习题 7.8(P91)

1．求下列函数的极值点与极值.

(1) $z = x^2 + (y-1)^2$

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$，　$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-1)$，　令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$，得驻点 $(0,1)$.

$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)} = 2$，$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,1)} = 0$，$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)} = 2$

因为 $AC - B^2 = 4 > 0$，$A > 0$，故 $(0,1)$ 为极小值点，极小值 $z(0,1) = 0$

(2) $z = xy(a-x-y)$

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = y(a-2x-y)$，　$\frac{\partial z}{\partial y} = x(a-2y-x)$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$，得驻点 $(0,0)$，$(0,a)$，$(a,0)$，$\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$

当 $a = 0$ 时，只有一个驻点 $(0,0)$，当 $a \neq 0$ 时，有四个驻点，

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$，$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y$，$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$

点 $(0,0)$ 处，$A = 0,\quad B = a,\quad C = 0,\quad AC - B^2 = -a^2 < 0$，故 $(0,0)$ 不是极值点；

点 $(0,a)$ 处，$A = -2a,\quad B = -a,\quad C = 0,\quad AC - B^2 = -a^2 < 0$，故 $(0,a)$ 不是极值点；

点 $(a,0)$ 处，$A = 0,\quad B = -a,\quad C = -2a,\quad AC - B^2 = -a^2 < 0$，故 $(a,0)$ 不是极值点；

点 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ 处，$A = -\frac{2}{3}a,\quad B = -\frac{a}{3},\quad C = -\frac{2}{3}a,\quad AC - B^2 = \frac{a^2}{3} > 0$，故 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ 是极值点；且当 $a > 0$ 时（此时 $A < 0$），是极大值点，当 $a < 0$ 时（此时 $A > 0$），是极小值点

综上所述，当 $a > 0$ 时，有极大值 $z(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{27}$；当 $a < 0$ 时，有极小值 $z(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{27}$

(3) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)$，　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}(2y+2)$，

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得驻点 $(\dfrac{1}{2},-1)$.

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(\frac{1}{2},-1)}=4e^{2x}(x+y^2+2y+1)\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e,$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},-1)}=4e^{2x}(y+1)\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=0,\qquad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e^{2x}\Big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e$$

因为 $AC-B^2=4e^2>0$，$A>0$，故 $(\dfrac{1}{2},-1)$ 为极小值点，极小值 $z(\dfrac{1}{2},-1)=-\dfrac{e}{2}$.

2．求 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

解：解法 1：方程两端分别对 x、y 求导：

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad(1),\qquad 2y+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad(2)$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解得：$x=1$，$y=-1$，代入原方程得 $z=6$ 或 $z=-2$

即得到两个驻点：$M(1,-1,6)$，$N(1,-1,-2)$

由(1)、(2) 整理得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-1}{2-z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y+1}{2-z}$，

故 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{(2-z)-(x-1)\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(2-z)^2}$，　　$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{-(x-1)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(2-z)^2}$，

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(2-z)-(y+1)\left(-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2-z)^2}$$

点 M 处，$A=-\dfrac{1}{4}$，$B=0$，$C=-\dfrac{1}{4}$，$AC-B^2=\dfrac{1}{16}>0$，且 $A<0$，故 $z=6$ 是极大值；

点 N 处，$A=\dfrac{1}{4}$，$B=0$，$C=\dfrac{1}{4}$，$AC-B^2=\dfrac{1}{16}>0$，且 $A>0$，故 $z=-2$ 是极小值；

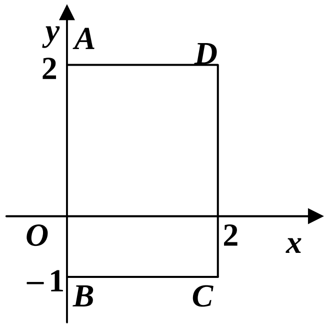
解法 2：将方程配方得 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$

这是球心在$(1,-1,2)$，半径为4的球面方程，因此当$x=1$，$y=-1$时，$z=2\pm 4$，

即极大值$z=6$，极小值$z=-2$

3. 求下列函数在指定区域上的最大值与最小值.

(1) $z=x^3+y^3-3xy$，区域$D:0\le x\le 2$，$-1\le y\le 2$.



解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$，　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$，

令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得驻点$(1,1)$

如图，在AB上，$x=0$，代入函数得

$$z=y^3 \qquad (-1\le y\le 2)$$

令$\dfrac{dz}{dy}=3y^2=0$，得 $y=0$，故得点$(0,0)$；

在CD上，$x=2$，代入函数得$z=y^3-6y+8 \qquad (-1\le y\le 2)$

令$\dfrac{dz}{dy}=3y^2-6=0$，得 $y=\sqrt{2}$，故得点$(2,\sqrt{2})$；

在BC上，$y=-1$，代入函数得$z=x^3+3x-1 \quad (0\le x\le 2)$，

令$\dfrac{dz}{dx}=3x^2+3=0$，无解；

在AD上，$y=2$，代入函数得$z=x^3-6x+8 \quad (0\le x\le 2)$

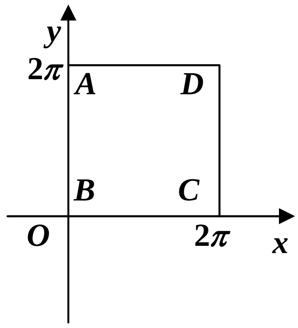
令$\dfrac{dz}{dx}=3x^2-6=0$，得 $x=\sqrt{2}$，故得点$(\sqrt{2},2)$；

$z(1,1)=-1$，$z(0,0)=0$，$z(2,\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$，$z(\sqrt{2},2)=8-4\sqrt{2}$，

$z_A=z(0,2)=8$，$z_B=z(0,-1)=-1$，$z_C=z(2,-1)=13$，$z_D=z(2,2)=4$

故$z_{\max}=13$，$z_{\min}=-1$

(2) $f(x, y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ ，区域 $D: 0 \le x \le 2\pi$， $0 \le y \le 2\pi$.



解： $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos x+\cos(x+y)$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos y+\cos(x+y)$，

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，即 $\begin{cases}\cos x+\cos(x+y)=0\\ \cos y+\cos(x+y)=0\end{cases}$ (*)

得 $\cos x=\cos y$，即 $y=x$， 或 $y=2\pi-x$，

若 $y=x$， 代入(*)式得 $\cos x+\cos 2x=0$，亦即 $\cos x+2\cos^2 x-1=0$，

得 $\cos x=-1$，或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$；

若 $y=2\pi-x$，代入(*)式得 $\cos x+\cos 2\pi=0$，即 $\cos x=-1$

故解得得 $x=\pi$，或 $x=\dfrac{\pi}{3}$、 $x=\dfrac{5\pi}{3}$，

从而得驻点 (π,π)、$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$、$(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3})$

而 $f(\pi,\pi)=0$， $f(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$， $f(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

如图，在 AB 上， $x=0$，代入函数得 $f=2\sin y$ $(0\le y\le 2\pi)$

最大值为 $f(0,\dfrac{\pi}{2})=2$，最小值为 $f(0,\dfrac{3\pi}{2})=-2$

在 CD 上， $x=2\pi$，代入函数得 $f=2\sin y$ $(0\le y\le 2\pi)$

最大值为 $f(2\pi,\dfrac{\pi}{2})=2$，最小值为 $f(2\pi,\dfrac{3\pi}{2})=-2$

在 BC 上， $y=0$，代入函数得 $f=2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$，

最大值为 $f(\dfrac{\pi}{2},0)=2$，最小值为 $f(\dfrac{3\pi}{2},0)=-2$

在 AD 上， $y=2\pi$，代入函数得 $z=2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$

最大值为 $f(\frac{\pi}{2}, 2\pi) = 2$，最小值为 $f(\frac{3\pi}{2}, 2\pi) = -2$

将驻点处的函数值与各个边界上的最大值最小值比较得 $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$， $f_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(3) $f(x, y) = e^{-xy}$ ，区域 $D: x^2 + 4y^2 \le 1$.

解：$\frac{\partial f}{\partial x} = -ye^{-xy}$，$\frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{-xy}$， 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$，得驻点 $(0, 0)$

在边界 $x^2 + 4y^2 = 1$ 上， $f(x, y) = e^{\pm y\sqrt{1-4y^2}} \overset{\Delta}{=} g(y)$， $|y| \le \frac{1}{2}$

由于 $g(y)$ 与 $h(y) = \ln^2 g(y) = y^2(1-4y^2) = y^2 - 4y^4$ 有相同的极值点，又

$h'(y) = 2y(1-8y^2)$，令 $h'(y) = 0$，得 $y = 0$， $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

当 $y = 0$ 时， $x = \pm 1$，当 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时， $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时， $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

由于 $f(0, 0) = 1$， $f(\pm 1, 0) = 1$， $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$

(4) $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $y = 4$ 所围的有界闭区域.

解： $f'_x(x, y) = y - 1$， $f'_y(x, y) = x - 1$

令 $f'_x(x, y) = 0$， $f'_y(x, y) = 0$，解得 $x = 1$， $y = 1$，得驻点 $(1, 1)$

在边界线 $y = x^2, x \in [-2, 2]$ 上， $f(x, y) = 1 + x^3 - x - x^2 \overset{\Delta}{=\!=} g(x)$

令 $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1) = 0$，得驻点 $x = 1$， $x = -\frac{1}{3}$

当 $x = 1$ 时， $y = 1$；当 $x = -\frac{1}{3}$ 时， $y = \frac{1}{9}$，而当 $x = \pm 2$ 时， $y = 4$

在边界线 $y=4, x\in[-2,2]$ 上， $f(x,y)=1+4x-x-4=3(x-1)\overset{\Delta}{=\!=}h(x)$

$h'(x)=3\neq 0$，无驻点，而当 $x=\pm 2$ 时， $y=4$

故比较 $f(1,1)=0$， $f(-\frac{1}{3},\frac{1}{9})=\frac{32}{27}$， $f(2,4)=3$， $f(-2,4)=-9$ 得

$f_{\max}(x,y)=f(2,4)=3$， $f_{\min}(x,y)=f(-2,4)=-9$

4．在 xoy 面上求一点，使它到 x 轴、 y 轴及直线 $x+2y+6=0$ 的距离的平方和最小.

解：设 $M(x,y)$ 为 xoy 面上的一点，则 M 到 x 轴、 y 轴及直线的距离分别为 $|y|$、 $|x|$、

$\frac{1}{\sqrt{5}}|x+2y+6|$，由题意，求 $z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y+6)^2$ 的最小值.

令 $z'_x=2x+\frac{2}{5}(x+2y+6)=0$， $z'_y=2y+\frac{4}{5}(x+2y+6)=0$，

解得唯一驻点 $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$，由问题的实际意义知： z 必有最小值，故点 $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$ 为所求的点，而 $z_{\min}=z(-\frac{3}{5},\ -\frac{6}{5})=\frac{666}{125}$.

5．求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

解：解法 1：设 (x,y) 是抛物线上任一点，它到已知直线的距离为

$$d=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$$

为简便另设目标函数 $f(x,y)=(x-y-2)^2$，将原问题转化为在条件 $y=x^2$ 下求 $f(x,y)$ 的最小值问题.

令 $F(x,y)=(x-y-2)^2+\lambda(x^2-y)$

则由$\begin{cases} F'_x = 2(x-y-2)+2\lambda x = 0 \\ F'_y = -2(x-y-2)-\lambda = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$ 解得驻点：$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$

由问题的实际意义知：d 确有最小值，因而 $f(x,y)$ 确有最小值，又 $F(x,y)$ 只有惟一的驻点，在点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$处 d 取得最小值：$d_{\min} = d\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{7}{4\sqrt{2}}$

解法 2：抛物线上任一点处切线斜率为 $y' = 2x$，直线 $x-y-2=0$ 的斜率为 $k=1$，令 $2x=1$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$，代入 $y=x^2$ 得 $y=\dfrac{1}{4}$，故当 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{4}$ 时，抛物线上点到直线的距离最短，且这个最短距离为 $d_{\min} = \dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{7}{4\sqrt{2}}$

6．在所有对角线为 $2\sqrt{3}$ 的长方体中，求体积最大的长方体.

解：设长方体的长、宽、高分别为 x， y， z，体积为 V，则

目标函数为 $V = xyz$

约束条件为 $x^2+y^2+z^2 = (2\sqrt{3})^2 \quad (x>0, y>0, z>0)$

令 $F(x,y,z) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-12)$

由方程组$\begin{cases} F'_x = yz + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = xz + 2\lambda y = 0 \\ F'_z = xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 12 \end{cases}$ 解得 $x=y=z=2$

由问题的实际意义知：V 确有最大值，又 $F(x,y,z)$ 只有惟一的驻点 $x=y=z=2$，即长方体的长、宽、高都为 2 时，其体积最大.

7．做一个容积为 $1m^3$ 的有盖圆柱形铁桶，如何选取尺寸才能使所用的材料最省？

解：设铁桶底半径为 r，高为 h，其表面积为 S，则 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

由题意 $\pi r^2 h = 1$，故有 $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

因而 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$

令 $\dfrac{dS}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2}{r^2} = 0$ 得惟一解 $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$，由此得 $h = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$

由问题的实际意义知：S 确有最小值，又 S 只有惟一的驻点 $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$，故当 $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$，

$h = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$ 时，S 取得最小值，即所用的材料最省.

8．在抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 所截成的椭圆上，求到原点的最长和最短的距离.

解：设 (x, y, z) 是椭圆上任一点，它到原点的距离为 d，则 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

为简便另设目标函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 将原问题转化为在条件 $z = x^2 + y^2$

及 $x + y + z = 1$ 下求 $f(x, y, z)$ 的最值问题.

令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1)$

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 & (`1) \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - z = 0 & (4) \\ x + y + z - 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ $(1 + \lambda)(x - y) = 0$ 得 $\lambda = -1$ 或 $x = y$

若 $\lambda = -1$，由 (1) 得 $\mu = 0$，代入 (3) 得 $z = -\dfrac{1}{2}$，与 (4) 矛盾，故 $\lambda \neq -1$，

因而必有 $x = y$，代入 (4)、(5) 得 $2x^2 - z = 0$，$2x + z - 1 = 0$

解得 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$，$z = 2 \mp \sqrt{3}$

得两个驻点 $M\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$，$N\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right)$

$$d_M=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$$

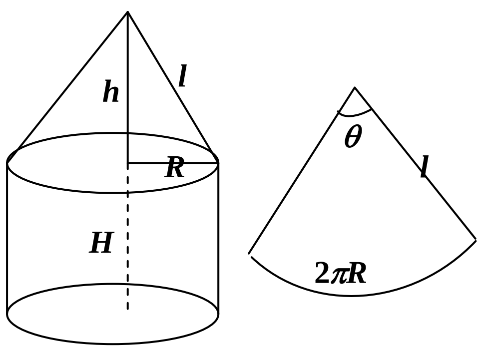
$$d_N=\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$$

由问题的实际意义知：d 确有最大值与最小值，又 d 恰有两个驻点，因而 d 的最大值为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 、最小值为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

9．一圆柱形帐幕，其顶为圆锥形，体积一定，证明：柱的半径 R 、高 H 、圆锥形高 h 满足 $R:H:h=\sqrt{5}:1:2$ 时帐幕所用的材料最省.

解：设帐幕所用布为 A，圆锥形侧面所展开的扇形圆心角为 θ 、母线为 l，

则 $l\theta=2\pi R$， $l=\sqrt{h^2+R^2}$，



故 $A=2\pi RH+\dfrac{1}{2}l^2\theta$

$$=2\pi RH+\pi R\sqrt{h^2+R^2}$$

据题意，帐幕所围立体体积

$$V=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h=k \quad （k\text{ 为常数}）$$

设 $F(R,H,h)=2\pi RH+\pi R\sqrt{h^2+R^2}+\lambda(\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h-k)$

令
$$\begin{cases}F'_R=2\pi H+\pi\sqrt{h^2+R^2}+\dfrac{\pi R^2}{\sqrt{h^2+R^2}}+\lambda(2\pi RH+\dfrac{2}{3}\pi Rh)=0 & (1)\\ F'_H=2\pi R+\lambda\pi R^2=0 & (2)\\ F'_R=\dfrac{\pi Rh}{\sqrt{h^2+R^2}}+\lambda\cdot\dfrac{1}{3}\pi R^2=0 & (3)\\ \pi R^2H+\dfrac{1}{3}\pi R^2h=k & (4)\end{cases}$$

由(2)得 $\lambda=-\dfrac{2}{R}$，代入(3)得 $\dfrac{R}{h}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(1)式两端同除 πh，并将 $\lambda=-\dfrac{2}{R}$ 代入(1)式得

$$2\frac{H}{h}+\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}+\frac{\left(\frac{R}{h}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{h}\right)^2}}-2\left(2\frac{H}{h}+\frac{2}{3}\right)=0$$

将 $\frac{R}{h}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 代入上式得 $\frac{H}{h}=\frac{1}{2}$，

故有 $R:H:h=\sqrt{5}:1:2$，由问题的实际意义知，A 有最小值，又只有唯一的驻点，故当 $R:H:h=\sqrt{5}:1:2$ 时 A 最小.

10. 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 上点的 z 坐标的最小值和最大值.

分析：所求点既在曲面 $z=x^2+2y^2$ 上。也在曲面 $z=6-2x^2-y^2$，因而这是一个条件极值问题，为了找出约束条件，将曲线方程改写为曲面与柱面方程的交线.

解：将曲线方程改写为 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ x^2+2y^2=6-2x^2-y^2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

故　　目标函数为 $z=x^2+2y^2$

　　　约束条件为 $x^2+y^2-2=0$

设拉格朗日函数 $F=x^2+2y^2+\lambda(x^2+y^2-2)$

则令 $\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x=2x(1+\lambda)=0 \\ F'_y=4y+2\lambda y=2y(2+\lambda)=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \lambda=-1 \\ y=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$，$\begin{cases} \lambda=-2 \\ x=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

而 $z(0,\ \pm\sqrt{2})=4$，$z(\pm\sqrt{2},\ 0)=2$

由问题的实际意义知：z 坐标必有最小值和最大值.

故 $z_{\max}=z(0,\ \pm\sqrt{2})=4$，$z_{\min}=z(\pm\sqrt{2},\ 0)=2$

11. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 M，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\vec{l}=\{1,-1,0\}$ 的方向导数最大.

解：设所求点为 $M(x,y,z)$，$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial f}{\partial z}=2z$，$\vec{l}^{\,0}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\}$，

故点 $\boldsymbol{M}$ 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$

设拉格朗日函数 $F=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

令 $\begin{cases} F_x'=1+2\lambda x=0 \\ F_y'=-1+2\lambda y=0 \\ F_z'=2\lambda z=0 \\ 2x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\mp\dfrac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$

由于有界闭区域上连续函数必有最大值与最小值

而 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故点 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$ 为所求的最大值点.