10.4 幂级数

研究级数的主要目的是用级数形式表示函数，为此要讨论函数项级数。

上页 下页 返回

1. 函数项级数的概念

(1). 定义:

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在D上的函数,

则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为在定义域D上的函数项无穷级数. 简称级数

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

(2). 收敛点与收敛域:

如果 $x_0 \in D$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$所有收敛点的集合称为收敛域,

所有发散点的全体称为发散域.

(3). 和函数:

在收敛域上, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和是 x 的函数 $s(x)$, 称 $s(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

即 $s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$

余项 $R_n(x) = s(x) - s_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad (x\text{在收敛域上})$$

上页 下页 返回

例如：几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

其收敛域为$(-1,1)$，和函数为$S(x) = \dfrac{1}{1-x}$，

即 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ 其中 $x \in (-1,1)$.

其它形式的几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2} \quad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{2(1-2x)} \quad x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

2. 幂级数及其收敛半径

(1). 定义: 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为幂级数.

约定 $(x-x_0)^0 = 1$, 当 $x = x_0$ 时也成立.

当 $x_0 = 0$ 时, 级数形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

其中 a_n 为幂级数系数.

以后主要讨论 $x_0 = 0$ 的幂级数。(令 $t = x - x_0$,

则得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$)

上页 下页 返回

(2).收敛性:

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

当$|x| < 1$时,收敛; 当$|x| \geq 1$时,发散;

收敛域 $(-1, 1)$; 发散域 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

该例提示:

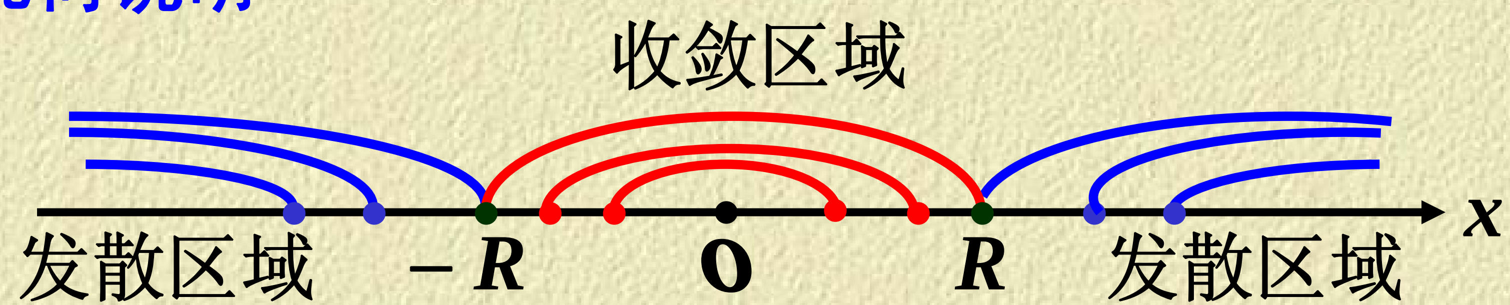
幂级数的收敛域是一个 区间?

定理 (Abel 定理)

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛, 则它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切 x处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散, 则它在满足不等式$|x| > |x_0|$的一切$x$处发散.

几何说明



推论

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个完全确定的正数R存在, 它具有下列性质:

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时,幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定义：满足上述性质的正数R称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径。开区间$(-R, R)$叫做幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间。

幂级数收敛域：$(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$.

规定　(1) 幂级数只在$x = 0$处收敛,

$R = 0$,　　收敛域$x = 0$;

(2) 幂级数对一切 x都收敛,

$R = +\infty$，收敛域$(-\infty, +\infty)$.

问题　如何求幂级数的收敛半径?

上页　下页　返回

系数比值法

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ (或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$)

(1) 则当$0 < l < +\infty$时, $R = \frac{1}{l}$;

(2) 当$l = 0$时, $R = +\infty$;

或 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

(3) 当$l = +\infty$时, $R = 0$.

上页 下页 返回

例1　求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n.$$

解

$$(1)\because l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\quad \therefore R=1$$

当$x=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛

当$x=-1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，该级数发散

故收敛域是$(-1,1]$.

上页　下页　返回

例1　求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n.$$

---

(2) $\because l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty,$

$\therefore R=0,$

级数只在$x=0$处收敛,

上页　下页　返回

例1　求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$(3)\quad \because l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\ \therefore R=+\infty,$$

收敛域$(-\infty,+\infty)$.

由级数收敛的必要条件可得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

上页　下页　返回

例1　求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

---

(4) $\because l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2$　$\therefore R=\frac{1}{2}$,

即 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 收敛，　$x\in(0,1)$收敛,

当$x=0$时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,　　发散

当$x=1$时，　级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,　　收敛

故收敛域为$(0,1]$.

上页　下页　返回

例 2　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

解　$\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 缺少偶次幂的项

非标准幂级数

应用比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$,　即$|x|<\sqrt{2}$时,　级数收敛,

上页　下页　返回

例2　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域.

当$\frac{1}{2}x^2>1$,　即$|x|>\sqrt{2}$时,　级数发散,

当$x=\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$,　级数发散,

当$x=-\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$,　级数发散,

原级数的收敛域为　$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径 .

解: 级数缺少奇次幂项, 不能直接应用系数比值法.

非标准幂级数 令 $x^2 = t$ 化为标准幂级数

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$$

例2可以用此法吗

?

$\therefore$ 关于 t 的幂级数的收敛半径 $R' = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 关于 x 的幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{2}$

上页 下页 返回

例 4 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$的收敛域。

解　令$t=x-1$，级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}t^n$.

由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\cdot n2^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$,

得收敛半径$R=2$,

知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}t^n$在$(-2,2)$内绝对收敛.

由$t=x-1$，解不等式$-2<x-1<2$,

得$-1<x<3$.

上页 下页 返回

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$在$(-1,3)$内绝对收敛。

当$x=-1$，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，此交错级数收敛.

当$x=3$， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$， 调和级数发散.

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n}$的收敛域为$[-1,3)$.

3. 幂级数的运算

[1]. 代数运算性质:

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sigma(x)$, 它们的

收敛半径各为 R_1和R_2 , $\quad R = \min\{R_1, R_2\}$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = S(x) \pm \sigma(x)$$

$$x \in (-R, R)$$

注：收敛半径未必是**R**,应大于等于**R**

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x\in(-R,R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1} + \cdots + a_n\cdot b_0)$$

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

上页 下页 返回

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x +$$

$$(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots +$$

$$(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n = S(x)\cdot\sigma(x)$$

[2]. 和函数的分析运算性质:

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域内连续,

若在端点收敛，则在端点单侧连续.

(2)　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛域内可积,且在收敛域内可逐项积分.

即$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(收敛半径不变)

上页　下页　返回

(3)　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$(收敛半径不变)

由幂级数的分析运算(2)、(3)知：幂级数逐项积分或逐项求导后得到的新级数与原级数的收敛半径相同，但收敛域可能改变。故得到新级数后，要讨论收敛区间端点处的敛散性。

上页　下页　返回

4. 求幂级数的和函数

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$及$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$都是几何级数，其和函数$s(x)$可直接求出：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1, 1)$$

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$通过代数变形、逐项积分、逐项求导得到的新级数为几何级数，则可求出新级数的和函数$s(x)$，再通过还原、求导、积分求出原级数的和函数。

在介绍了更多的幂级数求和公式后，求和函数时会更加方便。

上页 下页 返回

例 5(书中例 6）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数。

并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$的和。

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的收敛半径为 1，收敛域为$[-1,1)$。

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则$S(x)$在$[-1,1)$连续。

由$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \quad |x|<1$

得$\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$

$S(x)-S(0)=-\ln(1-x)$

由$S(0)=0$，得$S(x)=-\ln(1-x), \quad |x|<1$

例 5（书中例 6）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数。

并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$的和。

在$x=-1$处，$S(x)$连续，$-\ln(1-x)$也连续，因此上式在$x=-1$处也成立。

即：$S(x)=-\ln(1-x)\quad x\in[-1,1)$

$\therefore S(-1)=-\ln 2$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$

得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$

令$x=\frac{1}{2}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$得：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$

上页 下页 返回

例 6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

解：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径为 1，收敛域为 $[-1,1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，则 $S(x)$ 在 $[-1,1)$ 连续。

先把级数变为例 4 的形式，并用其结果。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{-1}{x}\ln(1-x)$$

例 6　$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

上式对 $x \in [-1,1)$，且 $x \neq 0$ 成立。

当 $x = 0$ 时， $s(x)$ 连续，得

$$S(0) = \lim_{x \to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln(1-x)\right] = 1$$

综上述，得

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x) & -1 \le x < 0, 0 < x < 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

例 7　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解　考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛区间(-1,1),

则$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，　$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

$$\int_0^x\frac{S(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

例 7　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

解　考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛区间(-1,1),

则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$,　$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

$$\int_0^x\frac{S(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

例7　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$的和.

另解

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$$

$$=x(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

常用已知和函数的幂级数

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};$$

$$(2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a x^{2n} = \frac{a}{1-x^2};$$

$$|x| < 1$$

$$(4)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x); \qquad x \in (-1,1]$$

$$(5)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x;$$

$$(6)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x;$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

上页 下页 返回

例 8　求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的收敛域及和函数.

解　由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^2+1}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{2(n+1)(n^2+1)}=0$$

知级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

$$=t\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^{n+1}}{n!}\right)'\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n=t\left[t\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\right)\right]'+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

$$\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\therefore S(t)=t(te^t)'+(e^t-1)$$

$$=t^2e^t+te^t+e^t-1$$

$$S(x)=\frac{1}{4}x^2e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}-1$$

例 9　试求$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(3n+2)x^n\right]$的收敛域及和函数。

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)+2}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+2}=1$　即 $R=1$，

$x=\pm1$时，$\lim_{n\to\infty}u_n\neq0$，即收敛域为$(-1,1)$。

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(3n+2)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(3n+3-1)x^n$$

$$=3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

例9　试求$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(3n+2)x^n\right]$的收敛域及和函数。

$$S(x)=3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n,$$

$$=3S_1(x)-S_2(x)$$

$$\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$$

或 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

例9　试求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(3n+2)x^{n}\right]$ 的收敛域及和函数。

或 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

$$S_2(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$\therefore\ S(x)=3S_1(x)-S_2(x)=\frac{3x(2-x)}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{x(5-2x)}{(1-x)^2}\qquad x\in(-1,1)$$

上页　下页　返回

小结

1.函数项级数的概念:

2.幂级数的收敛性: 收敛半径R

3.幂级数的运算: 分析运算性质

思考题

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变？

思考题解答 不一定.

例 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$,

$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$, 它们的收敛半径都是1,

但它们的收敛域各是 $[-1,1], [-1,1), (-1,1)$

作业：

P253： 1(2)(4)(6)(7).   2偶.   3.