



2010 级《微积分 A》期末试卷(A)

班 级_____ 学 号_____ 姓 名_____

(注: 本试卷共 6 页, 十一个大题。请撕下试卷最后一张空白纸做草稿。)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得 分												
评阅 人												

一、填空 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 定积分 $\int_{-1}^1 \frac{1-x^4 \arcsin x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$ _____.

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y^2 f(x) + xf(y) = x^2$ 确定, 其中 $f(x)$ 是 x 的可微函数, 则

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 已知 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = x^2 + C$, 则 $f(x) =$ _____;

4. 微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ 满足初始条件 $y(\pi) = 1$ 的特解为_____.

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) =$ _____.

二、(9 分) 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

三、(9 分) 讨论函数 $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ 的单调性, 凹凸性, 并求其极值、曲线的拐点及渐近线.

四、(9 分) 证明等式 $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $a > 0$.

并计算 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3 \sin(x^2) dx$.

五、(9 分) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + x$ 的通解.

六、(9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1 - \sin 2t)^{\frac{1}{t}} dt}{(e^x - 1) \ln(1 + x)}$.

七、(9 分) 记曲线段 $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0, 0 \leq x \leq 1$) 与直线 $x = 0, x = 1$ 及 x 轴所围的平面图形为 D . (1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求图形 D 分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

八、(9 分) 设曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = (t-1)e^t \\ y = 1-t^4 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 及曲线 C 在参数 $t=0$ 对应点处的曲率半径.

九、(9 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性,

并求 $f'(x)$.

十、(9 分) 跳伞运动员从高空自飞机上跳下，经若干秒后打开降落伞。开伞后的运动过程中所受空气阻力为 kv^2 ，其中常数 $k > 0$ ， v 为下落速度，设人与伞的质量共为 m ，且不计空气浮力。试证明：只要打开降落伞后有足够的降落时间才着地，则降落的速度将近似地等于 $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ 。

十一、(9 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{1-x} f(x) dx$ ，

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$ 。