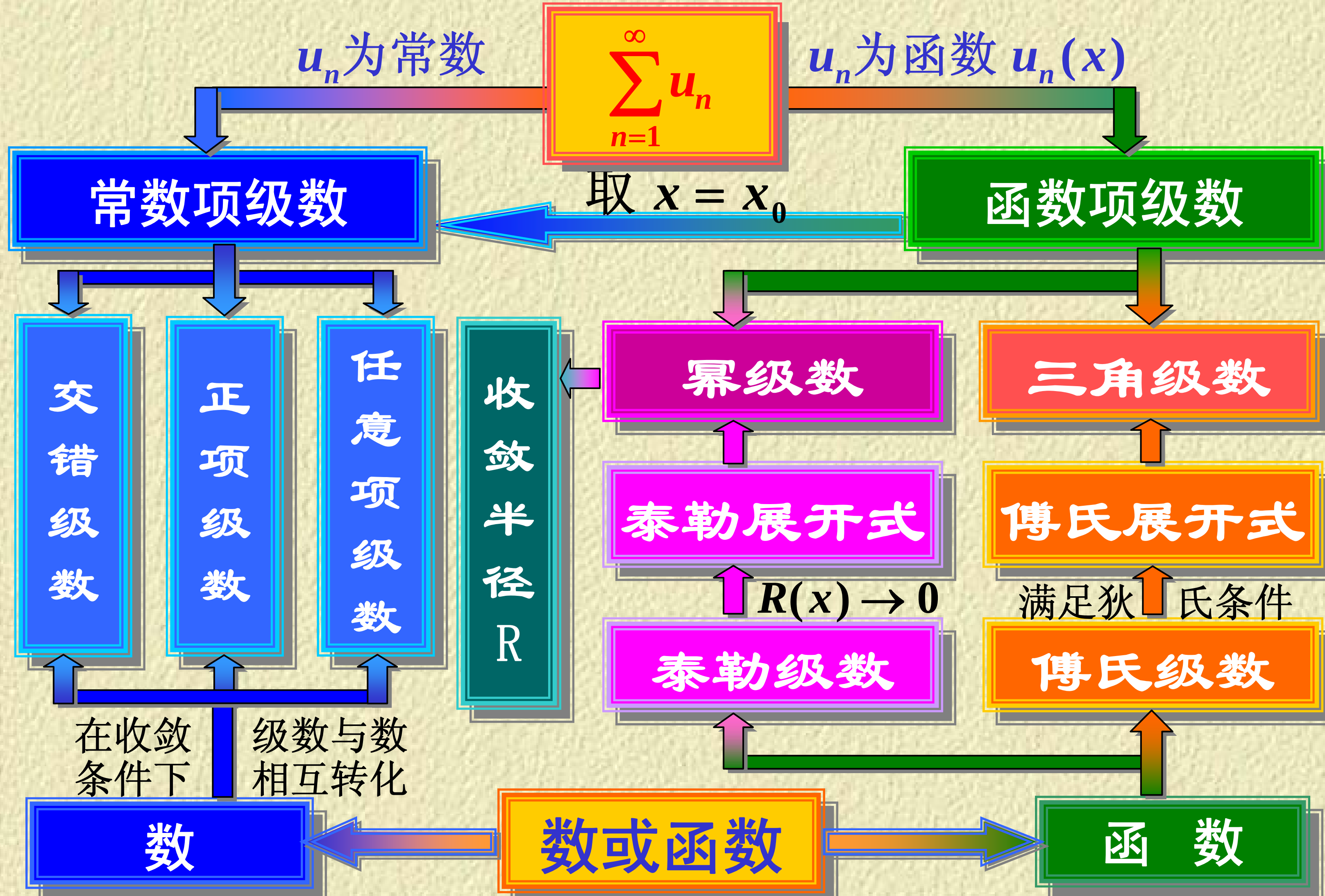
一、主要内容



$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
u_n为常数
u_n为函数 $u_n(x)$
常数项级数
取 $x = x_0$
函数项级数
交错级数
正项级数
任意项级数
收敛半径R
幂级数
三角级数
泰勒展开式
傅氏展开式
$R(x) \to 0$
满足狄氏条件
泰勒级数
傅氏级数
在收敛条件下
级数与数相互转化
数
数或函数
函　数

二、例题

例1 判断级数敛散性： (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

解 $u_n=\dfrac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\dfrac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}=e^0=1;$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x\}$$

$$= \exp\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\} = e^0 = 1;$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0,$$

根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}$ $(a>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)}$,

$\because$ $n\geq 2$时, $e<n+2<e^n$, 从而有

$$1<\sqrt[n]{\ln(n+2)}<\sqrt[n]{n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{1}{a}$.

当 $a>0$ 即 $0<\dfrac{1}{a}<1$ 时，原级数收敛；

当 $0<a<1$ 即 $\dfrac{1}{a}>1$ 时，原级数发散；

当 $a=1$ 时，原级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}$,

$\because\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+2)}{(1+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，原级数也发散.

例 2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解 $\because\quad \dfrac{1}{n-\ln n} > \dfrac{1}{n}$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n=\ln n}\ \text{发散},$$

即原级数非绝对收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 是交错 级数，由莱布尼茨定理:

$$\because \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{\ln n}{n}} = 0,$$

$$\because \quad f(x) = x - \ln x \quad (x > 0),$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 1),$$

上页 下页 返回

$\therefore$ 在 $(1,+\infty)$ 上单增， 即 $\dfrac{1}{x-\ln x}$ 单减,

故 $\dfrac{1}{n-\ln n}$ 当 $n>1$ 时单减,

$$\therefore \quad u_n=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}=u_{n+1}\ (n>1),$$

所以此交错级数收敛， 故原级数是条件收敛.

例 3　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数.

解　$\because$ $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛半径为 $R=1$,

收敛域为 $-1<x-1<1$,　即 $0<x<2$,

设此级数的和函数为 $s(x)$, 则有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n.$$

两边逐项积分

$$\int_1^x s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_1^x (n+1)(x-1)^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}\Big|_1^x = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}$$

$$= \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x},$$

两边再对 x 求导，得

$$s(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

例4 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

解 $\because\ \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots,$

$$\therefore\ \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots,$$

$(-1\le x\le 1)$

又 $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\int_0^x[1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots]dx$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$(-1\le x\le 1)$

例4 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数．

故 $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}.\quad(-1\le x\le 1)$$

例5 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解 分析 $\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 是 $\sin x$ 的展开式,

设法用已知展开式来解.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{x-1+1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

例5 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$+\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot(2n)!}(x-1)^{2n}$$

$$+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\qquad(-\infty,+\infty)$$

上页 下页 返回

例6 将 $\cos x$ 在 $0 < x < \pi$ 内展开成以 2π 为周期的正弦级数并在 $-2\pi \le x \le 2\pi$ 写出该级数的和函数，同时画出它的图 形.

解 要将 $f(x) = \cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内展开成以 2π 为周期的正弦级数 $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，必须在 $(-\pi,\pi)$ 内对 $\cos x$ 进行奇延拓，

令
$$F(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (0,\pi), \\ 0 & x = 0, \\ -\cos x & x \in (-\pi,0), \end{cases}$$

上页 下页 返回

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}] \qquad (n \neq 1)$$

$$= \begin{cases} o, & n = 2m-1 \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n = 2m \end{cases}$$

上页 下页 返回

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2xdx = 0,$$

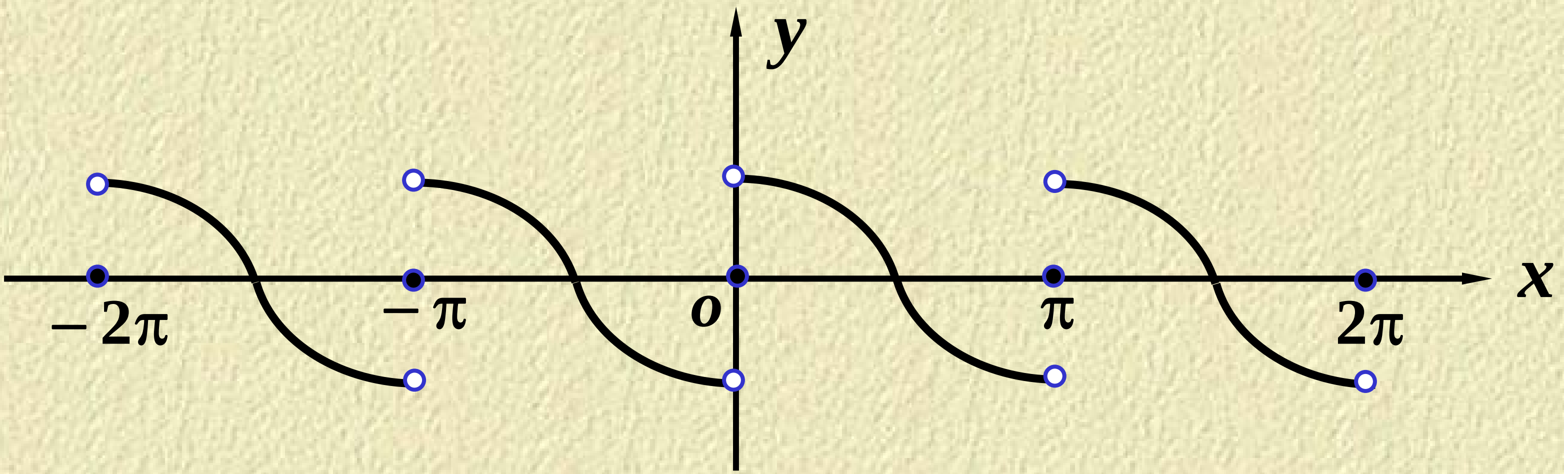
$$\therefore \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2 - 1)} \sin 2mx. \quad (0 < x < \pi)$$

在 $-2\pi \le x \le 2\pi$ 上级数的和函数为

$$s(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0,\pi) \cup (-2\pi,-\pi) \\ 0 & x = 0,\pm\pi,\pm 2\pi \\ -\cos x & x \in (-\pi,0) \cup (\pi,2\pi), \end{cases}$$

上页 下页 返回

和函数的图形为



上页 下页 返回

例7 证明： 当 $0 \le x \le \pi$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

解 设 $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2}$,

将 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上展开成余弦级数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)d\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.\qquad (0\le x\le\pi)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$$

作业：

P290： 1至11（共11题）

上页 下页 返回