北京理工大学 2010-2011 学年第二学期《微积分 A》

期中试题解答

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $x+3z=0;$

2. $gradu|_{M_0}=-\dfrac{1}{4}\{\pi,1,1\};\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12};$

3. $I=\int_0^3 dy\int_0^{\frac{y}{3}} e^{y^2}dx,\quad \dfrac{1}{6}(e^9-1);$

4. $\vec{n}^0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{21}}\{2,4,-1\},\quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{-1};$

5. $f_x'(0,0)=-1,\quad f_y'(0,0)=1.$

二、 (1) $\vec{d}=\{5,-1,0\};$

(2) $(\vec{d})_{\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3};$

(3) $\vec{a}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 0\end{vmatrix}=\{1,5,-6\}.$

三、 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'f_2',$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+g'f_2'+xyf_{11}''+y[g'(x)+g(x)]f_{12}''+yg'(x)g(x)f_{22}''.$$

由题意知：$g'(1)=0,\quad g(1)=1,$ 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

四、 $I=\iint\limits_D 2(x^2+y^2)dxdy$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}2\rho^3 d\rho$$

$$=15\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=15\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{45}{16}\pi.$$

五、 $$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-4x-4y+3y^2=0$$

解得驻点: $(0,0)$, $(8,4)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4+6y.$$

在点 $(0,0)$

$A=2,\quad B=-4,\quad C=-4$，$\Delta=B^2-AC=24>0$，

所以点 $(0,0)$ 不是极值点;

在点 $(8,4)$

$A=2>0,\quad B=-4,\quad C=20,\quad \Delta=B^2-AC=-24<0$，

所以点 $(8,4)$ 是极小值点，且极小值为 $f(8,4)=-32.$

六、 $$I=\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}dy\int_0^{1-x-2y}xdz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{2}}x(1-x-2y)dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx$$

$$=\frac{1}{48}.$$

七、 设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{m, n, p\}$，

直线 L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=\{2,-1,-1\}$

由题意，$L\perp L_1, \Rightarrow \vec{s}\cdot\vec{s}_1=0$，所以有 $2m-n-p=0$

取点 $M_1(1,0,2)\in L_1$，又因为 L 与 L_1 相交，所以向量 $\vec{s}$，$\vec{s}_1$，$\overrightarrow{MM_1}=\{0,1,0\}$ 共面，

有 $$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=m+2p=0$$

有 $m=-2p, n=-5p$

所以 L 的方向向量为：$\vec{s}=\{-5p,-2p,p\}//\{2,5,-1\}$

所以 L 的参数方程为：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+5t \\ z=2-t \end{cases}$

（注：此题还有其他解法）

八、用柱坐标，$F(t)=\iiint\limits_V [f(x^2+y^2)+z^2]dV$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^2[f(\rho^2)+z^2]dz$$

$$=2\pi\int_0^t\rho[2f(\rho^2)+\frac{8}{3}]d\rho$$

$$=4\pi\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho+\frac{8}{3}\pi t^2.$$

$$\frac{dF}{dt}=4\pi t f(t^2)+\frac{16\pi}{3}t.$$

九、方程两边取微分，得

$$F_1'(dx+\frac{ydz-zdx}{y^2})+F_2'(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2})=0$$

整理得

$$dz=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x^2F_1'+xyF_2'}dx+\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xyF_1'+y^2F_2'}dy$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x^2F_1'+xyF_2'}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{xyF_1'+y^2F_2'}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$$

（注：求偏导数时还有其他方法）

十、Ω在xoy面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 3$，

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow r=4\cos\varphi, \qquad z=\sqrt{3(x^2+y^2)}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

由对称性，知

$$I=\iiint_{\Omega}(x^3+y^3+z^3)dxdydz=\iiint_{\Omega}z^3dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^5\cos^3\varphi\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{2^{12}\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{64}}\sin\varphi\cos^9\varphi\,d\varphi=\frac{1562}{15}\pi.$$

十一、目标函数为：$V=\frac{1}{2}\pi R^2h$

约束条件为：$S=\pi R^2+\pi Rh$

构造拉氏函数： $F(R,h)=\frac{1}{2}\pi R^2h+\lambda(\pi R^2+\pi Rh-S)$

$$\begin{cases} F_R'=\pi Rh+\lambda(2\pi R+\pi h)=0 \\ F_h'=\frac{1}{2}\pi R^2+\lambda\pi R=0 \\ S=\pi R^2+\pi Rh \end{cases}$$

解得唯一驻点为：$R=\frac{h}{2}=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$，$h=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$

由问题的实际意义知，当$R=\frac{h}{2}=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$，$h=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$时，此容器容积最大，

$$V_{最大}=\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$