6.2 向量及其线性运算

1. 向量的概念

数量(标量): 只有大小的量.

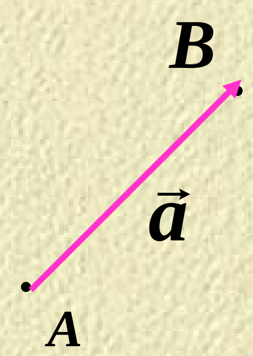
向量(矢量): 既有大小又有方向的量.

向量的表示方法: 向量可以用有向线段表示. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向.

以 A 为起点, B 为终点的向量记作

$\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 或粗体 $\boldsymbol{a}$

写作业时必须加箭头



上页 下页 返回

向量的模： 向量的大小. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$

零向量： 模为0的向量. 记为 $\vec{0}$，零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

单位向量： 模为1的向量.

与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记作 $\vec{a}^{0}$ 或 $\overrightarrow{AB}^{0}$

自由向量： 不考虑起点位置的向量.

向量的共性是它的大小和方向，数学上只研究与起点无关的向量——自由向量.

自由向量可通过平移放在同一起点上。

负向量： 与 $\vec{a}$ 模相等但方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的负向量. 记作 $-\vec{a}$

上页 下页 返回

向量平行: 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所在的线段平行, 则称此二向量平行, 记作 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$.

向量共线: 设有 $k\,(k \geq 2)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一条直线上，则称这 k 个向量共线.

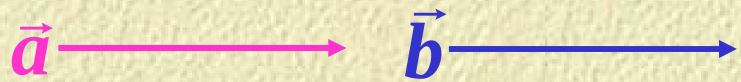
故二向量平行，也即共线。

向量共面: 设有 $k\,(k \geq 3)$ 个向量, 当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点与公共起点在一个平面上，则称这 k 个向量共面.

零向量与任何向量都平行.

与向量 $\vec{a}$ 平行的单位向量有? 有两个, 分别是 $\vec{a}^{\,0}$ 及 $-\vec{a}^{\,0}$

相等向量： 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 模相等且方向相同，则称此二向量相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

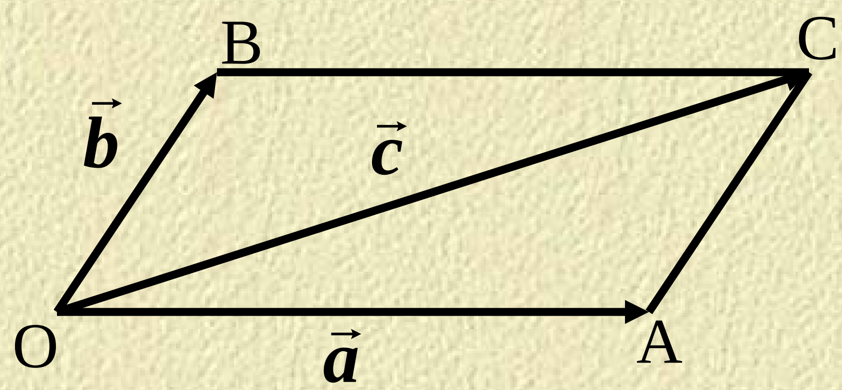


向径： 空间直角坐标系中任一点 M 与原点构成的向量 $\overrightarrow{OM}$（M 为终点），称为点 M 的向径.

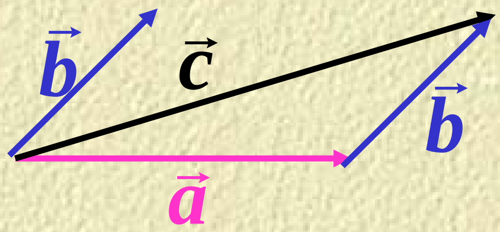
为方便起见，常把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动，使其起点 A 与原点重合得向径 $\overrightarrow{OM}$.

2. 向量的加减法

定义 1 设向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行时，以这两个向量为邻边作平行四边形 $OACB$，则其对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量，记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，这种求和法则叫做平行四边形法则.



三角形法则： 将向量$\vec{b}$平行移动，使其起点与$\vec{a}$的终点重合，则$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点的向量就是$\vec{a}+\vec{b}$.



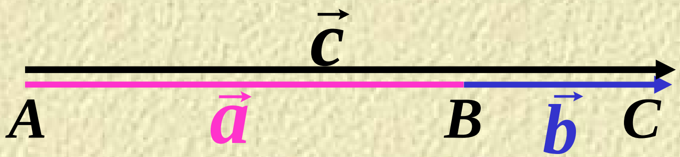
特殊地，当$\vec{a}$与$\vec{b}$平行时，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$则有

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}=\overrightarrow{AC}.$$

计算$\vec{c}$的模$|\vec{c}|$时，根据$\vec{a}$与$\vec{b}$同向及反向计算

同向：模为两个向量模的和；$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

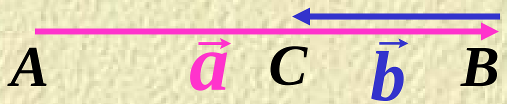
方向与原来的两个向量的方向相同。

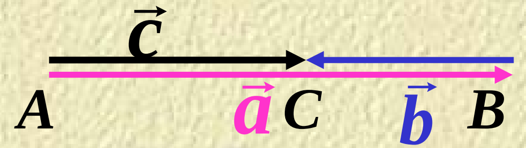


上页 下页 返回

反向：模为两个向量模的差的绝对值；$|\vec{c}| = \big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big|$

方向为与模较长的向量方向相同。



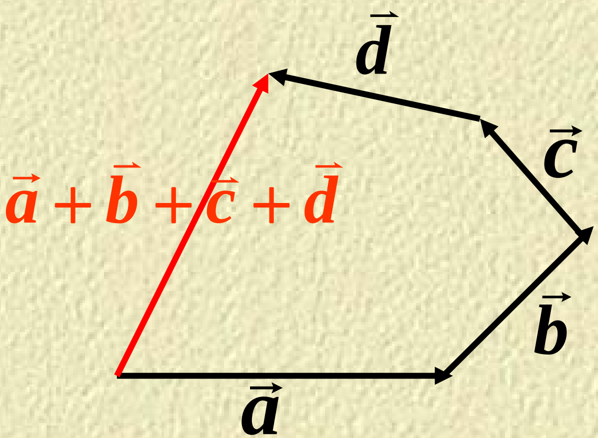


上页 下页 返回

求多个向量的和时，可效仿三角形法则，就得到所谓的多边形法则.

例：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

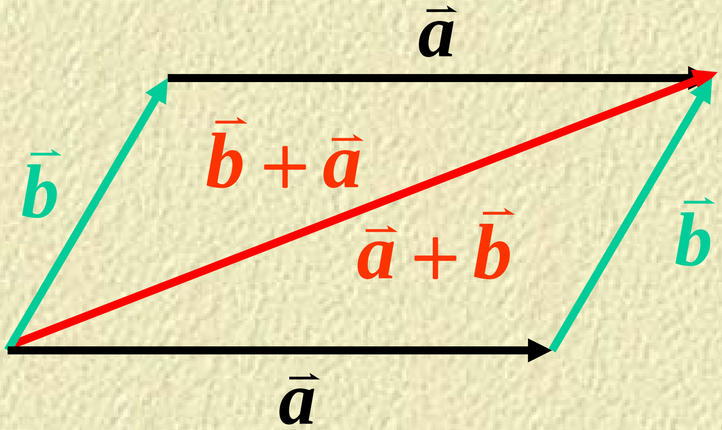
将$\vec{b}$平行移动，使其起点与$\vec{a}$的终点重合，然后将$\vec{c}$平行移动，使其起点与$\vec{b}$的终点重合，最后将$\vec{d}$平行移动，使其起点与$\vec{c}$的终点重合，则$\vec{a}$的起点到$\vec{d}$的终点的向量就是$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

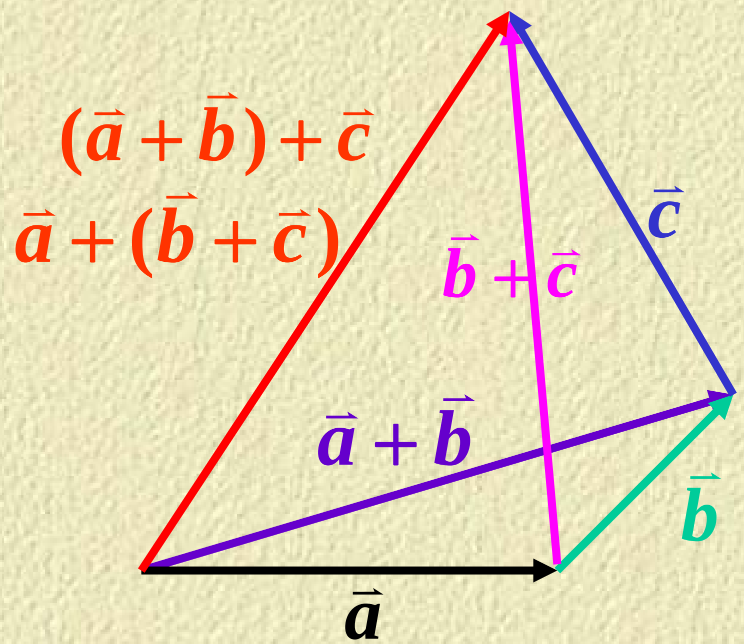


向量加法符合下列运算规律：

（1）交换律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

（2）结合律： $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

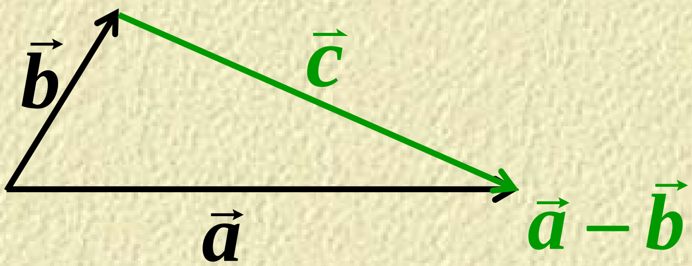


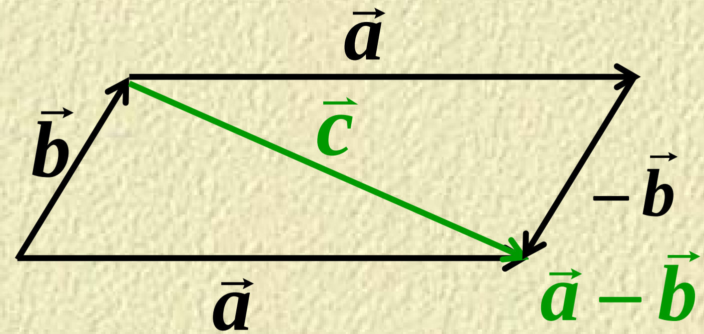


定义 2 若 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ 则称向量 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差向量，

记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.（加法的逆运算）

定义 2' 向量 $\vec{a}$ 与向量 $-\vec{b}$ 和向量称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差向量.





特别地，当 $\vec{a}=\vec{b}$ 时，$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

由三角形的边长性质得：

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \text{ 及 } \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$$

其中等号分别在 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向(第 1 式)或反向(第 2 式)时成立.

上页 下页 返回

3. 数与向量的乘积

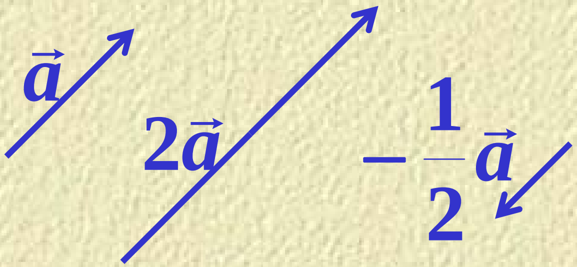
定义 3 设λ是一个实数，向量 $\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$为一个向量，称为**数乘向量**.

它的模为 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

它的方向为：当$\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向；

当$\lambda < 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，

当$\lambda = 0$时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$



上页 下页 返回

数乘向量符合下列运算规律:

（1）结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

按照向量与数的乘积的定义可得:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (|\vec{a}| \neq \vec{0})$$

即　一个非零向量乘以它的模的倒数，其结果是一个与原向量同方向的单位向量，可用上式对非零向量单位化。

两个向量的平行关系

定理 设 $\vec{a}$ 是非零向量，则 $\vec{b} \parallel \vec{a}$ 的充分必要条件是：存在惟一的实数 λ，使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

证：$\Longleftarrow$ 显然成立。

$\Longrightarrow$ 当 $\vec{b} \parallel \vec{a}$ 时，必有 $\vec{b}^0 = \vec{a}^0$ 或 $\vec{b}^0 = -\vec{a}^0$，

即 $$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ 或 } \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

取 $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ 或 $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$（$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向取正，反向取负）

则有 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

唯一性:

设 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 又设 $\vec{b} = \mu \vec{a}$,

两式相减, 得 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$,

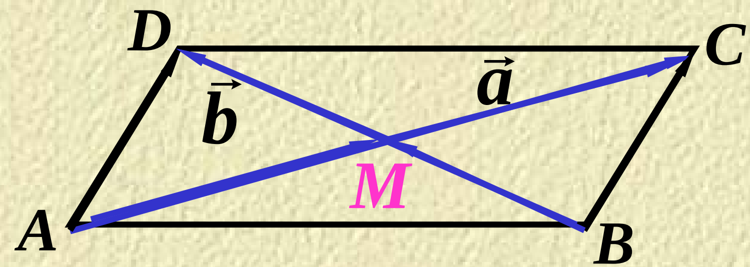
即 $|\lambda - \mu||\vec{a}| = 0$,

因 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$,

即 $\lambda = \mu$

上页 下页 返回

例1　试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



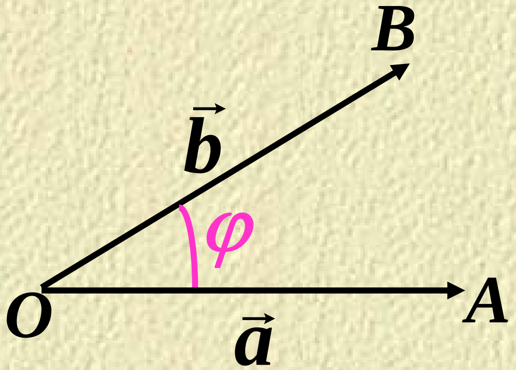
证　$\because \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 相等,　　　　结论得证.

空间两向量的夹角的概念：



设有两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，任取空间一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，规定不超过$\pi$的$\angle AOB$（设$\varphi=\angle AOB$，$0\le\varphi\le\pi$）称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.记作

$$\varphi=(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})\quad(0\le\varphi\le\pi)$$

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与π之间任意取值.

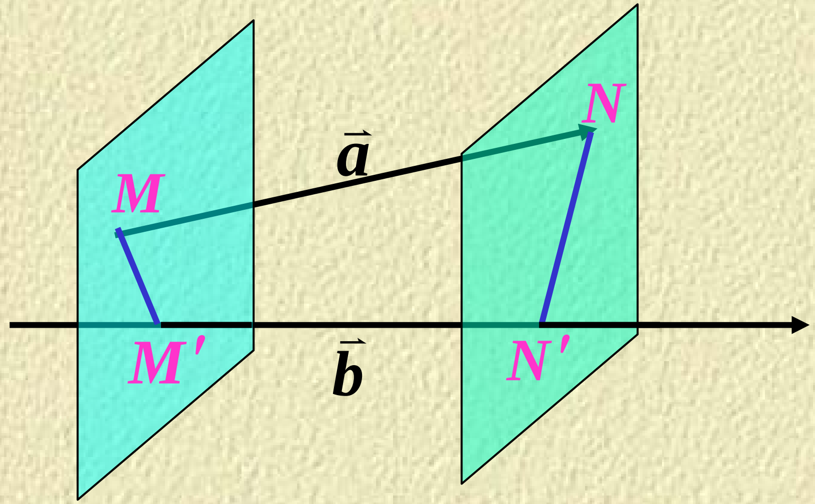
类似地，可定义向量与一轴或空间两轴的夹角.

上页 下页 返回

4. 向量的投影

设有向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，过$\vec{a}$的起点M与终点N分别作与向量$\vec{b}$所在直线垂直的平面,此两平面分别与$\vec{b}$所在直线交于点M'与N'，则存在数λ，使得$\overrightarrow{M'N'}=\lambda\vec{b}^0$，则将数$\lambda$称为向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影.记作$(\vec{a})_{\vec{b}}$（或$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}$），即

$(\vec{a})_{\vec{b}}=\lambda$ （或$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda$）



投影是一个数，不是向量。

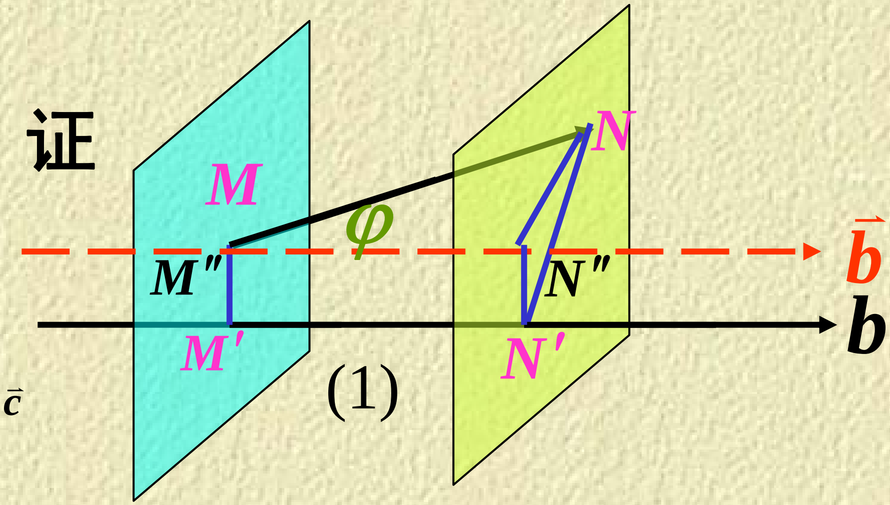
向量投影具有如下性质

(1) $(\vec{a})_{\vec{b}} = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})_{\vec{c}} = (\vec{a})_{\vec{c}} + (\vec{b})_{\vec{c}}$

(3) $(\lambda\vec{a})_{\vec{b}} = \lambda(\vec{a})_{\vec{b}}$

证

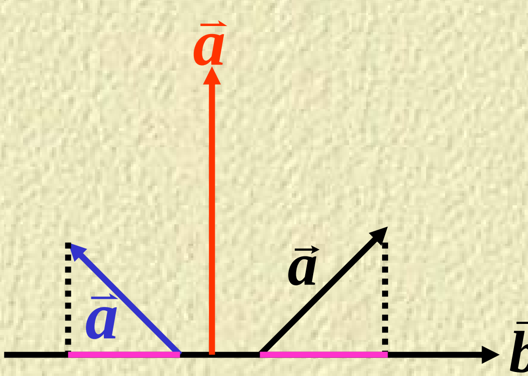


投影性质(1)的说明:

当 $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ 时，投影为正；

当 $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$ 时，投影为负；

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时，投影为零。



相等的向量在同一向量上的投影相等。

5. 向量的坐标表示

以$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$分别表示沿$x, y, z$轴正向的单位向量.

基本单位向量

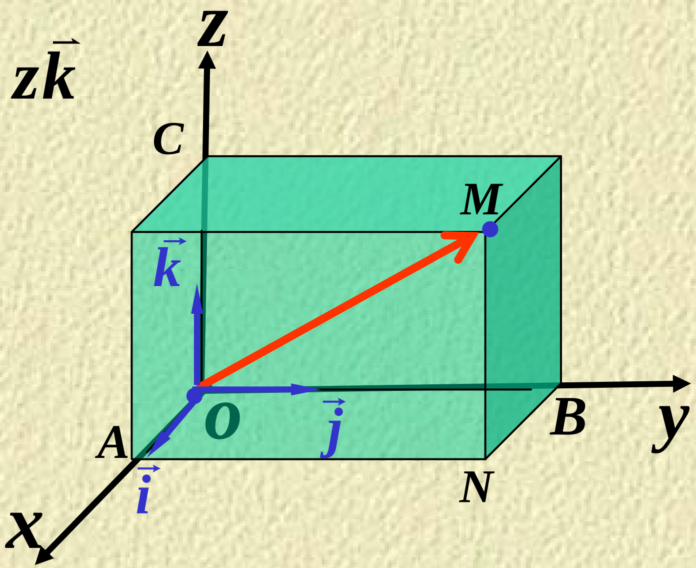
设$\overrightarrow{OM}$是起点为原点，终点为$M(x, y, z)$的向量，则

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\because \overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式



可简写为 $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$, $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$

因而基本单位向量的坐标表示式为:

$$\vec{i}=\{1,0,0\},\quad \vec{j}=\{0,1,0\},\quad \vec{k}=\{0,0,1\}$$

向量的加减法、向量与数的乘法运算的坐标表达式

设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$,则有

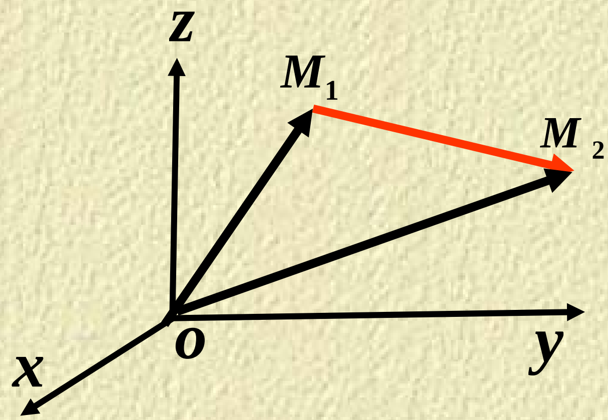
$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\pm(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$$

$$=(x_1\pm x_2)\vec{i}+(y_1\pm y_2)\vec{j}+(z_1\pm z_2)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$$

$$=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}$$

当 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量时，则



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\because \overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

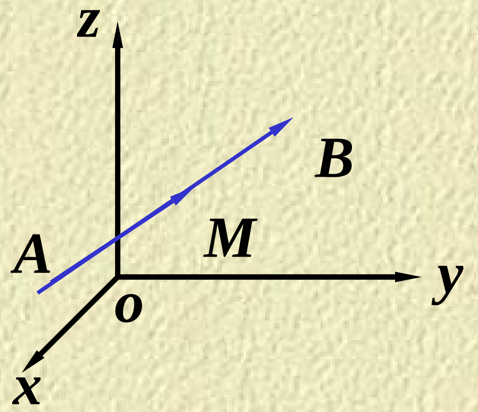
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

其中 $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ 为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标, 同时它们分别表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

若将 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平移，使 M_1 与原点重合，则 M_2 被移到点 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

例 2　设$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$为两已知点，而在AB直线上的点M分有向线段$\overrightarrow{AB}$为两部分$\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MB}$，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}\quad(\lambda\neq-1)$，求分点$M$的坐标.

解　设$M(x,y,z)$为直线上的点，



$$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$$

$$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z\}$$

由题意知： $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$

$$\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\} = \lambda\{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\},$$

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z) \Rightarrow z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. M 为中点时，

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

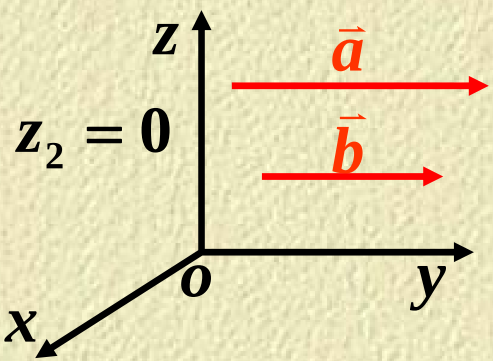
设$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$　　$\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$

利用向量的坐标,可以把 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 的充要条件

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$ 表示为 $x_2=\lambda x_1$　$y_2=\lambda y_1$　$z_2=\lambda z_1$

或 $$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

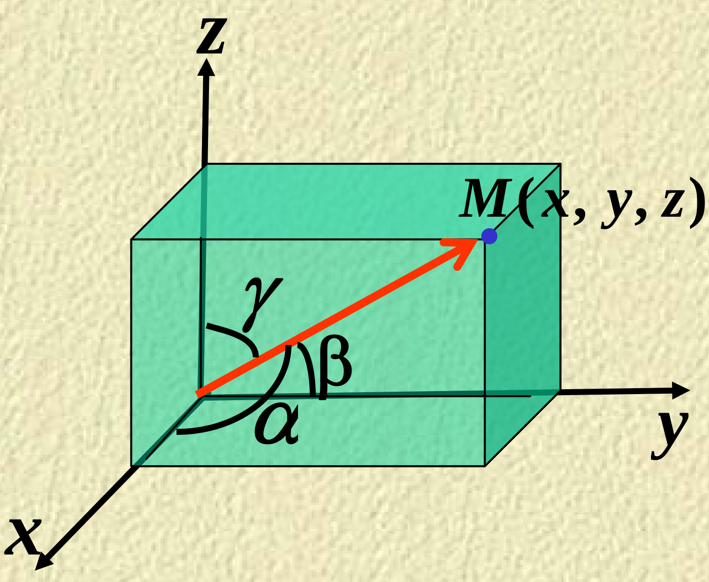
在此式中,若某个分母为零,则相应的分子也为零.



6. 向量的方向角与方向余弦

非零向量与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.

非零向量 $\vec{a}$ 的**方向角**：α、β、γ

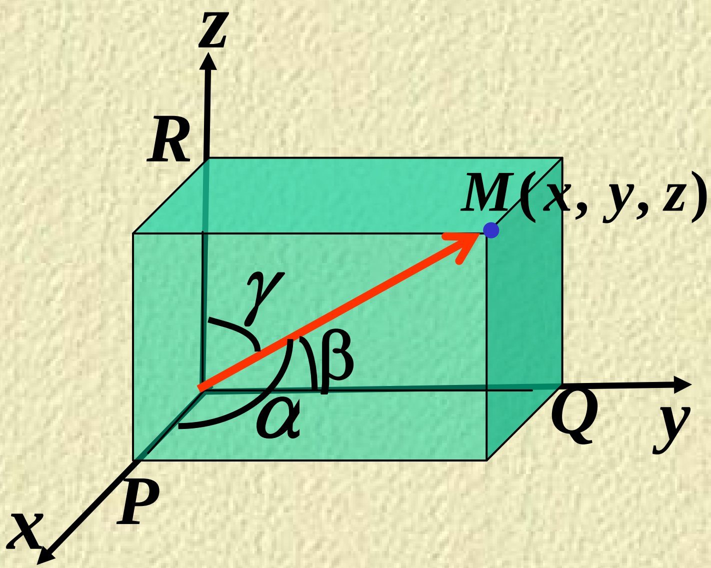


$0 \le \alpha \le \pi,$

$0 \le \beta \le \pi,$

$0 \le \gamma \le \pi.$

设向量 $\vec{a} = \{x, y, z\}$



由图分析可知

$$x = |\vec{a}| \cos\alpha$$
$$y = |\vec{a}| \cos\beta$$
$$z = |\vec{a}| \cos\gamma$$

向量 $\vec{a}$ 的方向余弦

向量角或方向余弦惟一地确定了向量的方向.

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OR}\right|^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ 向量模长的坐标表示式

向量的方向余弦的坐标表示式

当 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ 时，

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

特殊地，$\vec{a}$单位向量$\vec{a}^0$的方向余弦为

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

例 3 求平行于向量$\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量的坐标表达式.

解 所求向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个反向

$$\because |\vec{a}| = \sqrt{6^2+7^2+(-6)^2} = 11,$$

$$\therefore \overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{6}{11}\vec{i} + \frac{7}{11}\vec{j} - \frac{6}{11}\vec{k},$$

或 $$-\overrightarrow{a^0} = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{6}{11}\vec{i} - \frac{7}{11}\vec{j} + \frac{6}{11}\vec{k}.$$

例 4 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求 P_2 的坐标.

解 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α、β、γ

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = 4,\ z = 2,$$

P_2的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

六、小结

向量的概念（注意与标量的区别）

向量的加减法（平行四边形法则）

向量与数的乘法（注意数乘后的方向）

向量的模及方向余弦（坐标表示式）

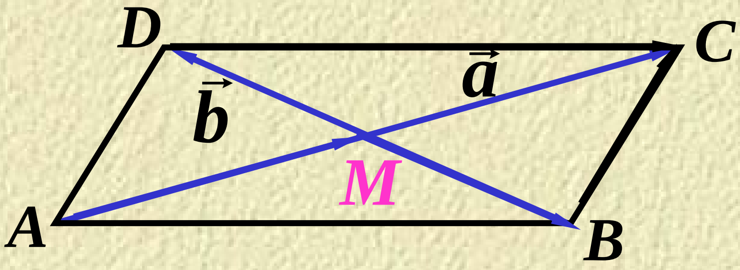
思考题

已知平行四边形ABCD的对角线

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a},\quad \overrightarrow{BD}=\vec{b}$$

试用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示平行四边形四边上对应的向量.

思考题解答



$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

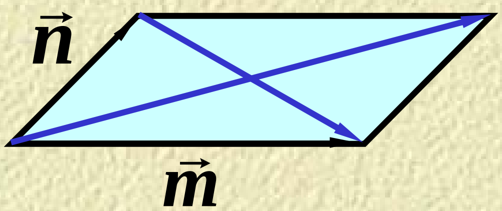
$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$$

上页 下页 返回

思考题

设$\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$，求以向量$\vec{m},\vec{n}$为边的平行四边形的对角线的长度.

思考题解答



对角线的长为 $|\vec{m}+\vec{n}|$, $|\vec{m}-\vec{n}|$,

$\because \vec{m}+\vec{n}=\{1,-1,1\}$, $\quad \vec{m}-\vec{n}=\{1,3,-1\}$

$\therefore |\vec{m}+\vec{n}|=\sqrt{3}$, $\quad |\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{11}$,

平行四边形的对角线的长度各为$\sqrt{3},\sqrt{11}$.

作业：

P9： 4. 5. 8. 9. 11. 13. 14.