2009 级《微积分 A》期中试卷参考答案

一、1　$dy=[\frac{f'(\arctan\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}+x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x})]dx;$

2　$\frac{1}{3};$

3　$y'=\frac{3+\ln(x-y)}{2+\ln(x-y)},\qquad y'(0)=2;$

4　$a=-2,\qquad b=-2;$

5　$\boldsymbol{e^x}$；

6　$a=6,\qquad b=-9;$

7　$$\boldsymbol{y^{(n)}=\begin{cases}\frac{x(2-x)}{(1-x)^2} & n=1\\ \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & n\ge 2\end{cases}}$$

二、解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}}=-\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}t^{-3/2}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}}=-t^{-3/2}\sqrt{1-t}.$$

三、解：设 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\cos x\sin x}{x^2\cos^2 x}$$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $0<\cos x<1,\quad \sin x<x,$

所以 $x-\cos x\sin x>x-\sin x>0$，

有 $f'(x)>0\quad (x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内单增，

对任意$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$,有$f(x_1)<f(x_2)$

即 $\dfrac{\tan x_1}{x_1}<\dfrac{\tan x_2}{x_2}, \Rightarrow \quad \dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}.$

（注意：讨论 $f'(x)$ 的符号时还有其他方法！）

四、（1）当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore \quad f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

（2）又 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$

所以 $f'(x)$在$x=0$处不连续，

$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点。

五、定义域$D:x\neq 0$,函数无对称性。

（1） $f'(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

列表讨论增减区间，极值

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	--		--	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓		↓	极小值	↑

单增区间为：$(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cup(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$；

单减区间：$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

极大值：$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=1-2\sqrt{2}$， 极小值：$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=1+2\sqrt{2}$

（2） $f''(x)=\frac{2}{x^3}$

在定义域内没有二阶导数为 0 和二阶导数不存在的点，列表

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	--		+
$f(x)$	$\bigcap$		$\bigcup$

凸区间为：$(-\infty,0)$；凹区间为：$(0,+\infty)$；曲线无拐点。

（3） 渐近线

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty,$$

所以垂直渐近线为：$x=0$；无水平渐近线，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}[\frac{1+2x^2}{x^2}+\frac{1}{x}]=2=k;$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{1+2x^2}{x}+1-2x]=1$$

所以有斜渐近线：$y=2x+1$

六、证明：单调性：

$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}>\sqrt{3}=x_1$，假设 $x_n>x_{n-1}$，有

$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}>\sqrt{3+x_{n-1}}=x_n$，由数学归纳法知：$\{x_n\}$单增。

有界性：

$x_1=\sqrt{3}<\sqrt{3}+1,\ x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}<\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$，

假设 $x_n<\sqrt{3}+1$，则

$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}<\sqrt{3+\sqrt{3}+1}<\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$

有归纳法可知数列$\{x_n\}$有界，由单调有界准则知：

$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，在等式 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$ 两边取极限，得 $a = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

七、解：$\because \sqrt{1+x} = 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$

$$\therefore \sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4) \quad (x\to 0)$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \quad (x\to 0)$$

$$\cos x^2 = 1-\frac{1}{2}x^4+o(x^4) \quad (x\to 0)$$

$$\sqrt{1-x^2}-\cos x^2 = -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o\left(x^4\right) \quad (x\to 0)$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}\neq 0$$

$\therefore \quad x\to 0$,无穷小$\sqrt{1-x^2}-\cos x^2$的阶为2,

其最简形式的等价无穷小为:$-\dfrac{1}{2}x^2$.

八、解：设 P 点坐标为(x_0, y_0),则过点 P 的切线方程为：

$$y-y_0 = -\frac{4x_0}{y_0}(x-x_0)$$

令 $x=0$,得$y=\dfrac{4}{y_0}$，　令 $y=0$,得$x=\dfrac{1}{x_0}$

则点 P 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为：$S=\dfrac{2}{x_0y_0}$，

简化目标函数，则问题转化为求函数：$A = x_0y_0 = 2x_0\sqrt{1-x_0^2} \quad (x_0\in(0,1))$

最大值。

$A'_{x_0}=\dfrac{1-2x_0^2}{\sqrt{1-x_0^2}}$，令 $A'_{x_0}=0,$ 得唯一驻点 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$A'_{x_0}>0$；当 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$A'_{x_0}<0$

所以 A 在 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极大值，有驻点唯一，

所以 A 在 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最大值。

S 在 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值。此时 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，$S_{最小}=2$

九、证明:（1）设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)\in[\dfrac{1}{2},1],$ 又

$$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2},\quad F(1)=-1，所以\ F(\frac{1}{2})\cdot F(1)<0$$

由零点定理知：$\exists\eta\in(\dfrac{1}{2},1),$ 使得 $F(\eta)=0,$

即 $\qquad f(\eta)=\eta.$

（2）构造辅助函数：$G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

则 $G(x)\in C[0,\eta],\quad G(x)\in D(0,\eta)$

又 $G(0)=0,\quad G(\eta)=0$

所以将 $G(x)$ 在 $[0，\eta]$ 上应用罗尔定理，有存在 $\xi\in(0，\eta)$

使得 $G'(\xi)=0$

$G'(\xi)=e^{-\lambda\xi}\{-\lambda[f(\xi)-\xi]+[f'(\xi)-1]\}=0$

又 $e^{-\lambda\xi}\neq0,$ 得 $-\lambda[f(\xi)-\xi]+[f'(\xi)-1]=0$

即 $\qquad \lambda[f(\xi)-\xi]=f'(\xi)-1$

结论成立。