2008 级《微积分 A》第一学期期末

参考答案及评分标准 2009.1.16

一、每小题 3 分，共 30 分.

1. e^4；　　2. $\frac{1}{2}\arctan^2 x + x\ln x - x + C;$

3. $x=1,$ 第一类;　　4. $y' = 10^{x\tan(2x)}[\tan(2x) + 2x\sec^2(2x)]\ln 10;$

5. $y = \frac{1}{x};$　　6. $\frac{16}{15};$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t^3};$　　8. $\ln 2;$

9. $a=1,\quad b=-\frac{3}{2};$　　10. $-e^2.$

二、(9 分) 解：对应齐次方程的特征方程：$r^2+1=0$ **…………2 分**

对应齐次方程的特征根：$r_1=-i, r_2=i$ **…………3 分**

对应齐次方程的通解：$Y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ **…………5 分**

由于 $w=0$ 不是对应齐次方程的特征根，故非齐次方程的特解可设为：

$\bar{y} = ax^2+bx+c$， **…………7 分**

$\bar{y}' = 2ax+b,\quad \bar{y}'' = 2a,$

代入原方程，得 $2a+ax^2+bx+c = x^2+x$

比较 x 的同次幂系数，得 $a=1,\ b=1,\quad 2a+c=0$，$\Rightarrow c=-2$

故原方程的特解为：$\bar{y} = x^2+x-2$ **…………8 分**

故原方程的通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2+x-2$ **….9 分**

三、(9 分) 解：1. 连续性：$f(0)=0,\ f(0+) = \lim\limits_{x\to0+} f(x) = 0 = f(0-)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 **…………4 分**

2. 可导性：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\int_0^x te^t dt)'=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^x=0$ …………**6** 分

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2)'=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$ …………**8** 分

$f'_+(0)=f'_-(0),$ 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0.$ …………**9** 分

四、（10 分）证明：1. 先证：$1-x^2\le e^{-x^2}\quad (x>0)$

设 $f(x)=e^{-x^2}-1+x^2$，则 $f(0)=0$ …………**2** 分

$f'(x)=-2xe^{-x^2}+2x=2x(1-e^{-x^2})$ …………**3** 分

由于 $x>0$ 时，$e^{-x^2}<1$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$

当 $x>0$ 时, $f(x)$ 单增, $\Rightarrow x>0$ 时，有 $f(x)>0.$

即当 $x\ge 0$ 时，有 $1-x^2\le e^{-x^2}.$ …………**5** 分

2．再证：$e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}\quad (x>0)$

亦即证：$1+x^2\le e^{x^2}$

设 $g(x)=e^{x^2}-1-x^2$，则 $g(0)=0$ …………**7** 分

$g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x(e^{x^2}-1)\ge 0$ …………**8** 分

当 $x>0$ 时, $g(x)$ 单增, $\Rightarrow x>0$ 时，有 $g(x)>0.$

即当 $x\ge 0$ 时，有 $e^{-x^2}\le\dfrac{1}{1+x^2}.$

综合 1，2，结论得证。 …………**10** 分

五、（10 分）证明：（1）$\int_a^{a+2} f(t)dt=\int_a^0 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt+\int_2^{a+2} f(t)dt$

…………**2** 分

又 $\int_2^{a+2} f(t)dt \xlongequal{做换元，令u=t-2} \int_0^a f(u+2)du$

$\xlongequal{f(u+2)=f(u)} \int_0^a f(u)du=\int_0^a f(t)dt$ …………**4** 分

从而 $\int_a^{a+2} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$

$= \int_0^2 f(t)dt$ ………….5 分

（2）$F(x+2) = \int_0^{x+2} [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt$ ………….7 分

$= \int_0^x [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt + \int_x^{x+2} [2f(t) - \int_t^{t+2} f(s)ds]dt$

$= F(x) + 2\int_x^{x+2} f(t)dt - \int_x^{x+2} [\int_t^{t+2} f(s)ds]dt$

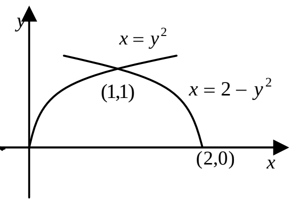
$= F(x) + 2\int_0^2 f(t)dt - \int_x^{x+2} [\int_0^2 f(s)ds]dt$ （由（1）的结论）

$= F(x) + 2\int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(s)ds \cdot \int_x^{x+2} dt$

$= F(x)$

所以$F(x)$是周期为2的周期函数。 ………….10 分

六、（10 分）解：（1）画草图，解交点(1,1)



$A = \int_0^1 (2 - y^2 - y^2)dy$ ………….3 分

$= \dfrac{4}{3}$ ………….5 分

（2）$V = \pi\int_0^1 (2 - y^2)^2 dy - \pi\int_0^1 y^4 dy$ ………….8 分

$= \dfrac{8}{3}\pi$ ………….10 分

七、（8 分）解：$f'(x) = (x-1)(x-2)^2$， ………….1 分

令 $f'(x) = 0$, 得驻点：$x_1 = 1, x_2 = 2$，列表 ………….2 分

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑	非极值	↑

极小值： $f(1)=\int_0^1 (t-1)(t-2)^2\,dt=-\dfrac{17}{12}$ ……………**4** 分

又 $f''(x)=(x-2)^2+2(x-1)(x-2)=(x-2)(3x-4)$

令 $f''(x)=0$，得 $x=2,\ x=\dfrac{4}{3}$ ……………**6** 分

列表

x	$(-\infty,\frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	$\cup$	拐点	$\cap$	拐点	$\cup$

所以拐点横坐标为： $x=2,\ x=\dfrac{4}{3}.$ ……………**8** 分

八、（8 分）解：打开降落伞时刻记为 $t=0$ 时刻，由牛顿第二定律有

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{mg}{16}v,$$

$v(0)=176$ ……………**2** 分

方程化简得： $\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{g}{16}(v-16)$

分离变量并积分得： $v=16+Ce^{-\frac{g}{16}t}$ ……………**4** 分

由初始条件得： $C=160$

所以 $v=16+160e^{-\frac{g}{16}t}$ ……………**6** 分

极限速度为： $v_{极}=\lim\limits_{t\to+\infty}(16+160e^{-\frac{g}{16}t})=16.$ ……………**8** 分

九、（6 分）证明：构造辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$，　　　　　**…………1 分**

由题设有$F(a)=F(b)=0$. 又$f(x),g(x)$在(a,b)内具有相等的最小值,

不妨设存在$x_1 \le x_2$，$x_1,x_2 \in (a,b)$使得

$$f(x_1)=m=\min_{[a,b]} f(x),\quad g(x_2)=m=\min_{[a,b]} g(x)，$$ **…………2 分**

1）若$x_1 = x_2$，令$c=x_1$，则$F(c)=0$　　　　　**…………3 分**

2）若$x_1 < x_2$，因

$$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\le 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\ge 0$$

从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使$F(c)=0$　　　　　**…………4 分**

在区间$[a,c],[c,b]$上分别利用罗尔定理知，存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，

使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.　　　　　**…………5 分**

再对$F'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，知存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，有

$F''(\xi)=0$，　即　$f''(\xi)=g''(\xi)$　　　　　**…………6 分**