习题 3.7(P201)

1．选择题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=(\quad)$

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(6x-\sin 6x)+(\sin 6x+xf(x))}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}$

$\overset{\text{由泰勒}}{\underset{\text{公式}}{=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x-[6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^4)]}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{36x^3+o(x^4)}{x^3}=36$，　故选（C）.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图 3-32 所示，则 $f(x)$ 有 $(\quad)$

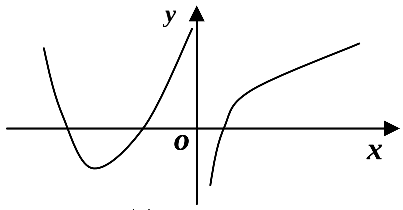


图　3 – 32

A. 一个极小点和两个极大点.
B. 两个极小点和一个极大点.
C. 两个极小点和两个极大点.
D. 三个极小点和一个极大点.

解：由图可知共有 3 个驻点及一个不可导，即只有这四个点可能是极值点，设这四个点从左至右依次为 x_1、x_2、x_3、x_4.

在点 x_1 附近，其导数是从正变负，故该点是极大值点;

在点 x_2 附近，其导数是从负变正，故该点是极小值点;

在点 x_3 附近，其导数是从正变负，故该点是极大值点;

在点 x_4 附近，其导数是从负变正，故该点是极小值点;

故选（C）.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 满足关系式 $y''-2y'+4y=0$，且 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$ 则 $f(x)$ 在点 x_0 处 $(\quad)$

A.有极大值.　B. 有极小值.

C.在 x_0 的某邻域内，$f(x)$ 单调增加.　D. 在 x_0 的某邻域内，$f(x)$ 单调减少.

解：由 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$ 及题设的关系式可得：

$$y''(x_0)=2y'(x_0)-4y(x_0)=0-4y(x_0)=-4f(x_0)<0$$

由极值存在的第二充分条件知：$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值. 故选（A）.

(4) 方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 ( ) 个根

A. 0　B.1　C. 2　D.无穷多

解：设 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，由于 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(0)=-1\neq 0$，故我们可在 $(0,+\infty)$ 上讨论，即 $f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x\quad x\in(0,+\infty)$

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}-\cos x\geq 1+1-1=1\neq 0$

即当 $x\in[1,+\infty)$ 时，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 没有根

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0+0+0=0$

即当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调增加，又 $f(0)=-1<0$，$f(1)\geq 1>0$，

由零点定理及单调性得：存在惟一的 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即 ξ 是方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 的根，又由偶函数的性质知：$-\xi$ 也是方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 的根.　故选（C）.

(5) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$，则 ( )

A. 在区间 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$

B. 在区间 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$

C. 在区间 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)<x$，在区间 $(1,1+\delta)$ 内 $f(x)>x$

D. 在区间 $(1-\delta,1)$ 内 $f(x)>x$，在区间 $(1,1+\delta)$ 内 $f(x)<x$

解：因为 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，

故在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内，$f''(x)<0$，　由泰勒公式，在 $(1-\delta,1+\delta)$ 内有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+f''(\xi)(x-1)^2$$

$$=1+1\times(x-1)+f''(\xi)(x-1)^2=x+f''(\xi)(x-1)^2<x$$

故选（A）.

(6) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=a$ 处二阶可导，且皆取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$

在点 $x=a$ 处(   )

A.必取极大值　B. 必取极小值　C.不可能取极值　D.不能确定是否取极值

解：不能确定是否取极值. 例如：

$f(x)=1-x^4$， $g(x)=\begin{cases}-1-x^6 & x\le 0\\ -1-2x^4 & x>0\end{cases}$，考察点 $x=0$ 处

显然，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且取得极大值；

$$g'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1-x^6-(-1)}{x}=\lim_{x\to0^-}-x^5=0$$

$$g'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1-2x^4-(-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}-2x^3=0$$

即 $g'(0)=0$

故 $g'(x)=\begin{cases}-6x^5 & x\le 0\\ -8x^3 & x>0\end{cases}$

$$g''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-6x^5-0}{x}=\lim_{x\to0^-}-6x^4=0$$

$$g''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-8x^3-0}{x}=\lim_{x\to0^+}-8x^2=0$$

即 $g''(0)=0$

又当 $x\in(-\delta,0)$ 时， $g'(x)>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时， $g'(x)<0$，故 $g(0)$ 为极大值；

所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均满足假设条件，则

$$F(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}-1+x^4-x^6+x^{10} & x\le 0\\ -1-x^4+2x^8 & x>0\end{cases}$$

当 δ 足够小时， $x\in(-\delta,0)$ 时， $F(x)=-1+x^4-x^6+x^{10}=-1+x^4+o(x^4)>-1$

$x \in (0, \delta)$ 时，$F(x) = -1 - x^4 + 2x^8 = -1 - x^4 + o(x^4) < -1$

所以 $F(0)$ 不是极值.

再如：$f(x) = 1 - x^2$，$g(x) = 1 - x^4$，考察点 $x = 0$ 处，显然函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均满足假设条件，则 $F(x) = f(x)g(x) = 1 - x^2 - x^4 + x^6$

令 $F'(x) = -2x - 4x^3 + 6x^5 = 0$ 知：$x = 0$ 是驻点，

又 $F''(0) = (-2 - 12x^2 + 30x^4)\Big|_{x=0} = -2 < 0$

故 $F(0)$ 是极大值.

因而选（D）.

(7) 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 拐点的个数是(　)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

解：$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$，$y' = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

$$y'' = 12x^2 - 48x + 44 = 4(x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{3})(x - 2 + \frac{\sqrt{3}}{3})$$

令 $y'' = 0$，得 $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$，或 $x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

当 $x \in (-\infty, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$y'' > 0$；当 $x \in (2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$y'' < 0$；

当 $x \in (2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 时，$y'' > 0$；所以曲线有两个拐点，故选（C）.

(8)设 $f(x)$ 的导数在点 $x = a$ 处连续，且 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$，则(　)

A. 点 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小点　B. 点 $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大点

C. 点 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. 点 $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解：由 $f'(x)$ 在点 $x=a$ 处连续及 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 得 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0=f'(a)$

所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0$

由极值存在的第二充分条件知：点 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大点

故选（B）.

(9) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ( )

A.无渐近线　B. 有斜渐近线　C. 只有垂直渐近线　D. 既有垂直渐近线，又有水平渐近线.

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$， $y=1$ 为水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$， $x=0$ 为垂直渐近线.

故选（D）.

(10) 曲线 $y=e^{-x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 有( ) 条渐近线.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解： $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=0$， $y=0$ 为水平渐近线；

又因为 $\left|e^{-x^2}\right|\le 1$， $\left|\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}\right|\le\dfrac{\pi}{2}$， 故不存在 $x=a$，

使得 $\lim\limits_{x\to a}e^{-x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty$， 即不存在垂直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}}{x}=0$， 故不存在斜渐近线.

故选（A）.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判定此驻

点是否是极值点

解：方程两端对 x 求导：$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0 \quad (*)$

令 $y'=0$ 得 $2y-2x=0$，推得 $y=x$，代入原方程得：$2x^3-x^2=1$

解得：$x=1$

$(*)$ 式再对 x 求导：$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2y'+2y'+2xy'-2=0$

注意到在驻点 $x=1$ 处，$y=1$，$y'=0$，代入上式得 $6y''(1)-4y''(1)+2y''(1)-2=0$，

即 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，由极值存在的第二充分条件知：$x=1$ 是极小值点.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)>0$

证明：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的最大值最小值定理知：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取得最大值 M 与最小值 m，由于 $f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，所以最大值 M 与最小值 m 至少有一个不在端点上取得，设最值点为 $x_0\in(a,b)$，不妨设 $f(x_0)>f(a) \quad (f(x_0)<f(a))$，因而 $f(x)$ 在 $[a,x_0] \quad ([x_0,b])$ 上满足拉格朗日中值定理，所以存在 $\xi\in(a,x_0)\subset(a,b) \quad (\xi\in(x_0,b)\subset(a,b))$，使得 $f(x_0)-f(a)=f'(\xi)(x_0-a)\ (f(b)-f(x_0)=f'(\xi)(b-x_0))$，推得 $f'(\xi)>0$.

4.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\dfrac{1}{2})=1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=1$。

证明：设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1$，且 $F(0)=0$，$F(1)=-1$，$F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$，

因为 $F(1)\cdot F(\dfrac{1}{2})<0$，由介值定理得，必存在 $x_0\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $F(x_0)=0$ 从而 $F(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理，所以 $\exists\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$

即 $f'(\xi)=1$

5. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且对于任意 $x\in(a,b)$，有 $f(x)g'(x)-f'(x)\neq 0$。求证：$f(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个零点.

证明：反证法：假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个零点，即存在 $x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 设 $F(x)=-f(x)e^{-g(x)}$，则 $F'(x)=e^{-g(x)}[f(x)g'(x)-f'(x)]$，且 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的性质知，$F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理，故存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $F'(\xi)=e^{-g(\xi)}[f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)]=0$，即 $[f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)]=0$，与给定的条件 $f(x)g'(x)-f'(x)\neq 0$ 矛盾！即假设错误。故 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个零点.

6. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，$g(x)\neq 0$，且恒有 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0$，证明：存在常数 c，使 $f(x)=cg(x)$.

证明：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{-\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}}{g^2(x)}=0$，

所以存在常数 c，使 $F(x)=c$，即 $f(x)=cg(x)$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $e^{\xi-\eta}(f(\xi)+f'(\xi))=1$.

证明：$e^{\xi-\eta}(f(\xi)+f'(\xi))=1$ 变形为 $\dfrac{e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))}{e^{\eta}}=1$，

因而设 $F(x)=f(x)e^{x}$，$G(x)=e^{x}$，则 $F'(x)=e^{x}(f(x)+f'(x))$，由题设条件知 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理，故应有 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，由条件 $f(a)=f(b)=1$，即 $e^{b}-e^{a}=e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))(b-a)$；$e^{b}-e^{a}=e^{\eta}(b-a)$，

$\xi, \eta \in (a, b)$，两式相除即得 $\dfrac{e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))}{e^{\eta}}=1$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a>0$.证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证明：设 $g(x)=x^2$，$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日、柯西中值定理，故应有

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$，$\xi,\eta\in(a,b)$，前式带入后式，

整理即得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)=3$.

证明：$f(x)$ 的二阶麦克劳林展开式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

由 $f'(0)=0$，即 $f(x)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3$

所以 $f(-1)=0=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}$，$f(1)=1=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_2)}{3!}$，

后式减前式整理得 $\dfrac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}=3 \quad \xi_1,\xi_2\in(-1,1)$，

注意到 $\min\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}\le\dfrac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}=3\le\max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$，由题

设知 $f'''(x)$ 在以 ξ_1，ξ_2 为端点的区间上连续，由介值定理：存在介于 ξ_1，ξ_2 之间的 ξ，

即 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$|f''(x)|\le A$，证明：$|f'(x)|\le A/2$

证明：$\forall x\in[0,1]$，$f(x)$ 的一阶泰勒公式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2，则$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2，\qquad 0<\xi_1<x\le 1$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2，\quad 0\le x<\xi_2<1$$

两式相减得 $f'(x)=\dfrac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$，故

$$|f'(x)|\le\frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x)^2\le\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}[1-2x(1-x)]\le\frac{A}{2}$$

11. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有连续的 4 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，$f^{(4)}(x_0)<0$，证明：$f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

证明：因为 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有连续的 4 阶导数，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f^{(4)}(x)=f^{(4)}(x_0)<0$，

由极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，$x\ne x_0$ 时，有 $f^{(4)}(x)<0$，由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$$

$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 且 $x\ne x_0$，ξ 介于 x 与 x_0 之间.

因而有 $f^{(4)}(\xi)<0$，因为 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，

所以 $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$，即 $f(x_0)=f(x)-\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(t-x_0)^4>f(x)$

故 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

12. 设 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$. 证明：$f'(0)=0$，且 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值.

证明：由导数的定义及已知条件 $f(0)=0$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$ 得：

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\cdot x=2\times0=0$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2>0$ 及极限的保号性得，在 $x=0$ 的某一去心邻域内均有 $\dfrac{f(x)}{x^2}>0$

从而有 $f(x)>0=f(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值.

错误解法： $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=2$, 所以 $f'(0)=0$， $f''(0)=4>0$

从而， $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值.

原因在于：首先题中未给出“ $f(x)$ 具有二阶导数”这个条件，其次，即使给了这个条件，极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}$ 未必存在，即没有条件支持使用罗必达法则，再者，即使“ $f(x)$ 具有二阶导数， $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}$ 存在”，由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=2$ 推得 $f''(0)=4$ 也需要条件“ $f(x)$ 具有二阶连续导数”.

13. 设 $f(x)$ 二阶可导， $f''(x)<0$，又 $f(a)>0$， $f'(a)<0$，求证： $f(x)$ 在区间 $(a, a-\frac{f(a)}{f'(a)})$ 内恰有一个零点.

证明：(1)证存在性： $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,$$

由于 $f''(x)<0$，故 $f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)$，

所以 $f(a-\frac{f(a)}{f'(a)})<f(a)+f'(a)(a-\frac{f(a)}{f'(a)}-a)=0$，又 $f(a)>0$，由零点定理知：至少存在 ξ，使得 $f(\xi)=0$；

(2)证惟一性：

法 1：由于 $f''(x)<0$，即函数 $f'(x)$ 单调递减，故 $f'(x)\le f'_{\max}(x)=f'(a)<0$，即函数 $f(x)$ 单调递减，故 ξ 惟一.

法 2（反证法）：假设 $f(x)$ 在区间 $(a, a-\frac{f(a)}{f'(a)})$ 内还有一个零点 η．即 $f(\eta)=0$，则 $f(x)$ 在以 ξ 及 η 为端点的区间上满足罗尔定理：存在介于 ξ 及 η 之间的 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，

与 $f'(x)<0$ 矛盾！

14. 试讨论方程 $\ln x = ax\ (a>0)$ 有几个实根.

解：设 $f(x)=\ln x - ax$ ，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$ ，故当 $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减，即 $x=\frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 最大值点，又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ，故存在 $x_1\in(0,\frac{1}{a})$，$x_2\in(\frac{1}{a},+\infty)$，使得 $f(x_1)<0$，$f(x_2)<0$. 由于 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1$，当 $a<\frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a})>0$，由零点定理即单调性知：方程在区间 $(0,\frac{1}{a})$ 及 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 内各有一个实根；当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a})=0$，故方程在区间 $(0,+\infty)$ 内只有一个实根 $x=\frac{1}{a}$；当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a})<0$，即 $f(x)<0$，此时方程在区间 $(0,+\infty)$ 内没有实根.

综上所述，当 $a<\frac{1}{e}$ 时，方程有两个实根；当 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程只有一个实根；当 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程没有实根.

15. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(\frac{1}{n}+1)]$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(\frac{1}{n}+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(\frac{1}{x}+1)]$

法 1 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\ln(\frac{1}{x}+1)}{\frac{1}{x^2}}\overset{令 t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t-\ln(t+1)}{t^2}\overset{洛必达}{\underset{法则}{=\!=\!=}}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{2t(t+1)}=\dfrac{1}{2}$

法 2 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{3}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}]$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}]$

法 1 $\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{a}{x^2+a^2}+\dfrac{a}{(x+1)^2+a^2}}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3(2x+1)}{2(x^2+a^2)((x+1)^2+a^2)}=a$

法 2：设 $f(x)=\arctan\frac{a}{x}$，则 $f'(x)=-\frac{a}{x^2+a^2}$，由拉格朗日中值定理得

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=-f'(\xi)=\frac{a}{\xi^2+a^2}\qquad \xi\in(x,1+x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}]=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{a}{\xi^2+a^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{a}{x^2+a^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{1+\dfrac{a^2}{x^2}}=a$$

16. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，求 $f'(0)$， $f''(0)$ 的值.

解：$\lim\limits_{x\to0}\cos x-1=0$， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}e^{f(x)}-1=0$。

因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处必连续，所以 $e^{\lim\limits_{x\to0}f(x)}-1=0$，由此得 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$。所以

$$1=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^2}{2}}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2f(x)}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}=-\lim_{x\to0}\frac{x}{f'(x)}$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$

因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$，因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，所以 $f(x)$ 在

点 $x=0$ 处一阶连续可导，

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$. 故 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$

17. 证明下列不等式成立.

（1）$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\quad (a>1,n\ge 1)$

证明:（利用拉格朗日中值公式）设 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a$，当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，

$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 严格单调递增. 又 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$ 满足拉格朗日中值定理，故有

$a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right]=a^{\xi}\ln a\left[\dfrac{1}{n(n+1)}\right]\quad (\dfrac{1}{n+1}<\xi<\dfrac{1}{n})$，从而有

$a^{\frac{1}{n+1}}\ln a\dfrac{1}{(n+1)^2}\le a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\xi}\ln a\left[\dfrac{1}{n(n+1)}\right]\le a^{\frac{1}{n}}\ln a\dfrac{1}{n^2}$

即 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}\quad (a>1,n\ge 1)$

（2）$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}\quad (x>0)$

证明：即证 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0\quad (x>0)$，

设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$，则 $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{1+x^2}>0$，

法 1：（利用单调性）由于 $f'(x)>0$，$f(0)=0$，故 $f(x)>f(0)=0$.

法 2：（利用拉格朗日中值公式）由于 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理，故有

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x>0\quad (x>0)$$

（3）$\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}\quad (0<x<1)$

证明：设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，则 $f'(x)=\dfrac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{(1+x)x^2\ln^2(1+x)}$

设 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则 $g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=2\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}$$

$\because x>\ln(1+x)\quad(x>0)$，故：$g''(x)<0\quad(x>0)$，即 $g'(x)$ 当 $x>0$ 时严格单调递减，

所以 $g'(x)<g'(0)=0\quad(x>0)$，即 $g(x)$ 当 $x>0$ 时严格单调递减，

所以 $g(x)<g(0)=0\quad(x>0)$，从而，$f'(x)<0\quad(x>0)$，

因而，$f(x)$ 当 $x>0$ 时严格单调递减，

又

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\overset{\text{无穷小}}{\underset{\text{代换}}{=\!=}}\lim_{x\to+0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{\underset{\text{法则}}{=\!=}}\lim_{x\to+0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}$$

所以 $\frac{1}{\ln2}-1=\mathrm{f}(1)<f(x)<\frac{1}{2}\quad(0<x<1)$

18. 设甲船位于乙船以东 $75n\ mile$ 处，甲船以 $12n\ mile/h$ 的速度向西行驶，乙船以 $6n\ mile/h$ 的速度向北行驶. 问经过多长时间两船距离最近.

解：以乙船初始位置为坐标原点，初始时乙到甲方向为 x 轴正向，建立直角坐标系，

则两船距离为 $d=\sqrt{(75-12t)^2+(6t)^2}$，并且求 d 的最小值等价于求

$f(t)=d^2=(75-12t)^2+(6t)^2$ 的最小值。令 $f'(t)=2\cdot(75-12t)(-12)+72t=0$，得唯一驻点 $t=5$，由于此实际问题最小值一定存在，所以 $t=5$ 即为最小值。

或者再求二阶导数 $f''(5)=360>0$，也可说明 $t=5$ 即为最小值。

19.在半径为 a 的半球外作一外切圆锥体，要使圆锥体体积最小，圆锥的高度及底半径应是多少？

解：如图所示，设外切圆锥的半顶角为 α，底面半径为 r，高为 h，则 $\sin\alpha=\frac{a}{h}$，$\cos\alpha=\frac{a}{r}$，

所以 $h=\frac{a}{\sin\alpha}$，$r=\frac{a}{\cos\alpha}$，外切圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi a^3\frac{1}{\cos^2\alpha\sin\alpha}$。

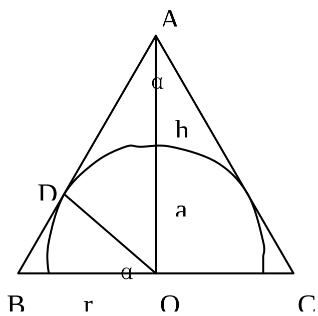
求 V 的最小值等价于求 $\cos^2\alpha\sin\alpha=(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha$ 的最大值，令 $t=\sin\alpha$，问题转化为在 $0<t<1$ 的条件下，求 $f(t)=(1-t^2)t=t-t^3$ 的最大值。$f'(t)=1-3t^2$，令

$f'(t)=0$ 得驻点 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （舍），由于驻点唯一，

并且此实际问题最值一定存在，所以 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，即

$\alpha=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，外切圆锥体体积最小，最小值为

$$V_{\min}=\frac{1}{3}\pi a^3\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$



20. 求下列函数的单调区间、极值点，凸性区间及拐点，并作图.

(1) $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$

解： $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}=x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$，

$$y'=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

令 $y'=0$ 得三个驻点 0， $-\sqrt{3}$， $\sqrt{3}$，不可导点为 -1， 1，

$$y''=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x+1)^3}\right)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3},$$ 令 $y''=0$，得 $x=0$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+		-		-		-		-		+
y''	-	极大	-		+	(0,0) 拐点	-		+	极小	+
y	增，凸		减，凸		减，凹		减，凸		减，凹		增，凹

(2) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

解： $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1+2)^3}{(x-1)^2}=(x-1)+6+12(x-1)^{-1}+8(x-1)^{-2}$，

$y'=1-12(x-1)^{-2}-16(x-1)^{-3}=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，

令 $y'=0$ 得两个驻点 -1， 5，不可导点为 1。

$y''=24(x-1)^{-3}+48(x-1)^{-4}=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令 $y''=0$，得 $x=-1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+		+		-		+
y''	-		+		+		+
y	增，凸	(-1,0)拐点	增，凹	无定义	减，凹	极小	增，凹