习题 2.6(133)

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 有（　）个不可导点.

A.3　　　　B.2　　　　C. 0　　　　　D. 1

解： $f(x)=(x-2)|x|\cdot|x-1|\cdot[(x+1)|x+1|]$，即 $f(x)$ 有三个分段点

由结论： $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，而 $y=x|x|$ 在 $x=0$ 处可导，可知

$f(x)$ 在分段点 $x=-1$ 处可导，而在分段点 $x=0$、 $x=1$ 处不可导．故选 B.

(2) 设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数（　）

A.0　　　　B.1　　　　C. 2　　　　D. 3

解：只讨论 $g(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$ 即可．因为 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故

$g'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-3x^2=0$， $g'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}3x^2=0$

即 $g'(0)=0$　　所以 $g'(x)=\begin{cases}3x^2 & x\ge 0\\ -3x^2 & x<0\end{cases}$

又因为 $g'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故

$g''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}g''(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-6x=0$， $g''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}g''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}6x=0$

即 $g''(0)=0$　　所以 $g''(x)=\begin{cases}6x & x\ge 0\\ -6x & x<0\end{cases}$

又因为 $g''(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故

$g'''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}g'''(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-6=-6$， $g'''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}g'''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}6=6$

$g'''_-(0)\ne g'''_+(0)$，所以 $g(x)$ 点 $x=0$ 处的三阶导数不存在．故选 C.

(3) 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内， $f'(x)>0$， $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内（　）

A. $f'(x)<0$， $f''(x)<0$　　　　B. $f'(x)<0$， $f''(x)>0$

C. $f'(x)>0$， $f''(x)<0$　　　　D. $f'(x)>0$， $f''(x)>0$

解：两端同时对 x 求两次导：$f'(x)=-f'(-x)\cdot(-1)=f'(-x)$，$f''(x)=-f''(-x)$

所以 $f'(-x)=f'(x)>0$，$f''(-x)=-f''(x)<0$，故选 C.

(4) 设 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图 2-15 所示，则 $f'(x)$ 的图形（见图 2-16）为（ ）

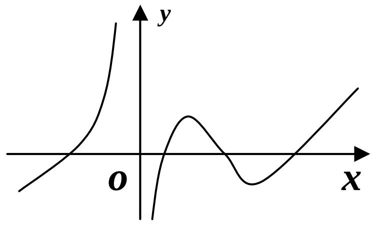

图 2—15

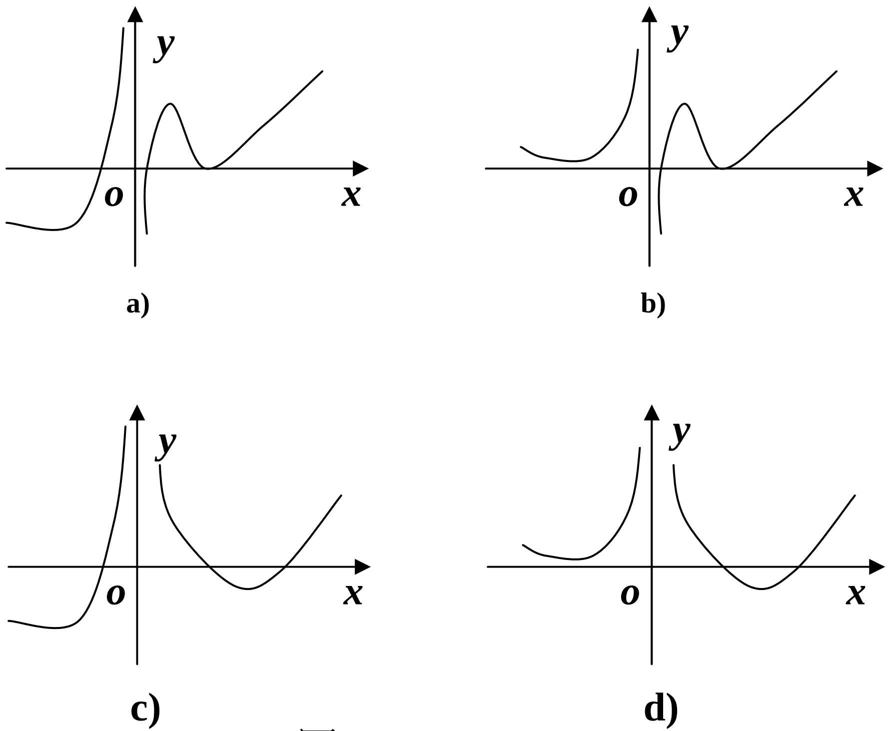

图 2—16

解：由图 2-15 可知当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，故 $f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 先单调递增又单调递减再单调递增，故 $f'(x)$ 先 >0 又 <0 再 >0，故选 D.

注： 此题应置于第 3 章综合练习的习题后。

2. 设函数 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,其中 $b\neq 0$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且在点 a 处可导，求 $f'(0)$.

解：
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{[\varphi(a+bx)-\varphi(a)]-[\varphi(a-bx)-\phi(a)]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{x}$$

$$\xlongequal[t=a-bx]{令 s=a+bx} b\lim_{s\to a}\frac{\varphi(s)-\varphi(a)}{s-a} - (-b)\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-a}$$

$$= b\varphi'(a)+b\varphi'(a) = 2b\varphi'(a)$$

注： 因题中未给 $\varphi(x)$ 可导（只给出在点 a 处可导），故不能如下直接求导：

$f'(x) = b\varphi'(a+bx)-(-b)\varphi'(a-bx)$　　必须用定义求!!!

另外：符号 $\varphi'(a+bx)$, $\varphi'(a-bx)$ 不能简写为：φ'（φ' 表示 $\varphi'(x)$）

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x) & -\frac{1}{2}< x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$，$a$，$b$ 取何值时，$f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导.

分析：题中表面上只给出了一个条件，但实际上条件“$f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导”隐含了“$f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续”，因而利用这两个条件可以确定题中的两个未知数.

解：函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则必有函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，且 $f'_-(1)= f'_+(1)$

由函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，得 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b) = f(1)$，

即 $a+b=\ln 3$　　(*)

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+2x)-\ln 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln[3+2(x-1)]-\ln 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln[1+\frac{2}{3}(x-1)]}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}(x-1)}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-\ln 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+a+b-\ln 3}{x-1} = a$$

从而得 $a=\frac{2}{3}$，代入(*)式得 $b=\ln 3-\frac{2}{3}$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ ax^2+bx+c & x\ge 0 \end{cases}$，试确定 a，b，c 的值，使得 $f''(0)$ 存在.

解：要使得 $f''(0)$ 存在，则点 $x=0$ 处必有 $f(x)$ 连续、$f'(x)$ 存在且连续，

因而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，得 $c=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2ax+b=b$

$f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $b=1$，$f'(0)=1$，所以 $f'(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ 2ax+1 & x>0 \end{cases}$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1$，$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2a=2a$

$f''_-(0)=f''_+(0)$，得 $a=\dfrac{1}{2}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & |x|\le c \\ \dfrac{m^2}{|x|} & |x|>c \end{cases}$，其中 $c>0$，试求 a，b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=c$，$x=-c$ 处有连续的导数.

分析：“使 $f(x)$ 在点 $x=\pm c$ 处可导”隐含了“必须使 $f(x)$ 在点 $x=\pm c$ 处连续”，因而利用“可导和连续”这两个条件可以确定题中的两个未知数.这类题都按这个思路做！

解：$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{m^2}{x} & x<-c \\ a+bx^2 & -c\le x\le c \\ \dfrac{m^2}{x} & x>c \end{cases}$

要使 $f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处可导，首先必须使 $f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处连续，故有

$\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}(a+bx^2)=a+bc^2$，$\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{m^2}{x}=\dfrac{m^2}{c}$

$\lim\limits_{x\to -c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -c^-}-\dfrac{m^2}{x}=\dfrac{m^2}{c}$，$\lim\limits_{x\to -c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -c^+}(a+bx^2)=a+bc^2$

$f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处连续，必有 $a+bc^2=\dfrac{m^2}{c}$ (1)

其次，要使 $f(x)$ 在 $x=\pm c$ 处可导， $f(x)$ 在 $x=c$ 处可导，必有 $f'_-(c)=f'_+(c)$

因为 $f'_-(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{a+b(c+\Delta x)^2-(a+bc^2)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{b[2c\Delta x+(\Delta x)^2]}{\Delta x}2bc$$

$$f'_+(c)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\dfrac{m^2}{c+\Delta x}-(a+bc^2)}{\Delta x}$$

$$\xlongequal[\text{(1)式}]{\text{利用}}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\dfrac{m^2}{c+\Delta x}-\dfrac{m^2}{c}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-m^2}{c(c+\Delta x)}=-\frac{m^2}{c^2}$$

因而有 $2bc=-\dfrac{m^2}{c^2}$ (2)

同理， $f(x)$ 在 $x=-c$ 处可导，也可推出 (2) 式

联立 (1)、(2) 两式，解得： $a=\dfrac{3m^2}{2c}$ ，$b=-\dfrac{m^2}{2c^3}$

7. 设函数 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\dfrac{1}{x})^{2xt}$ ，求 $f'(t)$.

解：注意到：求极限时，函数式中 t 相当于常数，而在求导时， t 则是变量.

$$f(t)=\lim_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2xt}=t\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{2t}=te^{2t}$$

故 $f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=e^{2t}(1+2t)$

8. 已知 $f(1)=0$， $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{x\tan x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{x\tan x}\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(\sin^2 x+\cos x-1))-f(1)}{(\sin^2 x+\cos x-1)}\cdot\frac{(\sin^2 x+\cos x-1)}{x^2}$$

$$\underline{\underline{令\Delta x=\sin^2 x+\cos x-1}}\ f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2})$$

$$= f'(1)\times(1-\frac{1}{2})=2\times\frac{1}{2}=1$$

9. 设函数$\varphi(x)$在点$x=a$处连续，讨论函数$f(x)=|x-a|\varphi(x)$在点$x=a$处的可导性.

解： $f(x)=|x-a|\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)\varphi(x) & x\ge a\\ (a-x)\varphi(x) & x<a\end{cases}$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)-0}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\varphi(x)=-\varphi(a)$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a)$$

所以，当$\varphi(a)=0$时，$f'_-(a)=f'_+(a)$，$f(x)$在点$x=a$处的可导，$f'(a)=0$

当$\varphi(a)\neq 0$时，$f'_-(a)\neq f'_+(a)$，$f(x)$在点$x=a$处的不可导.

注： 讨论分段函数在分段点处的导数时，则应该用导数的定义去讨论，若分段点两侧函数的表达式不同时，则应该用左、右导数去讨论.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且$f'(0)=1$. 证明：当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f'(x)=f(x)$.

证明：$\because f(x+y)=f(x)f(y)$

$\therefore f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$， 即 $f(0)=1$， 又 $f'(0)=1$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)f'(0)=f(x)$$

11. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$

解：化为 $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\qquad(|x|>1)$$

(2) $y=e^{\sin^2 x}+\sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}$

解：化为 $y=e^{1-(\sqrt{\cos x})^4}+\sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}\ \underline{\underline{\text{令}u=\sqrt{\cos x}}}\ e^{1-u^4}+u2^u$

再利用复合函数求导法求导

13. 求下列函数的指定导数.

(3) $y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}$，求 $y^{(n)}$

解：$y=\dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{a-bx}+\dfrac{1}{a+bx}\right]$

由于 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

故 $y^{(n)}=\dfrac{1}{2a}\left[\left(\dfrac{1}{a-bx}\right)^{(n)}+\left(\dfrac{1}{a+bx}\right)^{(n)}\right]$

$$=\frac{1}{2a}\left[\frac{b^n n!}{(a-bx)^{n+1}}+\frac{(-1)^n b^n n!}{(a+bx)^{n+1}}\right]=\frac{b^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right]$$

(4) $y=x^{n-1}\ln x$，求 $y^{(n)}$

解：令 $I_{n-1}=x^{n-1}\ln x$，$J_n=x^n$，则有 $I_0'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$J_n^{(n+1)}=0$

$I_{n-1}'=(n-1)x^{n-2}\ln x+x^{n-2}=(n-1)I_{n-2}+J_{n-2}$，两端同时求 $n-1$ 阶导数得：

$I_{n-1}^{(n)}=(n-1)I_{n-2}^{(n-1)}+J_{n-2}^{(n-1)}=(n-1)I_{n-2}^{(n-1)}$

将上式做为递推公式，得

$$I_{n-1}^{(n)}=(n-1)I_{n-2}^{(n-1)}=(n-1)(n-2)I_{n-3}^{(n-2)}$$

$$=\cdots\cdots=(n-1)(n-2)\cdots1\cdot I_0'=\frac{(n-1)!}{x}$$

15．设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+5xt+4t^3=0\\ e^y+y(t-1)+\ln t=1\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$

解：方程组对 t 求导：$\begin{cases}2xx_t'+5tx_t'+5x+12t=0\\ e^y y_t'+(t-1)y_t'+y+\dfrac{1}{t}=0\end{cases}$

当 $t=1$ 时，$x=-1$ 或 $x=-4$，即 $x(1)=-1$ 或 $x(1)=-4$，$y(1)=0$

$$x_t'\big|_{t=1}=-\left.\frac{5x(t)+12t}{2x(t)+5t}\right|_{t=1}=-\frac{5x(1)+12}{2x(1)+5}=-\frac{7}{3}\text{或}-\frac{8}{3}$$

$$y_t'\big|_{t=1}=-\left.\frac{y(t)+\frac{1}{t}}{e^{y(t)}+t-1}\right|_{t=1}=-\frac{y(1)+1}{e^{y(1)}}=-1$$

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{y_t'}{x_t'}\right|_{t=1}=\dfrac{3}{7}$ 或 $\dfrac{3}{8}$

16. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)\neq0$，证明：曲线 $y_1=f(x)$，$y_2=f(x)\sin x$ 在交点处相切.

证明：令 $y_1=y_2$，得 $\sin x=1$，即 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

又 $y_1'=f'(x)$，$y_2'=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$

故在 y_1 与 y_2 的交点 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处，$y_2'=f'(k\pi+\dfrac{\pi}{2})=y_1'$

17．设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$.

解：曲线在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=nx-(n-1)$

从而该切线与 x 轴交点的横坐标 $\xi_n = \dfrac{n-1}{n}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$

18．设函数 $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$ (a_i为实数，$i = 1, 2, \cdots, n$)，且 $|f(x)| \le |\sin x|$，证明：$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$

证明：由求导公式得 $f'(x) = a_1\cos x + 2a_2\cos 2x + \cdots + na_n\cos nx$

$$f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

由导数的定义得 $|f'(0)| = \left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|$

$$\le \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-0}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$$

从而 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1$

19． 正午时，阳光垂直射向地面，一飞机沿抛物线 $y = x^2 + 1$ 的轨道向地面俯冲（见图 2-17），飞机到地面的距离以 $100m/s$ 的速度减少．问飞机距地面 $2501m$ 时。飞机影子在地面上移动的速度是多少？

解：由题意知 $\dfrac{dy}{dt} = -100$ ，且当 $y = 2501$ 时， $x = -50$，

又 $\dfrac{dy}{dt} = 2x\cdot\dfrac{dx}{dt}$， $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt}\Big/2x$

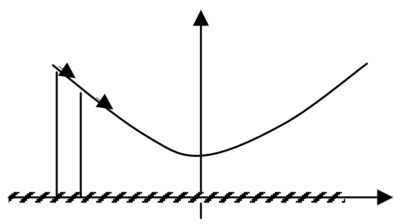

图 2-17

所以，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=50} = \dfrac{-100}{2\times(-50)} = 1$

即飞机影子在地面上移动的速度为 $1m/s$．