习题 5.7(P320)

求下列方程组的通解.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

解： $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y & (2) \end{cases}$ 由方程 (1) 得 $y = \dfrac{dx}{dt} - x \qquad (3)$

(3) 式两端对 t 求导得 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} \qquad (4)$

将 (3)、(4) 式代入 (2) 式整理得 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0 \qquad (5)$

(5) 式是二阶常系数线性齐次微分方程，其特征根为 $r_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

故其通解为 $x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \qquad (6)$

将 (6) 式代入 (3) 式得 $y = C_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}$

因而方程的通解为 $\begin{cases} x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y = C_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 3 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3 \end{cases}$

解： $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 3 & (1) \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3 & (2) \end{cases}$ 由方程 $(1)+(2)$ 得 $y = \dfrac{dx}{dt} \qquad (3)$

(3) 式两端对 t 求导得 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \qquad (4)$

将 (3)、(4) 式代入 (1) 式整理得 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 3 \qquad (5)$

(5) 式是二阶常系数线性非齐次微分方程，利用待定系数法，

其通解为 $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3 \qquad (6)$

将(6)式代入(3)式得 $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$

因而方程的通解为$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+3\\y=-C_1\sin t+C_2\cos t\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+5y+z=0 & y(0)=0\\\dfrac{dz}{dx}-2y+3z=0, & z(0)=1\end{cases}$

解：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+5y+z=0 & (1)\\\dfrac{dz}{dx}-2y+3z=0, & (2)\end{cases}$ 由方程(1)得 $z=-\dfrac{dy}{dx}-5y$ (3)

(3)式两端对 x 求导得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}$ (4)

将(3)、(4)式代入(2)式整理得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+8\dfrac{dy}{dx}+17y=0$ (5)

(5)式是二阶常系数线性齐次微分方程，其特征根为$r_{1,2}=-4\pm i$

故其通解为 $y=e^{-4x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ (6)

将(6)式代入(3)式得 $z=e^{-4x}[(C_2+C_1)\cos x-(C_1-C_2)\sin x]$

因而方程的通解为$\begin{cases}y=e^{-4x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\\z=e^{-4x}[(C_2+C_1)\cos x-(C_1-C_2)\sin x]\end{cases}$

由初始条件 $y(0)=0,\quad z(0)=1$ 得 $C_1=0$，$C_2=1$

故初始问题的解为 $\begin{cases}y=e^{-4x}\sin x\\z=e^{-4x}(\cos x+\sin x)\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+z=0, & y(0)=1\\\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=3y+z, & z(0)=1\end{cases}$

解：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+z=0 & (1)\\\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}=3y+z & (2)\end{cases}$ 由方程(1)得 $z=-\dfrac{dy}{dx}$ (3)

(3) 式两端对 x 求导得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (4)

将 (3)、(4) 式代入 (2) 式整理得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ (5)

(5) 式是二阶常系数线性齐次微分方程，其特征根为 $r_{1,}=1$，$r_2=-3$

故其通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ (6)

将 (6) 式代入 (3) 式得 $z=-C_1e^x+3C_2e^{-3x}$

因而方程的通解为 $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-3x} \\ z=-C_1e^x+3C_2e^{-3x} \end{cases}$

由初始条件 $y(0)=1,\quad z(0)=1$ 得 $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1+3C_2=1 \end{cases}$ 即 $C_1=\dfrac{1}{2}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$

故初始问题的解为 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-3x}\right) \\ z=-\dfrac{1}{2}\left(e^x-3e^{-3x}\right) \end{cases}$