课程编号：MTH17005　　　北京理工大学2009-2010学年第一学期

2009级《微积分A》期中试卷

一、填空（每小题4分，共28分）

1．设 $y=2f(\arctan\sqrt{x})+x^{\tan x}$，2． f 为可微函数，3．则 $dy=$ ____.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ____________.

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-2x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，则 $y'=$ ______________，$y'(0)=$ ______________.

4．$x\to 0$ 时，$\ln(1-2x)=ax+bx^2+o(x^2)$，则 $a=$ ______，$b=$ _______.

5．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\dfrac{2}{n}+\cos\dfrac{1}{n})^n=$ ________________.

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 3\\ ax+b & x>3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处可导，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

7．设 $y=\dfrac{x^2}{1-x}$，则 $y^{(n)}=$ ________________________________.

二、（9分）设 $\begin{cases}x=\sqrt{1-t}\\ y=\arcsin\sqrt{t}\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

三、（9分）证明：当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$.

四、（9分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，

(1) 求 $f'(x)$；（2）讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。若不连续，请指明间断点的类型.

五、（9分）试利用导数研究函数 $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{x}+1$ 的性态. 即求：(1) 函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）$f(x)$ 的凹凸区间和曲线 $y=f(x)$ 的拐点；（3）曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.（注：请列表讨论）

六、（9分）设 $x_1=\sqrt{3},\quad x_{n+1}=\sqrt{3+x_n},(n=1,2,\cdots),$ 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

七、（9分）试利用泰勒公式确定当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\sqrt{1-x^2}-\cos x^2$ 的阶，并写出其最简形式的等价无穷小.

八、（9分）在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的第一象限部分求一点 P 的坐标，使 P 点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小.

九、（9分）设 $f(x)$ 在 $[0\,,\,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\dfrac{1}{2})=1,$

试证：（1）至少存在一点 $\eta\in(\dfrac{1}{2},1),$ 使得 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0\,,\,\eta),$ 使得 $f'(\xi)-1=\lambda[f(\xi)-\xi].$