习题 3.5(P185)

1． 求下列曲线的弧微分.

(1) $y=\ln(1-x^2)$

解： $y'=\dfrac{-2x}{1-x^2}$， $ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{-2x}{1-x^2}\right)^2}dx=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}dx$

(2) $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$

解： $y'=sh\dfrac{x}{a}$， $ds=\sqrt{1+\left(sh\dfrac{x}{a}\right)^2}dx=ch\dfrac{x}{a}dx$

(3) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$

解： $x_t'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$， $y_t'=3a\sin^2 t\cdot\cos t$

$(x_t')^2+(y_t')^2=3^2a^2\sin^2 t\cdot\cos^2 t$， $ds=3a|\sin t\cdot\cos t|dt$

(4) $\rho=a(1+\cos\theta)$ （心脏线）

解： $\rho'(\theta)=-a\sin\theta$

$\rho^2+\rho'^2=2a^2(1+\cos\theta)$， $ds=\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}d\theta$

或： $ds=2a\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|d\theta$

2． 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大？

解： $y'=2ax+b$， $y''=2a$

$K=\dfrac{|2a|}{(1+(2ax+b)^2)^{3/2}}$，所以当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，曲率最大，

当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时， $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，故在点 $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 处曲率最大.

3．求下列曲线在指定点处的曲率.

(1) $y=\ln\sec x$, $M_0=(x_0,y_0)$

解： $y'=\dfrac{\sec x\cdot\tan x}{\sec x}=\tan x$ ， $y''=\sec^2 x$

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=|\cos x|$$

$$K|_{(x_0,y_0)}=|\cos x_0|$$

(2) $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ ， $M_0=(a,a\cosh 1)$

解： $y'=sh\dfrac{x}{a}$ ， $y'|_{x=a}=sh1$ ， $y''=\dfrac{1}{a}\cosh\dfrac{x}{a}$ ， $y''|_{x=a}=\dfrac{1}{a}\cosh 1$

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{\frac{1}{a}\cosh 1}{(1+sh^2 1)^{3/2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\cosh^2 1}$$

(3) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ ，在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处

解： $x'_t|_{t=\frac{\pi}{2}}=-a\sin t|_{t=\frac{\pi}{2}}=-a$ ， $x''_t|_{t=\frac{\pi}{2}}=-a\cos t|_{t=\frac{\pi}{2}}=0$

$y'_t|_{t=\frac{\pi}{2}}=b\cos t|_{t=\frac{\pi}{2}}=0$ ， $y''_t|_{t=\frac{\pi}{2}}=-b\sin t|_{t=\frac{\pi}{2}}=-b$

故 $K=\dfrac{|y''_t\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_t|}{((x'_t)^2+(y'_t)^2)^{3/2}}=\dfrac{ab}{a^3}=\dfrac{b}{a^2}$

(4) $\rho=a\theta$ ，在 $\theta=\pi$ 处

解： $\begin{cases}x=a\theta\cos\theta\\ y=a\theta\sin\theta\end{cases}$,

$x'_\theta|_{\theta=\pi}=a(\cos\theta-\theta\sin\theta)|_{\theta=\pi}=-a$ ， $x''_\theta|_{\theta=\pi}=a(-2\sin\theta-\theta\cos\theta)|_{\theta=\pi}=a\pi$

$y'_\theta|_{\theta=\pi}=a(\sin\theta+\theta\cos\theta)|_{\theta=\pi}=-a\pi$ ， $y''_\theta|_{\theta=\pi}=a(2\cos\theta-\theta\sin\theta)|_{\theta=\pi}=-2a$

$$K=\frac{|y''_\theta\cdot x'_\theta-y'_\theta\cdot x''_\theta|}{((x'_\theta)^2+(y'_\theta)^2)^{3/2}}=\frac{2+\pi^2}{a(1+\pi^2)^{3/2}}$$

4．求曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 在点 $(1,\quad 1)$ 处的曲率.

解：方程两边对 x 求导：$2x-y-xy'+2yy'=0\qquad (*)$

即 $y'=\dfrac{2x-y}{x-2y}$，所以 $y'(1,1)=-1$

$(*)$式对 x 求导：$2-y'-y'-xy''+2(y')^2+2yy''=0$

得 $y''(1,1)=-6$

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

5．曲线 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求该曲率半径.

解：$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$$

$R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}$，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 最大，而 $(1+\cos^2 x)^{3/2}$ 最小，此时，曲率半径 R 取得最小值，即 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 处，$R_{\min}=1$

6．求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆.

解：曲线与 x 轴交点为 $(1,0)$，由于 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，所以，$y'(1)=1$，$y''(1)=-1$，

$$R=\frac{[1+y'^2(1)]^{3/2}}{|y''(1)|}=2^{3/2}$$

设曲率中心为 $O'(\xi,\eta)$，则有

法 1：$\begin{cases}(\xi-1)^2+(\eta-0)^2=R^2\\ \dfrac{\eta-0}{\xi-1}=-\dfrac{1}{y'(1)}\end{cases}$，即 $\begin{cases}(\xi-1)^2+\eta^2=8\\ \dfrac{\eta}{\xi-1}=-1\end{cases}$

解得：$(\xi-1)^2=4$，根据曲线的凸性得 $\xi-1>0$，故得 $\xi=3$，$\eta=-2$

法 2：（套用求曲率中心的公式），故曲率中心为 $\xi=x-\dfrac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}=1-\dfrac{1\left(1+1^2\right)}{-1}=3$，

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=0+\frac{1+1^2}{-1}=-2,$$

所以曲率圆方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$