6.5 空间直线的方程

6.5.1 空间直线的方程

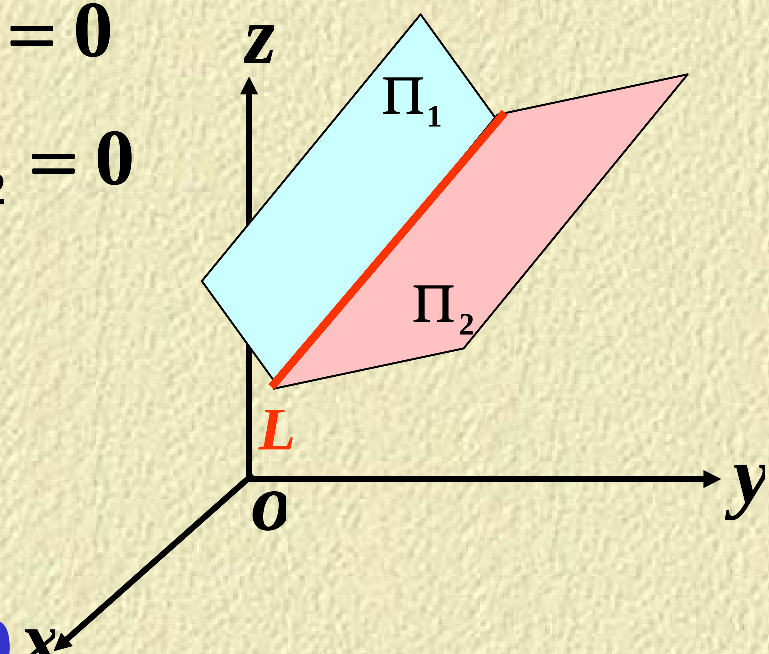
1. 直线的一般方程

空间的一条直线可看成两平面的交线.

Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

（其中 A_1、B_1、C_1与 A_2、B_2、C_2不成比例）



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

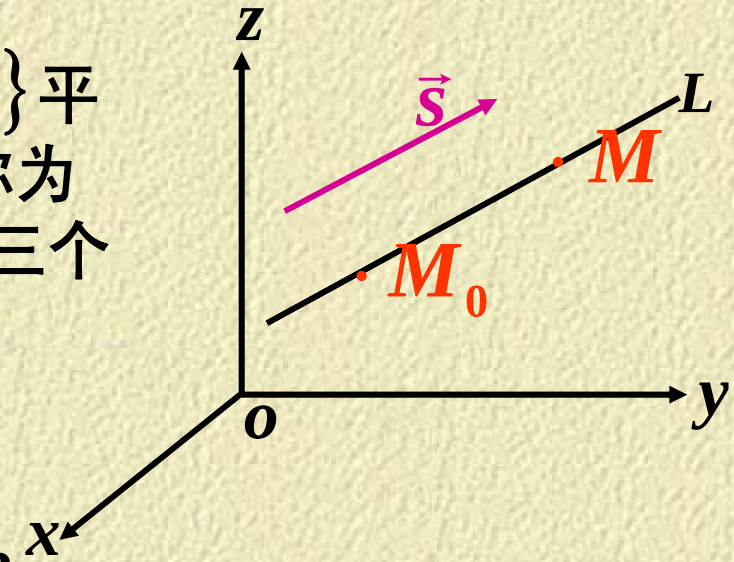
不惟一

上页 下页 返回

2．直线的标准方程与参数方程

方向向量的定义：

如果一非零向量 $\vec{s}=\{l,m,n\}$ 平行于一条已知直线 L，则向量 $\vec{s}$ 称为直线 L 的方向向量（不惟一）．$\vec{s}$ 的三个坐标 l,m,n 称为直线的方向数.



已知直线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

直线的方向向量 $\vec{s}=\{l,m,n\}$,

设$M(x,y,z)$, $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$, 则 $\overrightarrow{M_0M}\ /\!/\ \vec{s}$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

直线的标准方程 (不惟一)

直线的对称方程

令 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$ 直线的参数方程

小结 直线方程有三种形式:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(1)标准(对称)方程;}\\ \text{(2)一般方程;}\\ \text{(3)参数方程.}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{可互相转化}$$

从直线的标准(对称)方程或参数方程可直接得到直线的方向向量和一个已知点，而一般方程不能直接得到.

(1)标准方程 $\Leftrightarrow$ 参数方程

从直线的标准方程或参数方程中直接可以得到直线的方向向量及直线上的一个已知点.从而直接转化即可。

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

(2)一般方程 $\Rightarrow \begin{cases} \text{参数方程} \\ \text{标准方程} \end{cases}$

$$\begin{cases} \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$（其中 A_1、B_1、C_1与 A_2、B_2、C_2不成比例）

法 1: 在一般方程中将 x, y, z 中的任意一个变量设为 t （比如 $z = t$),解出 $x = x(t)$， $y = y(t)$,

则得直线的参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = t \end{cases}$

从而可得直线的标准方程.

法 2: 在一般方程中将 x, y, z 中的任一个变量给一个特定的值（比如令 $x = x_0$), 可解出 $y = y_0$, $z = z_0$, 则 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上的一点; 又直线既在平面 Π_1 上又在平面 Π_2 上, 故直线的方向向量垂直于这两个平面的法向量,

因而 $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\}$

法 3: 与法 2 相同，在一般方程中将 x, y, z 中的任一个变量给两个特定的值，可得到直线上的两点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，则直线的方向向量 $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1}$.

(3) $\left.\begin{array}{l}\text{参数方程}\\ \text{标准方程}\end{array}\right\} \Rightarrow$ 一般方程

由参数方程化为标准方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

则一般方程为 $\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}\\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}\end{cases}$

例 1（书中例 3）将直线的一般方程

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 1 \\ x - 4z = 8 \end{cases}$$

化为标准方程与参数方程.

解 1 由方程组解得

$$x = 8 + 4z \qquad y = 15 + 3z$$

因此直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 15 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

直线的标准方程为

$$\frac{x-8}{4} = \frac{y-15}{3} = \frac{z}{1}$$

上页 下页 返回

例 1（书中例 3）将直线的一般方程 $\begin{cases} 2x - y - 5z = 1 \\ x - 4z = 8 \end{cases}$ 化为标准方程与参数方程.

解2 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y_0 - 5z_0 = 1 \\ -4z_0 = 8 \end{cases}$

解得 $y_0 = 9, \quad z_0 = -2$

点坐标 $(0, 9, -2)$,

例 1（书中例 3）将直线的一般方程 $\begin{cases} 2x - y - 5z = 1 \\ x - 4z = 8 \end{cases}$ 化为标准方程与参数方程.

点坐标 $(0,9,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{4,3,1\}$,

标准方程 $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z+2}{1}$

参数方程 $\begin{cases} x = 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 + 4t \\ y = 15 + 3t \\ z = t \end{cases}$ 令 $t = T - 2$

下页 返回

例 1（书中例 3）将直线的一般方程
$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 1 \\ x - 4z = 8 \end{cases}$$
化为标准方程与参数方程.

解3 点坐标 $(0,9,-2)$,

在直线上再取一点 (x_1, y_1, z_1)

取 $x_1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 8 - y_1 - 5z_1 = 1 \\ 4 - 4z_1 = 8 \end{cases}$

解得 $y_1 = 12,\quad z_1 = -1$

点坐标 $(4, 12, -1)$

例 1（书中例 3）将直线的一般方程

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 1 \\ x - 4z = 8 \end{cases}$$ 化为标准方程与参数方程.

点坐标 $(0,9,-2),\ (4,12,-1),$

取 $\vec{s} = \{4-0, 12-9, -1-(-2)\} = \{4, 3, 1\}$

标准方程 $$\frac{x}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

参数方程 $$\begin{cases} x = 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

上页 下页 返回

例 2 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和y轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和y轴垂直相交, 设交点 $B(0, y_0, 0)$,

$$\vec{s} = \overrightarrow{BA} = \{2, -3 - y_0, 4\},$$

$$\because \vec{s} \perp \vec{j} \quad \therefore \vec{s} \cdot \vec{j} = -3 - y_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = -3$$

所以交点为 $B(0,-3, 0)$,

$$\vec{s} = \{2, 0, 4\} = 2\{1, 0, 2\}$$

所求直线方程 $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-4}{2}$

例 3（与书中例 2 类似） 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解1 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{l,m,n\}$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}=-1\{4,3,1\}$$

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 3（与书中例 2 类似） 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解2 令 $z=t$， 则 $x=3+4t$， $y=5+3t$，

故所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{4,3,1\}$，

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

例 4 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解1 先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

上页 下页 返回

例4 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

代入平面方程得 $t=\dfrac{3}{7}$ 交点 $N(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$

取所求直线的方向向量$\vec{s}$为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3\}$$

$$=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\}=-\frac{6}{7}\{2,-1,4\}$$

所求直线方程为$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$

上页 下页 返回

例4 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

垂直相交的直线方程.

将已知直线化为参数方 程 $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

解2 $\because N$ 在已知直线上，故存在 t_0,

$N(-1+3t_0, 1+2t_0, -t_0)$

$\overrightarrow{MN}=\{-3+3t_0, 2t_0, -3-t_0\}$, $\vec{s}_1=\{3,2,-1\}$

$\because \overrightarrow{MN}\perp\vec{s}_1 \quad \therefore \vec{s}\cdot\overrightarrow{MN}=0 \quad \Rightarrow t_0=\dfrac{3}{7}$

直线的两点式方程

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线上的二个已知点.

$M(x, y, z)$ 为直线上的任意一点.

则向量 $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共线

因此得直线的二点式方程:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

该方程与平面上直线的二点式方程:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

形式相仿

6.5.2 直线与直线、直线与平面的夹角

定义 两直线的方向向量的夹角称之.（锐角）

直线 L_1： $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$,

直线 L_2： $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$,

$$\cos(L_1,L_2)=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

两直线的夹角余弦公式

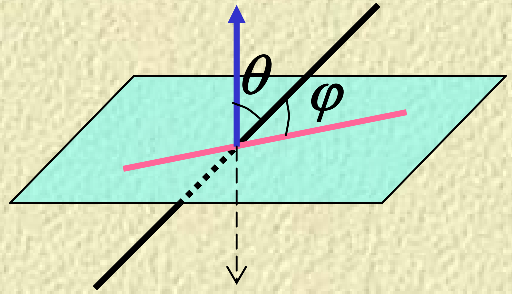
上页 下页 返回

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角. 规定 $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \quad \vec{s}=\{l,m,n\},$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \quad \vec{n}=\{A,B,C\},$$

$$\theta=(\vec{s},\vec{n})=\frac{\pi}{2}-\varphi$$



或 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$

上页 下页 返回

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|=\left|\cos\theta\right|$$

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系:

(1) $L\perp\Pi \iff \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}.$

(2) $L\,//\,\Pi \iff Al+Bm+Cn=0.$

上页 下页 返回

例 5（书中例 4）求两直线

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \quad 与 \quad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

的夹角.

解　两直线的方向向量分别为

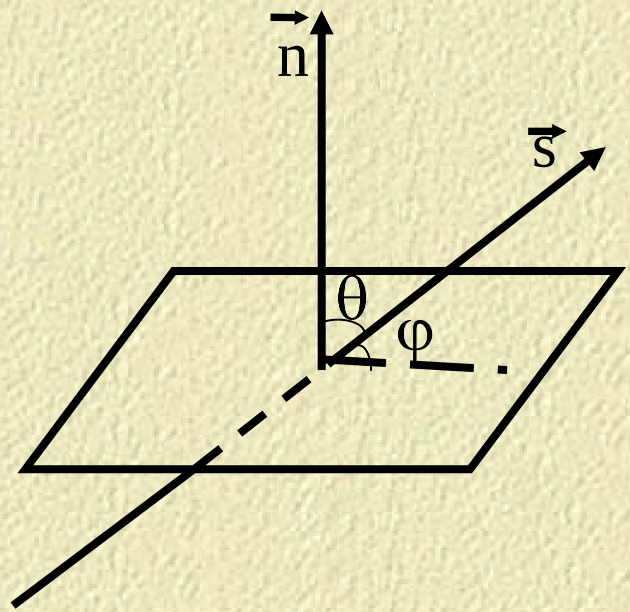
$$\vec{s}_1=\{1,-4,1\}, \qquad \vec{s}_2=\{2,-2,-1\}$$

故

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|1\times 2-4\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

例 6(书中例 5) 求直线 $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的夹角 φ.



解 直线的方向向量 $\vec{s}=\{-1,1,-2\}$

平面的法向量 $\vec{n}=\{2,1,1\}$

设 $\vec{s}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 θ,

则有 $\sin\varphi=|\cos\theta|$

$$=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|-1\times2+1\times1-2\times1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{6}$$

上页 下页 返回

6.5.3 两条直线共面的条件

直线 $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ 与 $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$

共面的充分必要条件是

向量 $\vec{s}_1=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{s}_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ 与由

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 所确定的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面.

即

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$

上页 下页 返回

例7. 求过点 $M(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，

$L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

解 1: 设所求直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{l,m,n\}$

已知 $\vec{s}_1=\{1,2,3\}$，$P_1=(0,0,0)$

$\vec{s}_2=\{2,1,4\}$，$P_2=(1,2,3)$

由于直线 L 与 L_1 相交，因而 $\vec{s}$、$\vec{s}_1$、$\overrightarrow{MP_1}$ 共面，

故有
$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \\ 0-1 & 0-1 & 0-1 \end{vmatrix}=l-2m+n=0$$

上页 下页 返回

同理，由于直线 L 与 L_2 相交，有

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ 2 & 1 & 4 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \end{vmatrix} = -2l-4m+2n=0$$

解得：$l=0$，$n=2m$，令 $m=1$，则 $n=2$

故直线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

上页 下页 返回

例7. 求过点 $M(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，

$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

解 2: 化为参数方程

$$L_1:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases},\qquad L_2:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+4t \end{cases}$$

设所求直线与直线 L_1 的交点为 $A(t_1, 2t_1, 3t_1)$，

与直线 L_2 的交点为 $B(1+2t_2, 2+t_2, 3+4t_2)$

上页 下页 返回

$\overrightarrow{MA}=\{t_1-1, 2t_1-1, 3t_1-1\}$, $\overrightarrow{MB}=\{2t_2, t_2-1, 4t_2-2\}$

由于 $\overrightarrow{MA} \mathbin{//} \overrightarrow{MB}$，故有 $\dfrac{t_1-1}{2t_2}=\dfrac{2t_1-1}{t_2-1}=\dfrac{3t_1-1}{4t_2-2}$

解得：$t_1=1$，$t_2=0$

故 $A(1, 2, 3)$，　取 $\vec{s}=\overrightarrow{MA}=\{0, 1, 2\}$

故直线 L 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

上页　下页　返回

例7. 求过点 $M(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，

$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线方程.

解 3：化为一般方程

$$L_1:\begin{cases}\Pi_1: & 2x-y=0\\ \Pi_2: & 3x-z=0\end{cases},\qquad L_2:\begin{cases}\Pi_3: & x-2y+3=0\\ \Pi_4: & 4y-z-5=0\end{cases}$$

由于所求直线 L 与 L_1、L_2 相交，设 L 与 L_1 所形成的平面为 Π_5，L 与 L_2 所形成的平面为 Π_6，故所求直线为平面 Π_5 与 Π_6 的交线.

过 L_1 的平面束方程为：$2x - y + \lambda(3x - z) = 0$

过 L_2 的平面束方程为：$x - 2y + 3 + \mu(4y - z - 5) = 0$

由于点 $M(1,1,1)$ 在平面 Π_5 与 Π_6 上，$M(1,1,1)$ 代入平面束方程，得：$\lambda = -\frac{1}{2}$，$\mu = 1$

故 Π_5 的方程为：$x - 2y + z = 0$

Π_6 的方程为：$x + 2y - z - 2 = 0$

故交线 L 的方程为：$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

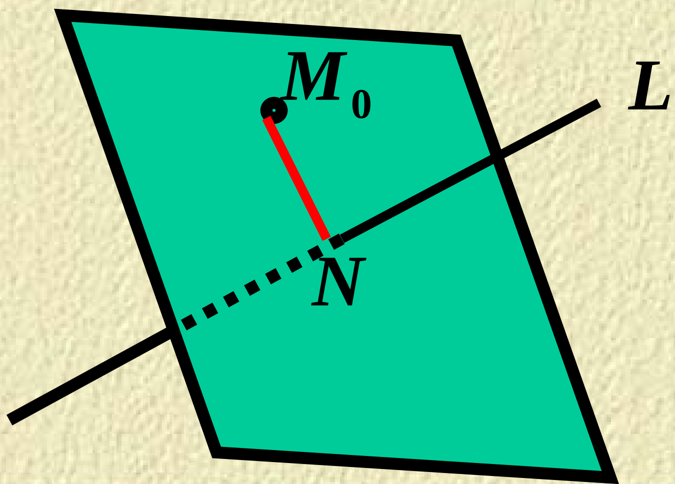
上页 下页 返回

6.5.4 点到直线的距离

求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离 d (见 6. 8 综合例题 P40 例 7).

解1 先作一过点 M_0 且与已知直线垂直的平面 Π

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$$



再求已知直线与该平面的交点N,

$$令\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t \Rightarrow \begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt. \\ z=z_1+nt \end{cases}$$

代入平面方程得

$$t_0=\frac{l(x_0-x_1)+m(y_0-y_1)+n(z_0-z_1)}{l^2+m^2+n^2}$$

交点 $N(x_1+lt_0, y_1+mt_0, z_1+nt_0)$

$\therefore d=|M_0N|$

或 $\because$ N在已知直线上，故存在 t_0，

$$N(x_1+lt_0,\ y_1+mt_0,\ z_1+nt_0)$$

$$\because \overrightarrow{MN} \perp \vec{s} \qquad \vec{s}=\{l,m,n\}$$

$$\overrightarrow{MN}=\{x_1-x_0+lt_0,\ y_1-y_0+mt_0,\ z_1-z_0+nt_0\}$$

$$\therefore \vec{s}\cdot\overrightarrow{MN}=0$$

$$t_0=\frac{l(x_0-x_1)+m(y_0-y_1)+n(z_0-z_1)}{l^2+m^2+n^2}$$

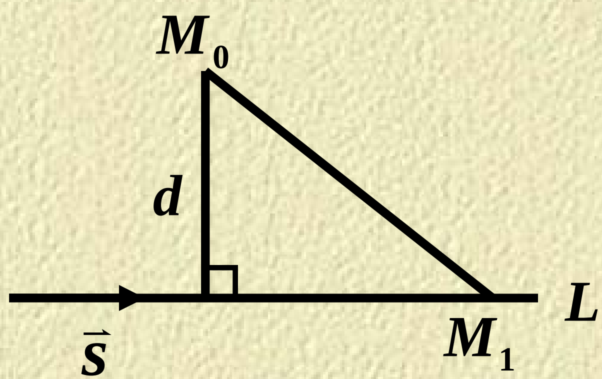
$$\therefore d=\left|M_0N\right|$$

上页 下页 返回

求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L:\ \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离 d 。（见 6.8 综合例题 P40 例 7）

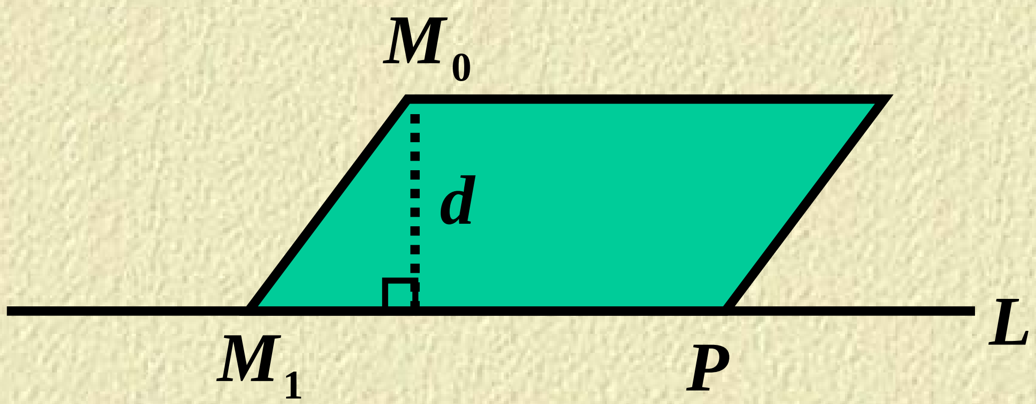
解2 已知直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{l, m, n\}$，在 L 上取一点（由直线方程）$M_1(x_1, y_1, z_1)$，则

$$d=\sqrt{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|^2-\left(\left(\overrightarrow{M_0M_1}\right)_{\vec{s}}\right)^2}$$



解3　$M_1(x_1, y_1, z_1)$在直线L上，以向量$\overrightarrow{M_1M_0}$，　$\vec{s}$为邻边做平行四边形，由向量积的几何意义。

$$\therefore d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



上页　下页　返回

解4 设 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上的点，则

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \qquad (*)$$

且 (x, y, z) 满足直线 L 的方程 $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$

即 $$y = y_1 + \frac{m(x-x_1)}{l}, \qquad z = z_1 + \frac{n(x-x_1)}{l}$$

或 $$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$ 代入 $(*)$ 式中

$$d = |M_0M|_{\min} = f_{\min}(x)$$

或 $$d = |M_0M|_{\min} = f_{\min}(t)$$

上页 下页 返回

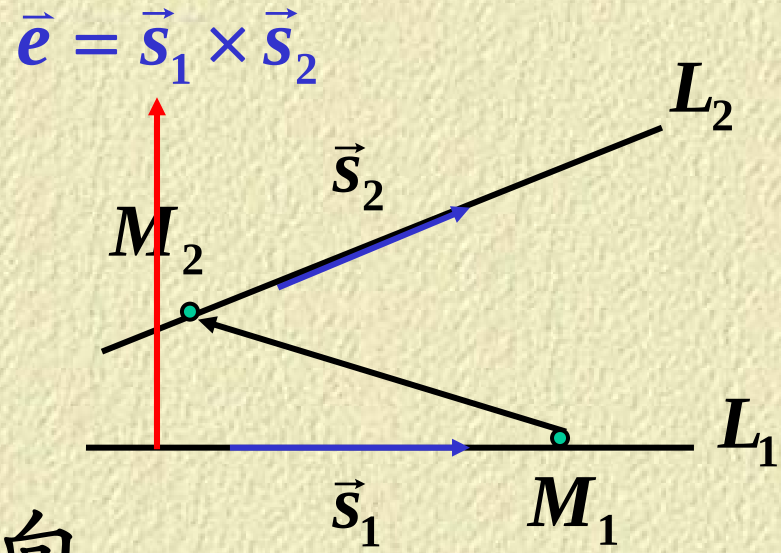
6.5.5 两异面直线的距离

(6.8 综合例题 P43 例 11) 已知直线

$$L_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}, \qquad L_2 : -\frac{x}{2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$$

求 L_1, L_2 间的距离 d.

解法 1.



已知 $s_1 = \{4, -3, 1\}$,

$s_2 = \{-2, 9, 2\}$

则 L_1 与 L_2 的公垂线的方向

向量 $\vec{e} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = -5\{3, 2, -6\}$

上页 下页 返回

分别在直线 L_1 与 L_2 上(由直线方程)取点

$M_1=(9,-2,0)$，$M_2=(0,-7,2)$， 有 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-9,-5,2)$

$$d=\left|(\overrightarrow{M_1M_2})_{\vec{e}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{e}\right|}{|\vec{e}|}=\frac{245}{35}=7$$

$$d=\left|(\overrightarrow{M_1M_2})_{\vec{e}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}$$

$$=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}$$

上页 下页 返回

已知直线 L_1, L_2 的方向向量分别是 $\vec{s}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$， $\vec{s}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$， $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是 L_1 上的点， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是 L_2 上的点，则异面直线 L_1, L_2 间的距离

$$d=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s}_1)\cdot\vec{s}_2\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\right|}$$

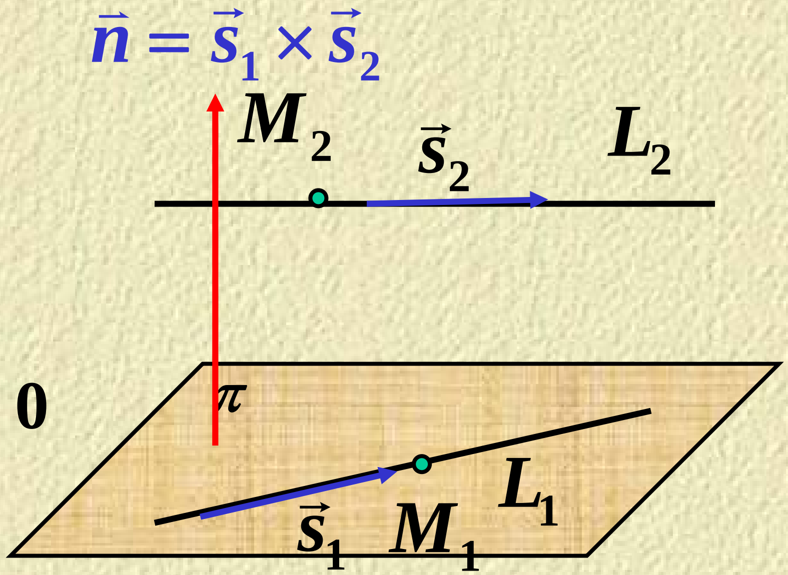
解法 2. 已知 $s_1=\{4,-3,1\}$, $s_2=\{-2,9,2\}$

分别在直线 L_1 与 L_2 上取点 $M_1=(9,-2,0)$, $M_2=(0,-7,2)$,

过 L_1 作平行于 L_2 的平面 π.

$$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=-5\{3,2,-6\}$$

取 $\vec{n}=\{3,2,-6\}$



得平面 π 的方程为

$$3(x-9)+2(y+2)-6(z-0)=0$$

即 $\quad 3x+2y-6z-23=0$

上页 下页 返回

则 L_1 与 L_2 的距离等于直线 L_2 到平面 π 的距离，

即点 M_2,到平面 π 的距离，

故 $$d=\frac{|3\times 0+2\times(-7)+(-6)\times 2-23|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}=7$$

上页 下页 返回

6.5.6 两直线的公垂线方程

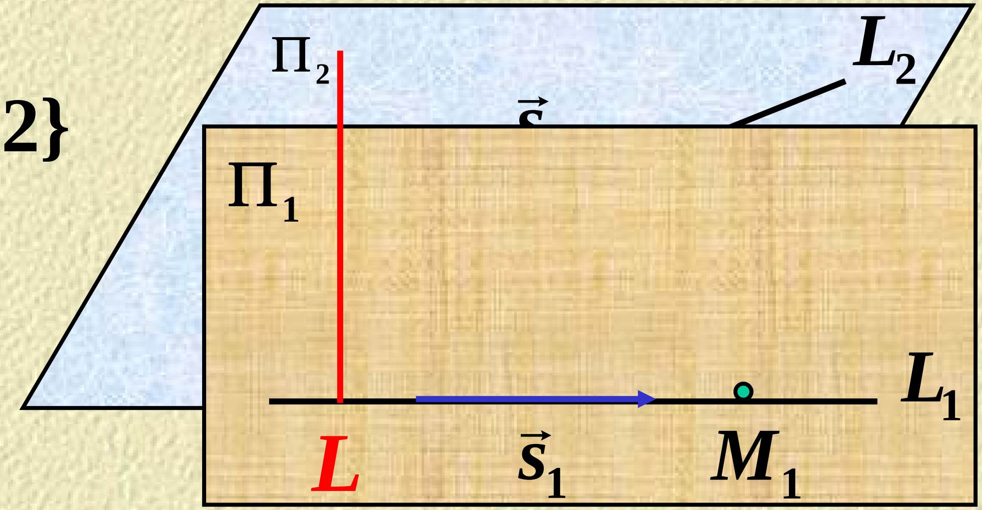
例 求两直线$L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$和$L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{0}$

的公垂线 L的方程。

解 $\vec{s}_1=\{0,1,1\}$, $\vec{s}_2=\{2,-1,0\}$.

公垂线L的方向向量为: $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2$

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{1,2,-2\}$$



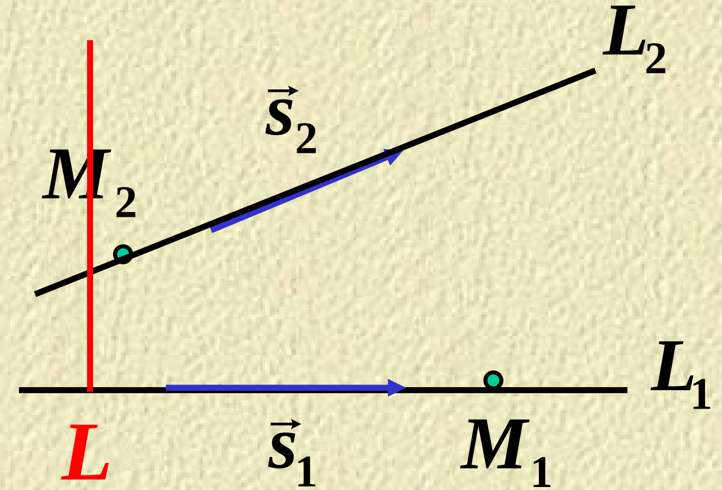
上页 下页 返回

做过L_1且与$\vec{s}$平行的平面 Π_1:

设$M(x, y, z)$是平面Π_1上的任意一点， $M_1(1, 0, 0)$是直线L_1上的一点，则 $\overrightarrow{M_1M} = \{x-1, y, z\}$，且$\overrightarrow{M_1M}$，$\vec{s}_1$，$\vec{s}$共面，即

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$



亦即

$$\Pi_1: 4x - y + z - 4 = 0$$

做过L_2且与$\vec{s}$平行的平面 Π_2:

设$M(x, y, z)$是平面Π_2上的任意一点， $M_2(0, 0, -2)$是直线L_2上的一点，则 $\overrightarrow{M_2M} = \{x, y, z+2\}$，且$\overrightarrow{M_2M}$，$\vec{s}_2$，$\vec{s}$共面，即

$$\begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$ 亦即 $\Pi_2: 2x + 4y + 5z + 10 = 0$

则Π_1与Π_2的交线即为所求直线 L的方程:

$$\begin{cases} 4x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + 4y + 5z + 10 = 0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

小结

空间直线的一般方程.

空间直线的标准方程与参数方程.

两直线的夹角.

直线与平面的夹角.（注意直线与平面的位置关系）

两直线共面的充分必要条件.

点到直线的距离.

两异面直线的距离.

两直线的公垂线方程.

思考题

在直线方程 $\dfrac{x-4}{2l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z-2}{6+n}$ 中，l、m、n各怎样取值时，直线与坐标面xoy、yoz都平行.

思考题解答

$\vec{s}=\{2l, m, 6+n\}$, 且有 $\vec{s}\neq\vec{0}.$

$\because \vec{s}\cdot\vec{k}=0, \quad \vec{s}\cdot\vec{i}=0,$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6+n=0 \\ 2l=0 \end{cases} \qquad \therefore n=-6, \quad l=0,$$

$\because \vec{s}\neq\vec{0}, \quad \therefore m\neq 0,$

故当 $l=0$, $m\neq 0$, $n=-6$ 时结论成立.

作业：

P25： 1. 3. 4. 5. 7. 9. 10. 12

上页 下页 返回