

学号 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知 $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, 又设 \vec{b} 是既垂直于 \vec{a} 又垂直于 y 轴, 且与 z 轴正向夹角为锐角的单位向量, 则 $\vec{b} =$ _____.

2. 曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 8 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面 Σ 的方程为 _____,

Σ 在 $(-1, 2, 1)$ 点处的法向量 $\vec{n} =$ _____.

3. 设 $z = f(x, y) = 50 - 2x^2 - 4y^2$. 已知 $f(x, y)$ 在 $P(1, -2)$ 点处沿方向 \vec{e} 的函数值减小最快, 则 \vec{e} 的单位向量为 _____.

4. 设有直线 $L: \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$ 和平面 $\pi: Ax + By + z = 53$, 已知 L 与 π 垂直, 则

$A =$ _____, L 与 π 的交点坐标为 _____.

5. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2x + 2y = z + e^{xz}$ 确定的可微的隐函数, 则 $z(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 点的一阶全微分 $dz(0, 1) =$ _____.

6. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 将累次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ 交换积分次序后的累次积分形式为 $I =$ _____.

二、(10 分) 设 $z = f(xy, e^{x-y})$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

三、(12 分) 分别求曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ 上点 $M(1, -2, 1)$ 处的法平面 π 的方程和直线

$L: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ 的标准方程, 并求直线 L 与法平面 π 的夹角.

四、(10 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ 确定的可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

五、(10 分) 设 $f(x, y) = y^3 - y^2 + xy - x^2$. 求 $f(x, y)$ 的极值点和极值.

六、(12 分) 设 D 是由曲线 $y = \sqrt{8 - x^2}$ 与 $2y = x^2$ 所围成的区域在第一象限内的部分. 将二重积分 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ 写成极坐标系下的累次积分, 并计算 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$.

七、(10 分) 求柱面 $y = x^2$, 平面 $x - y - z + 2 = 0$ 与平面 $z = 0$ 所围成立体的体积 V .

八、(12 分) 求椭球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ 上距离平面 $\pi: x - y + 2z = 6$ 最近和最远的点的坐标, 并写出椭球面 Σ 在此两点处的切平面方程.