

2007 级《微积分 A》期中试卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

一、 填空 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $a \neq 0$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{a+x^5} - \sqrt[3]{a}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 其中 $n =$ _____.
2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy^2} - x^2 = y \cos x$ 确定, 则 $y'(0) =$ _____.
3. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ ($x > 0$) 的斜渐近线为_____.
4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & x \leq 0 \\ \arctan(ax) & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点处连续且可导, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
5. 若 $\varphi'(x)$ 存在, $y = \varphi(\sec^2 x) + \arcsin x^2$, 则 $dy =$ _____.
6. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 与 $2y = -1 + x^2 y$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
7. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{e^{f(x)} - 1} = 3$, 则 $f(0) =$ _____, $f'(0) =$ _____.
8. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}) =$ _____.
9. 已知方程 $e^x - 2x - a = 0$ 有实根, 则 a 应满足的条件是_____.
10. 设 $y = x^2 \cos(2x)$, 则 $y^{(10)}(0) =$ _____.

二、(10 分) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^4) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, 并求曲线 $y = y(x)$ 在参数 $t=0$ 对应点处的曲率.

三、(10 分) 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 由拉格朗日中值定理, 得: $\forall x > -1, \exists \theta \in (0, 1)$,

使得 $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1+0) = f'(\theta x)x = \frac{x}{1+x\theta}$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ 的值.

四、(10 分) 证明不等式: 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

五、(10 分) 设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2 .

(1) 试确定系数 a, b ; (2) 求出 $y = f(x)$ 的所有极值及单调区间;

(3) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点.

六、(10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan^2 x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 试求 $f'(x)$ 的表达式, 并讨论 $f'(x)$

在 $x=0$ 处的连续性, 若 $x=0$ 是间断点, 请指出间断点的类型.

七、(10 分) 某轮船航行一昼夜的耗费 (单位: 元) 为 $y = a + kv^3$, 其中 a, k 是正的

常数, v 是船航行的速度 (单位: km/小时). 利用你学过的微积分知识, 求 v 取何值时可使得船航行一公里时的平均耗费最小.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1)$. 求证:

存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $2f'(\xi) = (1 - \xi)f''(\xi)$.