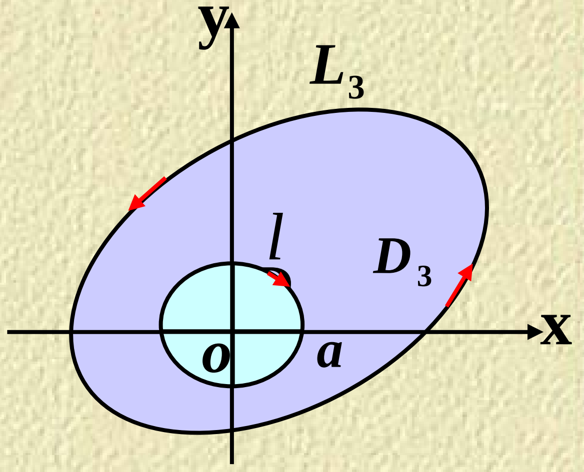


$$\oint_{L_2^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\oint_{L_2^+}(xdy-ydx)$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint_{D_2}2dxdy=2\pi$$

上页 下页 返回

(3) $(0,0)\in D$,直接计算不可能,也不能直接使用格林公式,但可以在不含原点的复连通域上使用格林公式。



可作位于D内圆周l: $x^2+y^2=a^2$,

(其中l的方向取顺时针方向)

记D_3由L_3和l所围成, 则$L^+=L_3^++l$

应用格林公式,得

$$\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_3}0dxdy=0$$

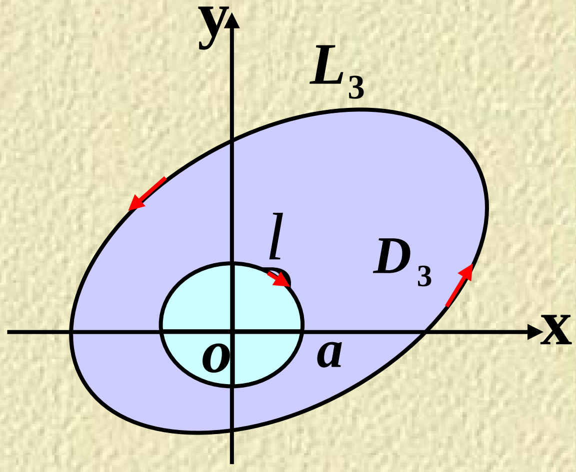
上页 下页 返回

$$\oint_{L_3^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L_3^++l}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_{l}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\oint_{l}xdy-ydx=\frac{1}{a^2}\iint_{D_l}2dxdy$$

$$=\frac{2}{a^2}\cdot\pi a^2=2\pi.$$

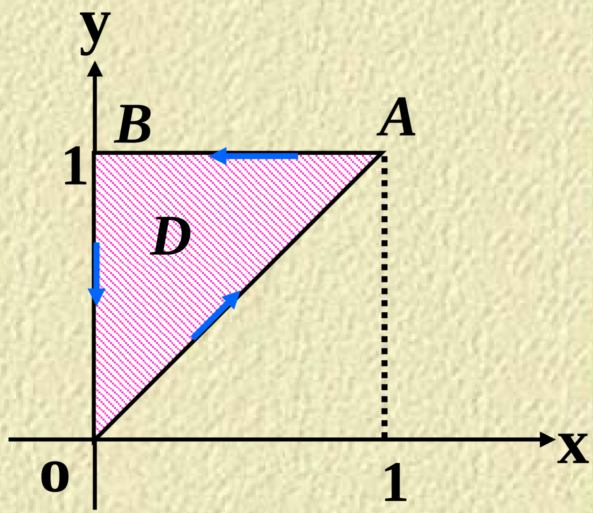


将 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 改为 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}$ (3)如何计算?

提示： 注意使用格林公式的条件，学会不满足条件时的处理方法和技巧。

(2). 简化二重积分

例 3 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$,其中$D$是以$O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$为顶点的三角形闭区域.



解　令$X=0$, $Y=xe^{-y^2}$,

则$\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}=e^{-y^2}$,

应用格林公式, 有

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_{OA+AB+BO}xe^{-y^2}dy$$

$$=\int_{OA}xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

3. 计算平面面积

格林公式: $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Xdx + Ydy$

取 $X = -y,\ Y = x,$ 得 $2\iint\limits_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$

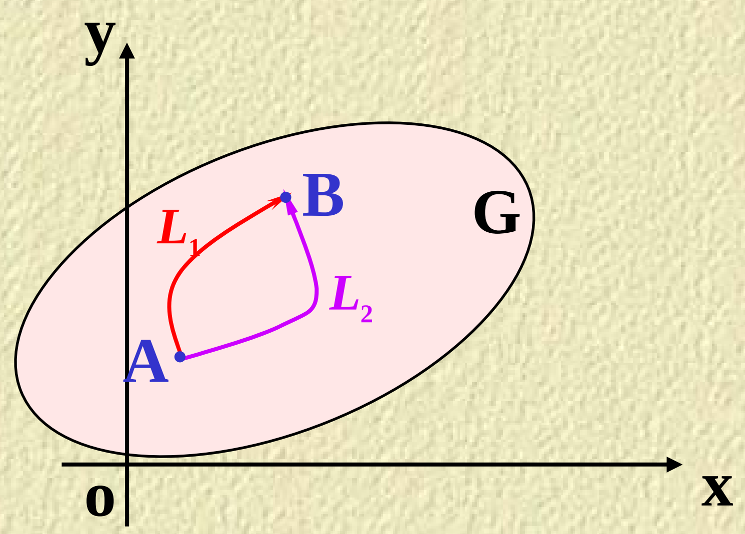
闭区域 D 的面积 $A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx\,.$

取 $X = 0,\ Y = x,$ 得 $A = \oint_L xdy$

取 $X = -y,\ Y = 0,$ 得 $A = \oint_L -ydx$

2. 曲线积分与路径无关的条件

设 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 定义在区域 D 上，如果对于 D 内任意指定的两点 A 和 B，以及在 D 内从 A 点到 B 点的任意两条路径 L_1 和 L_2，都有

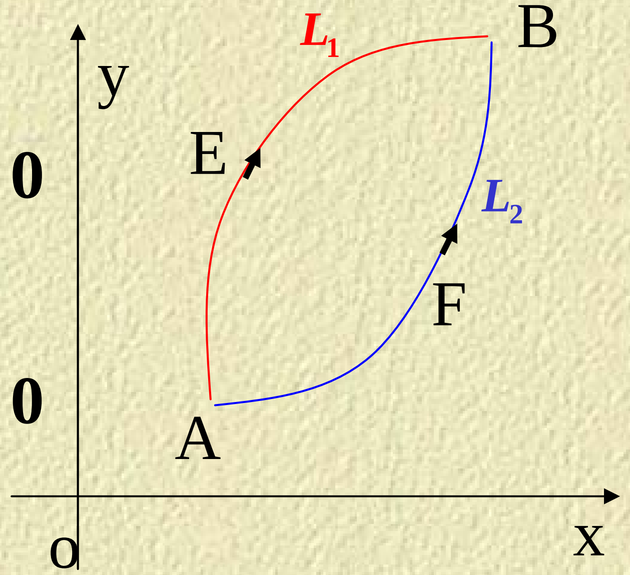


$$\int_{L_1} Xdx + Ydy = \int_{L_2} Xdx + Ydy$$

则称曲线积分 $\int_L Xdx + Ydy$ 在区域 D 内与路径无关，

定理 2 在区域 D 内曲线积分 $\int_L Xdx + Ydy$ 与路径无关的充要条件是在区域 D 内沿任一条封闭曲线的积分为零。

证 $\Leftrightarrow$



$$\int_{\widehat{AEB}} Xdx + Ydy - \int_{\widehat{AFB}} Xdx + Ydy = 0$$

$$\int_{\widehat{AEB}} Xdx + Ydy + \int_{\widehat{BFA}} Xdx + Ydy = 0$$

即 $\int_{\widehat{AEBFA}} Xdx + Ydy = 0$

由 L_1 和 L_2 的任意性即得.

上页 下页 返回

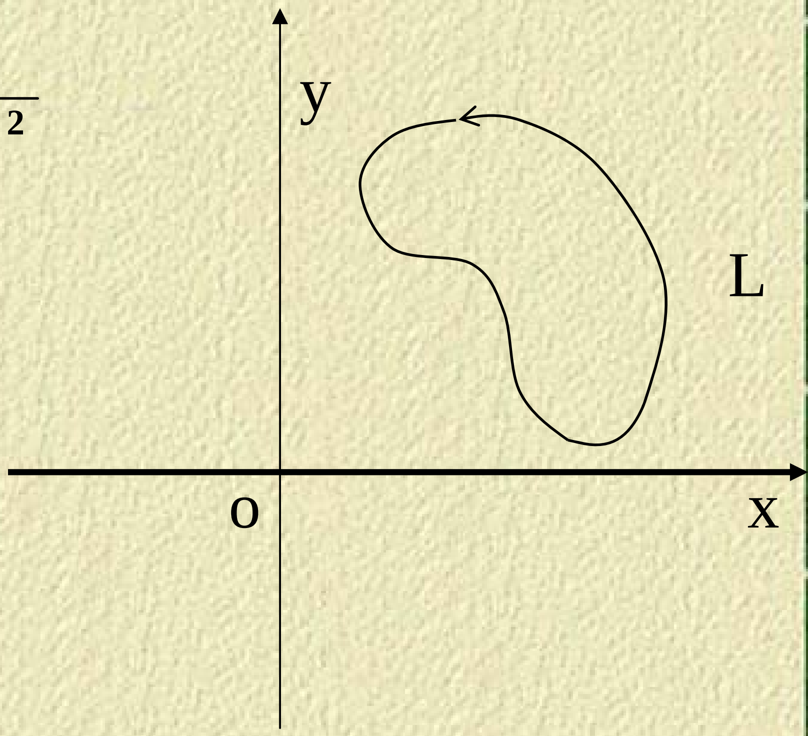
推论 若函数 $X(x,y),Y(x,y)$ 在单连域 D 内有一阶连续的偏导数，则在区域 D 内曲线积分 $\int_L Xdx+Ydy$ 与路径无关的充要条件是在区域 D 内恒有 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$

上页 下页 返回

要注意的是推论条件中的区域必须是单连通域，如果是复连通域结论可能不成立。

例如 $\oint_{L^+} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

其中，$X = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$



在除去原点外任何点处有一阶连续的偏导数，且

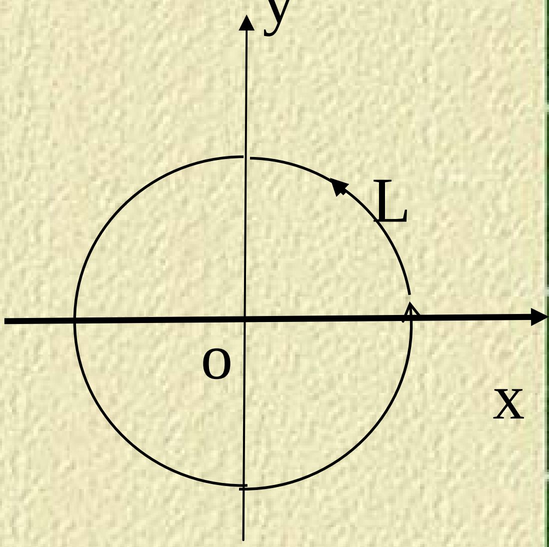
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}，$$

因此在不包含原点的任何一条闭曲线上积分为零.

若 L^{+} 为以原点为中心的单位圆，

$$\oint_{L^{+}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

即沿单位圆一周的积分不为零。

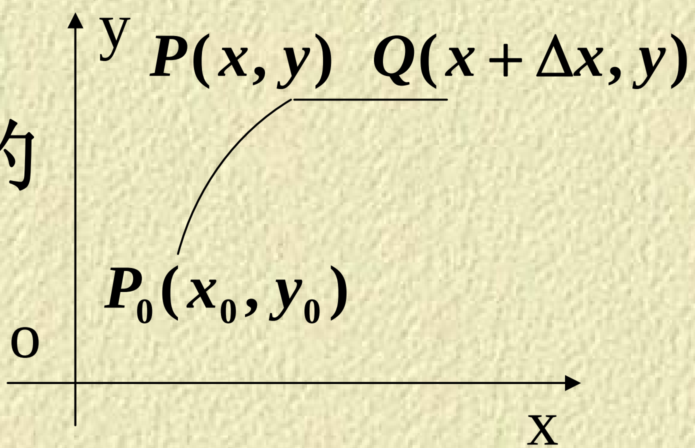


全微分准则 设 $X(x,y), Y(x,y)$ 在单连通域 D 内有连续的一阶偏导数，则在区域 D 内

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

是某个函数 $U(x,y)$ 的全微分的充要条件是在区域 D 内恒有

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$



定理 3 设函数 $X(x,y), Y(x,y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数，则下列命题等价:

（1） $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$ 对 D 上每一点都成立;

（2） $\int_L Xdx+Ydy$ 与路径无关(或沿任一闭路 $\oint_L Xdx+Ydy=0$);

（3） $Xdx+Ydy$ 是某函数 $U(x,y)$ 的全微分。

3. 原函数

由前面的证明可得：若 $X(x,y),Y(x,y)$ 满足在单连通域内具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$，则存在二元函数：

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(x,y)dx+Y(x,y)dy$$

具有性质 $dU(x,y)=X(x,y)dx+Y(x,y)dy$，它与一元函数的原函数相仿，所以我们也称 $U(x,y)$ 为 $Xdx+Ydy$ 的一个原函数。

故其全体原函数为 $U(x,y)+C\quad(C$为常数$)$.

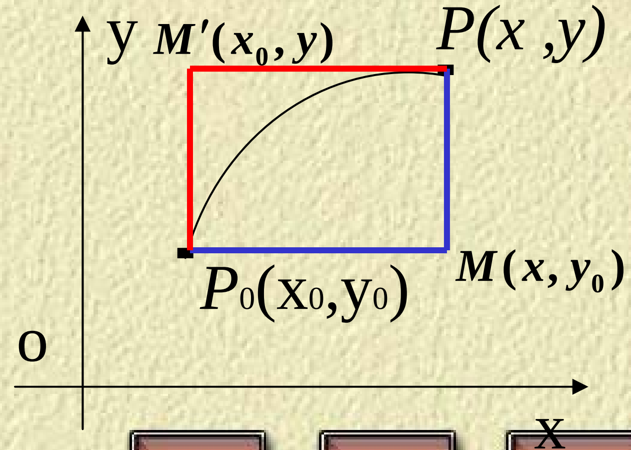
由于 $X(x,y), Y(x,y)$ 在单连通域内具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ 时，$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Xdx+Ydy$ 与路径无关，故为计算简便起见常选积分路径为折线：

$$u(x,y)=\int_{\overline{P_0M}} Xdx+Ydy+\int_{\overline{MP}} Xdx+Ydy$$

$$=\int_{x_0}^{x} X(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Y(x,y)dy$$

$$=\int_{\overline{P_0M'}} Xdx+Ydy+\int_{\overline{M'P}} Xdx+Ydy$$

$$=\int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} X(x,y)dx$$



上页 下页 返回

例 4(书中例 5)验证

$(3x^2+2xy^2)dx+(3x^2y^2+2y)dy$ 是全微分，并求其原函数。

解 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=6xy^2$，$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=6xy^2$ 在全平面内有

$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，所以原式是全微分，取 $(0,0)$ 为起点，得原函数为

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+2xy^3)dx+(3x^2y^2+2y)dy$$

$$=\int_0^x 3x^2dx+\int_0^y(3x^2y^2+2y)dy$$

$$=x^3+x^2y^3+y^2$$

全体原函数为 $x^3+x^2y^3+y^2+C$

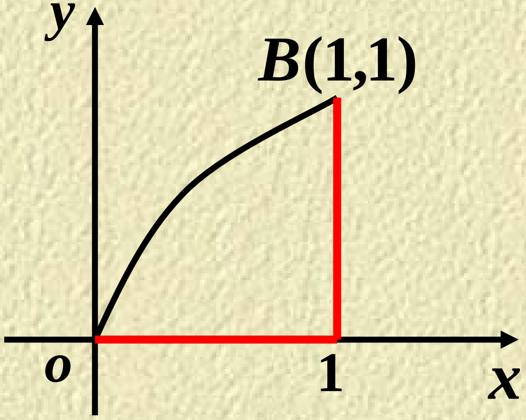
例 5　计算 $\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$.　其中 L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线弧 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$.

解　$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$

$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$,

原积分与路径无关



故原式 $=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\frac{23}{15}$.

上页　下页　返回

例 6（书中例 6） 设曲线积分$\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi(x)$具有连续的导数，且$\varphi(0) = 0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$.

解 $X(x, y) = xy^2$， $Y(x, y) = y\varphi(x)$，

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)] = y\varphi'(x),$$

积分与路径无关 $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$，

上页 下页 返回

由 $y\varphi'(x) = 2xy \quad \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + c$

由 $\varphi(0) = 0$，知 $c = 0 \quad \Rightarrow \varphi(x) = x^2$.

故 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$

$$= \int_0^1 0 dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}.$$

上页 下页 返回

4. 全微分方程

全微分方程是一类重要的一阶微分方程。一个一阶微分方程写成

$$X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$$

的形式后，若它的左端恰好是某个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，即

$$dU(x,y) = X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

则称此方程为全微分方程。

上述一阶微分方程为全微分方程的充要条件是 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ ，当用这个条件判断出全微分方程后，方程可写作

$$dU(x,y)=X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$$

其中，$U(x,y)$ 为 $Xdx+Ydy$ 的一个原函数。

从而得方程的解为：$U(x,y)=C$

求全微分方程 $Xdx+Ydy=0$ 的解的步骤:

(1) 先求 $\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial x}$，若 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$，说明是全微分方程，并求出使 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 的区域 D.

(2) 求出 $U(x,y)$.

法 1. $U(x,y)=\int_{x_0}^{x} X(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Y(x,y)dy$

法 2. 待定函数法.

法 3. 凑全微分法(分项组合)

(3) 通解为: $U(x,y)=C$

上页 下页 返回

注意： 求原函数前，必须先验证所给方程是否是全微分方程，即验证 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，否则会得出错误的结果。

例： $ydx-xdy=0$

即 $X=y\ \ Y=-x$ $\qquad \dfrac{\partial X}{\partial y}=1,\quad \dfrac{\partial Y}{\partial x}=-1$.

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} ydx-xdy$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y(-x)dy \qquad =-xy$$

全体原函数为

$-xy+C$

原因在于 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}\neq\dfrac{\partial X}{\partial y}$，而求 $U(x,y)$ 时却使用了 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$

即 $U(x,y)=-xy+C$

上页 下页 返回

例 7(书中例 7) 求微分方程

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=0$$

的通解。

解 $X=x^2+2xy-y^2$

$$Y=x^2-2xy-y^2$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=2x-2y=\frac{\partial X}{\partial y},$$

所以这是全微分方程，可取

$$(x_0,y_0)=(0,0)$$

上页 下页 返回

得

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3$$

故方程的通解为

$$\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C$$

除了利用曲线积分以外，还可以用下面的**待定函数法**方法求原函数$U(x,y)$. 由

$$Xdx + Ydy = dU(x,y)$$

得 $\dfrac{\partial U}{\partial x} = X = x^2 + 2xy - y^2$

将两边对 x 积分（y 看作常数），得

$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 + C(y)$$ 其中 $C(y)$ 是 y 的待定函数。

将上式所得的 $U(x,y)$ 对 y 求偏导数，得

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2-2xy+C'(y)$$

利用 $\frac{\partial u}{\partial y}=Y=x^2-2xy-y^2$ 得 $C'(y)=-y^2$

从而 $C(y)=-\frac{1}{3}y^3+C_1$ (取 $C_1=0$) 故

$$U(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy-\frac{1}{3}y^3$$

得方程的通解 $\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy-\frac{1}{3}y^3=C$

上页 下页 返回

凑全微分法(分项组合)

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$$

$$=x^2dx+(2xydx+x^2dy)-(y^2dx+2xydy)-y^2dy$$

$$=d\left(\frac{x^3}{3}\right)+d(x^2y)-d(xy^2)-d\left(\frac{y^3}{3}\right)$$

$$=d\left(\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}\right)$$

知 $U(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}$

上页 下页 返回

一些函数的全微分公式

$$xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$$

$$ydx + xdy = d(xy)$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x}), \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}d[\ln(x^2 + y^2)]$$

$$\frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2} = d(arctg\frac{y}{x})$$

上页 下页 返回

例 8. 求方程 $(x^2+y)dx+(x+y)dy=0$ 的通解。

全微分方程

解: $\because \dfrac{\partial X}{\partial y}=1=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$

重新分项组合: $x^2dx+ydy+(ydx+xdy)=0$

也可写成: $d\left(\dfrac{x^3}{3}\right)+d\left(\dfrac{y^2}{2}\right)+d(xy)=0$

即: $d\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}+xy\right)=0 \quad \therefore \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^2}{2}+xy=C$

例 9. 求方程 $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ 的通解。

全微分方程

解: $\because \frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}=\frac{\partial Y}{\partial x}$

重新分项组合: $\frac{1}{y^2}dy+(\frac{2x}{y^3}dx-\frac{3x^2}{y^4}dy)=0$

也可写成: $d\left(-\frac{1}{y}\right)+d(x^2y^{-3})=0$

即: $d\left(-\frac{1}{y}+x^2y^{-3}\right)=0 \quad \therefore -\frac{1}{y}+x^2y^{-3}=C$

例 10. 求方程 $ydx - xdy = 0$ 的通解。

不是全微分方程

解 1: $\because \dfrac{\partial X}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Y}{\partial x}$

$$\because d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

故原方程变形为: $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = 0$

即: $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0 \qquad \therefore \dfrac{x}{y} = C \Rightarrow y = C_1 x$

上页 下页 返回

例 10. 求方程 $ydx-xdy=0$ 的通解。

解 2: $\because \dfrac{\partial X}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Y}{\partial x}$

不是全微分方程

$$\because d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

故原方程变形为: $\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$

即: $d\left(\dfrac{y}{x}\right)=0 \quad \therefore \dfrac{y}{x}=C \Rightarrow y=Cx$

例 10. 求方程 $ydx - xdy = 0$ 的通解。

不是全微分方程

解 3：$\because \dfrac{\partial X}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Y}{\partial x}$

故原方程变形为：$\dfrac{ydx - xdy}{xy} = 0$

即：$\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{y} = 0$ $\quad d(\ln x - \ln y) = 0$

$\ln x - \ln y = \ln C$ $\quad \ln \dfrac{x}{y} = \ln C$

$\therefore \dfrac{x}{y} = C \Rightarrow y = Cx$

上页 下页 返回

小结

1. 二重积分与曲线积分的关系

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L^+} Xdx+Ydy$$ ——格林公式;

2. 格林公式的应用.

3. 全微分准则，原函数

4. 全微分方程

上页 下页 返回

	与路径无关的三个等价命题
条件	在单连通域 D 上 $X(x,y), Y(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下三个命题成立.
等价命题	(1) 在 D 内 $\int_L Xdx+Ydy$ 与路径无关 或 $\oint_C Xdx+Ydy=0$, 闭曲线 $C\subset D$ (2) 在 D 内存在 $U(x,y)$ 使 $du=Xdx+Ydy$ (3) 在 D 内, $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$

历届研究生试题

- 格林公式
- 平面曲线积分与路径无关的条件
- 全微分准则、原函数

1.(87,3)设L为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$的值是 ______.

解：由格林公式可知

$$原式 = \iint_{x^2+y^2\le 9}(-4+2)dxdy$$

$$= -2\iint_{x^2+y^2\le 9}dxdy$$

$$= -2\times 9\pi = -18\pi$$

上页 下页 返回

2.(04,8)设L为正向圆周 $x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，则曲线积 分$\int_L xdy-2ydx$的值为 ______ .

解1: 圆周$x^2+y^2=2$的参数方程为

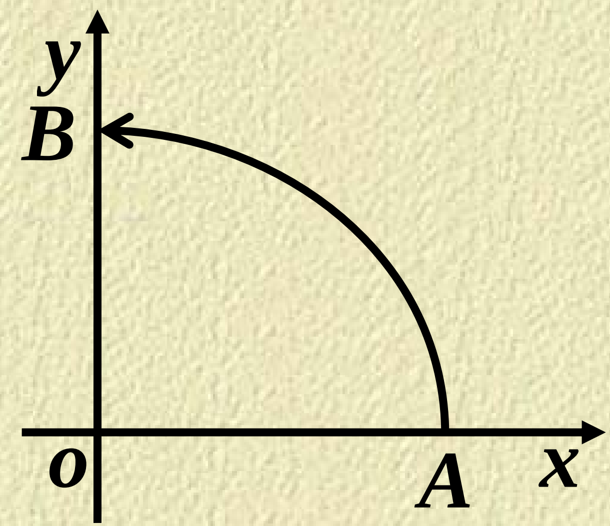
$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad (0\le t\le \frac{\pi}{2}) \qquad 则$$

$$\int_L xdy-2ydx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t+2\sqrt{2}\sin t\cdot\sqrt{2}\sin t\right]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2+2\sin^2 t\right]dt=\frac{3}{2}\pi$$

2.(04,8)设L为正向圆周 $x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，则曲线积分$\int_L xdy-2ydx$的值为______.



解2：补线段$\overline{OA}$和$\overline{BO}$，用格林公式，则

$$\int_L xdy-2ydx$$

$$=\oint_{L+\overline{BO}+\overline{OA}} xdy-2ydx-\oint_{\overline{BO}} xdy-2ydx-\oint_{\overline{OA}} xdy-2ydx$$

$$=\iint_D (1+2)dxdy-0-0=\frac{3}{2}\pi$$

3.(00,6)计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$(1,0)$为中心、$R$为半径的圆周$(R>1)$取逆时针方向.

分析：本题虽是封闭曲线，但不能直接用格林公式，因为$R>1$，故原点包含在圆周L内，而在原点处被积函数无意义，因此不满足格林公式的条件，需作一个包含原点的封闭曲线挖去原点.此题最好取一个以原点为中心的椭圆 $4x^2+y^2=\delta^2$

上页 下页 返回

解：$X=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}\qquad Y=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

作椭圆$C:4x^2+y^2=\delta^2$　(C取逆时针方向，δ是足够小的正数，使$4x^2+y^2=\delta^2$全含在L内）

由格林公式知 $\displaystyle\oint_{L+C^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$

即得$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{\delta^2}$

上页 下页 返回

$$= \frac{1}{\delta^2}\oint_C xdy - ydx = \frac{2}{\delta^2}S = \frac{2}{\delta^2}\pi\frac{\delta}{2}\cdot\delta = \pi$$

其中 S 为椭圆域 $4x^2 + y^2 \le \delta^2$ 的面积

注释：本题主要考查格林公式的使用条件及第二类曲线积分的计算.本题最容易出现的错误是不考虑（0,0）点，直接用格林公式，得出原函数为零的结果.望同学们不要出现类似的错误.

4.(03,10)已知平面区域

$$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\},$$

L为D的正向边界 .试证:

(1)$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

(2)$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$

分析: (1)闭曲线上第二类线积分 的计算，有两种方法：一种是化为定积 分；另一种是利用格林公式化为二重积分 .(2)要证一个闭曲线上的第 二类线积分大于一个常数 ，应先化为二重积分，再证明二重积分大于右 端常数 .

上页 下页 返回

4.(03,10)已知平面区域

$$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\},$$

L为D的正向边界 .试证:

$$(1)\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$$

(1)证1　左端 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx$

$$=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$$

证2　右端 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx$

$$=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$$

$$\therefore \oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$$

4.(03,10)已知平面区域

$$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\},$$

L为D的正向边界.试证:

(1)$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

(1)证 2　由格林公式得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\sigma$$

因为 D关于 $y=x$对称，所以

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\sigma$$

4.(03,10)已知平面区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\},$$

L为D的正向边界.试证:

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$

(2)由(1)知

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma$$

$$=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\sigma$$

$$\ge\iint_D 2d\sigma \qquad (利用\ a^2+b^2\ge 2ab)$$

$$=2\pi^2$$

5.(95,8)设函数$Y(x,y)$在xoy平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xydx+Y(x,y)dy$与路径无关，并且对任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Y(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Y(x,y)dy$$

求$Y(x,y)$.

解：$\because$ 线积分$\int_L 2xydx+Y(x,y)dy$与路径无关，

则$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)$，　　即$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=2x$

于是　　$Y(x,y)=x^2+C(y)$

上页　下页　返回

又$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Y(x,y)dy = \int_0^1 [t^2 + C(y)]dy$

$= t^2 + \int_0^1 C(y)dy$

$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Y(x,y)dy = \int_0^t [1^2 + C(y)]dy$

$= t + \int_0^t C(y)dy$

则$t^2 + \int_0^1 C(y)dy = t + \int_0^t C(y)dy$

两边对 t求导得 $2t = 1 + C(t)$, $\quad C(t) = 2t - 1$

从而$C(y) = 2y - 1$, $\quad Y(x,y) = x^2 + 2y - 1.$

6.(99,5)求

$$I=\int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy,$$

其中 a,b 为正的常数， L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

分析：本题如果直接计 算是很困难的 .有两种办法可简化计算：一是 补线再利用格林公式；二是将原积分分 为两部分，使其一部分与路径无关 .

上页 下页 返回

解1: 补线段 $\overline{OA}$, 则

$$I = \oint_{L+\overline{OA}} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$- \int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$= \iint_D (e^x \cos y - a - e^x \cos y + b)dxdy - \int_0^{2a} (-bx)dx$$

其中 D 为 L 和线段 $\overline{OA}$ 围成的半圆域，则

$$I = \iint_D (b-a)dxdy + 2a^2 b = \frac{\pi a^2}{2}(b-a) + 2a^2 b$$

$$= (\frac{\pi}{2} + 2)a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3$$

解2：将原线积分分为两部 分

$$I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\int_L (e^x\sin y dx+e^x\cos y dy)$$

$$-\int_L [b(x+y)dx+axdy]$$

而 $\int_L (e^x\sin y dx+e^x\cos y dy)=\int_L d(e^x\sin y)$

$$=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

上页 下页 返回

L的参数方程为 $\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

则 $\int_L [b(x+y)dx + axdy]$

$$= \int_0^{\pi} (-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t$$

$$+ a^3\cos t + a^3\cos^2 t)dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3$$

从而 $I = (\frac{\pi}{2} + 2)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$

7.(02,8)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其起点为(a,b)，终点为(c,d).记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$$

(1)证明曲线积分I与路径L无关；

(2)当$ab=cd$时，求I的值.

(1)证：因为 $\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\right\}$

$$=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$

上页 下页 返回

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分I与路径无关.

(2)解1：由于I与路径无关，故可取积分路径L为由点(a,b)到点(c,b)再到(c,d)的折线段，所以

$$I=\int_a^c \frac{1}{b}\left[1+b^2 f(bx)\right]dx+\int_b^d \frac{c}{y^2}\left[y^2 f(cy)-1\right]dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d c^2 f(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)dt+\int_{bc}^{cd} f(t)dt$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)dt$$

当$ab=cd$时，$\int_{ab}^{cd} f(t)dt=0,$

由此得$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

解2：$I=\int_L \frac{dx}{y}-\frac{xdy}{y^2}+\int_L yf(xy)dx+xf(xy)dy$

$$\int_L \frac{dx}{y}-\frac{xdy}{y^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_L yf(xy)dx + xf(xy)dy = \int_L f(xy)d(xy)$$

$$= F(cd) - F(ab)$$

当$ab = cd$时，$F(cd) - F(ab) = 0,$

由此得 $I = \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}$

上页 下页 返回

8.(98,6)确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，求 $u(x,y)$.

分析：平面单连通域内　向量场

$A(x,y)=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ 为梯度的

充要条件是 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，利用此式先确

定 λ，然后进一步求出 $u(x,y)$.

解：

$$X(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$$

$$Y(x,y)=x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$$

上页　下页　返回

由 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，有 $4x(x^4+y^2)^{\lambda}(\lambda+1)\equiv 0$

从而可知　$\lambda=-1$

在 $x>0$ 处取点 $(1,0)$, 则

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}+C$$

$$=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+y^2}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}dy+C$$

$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$$

上页　下页　返回

作业：

P188：　1.　2.　3.

5.　6.　7(2)(3).　8(3)(4)