习题 3.3(p161)

1．求下列函数在点 x_0 处的带拉格朗日余项的泰勒公式.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$， $x_0=-1$

解： $f'(x)=-x^{-2}$， $f''(x)=2x^{-3}$， $f'''(x)=-3!\,x^{-4}$， … $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$

$f(-1)=-1$， $f'(-1)=-1$， $f''(-1)=-2$， $f'''(-1)=-3!$， … $f^{(n)}(-1)=-n!$，

所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x_0=-1$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\ldots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}\quad(0<\theta<1)$$

(2) $f(x)=\sqrt{1+x}$， $x_0=0$

解： $f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$， $f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$， $f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$，

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}},(n>1)$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0)=-\frac{1}{4},\ f'''(0)=\frac{3}{8},\ f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n},(n>1)$$

所以 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在点 $x_0=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2+\frac{3}{8\cdot 3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}x^n+$$

$$\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)!!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}},(0<\theta<1)$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4\cdot 2!}x^2+\frac{3}{8\cdot 3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+$$

$$\frac{(-1)^{n+2}(2n-1)!!}{(2n+2)!!}(1+\theta x)^{-\frac{2n-1}{2}},(0<\theta<1)$$

(3) $f(x)=\ln x$， $x_0=2$

解： $f'(x)=\frac{1}{x}$， $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$， $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$， $\cdots f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}(n>1)$

$f(2)=\ln 2$，$f'(2)=\frac{1}{2}$，$f''(2)=-\frac{1}{4}$，$f'''(2)=\frac{1}{4}$，$\cdots f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$，

所以 $f(x)=\ln x$ 在点 $x_0=2$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-2)^2+\frac{1}{4\cdot 3!}(x-2)^3+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-2)^n+\frac{(-1)^n}{[2+\theta(x-2)]^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1}$$

(4) $f(x)=(x^2-3x+1)^3$， $x_0=0$

解： $f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3)$， $f''(x)=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2)$，

$f'''(x)=30(2x-3)(2x^2-6x+3)$， $f^{(4)}(x)=360(x^2-3x+2)$

$f^{(5)}(x)=360(2x-3)$， $f^{(6)}(x)=720$， $f^{(n)}(x)=0\quad(n\geq 7)$

$f(0)=1$， $f'(0)=-9$， $f''(0)=60$， $f'''(0)=-270$， $f^{(4)}(0)=720$，

$f^{(5)}(0)=-1080$， $f^{(6)}(0)=720$， $f^{(n)}(0)=0\quad(n\geq 7)$

所以 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$ 在点 $x_0=0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$(x^2-3x+1)^3=1-9x+\frac{60}{2!}x^2-\frac{270}{3!}x^3+\frac{720}{4!}x^4-\frac{1080}{5!}x^5+\frac{720}{6!}x^6$$

$$=1-9x+30x^2-45x^3+30x^4-9x^5+x^6$$

2．求下列函数在点 x_0 处的带皮亚诺余项的泰勒公式.

(1) $f(x)=xe^{-x^2}$， $x_0=0$

解：因为 $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$，所以

$$xe^{-x^2}=x\left(1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+o((-x^2)^n)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

(2) $f(x) = \ln x$， $x_0 = 1$

解： $\ln x = \ln(1 + (x-1))$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n + o((x-1)^n)$$

(3) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$， $x_0 = 0$

解： $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \left(1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\right)\right)$$

$$= x^2 - \frac{2^5}{4!}x^4 + (-1)^{n-1}\frac{2^{4n-3}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

3. 设函数 $f(x) = e^{\sin x}$， 求 $f^{(3)}(0)$.

解： 因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

所以 $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^3)$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + o(x^3)$$

即： $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 0$， 所以 $f^{(3)}(0) = 0$

注： 要注意展开时不能漏项.

4．将多项式 $P(x) = x^6 - 2x^2 - x + 3$ 分别按 $(x-1)$ 的乘幂和 $(x+1)$ 的乘幂展开.

解：$P'(x)=6x^5-4x-1$，$P''(x)=30x^4-4$，$P'''(x)=120x^3$，$P^{(4)}(x)=360x^2$，

$P^{(5)}(x)=720x$，$P^{(6)}(x)=720$

（1）$P(1)=1$，$P'(1)=1$，$P''(1)=26$，$P'''(1)=120$，$P^{(4)}(1)=360$，

$P^{(5)}(1)=720$，$P^{(6)}(1)=720$

所以多项式 $P(x)=x^6-2x^2-x+3$ 按 $(x-1)$ 的乘幂展开为

$$P(x)=x^6-2x^2-x+3$$

$$=1+(x-1)+\frac{26(x-1)^2}{2!}+\frac{120(x-1)^3}{3!}+\frac{360(x-1)^4}{4!}+\frac{720(x-1)^5}{5!}+\frac{720(x-1)^6}{6!}$$

$$=1+(x-1)+13(x-1)^2+20(x-1)^3+15(x-1)^4+6(x-1)^5+(x-1)^6$$

（2）$P(-1)=3$，$P'(-1)=-3$，$P''(-1)=26$，$P'''(-1)=-120$，$P^{(4)}(-1)=360$，

$P^{(5)}(-1)=-720$，$P^{(6)}(-1)=720$

所以多项式 $P(x)=x^6-2x^2-x+3$ 按 $(x+1)$ 的乘幂展开为

$$P(x)=x^6-2x^2-x+3$$

$$=3-3(x+1)+\frac{26(x+1)^2}{2!}-\frac{120(x+1)^3}{3!}+\frac{360(x+1)^4}{4!}-\frac{720(x+1)^5}{5!}+\frac{720(x+1)^6}{6!}$$

$$=3-3(x+1)+13(x+1)^2-20(x+1)^3+15(x+1)^4-6(x+1)^5+(x+1)^6$$

5．利用泰勒公式，计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x-1}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+o(x^2))}{1+x^2+o(x^2)-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{x^2-x+o(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{-x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{o(x)}{x^4}}=0$$

注：当 x 很小时，x^2-x 中 $-x$ 是主部，而 x^2 是比 x 高阶的无穷小量，故

$x^2 - x + o(x) = -x + o(x)$

若将此题改为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x^2-1}$，则与书后答案一致。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(1+x^2)}{e^{x^2}-x^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+o(x^2))}{1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)-x^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}} = 2$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt{1+x^2}-\cos x}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt{1+x^2}-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = -\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1\cdot}{3!}x^3+o(x^3)\right)-x-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1\cdot}{3!}x^3+o(x^3)+x^2+o(x^3)+\frac{1\cdot}{2!}x^3+o(x^3)+o(x^3)-x-x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

解：由公式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x-(x-\frac{1}{2}+x^2o(\frac{1}{x^2}))]=\frac{1}{2}$$

该题若不要求“利用泰勒公式”，还可如下求解：

$$\lim_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必塔}}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$$

6. 试求下列函数当 $x\to0$ 时的等价无穷小.

(1) $\cos(x^{\frac{2}{3}})-1+\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}$

解：因为 $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)$

故 $\cos(x^{\frac{2}{3}})-1+\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}=1-\frac{1}{2!}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{4!}x^{\frac{8}{3}}+o(x^{\frac{10}{3}})-1+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{2}=\frac{1}{4!}x^{\frac{8}{3}}+o(x^{\frac{10}{3}})$

所以，所求等价无穷小为 $\frac{1}{4!}x^{\frac{8}{3}}$

(2) $\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}$

解：因为 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2+o(x^2)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$

所以 $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

$$\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}x^2+1-(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8})+o(x^4)=\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{\frac{x^4}{8}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{\frac{x^4}{8}}=1$

所以，所求等价无穷小为 $\dfrac{x^4}{8}$.

7. 已知 $e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 关于 x 是三阶无穷小，求常数 a， b 的值.

解：已知 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$， $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3)$

所以 $e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}=e^x-\dfrac{1}{1+bx}-ax\cdot\dfrac{1}{1+bx}$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}-(1-bx+b^2x^2-b^3x^3)-ax(1-bx+b^2x^2-b^3x^3)+o(x^3)$$

$$=(1-a+b)x+(\frac{1}{2}-b^2+ab)x^2+(\frac{1}{6}+b^3-ab^2)x^3+o(x^3)$$

由题意：$\begin{cases}1-a+b=0\\ \frac{1}{2}-b^2+ab=0\end{cases}$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$， $b=-\dfrac{1}{2}$

8. 设 $x>-1$，证明：当 $0<\alpha<1$ 时，$(1+x)^\alpha\le1+\alpha x$，当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时，$(1+x)^\alpha\ge1+\alpha x$.

解：$(1+x)^\alpha$ 的一阶泰勒公式为：

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\xi)^{\alpha-2}x^2\quad(\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})$$

由于 $x>-1$，且 ξ在0与x之间，故余项中 $(1+\xi)^{\alpha-2}x^2\ge0$，

所以,：当 $0<\alpha<1$ 时，余项 $\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\xi)^{\alpha-2}x^2\le0$，即 $(1+x)^\alpha\le1+\alpha x$；

当$\alpha<0$或$\alpha>1$时，余项$\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}(1+\xi)^{\alpha-2}x^2\ge 0$，即$(1+x)^{\alpha}\ge 1+\alpha x$

9. 若函数$f(x)$在区间$(0,1)$内二阶可导，且有最小值$\min\limits_{0<x<1} f(x)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，

求证：存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)>8$

解：因为函数$f(x)$在区间$(0,1)$内二阶可导，则$f(x)$在区间$(0,1)$内一阶连续可导，又因为有最小值$\min\limits_{0<x<1} f(x)=0$，不妨设最小值点为$x_0$，即$f(x_0)=0$，由费马定理知必有$f'(x_0)=0$，并注意到$\left|\frac{1}{2}-x_0\right|<\frac{1}{2}$，

由$f(x)$在x_0处的一阶泰勒公式$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\quad(\xi\text{介于}x\text{与}x_0\text{之间})$$，即$\xi\in(0,1)$

令$x=\frac{1}{2}$得$f(\frac{1}{2})=\dfrac{f''(\xi)}{2}(\frac{1}{2}-x_0)^2$，

所以，$1=\dfrac{f''(\xi)}{2}(\frac{1}{2}-x_0)^2<\dfrac{f''(\xi)}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2=\dfrac{f''(\xi)}{8}$，即$f''(\xi)>8$

10．利用三阶泰勒公式，计算下列各数的近似值.

(1) $\sin 18^0$

解：因为$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\approx x-\dfrac{x^3}{3!}$，$18^0=\dfrac{1}{10}\pi$，

所以$\sin 18^0\approx\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!}\approx 0.3089$

(2) $\ln 1.2$

解：因为$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$，$1.2=1+0.2$

所以$\ln 1.2\approx 0.2-\dfrac{0.2^2}{2}+\dfrac{0.2^3}{3}\approx 0.1827$