# 第10章　级数

## 10.1　常数项级数的概念和性质

## 1. 基本概念

### (1) 级数的定义:

给定数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 则称表达式 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 或$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为无穷级数，简称为级数，其中 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 称为级数的项，$u_n$称为级数的通项。若$u_n$皆为常数，就称此级数为常数项级数。

一般项（通项）

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

上页 下页 返回

级数的前 $n$ 项部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

部分和数列

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

## (2)级数的收敛与发散:

当$n$无限增大时, 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$s_n$有极限 $S$, 即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 这时极限 $s$叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的和. 并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_3 + \cdots$$

如果$s_n$没有极限, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

即　常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$存在(不存在)

判别级数收敛的基本方法

上页　下页　返回

若级数收敛，记$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，则级数和与其前$n$项部分和之差称为级数的余和，记为

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$$

例 1（书中例 2） 讨论等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

也可写作 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$

解 如果 $|q| \neq 1$ 时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当 $|q| < 1$ 时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当 $|q| > 1$ 时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

上页 下页 返回

如果$|q|=1$时

当$q=1$时， $s_n = na \to \infty$ 发散

当$q=-1$时，级数变为 $a-a+a-a+\cdots$

$$s_n=\begin{cases} a & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \quad \text{发散}$$

综上 $$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{当}|q|<1\text{时，收敛于} \dfrac{a}{1-q} \\ \text{当}|q|\ge 1\text{时，发散} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1) \quad (n=0\text{时，首项为 }1)$$

例 2　判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$$ 的收敛性.

解 $\because \quad u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}),$

$$\therefore \quad s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 级数收敛，和为 $\frac{1}{2}$.

例 3　证明无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 发散．

证：$u_n = \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(\frac{n+1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k})$$

$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln n$$

$$= \ln(n+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

上页　下页　返回

例 4（书中例 4） 证明：调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

证　由于 $x > \ln(1+x),\ (x>0)$

知 $\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$，知级数发散。

## 2. 主要性质

**性质 1** 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$有相同的收敛性。且当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时，有$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$。其中 $c$ 是不为 0 的常数。

**性质 2** 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛, 其和为$s \pm \sigma$.

即 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

$$即\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$

**结论 1**　一个收敛级数和一个发散级数逐项相加作成的新级数一定发散.

**结论 2**　两个发散级数逐项相加可能产生收敛的新级数。

例： $u_n = a \quad (a \neq 0)$ 　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

$v_n = -a \quad (a \neq 0)$ 　$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ 收敛.

例： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} -\ln(1+\frac{1}{n})$ 也发散.

**性质 3** 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与级数$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n\ (k \geq 1)$有相同的敛散性。

即：在级数中加上、减去或改变有限项不改变级数的敛散性.但对收敛的级数来说，一般会改变它的和。

**推论** 级数的余和$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$有相同的敛散性。

**性质 4** 收敛级数(不改变各项顺序)加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

**注意**

收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛

$1-1+1-1+\cdots$ 发散

**推论** 如果加括弧后所成的级数发散, 则原来级数也发散.

## 级数收敛的必要条件（重要性质）：

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

## 注意

(1). 必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，但级数是发散的。

再例： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散。

收敛级数的必要条件说明：级数收敛的必要条件是通项为无穷小量。只有通项是一个阶数足够高的无穷小量时，相应级数才可能收敛。

即:不能由 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 来判断级数的收敛性。

(2). 如果级数的一般项不趋于零，则级数发散；

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

**例 5** 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s = 1^s + 2^s + 3^s + \cdots + n^s + \cdots \quad (s > 0)$$ 敛散性.

$$\lim_{n\to\infty} n^s = \infty \quad (s > 0)$$ 所以它发散.

**例 6** 判别级数

$$0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$$ 敛散性.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001} = 1$$ 所以它发散.

# 小结

常数项级数的基本概念

级数收敛的基本判别法

1. 由定义, 若$s_n \to s$, 则级数收敛;

2. 当$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则级数发散;

3. 按基本性质.

# 作业：

P232： 1偶. 2偶. 3. 4. 5.