习题 6.6（P32）

1．求由与 x 轴的距离为 3，与 y 轴的距离为 2 的一切点所确定的曲线的方程.

解：设曲线上的任意一点为 $M(x, y, z)$， x 轴上的点为 $(x, 0, 0)$， y 轴上的点为 $(0, y, 0)$，由两点间的距离公式得所求曲线的方程为 $\begin{cases} y^2+z^2=3^2 \\ x^2+z^2=2^2 \end{cases}$

2．求通过点 $(0, 0, 0)$、$(3, 0, 0)$、$(2, 2, 0)$ 及 $(1, -1, -3)$ 的球面方程.

解：设所求球面方程为 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$，分别将 4 个已知点代入得联立方程，解得：$A=-3$，$B=-1$，$C=3$，$D=0$

故所求球面方程为 $x^2+y^2+z^2-3x-y+3z=0$

3．求球面 $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$ 的球心和半径.

解：将球面方程化为标准形式 $(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=7^2$

故球心为 $(6, -2, 3)$，半径 $R=7$

4．求内切于由平面 $3x-2y+6z-8=0$ 与三个坐标面围成的四面体的的球面方程.

解：设球心为 (a, b, c)，将已知平面化为截距式方程 $\dfrac{x}{\frac{8}{3}}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{\frac{4}{3}}=1$，由题意及截距式方程可知：$a>0$，$b<0$，$c>0$

又三个坐标面的方程分别为 $x=0$，$y=0$，$z=0$，故球心到三个坐标面及已知平面的距离相等，由点到平面的距离公式即得 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{-b}{1}=\dfrac{c}{1}=\dfrac{|3a-2b+6c-8|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=R$，

解得：$a=\dfrac{4}{9}$，$b=-\dfrac{4}{9}$，$c=\dfrac{4}{9}$，$R=\dfrac{4}{9}$ （注：解出 $R=2$，此时将点 $(2, -2, 2)$ 代入已知平面的左端得 $3\times2-2\times(-2)+6\times2-8=14>0$，说明点

$(2,-2,2)$在已知平面的上方，即此点不可能为球心，故应舍去）

5．下列方程在空间中表示什么图形？

（1） $x^2+4y^2=1$　　　　（2） $x^2+z^2=0$

（3）$\begin{cases} x^2=4y \\ z=1 \end{cases}$　　　　（4）$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=36 \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \end{cases}$

解：（1）表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面.

（2） 方程即$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$，表示 y 轴.

（3） 表示平面 $z=1$ 上的抛物线.

（4） 表示两个球面的交线.

6．求下列曲线绕坐标轴旋转所得的曲面方程.

（1） $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转　　　　（2） $\begin{cases} 4x^2-9y^2=36 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转

解：（1） $4x^2+9y^2+9z^2=36$

（2） $4x^2+4z^2-9y^2=36$

7．求曲线$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z=x+1 \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线.

解：在 xOy 坐标面上的投影$\begin{cases} x^2+y^2-x-1=0 \\ z=0 \end{cases}$

在 yOz 坐标面上的投影$\begin{cases} (z-1)^2+y^2-z=0 \\ x=0 \end{cases}$

在 zOx 坐标面上的投影$\begin{cases} z=x+1 \\ y=0 \end{cases}$

8．求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ x^2=y^2+z^2 \end{cases}$在 xOy 面上的投影.

解：消去 z 得 $5x^2-3y^2=1$，故曲线在 xOy 坐标面上的投影为 $\begin{cases}5x^2-3y^2=1\\ z=0\end{cases}$

9. 求母线分别平行于 x 轴及 y 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

解： 先求母线平行于 x 轴的柱面方程：

方程 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16 & (1)\\ x^2+z^2-y^2=0 & (2)\end{cases}$ 由 $(1)-2\times(2)$ 消去 x 得 $3y^2-z^2=16$，

即母线平行于 x 轴的柱面方程为 $3y^2-z^2=16$

再求母线平行于 y 轴的柱面方程：

方程 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16 & (1)\\ x^2+z^2-y^2=0 & (2)\end{cases}$ 由 $(1)+(2)$ 消去 y 得 $3x^2+2z^2=16$，

即母线平行于 y 轴的柱面方程为 $3x^2+2z^2=16$