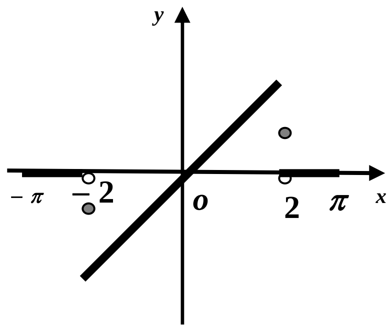
习题 10.6(P277)

1．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & 2<|x|\le\pi\\ x & |x|\le 2\end{cases}$$

记 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，写出 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数表达式.

解：由题意可知：$S(x)$ 是由 $f(x)$ 展开的定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 2π 的正弦级数的和函数，由狄里克雷定理得 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像如图，$S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为



$$S(x)=\begin{cases}-1 & x=-2\\ x & |x|<2\\ 1 & x=2\\ 0 & 2<|x|\le\pi\end{cases}$$

2．设函数 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$，$-\pi<x\le\pi$，把 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的傅里叶级数，并说明级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的收敛情况.

解：$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx dx=\frac{(-1)^n}{n}$$

则得 $f(x)\sim\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$，由狄里克雷定理得

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} & -\pi<x<\pi\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} & x=\pm\pi\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} & -\pi<x<\pi\\ \dfrac{\pi}{4} & x=\pm\pi\end{cases}$$

所以 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx$， $x\in(-\pi,\pi)$

3．设函数

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{2\pi} & -\pi<x<0\\ \dfrac{1}{2} & x=0\\ 1-\dfrac{x}{2\pi} & 0<x\le\pi\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶展开式.

解： $f(x)$ 为偶函数，故

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{2\pi})dx=\frac{3}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\frac{x}{2\pi})\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-\frac{x}{2\pi})\cos nxdx$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}xd(\frac{\sin nx}{n})=-\frac{1}{\pi^2}[\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx]$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

$$b_n=0$$

则得 $f(x)\sim\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$，由狄里克雷定理得

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in(-\pi,\pi]\text{且}\ x\neq 0$$

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ 0 & \dfrac{\pi}{4}\le x\le\pi\end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数，并写出它在 $[0,\pi]$ 上的和函数.

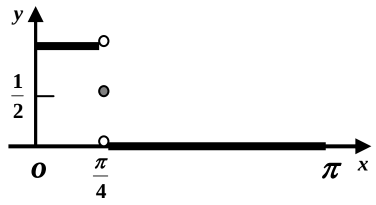
解： $f(x)$ 的图形如图， $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\cdot dx=\dfrac{1}{2}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{4}$$

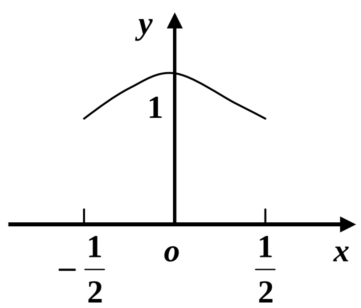
则得 $f(x)\sim\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}\cos nx$，

由狄里克雷定理得 $f(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}\cos nx$， $x\in[0,\pi]$ 且 $x\ne\dfrac{\pi}{4}$

级数的和函数 $S(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{1}{2} & x=\dfrac{\pi}{4}\\ 0 & \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi\end{cases}$，



5. 设 $f(x)=1-x^2$， $-\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{1}{2}$， 求 $f(x)$ 的以 1 为周期的傅里叶级数.



解： $f(x)$ 的图形如图， $l=\dfrac{1}{2}$，

$f(x)$ 为偶函数，故展开式

是余弦级数，因而

$$a_0=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)dx=\frac{11}{6}$$

$$a_n=\frac{2}{1/2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{1/2}dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}$$

得 $f(x)\sim\dfrac{11}{12}+\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos 2n\pi x$

由狄里克雷定理得 $f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos 2n\pi\ x$， $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

6．设函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \frac{l}{2} \\ l-x & \frac{l}{2}<x\le l \end{cases}$$

把 $f(x)$ 展开为以 $2l$ 为周期的正弦级数

解： $a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}[\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l}{n\pi}\int_0^{l/2}xd(\cos\frac{n\pi x}{l})=-\frac{l}{n\pi}[x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\int_0^{l/2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx]$$

$$=-\frac{l}{n\pi}[x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}]=\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\overset{令t=l-x}{=\!=\!=}-\int_{l/2}^{0}t\sin(n\pi-\frac{n\pi t}{l})dt$$

$$=(-1)^{n+1}\int_0^{l/2}t\sin\frac{n\pi t}{l}dt=(-1)^{n+1}\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

故 $b_n=\frac{2}{l}[1+(-1)^{n+1}]\int_0^{l/2}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$b_n=\frac{2}{l}[1+(-1)^{n+1}][\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}]$$

$$=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} & n\text{为奇数}\end{cases}=\begin{cases}\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} & n\text{为偶数}\\ \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} & n\text{为奇数}\end{cases}=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

则得 $f(x)\sim\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}$，由狄里克雷定理得

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad x\in[0,l]$$

注：该例对 $f(x)$ 做奇延拓后函数处处连续，故展开成正弦级数后 $x \in [0, l]$

7. 设 $f(x)=x-1$，$0 \le x \le 2$，把 $f(x)$ 展开为以 4 为周期的余弦级数，并求常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解：$l=2$，$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)dx=0$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2} & n=2k-1\end{cases},\qquad k=1,2,3,\cdots$$

则得 $f(x)\sim -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$，

由狄里克雷定理得 $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$，$x\in[0,2]$

令 $x=0$，得 $-1=f(0)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

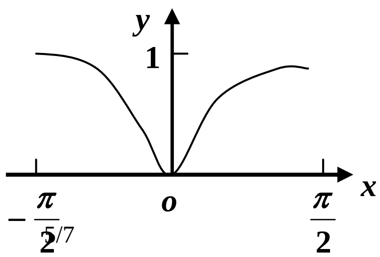
而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$

注：本题求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和，尽管与教材 P275 例 4 的方法不同，但结果完全一致.

8. 把 $f(x)=|\sin x|$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上 $[0,\pi]$ 展开成以 π 为周期的傅里叶级数.

解：$f(x)$ 的图形如图，由于 $f(x)$ 是偶函数，



故 $b_n=0$，$a_0=\dfrac{2}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\dfrac{4}{\pi}$

$$a_n=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos\frac{n\pi\ x}{\pi/2}dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos 2nxdx=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x(2n+1)x-\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$$

得 $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$，由狄里克雷定理得：

展开的傅里叶级数为 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$，$x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

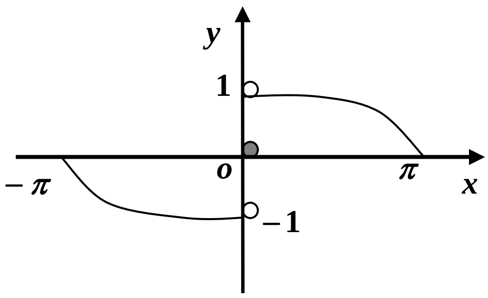
9．把 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$，$x\in[0,\pi]$，展开成以 2π 为周期的正弦级数.

解：$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\sin nxdx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\dfrac{2n+1}{2}x+\sin\dfrac{2n-1}{2}x\right)dx=\dfrac{8n}{\pi(4n^2-1)}$

得 $f(x)\sim\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2-1}\sin nx$

由狄里克雷定理得

$\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2-1}\sin nx$，$x\in(0,\pi]$



级数的和函数 $S(x)$ 的图形如图.

10．设 $f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi\ x$，$-\infty<x<+\infty$

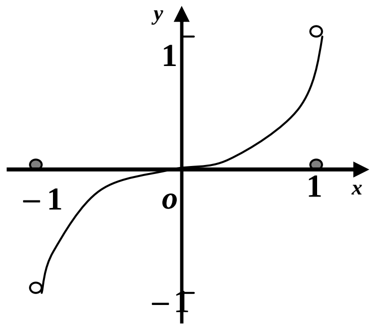
其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi\ xdx$，$n=1,2,\cdots$

求 $S(-\dfrac{1}{2})$，$S(-5)$，$S(-\dfrac{7}{3})$.

解：由题意可知：$S(x)$ 是由 $f(x)$ 展开的定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期为 2 的正弦级数的和

函数，由狄里克雷定理得 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的图像如图，　$S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的表达式为

$$S(x)=\begin{cases}-x^2 & -1<x<0\\ x^2 & 0\le x<1\\ 0 & x=\pm\end{cases}$$



故得 $S(-\frac{1}{2})=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$，

$$S(-5)=S(-2\times2-1)=S(-1)=0$$

$$S(-\frac{7}{3})=S(-1\times2-\frac{1}{3})=S(-\frac{1}{3})=-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}$$