常 用 公 式

一．两个重要极限（只要满足以下类型，可把下列公式中的 x 换为 $g(x)$）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （注：$\dfrac{0}{0}$ 型）

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （注：1^{∞} 型）

推荐公式（1^{∞} 型极限）：若 $\lim f(x)=0$，$\lim h(x)=\infty$，且 $\lim f(x)\cdot h(x)=A$，

则 $\lim(1+f(x))^{h(x)}=e^{A}$

二．等价无穷小（若当 $g(x)\to 0$ 时，可以把下列公式中的 x 换为 $g(x)$）

当 $x\to 0$ 时

1．$\sin x\sim x$　　2．$\arcsin x\sim x$

3．$\tan x\sim x$　　4．$\arctan x\sim x$

5．$e^{x}-1\sim x$　　6．$a^{x}-1\sim x\ln a\quad(a>0,a\neq 1)$

7．$\ln(1+x)\sim x$　　8．$1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$

9．$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\quad(\alpha\neq 0)$　　10．$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$（相当于公式 9 中 $\alpha=\dfrac{1}{n}$）

三．导数基本公式

1．$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2．$f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{-}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^{-}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

3．$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^{+}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

4．$(C)'=0$　　5．$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$（$\mu\in R$）

6．$(a^{x})'=a^{x}\ln a$　　7．$(e^{x})'=e^{x}$

8．$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　9．$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$　　11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$　　13. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

14. $(\sec x)' = \sec x \tan x$　　15. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

16. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （$|x|<1$）　　17. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （$|x|<1$）

18. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　19. $(\arctan x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

四．导数运算法则

1. $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$　　2. $(uv)' = u'v + uv'$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ （$v(x) \neq 0$）　　4. 链法则：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

5. 反函数求导法：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

6. 参数方程求导法：设$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，　则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

7. 隐函数求导法：等式两端对 x 求导时，注意 y 是 x 的函数，利用复合函数求导法即可。

8. 对数求导法：先取对数，再利用隐函数求导法，或 $y' = \left(e^{\ln y}\right)'$ 再用复合函数求导法。

特别提示：

1. **求分段函数在分段点处的导数时，一定要用导数的定义求左、右导数。若利用书中 P86 定理 2 求左（右）导数时，必须指明分段函数在分段点处左（右）连续**

2. **要弄清导数记号的含义：对于复合函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，$\left(f[\varphi(x)]\right)'$ 表示复合函数对自变量 x 求导，而 $f'[\varphi(x)]$ 表示复合函数对中间变量 u 求导**

五．求函数的 n 阶导数

1. 直接法：从一阶导数开始逐阶求导，归纳出规律后，用归纳法验证其正确性（一般不用直接法，除非求指定的导数，比如求 y'''）

2. 莱布尼兹公式（适用于求两个函数乘积的 n 阶导数）

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

（注意上述公式中第一项和最后一项分别容易漏写函数 v 及 u）

3．间接法：利用下列公式，结合复合函数求导法求出函数的 n 阶导数

(1) $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ （α 不是正整数)

(2) $\left(x^{m}\right)^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n<m \\ m!, & n=m \\ 0, & n>m \end{cases}$ （m 是正整数)

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(4) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(5) $\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n}$

(6) $\left(e^{x}\right)^{(n)}=e^{x}$

(7) $(\ln(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}$ （$x>-1$）

(8) $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=(\ln(1+x))^{(n+1)}=(-1)^{n}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

4．隐函数的高阶导数：按隐函数求导法对 x 求一次导后（此时等式中除了含有 y 也含有 y'），等式两端再对 x 求导，注意 y 和 y' 是 x 的函数,，利用复合函数求导法即可，以此类推。

5．参数方程的高阶导数：设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\omega(t)$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)}$，以此类推。

六．微分基本公式（略，利用 $dy=f'(x)dx$ 参照导数公式即可）

七．微分运算法则

1．$d(\alpha u+\beta v)=\alpha du+\beta dv$

2．$d(uv)=vdu+udv$

3．$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ （$v(x)\neq 0$）

八．泰勒公式及常用函数的麦克劳林公式

1. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

2. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

3. $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ （$-\infty<x<+\infty$）

4. $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{\sin\left(\theta x+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ （$-\infty<x<+\infty$）

5. $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{\cos(\theta x+(n+1)\pi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ （$-\infty<x<+\infty$）

6. $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$

（$-1<x<+\infty$）

7. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$

$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ （α 是实数）

九．曲率 $k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$

十．渐近线

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则 $y=A$ 为水平渐近线

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 为垂直渐近线

3. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ (k是不为零的常数) 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$，

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ (k是不为零的常数) 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$，则 $y=kx+b$ 为斜渐近线