# 7.2 偏导数

## 1. 偏导数

**定义** 设函数$z = f(x,y)$在点$(x_0, y_0)$的某一邻域内有定义，当$y$固定在$y_0$而$x$在$x_0$处有增量$\Delta x$时，相应地函数有增量（称为关于$x$的偏增量）

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z = f(x,y)$在点$(x_0, y_0)$处对 $x$的**偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},$$

$$z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z'_x\Big|_{(x_0\ y_0)},\quad f'_x(x_0,y_0),$$ 或

$f'_1(x_0,y_0)$.即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

其中符号“$\partial$”是希腊字母“$\Delta$”或“$\delta$”的旧体，读作“**delta**”，或按其含义“部分的”英语 “**partial**” 读音。

类似地，可定义函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$y$的偏导数，为

$$\lim_{\Delta y\to 0}=\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$,

$\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $\left.z'_y\right|_{(x_0\ y_0)}$, $f'_y(x_0,y_0)$，或

$f'_2(x_0,y_0)$，即

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

如果函数$z=f(x,y)$在区域$D$内每一点$(x,y)$处对$x$的偏导数$f'_x(x,y)$都存在，则$f'_x(x,y)$仍是$x$、$y$的二元函数，称为函数$z=f(x,y)$对自变量$x$的偏导函数(简称偏导数)，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x \text{ 或 } f'_x(x,y),\quad f'_1(x,y)$$

类似地,可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量$y$的偏导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y \text{ 或 } f'_y(x,y),\quad f'_2(x,y).$$

以上定义可推广到三元以上的多元函数。由偏导数的定义可知：求多元函数对某个自变量的偏导数不需要新的方法，只要将除该自变量之外的其它自变量视为常量，利用一元函数的求导法对该变量求导即可。

例 1　求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$;　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$.

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2\times1 + 3\times2 = 8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3\times1 + 2\times2 = 7.$$

例 2　设 $z = x^y\ (x > 0, x \neq 1)$，

求证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

证　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$，

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} x^y \ln x$$

$$= x^y + x^y = 2z.$$

原结论成立.

例 3(书中例 3)　已知理想气体的状态方程，$PV = RT$，其中 $P$ 为压强，$V$ 为体积，$T$ 为温度，$R$为常数，求证：$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1$.

证　$P=\frac{RT}{V}\Rightarrow\quad\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$;

$V=\frac{RT}{P}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}$;　　$T=\frac{PV}{R}\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R}$;

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

上页　下页　返回

## 有关偏导数的几点说明：

1、 偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分;

2、 求分段点处的偏导数要用定义求;

例如，设$z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$，求$f_x'(0, 0)$，$f_y'(0, 0)$.

解 $$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0 = f_y'(0,0).$$

## 3、偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导 $\longrightarrow$ 连

多元函数中在某点偏导数存在 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 连

例4(书中例 4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$

求 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$,并讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$$

---

解： $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$.

由变量的对称性可得 $f'_y(0,0)=0$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在（上节例 6）

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

两个偏导数都存在 $\not\rightarrow$ 连续.

但利用一元函数“可导必连续”的结论，我们可以得到结论：若 $f_x'(x_0, y_0)$ 存在，则二元函数关于自变量 $x$ 是连续的，即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0$$

同样，若 $f_y'(x_0, y_0)$ 存在，则二元函数关于自变量 $y$ 是连续的，即有

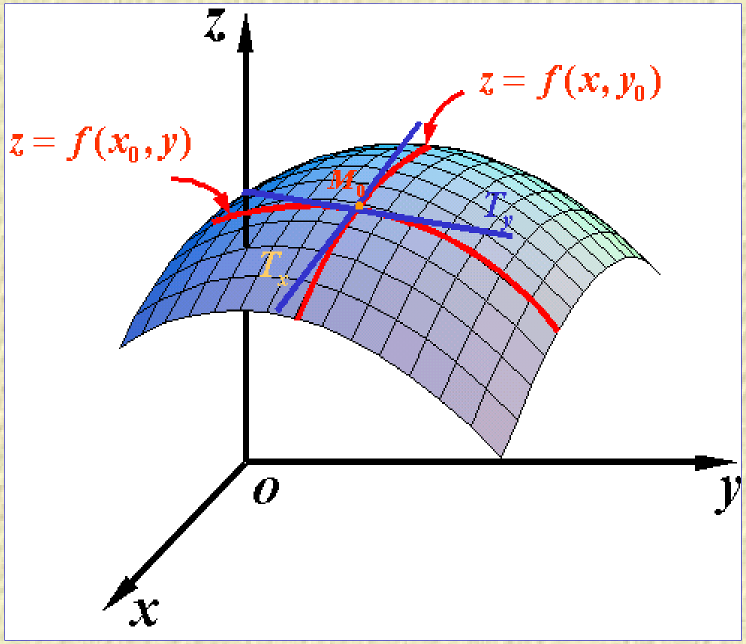
$$\lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0$$

## 2. 偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点,

偏导数 $f_x'(x_0, y_0)$

就是曲面被平面 $y = y_0$ 所截得的曲线在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_x$ 对 $x$ 轴的斜率.




偏导数 $f_y'(x_0, y_0)$

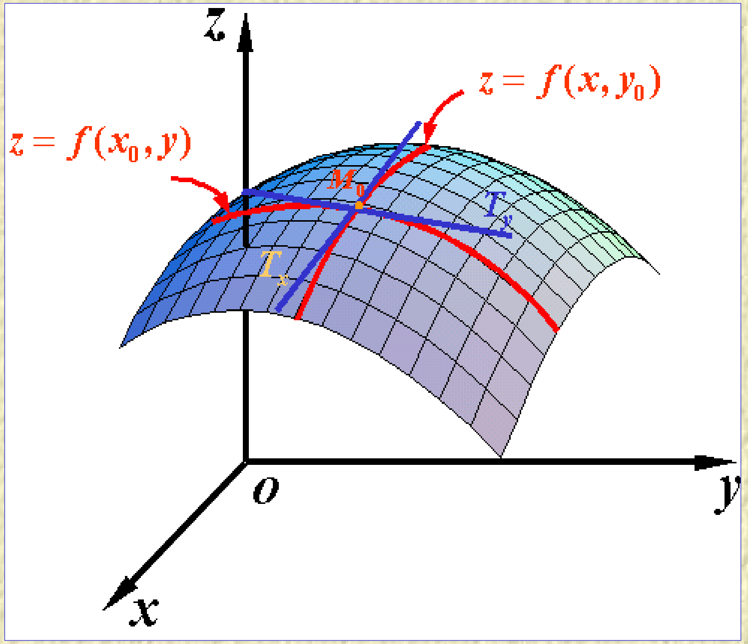
就是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_y$ 对 $y$ 轴的斜率.

上页 下页 返回

## 2. 偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点,

偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$




就是曲面被平面 $y = y_0$ 所截得的曲线在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_x$ 对 $x$ 轴的斜率.

偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$

就是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_y$ 对 $y$ 轴的斜率.

上页 下页 返回

## 3. 高阶偏导数

设函数$z = f(x,y)$在区域 $D$ 内有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y),$$

则在 $D$ 内 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 仍是 $x, y$ 的函数。

如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是 $f(x,y)$ 的二阶偏导数。

上页 下页 返回

函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数分别为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=f''_{x^2}(x,y)=f''_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=f''_{y^2}(x,y)=f''_{22}(x,y)$$

纯偏导

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=f''_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=f''_{21}(x,y)$$

混合偏导

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 5　设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$.

问题：混合偏导数能改变求导次序吗？

具备怎样的条件才能改变求导次序？

**定理** 如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域 D 内连续，那末在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

即有 $$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$$

该结论可推广到$n$元函数及更高阶的混合偏导数。

在高阶混合偏导数连续的条件下可以随意改变其求导次序。

例 6(书中例 6)　设 $u = e^{xyz}$，求 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}$

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ze^{xyz} + xyz^2 e^{xyz} = (z + xyz^2) e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = (2yz^2 + xy^2 z^3) e^{xyz}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

例 7　证明函数 $u=\dfrac{1}{r}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解：$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-x\frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}-x\cdot\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由变量的对称性得：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

---

因此 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0$$

方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 称为拉普拉斯**(Laplace)**方程，它是数学物理方程中一种很重要的方程。

# 小结

偏导数的定义 （偏增量比的极限）

偏导数的计算、偏导数的几何意义

高阶偏导 $\begin{cases} \text{纯偏} \\ \text{混合偏} \quad \text{（相等的条件）} \end{cases}$

# 思考题

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，能否断定 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数必定存在？

**思考题解答** 不能.

例如，$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，在(0,0)处连续，

但 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)$ 不存在.

# 作业：

P57： 1(3)(5)(6)(7). 3. 5. 6. 7. 9.

上页 下页 返回