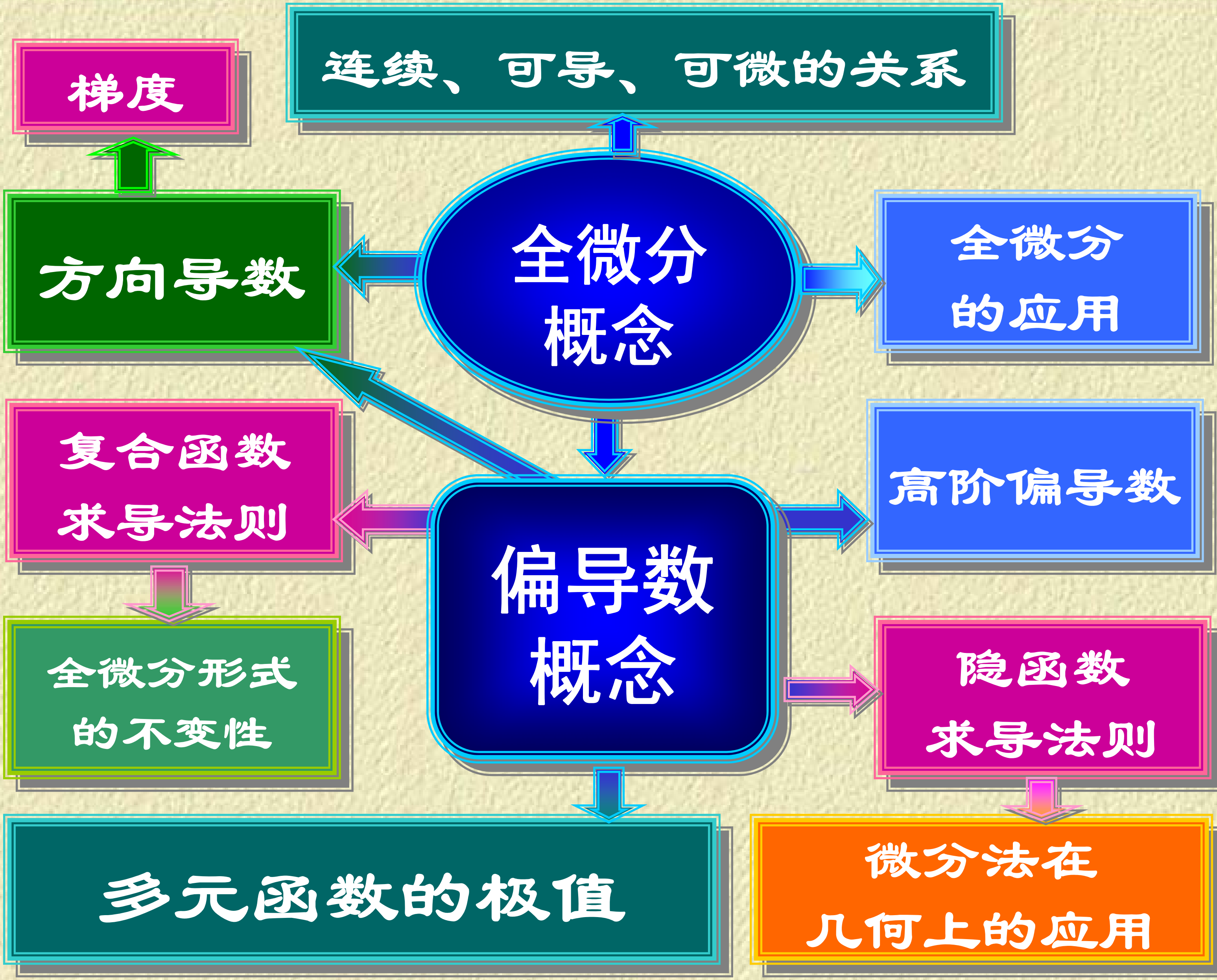
7.9 综合例题

一、主要内容

平面点集和区域 → 多元函数概念 → 多元函数的极限 → 极限运算 → 多元连续函数的性质

多元函数的极限 → 多元函数连续的概念 → 多元连续函数的性质


梯度
连续、可导、可微的关系
方向导数
全微分概念
全微分的应用
复合函数求导法则
偏导数概念
高阶偏导数
全微分形式的不变性
隐函数求导法则
多元函数的极值
微分法在几何上的应用

上页 下页 返回

例1 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$，(f 具有二阶连续偏导数)，

求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'x+f_2'\frac{1}{x})=x^4 f_1'+x^2 f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})$$

$$=x^5 f_{11}''+2x^3 f_{12}''+xf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4 f_1'+x^2 f_2')$$

$$=4x^3 f_1'+x^4[f_{11}''y+f_{12}''(-\frac{y}{x^2})]+2xf_2'+x^2[f_{21}''y+f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''.$$

例2　求由 $z=\varphi(xy^2,zy)$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

解 [法1] 把 $z=\varphi(xy^2,zy)$ 化为 $z-\varphi(xy^2,zy)=0$.

即 $F(x,y,z)=0$ 的形式 .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{y^2\varphi_1'}{1-y\varphi_2'} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{2xy\varphi_1'+z\varphi_2'}{1-y\varphi_2'}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{y^2(1-y\varphi_2')(\varphi_{11}''y^2+\varphi_{12}''yz_x')+y^3\varphi_1'(\varphi_{21}''y^2+\varphi_{22}''yz_x')}{(1-y\varphi_2')^2}$$

上页 下页 返回

例2 求由 $z=\varphi(xy^2, zy)$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

解 [法2] 原式不变形，对原式两 边同时求偏导

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1' \cdot y^2 + \varphi_2' \cdot \frac{\partial(yz)}{\partial x} = \varphi_1' \cdot y^2 + \varphi_2' \cdot y\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2\varphi_1'}{1-y\varphi_2'}$$

同法可求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ (略)

对式两边再对 x 求偏导可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

例2 求由 $z=\varphi(xy^2, zy)$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

解 [法3] 求全微分得

$$\therefore\ dz = \varphi_1' d(xy^2) + \varphi_2' d(yz)$$

$$= \varphi_1' y^2 dx + (2xy\varphi_1' + z\varphi_2')dy + \varphi_2' y dz$$

由此得 $dz = \dfrac{y^2\varphi_1'}{1-y\varphi_2'}dx + \dfrac{2xy\varphi_1' + z\varphi_2'}{1-y\varphi_2'}dy$

$\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2\varphi_1'}{1-y\varphi_2'}$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2xy\varphi_1' + z\varphi_2'}{1-y\varphi_2'}$ $\quad$ 同法1求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

例3 求 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿点的向径 r_0 的方向导数，问 a,b,c 具有什么关系时此方向导数等于梯度的模?

解 $\because \quad \vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}, \quad |\vec{r}_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{|\vec{r}_0|}, \quad \cos\beta=\frac{y_0}{|\vec{r}_0|}, \quad \cos\gamma=\frac{z_0}{|\vec{r}_0|}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r_0}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\frac{x_0}{|\vec{r}_0|}+\frac{2y_0}{b^2}\frac{y_0}{|\vec{r}_0|}+\frac{2z_0}{c^2}\frac{z_0}{|\vec{r}_0|}=\frac{2}{|r_0|}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的梯度为

$$gradu\,\Big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M\vec{k}$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\vec{i}+\frac{2y_0}{b^2}\vec{j}+\frac{2z_0}{c^2}\vec{k}$$

$$|\mathrm{grad}u|_M = 2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}},$$

当 $a=b=c$ 时, $\because$ $|\mathrm{grad}u|_M = \frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M = \frac{\frac{2}{a^2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M = |\mathrm{grad}u|_M,$$

故当 a,b,c 相等时,此方向导数等于梯度的 模.

例4 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

解 设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点,

则P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为 d,

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|.$$

分析: 本题变为求一点 $P(x, y, z)$, 使得 x, y, z

满足 $z - x^2 - y^2 = 0$且使 $d = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|x + y - 2z - 2\right|$

即 $d^2 = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2)$ 最小.

令 $F(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$, 得

$$\begin{cases} F_x'=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0, & (1) \\ F_y'=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0, & (2) \\ F_z'=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0, & (3) \\ z=x^2+y^2, & (4) \end{cases}$$

解此方程组得 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}$.

上页 下页 返回

即得唯一驻点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$,

根据题意距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故必在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ 处取得最小值.

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

证明$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不可微的方法:

1. 证明 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处不连续.

(1). 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处没有定义;

(2). 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处极限不存在;

(3). 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处极限不等于函数值.

2. 证明 函数$z=f(x,y)$的偏导数$f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$中至少有一个偏导数不 存在.

即：极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ 至少有一个不存在

上页 下页 返回

3. 用可微的定义证明 (当$f'_x(x_0, y_0)$及$f'_x(x_0, y_0)$存在时)

$$\text{即: } \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x - f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y}{\rho} \not\to 0$$

其中, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

例5 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$处的可微性

解 当$y=kx^2$时

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$不存在．即函数在点 $(0,0)$处的不连续,

故函数在点 $(0,0)$处的不可微．

例6 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$处的可微性

解 $$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$$

即$f_x'(0,0)$不存在，

故函数在点 $(0,0)$处的不可微 .

例7 讨论函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0, 0)$ 处的可微性.

解 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$

由对称性得 $f_y'(0,0)=0$

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\cdot\Delta x-f_y'(0,0)\cdot\Delta y}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\frac{|\Delta x\cdot\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{\frac{|x\cdot y|}{x^2+y^2}}$$

当 $y = kx$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{\frac{|x\cdot y|}{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{|k|x^2}{x^2+k^2x^2}} = \sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}$$

即极限 $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta z - f_x'(0,0)\cdot\Delta x - f_y'(0,0)\cdot\Delta y}{\rho}$ 不存在，

亦即 $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\Delta z - f_x'(0,0)\cdot\Delta x - f_y'(0,0)\cdot\Delta y}{\rho} \not\to 0$

故函数在点 $(0, 0)$ 处的不可微 .

书中综合例题

例1. 设 $z = f(x, y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且

$$f(1,1) = 1, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3,$$

$\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解： $\varphi(1) = f(1, f(1,1)) = f(1,1) = 1$

$$\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1} = \left[3\varphi^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=1}$$

$$= 3\varphi^2(x)\left[f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))(f_1'(x,x) + f_2'(x,x))\right]_{x=1}$$

$$= 3\times1\times[2 + 3\times(2+3)] = 51$$

2. 设$u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中$f, \varphi$都具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求$\dfrac{du}{dx}$.

分析：由于 $y = \sin x, z = z(x)$由隐函数方程

$\varphi = 0$确定，因此， $u = f(x, y, z)$是

关于x的复合函数。

上页 下页 返回

解: $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx},$

$$\because \frac{dy}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{y}\cos x\varphi_2')$$

故 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cos x\varphi_2')$

例 3 设函数 $u=e^{xz}+\sin yz$,其中 z 是由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$$ 所确定的二元函数,

其中 f 是可微函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

解: 函数与方程两边对 x 求偏导

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xz}(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+\cos yz\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\frac{z}{y})\frac{\partial z}{\partial x}$$

由后式解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$

代入前式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ze^{xz}+(xe^{xz}+y\cos yz)\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$$

类似的，函数与方程两边对 y 求导，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{xz}x\frac{\partial z}{\partial y+\cos yz\cdot(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y})}$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = f\left(\frac{z}{y}\right) - \frac{z - y\dfrac{\partial z}{\partial y}}{y} f'\left(\frac{z}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yf\left(\dfrac{z}{y}\right) - zf'\left(\dfrac{z}{y}\right) - 2y^2}{2yz - yf'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z\cos yz + (xe^{xy} + y\cos yz)\frac{yf\left(\dfrac{z}{y}\right) - zf'\left(\dfrac{z}{y}\right) - 2y^2}{2yz - yf'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$$

例 4 若函数 f (x, y, z) 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 则称此函数为 k 次齐次函数, 试证 k 次齐次可微函数必满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

证: 记 $u=tx, v=ty, w=tz$

方程 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$ 两边对 t 求导

$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}=kt^{k-1}f(x,y,z)$$ 两边乘以 t

[或在此令 $t=1$得：$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$]

$$tx\frac{\partial f}{\partial u}+ty\frac{\partial f}{\partial v}+tz\frac{\partial f}{\partial w}=kt^{k}f(x,y,z)=kf(tx,ty,tz)$$

即 $$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}+w\frac{\partial f}{\partial w}=kf(u,v,w)$$

用 x, y, z 分别替换 u, v, w 即得到

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

例 5 设 z(x, y) 是由方程 f(y−x, yz)=0 确定的隐函数, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解: 方程两边对 x 求偏导

$$f_1'(-1)+f_2'\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'}{yf_2'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(f''_{11}(-1)+f''_{12}y\dfrac{\partial z}{\partial x})yf'_2-f'_1\cdot(yf''_{21}(-1)+yf''_{22}\cdot y\dfrac{\partial z}{\partial x})}{(yf'_2)^2}$$

将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 代入上式并整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(f'_2)^2 f''_{11}+2f'_1 f'_2 f''_{12}-(f'_1)^2 f''_{22}}{y(f'_2)^3}$$

例 6 设$x=u^2+v^2, y=2uv, z=u^2\ln v$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 1: 三个方程分别对 x 求偏导

$$\begin{cases} 1=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0=2v\dfrac{\partial u}{\partial x}+2u\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}\ln v+\dfrac{u^2}{v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

由前两式解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u}{2(u^2-v^2)},\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-v}{2(u^2-v^2)}$

上页 下页 返回

代入第三式整理得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{u^2(2\ln v-1)}{2(u^2-v^2)}$

类似地，有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{u^3-2uv^2\ln v}{2(u^2-v^2)v}$

解 2: 三个方程分别取全微分

$$\begin{cases} dx=2udu+2vdv \\ dy=2vdu+2udv \\ dz=2u\ln vdu+\dfrac{u^2}{v}dv \end{cases}$$

由前两式解得 $du=\dfrac{udx-vdy}{2(u^2-v^2)}$， $dv=\dfrac{udy-vdx}{2(u^2-v^2)}$

代入第三式整理得

$$dz = \frac{u^2(2\ln v - 1)}{2(u^2 - v^2)}dx + \frac{u^3 - 2uv^2\ln v}{2(u^2 - v^2)v}dy$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{u^2(2\ln v - 1)}{2(u^2 - v^2)}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{u^3 - 2uv^2\ln v}{2(u^2 - v^2)v}$

解 3: 看作为插入两个中间变量 x、y

即: $z = z(x, y) = f(u, v)$

因而得 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

即 $2u\ln v=2u\dfrac{\partial z}{\partial x}+2v\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\quad \dfrac{u^2}{v}=2v\dfrac{\partial z}{\partial x}+2u\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解上述方程组得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{u^2(2\ln v-1)}{2(u^2-v^2)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u^3-2uv^2\ln v}{2(u^2-v^2)v}$$

例 7 设$z=f(x,y)$满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x,\ f(x,1)=0,$

$\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求 $f(x,y)$.

解: 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$ 两端连续两次对y积分得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy+\varphi(x)$$

$$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\varphi(x),\qquad f(x,1)=x+\varphi(x)+\psi(x)$$

上页 下页 返回

由题设$\varphi(x)=\sin x$

$$x+\varphi(x)+\psi(x)=0$$

$$\psi(x)=-x-\varphi(x)=-x-\sin x$$

$$f(x,y)=xy^2+y\sin x-x-\sin x$$

上页 下页 返回

例8　用变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$ 化简微分方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

设 z 关于 u、v 的二阶偏导数是连续函数。

解： 由 $z = f(u,v) = f(x-2y, x+3y)$

利用复合函数微分法得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + 3\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 3] + 3[\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot 3]$$

$$= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 12\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot 3$$

$$= -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入已知微分方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

例 9　设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

求 $f''_{xy}(0,0)$，$f''_{yx}(0,0)$，并比较两者的关系。

解：　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，即当 $x=0$， $y=0$ 时

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

$$f_{xy}''(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1$$

$$f_{yx}''(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y'(x,0)-f_y'(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$$

$$f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$$

上页 下页 返回

例 10 过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面

$$3x^2+y^2-z^2=27$$

的切平面, 求此切平面的方程.

解: 曲面切平面的法向量为 $\{6x, 2y, -2z\}$

过已知直线的平面为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$$

即 $(10+\lambda)x+(2+\lambda)y=(-2-\lambda)z-27=0$

设切平面的切点 (x_0, y_0, z_0)，则

$$\begin{cases} \dfrac{10+\lambda}{6x_0} = \dfrac{2+\lambda}{2y_0} = \dfrac{-2-\lambda}{-2z_0} \\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 27 \\ (10+\lambda)x_0 + (2+\lambda)y_0 + (-2-\lambda)z_0 - 27 = 0 \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -19$

故所求切平面为 $9x+y-z-27=0$

或 $9x+17y-17z+27=0$

上页 下页 返回

例 11. 设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 之值。

分析：本题有两种解法：

一种是先求出平面 π 的方程，由于直线 l 在 π 上，将 l 代入 π 的方程中，便可求出 a,b 的值；

另一种是由于 l 是两个平面的交线，因此，可写出关于过直线 l 的平面束，确定参数，使某一平面与 π 重合，从而求出 a,b 的值。

解 1：曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \{2, -4, -1\}$$

于是切平面方程为 $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$

$$2x - 4y - z - 5 = 0$$

由 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y=-x-b \\ z=x-3+a(-x-b) \end{cases}$

代入切平面方程得

$$2x + 4(x+b) - x + 3 + ax + ab - 5 = 0$$

即 $(5+a)x + 4b + ab - 2 = 0$

因而有 $5+a=0,\quad 4b+ab-2=0$

$$a = -5,\quad b = -2$$

上页 下页 返回

解 2：由解 1 知，π 的方程为 $2x-4y-z-5=0$，

过 l 的平面束为

$$\lambda(x+y+b)+\mu(x+ay-z-3)=0$$

即 $(\lambda+\mu)x+(\lambda+a\mu)y-\mu z+b\lambda-3\mu=0$

令 $$\frac{\lambda+\mu}{2}=\frac{\lambda+a\mu}{-4}=\frac{-\mu}{-1}=\frac{b\lambda-3\mu}{-5}$$

则 $\lambda=\mu,\quad a=-5\quad b=-2$

12 已知椭球面 $x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2,(a>0)$

(1) 求椭球面上 z 坐标为最大和最小的点

(2) 求椭球面在 x0y 面上投影区域的边界曲线.

解:

(1) 椭球面是一封闭曲面, 则椭球面上 z 坐标最大与最小的点一定存在, 且此二点处的 z 值就是椭球面方程所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的最大值与最小值.

上页 下页 返回

椭球面方程两边分别对 x 及 y 求偏导

$$\begin{cases} 2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y+y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+x+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0 \end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x+z=0 \end{cases}$$

解得 y=−2x, z=3x,

代入椭球面方程得 $x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{6}}$

得两点 $P_1(\dfrac{a}{\sqrt{6}},\dfrac{-2a}{\sqrt{6}},\dfrac{3a}{\sqrt{6}}),P_2(\dfrac{-a}{\sqrt{6}},\dfrac{2a}{\sqrt{6}},\dfrac{-3a}{\sqrt{6}})$即为所求.

(2) 设 S 是椭球面对于 x0y 面的投影柱面, S 与椭球面切于曲线 c, 则在 c 上, 两曲面的法向量相同, 都为 $\vec{n}=\{2x+y,2y+x+z,2z+y\}$

由 $\vec{n}\perp\vec{k}$, $\vec{n}\cdot\vec{k}=0$ 即 2z+y=0

因此曲线 c 满足 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2 \\ 2z+y=0 \end{cases}$

消去 z 得 S 的方程 $x^2+\dfrac{3}{4}y^2+xy=a^2$

故投影区域的边界曲线为 $\begin{cases} x^2+\dfrac{3}{4}y^2+xy=a^2 \\ z=0 \end{cases}$

例 13 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1, x_2分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为$Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中$\alpha, \beta$为正常数，且 $\alpha+\beta=1$.假设两种要素的价格分别为 p_1, p_2 试问当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使投入总费用最小

解: 在 $2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=12$的条件下求$p_1x_1+p_2x_2$的最小值，

作拉格朗日函数

$$\begin{cases} F'_{x_1} = p_1 - 2\lambda\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = 0 & (*) \\ F'_{x_2} = p_2 - 2\lambda\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = 0 & (**) \\ 2 x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = 12 & (***) \end{cases}$$

由 (*) 和 (**) 得 $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{\beta x_1}{\alpha x_2}$

故 $x_1 = \dfrac{p_2\alpha}{p_1\beta} x_2$ 代入 (***) 得 $x_2 = 6(\dfrac{p_1\beta}{p_2\alpha})^{\alpha}$

因此 $x_1 = 6(\dfrac{p_2\alpha}{p_1\beta})^{\beta}$

由于此实际问题存在最小值, 且驻点唯一,

故当 $x_1 = 6(\dfrac{p_2\alpha}{p_1\beta})^{\beta}$ $x_2 = 6(\dfrac{p_1\beta}{p_2\alpha})^{\alpha}$

时投入总费用最小.

例14 设有一小山，它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\},$$

小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$

(1)设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一个点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说，要在 D 的边界曲线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

解：(1) $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的梯度

$$gradh(x_0,y_0)=(y_0-2x_0)i+(x_0-2y_0)j$$

由梯度的几何意义知，沿梯度方向的方向导数最大，

方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$

$$=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$

由题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件

$x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点。令

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$$

则 $\begin{cases} L'_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0 & (1) \\ L'_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0 & (2) \\ L'_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0 & (3) \end{cases}$

(1)+(2)得 $(x+y)(\lambda+2)=0$

从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=-2$

若 $\lambda=-2$ 则由(1)式得 $x=y$，再由(3)式得

$$x=\pm 5\sqrt{3} \qquad y=\pm 5\sqrt{3}$$

若 $y=-x$ 则由(3)式得 $x=\pm 5 \qquad y=\mp 5$

于是得到四个可能的极值点

$M_1(5,\ -5)$, $M_2(-5,\ 5)$, $M_3(5\sqrt{3},\ 5\sqrt{3})$, $M_4(-5\sqrt{3},\ -5\sqrt{3})$

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450$,

$$f(M_3)=f(M_4)=150$$

故 $M_1(5,-5)$或$M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点。

例 15 已知两条平面曲线 $f(x, y)=0$ 和 $\varphi(x, y)=0$, (α,β),(ξ,η) 分别为两曲线上的点, 试证如果这两点是两曲线上相距为最近和最远的点, 则下列关系成立

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x'(\alpha,\beta)}{f_y'(\alpha,\beta)}=\frac{\varphi_x'(\xi,\eta)}{\varphi_y'(\xi,\eta)}$$

证: 设 $g(\alpha,\beta,\xi,\eta)=d^2=(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2$

在 $f(\alpha,\beta)=0,\varphi(\xi,\eta)=0$ 的条件下讨论

$g(\alpha,\beta,\xi,\eta)=d^2=(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2$ 的极值问题.

令 $F=(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2+\lambda f(\alpha,\beta)+\mu\varphi(\xi,\eta)$

由 $F'_\alpha=2(\alpha-\xi)+\lambda f'_x(\alpha,\beta)=0$

$$F'_\beta=2(\beta-\eta)+\lambda f'_y(\alpha,\beta)=0$$

$$F'_\xi=-2(\alpha-\xi)+\mu\varphi'_x(\xi,\eta)=0$$

$$F'_\eta=-2(\beta-\eta)+\mu\varphi'_y(\xi,\eta)=0$$

解得关系式 $\dfrac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\dfrac{f'_x(\alpha,\beta)}{f'_y(\alpha,\beta)}=\dfrac{\varphi'_x(\xi,\eta)}{\varphi'_y(\xi,\eta)}$

故得证.

思考题

取 x 作为函数，而 y 和 z 作自变量，变换方程 ：

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

以下解法对吗？ $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=0$ （*）

因为 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$ （**）

所以上式可化为： $(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=0$，

故得： $$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{z-x}{y}$$

答：解法不对. （**）式有问题！

解法 1： 因为当 $z = f(x, y)$ 时， $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y$

而当 x 作为函数时， $z = f(x, y) = f(x(y, z), y)$ ，

方程两端对 y 求导得（此时 z 视为常数）： $f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + f'_y = 0$

所以， $f'_y = -f'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$ ， 即 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$ （***）

（这说明（**）式有问题！从而也说明 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体，不能拆分）

将（***）式代入变换方程得： $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x - z}{y}$

上页 下页 返回

解法 2：设 $z=f(x,y)$，令 $F=z-f(x,y)$

则 $F_z'=1\neq 0$

所以有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$ (1)， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$ (2)， $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_x'}$

将(1)、(2)代入变换方程得： $(x-z)\cdot(-\dfrac{F_x'}{F_z'})+y\cdot(-\dfrac{F_y'}{F_z'})=0$，

即 $-\dfrac{F_y'}{F_x'}=\dfrac{x-z}{y}$

所以 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{x-z}{y}$

上页 下页 返回

P102EX5 设函数 $u(x)$ 由方程组 $\begin{cases} u = f(x,y), \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,z) = 0. \end{cases}$ 所确定,

其中f、g、h是可微函数，且 $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0, \dfrac{\partial h}{\partial z} \neq 0$, 试求 $\dfrac{du}{dx}$.

解 将方程组的变元 u 以及 y,z 都看成是 x 的函数.

方程组各方程两边对 x 求导,得

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f'_x + f'_y \dfrac{dy}{dx}, & (1) \\ g'_x + g'_y \cdot \dfrac{dy}{dx} + g'_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0, & (2) \\ h'_x + h'_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{h'_x}{h'_z}$， 代入(2)得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'_z\cdot h'_x}{g'_y\cdot h'_z}-\dfrac{g'_x}{g'_y}$，

代入(1)得 $\dfrac{du}{dx}=f'_x-\dfrac{f'_y\cdot g'_x}{g'_y}+\dfrac{f'_y\cdot g'_z\cdot h'_x}{g'_y\cdot h'_z}$.

作业：

P102： 2. 至11. 15.（共11个题）

上页 下页 返回