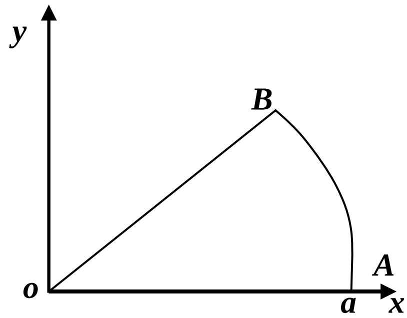
习题 9.8(P226)

1. 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$，$L$ 是由半圆 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(x>0)$，直线 $y=x$，及 x 轴围成的闭曲线.

解: L 如图



$\overline{OA}$： $y=0 \quad (0\le x\le a)$；

$\overset{\frown}{AB}$： $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{4}$

$\overline{BO}$： $y=x \quad (0\le x\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}a)$

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl=\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl+\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl+\int_{BO} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$$

$$=\int_0^a e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\cdot a dt+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}dx=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$$

2. 计算 $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，$L$ 为曲线 $y=1-|1-x|$ $(0\le x\le 2)$，取 x 增大的方向.

解: $y=1-|1-x|\ (0\le x\le 2)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$,

设 L_1 为直线段 $y=x$ $(0\le x\le 1)$，L_2 为直线段 $y=2-x$ $(1<x\le 2)$，则

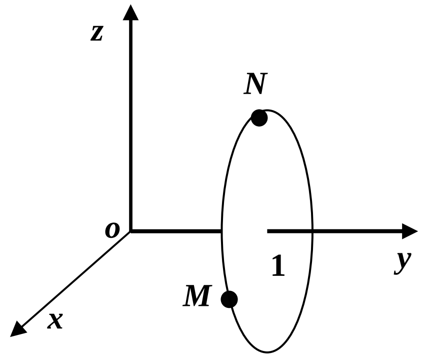
$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\int_{L_1}+\int_{L_2}$$

$$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 2(2-x)^2dx=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

3. 有一力场，力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比，方向垂直于 z 轴且朝向 z 轴，当一质点沿圆周

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=1 \\ z=\sin t \end{cases}$$

从点 $M(1,1,0)$ 运动到点 $N(0,1,1)$ 时，求力所作的功.



解: $\overset{\frown}{MN}$ 如图所示，由题意，在圆周上点 $P(x, y, z)$

处，质点在该点处力的大小 $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$，

$\{-x, -1, 0\}$是与 $\vec{F}$ 同方向的向量，则

$$\vec{F}^0 = \left\{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, 0\right\}$$

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right|\vec{F}^0 = \left\{-\frac{kx}{x^2+1}, -\frac{k}{x^2+1}, 0\right\},$$

$$W = \int_{\overset{\frown}{MN}} -\frac{kx}{x^2+1}dx - \frac{k}{x^2+1}dy + 0dz \xlongequal[\therefore dy=0]{\because y=1} \int_{\overset{\frown}{MN}} -\frac{kx}{x^2+1}dx$$

$$= -k\int_1^0 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{k}{2}\ln 2$$ （k 为比例系数）

4. 已知 $f(0)=1$，$f(\frac{1}{2})=e^{-1}$，$f''(x)$ 连续，试确定 $f(x)$，使积分

$\int_{\overset{\frown}{AB}}[f'(x)+6f(x)]ydx + f'(x)dy$ 与路径无关.

解: 设 $X = f'(x)+6f(x)]y,\qquad Y = f'(x)$

由于积分与路径无关，因而有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$，即 $f''(x) = f'(x)+6f(x)$

$f''(x) - f'(x) - 6f(x) = 0$ （二阶常系数线性齐次微分方程）

由特征根法得方程的通解为 $f(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$

代入初始条件 $f(0)=1$，$f(\frac{1}{2})=e^{-1}$，解得 $C_1 = 0$，$C_2 = 1$，故 $f(x) = e^{-2x}$

5. 求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

解： 设 $X = e^x \sin y,\quad Y = e^x \cos y$，则有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$，积分与路径无关.

设 Γ 为直线段 $\Gamma: y = 0\ (0 \le x \le 2a)$，取 x 减小的方向.

D 为由 L 及 Γ 所围成的半圆.

$$I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$$

$$= \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y)dx + axdy$$

$$= \int_\Gamma e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y)dx + axdy$$

$$= 0 - \int_{L+\Gamma^-} b(x+y)dx + axdy - \int_\Gamma b(x+y)dx + axdy$$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{由格林}} -\iint_D (a-b)dxdy - \int_{2a}^{0} bxdx = -(a-b)\cdot(\text{半圆的面积}) + 2a^2 b$$

$$= -(a-b)\frac{\pi a^2}{2} + 2a^2 b = (\frac{\pi}{2} + 2)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$$

6..设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0) = 0$，求 $f(x)$.

解： 设 $X = [f(x) - e^x]\sin y,\quad Y = -f(x)\cos y$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = [f(x) - e^x]\cos y,\qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = -f'(x)\cos y$$

由题设条件积分与路径无关，则有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$，得

$-f'(x)\cos y = [f(x) - e^x]\cos y$，即 $f'(x) + f(x) = e^x$（一阶线性非齐次微分方程）

解得： $f(x) = e^{-\int dx}[\int e^x e^{\int dx} dx + C] = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + C)$

由 $f(0) = 0$，得 $C = -\frac{1}{2}$，故 $f(x) = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

7．选取 n，使 $\dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某函数 $u = u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

解：设 $X=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^n}$，$Y=\dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^n}$，则

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{-x^2-(1-2n)y^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}},\qquad \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{(1-2n)x^2+y^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

欲使 $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，必有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，

故得 $1-2n=-1$，即 $n=1$

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}+C=\int_1^x\frac{1}{x}dx+\int_9^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy+C$$

$$=\ln|x|\Big|_1^x+\left(\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\Bigg|_0^y+C=\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$$

8. 确定 λ 的值，使曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^4+4xy^3)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关，当 A 为 $(0,0)$，B 为 $(1,2)$ 时，求积分值.

解： 设 $X=x^4+4xy^3$，$Y=6x^{\lambda-1}y^2-5y^4$，则

$$\frac{\partial X}{\partial y}=12xy^2,\qquad \frac{\partial Y}{\partial x}=6(\lambda-1)x^{\lambda-2}y^2$$

由题设条件积分与路径无关，则有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，得 $\lambda=3$；

设 L_1 为直线段 $y=0\ (0\le x\le 1)$，取 x 增大的方向.

L_2 为直线段 $x=1\ (0\le y\le 2)$，取 y 增大的方向.

则 $\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=\int_{L_1}+\int_{L_2}$

$$=\int_0^1x^4dx+\int_0^2(6y^2-5y^4)dy=\frac{1}{5}-16=-\frac{79}{5}$$

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导数，计算 $\int_L\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，

L 是从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到 $B(1, 2)$ 的直线段.

解：设 $X = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}$, $\quad Y = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]$

由于 $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial Y}{\partial x}$，故积分与路径无关，

选择积分路径：L_1 为直线段 $y = \frac{2}{3}\ (1 \le x \le 3)$，取 x 减小的方向.

L_2 为直线段 $x = 1\ (\frac{2}{3} \le y \le 2)$，取 y 增大的方向.

$$\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}dx + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy = \int_{L_1} + \int_{L_2}$$

$$= \int_3^1 (\frac{3}{2} + \frac{2}{3} f(\frac{2}{3}x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 [f(y) - \frac{1}{y^2}]dy$$

$$\xlongequal[\text{令}y=\frac{2}{3}x]{\text{第1个积分}} -\frac{3}{2}\int_{\frac{2}{3}}^2 (\frac{3}{2} + \frac{2}{3} f(y)dy + \int_{\frac{2}{3}}^2 [f(y) - \frac{1}{y^2}]dy$$

$$= -\int_{\frac{2}{3}}^2 [\frac{9}{4} + \frac{1}{y^2}]dy = -4$$

10．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 为上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a, b)，终点为 (c, d)，记

$$I = \int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy$$

（1）证明：曲线积分 I 与路径无关.

(2)当 $ab = cd$ 时，求 I 的值.

解：(1) 设 $X = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}$, $\quad Y = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]$

由于 $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy) = \frac{\partial Y}{\partial x}$，故曲线积分 I 与路径无关；

(2) 法 1：

选择积分路径：L_1 为直线段 $y=b\ (\min(a,c)\le x\le \max(a,c))$，取 x 由 a 到 c 的方向.

L_2 为直线段 $x=c\ (\min(b,d)\le y\le \max(b,d))$，取 y 由 b 到 d 的方向.

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy=\int_{L_1}+\int_{L_2}$$

$$=\int_a^c[\frac{1}{b}+bf(bx)]dx+c\int_b^d[f(cy)-\frac{1}{y^2}]dy$$

$$\xlongequal[\text{令}cy=bx]{\text{第1个积分}} c\int_{\frac{ab}{c}}^{b}[\frac{1}{b^2}+f(cy)]dy+c\int_b^d[f(cy)-\frac{1}{y^2}]dy$$

$$=-c\int_b^{\frac{ab}{c}}[\frac{1}{b^2}+f(cy)]dy+c\int_b^d[f(cy)-\frac{1}{y^2}]dy$$

$$\xlongequal{ab=cd}-c\int_b^d[\frac{1}{b^2}+f(cy)]dy+c\int_b^d[f(cy)-\frac{1}{y^2}]dy$$

$$\xlongequal{ab=cd}-c\int_b^d[\frac{1}{b^2}+\frac{1}{y^2}]dy=\frac{c}{d}-\frac{cd}{b^2}\xlongequal{ab=cd}\frac{c}{d}-\frac{ab}{b^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

法 2：由于 $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$，故 $\frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]$ 为某个函数的全微分（积分与路径无关，只与起点与终点有关），令 $F'(u)=f(u)$

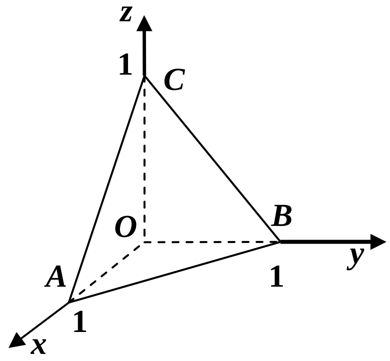
$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy$$

$$=\int_{(a,b)}^{(c,d)}[\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy]+[yf(xy)dx+xf(xy)]dy$$

$$=\int_{(a,b)}^{(c,d)}d(\frac{x}{y})+dF(xy)=\int_{(a,b)}^{(c,d)}d[\frac{x}{y}+F(xy)]=[\frac{x}{y}+F(xy)]\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}$$

$$=\frac{c}{d}+F(cd)-\frac{a}{b}-F(ab)\xlongequal{ab=cd}\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

11. 计算 $\oiint\limits_S xyzdS$， S 是由平面 $x=0$， $y=0$， $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围立体的边界面.



解：，如图：ΔABC 在 xoy 面上的

投影区域 D_{xy} 为三角形区域：

$x\ge 0$， $y\ge 0$， $x+y\le 1$；

$$\oiint\limits_S xyzdS$$

$$=\iint\limits_{\Delta ABC} xyzdS+\iint\limits_{\Delta OAB} xyzdS+\iint\limits_{\Delta OAC} xyzdS+\iint\limits_{\Delta OBC} xyzdS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy+0+0+0=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[x(1-x)y-xy^2]dy$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1-x)^3dx=\frac{\sqrt{3}}{120}$$

12. 求抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\le z\le 1)$ 的质量，而密度 ρ_A 等于该点到 xoy 坐标面的距离.

解： 设 $S: z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\le z\le 1)$， S 在 xoy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$，

由题意 $\rho=z$

$$m=\iint\limits_S zdS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}d\rho=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}d\rho$$

$$\xlongequal{令\sqrt{1+\rho^2}=t}\pi\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)t^2dt=\pi(\frac{4}{5}\sqrt{3}+\frac{2}{15})=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$$

13. 求密度为 ρ_A 的均匀锥面 $z=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ (z\le b)$ 对 z 轴的转动惯量.

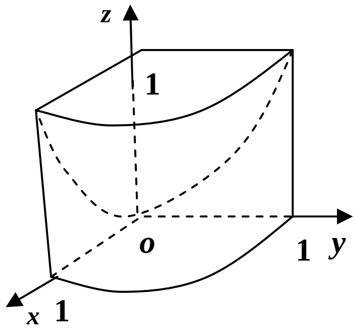
解： 设 $S: z=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$， S 在 xoy 面的投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

$$J_z = \iint_S (x^2+y^2)\rho_A dS = \rho_A \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}dxdy$$

$$=\frac{\rho_A}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi\rho_A a^3}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

14．计算 $\oiint_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$， S 为曲面 $z = x^2+y^2$， $x^2+y^2=1$ 和三个坐标面在第一卦限中所围立体的边界面，取外侧.

解：设 S 所围立体为 V， V 在 xoy 面的投影区域



$$D_{xy}: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$$

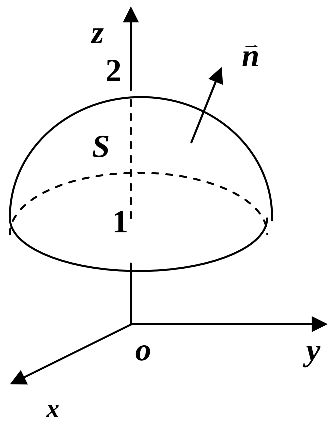
$$\oiint_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$$

$$=\iiint_V (z+x^2+y^2)dv$$

$$\underline{\underline{\text{柱坐标法}}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{\rho^2}(z+\rho^2)\rho dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{3}{2}\rho^5 d\rho = \frac{\pi}{8}$$

15．计算 $\iint_S (y^2-x)dydz + (z^2-y)dzdx + (x^2-z)dxdy$ ， S 为曲面 $z = 2-x^2-y^2\ (1\le z\le 2)$ 的上侧.

解：(利用高斯公式)：补面 $S_1: x^2+y^2\le 1, z=1$，取下侧；



$$\iint_S (y^2-x)dydz + (z^2-y)dzdx + (x^2-z)dxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}(y^2-x)dydz + (z^2-y)dzdx + (x^2-z)dxdy$$

$$-\iint_{S_1}(y^2-x)dydz + (z^2-y)dzdx + (x^2-z)dxdy$$

$$=\iiint_V -3dV - \iint_{S_1}(x^2-z)dxdy$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_1^{2-\rho^2}\rho\, dz + \iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2-1)dxdy$$

$$=-\frac{3}{2}\pi + \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^2\cos^2\theta-1)\rho d\rho = -\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{9}{4}\pi$$

16．计算 $\oiint\limits_S \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$， S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解：（利用高斯公式）： $\oiint\limits_S \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{a^3}\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_V(1+1+1)dV=\frac{3}{a^3}\cdot(\text{球体的体积})=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi$$

17．计算 $\oiint\limits_S \left|x-\dfrac{a}{3}\right|dydz+\left|y-\dfrac{2b}{3}\right|dzdx+\left|z-\dfrac{c}{4}\right|dxdy$， S 为立体 $0\le x\le a$， $0\le y\le b$，

$0\le z\le c$ 的表面外侧.

解： $\oiint\limits_S \left|x-\dfrac{a}{3}\right|dydz+\left|y-\dfrac{2b}{3}\right|dzdx+\left|z-\dfrac{c}{4}\right|dxdy$

$$=\iint\limits_{\substack{x=0\\0\le y\le b\\0\le z\le c}}+\iint\limits_{\substack{x=a\\0\le y\le b\\0\le z\le c}}+\iint\limits_{\substack{y=0\\0\le x\le a\\0\le z\le c}}+\iint\limits_{\substack{y=b\\0\le x\le a\\0\le z\le c}}+\iint\limits_{\substack{z=0\\0\le x\le a\\0\le y\le b}}+\iint\limits_{\substack{z=c\\0\le x\le a\\0\le y\le b}}$$

$$=-\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}\frac{a}{3}dydz+\iint\limits_{\substack{0\le y\le b\\0\le z\le c}}\frac{2a}{3}dydz-\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le z\le c}}\frac{2b}{3}dzdx+\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le z\le c}}\frac{b}{3}dzdx$$

$$-\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\frac{c}{4}dxdy+\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\frac{3c}{4}dxdy$$

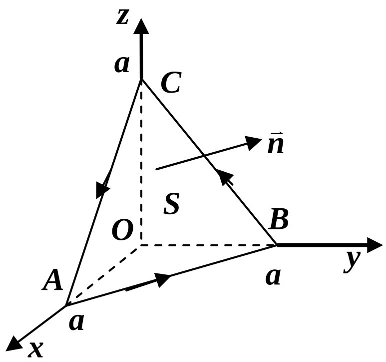
$$=\frac{1}{3}abc-\frac{1}{3}abc+\frac{1}{2}abc=\frac{1}{2}abc$$

18．计算 $\oint\limits_L(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$， L 为从点 $(a,0,0)$ 经 $(0,a,0)$、$(0,0,a)$ 回到点 $(a,0,0)$ 的三角形.

解： 如图，设 S 为平面 ΔABC，

$\oint\limits_L(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$$



$$= \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-x & x-z & y-x \end{vmatrix}$$

$$= \iint\limits_S (1+1)dydz - (-1-1)dzdx + (1+1)dxdy = 2\iint\limits_S dydz + dzdx + dxdy \overset{\Delta}{=\!=} I$$

法 1（向量乘积法）：$I = 2\iint\limits_S \{1,1,1\}\cdot\{1,1,1\}dxdy = 6\iint\limits_S dxdy = 6\iint\limits_{D_{xy}} dxdy$

$$= 6\cdot(\Delta OAB\text{的面积}) = 6\cdot\frac{1}{2}a\cdot a = 3a^2$$

法 2（利用二类曲面之间的关系）：S 的方程为 $x+y+z=a$，

$$\vec{n} = \{1,1,1\},\quad \vec{n}^0 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$I = 2\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{3}}dS + \frac{1}{\sqrt{3}}dS + \frac{1}{\sqrt{3}}dS = 2\sqrt{3}\iint\limits_S dS$$

$$= 2\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy = 6\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 3a^2$$

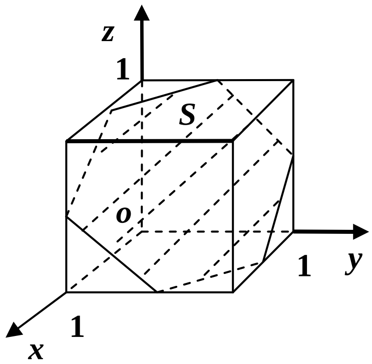
或 $2\sqrt{3}\iint\limits_S dS = 2\sqrt{3}\cdot(\text{边长为}\sqrt{2}a\text{的等边三角形的面积})$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 3a^2$$

19．计算 $\oint\limits_L (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$，$L$ 为平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体

$V: \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$ 的表面所得的截痕，

从 z 轴的正向看下去，L 取逆时针方向，如图所示.



解：S 的方程为 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$，$\vec{n}=\{1,1,1\}$，

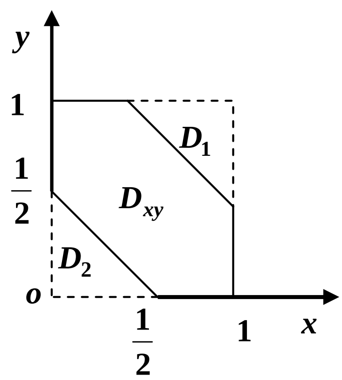
$$\vec{n}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S (-2y - 2z)\,dydz - (2x + 2z)\,dzdx + (-2x - 2y)\,dxdy$$

$$= -2\iint_S (y + z)\,dydz + (x + z)\,dzdx + (x + y)\,dxdy$$ （以下可用点积相乘法（略））



$$= -2\iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(y + z)\,dS + \frac{1}{\sqrt{3}}(x + z)\,dS + \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y)\,dS$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z)\,dS$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S \frac{3}{2} dS = -2\sqrt{3} \iint_S dS$$

$$= -2\sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,dxdy$$

$$= -6 \iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= -6[\text{正方形面积} - (D_1 + D_2)\text{面积}] = -6(1 \times 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$$

或 $-2\sqrt{3}\iint\limits_{S} dS = -2\sqrt{3}\cdot($边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的正六边形的面积）

$$= -2\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{9}{2}$$