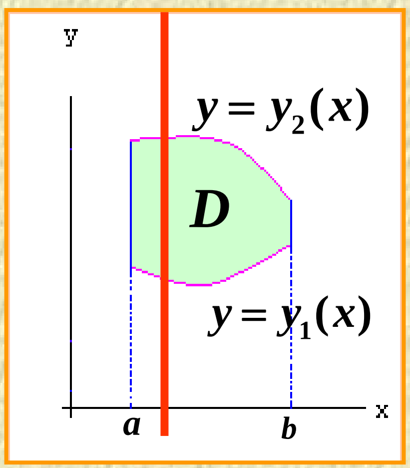
8.2 二重积分的计算

1.二重积分在直角坐标系下的计算

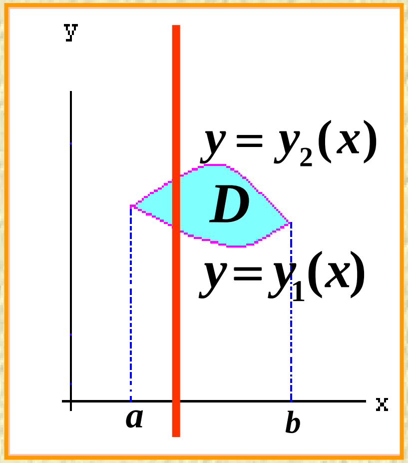
设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 可积，则二重积分可表为 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

设 D 是由 $y=y_1(x)$， $y=y_2(x)$， $x=a$ 及 $x=b$ 围成，其中 $y_1(x)\le y_2(x)$， 且 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续。



X–型积分域的特点：

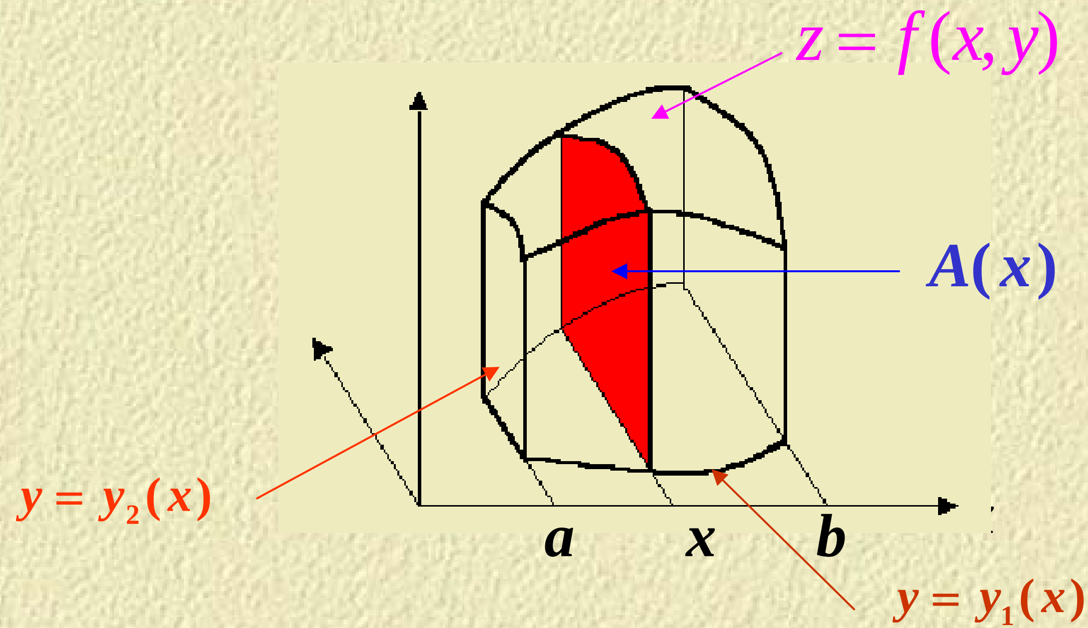
过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界的交点不超过两个.



积分区域可表示为：$D: a\le x\le b,\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)$.

上页 下页 返回

积分区域可表示为：$D: a \le x \le b,\quad y_1(x) \le y \le y_2(x).$



$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \underline{\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}.$$

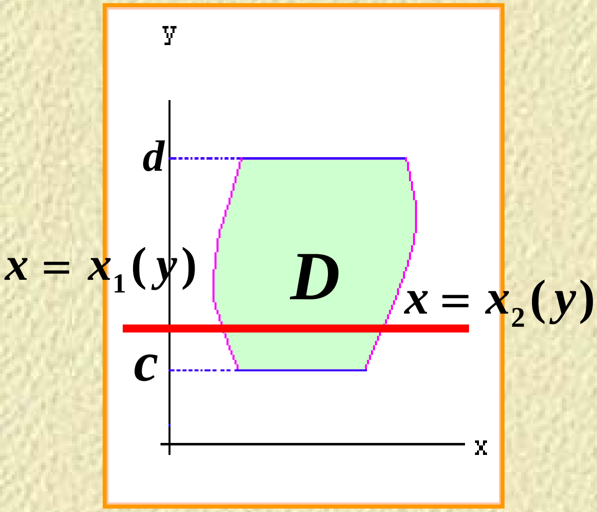
累(二)次积分

注意：计算 $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ 时，将 x 视为常数.

因而，把二重积分化为二次积分，关键是把积分区域化为不等方程组。

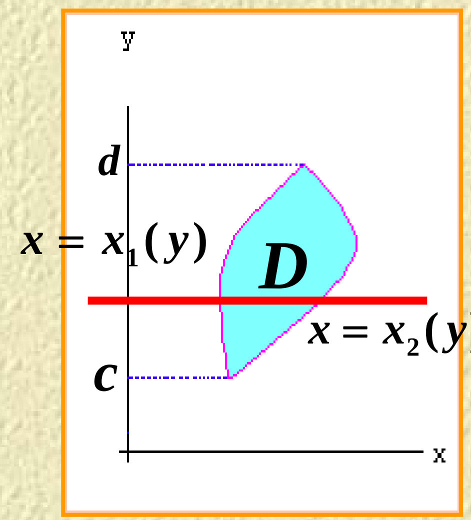
上页 下页 返回

设 D 是由 $x=x_1(y)$， $x=x_2(y)$， $y=c$ 及 $y=d$ 围成，其中 $x_1(y)\le x_2(y)$， 且 $x_1(y), x_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续。



Y-型积分域 的特点：

过 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界的交点不超过两个.



积分区域可表示为：$D: c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)$.

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

注意：计算 $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ 时，将 y 视为常数.

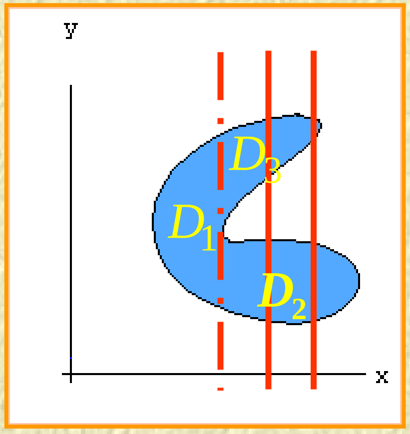
上页 下页 返回

若区域较复杂，则必须分割．如图，

在分割后的三个区域上分别

使用积分公式

$$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} + \iint\limits_{D_3} .$$



特别的，如果区域D是矩形域$a \le x \le b$，$c \le y \le d$，

且被积函数$f(x, y) = g(x)h(y)$，则

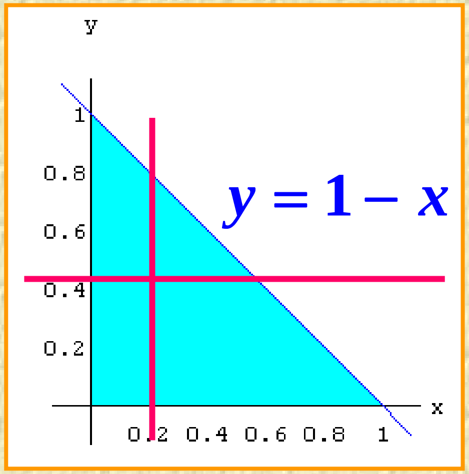
$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \left[\int_a^b g(x)dx\right] \cdot \left[\int_c^d h(y)dy\right]$$

上页 下页 返回

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 无论是先对 x 积分，还是先对 y 积分，尽管积分次序不同，计算结果一样。

例 1 改变积分 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 的次序.

解 积分区域如图



$D: 0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 1-y$

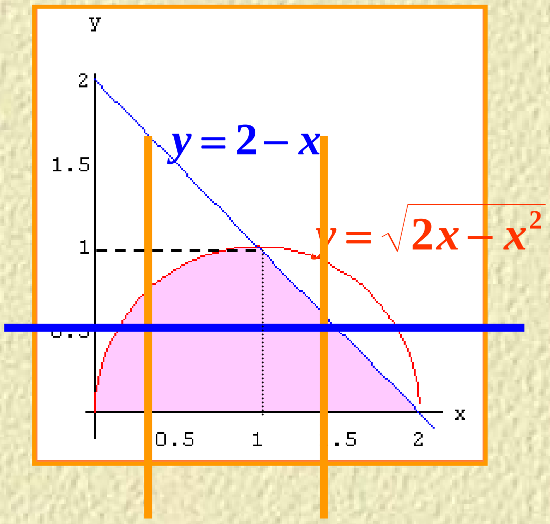
原式$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx.$

上页 下页 返回

例 2　改变积分

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$ 的次序.

解　积分区域如图



$$y=\sqrt{2x-x^2}\ \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

$$\Rightarrow\ x=1\pm\sqrt{1-y^2}$$

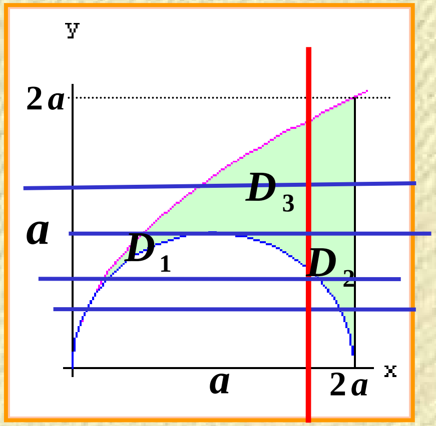
$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y\end{cases}$$

原式$=\displaystyle\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$.

上页　下页　返回

例 3 改变积分 $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$ 的次序.

解



$$y=\sqrt{2ax-x^2} \Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$$

$$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

$$y=\sqrt{2ax} \quad \Rightarrow x=\frac{y^2}{2a}$$

$$\text{原式}=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx$$

$$+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx$$

选择不同的积分次序，二重积分的计算量相差很大。因而做题前，要先分析一下，再确定积分次序。

确定积分次序，一般说来，首先要根据积分区域图形的形状来确定，有时还要根据被积函数的形式来确定(见例 5、例 6)。

因而二重积分按如下步骤计算：

(1) 画出积分区域的草图；

(2) 求出区域边界的交点(便于确定积分上下限)；

(3) 依据积分区域的图形及被积函数的形式确定积分变量的积分顺序；

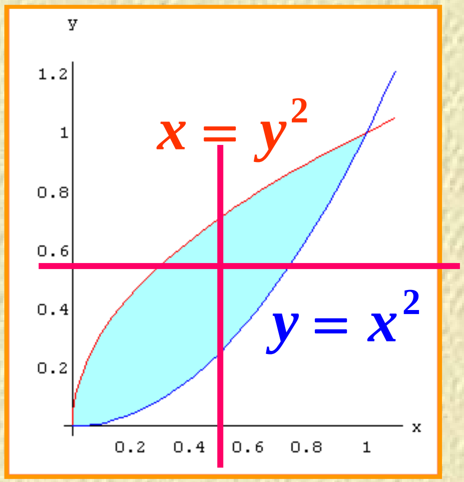
(4) 写出积分变量的变化范围(不等式方程组)；

(5) 写出累次积分表达式，并计算出积分结果。

例 4 求$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中$D$是由抛物线 $y=x^2$和$x=y^2$所围平面闭区域.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$$



$$D: 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le \sqrt{x}$$

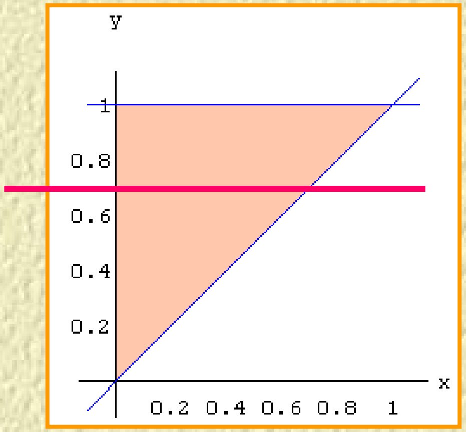
$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$$

$$=\int_0^1 [x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]dx = \frac{33}{140}$$

例5　求$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以(0,0),(1,1),(0,1)为顶点的三角形.

解　$\because \int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示

$\therefore$ 积分时必须考虑次序



$$D: 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y$$

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).$$

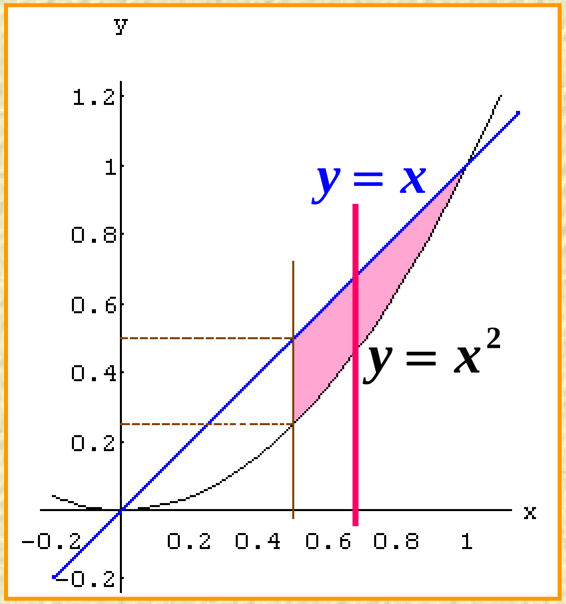
上页　下页　返回

例 6　计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

解　$\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$不能用初等函数表示

$\therefore$先改变积分次序.

$$D:\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{cases}$$



$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$$

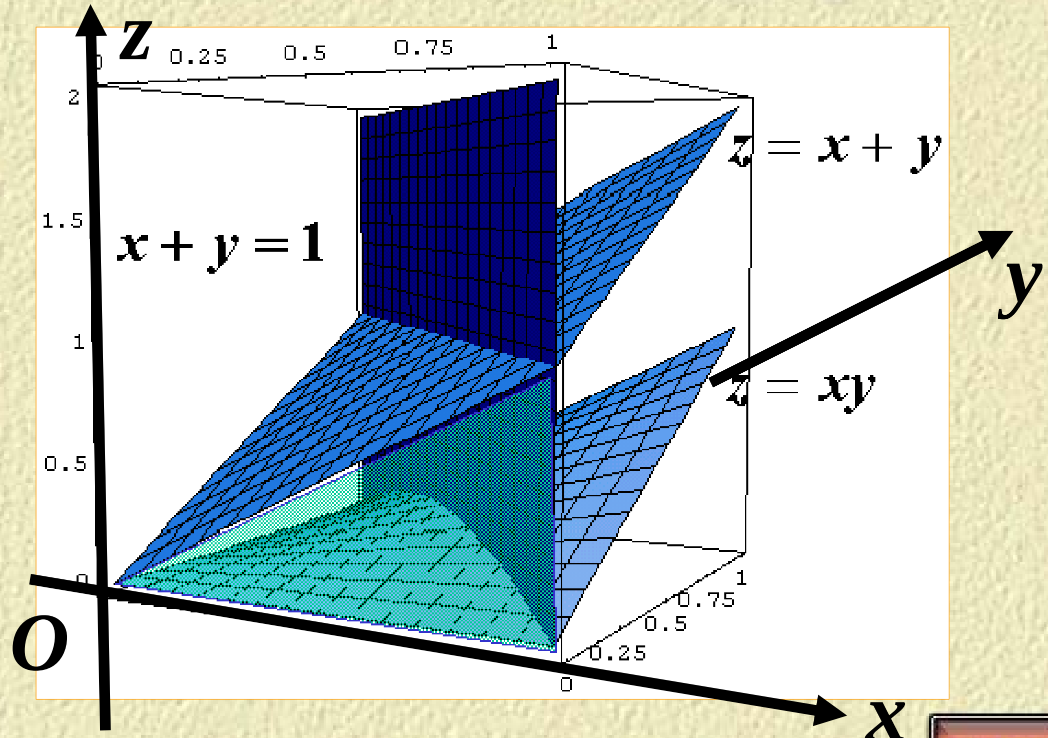
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^{x})dx=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

上页　下页　返回

例 7 求由下列曲面所围成的立体体积，

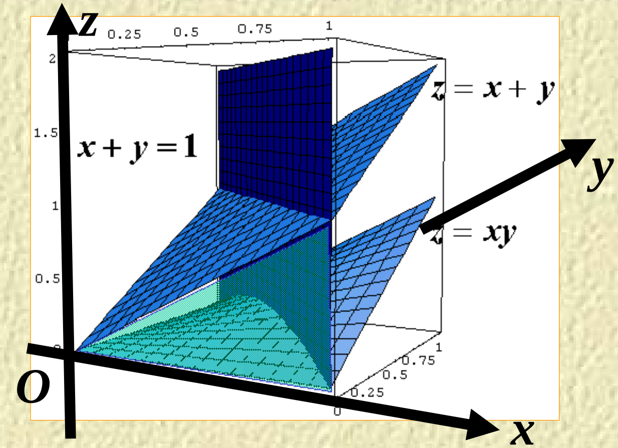
$z = x + y$，$z = xy$，$x + y = 1$，$x = 0$，$y = 0$.

解 曲面围成的立体如图.



上页 下页 返回

所围立体在xoy面上的投影如图

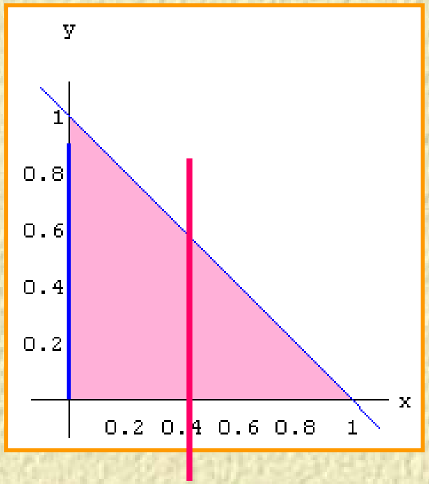


$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

$\because 0 \le x+y \le 1$, $\therefore 0 \le x, y \le 1$, $\Rightarrow 0 \le xy \le 1$,

$\therefore \quad x+y \ge 2\sqrt{xy} \ge \sqrt{xy} \ge xy$

即平面$z = x+y$在曲面$z = xy$上方



所求体积$V = \iint\limits_D (x+y-xy)d\sigma$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy)dy$$

$$= \int_0^1 [x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3]dx \quad = \frac{7}{24}.$$

上页 下页 返回

小结1

二重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$ ［X—型］

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$ ［Y—型］

（在积分中要正确选择积分次序,学会使用对称性）

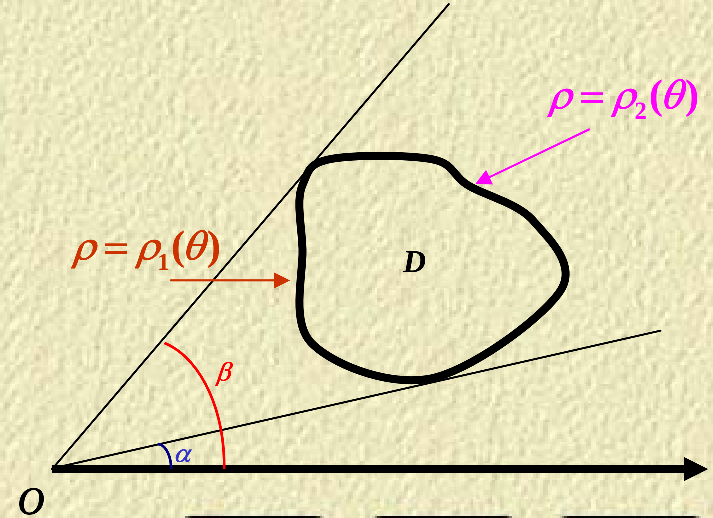
2. 二重积分在极坐标系下的计算

有些二重积分在直角坐标系中计算会很复杂，甚至无法计算，而利用极坐标系计算，会变得简单。

在极坐标系中，$\rho=\rho_0$ 表示中心在极点，半径为 ρ_0 的圆。

$\theta=\theta_0$ 表示起点在极点，与极轴正向夹角为 θ_0 射线。

设积分区域是由 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，$\rho=\rho_1(\theta)$，$\rho=\rho_2(\theta)$ 围成，其中 $\rho_1(\theta)\le\rho_2(\theta)$。



这种区域常被称作曲边扇形。

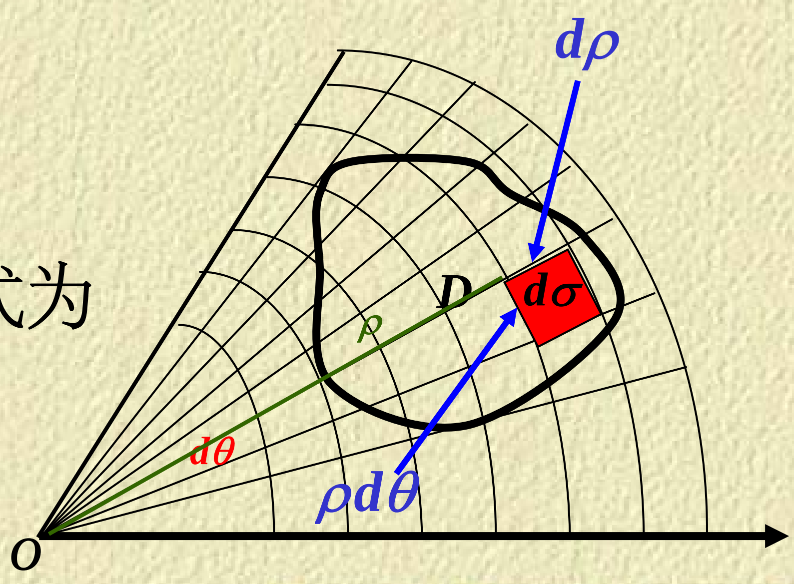
上页 下页 返回

用不同的圆$\rho=\rho_0$，不同的射线$\theta=\theta_0$无限分割区域D，面积元素$d\sigma$可视为小矩形的面积，小矩形的一个边长为$d\rho$，另一个边长为圆弧长$\rho d\theta$，

因此极坐标系下面积元素 $d\sigma = \rho d\rho d\theta$

一般我们把曲边扇形区 域表示为：

$$D=\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\end{cases}$$



又极坐标直角坐标的变 换公式为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \quad \text{(常用)}$$

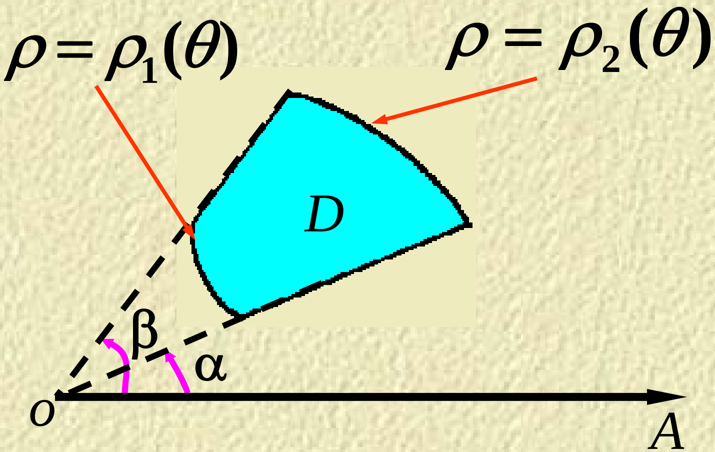
若我们把曲边扇形区域表示为：

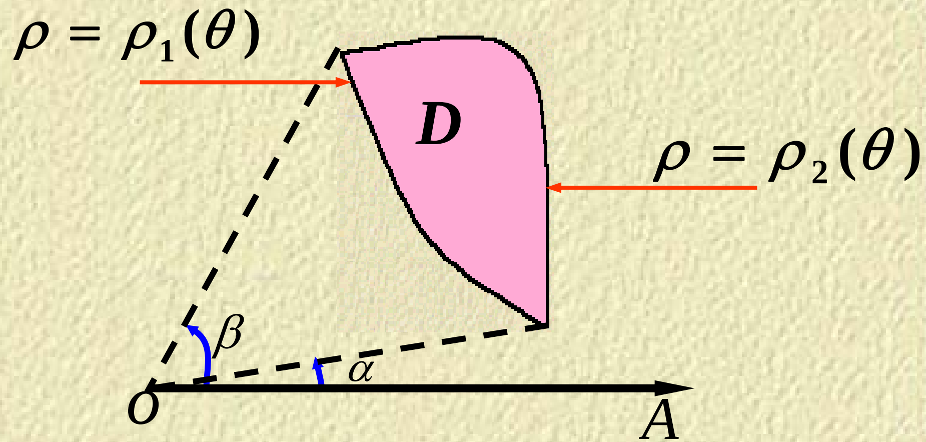
$$D = \begin{cases} \rho_1 \le \rho \le \rho_2 \\ \theta_1(\rho) \le \theta \le \theta_2(\rho) \end{cases}$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\theta \quad \text{(不常用)}$$

二重积分化为二次积分的情形（1）

区域特征如图





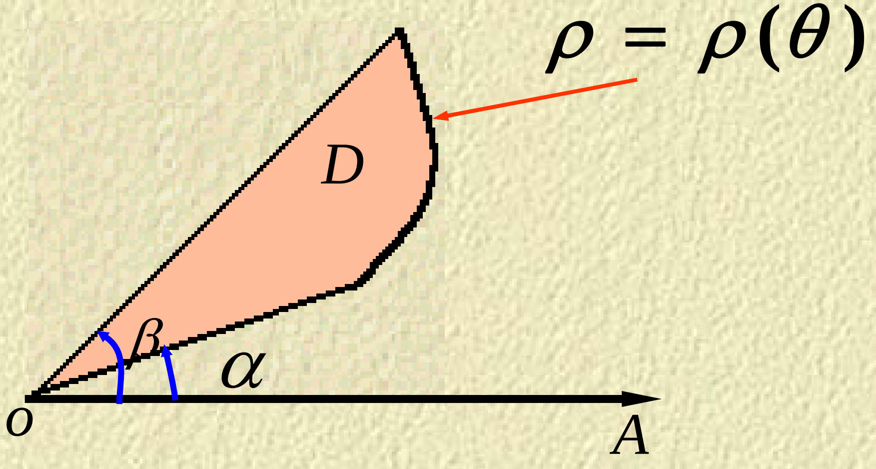
$$D:\ \alpha\le\theta\le\beta,\quad \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta).$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

二重积分化为二次积分的情形（2）

区域特征如图



$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

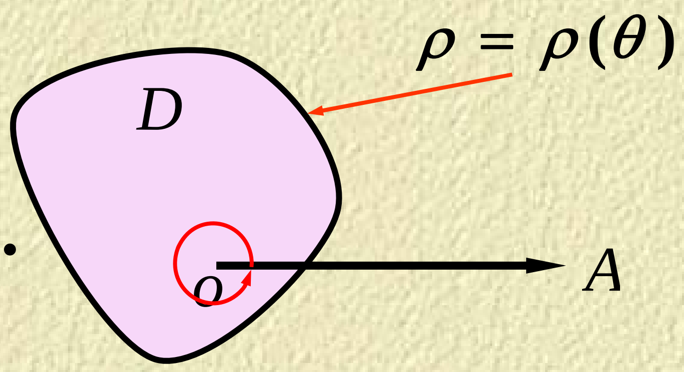
$$0 \le \rho \le \rho(\theta).$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

二重积分化为二次积分的情形（3）

区域特征如图



$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \rho(\theta).$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

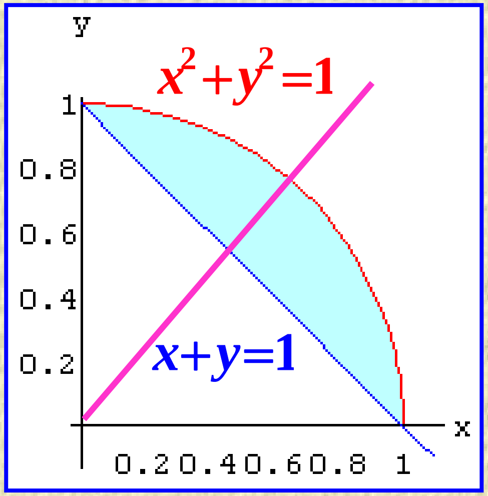
何时利用极坐标来计算二重积分能使计算较为简便呢？

一.考虑积分区域：当积分区域D的边界方程用极坐标方程表示较简单时，比如D是双纽线、圆、扇形、环形或圆、扇形、环形的一部分；

二.考虑被积函数：当被积函数化为极坐标形式较简单时，比如：$f(x^2+y^2)$、$f(\frac{y}{x})$、$f(\frac{x}{y})$等形式时.

例 1 写出积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，其中积分区域$D:\{0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$.

解 在极坐标系下$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$



圆方程为 $\rho=1$,

直线方程为$\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2};\quad \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le\rho\le 1$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

例 2　计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由中心在原点，半径为a的圆周在第一象限所围成的闭区域.

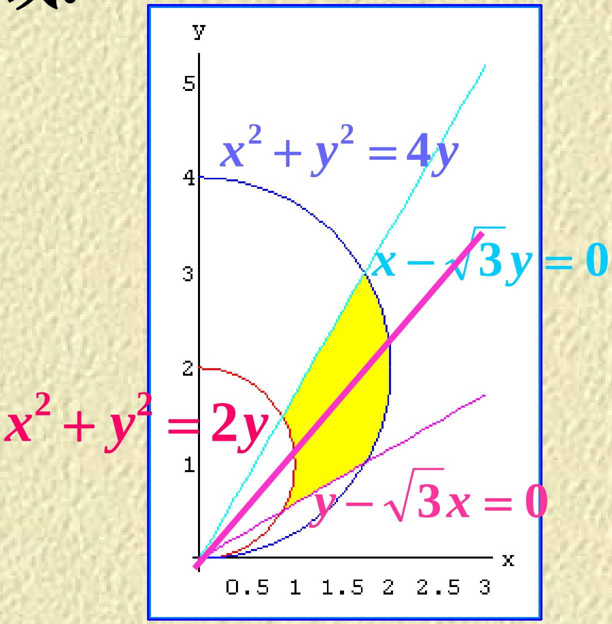
解　在极坐标系下

$$D:\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \rho \le a.$$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).$$

例 3　计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解　$y-\sqrt{3}x=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \quad \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$x^2+y^2=2y \quad \Rightarrow \rho=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \quad \Rightarrow \rho=4\sin\theta$

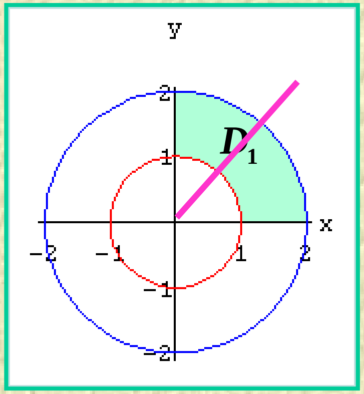
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\rho d\rho=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right).$$

上页　下页　返回

例 4 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

解 由对称性，可只考虑第一象限部分，

$$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$



$$=4\iint\limits_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\sin\pi\rho}{\rho}\rho d\rho=-4.$$

上页 下页 返回

例 5 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\geq a^2$ 所围成的图形的面积.

解 利用对称性。 在极坐标系下

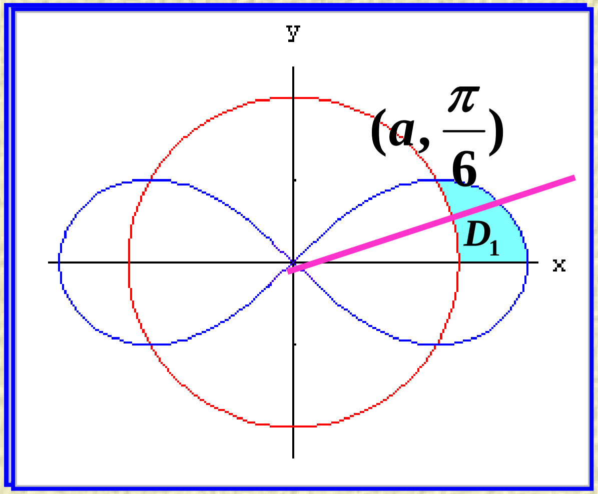
$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho=a,$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \quad \rho=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

由 $\begin{cases}\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}\\ \rho=a\end{cases}$,

得交点 $A=(a,\frac{\pi}{6})$,



上页 下页 返回

所求面积 $A=\iint\limits_{D} dxdy =4\iint\limits_{D_1} dxdy$

$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho$$

$$=a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}).$$

上页 下页 返回

例 6　求广义积分 $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

解 $I^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy$

$$=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\lim_{R\to+\infty}\iint_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x\ge0,\ y\ge0}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})=\frac{\pi}{4}$$ 从而 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

由此结果可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

小结2 二重积分在极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$\begin{cases} = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \end{cases}$$

（在积分中注意使用对称性）

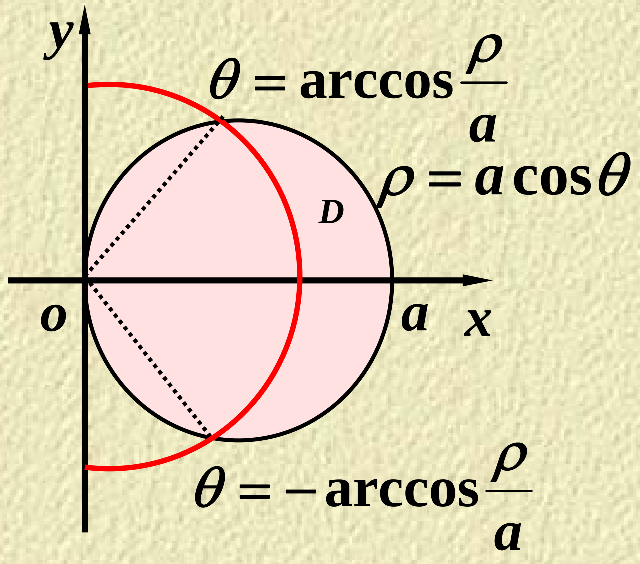
思考题

交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\rho,\theta)d\rho\quad(a\ge 0).$$

思考题解答

$$D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le a\cos\theta\end{cases},$$



$$I=\int_0^a d\rho\int_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}}f(\rho,\theta)d\theta.$$

历年研究生试题（二重积分的计算）

1.(90,3)积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于 $\_\_\_\_$. ?

2.(95,5)设函数 $f(x)$在区间 $[0,1]$上连续，并设

$\int_0^1 f(x)dx = A$，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$. ?

3.(01,3)交换二次积分的次序

$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx = \_\_\_\_\_$. ?

上页 下页 返回

4.(02,7)计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

?

5.(04,4) $f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，

则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0.

?

6.(94,3)设区域 D为$x^2+y^2\le R^2$，则

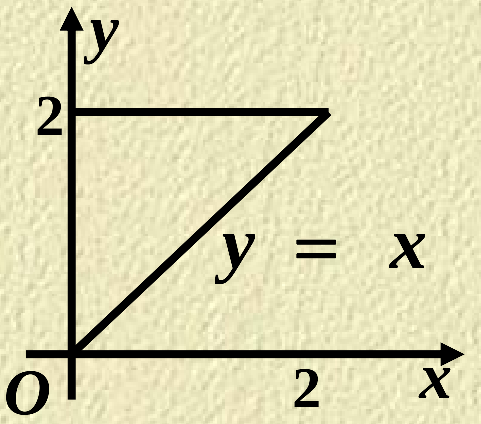
$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

?

1.(90,3)积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于 ____.

分析：因为 $\int_x^2 e^{-y^2}dy$积不出，故应交换积分 次序.

解：交换累次积分次序 得



$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=\int_0^2 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

返回

2.(95,5)设函数 $f(x)$在区间 $[0,1]$上连续，并设

$$\int_0^1 f(x)dx = A,\ \text{求} \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy.$$

解 1∵ $\int_x^1 f(y)dy$不能直接积出∴ 改变积分次序.

$$\text{即} I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx.$$

$$= \int_0^1 f(x)dx \int_0^x f(y)dy,$$

$$\text{故} 2I = \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 f(y)dy + \int_0^1 f(x)dx \int_0^x f(y)dy$$

$$= \int_0^1 f(x)dx[(\int_0^x + \int_x^1) f(y)dy]$$

$$= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy = A^2. \qquad \therefore\ I = \frac{A^2}{2}.$$

解 2 由于被积函数 $f(x)f(y)$ 关于 $y=x$ 对称，

$$\therefore \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} f(x)f(y)dxdy = 2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$$

$$\text{即}\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy = 2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$$

$$\therefore A^2 = 2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$$

$$\text{即}\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{A^2}{2}$$

解 3 由 $\dfrac{d}{dx}\int_1^x f(y)dy = f(x)$ 知

$$\therefore \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = -\int_0^1 dx\int_1^x f(x)f(y)dy$$

$$= -\int_0^1 [f(x)\cdot\int_1^x f(y)dy]dx$$

$$= -\int_0^1 [\int_1^x f(y)dy]d\int_1^x f(y)dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int_1^x f(y)dy\right)^2\Bigg|_0^1 = \frac{A^2}{2}$$

上页 下页 返回

解 4 设 $F'(x)=f(x)$ 则 $\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=A$

$$\therefore \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]dx$$

$$=AF(1)-\int_0^1 F(x)dF(x)$$

$$=AF(1)-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1$$

$$=AF(1)-\frac{1}{2}[F(1)-F(0)][F(1)+F(0)]$$

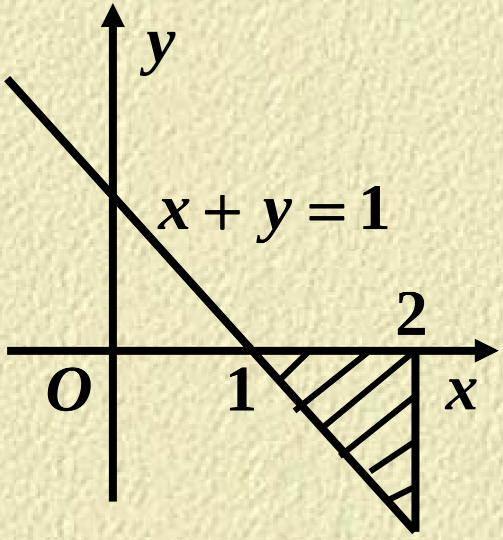
$$=\frac{A}{2}[F(1)-F(0)]=\frac{A^2}{2}$$

返回

3.(01,3)交换二次积分的次序

$$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=\_\_\_\_\_\_.$$

解 4 先画积分域草图，由此可知



$$\therefore \int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx$$

$$=\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{1-x}f(x,y)dy$$

返回

上页 下页 返回

4.(02,7)计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中

$$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

解　令 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

$$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$$

则 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

$$=\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2} e^{y^2}dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2} dx + \int_0^1 ye^{y^2} dy = e - 1$$

返回

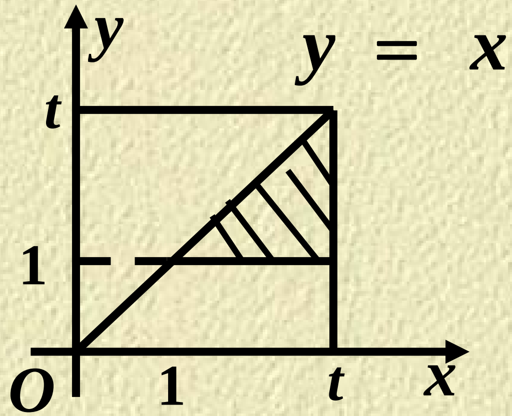
5.(04,4) $f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，

则$F'(2)$等于

(A)$2f(2)$ (B)$f(2)$ (C)$-f(2)$ (D)0.

返回

解　交换累次积分的次序得



$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$$

$$=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy$$

$$=\int_1^t (x-1)f(x)dx$$

$F'(t)=(t-1)f(t)$，　$F'(2)=f(2)$，故应选(B).

6.(94,3)设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$,则

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

解1.利用极坐标进行计算

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left(\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta+\frac{r^2}{b^2}\sin^2\theta\right)rdr$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{a^2}\cos^2\theta+\frac{1}{b^2}\sin^2\theta\right)d\theta=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\pi R^4}{4}$$

解2.由区域的对称性可知 $\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D y^2dxdy$

$$\therefore \iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2dxdy$$

返回

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\pi R^4}{4}$$

作业：

P122： 1(1)(4). 2奇. 3. 4.

5(3)(4). 6奇. 7. 8. 9.