习题 7.6(P82)

1．求曲线 $x=a\sin^2 t$， $y=b\sin t\cos t$， $z=c\cos^2 t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程（a,b,c 为常数）

解： 曲线的切向量为 $\vec{T}=\{a\sin 2t, b\cos 2t, -c\sin 2t\}$，当 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 时，对应曲线上的点为

$\left(\dfrac{3}{4}a, \dfrac{\sqrt{3}}{4}b, \dfrac{1}{4}c\right)$，过此点切线的切向量为 $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a, -\dfrac{1}{2}b, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right\}$，

故所求切线方程为 $\dfrac{x-\dfrac{3}{4}a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b}{-\dfrac{1}{2}b}=\dfrac{z-\dfrac{1}{4}c}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}c}$， 即 $\dfrac{x-\dfrac{3}{4}a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b}{-b}=\dfrac{z-\dfrac{1}{4}c}{-\sqrt{3}c}$

2．在曲线 $x=t$， $y=t^2$， $z=t^3$ 上求一点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$

解： 曲线的切向量为 $\vec{T}=\{1, 2t, 3t^2\}$，平面的法向量为 $\vec{n}=\{1, 2, 1\}$

因为切线平行于平面，所以 $\vec{T}\perp\vec{n}$，故有 $\vec{T}\cdot\vec{n}=1+4t+3t^2=0$

解得： $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$

当 $t=-1$ 时， $x=-1$， $y=1$， $z=-1$

当 $t=-\dfrac{1}{3}$ 时， $x=-\dfrac{1}{3}$， $y=\dfrac{1}{9}$， $z=-\dfrac{1}{27}$

故所求点为 $(-1, 1, -1)$ 或 $(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27})$

3．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线及法平面方程。

解： 方程组两端分别对 x 求导得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

将点$(1,-2,1)$代入得：

$$\begin{cases} 2-4\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}，解得：\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dz}{dx}=-1$$

故曲线在点$(1,-2,1)$处的切向量为$\vec{T}=\{1,0,-1\}$

所求的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

所求的法平面方程为 $1\times(x-1)+0\times(y+2)+(-1)\times(z-1)=0$

即 $x-z=0$

4．求$u=3x^2z-xy+z^2$在点$(1,-1,1)$处沿曲线$x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$正方向（即t增大一方）的方向导数（沿曲线的方向导数即是指沿曲线的切线方向的方向导数）.

解：点$(1,-1,1)$对应$t=1$，

曲线在点$(1,-1,1)$处的切向量为 $\vec{T}=\{1,-2t,3t^2\}_{t=1}=\{1,-2,3\}$

$$\vec{T}^0=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$$

又$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6xz-y$，$\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x$，$\quad\dfrac{\partial u}{\partial z}=3x^2+2z$

在点$(1,-1,1)$处：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=7$，$\quad\dfrac{\partial u}{\partial y}=-1$，$\quad\dfrac{\partial u}{\partial z}=5$

故所求方向导数为$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{T}^0}=7\times\dfrac{1}{\sqrt{14}}+(-1)\times\dfrac{-2}{\sqrt{14}}+5\times\dfrac{3}{\sqrt{14}}=\dfrac{24}{\sqrt{14}}$

5．证明：螺旋线$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$的切线与$z$轴成定角.

证明：此螺旋线的切向量为$\vec{T}=\{-a\sin t,a\cos t,b\}$，与$z$轴共线向量为$\vec{l}=\{0,0,c\}$，

所以此螺旋线的切线与z轴夹角的余弦值为$\cos(\vec{T},\vec{l})=\dfrac{\left|(\vec{T}\cdot\vec{l})\right|}{|\vec{T}|\cdot|\vec{l}|}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

因此夹角为定角

6．证明：曲线$\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$点$P(1, -2, 1)$处的切线与直线$\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$垂直。

证明：曲线方程整理为$\begin{cases} z = x^2 \\ y = -\dfrac{3x+1}{2} \end{cases}$，

它在点$P(1, -2, 1)$处的切向量为$\vec{T} = \left\{1, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right\}_P = \left\{1, -\dfrac{3}{2}, 2\right\}$；

直线$\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$的一个方向向量为$\vec{l} = \{3, -5, 5\} \times \{1, 0, 5\} = \{-25, -10, 5\}$

因为$\vec{T} \cdot \vec{l} = 0$，所以$\vec{T} \perp \vec{l}$

7．求曲面$e^z + z + xy = 3$在点$(2, 1, 0)$处的切平面方程.

解：曲面在点$(2, 1, 0)$处的切平面的法向量为 $\vec{n} = \{y, x, e^z + 1\}_{(2,1,0)} = \{1, 2, 2\}$，

所求的法平面方程为$1 \times (x-2) + 2 \times (y-1) + 2(z-0) = 0$，即 $x + 2y + 2z = 4$

8．求椭球面$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$上平行于平面$x - y + 2z = 0$的切平面方程.

解：设点$M(x_0, y_0, z_0)$为切点，切平面的法向量为 $\vec{n} = \{x_0, 2y_0, z_0\}$

则切平面的一般方程为 $x_0 x + 2y_0 y + z_0 z + D = 0$

由于点M既在切平面上又在椭球面上，故有

$$\begin{cases} x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 + D = 0 \\ x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$$，解得：$D = -1$

由于切平面平行于已知平面，因而$\dfrac{x_0}{1} = \dfrac{2y_0}{-1} = \dfrac{z_0}{2}$

解方程组$\begin{cases} \dfrac{x_0}{1} = \dfrac{2y_0}{-1} = \dfrac{z_0}{2} \\ x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$ 得：$x_0 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{22}}$，$y_0 = \mp\dfrac{1}{\sqrt{22}}$，$z_0 = \pm\dfrac{4}{\sqrt{22}}$

故所求的切平面方程为 $\pm\dfrac{2}{\sqrt{22}}x \mp \dfrac{2}{\sqrt{22}}y \pm \dfrac{4}{\sqrt{22}}z - 1 = 0$

即 $x-y+2z\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}=0$

9．求曲面 $z=2x^2+4y^2$ 在点 $(1,1,6)$ 处的切平面及法线方程.

解：设曲面在点 $(1,1,6)$ 处的切平面的法向量为 $\vec{n}=\{4x,8y,-1\}_{(1,1,6)}=\{4,8,-1\}$，

故所求的切平面方程为 $4(x-1)+8(y-1)-(z-6)=0$，即 $4x+8y-z-6=0$，

所求法线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-6}{-1}$

10. 求由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

解：曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$，

此曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的法向量

$$\vec{n}=\{6x,4y,6z\}_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\},$$

所以单位法向量为 $\vec{n}^0=\left\{0,\dfrac{2}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{15}}\right\}$ 或 $\vec{n}^0=\left\{0,\sqrt{\dfrac{2}{5}},\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right\}$

11．证明：曲面 $xyz=c^3$（c 是常数）上任意点处的切平面在各坐标轴上的截距之积为定值.

证明：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任一点，则 $x_0y_0z_0=c^3$，

过 M_0 的切平面的法向量为 $\vec{n}=\{y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0\}$，

过 M_0 的切平面方程为 $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$，

即 $$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3c^3,$$

该切平面在三个坐标轴的截距为 $\dfrac{3c^3}{y_0z_0}$，$\dfrac{3c^3}{x_0z_0}$，$\dfrac{3c^3}{x_0y_0}$，

所以截距之积为 $\dfrac{3c^3}{y_0z_0}\cdot\dfrac{3c^3}{x_0z_0}\cdot\dfrac{3c^3}{x_0y_0}=27c^3$

12．证明：曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任意点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为常数.

证明：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任一点，则 $\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$，

过 M_0 的切平面的法向量为 $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}\right\}$，

过 M_0 的切平面方程为 $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\dfrac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$，

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}\ ,$$

该切平面在三个坐标轴的截距为 $\sqrt{ax_0}$，$\sqrt{ay_0}$，$\sqrt{az_0}$

所以截距之和为 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$

13．证明：曲面 $xy=z^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=9$ 正交（即交线上任一点处两个曲面的法向量互相垂直）

证明： 设 $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ 是两曲面交线上的任一点，令

$$F(x,\,y,\,z)=xy-z^2$$

$$G(x,\,y,\,z)=x^2+y^2+z^2-9$$

则在点 M_0 处两曲面的法向量分别为

$$\overrightarrow{n_1}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}\big|_{M_0}=\{y_0,\,x_0,\,-2z_0\}$$
$$\overrightarrow{n_2}=\{G'_x,G'_y,G'_z\}\big|_{M_0}=\{2x_0,\,2y_0,\,2z_0\}$$

由于 M_0 在曲面 $xy=z^2$ 上，故有 $x_0y_0={z_0}^2$

所以 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2x_0y_0+2x_0y_0-4z_0^2=4(x_0y_0-z_0^2)=0$

故 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$，即两个曲面正交.

14．在曲面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上求一点，使曲面在此点的的切平面平行于直线 $\frac{x-3}{4}=\frac{y-6}{5}=\frac{z+1}{8}$ 和 $x=y=z$.

解：设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，两条已知直线的方向向量为 $\vec{s}_1=\{4,5,8\}$，$\vec{s}_2=\{1,1,1\}$

由题意点 M 为切点，M 处曲面的法向量为 $\vec{n}=\{6x_0,2y_0,2z_0\}$，

记 $\vec{m}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{-3,4,-1\}$

由于切平面平行于两条已知直线，即 $\vec{m}\,//\,\vec{n}$，因而 $\frac{6x_0}{-3}=\frac{2y_0}{4}=\frac{2z_0}{-1}$ (1)

由于点 M 在曲面上，因而 $3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16$ (2)

解方程(1)、(2)得：$x_0=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$，$y_0=\mp\frac{8}{\sqrt{5}}$，$z_0=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

故所求点为 $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\mp\frac{8}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

15．在曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=z_0\ (z_0>0) \end{cases}$ 上每一点作抛物面 $z=x^2+y^2$ 的法线，证明这些法线形成一个锥面.

分析: 欲证明所有法线形成一个锥面，只要证明所有法线都通过某个定点（即锥面的顶点），注意到题中的 z_0 为已知的定数。

证明：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线上的任一点，则抛物面在点 M_0 处的法向量

$$\vec{n}=\{2x_0,2y_0,-1\}$$

因而法线方程为 $\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=\frac{z-z_0}{-1}$

点 $(0,0,\frac{1}{2}+z_0)$ 满足法线方程，即所有法线都通过定点 $(0,0,\frac{1}{2}+z_0)$，故所有法线形成一个以 $(0,0,\frac{1}{2}+z_0)$ 为顶点，以已知曲线为准线的圆锥面。

注：点$\left(0,0,\frac{1}{2}+z_0\right)$的确定：欲证明所有法线形成一个锥面，即锥面的顶点过每一条法线，

因而顶点的竖坐标必为$z=a+z_0$，即$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{2y_0}=-a$，由$x_0, y_0$的任意性，解得

$x=0$，$y=0$，$a=\frac{1}{2}$（或直接令$x=0$，得$y=0$，$z=\frac{1}{2}+z_0$）.