6.3 向量的乘积

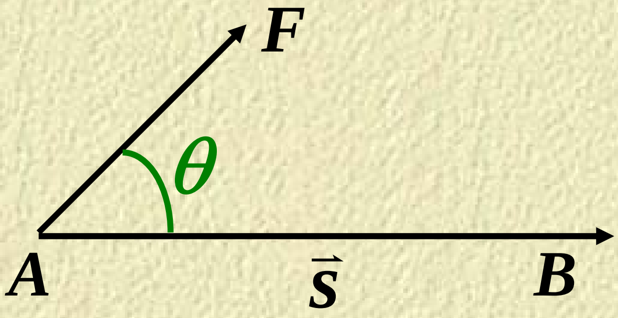
6.3.1 向量的数量积

1.数量积的概念

实例 一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点A移动到点B，以$\vec{s}$表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos(\vec{F},\vec{s})$$

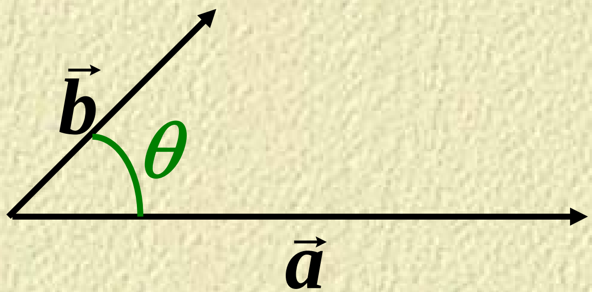
$$=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$



启示 两向量作这样的运算, 结果是一个数量.

定义 设$\vec{a}$与$\vec{b}$为两向量，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b})$ 叫作$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**（又称为点积或内积），记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

利用向量的投影可得



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|(\vec{b})_{\vec{a}}=|\vec{b}|(\vec{a})_{\vec{b}}$$

即 两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

从而可得 $(\vec{a})_{\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$(\vec{b})_{\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

由数量积的定义可知，实例中的功可以表示为

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$$

数量积符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

（2）结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$（$\lambda$ 为数）

（3）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

(3)证：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\,(\vec{a}+\vec{b})_{\vec{c}}$

$$=|\vec{c}|\,(\vec{a})_{\vec{c}}+|\vec{c}|\,(\vec{b})_{\vec{c}}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

2. 数量积的坐标表示式

设 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

$$= x_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}\cdot\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}\cdot\vec{k}) +$$

$$y_1x_2(\vec{j}\cdot\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}\cdot\vec{k}) +$$

$$z_1x_2(\vec{k}\cdot\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}\cdot\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}\cdot\vec{k})$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

$$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k},\ \therefore \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

数量积的坐标表示式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$ 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时,

$$\Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

两向量夹角余弦的坐标表示式

关于数量积的说明:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

证: $\because \theta=0$, $\therefore \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

上页 下页 返回

(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

或 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

证　若 $|\vec{a}|\neq 0,\ |\vec{b}|\neq 0,$

$(\Leftarrow)$ $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0 \quad \therefore \cos\theta=0,$

$\theta=\dfrac{\pi}{2},$　　即 $\vec{a}\perp\vec{b}.$

$(\Rightarrow)$ $\because \vec{a}\perp\vec{b},\ \therefore \cos\theta=0,$ 故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 中至少有一个零向量，

$(\Leftarrow)$ 因为零向量方向任意，故可认为两个向量垂直。

$(\Rightarrow)$ 因为零向量的模为0，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

例 1　已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}$；(2)$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；(3)$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{1\times 1+1\times(-2)+(-4)\times 2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$$

$$=\frac{-9}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=(\vec{a})_{\vec{b}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{-9}{3}=-3$$

或 $$=|\vec{a}|\cos\theta=\sqrt{18}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}=-3$$

例 2　证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证　$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=(\vec{b}\cdot\vec{c})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

上页　下页　返回

例 3（书中例 2）设 $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b},\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\cos(\vec{c},\vec{d})$.

解 $$\cos(\vec{c},\vec{d})=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|}$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=2(\vec{a}\cdot\vec{a})+\vec{a}\cdot\vec{b}-3(\vec{b}\cdot\vec{b})$$

$$=2|\vec{a}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})-3|\vec{b}|^2$$

$$=2+2\cos\frac{\pi}{3}-3\times 2^2$$

$$=-9$$

上页 下页 返回

$$\left|\vec{c}\right|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c}$$

$$= (2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$$

$$= 4(\vec{a}\cdot\vec{a}) + 12(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 9(\vec{b}\cdot\vec{b}) = 52$$

$$\left|\vec{d}\right|^2 = \vec{d}\cdot\vec{d} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \vec{b}\cdot\vec{b} = 3$$

$$\therefore\ \left|\vec{c}\right| = \sqrt{52}\ ,\quad \left|\vec{d}\right| = \sqrt{3}$$

$$\cos(\vec{c},\vec{d}) = \frac{-9}{\sqrt{52}\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{39}}{26}$$

上页 下页 返回

练习题

1. 设$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为$\pi/3$，求$|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

解：$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$=4\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}=16+225-60=181$$

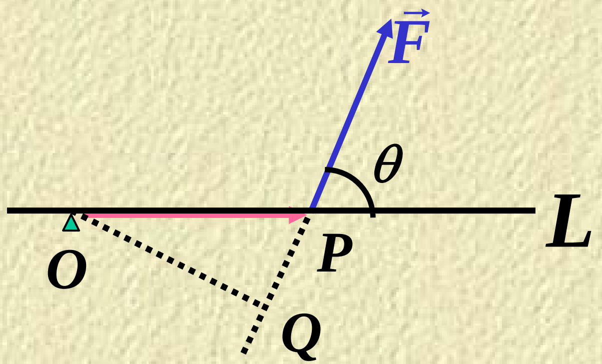
$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{181}$$

6.3.2 向量的向量积

1. 向量积的概念

实例 设 O 为一根杠杆 L 的支点，有一力 $\vec{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. 力 $\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ，

力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\vec{M}$，



它的模 $|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}|$

$$= |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

$\vec{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{F}$ 所决定的平面，指向符合右手系.

定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**是一个向量，记作

$\vec{a}\times\vec{b}$，其模为$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

其方向$\vec{a}\times\vec{b}$既垂直于 $\vec{a}$，又垂直于 $\vec{b}$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}\times\vec{b}$符合右手系.

向量积也称为“**叉积**”、“**外积**”.

向量积符合下列运算规律：

（1）反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

最容易出错的一个运算规律

上页 下页 返回

（2）结合律:$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$（$\lambda$ 为数量）

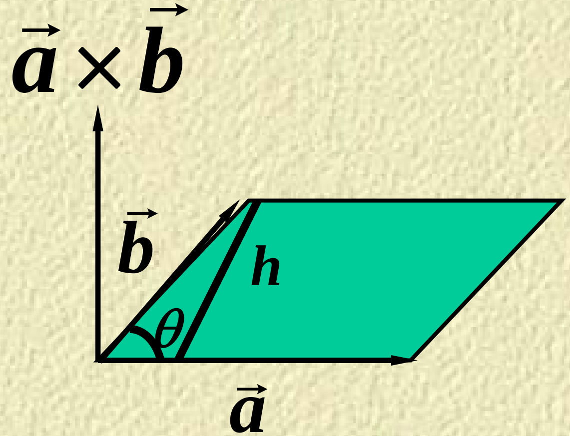
（3）分配律: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

$$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$$

向量积的模的几何意义

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

$$=\left|\vec{a}\right|h$$



即：$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以 $\vec{a}$和 $\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.

上页 下页 返回

2. 向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$， $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$

$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

为方便记忆，向量积可用三阶行列式表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

向量积的坐标表示

关于向量积的说明：

$$\vec{a}\,//\,\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\,//\,\vec{b}\iff\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{0}\quad\Rightarrow\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$$

上页 下页 返回

证 若 $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$,

($\Leftarrow$) $\because \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 0.$

$\therefore \sin\theta = 0$, $\theta = 0$或π $\vec{a} /\!/ \vec{b}$

($\Rightarrow$) $\because \vec{a} /\!/ \vec{b}$ $\therefore \theta = 0$或π $\therefore \sin\theta = 0$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 0.$ $\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

若 $\vec{a}$、$\vec{b}$中至少有一个零向量,

($\Leftarrow$) 因为零向量方向任意，可认为两个向量平行。

($\Rightarrow$) $\because |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 0$, $\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

例 4（与书中例 3 类似）　求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \pm\vec{c}^{\,0}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right)$$

例 5(书中例 1) 已知 ΔABC 的三个顶点 $A(2,1,3)$、$B(1,2,1)$、$C(3,1,0)$，求 BC 边上的高 AD 的长.

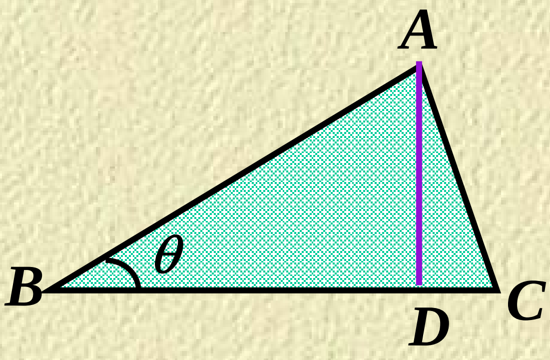
解 $\overrightarrow{BC}=\{2,-1,-1\}$　$\overrightarrow{BA}=\{1,-1,2\}$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+5^2+1^2}=\sqrt{35}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\therefore|\overrightarrow{AD}|=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{35}{6}}$$



上页 下页 返回

例 6　设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且$|\vec{m}|=4$，$|\vec{n}|=2$，$|\vec{p}|=3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解　$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$　$=|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{p}|\cos(\vec{m}\times\vec{n},\ \vec{p})$

$$=|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{p}|\cos(\vec{p},\ \vec{p})\quad =|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{p}|$$

$$=|\vec{m}||\vec{n}||\vec{p}|\sin(\vec{m},\ \vec{n})$$

$$=|\vec{m}||\vec{n}||\vec{p}|\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=4\times2\times3\times1=24$$

6.3.3 向量的混合积

定义 设有三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的**混合积**，记为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$或$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

混合积的坐标表示

设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，

$\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

混合积的坐标表示式

关于混合积的说明：

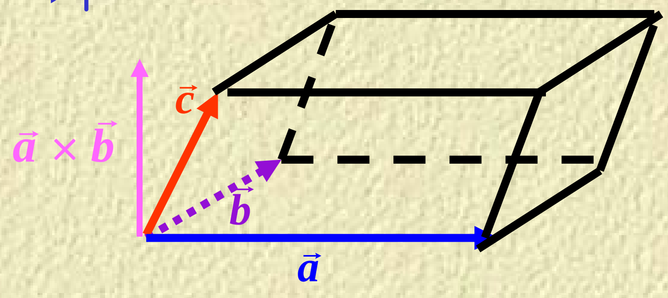
（1）混合积的几何意义：

向量的混合积 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

$$V=\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})\right|$$

$$=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|$$



（2）三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

因而有 $(a, b, b) = 0, \quad (b, a, b) = 0$

(3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

$$= -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$$

即：轮换混合积中三个向量的顺序,其值不变； 对调混合积中的两个相邻的向量,其值变号.

例7 已知 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=2$，

计算 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

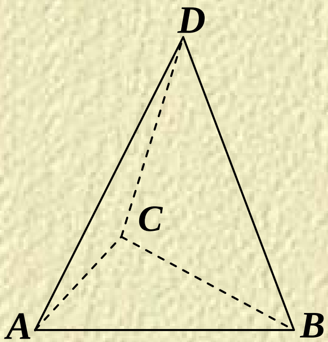
$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=4.$$

例8（书中例5）

已知空间四点 $A(1,0,1)$，$B(4,4,6)$，$C(2,2,3)$，$D(1,2,0)$，求以该四点为顶点的四面体的体积V.

解 所求四面体的体积等于以 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 、$\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$.



$$\overrightarrow{AB}=\{3,4,5\} \qquad \overrightarrow{AC}=\{1,2,2\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\{0,2,-1\}$$

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{2}{3}$$

小结

向量的数量积（结果是一个数量）

向量的向量积（结果是一个向量）

向量的混合积（结果是一个数量）

（注意向量共线、共面的充分必要条件）

思考题

已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

思考题解答

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 [1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})]$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

作业：

P16： 1. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 14. 15

P44: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.