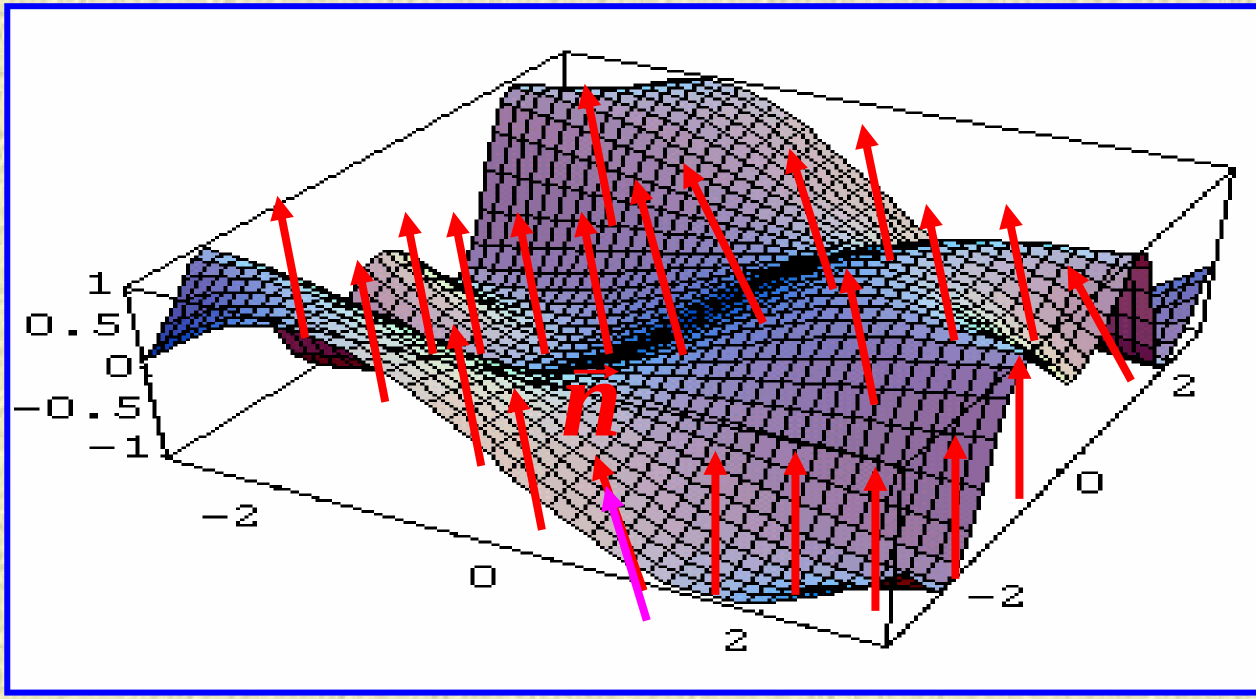
9.5　第二类曲面积分

计算流体通过曲面的流量是第二类曲面积分的物理背景。计算时应指明流体是从曲面的哪一侧流向另一侧，曲面的侧就表示曲面的“方向”，相应的流量就用正负表示，由一侧流向另一侧的流量为正，反向流动的流量就记为负。

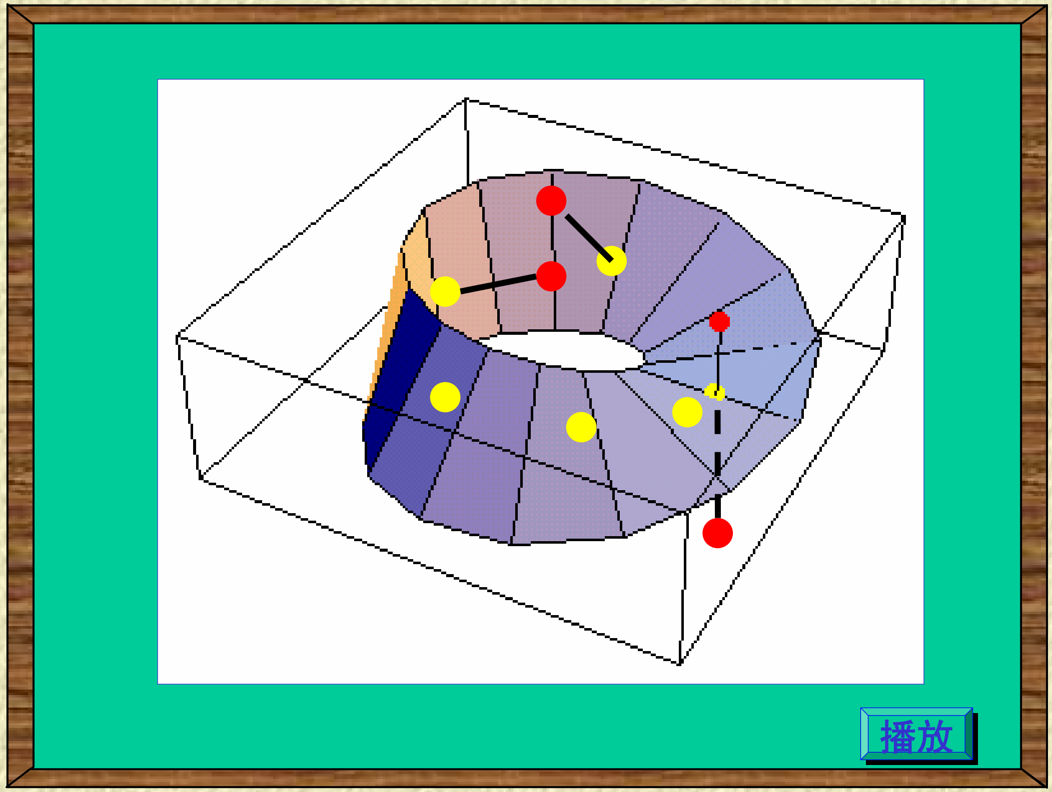
曲面的分类：1. 双侧曲面；　2. 单侧曲面.

典型双侧曲面



在曲面上任一点 P 处取定一个法向量 $\vec{n}$，当点 P 在曲面上不越过边界而任意连续变动又回到原来的位置时，法向量 $\vec{n}$ 总是不改变方向，这样的曲面叫双侧曲面，（我们以后研究的对象），否则叫单侧曲面。

典型单侧曲面：莫比乌斯带

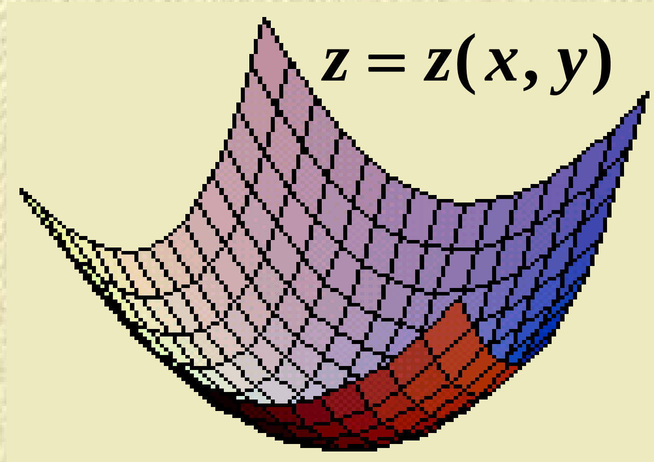


曲面**法向量的指向**决定曲面的**侧**.

决定了侧的曲面称为**有向曲面**.

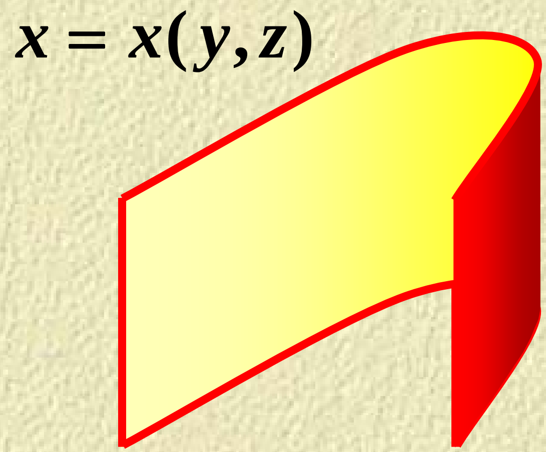
上页 下页 返回

观察以下曲面的侧 (假设曲面是光滑的)



曲面分上侧和下侧

曲面上任一点 P 处的法向量 $\vec{n}$ (有两个方向) 与 z 轴正向的夹角为锐角的一侧称为曲面的上侧，另一侧为下侧。

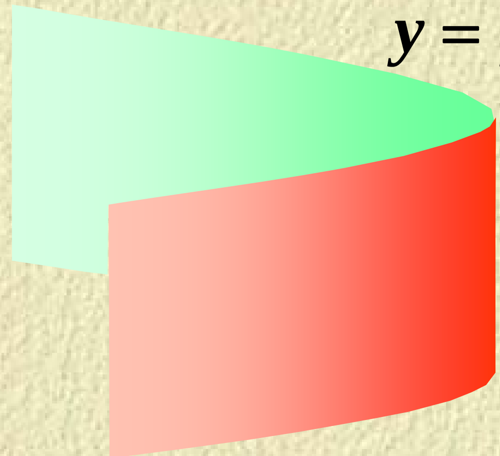


曲面分前侧和后侧

曲面上任一点 P 处的法向量 $\vec{n}$ (有两个方向) 与 x 轴正向的夹角为锐角的一侧称为曲面的前侧，另一侧为后侧。

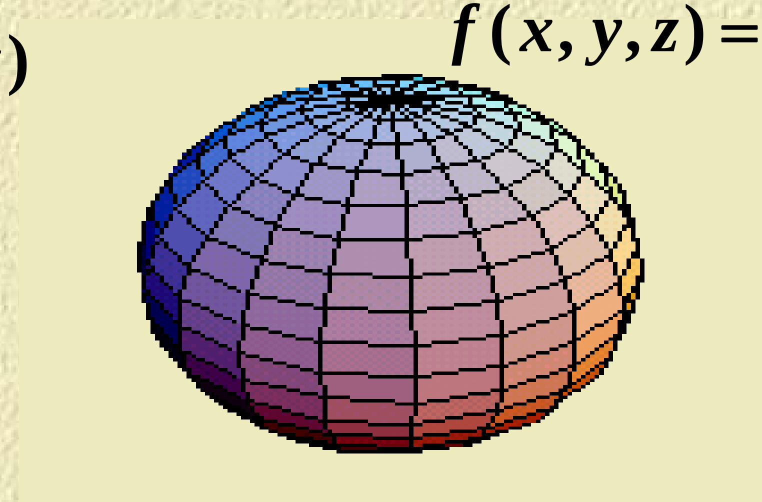
观察以下曲面的侧 (假设曲面是光滑的)

$y = y(z, x)$



曲面分右侧和左侧

$f(x, y, z) = 0$



封闭曲面分内侧和外侧

曲面上任一点 P 处的法向量 $\vec{n}$ (有两个方向) 与 y 轴正向的夹角为锐角的一侧称为曲面的右侧, 另一侧为左侧。

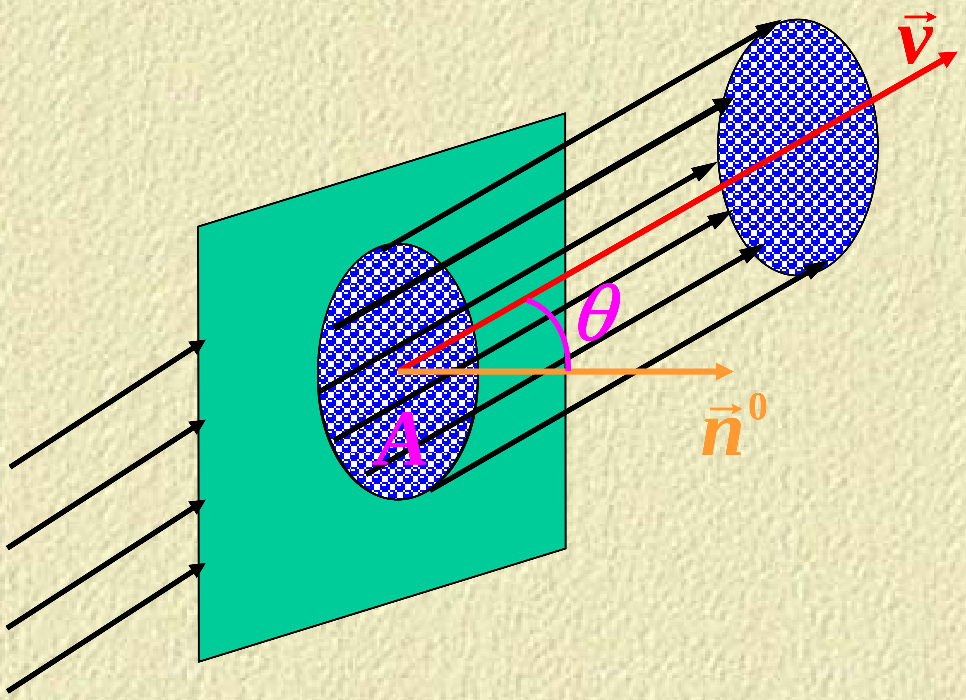
曲面上任一点 P 处的法向量 $\vec{n}$ (有两个方向) 朝内的一侧称为曲面的内侧, 另一侧为外侧。

上页 下页 返回

1. 概念和性质

引例：流体流向曲面一侧的流量.

(1) 设流速场为常向量 $\vec{v}$，有向平面区域 A（其面积也以 A 表示），求单位时间流过 A 的流体的质量 Φ（假定流体的密度为 1）.



流量

$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta$$

$$= A(\vec{v}\cdot\vec{n}^0)$$

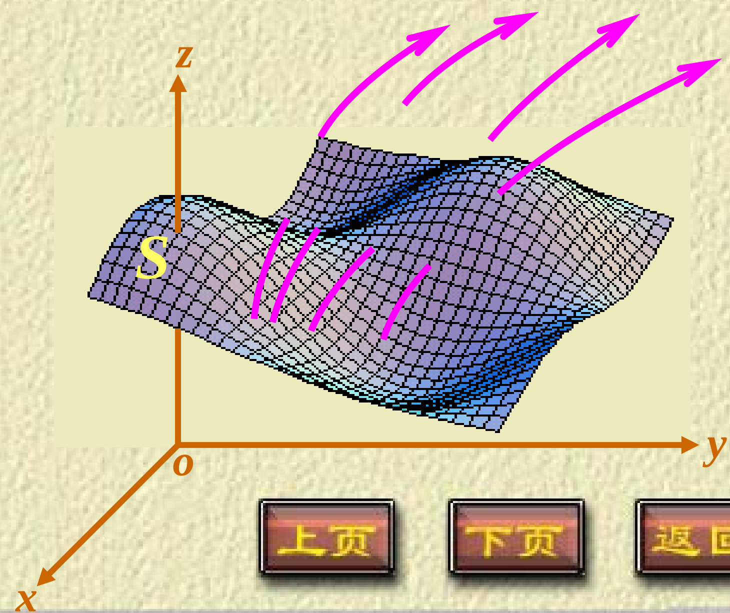
(2)　设稳定流动（流速不随时间 t 的变化而变化）的不可压缩流体(流体密度为常量，假定密度为 1)的速度场由

$$\vec{v}(x,y,z)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$$

给出, S 是速度场中的一片有向曲面, 函数

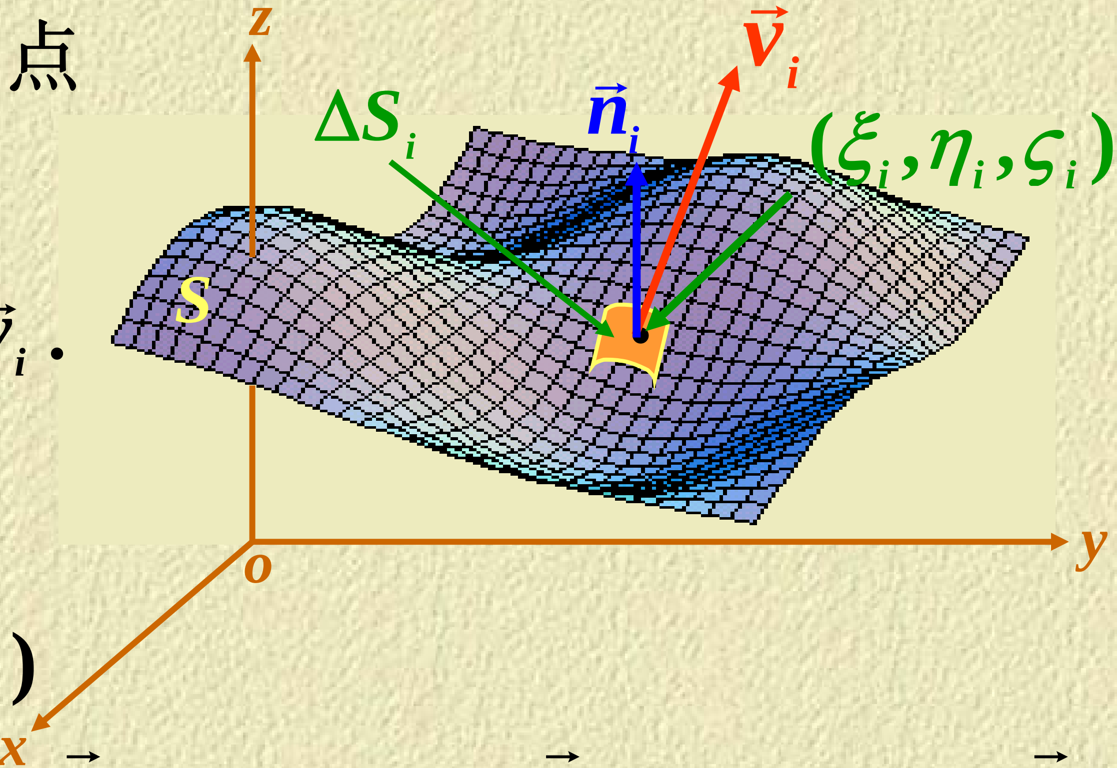
$$X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z)$$

都在 S 上连续，求在单位时间内流向 S 指定侧的流体的质量Φ.



1. 分割　把曲面 S 分成 n 小块 Δs_i（Δs_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积），

在 Δs_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，



则该点流速为 $\vec{v}_i$.

法向量为 $\vec{n}_i$.

$$\vec{v}_i=\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$

$$=X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i}+Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j}+Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k},$$

该点处曲面 S 的单位法向量

$$\vec{n}_i^0=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k},$$

2. 取近似

通过Δs_i流向指定侧的流量的近似值为

$$\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{n_i}^0\,\Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

3. 求和 通过 S 流向指定侧的流量

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i\approx\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{n_i}^0\,\Delta S_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

记$\Delta\sigma_{i,yz} = \Delta S_i \cos\alpha_i$， $\Delta\sigma_{i,xz} = \Delta S_i \cos\beta_i$

$\Delta\sigma_{i,xy} = \Delta S_i \cos\gamma_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} [X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,yz} + Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,xz}$$

$$+ Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,xy}$$

$|\Delta\sigma_{i,yz}|$, $|\Delta\sigma_{i,xz}|$, $|\Delta\sigma_{i,xy}|$表示ΔS_i在yoz、zox、xoy坐标面上投影区域面积 的近似值。

4. 取极限 $\lambda \to 0$ 取极限得到流量 Φ的精确值.

上页 下页 返回

定义 设 $S: z = z(x,y)$ 为光滑的有向曲面，函数 $Z(x,y,z)$ 在S上有界，把S分成 n 块小曲面 ΔS_i（ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积），ΔS_i 在 xoy 面上的投影为 $\Delta\sigma_{i,xy}$，$P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 是 ΔS_i 上任意取定的一点，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,xy}$$ 存在，

则称此极限为函数 $Z(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上**对坐标 x,y 的曲面积分（也称第二类曲面积分）**

上页 下页 返回

记作$\iint\limits_S Z(x,y,z)dxdy$，即

$$\iint\limits_S Z(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,xy}$$

积分曲面　　被积函数

类似可定义$\iint\limits_S X(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,yz}$

$$\iint\limits_S Y(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,zx}$$

注意：定义中$\iint\limits_S Z(x,y,z)dxdy$的$dxdy$，从形式上看与二重积分中完全一样，但其含义是不同的。二重积分中$dxdy = d\sigma > 0$，而第二类曲面积分中$dxdy$可正可负。其符号取决于曲面的侧。

存在条件: 当 $X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)$ 在有向光滑曲面 S 上连续时, 对坐标的曲面积分存在.

组合曲面积分:

$$\iint_S X(x,y,z)dydz+Y(x,y,z)dzdx+Z(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_S \{X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\}\cdot\{dydz,dzdx,dxdy\}$$

$$=\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$$

物理意义:

$$\Phi=\iint_S X(x,y,z)dydz+Y(x,y,z)dzdx+Z(x,y,z)dxdy$$

性质(常用):

1.可加性: $\iint\limits_{S_1+S_2} Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$

$$=\iint\limits_{S_1} Xdydz+Ydzdx+Zdxdy+\iint\limits_{S_2} Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$$

2.方向性 : $\iint\limits_{S^-} X(x,y,z)dydz=-\iint\limits_{S^+} X(x,y,z)dydz$

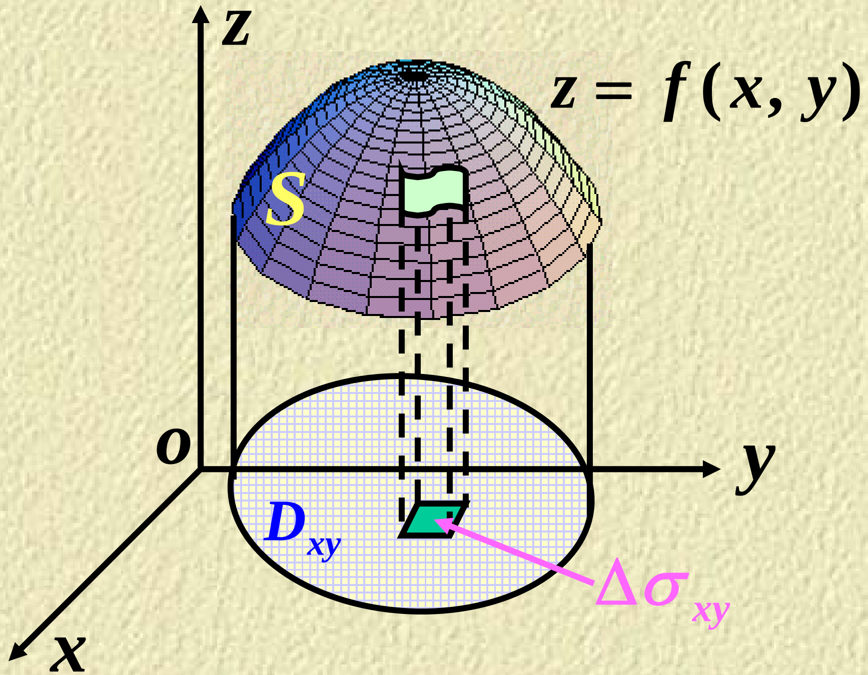
$$\iint\limits_{S^-} Y(x,y,z)dzdx=-\iint\limits_{S^+} Y(x,y,z)dzdx$$

$$\iint\limits_{S^-} Z(x,y,z)dxdy=-\iint\limits_{S^+} Z(x,y,z)dxdy$$

3.线性性质 (略)

2. 对坐标的曲面积分的计算

设积分曲面 S 是由方程$z=z(x,y)$所给出的曲面上侧, S 在 xoy面上的投影区域为D_{xy}, 函数 $z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数, 被积函数 $Z(x,y,z)$ 在 S 上连续.



$\because S$取上侧, $\cos\gamma>0$,

$dxdy>0$

$$\iint_S Z(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} Z[x,y,z(x,y)]dxdy$$

上页 下页 返回

若S取下侧，$\cos\gamma < 0,\quad dxdy < 0$

$$\iint_S Z(x,y,z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} Z[x,y,z(x,y)]dxdy$$

如果 S 由 $x = x(y,z)$给出，则有

$$\iint_S X(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} X[x(y,z),y,z]dydz$$ 前侧取正 后侧取负

如果 S 由 $y = y(z,x)$给出，则有

$$\iint_S Y(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Y[x,y(z,x),z]dzdx$$ 右侧取正 左侧取负

注意:对坐标的曲面积分,必须注意曲面所取的侧.

上页 下页 返回

将第二类曲面积分化为二重积分的步骤可概括为“一代二投三定号”：

一代：是把曲面方程代入被积函数；

二投：是把曲面向相应的坐标面投影，得到的投影区域就是二重积分的积分域；

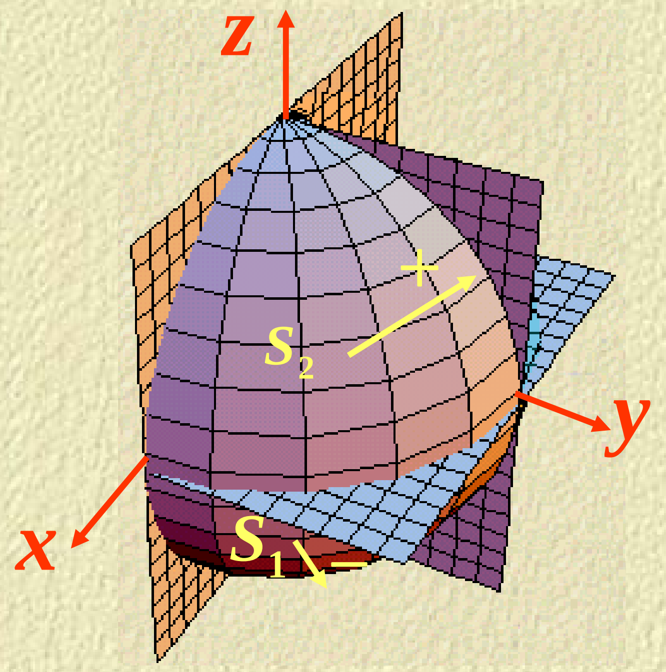
三定号：是根据曲面所给定的方向来决定取正号还是取负号。

例 1（书中例 2） 计算

$\iint\limits_{S} xyzdxdy$ 其中 S 是球

面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧

在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.



解 把 S 分成 S_1 和 S_2 两部分

$$S_1:\quad z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2};\qquad S_2:\quad z_2=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\iint\limits_{S} xyzdxdy=\iint\limits_{S_2} xyzdxdy+\iint\limits_{S_1} xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

上页 下页 返回

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta = \frac{2}{15}.$$

对称性：若曲面 S 关于 $z=0$ 对称， S_1 是 S 的 $z \geq 0$ 部分，正侧不变 ，

则当 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数时，

$$\iint_S f(x,y,z)dzdx = \iint_S f(x,y,z)dydz = 0$$

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dxdy$$

则当 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数时，

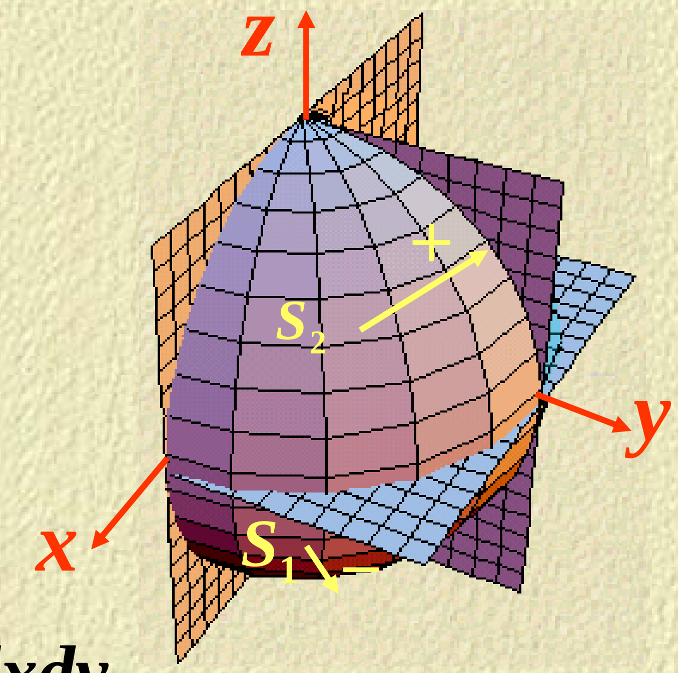
$$\iint_S f(x,y,z)dzdx = 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dzdx$$

$$\iint_S f(x,y,z)dydz = 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dydz$$

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = 0$$ 其它情形有类似结果 .

上页 下页 返回

例 1（书中例 2）计算 $\iint_S xyzdxdy$ 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.



解：$\iint_S xyzdxdy = 2\iint_{S_2} xyzdxdy$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{2}{15}.$$

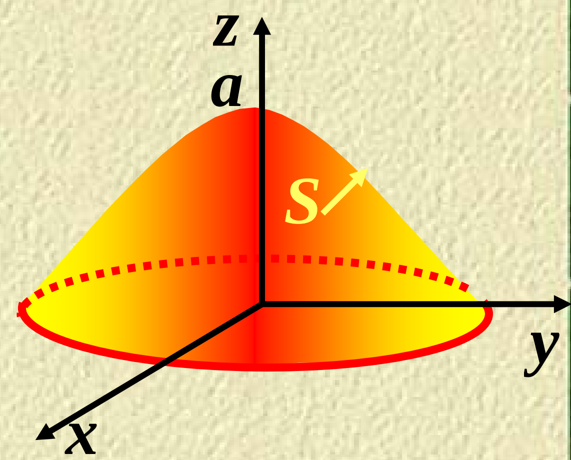
上页 下页 返回

例 2　计算 $I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是旋转抛物面 $x^2+y^2=a-z$ 在上半空间部分的上侧 $(a>0)$

解：S 在 xoy 平面上的投影域 D_{xy}：$x^2+y^2\le a$，

根据曲面及被积式的形式，前两个积分变量 x、y，具有轮换对称性，所以

$$\iint\limits_S x^2dydz=\iint\limits_S y^2dzdx$$



$$I=2\underline{\iint\limits_S x^2dydz}+\iint\limits_S z^2dxdy$$

由对称性知：该积分值为零.

上页　下页　返回

若不用积分的对称性

$$= 2\left(\iint_{S_{前侧}} x^2 dydz + \iint_{S_{后侧}} x^2 dydz \right)$$

$$+ \iint_{D_{xy}} [a - (x^2 + y^2)]^2 dxdy$$

$$= 2\left(\iint_{D_{yz}} (a - z - y^2) dydz - \iint_{D_{yz}} (a - z - y^2) dydz \right)$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a}} (a - \rho^2)^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{3} a^3$$

可用积分的对称性及变量轮换的对称性简化计算（正侧不变）。

上页 下页 返回

3. 两类曲面积分之间的关系

$$\iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

$$= \iint_S [X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma]ds$$

简写为 $\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}^0 ds = \iint_S A_{\vec{n}^0} ds$

上页 下页 返回

向量点积法（或称统一计算法）

（简化计算组合曲面积分的方法）

设$S:\ z=z(x,y)$, 法向量为 $\{-z'_x, -z'_y, 1\}$,

$$I=\iint_S Xdydz+Ydzdx+Zdxdy$$

$$=\iint_S \{X,Y,Z\}\cdot\{-z'_x,-z'_y,1\}dxdy$$

设S：$x = x(y,z)$，法向量为$\{1, -x'_y, -x'_z\}$，

$$I = \iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

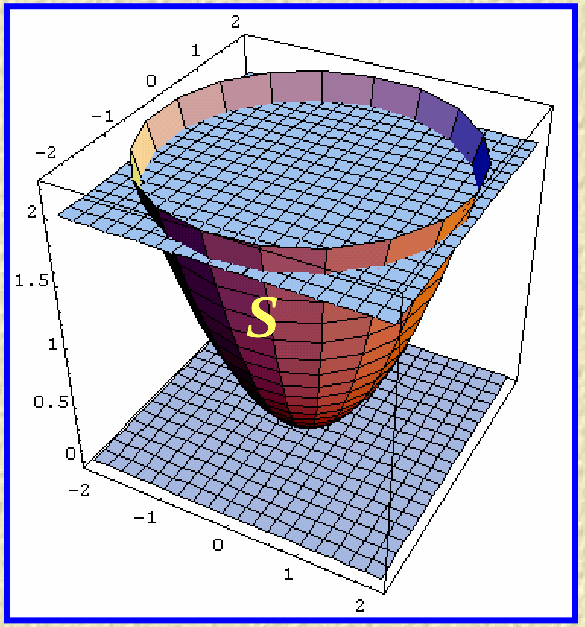
$$= \iint_S \{X, Y, Z\} \cdot \{1, -x'_y, -x'_z\} dydz$$

设S：$y = y(x,z)$，法向量为$\{-y'_x, 1, -y'_z\}$，

$$I = \iint_S Xdydz + Ydzdx + Zdxdy$$

$$= \iint_S \{X, Y, Z\} \cdot \{-y'_x, 1, -y'_z\} dzdx$$

例 3　计算$\iint\limits_S (z^2+x)dydz - zdxdy$，其中 S 是旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.



解

$$\iint\limits_S (z^2+x)dydz$$

$$=\iint\limits_S (z^2+x)\cos\alpha ds$$

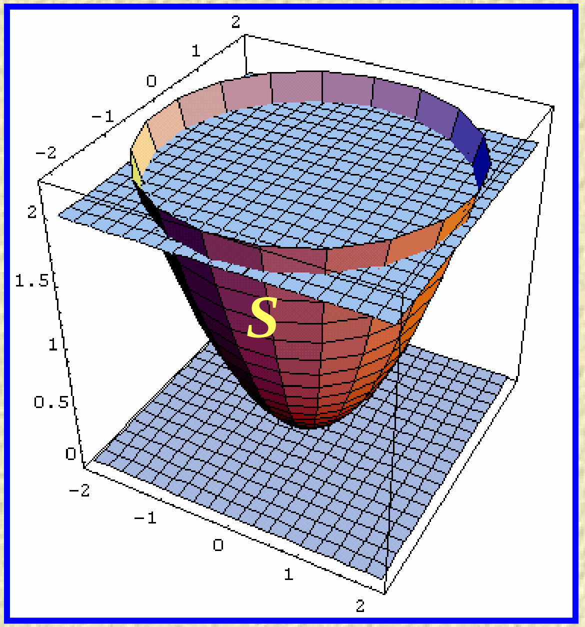
$$=\iint\limits_S (z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$$

在曲面S上，有

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\qquad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

上页　下页　返回

例 3　计算 $\iint\limits_S (z^2+x)dydz - zdxdy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.



$$\therefore \iint\limits_S (z^2+x)dydz - zdxdy$$

$$=\iint\limits_S [(z^2+x)(-x)-z]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2)\rho d\rho=8\pi.$$

将第二类曲面积分化为二重积分的步骤可概括为“一代二投三定号”：“一代”是把曲面方程代入被积函数，“二投”是把曲面向相应的坐标面投影，得到的投影区域就是二重积分的积分域，“三定号”是根据曲面所给定的方向来决定取正号还是取负号。

在具体计算时应注意以下几点：

（1）曲面 S 的方程必须是单值函数（否则，应将曲面 S 划分成若干个小曲面，应用“可加性”），被积函数 $f(x,y,z)$ 中只有两个相互独立的变量，若 D_{xy} 上进行二重积分，必须将 z 由曲面方程表示为 x,y 的函数。

(2)曲面 S 应投影到哪一坐标面由所给的积分表达式确定，如积分中含有 $dxdy$ ，则应向 xoy 坐标面投影（也可由向量点积法转换）

(3)化为二重积分时必须考虑积分曲面的方向（即曲面的侧），确定二重积分的正负号。一般地若曲面 S 投影到 xoy 面上，则二重积分前的正负号是 S 取上侧为正， S 取下侧为负，其余类似。

(4)第二类曲面积分有时用高斯公式(下节学习)计算较方便。

(5)可用积分的对称性及变量轮换的对称性简化计算。

小结

1、物理意义

2、计算时应注意以下两点

☆ 曲面的侧

☆ “一代, 二投, 三定号”

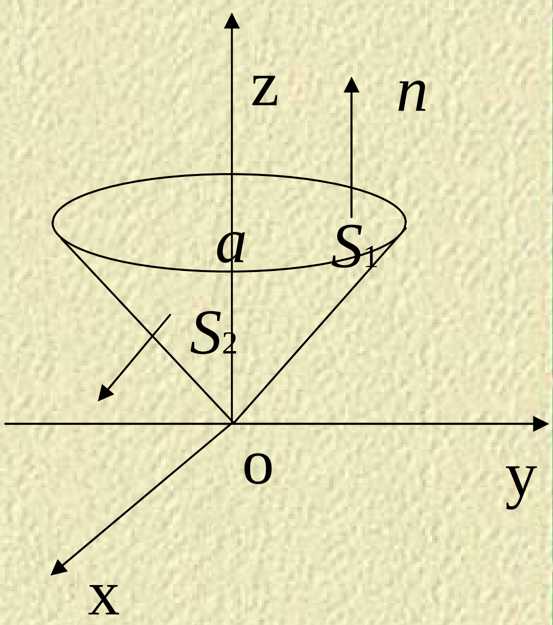
书中例 3 计算流速为 $\vec{v}=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$ 的流体在单位时间内流过锥体 $x^2+y^2\le z^2, 0\le z\le a$ 全表面外侧的流量（设密度 $\mu=1$）。

解：流量为

$$Q=\oiint_S xdydz+2ydzdx+3zdxdy,$$

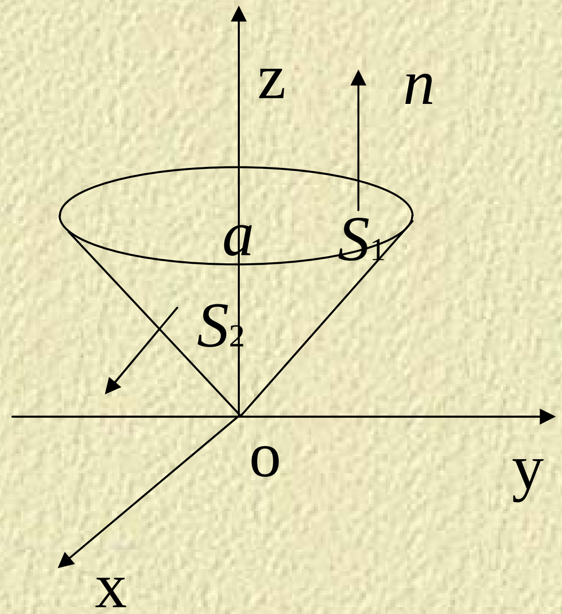
先计算 $Q_1=\oiint_S xdydz$。将 S 分为三部分 S_2^-, S_2^+, S_1，

S_1 为平面 $z=a$ 取上侧，



上页 下页 返回

S_2 关于 yoz 平面对称



$$Q_1 = \iint_{S_2} xdydz + \iint_{S_1} xdydz$$

$$= 2\iint_{S_2^+} xdydz + \iint_{S_1} xdydz$$

$$= \iint_{D_{yz}} \sqrt{z^2 - y^2}\,dydz + \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{z^2 - y^2})(-dydz) + 0$$

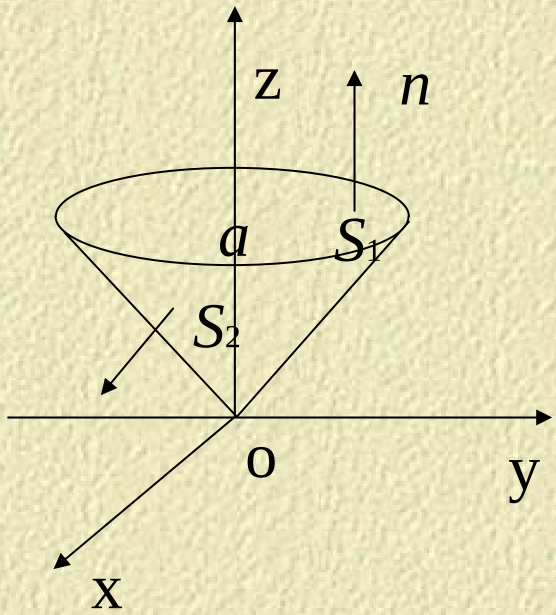
$$= 2\iint_{D} \sqrt{z^2 - y^2}\,dydz = 2\int_0^a dz \int_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - y^2}\,dy$$

$$= 2\int_0^a \frac{\pi}{2} z^2 dz = \frac{1}{3}\pi a^3 \qquad D_{yz}: \begin{cases} 0 \le z \le a \\ -z \le y \le z \end{cases}$$

上页 下页 返回

由变量轮换的对称性知

$$\oint\!\!\!\oint_S ydzdx = \oint\!\!\!\oint_S xdzdy = \frac{1}{3}\pi a^3$$



得 $$Q_2 = \oint\!\!\!\oint_S 2ydzdx = \frac{2}{3}\pi a^3$$

S_1 与 S_2 在 xoy 平面上投影为

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le a^2$$

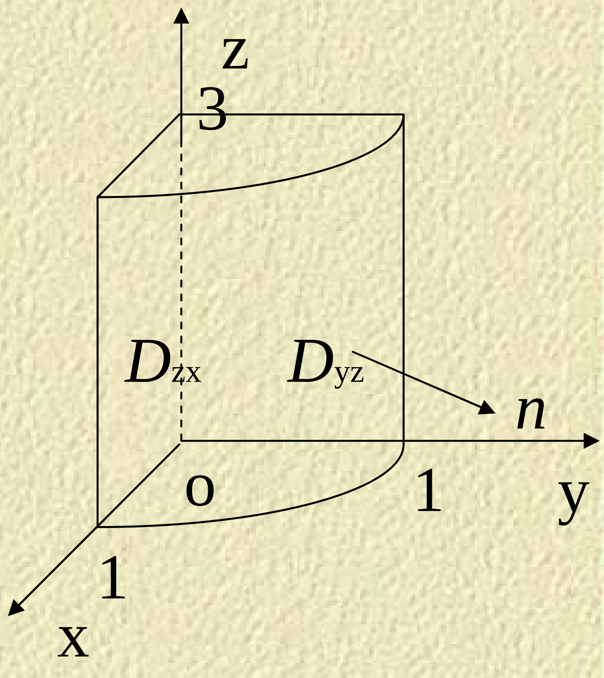
$$Q_3 = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 3\iint_{D_{xy}} adxdy + 3\iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}(-dxdy)$$

$$= 3\pi a^3 - 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \pi a^3$$

总流量为 $$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2\pi a^3$$

上页 下页 返回

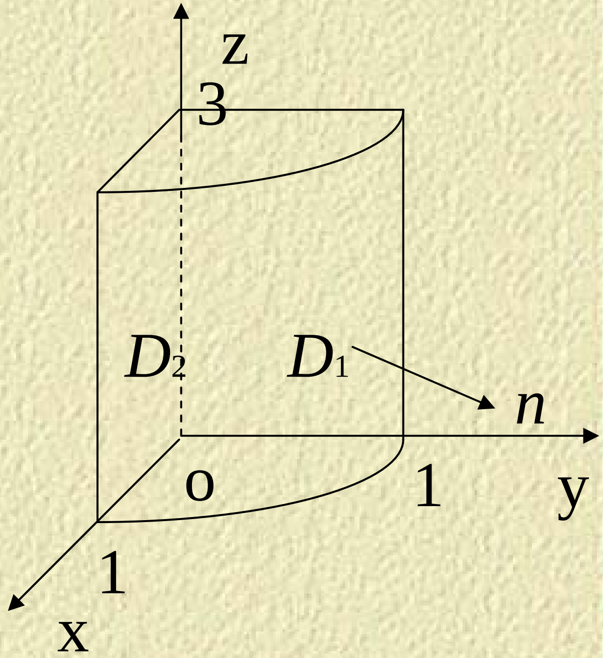
书中例 1 计算$\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$ 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 z=0 及 z=3 所截得的在第一卦限部分的曲面，取曲面的右侧。



解：因 S 垂直于 xoy 平面，所以 $\iint_S zdxdy = 0$，S 的方程可写为 $x = \sqrt{1-y^2}$ 与 $y = \sqrt{1-x^2}$，它在 yoz 平面与 zox 平面上的投影分别为矩形 D_{yz} 与 D_{zx}

上页 下页 返回

书中例 1 计算$\iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$ 其中 S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 z=0 及 z=3 所截得的在第一卦限部分的曲面，取曲面的右侧。



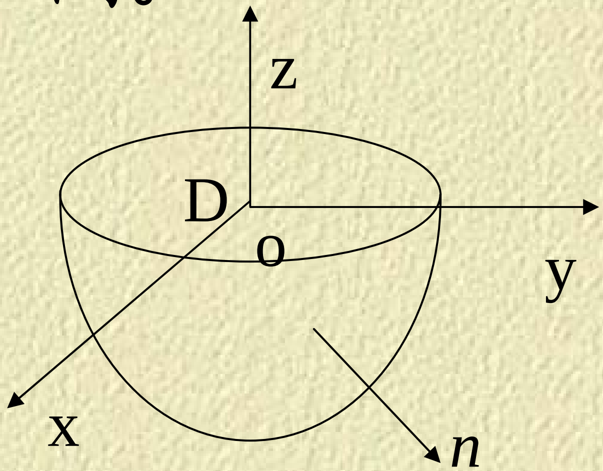
$$A = \iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$$

（由变量轮换的对称性）

$$= 0 + 2\iint_{S^+} xdydz = 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2}\,dydz$$

$$= 2\int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 6\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 6 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

例　计算$\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 下半部分的下侧。



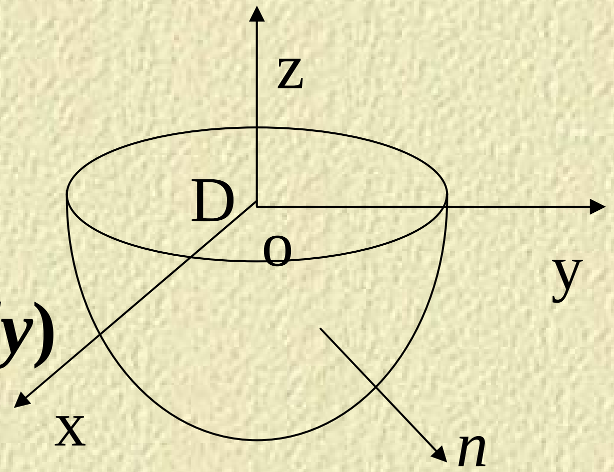
解: 曲面 S 关于 xoz 平面及 yoz 平面对称，被积函数 x^2y^2z 关于变量 x、y 为偶函数，由对称性得:

$$\iint\limits_S x^2y^2zdxdy = 4\iint\limits_{S_1} x^2y^2zdxdy$$

曲面 S_1 为曲面 S 在第五卦限的部分,其在平面在 xoy 平面上的投影域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\le R^2$　$x\ge 0, y\ge 0$。

上页　下页　返回

$$\iint_{S} x^2y^2 z\,dxdy = 4\iint_{S_1} x^2y^2 z\,dxdy$$



$$= 4\iint_{D_{xy}} x^2y^2 \times (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})(-dxdy)$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho^2\cos^2\theta \cdot \rho^2\sin^2\theta \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \int_0^R \rho^5\sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\rho$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta - \sin^4\theta) d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^7(\sin^5 t - \sin^7 t) dt$$

$$= \frac{2}{105}\pi R^7$$

作业：

P201： 1. 3. 5. 6. 7. 8. 9.