习题 5.1(P279)

2．求下列方程的通解.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

解： $y=\int\dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C_1$，或 $x=Ce^y$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\cos x$

解： $\dfrac{dy}{dx}=\int\cos xdx=\sin x+C_1$， $y=\int(\sin x+C_1)dx=-\cos x+C_1x+C_2$

3．求解下列初值问题.

(1) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\sin x\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$

解： $y=\int\sin xdx=-\cos x+C$， 由初始条件得 $C=2$，

所以此微分方程的解为 $y=2-\cos x$

(2) $\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}=6x\\ y(0)=0\\ y'(0)=2\end{cases}$

解： $\dfrac{dy}{dx}=\int 6xdx=3x^2+C_1$， $y=\int(3x^2+C_1)dx=x^3+C_1x+C_2$， 由初始条件得

$C_1=2$， $C_2=0$，所以此微分方程的解为 $y=x^3+2x$

4. 已知一曲线通过点 $(1,0)$，且该曲线上任意点 (x,y) 处的切线斜率为 x^2，求该曲线方程.

解： 由导数的几何意义可知： $\dfrac{dy}{dx}=x^2$， 且有初始条件 $y(1)=0$， 解此微分方程得

$y=\dfrac{x^3}{3}+C$，由初始条件得 $C=-\dfrac{1}{3}$，故曲线方程为．$y=\dfrac{1}{3}(x^3-1)$

5. 已知从原点到曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线的距离等于该切点的横坐标. 试建立未知函数 y 的微分方程.

解：设切点为 (x,y)，切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，即 $y'X-Y+(y-xy')=0$

利用点到直线的距离公式，由题意可得 $\dfrac{|y-xy'|}{\sqrt{(y')^2+1}}=x$，即 $(y-xy')^2=x^2[(y')^2+1]$，

所以未知函数 y 满足的微分方程为 $2xyy'+x^2-y^2=0$.