习题 5.2(P295)

1. 解下列可分离变量方程.

(1) $xyy' = 1 - x^2$

解：分离变量得 $ydy = \dfrac{1-x^2}{x}dx$，两端积分得 $\dfrac{1}{2}y^2 = \ln|x| - \dfrac{1}{2}x^2 + C_1$，

故方程的通解为 $x^2 + y^2 - \ln x^2 = C$.

(2) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

解：分离变量得 $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = -\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$，两端积分得 $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$，

故方程的通解为 $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$.

(3) $\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2} \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解：分离变量得 $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$，两端积分得 $\arctan y = \arctan x + C$，由初始条件

$y|_{x=0} = 1$ 得 $C = \dfrac{\pi}{4}$，故方程的解为 $\arctan y = \arctan x + \dfrac{\pi}{4}$，即 $y = \dfrac{x+1}{1-x}$，或

$y = \dfrac{2}{1-x} - 1$

或两端积分 $\int_1^y \dfrac{dy}{1+y^2} = \int_o^x \dfrac{dx}{1+x^2}$ 直接得方程的解.

(4) $\begin{cases} (1+e^x)yy' = e^x \\ y|_{x=1} = 1 \end{cases}$

解：分离变量得 $ydy = \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$，两端积分得 $\dfrac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x) + C_1$，

即 $y^2 = 2\ln(1+e^x) + C$

由初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 得 $C = 1 - 2\ln(1+e)$，

故方程的解为 $y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln(1+e)$

或两端积分 $\int_1^y ydy = \int_1^x \frac{e^x}{1+e^x}dx$ 直接得方程的解

2. 解下列齐次方程.

(1) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

解：这是一个齐次方程. 令 $u = \frac{y}{x}$，即 $y = ux$，故 $y' = u + u'x$，

代入方程得 $u + u'x = u + \frac{1}{u}$. 分离变量得 $udu = \frac{dx}{x}$，两端积分得 $\frac{1}{2}u^2 = \ln x + \ln C$

即 $u^2 = 2\ln Cx$，故方程的通解为 $y^2 = x^2 \ln Cx^2$

(2) $\begin{cases}(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0 \\ y\big|_{x=0} = 1\end{cases}$

解：注意到方程中各项关于 x、y 都是 2 次幂的，故这是一个齐次方程. 方程变形为

$$(1 - 3\frac{x^2}{y^2})dy + 2\frac{x}{y}dx = 0 \qquad (*)$$

（注：在不考虑初始条件时，我们一般均采用方程两端同除 x^2 对方程进行变形，这里初始条件给出 $x = 0$ 处的值，而此时 $y \neq 0$，故采用方程两端同除 y^2 对方程进行变形）

令 $u = \frac{x}{y}$，即 $x = uy$，故 $dx = udy + ydu$，代入方程(*)得 $(1 - u^2)dy + 2uydu = 0$

这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得 $\frac{2udu}{u^2 - 1} = \frac{dy}{y}$，两端积分得

$\ln(u^2 - 1) = \ln y + \ln C$，即 $\ln(u^2 - 1) = \ln Cy$，得 $u^2 - 1 = Cy$，所以 $u^2 - 1 = Cy$，因而得 $x^2 - y^2 = Cy^3$，由初始条件 $y\big|_{x=0} = 1$ 得 $C = -1$，故方程的解为 $y^3 = y^2 - x^2$.

(注：假如此例未给出初始条件，要求求通解. 可采用方程两端同除 x^2 对方程进行变形再求解，但方程积分会繁杂得多，因而得到提示：齐次方程当按某种方法变形后积分较复杂，可换另一种方法变形)

(3) $y' = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$

解：这是一个可化为齐次的微分方程，故解方程组$\begin{cases} h+k-1=0 \\ k+2=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} h=3 \\ k=-2 \end{cases}$，

令$\begin{cases} x=X+3 \\ y=Y-2 \end{cases}$，代入原方程，得$\dfrac{dY}{dX}=2(\dfrac{Y}{X+Y})^2 \quad (*)$.

法 1：若将X视为Y的函数，则$\dfrac{dX}{dY}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{X}{Y}+1)^2 \quad (**)$，再令$u=\dfrac{X}{Y}$，

则方程$(**)$变形为$u+Y\dfrac{du}{dY}=\dfrac{1}{2}(u+1)^2$，这是一个可分离变量方程，

由$\dfrac{2du}{u^2+1}=\dfrac{dY}{Y}$解得$2\arctan u=\ln|Y|+C$，即：$2\arctan\dfrac{x-3}{y+2}=\ln|y+2|+C$

法 2：若将Y视为X的函数，则再令$u=\dfrac{Y}{X}$，则方程$(*)$变形为$u+X\dfrac{du}{dX}=2(\dfrac{u}{1+u})^2$，

即$X\dfrac{du}{dX}=-\dfrac{u(1+u^2)}{(1+u)^2}$，这是一个可分离变量方程，分离变量$\left[\dfrac{1}{u}+\dfrac{2}{1+u^2}\right]du=-\dfrac{dX}{X}$，

积分得$\ln|u|+2\arctan u=-\ln|X|+C$，即$2\arctan u=-\ln|Y|+C$，故

$2\arctan\dfrac{y+2}{x-3}=-\ln|y+2|+C$

(注：**显然法 1 比法 2 简单，故将哪个变量视为函数会影响解方程的难易程度，甚至会影响能否解出方程的解**)

(4) $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$

解：注意到方程中各项关于x、y都是 3 次幂的，故这是一个齐次方程. 方程变形为

$$(1+\frac{y^3}{x^3})dx-3\frac{y^2}{x^2}dy=0 \qquad (**)$$

令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=ux$，则$dy=udx+xdu$，代入方程(**)得$(1-2u^3)dx-3u^2xdu=0$，

这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得$\dfrac{3u^2}{1-2u^3}du=\dfrac{dx}{x}$，两端积分得

$-\dfrac{1}{2}\ln(1-2u^3)=\ln x-\dfrac{1}{2}\ln C$，化简得$1-2u^3=\dfrac{C}{x^2}$，故方程的通解为

$2y^3-x^3+Cx=0$

(注：此例若采用方程两端同除 y^3 对方程进行变形再求解，方程积分会繁杂得多，因为此时方程中会出现 u^3 项，而不出现 u^2 项，不能凑微分进行积分)

3. 解下列线性方程和伯努利方程.

(1) $y'+y=\cos x$

解：这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(x)=1$，$Q(x)=\cos x$，故方程的通解为 $y=e^{-\int dx}[\int \cos x e^{\int dx}dx+C]=e^{-x}(\int \cos x\cdot e^{x}dx+C)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+Ce^{-x}$

(2) $y'+2xy=xe^{-x^2}$

解：这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(x)=2x$，$Q(x)=xe^{-x^2}$，故方程的通解为 $y=e^{-\int 2xdx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+C]=e^{-x^2}(\int xdx+C)=e^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2+C)$

(3) $\begin{cases} xy'+y-e^{x}=0 \\ y|_{x=a}=b \end{cases}$

解：这是一个一阶线性非齐次的微分方程，化为标准形式 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$，其中 $P(x)=\frac{1}{x}$，$Q(x)=\frac{e^x}{x}$，

故方程的通解为 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int\frac{e^x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{x}(\int e^{x}dx+C)=\frac{1}{x}(e^{x}+C)$

由初始条件可得 $C=ab-e^{a}$，故满足初始条件的方程的特解为 $y=\frac{1}{x}(e^{x}+ab-e^{a})$

(4) $(y^4+2x)y'=y$

解：方程变形为 $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^3$，将 x 视为因变量，y 视为自变量，则这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(y)=-\frac{2}{y}$，$Q(y)=y^3$，故方程的通解为

$$x = e^{\int \frac{2}{y}dy}[\int y^3 e^{-\int \frac{2}{y}dy}dy + C] = y^2(\int ydy + C) = \frac{y^4}{2} + Cy^2$$，整理得 $x = \frac{y^4}{2} + Cy^2$

(5) $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$

解：方程变形为 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$，将 x 视为因变量，y 视为自变量，则这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(y) = -\frac{3}{y}$，$Q(y) = -\frac{y}{2}$，故方程的通解为

$$x = e^{\int \frac{3}{y}dy}[\int -\frac{y}{2}e^{-\int \frac{3}{y}dy}dy + C_1] = y^3(\int -\frac{1}{2y^2}dy + C_1) = y^3(\frac{1}{2y} + C_1)$$

整理得 $Cy^3 + y^2 - 2x = 0 \qquad C = 2C_1$

(注：x 及 y 哪个做自变量是相对的. 本例若将 y 视为因变量，x 视为自变量，则无法解方程，大家应该学会变通)

(6) $xy' + y = y^2 \ln x$

解：这是一个 $n = 2$ 的伯努利方程（非线性），化为标准形式 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x} \cdot y^2$，方程两端同除 y^2：$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$，令 $u = y^{-1}$，则 $-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln x}{x}$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，化为标准形式 $u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}$，其中 $P(x) = -\frac{1}{x}$，$Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$，故该一阶线性非齐次的微分方程的通解为

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx}[\int -\frac{\ln x}{x}e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C] = x(\int -\frac{\ln x}{x^2}dx + C) = x(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C) = \ln x + 1 + Cx$$

所以原微分方程的通解为 $\frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx$

(7) $\begin{cases} y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 \\ y\big|_{x=\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$

解：方程变形为 $y' + \frac{y}{\arcsin x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\arcsin x}$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，

其中 $P(x)=\dfrac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$， $Q(x)=\dfrac{1}{\arcsin x}$，　　故方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx}[\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{\arcsin x}(\int dx+C)=\frac{1}{\arcsin x}(x+C)$$

由初始条件可得 $C=-\dfrac{1}{2}$，故满足初始条件的方程的特解为 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}(x-\dfrac{1}{2})$

4. 解下列方程.

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$

解:这是一个 $n=\dfrac{1}{2}$ 的伯努利方程,化为标准形式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{y}$,方程两端同除 $\sqrt{y}$:

$\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}\sqrt{y}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，令 $u=\sqrt{y}$，则 $2u'+\dfrac{1}{x}u=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，化为标准形式 $u'+\dfrac{1}{2x}u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，其中 $P(x)=\dfrac{1}{2x}$， $Q(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，故该一阶线性非齐次的微分方程的通解为 $u=\dfrac{x+C}{\sqrt{x}}$，所以原微分方程的通解为 $\sqrt{xy}=x+C$

(2) $\begin{cases} x^2y'+xy=y^2 \\ y(1)=1 \end{cases}$

解：这是一个 $n=2$ 的伯努利方程，化为标准形式 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x^2}y^2$，方程两端同除 y^2：

$\dfrac{y'}{y^2}+\dfrac{1}{x}y^{-1}=\dfrac{1}{x^2}$，令 $u=y^{-1}$，则 $-u'+\dfrac{1}{x}u=\dfrac{1}{x^2}$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，化为标准形式 $u'-\dfrac{1}{x}u=-\dfrac{1}{x^2}$，其中 $P(x)=-\dfrac{1}{x}$， $Q(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，故该一阶线性非齐次的微分方程的通解为

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}[\int-\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C]=x(\int-\frac{1}{x^3}dx+C)=x(\frac{1}{2x^2}+C),$$

所以原微分方程的通解为$\frac{1}{y}=x(\frac{1}{2x^2}+C)$

由初始条件可得$C=\frac{1}{2}$，故满足初始条件的方程的特解为$\frac{1}{y}=x(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2})=\frac{1+x^2}{2x}$，即

$y=\frac{2x}{1+x^2}$

(3)$\begin{cases} x\ln x dy+(y-\ln x)dx=0 \\ y(e)=1 \end{cases}$

解：令$u=\ln x$，则$x=e^u$，$dx=e^u du$，代入方程得 $e^u u dy+(y-u)e^u du=0$，所以

$(udy+ydu)-udu=0$ ，即 $d(uy)-d(\frac{1}{2}u^2)=0$ ，所以 $uy-\frac{1}{2}u^2=C$ ，即

$y\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x=C$，由初始条件可得$C=\frac{1}{2}$，故满足初始条件的方程的特解为

$y\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x=C$，或$y=\frac{1}{2}(\ln x+\frac{1}{\ln x})$

(4) $\sec^2 y\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1+x^2}\tan y=x$

解：令$u=\tan y$，则$\frac{du}{dx}=\sec^2 y\frac{dy}{dx}$，代入方程得 $\frac{du}{dx}+\frac{x}{1+x^2}u=x$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中$P(x)=\frac{x}{1+x^2}$，$Q(x)=x$，故该一阶线性非齐次的微分方程的通解为

$$u=e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}[\int xe^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx+C]=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(\int x\sqrt{1+x^2}dx+C)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C]$$

所以原微分方程的通解为 $\tan y=\frac{1}{3}(1+x^2)+\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$

(5)$(1+y^2)(e^{2x}dx-e^y dy)-(1+y)dy=0$

解：方程变形为 $(e^y+\frac{1}{1+y^2}+\frac{y}{1+y^2})dy=e^{2x}dx$

$$(2e^y+\frac{2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2})dy=2e^{2x}dx$$

两端分别积分得 $2e^y+2\arctan y+\ln(1+y^2)=e^{2x}+C$

(6) $\frac{dy}{dx}+1=4e^{-y}\sin x$

解：方程变形为 $e^y\frac{dy}{dx}+e^y=4\sin x$，令 $u=e^y$，则 $\frac{du}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$，代入方程得

$\frac{du}{dx}+u=4\sin x$，,这是一个一阶线性非齐次的微分方程,其中 $P(x)=1$，$Q(x)=4\sin x$，故原微分方程的通解为

$$e^y=e^{-\int dx}[\int 4\sin xe^{\int dx}dx+C]=e^{-x}(\int 4\sin xe^{x}dx+C)=e^{-x}(\int 4\sin xe^{x}dx+C)$$

$$=e^{-x}[2e^x(\sin x-\cos x)+C)=2(\sin x-\cos x)+Ce^{-x}$$

(7) $(y^3x^2+xy)y'=1$

解：方程变形为 $y'=\frac{1}{y^3x^2+xy}$，由反函数的求导公式可想到变形为 $\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$，因而，将 x 视为因变量，y 视为自变量，该方程为 $n=2$ 的伯努利方程，方程两端同除 $-x^2$：

$-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dy}+yx^{-1}=-y^3$，令 $u=x^{-1}$，代入方程得 $\frac{du}{dy}+yu=-y^3$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(y)=y$，$Q(y)=-y^3$，故原微分方程的通解为

$\frac{1}{x}=e^{-\int ydy}[\int -y^3e^{\int ydy}dy+C]=e^{-y^2/2}(\int -y^3e^{y^2/2}dy+C)=Ce^{-y^2/2}-y^2+2$，即

$$x(Ce^{-y^2/2}-y^2+2)=1$$

5. 设曲线上任一点 P 处的切线与 x 轴交于 A 点. 已知原点与 P 点的距离等于 A 与 P 间的距离，且曲线过点 $(2,1)$，求该曲线的方程.

解：设 $P(x, y)$，则过 P 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$，则得 A 点的坐标为 $(x-\frac{y}{y'}, 0)$，由题意得 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\frac{y}{y'})^2+y^2}$，两端平方得 $\left|\frac{y}{y'}\right|=|x|$，即

$\frac{y}{y'}=\pm x$，从而 $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}$，所以 $\ln y=\pm\ln x+\ln C$

即　$y=Cx$，或 $y=\frac{C}{x}$，因曲线过点 $(2, 1)$，代入得 $y=\frac{x}{2}$，或 $y=\frac{2}{x}$

6. 曲线上任一点的切线的斜率等于原点与该切点连线的斜率的 2 倍，且曲线过点 $(1, \frac{1}{3})$，求该曲线的方程.

解：设曲线上任一点的坐标为 $(x\ y)$，由题意得 $\begin{cases} y'=2\frac{y}{x} \\ y|_{x=1}=\frac{1}{3} \end{cases}$，这是一个可分离变量的微分方程，解得 $y=Cx^2$，由初始条件得 $C=\frac{1}{3}$，故所求曲线方程为 $y=\frac{1}{3}x^2$

7. 已知曲线在两坐标轴间的任意一条切线段都被切点平分，且曲线过点 $(2, 3)$，求该曲线的方程.

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，切点的坐标为 $P(x, y)$，则过 P 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$，则得切线与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(x-\frac{y}{y'}, 0)$，令 $X=0$，则得切线与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0, y-xy')$，由题意 $|AP|=|PB|$，即 $\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=x^2+(xy')^2$，整理得 $x^2(y')^4+(x^2-y^2)(y')^2-y^2=0$，解得 $(y')^2=\left(\frac{y}{x}\right)^2$，即 $|y'|=\left|\frac{y}{x}\right|$，由题意知 $y'<0$，故 $y'=-\frac{y}{x}$，这是一个可分离变量的微分方程，解得 $xy=C$，由初始条件 $y|_{x=2}=3$ 得 $C=6$，故所求曲线方程为 $xy=6$.

8. 曲线上任一点处的切线介于 x 轴和直线 $y=x$ 之间的线段都被切点平分，且曲线过点

$(0,1)$，求该曲线的方程.

解：设曲线上任一点的坐标为 $P(x\ y)$，则过 P 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$，则得切线与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(x-\frac{y}{y'},0)$，令 $Y=X$，则得切线与 $y=x$ 的交点 B 的坐标为 $(\frac{xy'-y}{y'-1},\frac{xy'-y}{y'-1})$，由题意得 $\begin{cases}2y=\dfrac{xy'-y}{y'-1}\\ y\big|_{x=0}=1\end{cases}$，整理方程得 $(2y-x)y'=y$，变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=2$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中

$P(y)=\frac{1}{y}$，$Q(y)=2$，

故其通解为 $\quad x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}[\int 2e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C]=\frac{1}{y}([\int 2ydy+C]=y+\frac{C}{y}$，

由初始条件得 $C=-1$，故所求曲线方程为 $x=y-\frac{1}{y}$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=1$、$x=t\ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

解：由题意得 $\pi\int_1^t f^2(x)dx=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，即 $3\int_1^t f^2(x)dx=t^2f(t)-f(1)$

两端分别对 t 求导得 $3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)$，故所求微分方程为 $x^2y'=3y^2-2xy$，这是一个齐次微分方程，变形为 $y'=3\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，代入方程得 $x\frac{du}{dx}=3u(u-1)$，这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得 $\frac{1}{u(u-1)}du=\frac{3dx}{x}$，两

端积分得 $\ln\frac{u-1}{u}=3\ln x+\ln C$，化简得 $\frac{u-1}{u}=Cx^3$，故曲线方程为 $1-\frac{x}{y}=Cx^3$，由初始条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 得 $C=-1$，故曲线方程为 $1-\frac{x}{y}=-x^3$，或 $y=\frac{x}{1+x^3}$

10. 求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$、$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

解：方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=-1$，这是一个一阶线性非齐次的微分方程，其中 $P(x)=-\frac{2}{x}$，$Q(x)=-1$，

故其通解为 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}[\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=x^2(\int-\frac{dx}{x^2}+C)=x^2(\frac{1}{x}+C)=x+Cx^2$

则 $V_x=\pi\int_1^2(x+Cx^2)^2dx$，据题意求使得 V_x 取得最小值的 C 值,

法 1：$(V_x)'_C=\pi\int_1^2\left[(x+Cx^2)^2\right]'dx=\pi\int_1^2 2(x+Cx^2)x^2dx$

$$=\pi\int_1^2(2x^3+2Cx^4)dx=\pi\left[\frac{x^4}{2}+\frac{2}{5}Cx^5\right]_1^2=\pi\left[\frac{15}{2}+\frac{62}{5}C\right],$$

令 $(V_x)'_C=0$，得惟一驻点 $C=-\frac{75}{124}$，又 $(V_x)''_C=\frac{62}{5}\pi>0$，故 $y=x-\frac{75}{124}x^2$ 为所要求的解.

法 2：先积分求 V_x，$V_x=\pi\int_1^2(x+Cx^2)^2dx=2\pi\left[\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right]$，则

$(V_x)'_C=\pi\left[\frac{15}{2}+\frac{62}{5}C\right]$，其余同法 1.

11. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温度差成比例，如果物体在 $20\,\mathrm{min}$ 内由 100^0C 冷却至 60^0C，那么，在多长时间内，这个物体的温度能够达到 30^0C？假设空气的温度为 20^0C.

解：设物体在时刻t的温度为$T(t)$，由题意得$\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k(T-20)\\ T\big|_{t=0}=100,\quad T\big|_{t=20}=60\end{cases}$，这是一个可分离变量的微分方程，解得$T=20+Ce^{-kt}$，由初始条件$T\big|_{t=0}=100$得$C=80$，故$T=20+80e^{-kt}$，由条件$T\big|_{t=20}=60$，得$k=\dfrac{\ln 2}{20}$，所以$T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$，由此，$t=\dfrac{20}{\ln 2}\cdot\ln\dfrac{80}{T-20}$，当$T=30$时，$t=\dfrac{20}{\ln 2}\cdot\ln 8=20\times 3=60$（分），即一小时内，这个物体的温度能够达到$30\ {}^{0}C$