9.7 斯托克斯公式与旋度

格林公式建立了平面区域上的二重积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系，并在格林公式的基础上，讨论了平面上的第二类曲线积分与路径无关的条件，而 *Stokes* 公式建立了沿空间闭曲线 L 的第二类曲线积分与 L 上所张曲面的第二类曲面积分之间的关系，我们可以在 *Stokes* 公式的基础上，讨论空间第二类曲线积分与路径无关的条件。

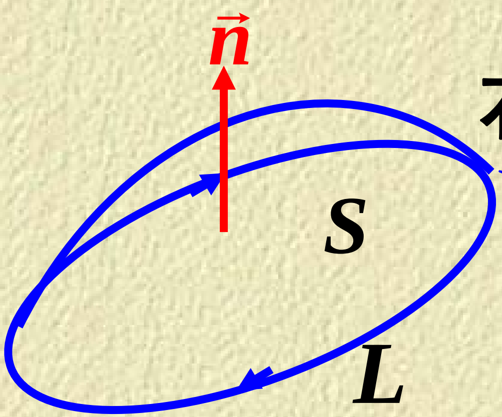
1. 斯托克斯（Stokes)公式

定理 设函数 $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ 在包含曲面 S 的某空间区域上有一阶连续偏导数，L 为曲面 S 的边界线，则

$$\oint_L Xdx+Ydy+Zdz$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$$

其中曲面 S 的侧由曲线 L 的方向确定：若人站在曲线上沿 L 的给定方向走，曲面 S 总在他的左侧，则人站立的一侧为曲面积分的侧.



右手法则

L 是有向曲面 S 的正向边界曲线

Stokes公式的实质：

表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

(当 S 是 xoy 面的平面闭区域时)

斯托克斯公式 $\xrightarrow{\text{特殊情形}}$ 格林公式

便于记忆形式

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \oint_L Xdx + Ydy + Zdz$$

另一种形式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} ds = \oint_L Xdx + Ydy + Zdz$$

其中$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$为按右手法则所得$S$的单位法向量.

例 1（书中例 1）计算曲线积分$\oint_L ydx+zdy+xdz$，其中 L 是折线 $\overline{ABCA}$，方向由 $A(1,0,0)$，经 $B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，回到 A.

解1 将 L 视为平面 $x+y+z=1$ 与坐标面的交线.

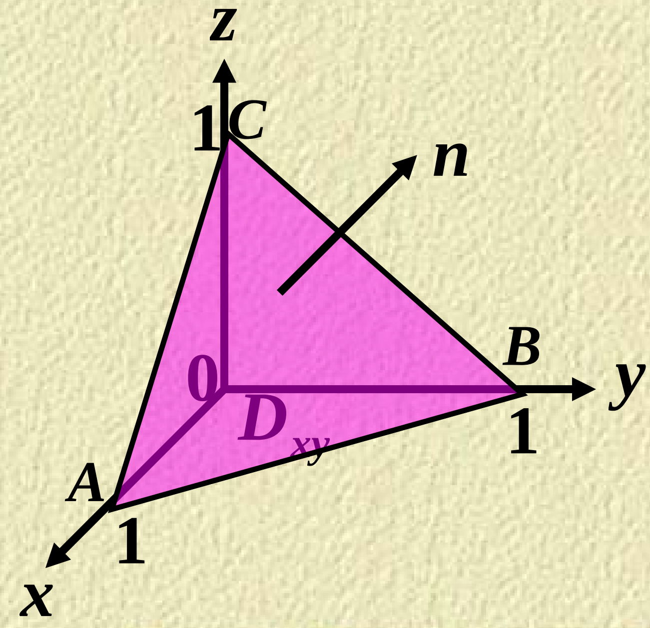
按斯托克斯公式，有

$$\oint_L ydx+zdy+xdz$$

$$=-\iint_S dydz+dzdx+dxdy$$

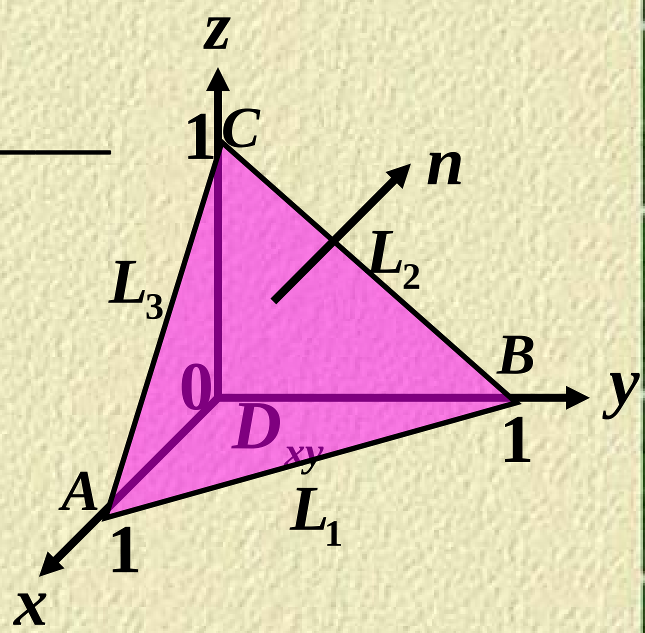
由变量轮换的对称性知：

$$=-3\iint_S dxdy=-3\iint_{D_{xy}} d\sigma=-\frac{3}{2}$$



上页 下页 返回

例 1（书中例 1）计算曲线积分$\oint_L ydx + zdy + xdz$，其中L是折线$\overline{ABCA}$，方向由$A(1,0,0)$，经$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$，回到A.



解2 直接计算，有

$$\oint_L ydx + zdy + xdz$$

$$= \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$$

$L_1 : x + y + z = 1 \quad z = 0$

$L_2 : x + y + z = 1 \quad x = 0$

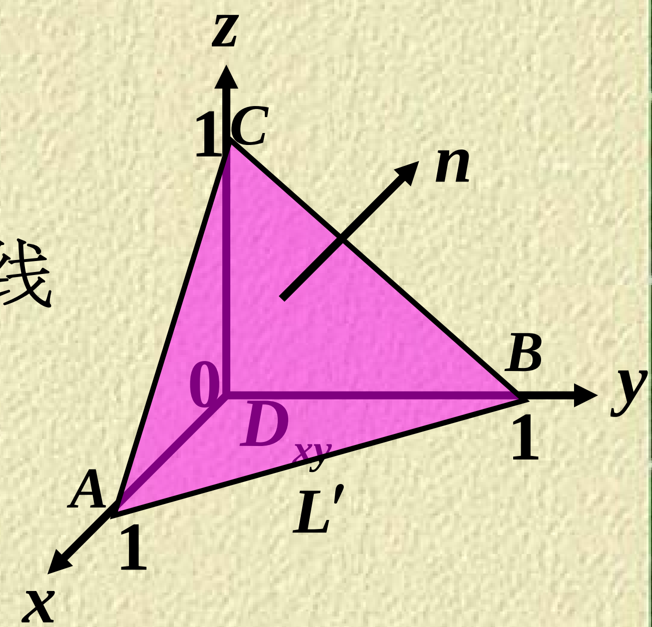
$L_3 : x + y + z = 1 \quad y = 0$

$$= 3\int_{L_1} ydx + zdy + xdz \quad (\because z = 0 \therefore dz = 0)$$

$$= 3\int_{L_1} ydx = 3\int_1^0 (1 - x)dx = -\frac{3}{2}$$

上页 下页 返回

解3 化为平面曲线积分:



设 L' 为 L 在 xoy 平面上的投影曲线

则 $\oint_L ydx + zdy + xdz$

$$= \oint_{L'} ydx + (1 - x - y)dy + x(-dx - dy)$$

$$= \oint_{L'} (y - x)dx + (1 - 2x - y)dy$$

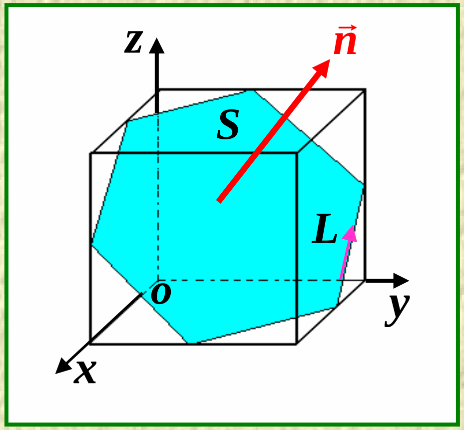
$$\underline{\underline{\text{格林公式}}} \iint_{D_{xy}} [(-2) - 1]dxdy = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

上页 下页 返回

例 2　计算曲线积分

$$\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

其中 L 是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 截立方体：$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ 的表面所得的截痕，若从 ox 轴的正向看去，取逆时针方向.



解　取 S 为平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 的上侧被 L 所围成的部分.

则 $$\therefore I = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

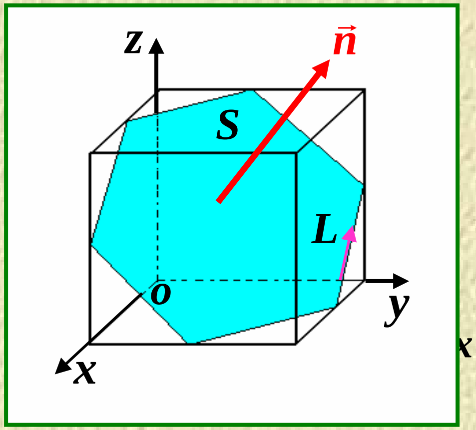
上页　下页　返回

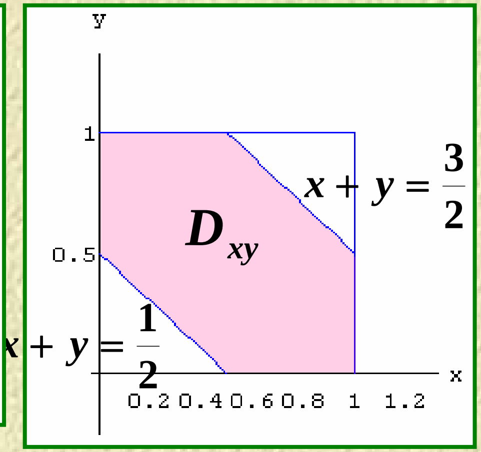
$$= -2\iint_S (y+z)dydz + (x+z)dzdx + (x+y)dxdy$$

$$= -2\iint_S \{y+z,\ x+z,\ x+y\}\cdot\{1,1,1\}dxdy$$

$$= -4\iint_S (x+y+z)dxdy \qquad (\because 在S上x+y+z=\frac{3}{2})$$

$$= -4\times\frac{3}{2}\iint_S dxdy$$





$$= -6\iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= -6\times(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$$

2.斯托克斯公式的物理意义---环量与旋度

斯托克斯公式可以写为

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

$$=\iint_S[(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\cos\gamma]ds$$

$$=\iint_S[(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\vec{k}]\cdot d\vec{s}$$

令 $\vec{A}=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$

$$\vec{r}=(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})\vec{k}$$

$$\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint_S\vec{r}\cdot d\vec{s}$$ 或 $$\oint_L A_{\vec{t}}\,dl=\iint_S r_{\vec{n}}\,ds$$

设有向量场

$$\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

L 为场中有向闭曲线，则称曲线积分

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_L Xdx + Ydy + Zdz$$

为向量场沿曲线 L 的环（流）量

令 $\vec{A} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$

$$\vec{r} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

向量 $\vec{r}$ 称为向量场 $\vec{A}$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的旋度. 记为 $rot\vec{A}$（$curl\vec{A}$） 即

$$rot\vec{A} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

为了便于记忆，旋度也可用算符写法，记作

$$rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

斯托克斯公式可写为

$$\oint_L X dx + Y dy + Z dz = \iint_S (rot\ \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \iint_S (rot\ \vec{A})_{\vec{n}}\, ds$$

若 $rot\vec{A} \equiv \vec{0}$，则空间闭曲线上的曲线积分为 0，从而积分与路径无关，即

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

例 3 求向量场 $\vec{A} = xz^3\vec{i} - 2x^2yz\vec{j} + 2yz^4\vec{k}$ 在 P（1,-2,1）处的旋度。(书中例 3)

解:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\vec{i} + 3xz^2\vec{j} - 4xyz\vec{k}$$

在点 $P(1,-2,1)$ 处，有 $rot\vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$

小结

斯托克斯公式 $$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} ds =$$

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \oint_L Xdx + Ydy + Zdz$$

$$= \iint_S rot\,\vec{v} \cdot d\vec{s}$$

（1）斯托克斯公式成立的条件

（2）斯托克斯公式的物理意义

上页 下页 返回

思考题 已知数量场 $u = xy^2 + z^2 - xyz$ 及点 $M_0(1,1,2), M_1(3,3,3)$ 求

（1） u 在 M_0 处沿 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 方向的方向导数及其方向导数的最大值。

（2） $div(grad\,u)$ 和 $rot(grad\,u)$

思考题答案

（1） $\frac{1}{3}, \sqrt{10}$

一般地，若数量场 $u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，则总有 $rot(grad\,u) = \vec{0}$

（2） $div(grad\,u) = 2(x+1)$

$rot(grad\,u) = \vec{0}$

历届研究生试题

- 斯托克斯公式
- 旋度

上页 下页 返回

1.(97,6)计算曲线积分

$$\oint_C (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz,$$

其中C是曲线$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从$z$轴正向往$z$轴负向看$C$的方向是顺时针方向．

分析：C是一条封闭的空间曲线，可用两种方法求解：一种是写出曲线C的参数方程直接计算；另一种是利用斯托克斯公式计算．

解1: 曲线 C的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2 - \cos t + \sin t \end{cases}$$

则 $\oint_C (z - y)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$

$$= -\int_{2\pi}^{0} [2(\sin t + \cos t) - 2\cos 2t - 1]dt$$

$$= -2\pi$$

上页 下页 返回

解2：设S为平面$x-y+z=2$上以C为边界的有限部分，其法向量与 z轴正向的夹角为钝角，D_{xy}为S在xoy平面上的投影区域 .

令$\vec{F}=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$

$$则\ rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}=2\vec{k}$$

由斯托克斯公式知 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=\iint_S (rot\vec{F})\cdot d\vec{S}$

$$=\iint_S 2dxdy=-\iint_{D_{xy}} 2dxdy=-2\pi$$

上页 下页 返回

2.(01,7)计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz,$$

其中L是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从z轴正向看去，L为逆时针方向．

解：记S为平面$x+y+z=2$上L所围成部分的上侧，D为S在xoy坐标面上的投影，由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx$$

$$+(-2x-2y)dxdy$$

上页 下页 返回

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x + 2y + 3z)dS$$

$$= -2\iint_D (x - y + 6)dxdy$$

$$= -12\iint_D dxdy = -24$$

上页 下页 返回

作业：

P213：　1(2)(4)(5).　3.