习题 8.6(P160)

1．计算下列重积分.

(1) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D: 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x$

解：$D_{\rho\theta}: 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\rho\le 2\cos\theta$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$

(2) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$，其中 $a>0$，$D: -x\le y\le -a+\sqrt{a^2-x^2}$

解：$D_{\rho\theta}: -\frac{\pi}{4}\le\theta\le 0,\quad 0\le\rho\le -2a\sin\theta$

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2\sin\theta}\frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$$

$$\underline{\underline{\rho=2a\sin t}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-\theta}(2a\sin t)^2dt=4a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\left(-\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)d\theta$$

$$=4a^2\left(\frac{1}{64}\pi^2-\frac{1}{8}\right)=a^2\left(\frac{1}{16}\pi^2-\frac{1}{2}\right)$$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\ge 2x$

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y & 0\le y\le x, 1\le x\le 2\\ 0\end{cases}$$

解：$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}x^2ydxdy$，其中　$D': 2x-x^2\le y\le x, 1\le x\le 2$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}x^2ydxdy=\int_1^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^x x^2ydy=\int_1^2x^2(x^2-x)dx=\frac{49}{20}$

(4) $\iint\limits_D(|x|+|y|)d\sigma$，其中 $D: |x|+|y|\le 1$

解：由对称性 $\iint\limits_D(|x|+|y|)d\sigma=4\iint\limits_{D_1}(x+y)d\sigma$，其中 D_1 是 D 在第一象限部分，

即　$D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$，所以

$$\iint_D (|x|+|y|)d\sigma = 4\int_0^1 dx\int_{\sqrt{0}}^{1-x}(x+y)dy = 4\int_0^1 \frac{1}{2}(x+y)^2\Big|_0^{1-x}dx = 2\int_0^1(1-x)^2dx = \frac{4}{3}$$

(5) $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right|d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le 9$

解：设 $D_1: x^2+y^2\le 4$，$D_2: 4\le x^2+y^2\le 9$，则

$$\iint_D \left|x^2+y^2-4\right|d\sigma = \iint_{D_1}(4-x^2-y^2)d\sigma + \iint_{D_2}(x^2+y^2-4)d\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-\rho^2)\rho\,d\rho + \int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3(\rho^2-4)\rho\,d\rho = 8\pi+\frac{25\pi}{2} = \frac{41\pi}{2}$$

(6) $\iint\limits_D \min(x,y)dxdy$，其中 $D: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 1$

解：设 $D_1: 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1$，$D_2: y\le x\le 3,\ 0\le y\le 1$，则

$$\iint_D \min(x,y)dxdy = \iint_{D_1}xd\sigma + \iint_{D_2}yd\sigma = \int_0^1 dy\int_0^y xdx + \int_0^1 dy\int_y^3 ydx = \frac{4}{3}$$

(7) $\iint\limits_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$，其中 $D: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

解：设 $D_1: 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1$，$D_2: 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1$，则

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint_{D_1}e^{y^2}d\sigma + \iint_{D_2}e^{x^2}d\sigma \xlongequal[\text{的对称性}]{\text{由变量轮换}} \iint_{D_2}e^{x^2}d\sigma + \iint_{D_2}e^{x^2}d\sigma$$

$$= 2\iint_{D_2}e^{x^2}d\sigma = 2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy = 2\int_0^1 xe^{x^2}dx = e-1$$

(8) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dV$，其中 V 由柱面 $y=\sqrt{x}$ 和平面 $y=0$，$z=0$，$x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 围成.

解：$D: 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le \sqrt{x},\ 0\le z\le \dfrac{\pi}{2}-x$，所以

$$\iiint_V y\cos(x+z)dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x(1-\sin x)dx = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

(9) $\iiint\limits_V z(x^2+y^2)dV$ ，其中 $V: z\ge\sqrt{x^2+y^2}, 1\le x^2+y^2+z^2\le 4$

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$，$1\le r\le 2$

$$\iiint_V z(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_1^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\int_1^2 r^5\,dr\right)=2\pi\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{21}{2}=\frac{21}{16}\pi$$

2．计算下列累次积分.

(1) $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy$

解：交换积分次序

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2 ye^{xy}dx+\int_1^2 dy\int_1^2 ye^{xy}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1(e^{2y}-e)dy+\int_1^2(e^{2y}-e^y)dy$$

$$=(\frac{1}{2}e^2-e)+(\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2+e)=\frac{1}{2}e^4-e^2$$

(2) $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

解：交换积分次序

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2\left(-\frac{2y}{\pi}\right)\cdot\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}dy$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}ydy=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\int_1^2 yd\left(\sin\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\left[y\sin\frac{\pi}{2}y\Big|_1^2-\int_1^2\sin\frac{\pi}{2}ydy\right]=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}$$

(3) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$

解：V 在球坐标变换下 $V_{r\varphi\theta}: 0\le\theta\le\pi$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$，$\frac{1}{\cos\varphi}\le r\le 2\cos\varphi$

$$\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\varphi-\frac{1}{os^2\varphi}\right)\sin\varphi d\varphi=-\frac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\varphi-\frac{1}{os^2\varphi}\right)d\cos\varphi$$

$$=\pi\left(\frac{7}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

3．设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_V[z^2+f(x^2+y^2)]dV$，其中 $V:x^2+y^2\le t^2,0\le z\le h$

试求 $\dfrac{dF}{dt}$.

解：V 在柱坐标变换下 $V_{z\rho\theta}$ $:0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le t,\ 0\le z\le h$，

$$F(t)=\iiint\limits_V[z^2+f(x^2+y^2)]dV\ =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t d\rho\int_0^h\left(z^2+f(\rho^2)\right)\rho dz$$

$$=2\pi\int_0^t\rho\left(\frac{1}{3}h^3+f(\rho^2)h\right)d\rho=2\pi\int_0^t\left(\frac{1}{3}h^3\rho+hf(\rho^2)\rho\right)d\rho$$

所以 $\dfrac{dF}{dt}=2\pi\left[\dfrac{1}{3}h^3t+ht\,f(t^2)\right]$

4．求极限 $\lim\limits_{t\to0}\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D:t^2\le x^2+y^2\le1$.

解：$D_{\rho\theta}:0\le\theta\le2\pi,\quad |t|\le\rho\le1$

$$\lim_{t\to0}\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)d\sigma=\lim_{t\to0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{|t|}^1\ln(\rho^2)\rho\,d\rho=\lim_{t\to0}2\pi\int_{|t|}^1\ln(\rho^2)d(\rho^2)$$

$$=\lim_{t\to0}2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\rho^2\ln(\rho^2)\Big|_{|t|}^1-\int_{|t|}^1 2\rho d(\rho)\right]=\lim_{t\to0}\pi\left[-t^2\ln(t^2)-1+t^2\right]=-\pi$$

5．在曲线族 $y=c(1-x^2)\ (c>0)$ 中选一条曲线，使其与点 $P_1(-1,0)$ 和 $P_2(1,0)$ 处的法线所围的区域的面积最小.

解：由对称性，只需计算 I、IV 象限图形面积，总面积等于此面积 2 倍。

$y'=-2cx$， $y'\big|_{x=1}=-2c$，所以过点 $P_2(1,0)$ 的法线方程为 $y=\dfrac{1}{2c}(x-1)$ ，化截距式：

$\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{1}{2c}}=1$，设此法线与 y 轴交点为 A，则 $S_{\Delta OAP_2}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{-2c}\right|=\frac{1}{4c}$，所以

$$S_{总}=2\left(S_{曲边梯形}+S_{\Delta OAP_2}\right)=2\left(\int_0^1 c(1-x^2)+\frac{1}{4c}\right)=\frac{4}{3}c+\frac{1}{2c}$$

所以，当 $\frac{4}{3}c=\frac{1}{2c}$ 时，即 $c=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 时，亦即 $y=\frac{\sqrt{6}}{4}(1-x^2)$ 时，面积最小.

6. 求由曲面 $z=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的均匀立体对 z 轴的转动惯量 $(a>0)$.

解：设此立体密度为 μ，则它对 z 轴的转动惯量 $I_z=\mu\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dV$

V 在 xoy 坐标面上的投影区域为：$x^2+y^2=a^2$

V 在柱坐标变换下 $V_{\rho\theta z}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le a,\ \rho\le z\le a+\sqrt{a^2-\rho^2}$，所以

$$I_z=\mu\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dV=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a d\rho\int_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho^3\,dz$$

$$=2\pi\mu\int_0^a(a\rho^3+\rho^3\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho^4)d\rho=\frac{11}{30}\pi\mu a^5$$

7. 在半径为 R、高为 h 的圆柱上，加一个半径为 R 的半球，为使整个均匀立体的质心位于球心处，求 R 与 h 间的关系.

解：取球心为坐标原点，圆柱的对称轴所在直线为 z 轴，z 轴正向指向半球，建立直角坐标系，则质心坐标中 $\bar{x}=\bar{y}=0$，$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho dV=\frac{\rho}{m}\iiint\limits_V zdV$，若要使整个均匀立体的质心位于球心处，只需 $\bar{z}=0$，即 $\iiint\limits_V zdV=0$。

V 在柱坐标变换下 $V_{z\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le R,\ -h\le z\le\sqrt{R^2-\rho^2}$

$$\iiint\limits_V zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho d\rho\int_{-h}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}zdz=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^R\rho(R^2-\rho^2-h^2)d\rho$$

$$=\pi\int_0^R\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(R^2-h^2-\rho^2)d(R^2-h^2-\rho^2)=-\frac{\pi}{4}(R^2-h^2-\rho^2)^2\Big|_0^R$$

$$=\frac{\pi}{4}(R^4-2R^2h^2)$$

所以当 $R=\sqrt{2}h$ 时，此立体质心位于球心处

8. 设球面 $S_0: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$，有一动球面 S，其球心在球面 S_0 上，问 S 的半径 R 取何值时，S 在 S_0 内部的那部分球面的面积最大.

解：将 S 的球心设在点 $(0,0,a)$ 处，则 S 的曲面方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$$

联立曲面 S 与 S_0 的方程得这两个球面在 $z=\dfrac{2a^2-R^2}{2a}$ 处相交，

从而得投影区域 $D: x^2+y^2\le a^2-z^2=\dfrac{4a^2R^2-R^4}{4a^2}$

由曲面 S 的方程得 $z'_x=\dfrac{-x}{z-a}$， $z'_y=\dfrac{-y}{z-a}$

故曲面 S 在 S_0 内部的那部分球面的面积

$$A(R)=\iint_D\sqrt{1+(\frac{-x}{z-a})^2+(\frac{-y}{z-a})^2}\,dxdy$$

$$=\iint_D\frac{R}{|z-a|}dxdy=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$\overline{\overline{\text{采用极坐标变换}}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{4a^2R^2-R^4}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$$

$$=2\pi(R^2-\frac{R^3}{2a})$$

令 $A'(R)=2\pi(2R-\dfrac{3R^2}{2a})=0$，得惟一驻点 $R=\dfrac{4}{3}a$

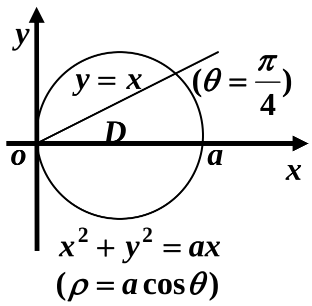
又 $A''(R)=2\pi(2-\dfrac{3R}{a})=0$，而 $A''(\dfrac{4}{3}a)=-4\pi<0$

故当 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时 S 在 S_0 内部的那部分球面的面积最大。

9．求由平面 $z=x-y$ 与柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围立体的体积.

解：立体在 xoy 面上的投影区域

$D: x^2+y^2\le ax$，$y\le x$(如图)；



所求立体的体积 $V=\iint\limits_D (x-y)dxdy$

$$\xlongequal[\text{变换}]{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^2(\cos\theta-\sin\theta)\,d\rho$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)\,d\theta=\frac{a^3}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\,(\cos\theta)\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}(\frac{3}{2}+2\cos2\theta+\frac{\cos4\theta}{2})d\theta+\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{4}(\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{\sin4\theta}{8})\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{4}(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\pi+1)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{a^3}{48}\left(\frac{9}{2}\pi+5\right)$$

10．证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt$，其中 $D:|x|\le\dfrac{a}{2},|y|\le\dfrac{a}{2},a>0$，$f(t)$ 连续.

证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dy\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(x-y)dx\xlongequal{\text{令}t=x-y}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dy\int_{-\frac{a}{2}-y}^{\frac{a}{2}-y}f(t)dt$

$$\xlongequal[\text{分次序}]{\text{交换积}}\int_{-a}^{0}dt\int_{-\frac{a}{2}-t}^{\frac{a}{2}}f(t)dy+\int_0^a dt\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}-t}f(t)dy=\int_{-a}^{0}f(t)(a+t)dt+\int_0^a f(t)(a-t)dy$$

$$=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt$$

11．设$f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{V(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$$

其中 $V(t)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$

$$D(t)=\{(x,y)|x^2+y^2\le t^2\}$$

(1)讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$的单调性.

(2)证明当$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

分析：本题中出现了变域上的 二重积分 $\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma$和变域上的三重积分 $\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv$，此时一般都是将变域 上的重积分化为累次积 分，从而进一步化为变上限的定 积分再作处理.化为累次积分时由被积 函数的形式及积分区域的形状（球域 、圆域），故三重积分 化为球面坐标计算、二 重积分化为极坐标计算.

解：(1)由于

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{V(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}$$

则 $$F'(t)=\frac{2f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)rdr-2f(t^2)t\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2}$$

$$=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2}>0\quad t\in(0,+\infty)$$

故$F(t)$在$(0,+\infty)$上单调增加.

(2)由于 $G(t)=\dfrac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$

要证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

只需证明当 $t>0$ 时，$F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$

即 $\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2>0$

令 $\varphi(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2$

则 $\varphi'(t)=f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)dr+f(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2dr-2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)rdr$

$=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$

故 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

又 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处连续，$\varphi(0)=0$

则当 $t>0$ 时，$\varphi(t)>0$，故当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

注： 不等式 $\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2>0$ 可由柯西－施瓦兹不等式直接推出(见教材上册 P271 例 8：设 $u(r)=\sqrt{f(r^2)}$，$v(r)=\sqrt{f(r^2)}\,r$ 即得).