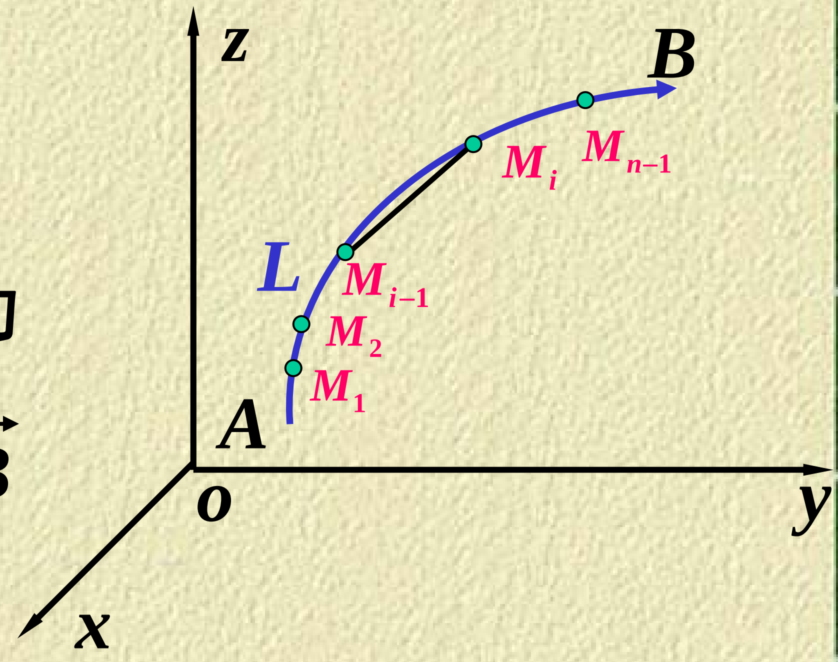
9.2　第二类曲线积分

1. 概念与性质



引例： 变力沿曲线所作的功

常力所作的功 $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

一质点在连续变力

$$\vec{F} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$$

的作用下，沿光滑曲线 L 从起点 A 运动到终点 B，求变力 $F(x,y,z)$ 所作的功 W。

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$$

$$+ Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i]$$

注意 和式中的各项是力 $\vec{F}$ 的分量在有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上某一点的函数值与 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 在相应坐标轴上投影的乘积，这是与第一类曲线积分不同之处。

定义 设 L 为空间从 A 点到 B 点的有向光滑曲线，$X(x,y,z)$ 是定义在 L 上的有界函数，将 $\overset{\frown}{AB}$ 任意地分成 n 个有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 第 i 个有向小弧段在 x 轴上的投影记为 $\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$

在第i个小弧段上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

如果当$\lambda=\max\{\Delta l_1,\Delta l_2,\dots,\Delta l_n\}\to 0$时，此和式的极限存在，则称此极限值为函数$X(x,y,z)$沿曲线$L$由$A$点到$B$点的第二类曲线积分，或称为对坐标$x$的曲线积分，记作$\int_L X(x,y,z)dx$或$\int_{\overset{\frown}{AB}} X(x,y,z)dx$即

$$\int_L X(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

类似地，定义

$$\int_L Y(x,y,z)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$$

$$\int_L Z(x,y,z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$$

其中 $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$, 叫做被积函数，$L$叫积分弧段.

存在的条件:

当$X(x,y,z)$,$Y(x,y,z)$,$Z(x,y,z)$,在逐段光滑曲线弧 L上连续时，第二类曲线积分存在 .

组合曲线积分

$$\int_L X(x,y,z)dx + \int_L Y(x,y,z)dy + \int_L Z(x,y,z)dz$$

$$= \int_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$$

$$= \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} \, .$$

其中 $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, $\quad d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

有向弧长元素

若 L 为平面曲线，则

$$\int_L X(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

$$\int_L Y(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

组合曲线积分

$$\int_L X(x,y)dx + \int_L Y(x,y)dy$$

$$= \int_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

$$= \int_L \vec{F}\cdot d\vec{l}.$$

在实际应用中，通常均是求组合曲线积分

其中 $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$　　$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}.$

有向弧长元素

性质(常用性质)

(1) 有向性：设 L是有向曲线弧，$-L$是与 L方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_L Xdx = -\int_{-L} Xdx$$

或 $$\int_{\overset{\frown}{AB}} Xdx = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Xdx$$

即对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

(2) 可加性：如果把 L分成 L_1和 L_2，则

$$\int_L Xdx = \int_{L_1} Xdx + \int_{L_2} Xdx. \quad (L = L_1 + L_2)$$

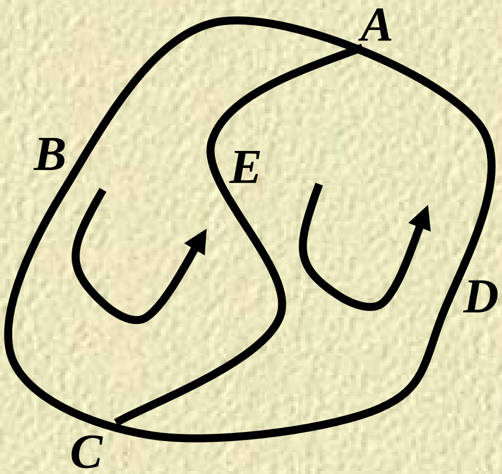
（3）线性性质:

$$\int_L [\alpha X_1 + \beta X_2] dx = \alpha \int_L X_1 dx + \beta \int_L X_2 dx$$

当L为封闭曲线时，**规定曲线L的正方向：**

人沿闭曲线行走时, 如果闭曲线所围成的区域总在人的左侧，则人前进的方向为正方向。

闭曲线L的正方向记作 L^+，沿闭曲线L正方向的曲线积分记作 $\oint_{L^+} Xdx$



(4)封闭曲线积分的可加性 ：

设闭曲线 $L^+ : \overline{ABCDA}$

$L_1^+ : \overline{ABCEA}$ ； $L_2^+ : \overline{AECDA}$

$$\oint_{L^+} Xdx = \oint_{L_1^+} Xdx + \oint_{L_2^+} Xdx$$

上页 下页 返回

2. 对坐标的曲线积分的计算

(A). L为平面曲线的情形(L光滑， X， Y在L上连续）

(1) $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$　　α为曲线起点的参数值，β为曲线终点的参数值 .

$$\int_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \{X[x(t),y(t)]x'(t) + Y[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

(2) $L: y = y(x)$　L起点对应的 x为a，终点为 b.

则$\int_L Xdx + Ydy = \int_a^b \{X[x,y(x)] + Y[x,y(x)]y'(x)\}dx.$

(3) $L: x = x(y)$　L起点对应的y为c，终点为d.

$$\text{则}\int_L Xdx + Ydy = \int_c^d \{X[x(y), y]x'(y) + Y[x(y), y]\}dy.$$

(4) $L: \rho = \rho(\theta)$　L起点 θ为α，终点 θ为β.

$$\text{则}\int_L Xdx + Ydy$$

$$= \int_\alpha^\beta [X(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)$$

$$+ Y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)]d\theta$$

或化为参数方程

(B). L为空间曲线的情形

(1) 若曲线 $L(\overset{\frown}{AB})$ 的方程为参数式：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

A 点对应的参数值为 α，B 点对应的参数值为 β

又 $x'(t),\ \ y'(t),\ \ z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上连续且不为零，函数 $X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)$ 在 L 上连续，则

$$\int_{L(\widehat{AB})} X(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[x(t),y(t),z(t)]x'(t)dt$$

$$\int_{L(\widehat{AB})} Y(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[x(t),y(t),z(t)]y'(t)dt$$

$$\int_{L(\widehat{AB})} Z(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} Y[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt$$

定积分的下限对应 L起点的参数值，上限对应 L 终点的参数值 ,而与 α 和 β 的大小无关 .

计算口诀: 一代:将曲线方程代入被积函数;

二换:变换积分元;

三定限：确定定积分的上下限(与第一类线积分不同)。

(2)若曲线 L 方程为一般式方程，则把它化成参数方程。

对称性：若空间曲线 L关于 xoy平面对称，

L_1是L的$z \geq 0$部分，方向不变，则

当$f(x,y,z)$关于z是奇函数时，

$$\int_L f(x,y,z)dx = 2\int_{L_1} f(x,y,z)dx$$

$$\int_L f(x,y,z)dy = 2\int_{L_1} f(x,y,z)dy$$

$$\int_L f(x,y,z)dz = 0$$

当$f(x,y,z)$关于z是偶函数时，

$$\int_L f(x,y,z)dx = \int_L f(x,y,z)dy = 0$$

$$\int_L f(x,y,z)dz = 2\int_{L_1} f(x,y,z)dz$$

另两种情况有类似的结　论。

若平面曲线 L 关于 y 轴对称， L_1 是 L 的 $x \geq 0$ 部分，方向不变，则

当 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数时，

$$\int_L f(x,y)dy = 2\int_{L_1} f(x,y)dy$$

$$\int_L f(x,y)dx = 0$$

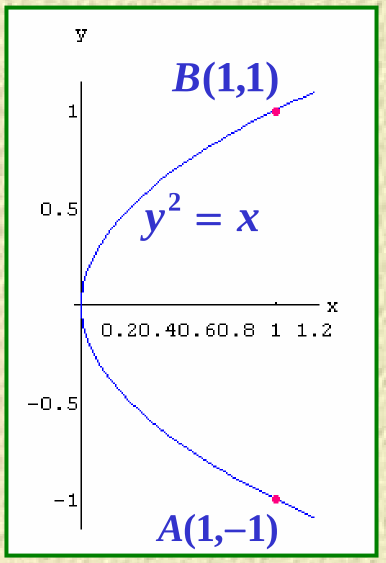
当 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数时，

$$\int_L f(x,y,z)dy = 0$$

$$\int_L f(x,y)dx = 2\int_{L_1} f(x,y)dx$$

另一种情况有类似的结 论。

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2 = x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



解 (1) 化为对x的定积分,

$$y=\pm\sqrt{x}.$$

$$\int_L xydx = \int_{AO} xydx + \int_{OB} xydx$$

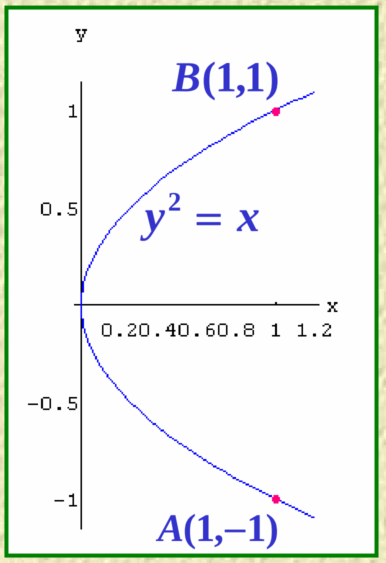
$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x\sqrt{x}dx$$

$$= 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{5}.$$

上页 下页 返回

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2 = x$上从

$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



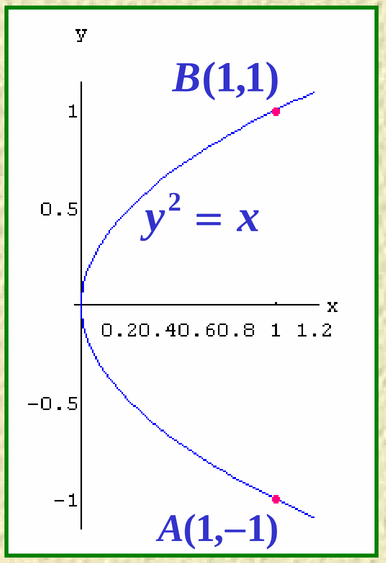
(2) 利用对称性

积分曲线 $y^2 = x$关于x轴对称,而被积函数关于 y为奇函数,积分变量为 x.

$$\int_L xydx = 2\int_{OB} xydx$$

$$= 2\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5}.$$

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



(3) 化为对 y的定积分,

$$x=y^2,\qquad y\text{从}-1\text{到}1.$$

$$\int_L xydx=\int_{AB} xydx$$

$$=\int_{-1}^{1} y^2 y(y^2)'dy$$

$$=2\int_{-1}^{1} y^4 dy=\frac{4}{5}.$$

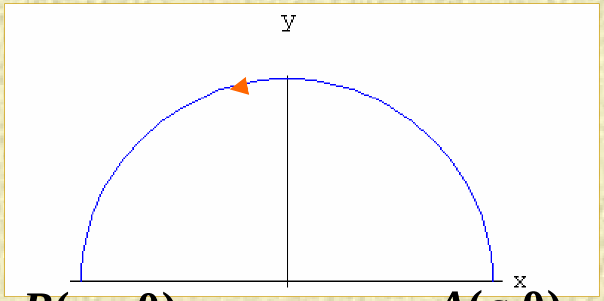
上页 下页 返回

例2　计算$\int_L y^2dx$，其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时　针方向绕行的上半圆周；

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段．

解(1)$L:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，$\theta$ 从 0 变到 π



$$原式 =\int_0^{\pi} a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$=a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)=-\frac{4}{3}a^3.$$

$$原式 =2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$ （利用 I_n 计算）

$$原式 =\int_a^{-a}(a^2-x^2)dx$$

上页　下页　返回

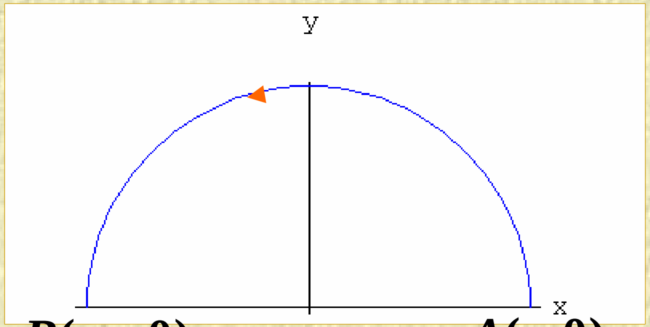
例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时 针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

(2) $\because \quad L: y=0,$

x 从 a 变到 $-a$,



原式 $= \int_a^{-a} 0dx = 0.$

被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同积分结果不同.

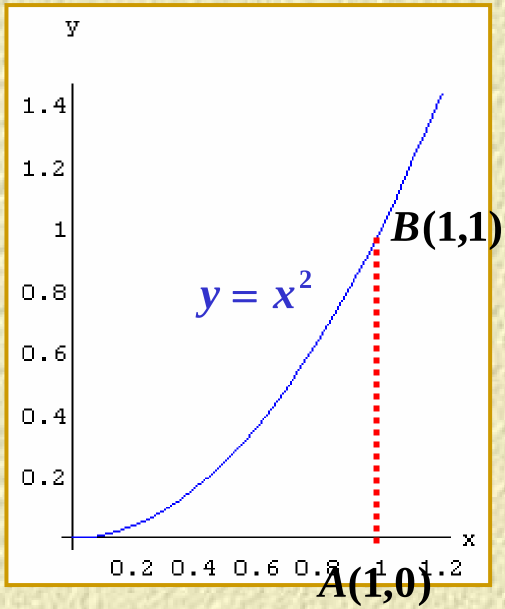
上页 下页 返回

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧；

(3) 有向折线 OAB， 这里 O, A, B依次是点 $(0,0)$ $(1,0), (1,1)$.



解 (1) 化为对 x 的积分.

$$L: y = x^2, \ x\text{从}0\text{变到}1,$$

$$\text{原式} = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx$$

$$= 4\int_0^1 x^3 dx = 1.$$

上页 下页 返回

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

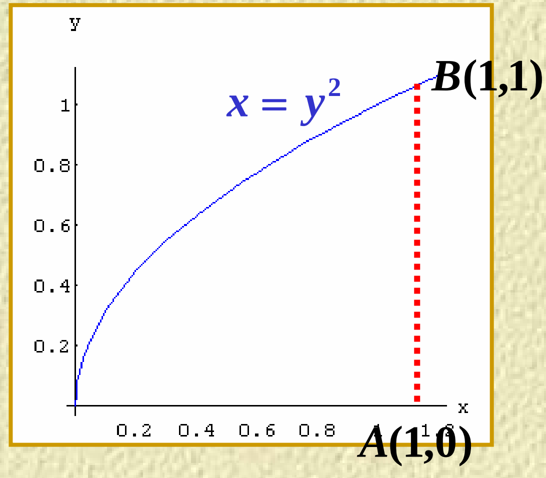
(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$ $(1,0),(1,1)$.

(2) 化为对 y 的积分.

$L: x = y^2$, y从 0 变到 1 ,

$$\text{原式} = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4)dy$$

$$= 5\int_0^1 y^4 dx = 1.$$



上页 下页 返回

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

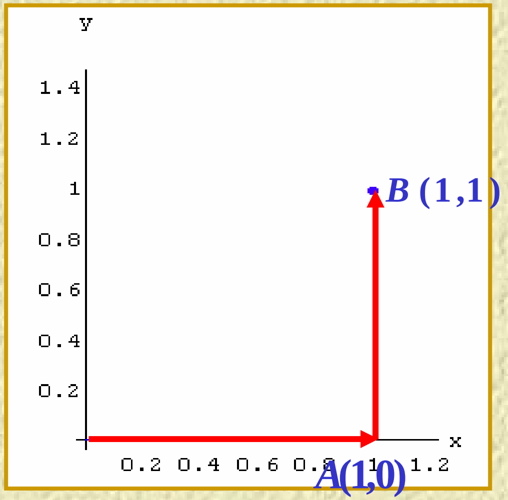
(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$ $(1,0),(1,1)$.

(3) 原式 $= \int_{OA} 2xydx + x^2dy$

$$+ \int_{AB} 2xydx + x^2dy$$



在 OA 上, $y = 0$, x从 0 变到 1 ,

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)dx$$

$$= 0.$$

上页 下页 返回

$$\text{原式} = \int_{OA} 2xydx + x^2dy + \int_{AB} 2xydx + x^2dy$$

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = 0$$

在 AB 上，$x = 1, y$ 从 0 变到 1，

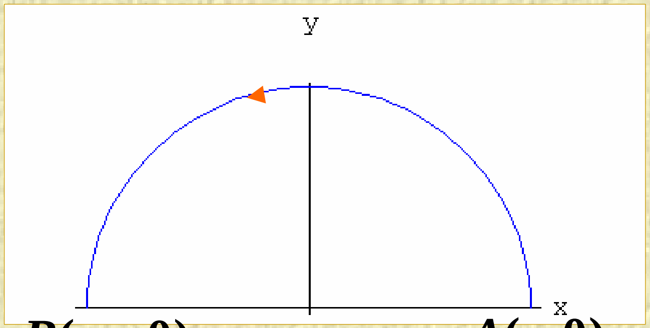
$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)dy = 1.$$

$$\therefore \text{原式} = 0 + 1 = 1.$$

被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同而积分结果相同.

上页 下页 返回

例4 计算$\int_L x^2dx$, $\int_L x^2dy$其中L为半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周；



解 $\because$ 积分曲线关于 y轴$(x=0)$对称，被积函数 x^2关于 x是偶函数．

$$\int_L x^2dx = 2\int_{L_1} x^2dx = 2\int_a^0 x^2dx = -\frac{2}{3}a^3$$

$$\int_L x^2dy = 0$$

上页 下页 返回

例 5(书中例 2)计算$\int_L xdx + ydy + (y+z-1)dz$，其中$L$是连接点$A(1,1,1)$和点$B(2,3,4)$的有向线段$\overrightarrow{AB}$。

解 直线AB的参数方程为

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = 3t+1 \end{cases}$$

$t=0$对应A点，$t=1$对应B点.

$$\therefore \int_L xdx + ydy + (y+z-1)dz$$

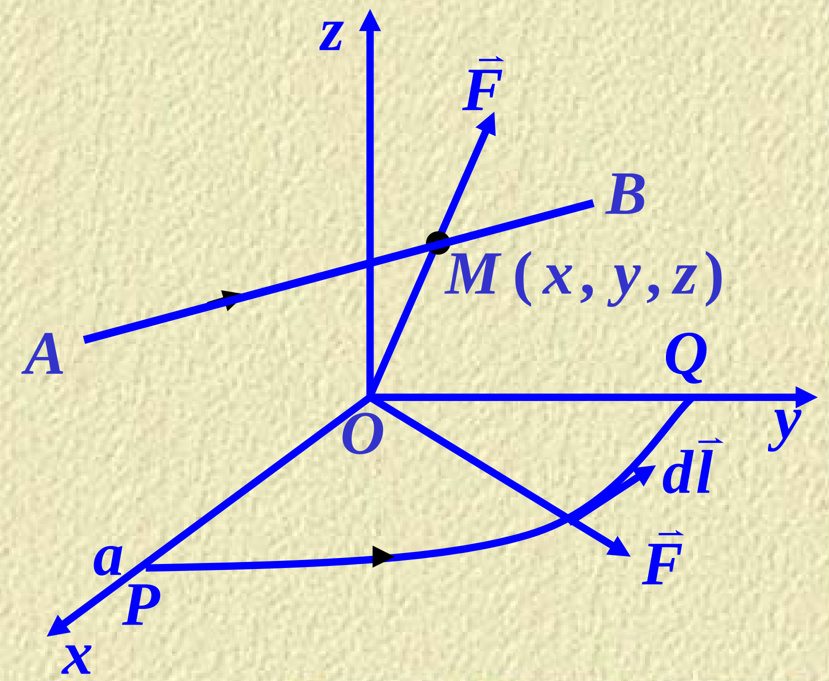
$$= \int_0^1 [(t+1) + 2(2t+1) + 3(5t+1)]dt$$

$$= \int_0^1 (20t+6)dt = 16$$

例 6（书中例 4）在坐标原点O处放置电荷量为q的正电荷，一单位正电荷在该电场中沿路径L运动，求电场力所作的功。

（1） L为直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$，由点$A(2,0,1)$到点$B(1,1,1)$.

（2） L为xOy坐标面上的圆弧$x^2+y^2=a^2$，由点$P(a,0,0)$到点$Q(0,a,0)$



解：在空间中任一点$M(x,y,z)$处电场力为

$$\vec{F}=\frac{kq}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\vec{r}^{\,0}$ 是向径 $\overrightarrow{OM}$ 的单位向量；k 为比例系数.

$$\vec{r}^{\,0}=\frac{1}{r}\vec{r}=\frac{1}{r}\{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\}$$

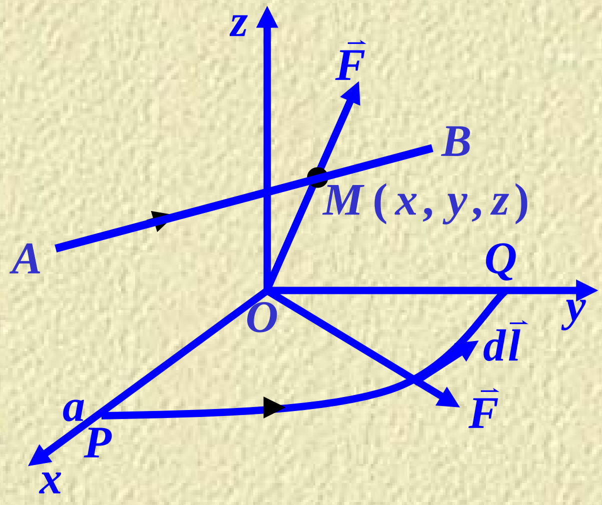
$$\vec{F}=\frac{kq}{r^3}\{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\}$$

从而得功的表达式为

$$W=kq\int_L\frac{xdx+ydy+zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) 直线 $L(\overline{AB})$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = 1 \end{cases}$$



$t=1$ 对应点 A， $t=0$ 对应点 B

故

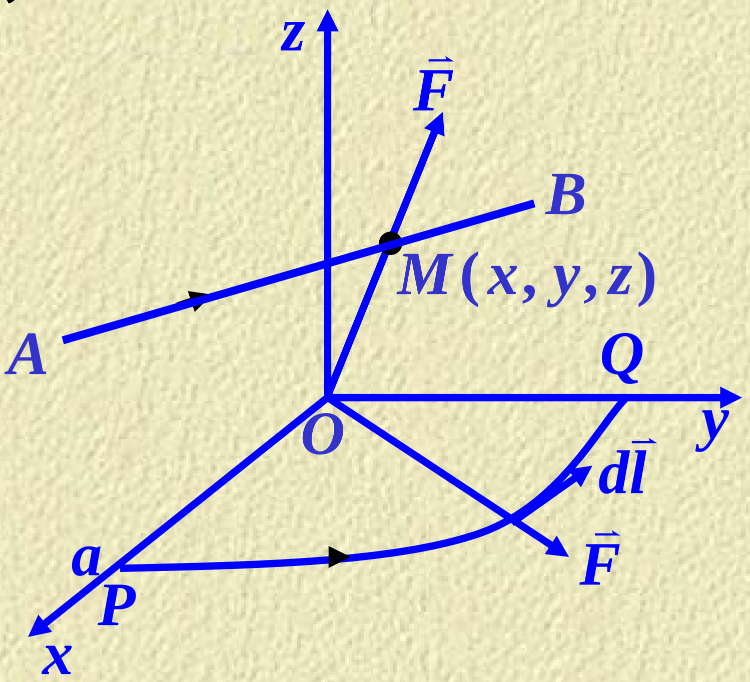
$$W = kq\int_1^0 \frac{(1+t)+(1-t)\cdot(-1)}{(2t^2+3)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$= kq\int_1^0 \frac{2t}{(2t^2+3)^{\frac{3}{2}}}dt = kq\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

此电场力做的功为负值，即要克服电场力做功.

上页 下页 返回

(2) 圆弧 $L(\widehat{PQ})$ 在其上任一点处的切向量都与向径垂直，而电场力的方向与向径相同，因此力 $\vec{F}$ 与切向量 $d\vec{l}$ 垂直，即 $\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$ 从而线积分值为 0. 即此时电场力 $\vec{F}$ 不做功.



3. 两类曲线积分之间的联系

设积分曲线 L 的方向由起点 A 到终点 B， L 的方向确定了 L 上任一点处的切向量，若切向量的方向随 L 方向的改变而改变，则称曲线 L 为**有向曲线**.

设有向曲线弧为 $L: x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$

L 上点 (x, y, z) 处的切线向量的方向角　为 α, β, γ

$$\text{则} \int_L Xdx + Ydy + Zdz = \int_L (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)dl$$

$$\cos\alpha = \frac{\pm x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}, \quad \cos\beta = \frac{\pm y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}},$$

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \int_L (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)dl$$

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{l} \qquad \int_L \vec{F}\cdot\vec{t}\,dl = \int_L F_{\vec{t}}\,dl,$$

其中$\vec{F} = \{X, Y, Z\}$, $\vec{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

L上点(x, y, z)处的单位切向量

L为平面曲线

L上点(x, y)处的切线向量的方向角 为α, β,

$$\int_L Xdx + Ydy = \int_L (X\cos\alpha + Y\cos\beta)dl$$

小结

1、对坐标曲线积分的概念

2、对坐标曲线积分的计算

3、两类曲线积分之间的联系

思考题

当曲线L的参数方程与参数的变化范围给定之后（例如L： $x = a\cos t$， $y = a\sin t$，$t \in [0,2\pi]$，a是正常数），试问如何表示L的方向（如L表示为顺时针方向、逆时针方向）？

思考题解答

曲线方向由参数的变化方向而定.

例如L：$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$t \in [0,2\pi]$中

当t从 0 变到2π时，L取逆时针方向;

反之当t从2π变到 0 时，L取顺时针方向.

历届研究生试题

上页 下页 返回

1.(91,6)在过点 $O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线族 $y = a\sin x\ (a > 0)$中，求一条曲线 L,使沿该曲线从 O到A的积分

$$\int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$$

的值最小 .

解： $I(a) = \int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy$

$$= \int_0^{\pi} [1 + a^3\sin^3 x + (2x + a\sin x)a\cos x]dx$$

$$= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3$$

$I'(a) = -4 + 4a^2 = 0$，得 $a = 1$（$a = -1$ 舍去）；

又 $I''(1) = 8 > 0$，则 $I(a)$ 在 $a = 1$ 处取极小值，

且 $a = 1$ 是 $I(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一极值点，

故 $a = 1$ 时 $I(a)$ 取最小值，则所求曲线　　为

$y = \sin x \ (0 \le x \le \pi)$

2.(88,9)设位于点 (0,1)的质点 A对质点 M的引力大小为 $\frac{k}{r^2}(k>0$为常数， r为质点 A对M之间的距离），质点 M沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自$B(2,0)$运动到 $O(0,0)$, 求在此运动过程中质点A对质点 M的引力所作的功。

分析：本题关键是写出 引力$\vec{F}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$的表达式

解：引力方向与向量 $\overrightarrow{MA}$方向一致，而

$$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\}$$

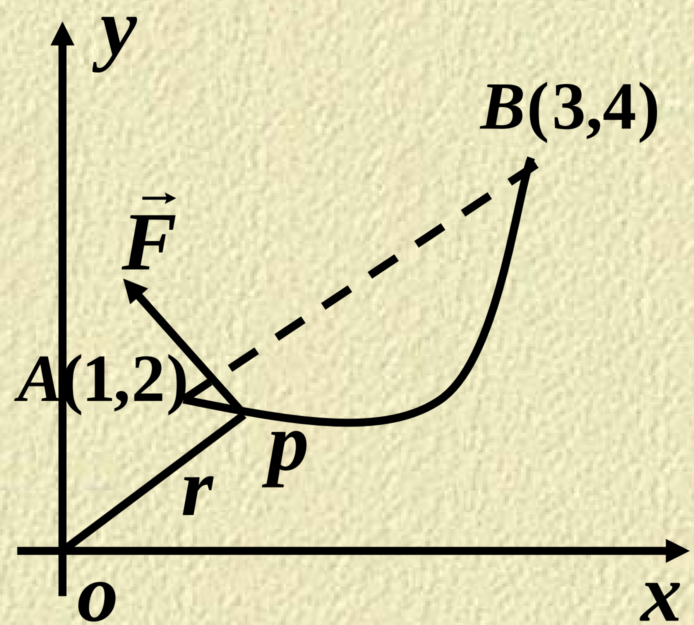
$$\text{则}\vec{F}=\frac{k}{r^2}\frac{\overrightarrow{MA}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|}=\frac{k}{r^2}\frac{-x\vec{i}+(1-y)\vec{j}}{r}$$

$$=\frac{-kx\vec{i}+k(1-y)\vec{j}}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}\qquad\text{于是}$$

$$W=\int_{\overset{\frown}{BO}}\frac{-kxdx+k(1-y)dy}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}=-k\int_{\overset{\frown}{BO}}\frac{\frac{1}{2}d[x^2+(1-y)^2]}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\left.\frac{k}{[x^2+(1-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\right|_{(2,0)}^{(0,0)}=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3.(90,8) 质点p沿着以AB为直径的圆周，从点 $A(1,2)$运动到点$B(3,4)$的过程受变力$\vec{F}$作用（见图），$\vec{F}$的大小等于点p到原点o之间的距离，其方向垂直于线段 op且与y轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$,求变力$\vec{F}$对质点p所作的功。



解：由原题设可知 $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$,圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos t \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $\left(-\dfrac{3\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}(-ydx+xdy)$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin t)\sin t+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos t)\cos t]dt$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(3\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t+2)dt=2(\pi-1)$$

注释：本题主要考察第 二类线积分在变力作功计算中的应用，积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}}(-ydx+xdy)$也可利用补线段$\overset{\frown}{BA}$再用格林公式(9.3节) 计算.

4.(92,8)在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$的作用下，

质点由原点沿直线运动 到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

$+\dfrac{z^2}{a^2}=1$上第一卦限点 $M(\xi,\eta,\zeta)$,问当 $\xi,\eta,$

ζ取何值时，力 $\vec{F}$所作的功 W最大？并求出

W的最大值 .

解1：由原点到点 M的直线方程为

$$\begin{cases} x=\xi t \\ y=\eta t \\ z=\zeta t \end{cases}$$

则

$$W=\int_{\overline{OM}} yzdx+zxdy+xydz$$

$$=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2dt=\xi\eta\zeta$$

以下求$W=\xi\eta\zeta$在条件$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1$

$(\xi\geq 0,\eta\geq 0,\zeta\geq 0)$下的最大值.

令$F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda(1-\dfrac{\xi^2}{a^2}-\dfrac{\eta^2}{b^2}-\dfrac{\zeta^2}{c^2})$

由 $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \zeta} = 0 \\ \dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} + \dfrac{\zeta^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \eta\zeta = \dfrac{2\lambda}{a^2}\xi \\ \xi\zeta = \dfrac{2\lambda}{b^2}\eta \\ \xi\eta = \dfrac{2\lambda}{c^2}\zeta \end{cases}$

从而 $\dfrac{\xi^2}{a^2} = \dfrac{\eta^2}{b^2} = \dfrac{\zeta^2}{c^2}$ 即得 $\dfrac{\xi^2}{a^2} = \dfrac{\eta^2}{b^2} = \dfrac{\zeta^2}{c^2} = \dfrac{1}{3}$

于是得 $\xi = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \quad \zeta = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$

由问题的实际意义知 $W_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$

解2: $W=\int_{\overline{OM}} yzdx+zxdy+xydz$

$$=\int_{\overline{OM}} d(xyz)=xyz\Big|_{(0,0,0)}^{(\xi,\eta,\zeta)}=\xi\eta\zeta$$

由不等式 $\sqrt[3]{xyz}\le\dfrac{x+y+z}{3}$ 可知，当 $x+y+z$ 一定时，$x=y=z$ 时的乘积 xyz 达到最大.

本题中 $\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1$，而 $\xi\eta\zeta$ 达到最大与 $\dfrac{\xi^2}{a^2}\dfrac{\eta^2}{b^2}\dfrac{\zeta^2}{c^2}$ 达到最大点是一致的，从而可知

上页 下页 返回

$$\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}$$时，$W=\xi\eta\zeta$达到最大，即

$$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}}\quad \eta=\frac{b}{\sqrt{3}}\quad \zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$$时，W达到最大，

且 $$W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$$

注释：主要考察变力沿 曲线作功的计算和条件极值 .解 2显然比解 1方便 .解 2中用到的技巧是经常要用的，望 同学特别注意 .

作业：

P178：　1.　3.　5.　6.　7.　8.