习题 8.1(P111)

1．试用二重积分表示下列空间区域的体积.

(1)由旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$，柱面 $x^2+y^2=1$ 和 xOy 坐标面所围成的立体（在柱面内的部分）.

解：$V=\iint\limits_D(2-x^2-y^2)d\sigma$， $D:x^2+y^2\le 1$

(2)锥体 $V:0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}$

解：$V=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$， $D:x^2+y^2\le 1$

(3) 由旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 和平面 $z=0$ 所围成的立体.

解：$V=\iint\limits_D(1-x^2-y^2)d\sigma$， $D:x^2+y^2\le 1$

2．利用重积分的几何意义和性质计算下列重积分.

(1) $\iint\limits_D d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le 2y$

解： $D:x^2+(y-1)^2\le 1$

$$\iint\limits_D d\sigma = D\text{的面积}=\pi\cdot 1^2=\pi$$

(2) $\iiint\limits_V dV$，其中 $V:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le h$

解：V 是底半径为 h，高为 h 的圆锥

$$\iiint\limits_V dV = V\text{的体积}=\frac{1}{3}\pi h^3$$

(3) $\iiint\limits_V x^2y^3z^3dV$，其中 $V:(x-R)^2+y^2+z^2\le R^2$

解：V 是对称于 xoy 平面的球体，而被积函数关于变量 z 是奇函数

故 $\iiint\limits_V x^2y^3z^3dV=0$

3．比较下列积分的大小.

(1) $\iiint\limits_V(x+y+z)^2dV$ 和 $\iiint\limits_V(x+y+z)^3dV$，其中，$V$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围的区域.

解： $\forall(x,y,z)\in V$，均有 $0\le x+y+z\le 1$，故 $(x+y+z)^2\ge(x+y+z)^3$

因此$\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dV \ge \iiint\limits_V (x+y+z)^3 dV$

(2) $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 和 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中，$D$ 是顶点为$(1,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$的三角形区域.

解：$\forall(x,y)\in D$，均有$1\le x+y\le 2$，故$0\le \ln(x+y)\le 1$，即$\ln(x+y)\ge[\ln(x+y)]^2$

因此$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma \ge \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$ 和 $\iint\limits_D (x^3+y^3)d\sigma$，其中$D: x^2+y^2\le 1$

解：$\forall(x,y)\in D$，均有$0\le x^2+y^2\le 1$，因而$|x|\le 1$，$|y|\le 1$，故$x^2+y^2\ge x^3+y^3$，

因此$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma \ge \iint\limits_D (x^3+y^3)d\sigma$

(4) $\iiint\limits_v e^{-(x^2+y^2+z^2)}dV$ 和 $\iiint\limits_v e^{-(x^3+y^3+z^3)}dV$

其中$V: -1\le x\le 1, -1\le y\le 1, -1\le z\le 1$

解：$\forall(x,y,z)\in V$，均有$x^2+y^2+z^2\ge x^3+y^3+z^3$，

即$-(x^2+y^2+z^2)\le -(x^3+y^3+z^3)$，所以$e^{-(x^2+y^2+z^2)}\le e^{-(x^3+y^3+z^3)}$

因此 $\iiint\limits_v e^{-(x^2+y^2+z^2)}dV \le \iiint\limits_v e^{-(x^3+y^3+z^3)}dV$

4．估计下列积分值的范围.

(1) $\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma$，其中$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$

解：$\forall(x,y)\in D$，均有$1\le x+y+1\le 4$，又D的面积$A=2$，

故有$2\le \iint\limits_D (x+y+1)d\sigma \le 8$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{4+xy}d\sigma$，其中$D: 0\le x\le 2, 0\le y\le 2$

解：$\forall(x,y)\in D$，均有$4\le 4+xy\le 8$，即$2\le\sqrt{4+xy}\le 2\sqrt{2}$，又$D$的面积$A=4$，

故有$8\le \iint\limits_D \sqrt{4+xy}d\sigma \le 8\sqrt{2}$

(3) $\iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，其中$D: |x|+|y|\le 10$

解：$\forall(x,y)\in D$，均有$100\le 100+\cos^2 x+\cos^2 y\le 102$，

即 $\dfrac{1}{102} \le \dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le \dfrac{1}{100}$，又 D 的面积 $A=\sqrt{200}\cdot\sqrt{200}=200$，

故有 $\dfrac{100}{51} \iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le 2$