习题 9.6(P209)

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分.

(1) $\oiint\limits_S (x+2y+3z)dxdy+(y+2z)dydz+(z^2-1)dzdx$，$S$ 为三个坐标平面与平面 $x+y+z=1$ 所围四面体的边界，取外侧.\

解：$X=y+2z$，$Y=z^2-1$，$Z=x+2y+3z$，$\frac{\partial X}{\partial x}=0$，$\frac{\partial Y}{\partial y}=0$，$\frac{\partial Z}{\partial z}=3$

$$\oiint\limits_S (x+2y+3z)dxdy+(y+2z)dydz+(z^2-1)dzdx=\iiint\limits_V 3dV=3\cdot\text{四面体的体积}$$

$$=3\cdot\text{四面体的体积}=3\cdot\frac{1}{6}\times1\times1\times1=\frac{1}{2}$$

(2) $\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，取内侧.

解：$X=x^3$，$Y=y^3$，$Z=z^3$，$\frac{\partial X}{\partial x}=3x^2$，$\frac{\partial Y}{\partial y}=3y^2$，$\frac{\partial Z}{\partial z}=3z^2$

$$\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=-3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv$$

$$\xlongequal[\text{变换}]{\text{球坐标}}-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^4\sin\varphi\, dr=-\frac{12}{5}a^5$$

常见错误解法：

$$-3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv=-3a^2\iiint\limits_V dv=-3a^2\cdot(\text{球的体积})$$

$$=-3a^2\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=-4\pi a^5$$

提示： 该例中由于在 V 上 $x^2+y^2+z^2\le a^2$，故三重积分中不能用 a^2 取代 $x^2+y^2+z^2$，而在 S 上 $x^2+y^2+z^2=a^2$，故曲面积分中可用 a^2 取代 $x^2+y^2+z^2$.

即：三重积分中被积函数有三个独立的变量，而曲面积分只有两个独立的变量.

(3) $\oiint\limits_S yzdxdy+zxdydz+xydzdx$，$S$ 是由第一卦限中的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，平面 $z=h\ (h>0)$ 和坐标面围成的闭曲面，取外侧.

解：$X=zx$，$Y=xy$，$Z=yz$，$\frac{\partial X}{\partial x}=z$，$\frac{\partial Y}{\partial y}=x$，$\frac{\partial Z}{\partial z}=y$

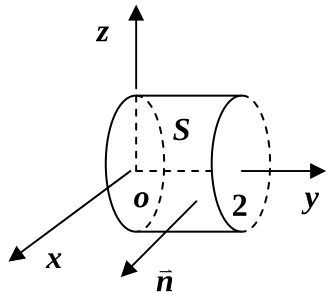
$$\oiint_S yzdxdy + zxdydz + xydzdx = \iiint_V (x+y+z)dV = \iiint_V (x+y)dV + \iiint_V zdV$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x+y)dxdy \int_0^h dz + \int_0^h zdz \iint_{D_z} dxdy \qquad (D_{xy} or D_z : x^2+y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0)$$

$$= h\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)d\rho + \frac{\pi R^2}{4}\int_0^h zdz = \frac{2R^3h}{3} + \frac{\pi R^2 h^2}{8}$$

(4) $\iint_S xy\sqrt{1-x^2}dydz + e^x \sin ydxdy$, S 为柱面 $x^2+z^2=1\ (0 \le y \le 2)$，取外侧.

解：补曲面 $S_1: x^2+z^2 \le 1,\ y=0$，取左侧，$S_2: x^2+z^2 \le 1,\ y=2$，取右侧，



$$\iint_S xy\sqrt{1-x^2}dydz + e^x \sin ydxdy$$

$$= \iint_S xy|z|dydz + e^x \sin ydxdy$$

$$= \oiint_{S+S_1+S_2} xy|z|dydz + e^x \sin ydxdy - \iint_{S_1} xy|z|dydz + e^x \sin ydxdy - \iint_{S_2} xy|z|dydz + e^x \sin ydxdy$$

$$= \iiint_V y|z|dv - 0 - 0 = 2\iiint_{V_{上}} yzdv$$

$$\xlongequal[\text{注：做变换必须符合右手系}]{\text{令}\begin{cases} z=\rho\cos\theta \\ x=\rho\sin\theta \\ y=y \end{cases}} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^2 ydy = \frac{8}{3}$$

注： 本例若不用$|z|$先替换$\sqrt{1-x^2}$，则不可以利用高斯公式，因为$X = xy\sqrt{1-x^2}$的偏导数$\frac{\partial X}{\partial x}$在$V$上不是连续函数.

(5) $\iint_S (x^2-yz)dydz + (y^2-zx)dzdx + 2zdxdy$ ，S 为锥面 $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$ 所截部分的上侧.

解：补曲面 $S_1: z=0\ x^2+y^2 \le 1$ 取下侧

$X = x^2 - yz$，$Y = y^2 - zx$，$Z = 2z$，$\frac{\partial X}{\partial x} = 2x$，$\frac{\partial Y}{\partial y} = 2y$，$\frac{\partial Z}{\partial z} = 2$

$$\iint_S (x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy-\iint_{S_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$=\iiint_V(2x+2y+2)dV-0\xlongequal{\text{由对称性}}2\iiint_V dV=2\cdot\text{圆锥的体积}=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1=\frac{2}{3}\pi$$

(6) $\iint_S xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy$, S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取下侧.

解：补曲面 $S_1: x^2+y^2\le a^2, z=0$，取上侧，

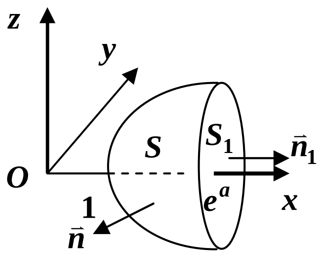
$$\iint_S xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy-\iint_{S_1}xz^2dydz+yx^2dzdx+zy^2dxdy$$

$$=-\iiint_V(z^2+x^2+y^2)dv-0\,\frac{\text{球坐标}}{\text{变换}}\,-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\,dr=-\frac{2}{5}\pi a^5$$

(7) $\iint_S 2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$, S 为由 xoy 坐标面上的弧段 $x=e^y$ $(0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转面，取凸的一侧.

解：由题意：曲面 S 的方程为



$$x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}\ (0\le y\le a),$$

凸的一侧指向后侧；补曲面

$S_1: y^2+z^2\le a^2, x=e^a$，取前侧，

$$\iint_S 2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$$

$$=\oiint_{S+S_1}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy-\iint_{S_1}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$$

$$=\iiint_V(-4x+8x-4x)dv-\iint_{y^2+z^2\le a^2}2(1-e^{2a})dydz$$

$$=0-2(1-e^{2a})\iint_{y^2+z^2\le a^2}dydz=2(e^{2a}-1)\pi a^2$$

2. 求下列向量 $\vec{A}$ 通过有向曲面 S 的通量.

(1) $\vec{A}=(2x+3z)\vec{i}-(xz+y)\vec{j}+(y^2+2z)\vec{k}$，$S$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心、半径 $R=3$ 的球面，取外侧.

解：$S:(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3^2$

$$\Phi=\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\oiint_S (2x+3z)dydz-(xz+y)dzdx+(y^2+2z)dxdy$$

$$=\iiint_V (2-1+2)dV=3\iiint_V dV=3\cdot\text{球的体积}=3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=108\pi$$

(2) $\vec{A}=(2x-z)\vec{i}+x^2y\vec{j}-xz^2\vec{k}$，$S$ 为立体 $0\le x\le a$，$0\le y\le a$，$0\le z\le a$ 的全表面，取内侧.

解：$\Phi=\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\oiint_S (2x-z)dydz+x^2ydzdx-xz^2dxdy$

$$=-\iiint_V (2+x^2-2xz)dV=-2a^3-\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x^2-2xz)dz$$

$$=-2a^3+\frac{1}{6}a^5=a^3(\frac{1}{6}a^2-2)$$

3. 求下列向量场的散度.

(1) $\vec{A}=(x^2+yz)\vec{i}+(y^2+xz)\vec{j}+(z^2+xy)\vec{k}$

解：$X=(x^2+yz)$，$Y=(y^2+xz)$，$Z=(z^2+xy)$

$$div\vec{A}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z)$$

(2) $\vec{A}=e^{xy}\vec{i}+\cos(xy)\vec{j}+\cos(xz^2)\vec{k}$

解：$X=e^{xy}$，$Y=\cos(xy)$，$Z=\cos(xz^2)$

$$div\vec{A}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=ye^{xy}-x\sin(xy)-2xz\sin(xz^2)$$

(3) $\vec{A}=x^2yz\vec{i}+xy^2z\vec{j}+xyz^2\vec{k}$

解：$X=x^2yz$，$Y=xy^2z$，$Z=xyz^2$

$$div\vec{A}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=2xyz+2xyz+2xyz=6xyz$$