习题 5.5(310)

1．求下列方程的通解.

(1) $y''+8y'+15y=0$

解：此齐次方程的特征方程为 $r^2+8r+15=0$，特征根为 $r_1=-3$， $r_2=-5$，

对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-5x}$

(2) $y''+6y'+9y=0$

解：此齐次方程的特征方程为 $r^2+6r+9=0$，特征根为 $r_{1,2}=-3$，

对应的齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$

(3) $y''+4y'+5y=0$

解：此齐次方程的特征方程为 $r^2+4r+5=0$，特征根为 $r_{1,2}=-2\pm i$，

对应的齐次方程的通解为 $y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

(4) $\dfrac{d^2s}{dt^2}-2\dfrac{ds}{dt}-s=0$

解：此齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-1=0$，特征根为 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$，

对应的齐次方程的通解为 $s=C_1e^{(1+\sqrt{2})t}+C_2e^{(1-\sqrt{2})t}$

(5) $4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$

解：此齐次方程的特征方程为 $4r^2-20r+25=0$，特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{5}{2}$，

对应的齐次方程的通解为 $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$

(6) $y''+2\delta y'+\omega_0^2y=0\ (\omega_0>\delta>0)$

解：此齐次方程的特征方程为 $r^2-2\delta r+\varpi_0^2=0$，特征根为 $r_{1,2}=\delta\pm i\sqrt{\varpi_0^2-\delta^2}$，

令 $\varpi=\sqrt{\varpi_0^2-\delta^2}$，故对应的齐次方程的通解为 $y=e^{-\delta x}(C_1\cos\varpi x+C_2\sin\varpi x)$

2．求下列初值问题的解.

(1) $\begin{cases} y''+4y'+4y=0 \\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=1 \end{cases}$

解：齐次方程的特征方程为 $r^2+4r+4=0$，特征根为 $r_{1,2}=-2$，

齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$，代入初始条件得 $C_1=1$，$C_2=3$

所求初值问题的解为 $y=(1+3x)e^{-2x}$

(2) $\begin{cases} 4y''+9y=0 \\ y(0)=2,\ y'(0)=-1 \end{cases}$

解：齐次方程的特征方程为 $4r^2+9=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm\dfrac{3}{2}i$，

齐次方程的通解为 $y=C_1\cos\dfrac{3}{2}x+C_2\sin\dfrac{3}{2}x$，代入初始条件得 $C_1=2$，$C_2=-\dfrac{2}{3}$

所求初值问题的解为 $y=2\cos\dfrac{3}{2}x-\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{3}{2}x$

3．求下列方程通解.

(1) $y'''-y=0$

解：齐次方程的特征方程为 $r^3-1=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，

齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(2) $y'''-2y'+y=0$

解：齐次方程的特征方程为 $r^3-2r+1=0$，特征根为 $r_1=1$，$r_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})x}+C_3e^{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})x}$

(3) $y'''+3y''+3y'+y=0$

解：齐次方程的特征方程为 $r^3+3r^2+3r+1=0$，特征根为 $r_{1,2,3}=-1$，

齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$

4. 求具有特解 $y_1=e^{-x}$， $y_2=2xe^{-x}$， $y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程.

解：由特解 y_1 及 y_2 的形式可知 $r=-1$ 为方程对应的特征方程的二重特征根，由特解 y_3 的形式可知 $r=1$ 为方程对应的特征方程的单特征根，故方程对应的特征方程为 $(r+1)^2(r-1)=0$，即 $r^3+r^2-r-1=0$，所以所求的三阶常系数齐次线性微分方程为

$y'''+y''-y'-y=0$