2008-2009 二学期高等数学期中(A 卷)解答

一 1. 1，$2\sqrt{7}$ (2 分, 2 分)

2. $\sqrt{\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$

3. $\{4,4,2\}$, 6 (2 分, 2 分)

4. 螺旋线，$\{-2,0,5\}$ (1 分, 3 分)

5. $y+\dfrac{1}{2}(2xy-y^2)+o(\rho^2)$ (一次项 1 分，二次项 2 分，余项 1 分)

6. $\dfrac{x^2}{2}\arctan y+\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+y-\dfrac{2}{3}$

7. $2xf_1'+e^{x+y}f_2'$, $4xyf_{11}''+2(x+y)e^{x+y}f_{12}''+e^{2(x+y)}f_{22}''+e^{x+y}f_2'$ (2 分, 2 分)

8. -3, -5 (2 分, 2 分)

二. $2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot(\dfrac{\partial z}{\partial x}-2)$ ……………………………..(4 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-yf_1'+2f_2'}{f_2'-2z}$ ……………………………..(5 分)

$2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ……………………………….(9 分)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-xf_1'}{f_2'-2z}$ ……………………………….(10 分)

三. L_1的方向向量为$\vec{s}_1=\{3,-2,2\}$，$P_1(2,-1,3)\in L_1$

L_2 的方向向量为$\vec{s}_2=\{1,2,0\}\times\{0,1,1\}=\{2,-1,1\}$，$P_2(1,0,2)\in L_2$ …………(3 分)

$\boldsymbol{\overrightarrow{P_1P_2}=\{-1,1,-1\}}$

$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

故 L_1,L_2 共面;　　　　　　　　　　　　………………………(8 分)

所求平面法向量为　$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{0,1,1\}$　　　　………………………(10 分)

所求平面方程为　$1\times(y-0)+1\times(z-2)=0$

即　　　　　$y+z=2$　　　　　　………………………(12 分)

四.　$I=\iint\limits_{D_1}\dfrac{x-y}{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\dfrac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$　　　　………………..(2 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(\cos\theta-\sin\theta)d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{\frac{2}{\sin\theta}}(\sin\theta-\cos\theta)d\rho$　……….(6 分)

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\sin\theta\cos\theta)d\theta$.(10 分)

$=1-\ln 2$　　　　　　　　　　……………(12 分)

五. 设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则　$3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16$　　　　……………….(2 分)

切平面法向量为　　$\vec{n}=\{6x_0,2y_0,2z_0\}$　　　　……………….(4 分)

L_1,L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1=\{4,5,8\}$，$\vec{s}_2=\{1,1,1\}$

$$\boldsymbol{\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{-3,4,-1\}}$$　　　　………………(6 分)

由题意，有 $\vec{n}\,//\,\vec{s}$，故　$\dfrac{3x_0}{-3}=\dfrac{y_0}{4}=\dfrac{z_0}{-1}$　　　　………………..(8 分)

解得　　$x_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt5}$　　$y_0=\mp\dfrac{8}{\sqrt5}$　　$z_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt5}$

所求点为　$(-\dfrac{2}{\sqrt5},\dfrac{8}{\sqrt5},-\dfrac{2}{\sqrt5})$ 或 $(\dfrac{2}{\sqrt5},-\dfrac{8}{\sqrt5},\dfrac{2}{\sqrt5})$　…………………(11 分)

六. $$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}e^{\frac{y}{1-x-z}}dy$$ ……………………(4 分)

$$=(e-1)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)dz$$ ……………………(7 分)

$$=\frac{1}{2}(e-1)\int_0^1(1-x)^2dx$$ ……………………(9 分)

$$=\frac{1}{6}(e-1)$$ ……………………(11 分)

七. $$\vec{e}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$$ ……………………(1 分)

$$f'_x=2x \qquad f'_y=2y \qquad f'_z=2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x-y+z)$$ …………………………(3 分)

令 $g(x,y,z)=x-y+z$

$$F(x,y,z)=x-y+z+\lambda(2x^2-y^2+z^2-5)+\mu(x+y)$$ ……………(6 分)

$$\begin{cases}F'_x=1+4\lambda x+\mu=0\\F'_y=-1-2\lambda y+\mu=0\\F'_z=1+2\lambda z=0\\2x^2-y^2+z^2=5\\x+y=0\end{cases}$$ ……………...(8 分)

解得 $x=\mp2$ $y=\pm2$ $z=\mp1$

得两点 $M_1(-2,2,-1)$ $M_2(2,-2,1)$ ………………(10 分)

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}\Big|_{M_1}=-\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial\vec{e}}\Big|_{M_2}=\frac{10}{\sqrt{3}}$$

由于$\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}$在曲线上确有最大值和最小值，故$M_1,M_2$为所求，且

$$\max_M\{\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}\}=\frac{10}{\sqrt{3}} \qquad \min_M\{\frac{\partial f}{\partial\vec{e}}\}=-\frac{10}{\sqrt{3}}$$ ……………(12 分)