三重积分例题

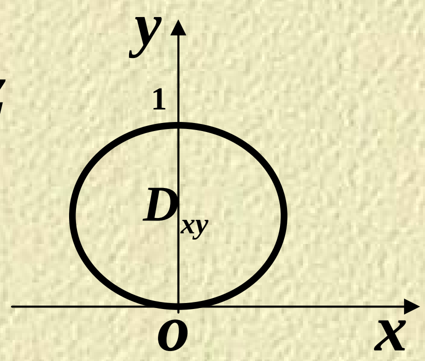
例 1 (书中例 13)　将三次积分

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz$$

化为在柱坐标系下的三次积分。

解: 把三次积分视为“先一后二”法得来:

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz$$



$$D_{xy}: x^2+y^2\le y$$

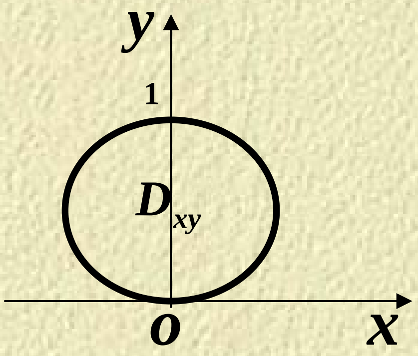
即积分区域 V 是由平面 $z=0$，锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与圆柱面 $x^2+y^2=y$ 围成.

$$D_{\rho\theta}: 0 \le \theta \le \pi,\quad \rho \le \sin\theta$$

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz$$

$$= \iint\limits_{D_{\rho\theta}} \rho d\rho d\theta \int_0^{\sqrt{3}\rho} f(\rho^2+z^2)dz$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sin\theta} \rho d\rho \int_0^{\sqrt{3}\rho} f(\sqrt{\rho^2+z^2})dz$$



例 2 （书中例 11) 计算 $\iiint\limits_V (mx^2+ny^2+pz^2)dV$ 其中 V 为球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$， m，n，p 为常数。

解: 利用变量轮换的对称性，得

$$\iiint\limits_V x^2dV=\iiint\limits_V y^2dV=\iiint\limits_V z^2dV$$

$$\therefore \iiint\limits_V (mx^2+ny^2+pz^2)dV=(m+n+p)\iiint\limits_V x^2dV$$

$$=\frac{1}{3}(m+n+p)\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV$$

$$=\frac{1}{3}(m+n+p)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2dr$$

$$=\frac{4}{15}\pi a^5(m+n+p)$$

例3 (97,5).计算$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dv$,其中$V$为

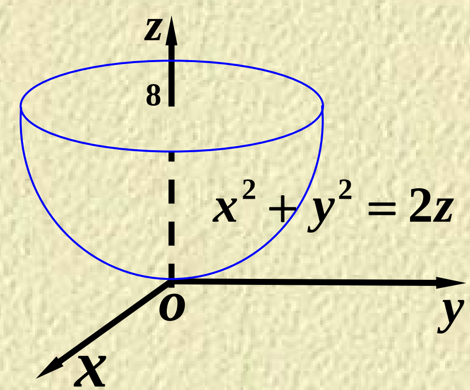
平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的

曲面与平面 $z=8$所围成的区域．

分析：平面曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲

面方程为$x^2+y^2=2z$，积分区域V在

xoy平面上的投影区域为 $x^2+y^2\le 16$,



故解法1：利用柱坐标；

解法2：先二（利用极坐标）后一。

上页 下页 返回

解1 由柱坐标变换 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$

$$dv=\rho d\rho d\theta dz,\qquad D_{\rho\theta}:\rho\le 4$$

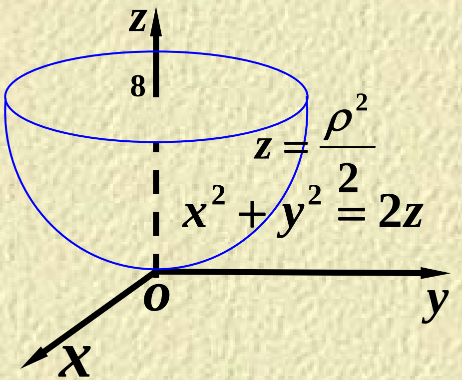
$$I=\iiint_V (x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{8}\rho^2dz$$

$$=2\pi\int_0^4\rho^3\left(8-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\frac{1024}{3}\pi$$

解2 $$I=\int_0^8dz\iint_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^8dz\iint_{\rho\le\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^8dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3d\rho=\frac{1024}{3}\pi$$



例4 (89,5)计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$,其中$\Omega$

是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

所围成的区域.

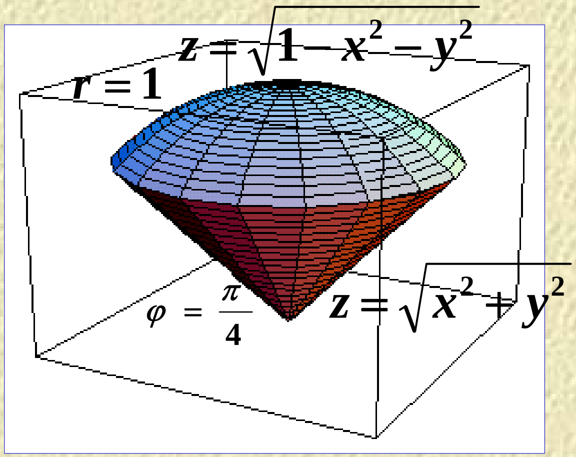
解1 积分区域关于yoz面对称, $\therefore \iiint\limits_{\Omega} xdV=0$

由球坐标变换

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV=\iiint\limits_{\Omega} zdV$$

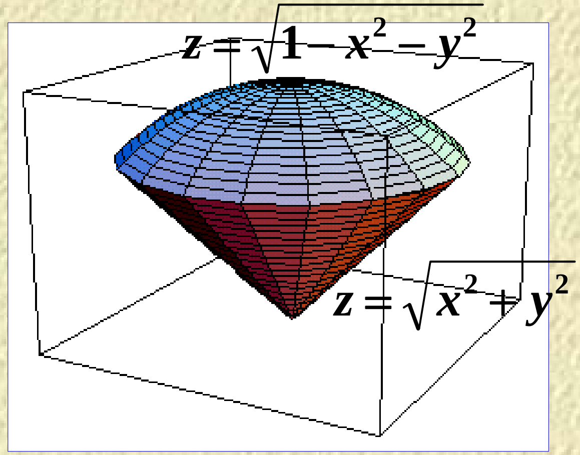
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{8}$$



上页 下页 返回

解2 由对称性得 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV$



采用“先二后一”法

由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} z\,dxdy+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} z\,dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi z^3\,dz+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi z(1-z^2)\,dz$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

例5 计算$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|} dv$, $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$.

解 $\because$ 被积函数仅为 z 的函数, D_z为圆域$x^2+y^2 \le 1-z^2$,

故采用 " 先二后一 " 法 .

因为积分区域关于 xoy面对称,

被积函数关于变量 z是偶函数,

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega} e^{|z|} dv = 2\iiint\limits_{\Omega_{上}} e^{z} dv = 2\int_0^1 e^z dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^z dz = 2\pi.$$

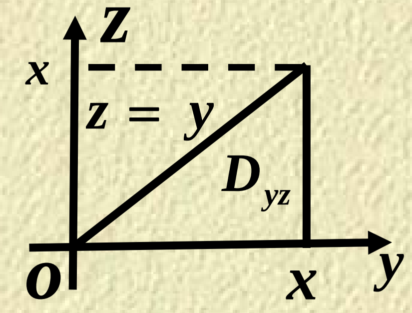
上页 下页 返回

例6 (书中例 14）设 f 为连续函数，证明

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)dz$$

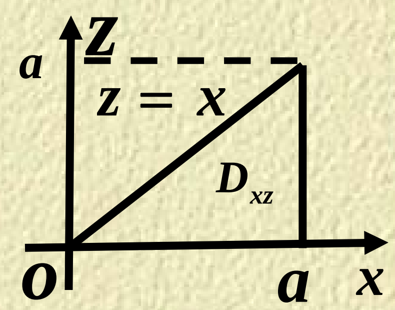
证 $\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz=\iint\limits_{D_{yz}} f(z)dydz$

$$=\int_0^x dz\int_z^x f(z)dy=\int_0^x (x-z)f(z)dz$$



$$\therefore \int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz=\int_0^a dx\int_0^x (x-z)f(z)dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}} (x-z)f(z)dxdz=\int_0^a dz\int_z^a (x-z)f(z)dx$$



$$=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)dz$$

上页 下页 返回