例1. (90,3)积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于 ____ .

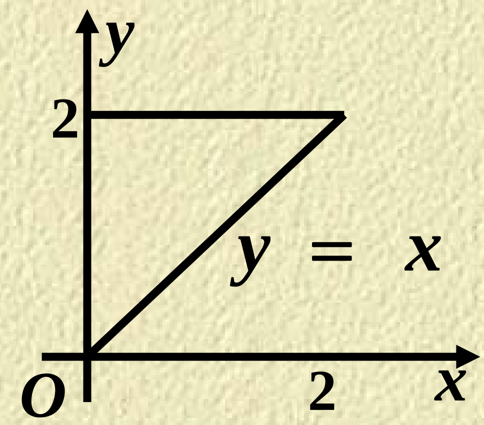
分析：因为$\int_x^2 e^{-y^2}dy$积不出，故应交换积分次序.

解：交换累次积分次序 得

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

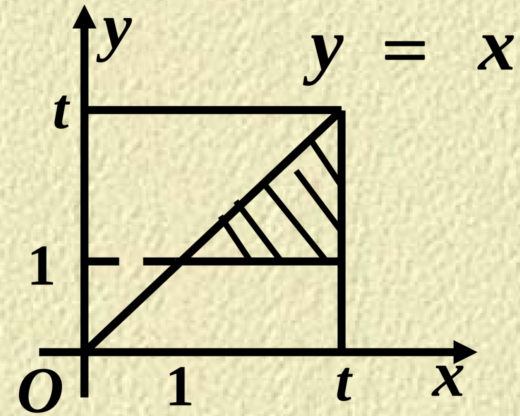


例2.(04,4) $f(x)$为连续函数, $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$,

则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0.

解　交换累次积分的次序得



$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$$

$$=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy$$

$$=\int_1^t (x-1)f(x)dx$$

$F'(t)=(t-1)f(t)$, $F'(2)=f(2)$, 故应选(B).

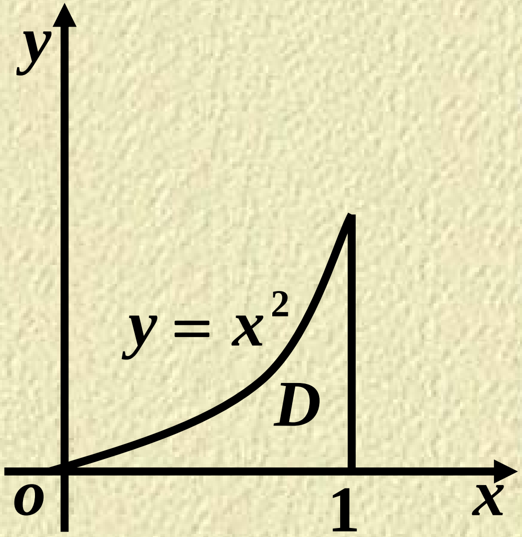
例 3. （P148 例 1）设

$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 其中 D 由 $y=0$， $y=x^2$ 和 $x=1$ 围成， $f(x,y)$ 在 D 上连续，求函数 $f(x,y)$.

解: 记 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=A$，

则 $f(x,y)=xy+A$

等式两端求积分，得



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D xyd\sigma+\iint\limits_D Ad\sigma$$

上页 下页 返回

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D xyd\sigma + \iint_D Ad\sigma \quad \text{即}$$

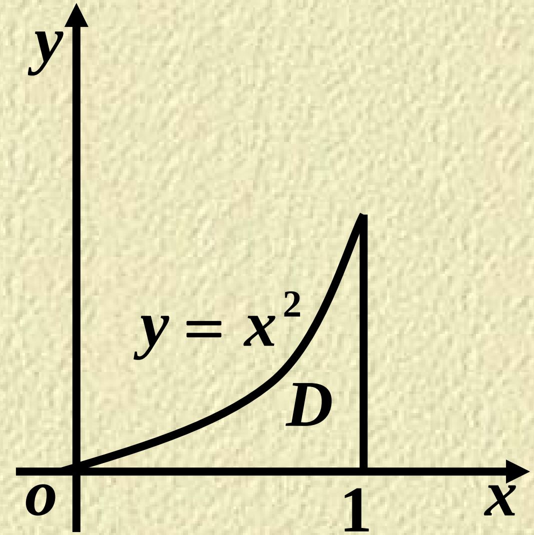
$$A = \int_0^1 xdx \int_0^{x^2} ydy + A\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 dx + A\int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{A}{3}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad f(x,y) = xy + \frac{1}{8}$$



上页 下页 返回

例 4.（P149 例 3） 证明不等式

$$1 \le \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) d\sigma \le \sqrt{2}$$

其中 D 是正方形区域： $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

解: 利用变量轮换的对称性（ D 不变）

$$\iint_D \cos y^2 d\sigma = \iint_D \cos x^2 d\sigma$$

得 $\iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) d\sigma = \iint_D (\cos x^2 + \sin x^2) d\sigma$

$$= \sqrt{2} \iint_D \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) d\sigma$$

上页 下页 返回

显然 $\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1,$

又 $\because 0\le x\le 1,$ $\therefore \sin(x^2+\frac{\pi}{4})\ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

得 $1\le \sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le \sqrt{2}$

由估值定理 (区域 D的面积为 1),得

$$\Rightarrow 1\le \iint_D(\cos y^2+\sin x^2)d\sigma\le \sqrt{2}\iint_D d\sigma\le \sqrt{2}$$

例 5. (P149 例 4)　计算

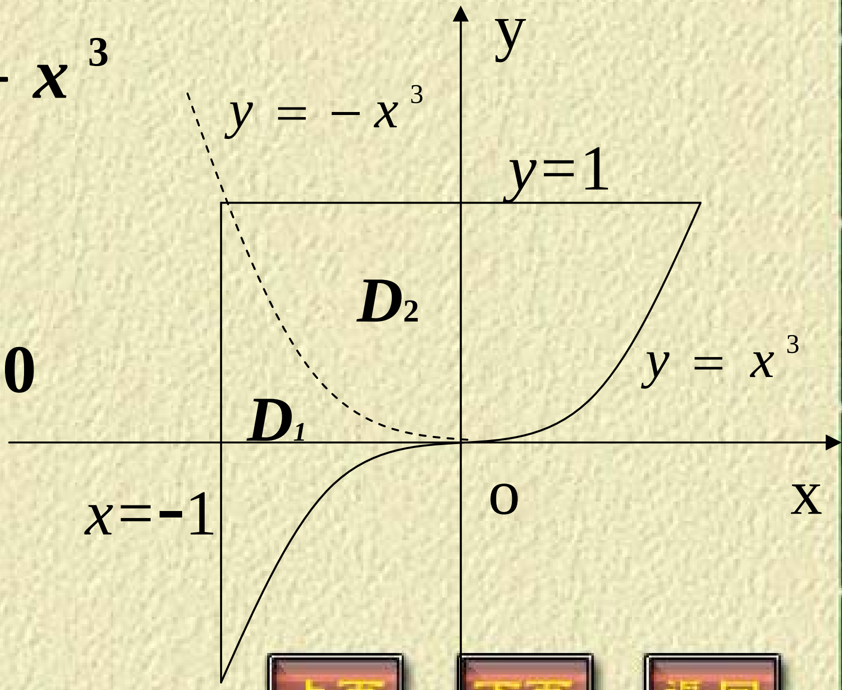
$$\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

其中 D 是由 $y=x^3, y=1$ 和 $x=-1$ 围成。

解: 添加辅助曲线 $y=-x^3$

则 $D=D_1+D_2$ 且

$$\iint_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy=0$$



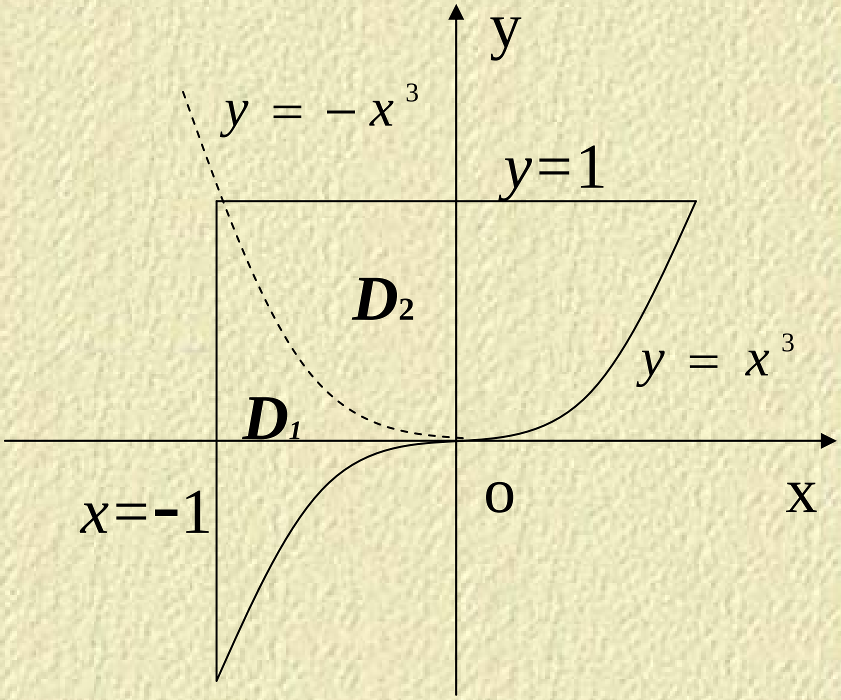
上页　下页　返回

$$\iint\limits_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} xdxdy \;+\; 0$$

$$=2\int_{-1}^{0} xdx \int_{0}^{-x^3} dy$$

$$=2\int_{-1}^{0} -x^4 dx \;=-\frac{2}{5}$$



$$\Rightarrow \iint\limits_{D} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy=-\frac{2}{5}$$

上页 下页 返回

例6. (94,3)设区域 D为$x^2+y^2\le R^2$,则

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

解1.利用极坐标进行计算

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\frac{\rho^2}{a^2}\cos^2\theta+\frac{\rho^2}{b^2}\sin^2\theta\right)\rho d\rho$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\theta+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\right)d\theta=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\pi R^4}{4}$$

解2.由变量轮换的对称性：$\iint\limits_D x^2 dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy$

$$\therefore \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2 dxdy$$

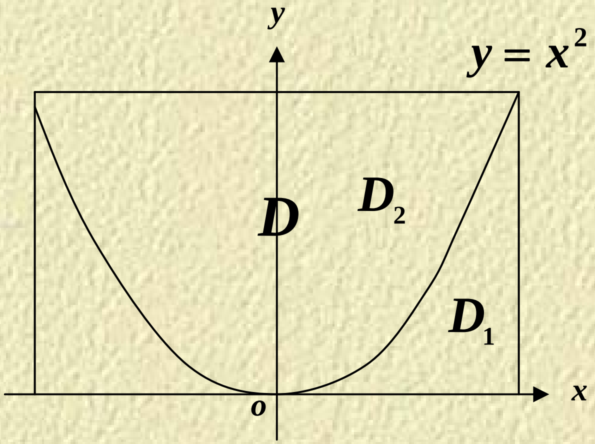
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \rho^3 d\rho = \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\pi R^4}{4}$$

例7.（P150例5） 计算 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right| d\sigma$. 其中

$$D:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$$

解 利用对称性可得



$$\iint\limits_D \left|y-x^2\right| d\sigma = 2\iint\limits_{D_1+D_2} \left|y-x^2\right| d\sigma$$

$$=2\left[\iint\limits_{D_1}(x^2-y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(y-x^2)d\sigma\right]$$

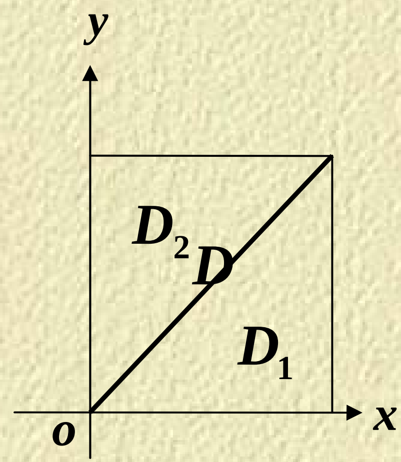
$$=2\left[\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_0^1 dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy\right]$$

$$=\frac{11}{15}.$$

上页 下页 返回

例8.(02,7)计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，

其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$



解 $e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases} e^{x^2} & y\le x \\ e^{y^2} & y>x \end{cases}$

令 $D_1=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

$D_2=\{0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$ 或 $D_2=\{0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

则 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

$=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

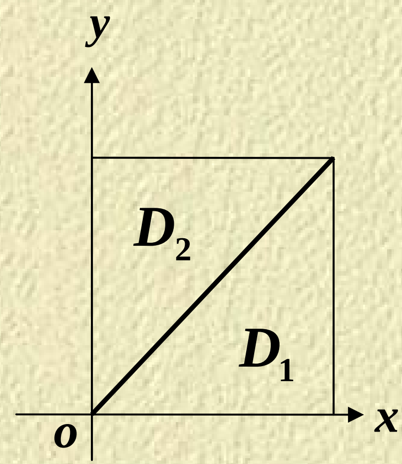
上页 下页 返回

$$= \iint_{D_1} e^{x^2} dxdy + \iint_{D_2} e^{y^2} dxdy$$

$$= \iint_{D_1} e^{x^2} dxdy + \iint_{D_1} e^{x^2} dxdy$$

(变量轮换的对称性)

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy$$



$$= 2\int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$= e - 1$$

例 9 .(P153 例 10）设函数 $f(x)$在区间 $[0,1]$上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx = A$， 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解 1　设 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy$

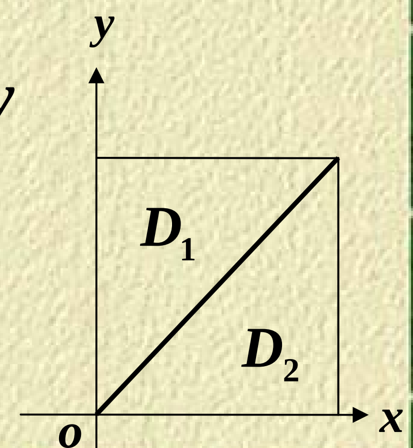
由变量轮换的对称性得 $I=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x)f(y)dx$

$$=\iint\limits_{D_2} f(x)f(y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$$

$$2I=\iint\limits_{D_1+D_2} f(x)f(y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy$$

$$=[\int_0^1 f(x)dx]\cdot[\int_0^1 f(y)dy]=A^2$$

$$I=\frac{A^2}{2}$$



解 2 由 $\dfrac{d}{dx}\int_1^x f(y)dy = f(x)$ 知

$$\therefore \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = -\int_0^1 dx\int_1^x f(x)f(y)dy$$

$$= -\int_0^1 [f(x)\cdot\int_1^x f(y)dy]dx$$

$$= -\int_0^1 [\int_1^x f(y)dy]d(\int_1^x f(y)dy)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int_1^x f(y)dy\right)^2\Bigg|_0^1 = \frac{A^2}{2}$$

上页 下页 返回

解 3 设 $F'(x) = f(x)$， 则 $\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = A$

$$\therefore \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \int_0^1 f(x)[F(1) - F(x)]dx$$

$$= AF(1) - \int_0^1 F(x) dF(x)$$

$$= AF(1) - \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_0^1$$

$$= AF(1) - \frac{1}{2}[F(1) - F(0)][F(1) + F(0)]$$

$$= \frac{A}{2}[F(1) - F(0)] = \frac{A^2}{2}$$