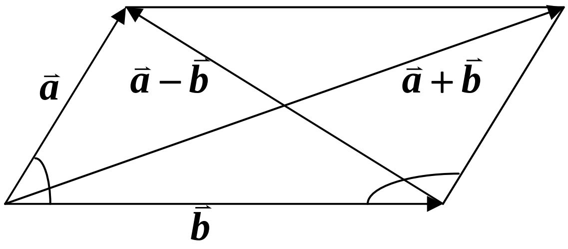
习题 6.2（P9）

1．已知向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角$\theta=60^0$，且$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=8$，计算$|\vec{a}+\vec{b}|$和$|\vec{a}-\vec{b}|$.

解：如图，由余弦定理得

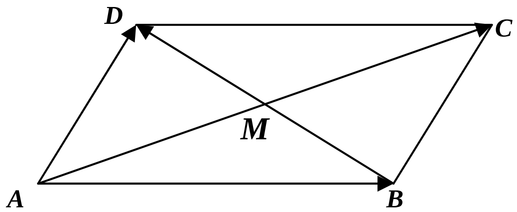


$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos120^0}=\sqrt{129}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^0}=7$$

2．试用向量证明：如果平面上一个四边形的对角线互相平分，则它是平行四边形.

证明：如图，设对角线相交于M，则



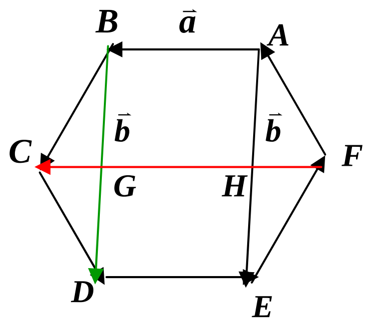
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},\quad \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$$

故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$

即该四边形是平行四边形.

3．正六边形$ABCDEF$（字母按逆时针方向排列），设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$试用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

解：如图



$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

4．设向量$\overrightarrow{AB}=8\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}$，其中点$A$的坐标为$(2,-1,7)$、求点$B$的坐标.

解： 设点B的坐标为(x,y,z)，故

$$\overrightarrow{AB}=(x-2)\vec{i}+(y+1)\vec{j}+(z-7)\vec{k}=8\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}$$

即 $x-2=8$，$y+1=9$，$z-7=-12$，解得：$x=10$，$y=8$，$z=-5$，

故点B的坐标为$(10,8,-5)$.

5．求平行于向量$\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量.

解： $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，

故所求的单位向量 $\vec{b}=\pm\vec{a}^0=\pm\left(\frac{6}{11}\vec{i}+\frac{7}{11}\vec{j}-\frac{6}{11}\vec{k}\right)$

6．已知向量$\vec{a}=\{1,-2,3\}$，$\vec{b}=\{-4,5,8\}$，$\vec{c}=\{-2,1,0\}$，求向量$\vec{d}$，使$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$是零向量.

解： 因 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，所以 $\vec{d}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\{5,-4,-11\}$

7．证明：三点$A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$共线

证明： $\because$ $\overrightarrow{AB}=\{2,4,6\}$，$\overrightarrow{BC}=\{-3,-6,-9\}$

$\because$ $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$， 故三点共线

8．设向量$\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量$\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$在$x$轴上的投影.

解： $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$

故向量$\vec{a}$在x轴上的投影为13.

9．设点$A(3,2,-1)$，$B(5,-4,7)$，$C(-1,1,2)$，求ΔABC的由点C向AB

边所引的中线的长度.

解： 设点 A 、B 的中点为 $M(x, y, z)$，

则 $x=\dfrac{3+5}{2}=4$， $y=\dfrac{-4+2}{2}=-1$， $z=\dfrac{-1+7}{2}=3$

故 $|CM|=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}$

10．设点 A 、B 、M 在同一直线上， $A(1,2,3)$， $B(-1,2,3)$， 且 $AM:MB=-\dfrac{3}{2}$，求点 M 的坐标.

解： 因 $A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，且点 A 、B 、M 在同一直线上，所以设点 M 的坐标为 $(x,2,3)$，由于 $AM:MB=-\dfrac{3}{2}$，所以有 $\dfrac{x-1}{-1-x}=-\dfrac{3}{2}$，

解得： $x=-5$，故所求点 M 的坐标为 $(-5,2,3)$

11．已知点 $M(4,\sqrt{2},1)$，$N(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模、方向余弦和方向角.

解：$\overrightarrow{MN}=(3-4)\vec{i}+(0-\sqrt{2})\vec{j}+(2-1)\vec{k}=-\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k}$

$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$

$\overrightarrow{MN}^0=-\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}$

故 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$， $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$； $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$， $\beta=\dfrac{3\pi}{4}$， $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

12．设一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，与 z 轴的夹角是前者的两倍，求此向量的方向角.

解： 由题意得：$\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

所以 $2\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$， 即 $2\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)^2=1$，

解得： $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 或 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

故所求向量的方向角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$，$\beta = \dfrac{\pi}{2}$，$\gamma = \pi$；

或 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$，$\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

13．设向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{j}$ 成 60^0 角，与单位向量 $\vec{k}$ 成 120^0 角，且 $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$，求向量 $\vec{a}$.

解：设向量 $\vec{a}$ 的方向角为 α、60^0、120^0，则有

$$\cos^2\alpha + \cos^2 60^0 + \cos^2 120^0 = 1\text{，即 } \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

解得： $\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0 = 5\sqrt{2}\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\} = \left\{\pm 5, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$

14．向量 $\vec{a}$ 平行于两向量 $\vec{b} = \{7, -4, -4\}$ 和 $\vec{c} = \{-2, -1, 2\}$ 夹角的平分线，且 $|\vec{a}| = 5\sqrt{6}$，求 $\vec{a}$.

解： 因为 $|\vec{b}| = 9$，$|\vec{c}| = 3$，

所以 $\vec{b}^0 = \left\{\dfrac{7}{9}, -\dfrac{4}{9}, -\dfrac{4}{9}\right\}$， $\vec{c}^0 = \left\{-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$

$$\vec{b}^0 + \vec{c}^0 = \left\{\frac{1}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right\},$$

又 $\left|\vec{b}^0 + \vec{c}^0\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\vec{b}^0 + \vec{c}^0 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left\{\dfrac{1}{3\sqrt{6}}, -\dfrac{7}{3\sqrt{6}}, \dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right\}$，

故 $\vec{a} = \pm 5\sqrt{6}\left\{\dfrac{1}{3\sqrt{6}}, -\dfrac{7}{3\sqrt{6}}, \dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right\} = \pm\left\{\dfrac{5}{3}, -\dfrac{35}{3}, \dfrac{10}{3}\right\}$