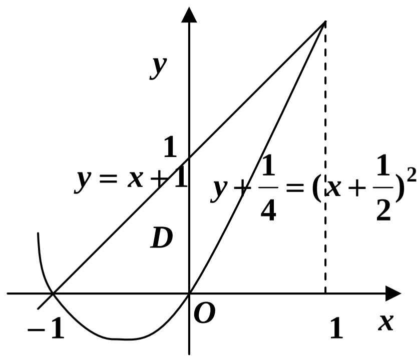
习题 8.2(P122)

1．画出下列二次积分所对应的二重积分的积分区域 D，并改变积分次序.

(1) $\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)dy$

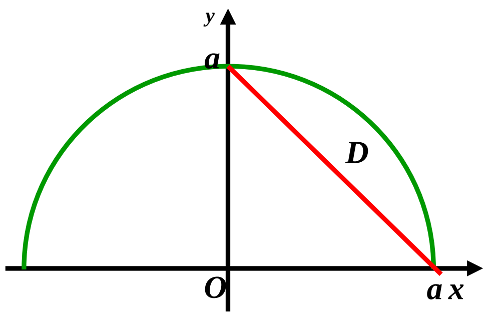
解：



$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0}dy\int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}}f(x,y)dx+\int_{0}^{2}dy\int_{y-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}}f(x,y)dx$$

(2) $\int_{0}^{a}dx\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy$

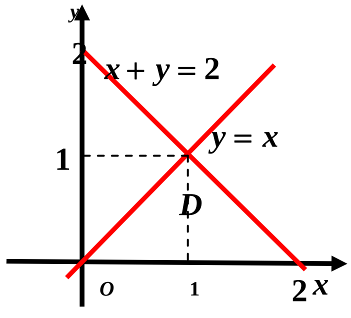
解：



$$\int_{0}^{a}dy\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$$

(3) $\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{2-y}f(x,y)dx$

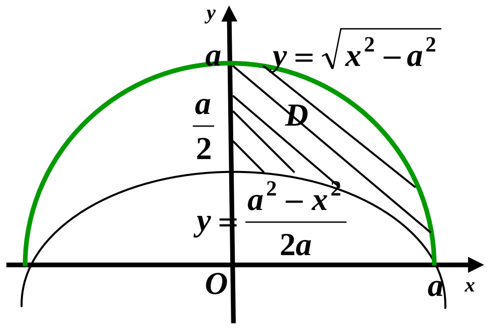
解：



$$\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{0}^{2-x}f(x,y)dy$$

(4) $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$

解：

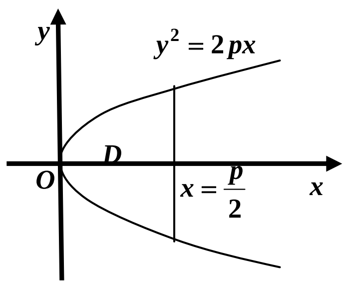


$\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$

2．计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D xy^2 dxdy$，其中 D 由抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$ 围成.

解：$\iint\limits_D xy^2 dxdy = \int_{-p}^{p} y^2 dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} xdx$

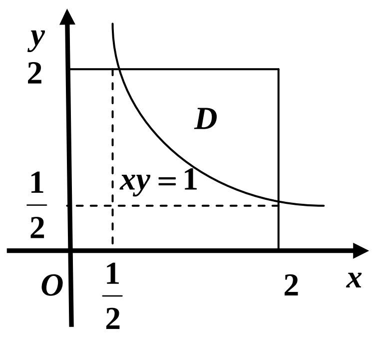


$=\frac{1}{8}\int_{-p}^{p}\left(p^2y^2-\frac{y^6}{p^2}\right)dy$

$=\frac{1}{21}p^5$

(2) $\iint\limits_D ye^{xy} dxdy$，其中 D 由直线 $x=2$， $y=2$ 和双曲线 $xy=1$ 围成.

解：$\iint\limits_D ye^{xy} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} ye^{xy} dx$



$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(e^{2y}-e)dy$

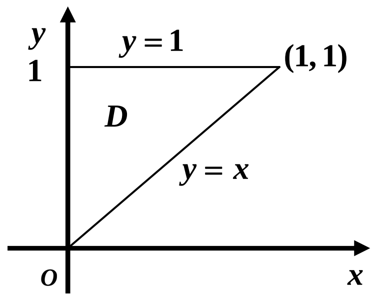
$=\frac{1}{2}e^4-2e$

(3) $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} dxdy$ 其中 D 由直线 $x=0$， $y=1$ 和 $y=x$ 围成.

解： $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$

$=\dfrac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy$

$\xlongequal{令t=y^2}\dfrac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\dfrac{1}{6}(1-\dfrac{2}{e})$



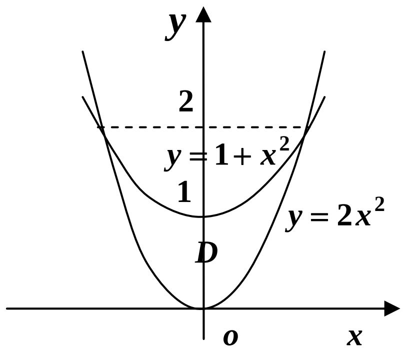
(4) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$，其中 D 由抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=1+x^2$ 围成.

解：因为积分区域 D 关于 y 轴对称， $f(x,y)=x$ 关于 x 是奇函数，所以 $\iint\limits_D xdxdy=0$。

积分区域 $D:-1\le x\le 1,\quad 2x^2\le y\le 1+x^2$

$\iint\limits_D 2ydxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{2x^2}^{x^2+1}2ydy$

$=\int_{-1}^1 dx\left[(x^2+1)^2-4x^4\right]dx=\dfrac{32}{15}$



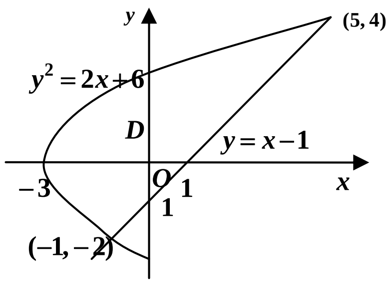
(5) $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由抛物线 $y^2=2x+6$ 和直线 $y=x-1$ 围成.

解：积分区域 $D:-2\le y\le 4,\quad \dfrac{y^2-6}{2}\le x\le y+1$

$\iint\limits_D xydxdy=\int_{-2}^4 dy\int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1}xydx$

$=\dfrac{1}{2}\int_{-2}^4 y\left[(y+1)^2-\left(\dfrac{y^2-6}{2}\right)^2\right]dy$

$=36$

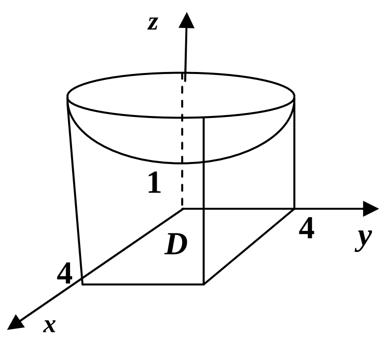


3．计算由平面 $x=4$， $y=4$，各坐标面以及旋转抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解：积分区域 $D:0\le x\le 4,\quad 0\le y\le 4$

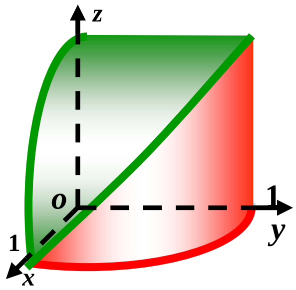
$V=\iint\limits_D (1+x^2+y^2)dxdy$

$=\int_0^4 dx\int_0^4(1+x^2+y^2)dy$



$$=\int_0^4(4x^2+\frac{76}{3})dx=\frac{560}{3}=186\frac{2}{3}$$

4．计算由两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$ 围成的立体体积.



解：图示部分是所围立体 V 在第一卦限的部分 V_1，对应的积分区域 $D_1: x^2+y^2\le R^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$ ，由对称性，

$$V=8V_1=8\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-x^2}dxdy$$

$$=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy=8\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{16}{3}R^3$$

5．在极坐标系下把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示为二次积分，其中 D 为下列区域：

(1) $a^2\le x^2+y^2\le b^2\quad (0<a<b)$

解： $D_{\rho\theta}: 0\le\theta\le 2\pi,\quad a\le\rho\le b$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(2) $x^2+y^2\le ax\quad (a>0)$

解： $D_{\rho\theta}: -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le a\cos\theta$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(3) $\begin{cases}(x-2)^2+y^2\le 4\\ (x-a)^2+y^2\ge a^2\quad (0<a<2)\end{cases}$

解： $D_{\rho\theta}: -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 2a\cos\theta\le\rho\le 4\cos\theta$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2a\cos\theta}^{4\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

(4) $\begin{cases}4x\le x^2+y^2\le 8x\\ x\le y\le 2x\end{cases}$

解： $D_{\rho\theta}: \frac{\pi}{4} \le \theta \le \arctan 2, \quad 4\cos\theta \le \rho \le 8\cos\theta$

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

6. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$，其中 $D: \begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

解： $D_{\rho\theta}: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 1 \le \rho \le 2$

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \theta \cdot \rho d\rho = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta\right) \cdot \left(\int_1^2 \rho d\rho\right) = \frac{\pi^2}{32} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{64}\pi^2$$

(2) $\iint_D (x^2 + y^2)d\sigma$，其中 $D: 2x \le x^2 + y^2 \le 4x$

解： $D_{\rho\theta}: -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 2\cos\theta \le \rho \le 4\cos\theta$

$$\iint_D (x^2 + y^2)d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^3 d\rho = 60\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 120\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

$$= 120 I_4 = 120 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{45}{2}\pi$$

(3) $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)d\sigma$，其中 $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 9$

解： $D_{\rho\theta}: 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 1 \le \rho \le 3$

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 \ln(1 + \rho^2)\rho d\rho = \pi\int_1^3 \ln(1 + \rho^2)d(1 + \rho^2)$$

$$= \pi\left[(1 + \rho^2)\ln(1 + \rho^2)\Big|_1^3 - \int_1^3 d(1 + \rho^2)\right]$$

$$= \pi\left[10\ln 10 - 2\ln 2 - (1 + \rho^2)\Big|_1^3\right] = \pi[10\ln 10 - 2\ln 2 - 8]$$

(4) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}d\sigma$，其中 $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2x \\ 0 \le y \le x \end{cases}$

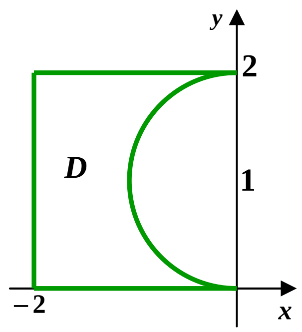
解： $D_{\rho\theta}: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le 2\cos\theta$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\theta)d(\sin\theta)$$

$$= \frac{8}{3}(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{10}{9}\sqrt{2}$$

(5) $\iint_D y d\sigma$，其中 D 由直线 $x=-2$， $y=0$， $y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

解：解法 1：积分区域 D： $0 \le y \le 2, \ -2 \le x \le -\sqrt{2y-y^2}$



$$\iint_D y d\sigma = \int_0^2 y dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx = \int_0^2 y(2-\sqrt{2y-y^2})dy$$

$$= \int_0^2 2y dy - \int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy = 4 - \int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}dy$$

$$\overset{令 t=y-1}{=\!=\!=} 4 - \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$= 4 - \int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}dt - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

因为 $\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}dt = 0$（被积函数为奇函数）， $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2}$（由几何意义即得）

故 $\iint_D y d\sigma = 4 - \frac{\pi}{2}$

解法 2：平移坐标轴 $Y = y-1$， $X = x$，则 D_{XY}： $-1 \le Y \le 1, \ -2 \le X \le -\sqrt{1-Y^2}$

$$\iint_D y d\sigma = \iint_{D_{XY}} (Y+1)d\sigma = \iint_{D_{XY}} Y d\sigma + \iint_{D_{XY}} d\sigma$$

由于积分区域关于 X 对称，被积函数关于 Y 是奇函数，故 $\iint_{D_{XY}} Y d\sigma = 0$

而 $\iint_{D_{XY}} d\sigma = 区域D_{XY}的面积 = 正方形面积 - 半圆面积 = 2^2 - \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = 4 - \frac{\pi}{2}$

解法 3：将积分区域 D 视为密度均匀的平面薄板，则其质心的纵坐标 $\bar{y} = 1$，故

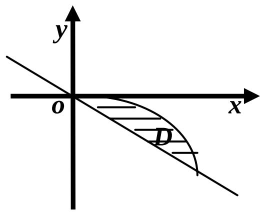
$$\iint_D y d\sigma = \bar{y} \times D的面积 = \bar{y} \times (正方形面积 - 半圆面积) = 1 \times (2\times 2 - \frac{\pi}{2}) = 4 - \frac{\pi}{2}$$

(6) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma$,其中 D 由直线 $y=-x$ 及曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 围成.

解: 令 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$, 则直线 $y=-x$ 的极坐标方程为 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ （或 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ ）

曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 的极坐标

方程为 $\rho=-2a\sin\theta$



故积分区域 $D_{\rho\theta}:\begin{cases} -\frac{\pi}{4}\le\theta\le 0 \quad (\text{或}\frac{7\pi}{4}\le\theta\le 2\pi) \\ 0\le\rho\le -2a\sin\theta \end{cases}$

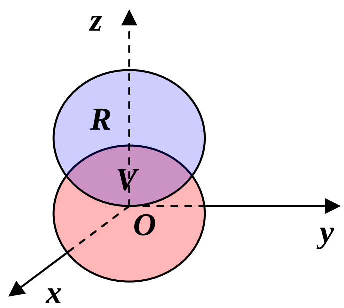
$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}$$

$$\xlongequal[d\rho=2a\cos t dt]{\text{令}\rho=2a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 t dt=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}(1-\cos 2t)dt$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\sin 2\theta-2\theta)d\theta=a^2(-\frac{\cos 2\theta}{2}-\theta^2)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)$$

7．试求球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 的公共部分的体积.

解：图示为两个球体的正视图，



两球体的交线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le R^2 \\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz \end{cases}$,

即 $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2 \\ z=\frac{R}{2} \end{cases}$

其公共部分在 xOy 平面的投影区域为 $D: x^2+y^2\le\frac{3}{4}R^2$,

$$D_{\rho\theta}:\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

故 $V=\iint\limits_D\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}-(R-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\right]dxdy$

$$=\iint\limits_D (2\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R)dxdy=2\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy-R\iint\limits_D dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho-R\cdot\pi\cdot\frac{3}{4}R^2=4\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho-\frac{3}{4}\pi R^3$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\sqrt{R^2-\rho^2}d(R^2-\rho^2)-\frac{3}{4}\pi R^3 \quad =-2\pi\cdot\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}-\frac{3}{4}\pi R^3$$

$$=-\frac{4}{3}\pi\cdot(-\frac{7}{8}R^3)-\frac{3}{4}\pi R^3=\frac{5}{12}\pi R^3$$

8．立体V满足$z\ge x^2+y^2$及$x^2+y^2+z^2\le 2z$，求该立体的体积.

解：联立$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$得交线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}$

其公共部分在xOy平面的投影区域为$D: x^2+y^2\le 1$，

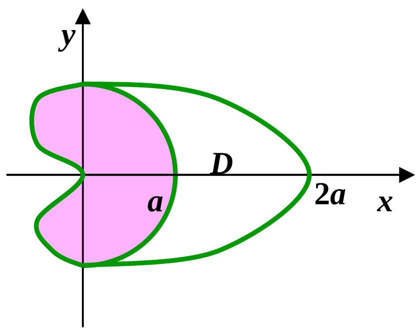
$$D_{\rho\theta}:\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1$$

故$V=\iint\limits_D\left[1+\sqrt{1-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\right]dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)\rho d\rho=2\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{7\pi}{6}$$

9．求由心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$和圆$\rho=a$所围区域（不含极点的那部分）的面积.

解：利用对称性得



$$A=\iint\limits_D d\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho d\rho$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta$$

$$=a^2(I_2+2I_1)=a^2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2\times 1)$$

$$=a^2(\frac{\pi}{4}+2)$$