习题 6.5（P25）

1．将直线的一般方程$\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$化为标准方程.

解：消去 x 得：$3y+z-11=0$， 即 $y=\dfrac{11}{3}-\dfrac{1}{3}z$

消去 y 得： $3x+4z+4=0$， 即 $x=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}z$

令 $z=3t$，得直线的参数方程为：$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}-4t \\ y=\dfrac{11}{3}-t \\ z=3t \end{cases}$，

故直线的标准方程为：$\dfrac{x+\frac{4}{3}}{-4}=\dfrac{y-\frac{11}{3}}{-1}=\dfrac{z}{3}$

2．求过点$(0,-3,2)$，且与$(3,4,-7)$、$(2,7,-6)$的连线平行的直线方程.

解：设两个已知点依次分别为 A、B，则直线的方向向量取为$\vec{s}=\overrightarrow{AB}=\{-1,3,1\}$，

故所求的直线方程为 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$

3．求过点$(0,2,4)$且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解：已知 $\vec{n}_1=\{1,0,2\}$，$\vec{n}_2=\{0,1,-3\}$，由于 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$，$\vec{s}\perp\vec{n}_2$，取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-2,3,1\}$

故所求直线方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$

4．求过点$(2,-3,4)$且垂直于直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$ 和 $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的直线方程.

解：记两条已知直线的方向向量分别为$\vec{s}_1=\{1,-1,2\}$，$\vec{s}_2=\{3,-2,1\}$

由题意，所求直线的方向向量为$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{3,5,1\}$

故所求的直线方程为 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-4}{1}$

5．求过点$(2,4,-4)$且与三坐标轴夹角正向相等的直线方程.

解：设所求直线的方向向量为$\vec{s}=\{l,m,n\}$，由题意知：$\vec{s}$与$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$夹角相等，

因而 $\dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\dfrac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\dfrac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

解得：$l=m=n$，

故直线方程为 $\dfrac{x-2}{l}=\dfrac{y-4}{l}=\dfrac{z+4}{l}$，即$x-2=y-4=z+4$

6．求直线$\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=z$与平面$x+2y+2z+6=0$的交点.

解：解联立方程：

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{3}=z\\ \dfrac{y+2}{-2}=z\\ x+2y+2z+6=0\end{cases}\quad 得\begin{cases}x=0\\ y=-4\\ z=1\end{cases}$$

故交点为$(0,-4,1)$.

7．求过点$(1,3,-1)$和直线$\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$的平面方程.

解：设已知点$(1,3,-1)$为点A、已知直线的方向向量为$\vec{s}=\{0,-1,2\}$，取直线上的点$B(3,-1,0)$，则$\overrightarrow{AB}=\{2,-4,1\}$

因而所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{AB}=\{7,4,2\}$

故所求平面的方程为 $7(x-1)+4(y-3)+2(z+1)=0$

即 $7x+4y+2z-17=0$

8．求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

解：将已知直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 & (1) \\ 3x+5y-2z+1=0 & (2) \end{cases}$ 化为参数方程：

方程 $(1)+2\times(2)$：$\begin{cases} x-2y+4z-7=0 & (1) \\ 7x+8y-5=0 & (3) \end{cases}$

令 $y=t$，则 $x=\frac{5}{7}-\frac{8}{7}t$， $z=\frac{11}{7}+\frac{11}{14}t$

由于所求平面与已知直线垂直，故可将直线的方向向量取做所求平面的法向量

即 $\vec{n}=\left\{-\frac{8}{7},1,\frac{11}{14}\right\}$

故所求平面的方程为 $-\frac{8}{7}(x-2)+y+\frac{11}{14}(z+3)=0$

即 $16x-14y-11z-65=0$

9. 求过直线 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 $x+4y-3z+7=0$ 的平面方程.

解：已知直线的方向向量为 $\vec{s}=\{5,2,4\}$，已知平面的法向量为 $\vec{n}_1=\{1,4,-3\}$，

因而所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{s}\times\vec{n}_1=\{-22,19,18\}$，又直线上的点 $(2,-1,2)$ 也是所求平面上的点，

故所求平面的方程为 $-22(x-2)+19(y+1)+18(z-2)=0$

即 $22x-19y-18z-27=0$

10．求过点 $(1,3,-1)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行

的平面方程.

解：直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$的标准方程为 $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{\frac{3}{2}}$

直线$\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 的标准方程为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

得$\vec{s}_1=\left\{-\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right\}$， $\vec{s}_2=\{0,1,1\}$，

$$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}=-\frac{1}{2}\{1,-1,1\}$$

因而所求平面的法向量取为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$

故所求平面的方程为 $(x-1)-(y-3)+(z+1)=0$

即 $x-y+z+3=0$

11．求直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角.

解：直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$的标准方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$，得$\vec{s}=\{1,2,-1\}$，

已知平面的法向量为$\vec{n}=\{1,-1,-1\}$

由$\sin\varphi=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}=0$，得夹角$\varphi=0$

12．求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+3y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.

解：直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$的标准方程为 $\dfrac{x-15}{3}=\dfrac{y-22}{4}=\dfrac{z}{-1}$

直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+3y+z-18=0\end{cases}$的标准方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-21}{0}$

得$\vec{s}_1=\{3,4,-1\}$， $\vec{s}_2=\{1,-1,0\}$

故两直线的夹角余弦 $\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$

13．证明：直线 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=9 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

证明：直线 $\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=9 \end{cases}$ 的标准方程为 $\frac{x+16}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+23}{5}$

直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 的标准方程为 $\frac{x+\frac{8}{3}}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+\frac{16}{3}}{5}$

得 $\vec{s}_1 = \{3, 0, 5\}$，$\vec{s}_2 = \{3, 0, 5\}$，$\vec{s}_1 // \vec{s}_2$，故两条直线平行.

14．试确定下列各组中的直线与平面的关系.

(1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与 $4x-2y-2z=3$

(2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 与 $3x-2y+7z=8$

(3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 与 $x+y+z=3$

解：(1) $\vec{s} = \{-2, -7, 3\}$，$\vec{n} = \{4, -2, -2\}$

由于 $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$，故直线与平面平行，又点 $M(-3, -4, 0)$ 在直线上，而点 $M(-3, -4, 0)$ 不在平面上.

(2) $\vec{s} = \{3, -2, 7\}$，$\vec{n} = \{3, -2, 7\}$

由于 $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$，故直线与平面垂直.

(3) $\vec{s} = \{3, 1, -4\}$，$\vec{n} = \{1, 1, 1\}$

由于 $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$，故直线与平面平行，又点 $M(2, -2, 3)$ 既在直线上又在平面上，故直线在平面上.