7.8 多元函数的极值

上页 下页 返回

1. 二元函数的极值

引例：某商店卖两种牌子的果汁，本地牌子每瓶进价1元，外地牌子每瓶进价1.2元，店主估计，如果本地牌子的每瓶卖 x元，外地牌子的每瓶卖 y 元，则每天可卖出 $7-5x+4y$ 瓶本地牌子的果汁，$8+6x-7y$ 瓶外地牌子的果汁问：店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益？

每天的收益为 $f(x,y)=$

$$(x-1)(7-5x+4y)+(y-1.2)(8+6x-7y)$$

求最大收益即为求二元函数的最大值.

上页 下页 返回

定义 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y)：若满足不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)有**极大值**$f(x_0,y_0)$；(x_0,y_0)称为$f(x,y)$的**极大点**；若满足不等式$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)有**极小值**$f(x_0,y_0)$；(x_0,y_0)称为$f(x,y)$的**极小点**.

极大值、极小值统称为极值.

极大点、极小点统称为极值点.

例1　函数 $z = 3x^2 + 4y^2$

在 $(0, 0)$ 处有极小值.

例 2　函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

在 $(0, 0)$ 处有极大值.

例 3　函数 $z = xy$

在 $(0, 0)$ 处无极值.

问题：多元函数取得极值的必要条件是什么？

不妨设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极大值，

则对于(x_0,y_0)的某邻域内任意$(x,y)\neq(x_0,y_0)$

都有$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，

故当$y=y_0$，$x\neq x_0$时，有$f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$，

说明一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处有极大值，

必有 $f'_x(x_0,y_0)=0$；

类似地可证 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

上页 下页 返回

定理 1（取得极值的必要条件）

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的各个偏导数必然为零： $f'_x(x_0,y_0)=0$， $f'_y(x_0,y_0)=0$.

推广 如果三元函数$u=f(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$具有偏导数，则它在$P(x_0,y_0,z_0)$有极值的必要条件为

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0,z_0)=0,$$

$$f'_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

仿照一元函数，凡能使各个偏导数同时为零的点，称为函数的**驻点**.

与一元函数相同：驻点 $\underset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ 极值点(可导函数)

例如，点$(0,0)$是函数$z = xy$的驻点，但不是极值点.

问题：如何判定一个驻点是否为极值点？

定理 2（取得极值的充分条件）

设函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数，

且 $f'_x(x_0, y_0) = 0$， $f'_y(x_0, y_0) = 0$，

记 $f''_{x^2}(x_0, y_0) = A$， $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$， $f''_{y^2}(x_0, y_0) = C$，

则 $f(x,y)$在点(x_0, y_0)处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC - B^2 > 0$时具有极值，

当$A < 0$时有极大值，当$A > 0$时有极小值；

（2）$AC - B^2 < 0$时没有极值；

（3）$AC - B^2 = 0$时可能有极值，也可能没有极值，

需另作讨论.

例4 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的函数$z=f(x,y)$的极值

解 将方程两边分别对x,y求偏导

$$\begin{cases}2x+2z\cdot z'_x-2-4z'_x=0\\2y+2z\cdot z'_y+2-4z'_y=0\end{cases}$$

由函数取极值的必要条件知，驻点为$P(1,-1)$,

将上方程组再分别对x,y求偏导数,

上页 下页 返回

$$A = z''_{xx}|_P = \frac{1}{2 - z_P}, \quad B = z''_{xy}|_P = 0, \quad C = z''_{yy}|_P = \frac{1}{2 - z_P},$$

故 $AC - B^2 = \dfrac{1}{(2 - z_P)^2} > 0 \quad (z \neq 2)$，函数在$P$有极值.

将$P(1,-1)$代入原方程，有$z_1 = -2$，$z_2 = 6$，

当$z_1 = -2$时，$A = \frac{1}{4} > 0$，

所以$z = f(1,-1) = -2$为极小值；

当$z_2 = 6$时，$A = -\frac{1}{4} < 0$，

所以$z = f(1,-1) = 6$为极大值.

上页 下页 返回

求函数$z=f(x,y)$极值的一般步骤：

第一步　解方程组 $f_x'(x,y)=0,\quad f_y'(x,y)=0$

求出实数解，得驻点.

第二步　对于每一个驻点(x_0,y_0),

求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第三步　定出$AC-B^2$的符号，再判定是否是极值.

注：函数$z=f(x,y)$偏导数不存在的点也有可能

是极值点。

例：$z=-\sqrt{x^2+y^2}$在点（0, 0）处.

上页　下页　返回

2. 二元函数的最大值和最小值

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

由有界闭区域上的连续函数性质知：

若函数 $z=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上必取得最大值与最小值；

若函数 $z=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上可微，则 $f(x,y)$ 的最大值与最小值必出现在驻点或 D 的边界点上；

若函数 $z=f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续且有偏导数不存在的点，则 $f(x,y)$ 的最大值与最小值可能出现在该点上。

求最值的方法：

将函数在D 内的所有驻点处的函数值、偏导数不存在的点的函数值及在D 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

对实际问题, 若已知最大值或最小值是在 D 的内点取得的, 且在 D 内函数只有唯一的驻点, 则该驻点处的函数值就是最大值或最小值.

见引例

友情提示： 解题时应强调“由实际问题的实际意义, 且 D 内只有唯一的驻点”。

引例中收益函数为

$$f(x,y) = (x-1)(7-5x+4y)+(y-1.2)(8+6x-7y)$$

$$f_x'(x,y) = -10x + 10y + 4.8$$

$$f_y'(x,y) = 10x - 14y + 12.4$$

令 $f_x'(x,y) = 0 \quad f_y'(x,y) = 0$

得惟一驻点 $x = 4.78 \quad y = 4.3$

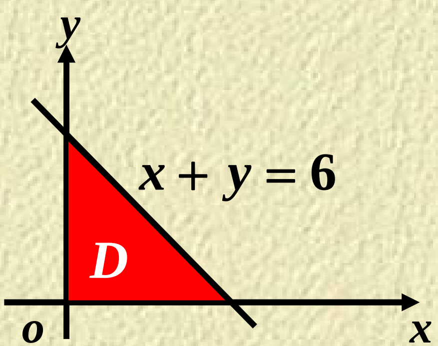
由问题的实际意义知，必有最大收益，又只有惟一的一个驻点，故该驻点就是所求的最大值的最大值点。

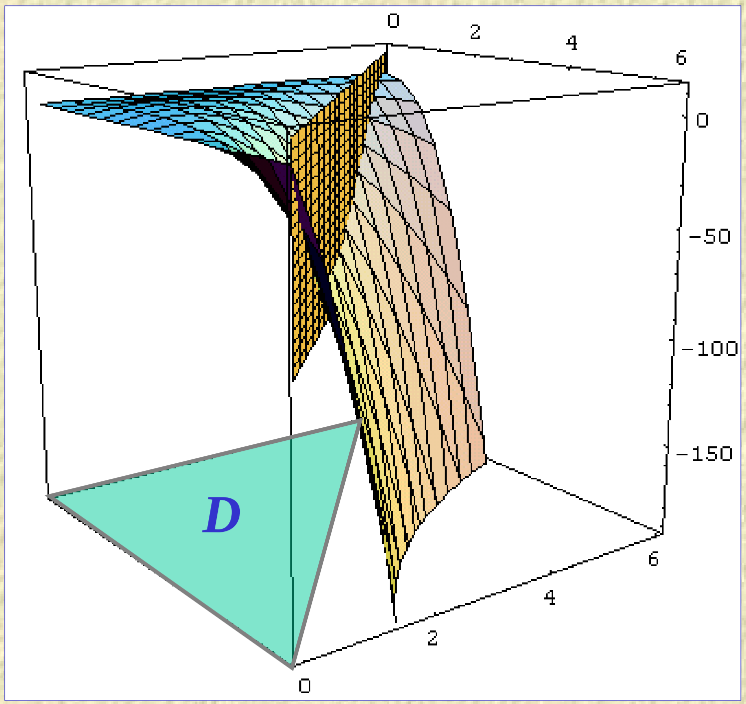
$$f_{\max}(4.78, 4.3) = 21.532$$

上页 下页 返回

例 5　求二元函数$z = f(x,y) = x^2y(4-x-y)$在直线$x+y=6$，x轴和y轴所围成的闭区域D上的最大值与最小值.

解





先求函数在D内的驻点，

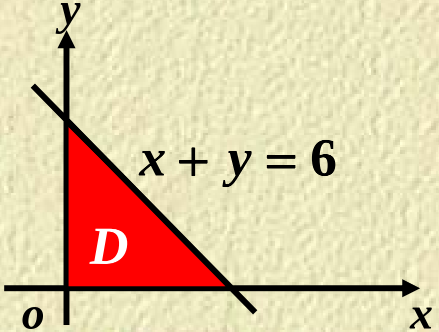
解方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0 \\ x^2(4-x-2y)=0 \end{cases} \xRightarrow[y\neq 0]{x\neq 0} \begin{cases} 8-3x-2y=0 \\ 4-x-2y=0 \end{cases}$$

得区域D内唯一驻点$(2,1)$，且$f(2,1)=4$，

再求$f(x,y)$在D边界上的最值，



在边界$x=0$和$y=0$上$f(x,y)=0$，

上页 下页 返回

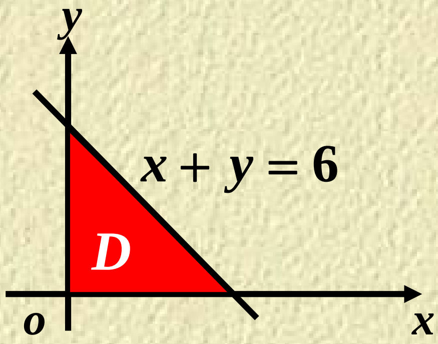
在边界$x+y=6$上，即$y=6-x$

于是$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$,　　$x\in[0,6]$

由 $f_x'=4x(x-6)+2x^2=0$,

得$x_1=0$, $x_2=4$　　$\Rightarrow y=6-x|_{x=4}=2$,

$f(4,2)=-64$,



比较后可知$f(2,1)=4$为最大值,

$f(4,2)=-64$为最小值.

上页 下页 返回

教材 P87 例 2　求 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在区域 $D: x^2+y^2\le 4$ 上的最大值与最小值。

解:　$f'_x=2x$，　$f'_y=8y$

令 $f'_x=0$，　$f'_y=0$ 得驻点 $(0,0)$.

边界上　$0\le y^2\le 4$

$13\le 3y^2+13\le 25$

将 $x^2+y^2=4$ 代入 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=3y^2+13 \overset{\Delta}{=} g(y),\quad y\in[-2,2]$$

令 $g'(y)=6y=0$，得 $y=0$，此时 $x=\pm\sqrt{4-y^2}=\pm 2$

当 $y=\pm 2$ 时，　$x=0$

而　$f(0,0)=9$，$f(\pm 2,0)=13$，$f(0,\pm 2)=25$

故 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 25，最小值 9。

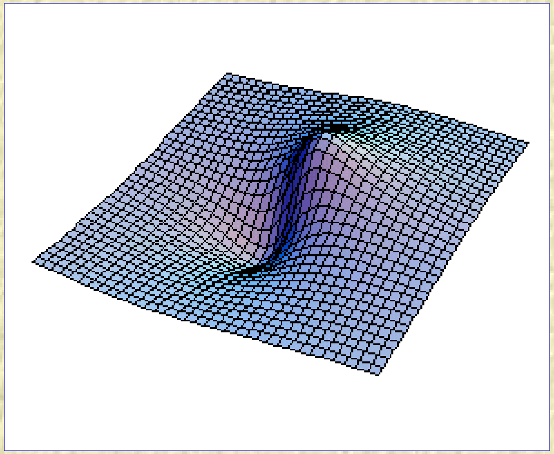
例 6　求$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

解　由　$z'_x=\dfrac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$

$$z'_y=\frac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$$

得驻点$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$和$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$



即边界上的值为零.

$z(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad z(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，最小值为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

上页 下页 返回

书中例3 已知长方体长宽高之和为 18, 问长宽高各取什麽值时, 长方体的体积最大.

解：设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z ,

由题意：$x+y+z=18$, 即 $z=18-x-y$

长方体的体积为

$$V=xyz=xy(18-x-y)=18xy-x^2y-xy$$

定义域 $D=\{(x,y)|x>0,y>0,x+y<18\}$

令 $\begin{cases} V_x'=18y-2xy-y^2=0 \\ V_y'=18x-2xy-x^2=0 \end{cases}$ 得驻点 $x=6,y=6$

因为 V 在 D 内只有一个驻点，且长方体体积肯定有最大值，故当长、宽、高均为 6 时其体积最大.

无条件极值：对自变量除了限制在定义域内外，并无其他限制条件.

例 3 可看作 $V = xyz$ 受到条件 $x+y+z=18$ 的限制，该问题就转化为条件极值问题。

$V = xyz$　　称为**目标函数**

$x+y+z=18$　　称为**约束条件**

一般情况下，将约束条件代入目标函数中往往是困难的（约束条件是隐函数）.

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

上页　下页　返回

3. 条件极值 (拉格朗日乘数法)

设目标函数为 $z = f(x,y)$，约束条件为 $\varphi(x,y)=0$

假定 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值， $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内有连续偏导数，且 $\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$

构造**拉格朗日函数** $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

其中 λ 为某一常数,

可由 $\begin{cases} F'_x = f_x(x,y) + \lambda\varphi_x(x,y) = 0 \\ F'_y = f_y(x,y) + \lambda\varphi_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$ 解出 x, y, λ,

其中 x, y 就是可能的极值点的坐标(驻点).

上页 下页 返回

推广　设　目标函数　$u=f(x_1,x_2\cdots x_n)$

约束条件　$\varphi(x_1,x_2\cdots x_n)=0$

则首先做拉格朗日函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2\cdots x_n)+\lambda\varphi(x_1,x_2\cdots x_n)$$

然后解方程组
$$\begin{cases} F'_{x_1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F'_{x_n}=0 \\ \varphi(x_1,x_2\cdots x_n)=0 \end{cases}$$

得条件极值的驻点，最后要判别驻点是否为极值点。这种求条件极值的方法称为拉格朗日乘数法。

拉格朗日乘数法可推广到约束条件多于两个的情况：

例：要找函数$u = f(x,y,z,t)$在条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0,\ \psi(x,y,z,t)=0\text{下的极值,}$$

先构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,t)=$$

$$f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t)$$

其中λ，μ 均为常数，可由F对各变量的偏导数为零及两个约束条件解出x,y,z,t.

即得条件极值驻点的坐标.

上页 下页 返回

例 7　将正数 12 分成三个正数 x, y, z 之和 使得 $u = x^3 y^2 z$ 为最大.

解　令 $F(x, y, z) = x^3 y^2 z + \lambda(x + y + z - 12)$,

$$
\text{则}\begin{cases} F_x' = 3x^2 y^2 z + \lambda = 0 \\ F_y' = 2x^3 yz + \lambda = 0 \\ F_z' = x^3 y^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}
$$

解得唯一驻点 $(6, 4, 2)$,

故最大值为　$u_{\max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912.$

例 8 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解 设$P(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上一点,

令$F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$,

则$F'_x|_P=\dfrac{2x_0}{a^2}$, $F'_y|_P=\dfrac{2y_0}{b^2}$, $F'_z|_P=\dfrac{2z_0}{c^2}$

过$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

上页 下页 返回

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

化简为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1,$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0},$$

所围四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0},$

在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$下求 V 的最小值,

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$,

$$G(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

由 $\begin{cases} G'_{x_0}=0, \quad G'_{y_0}=0, \quad G'_{z_0}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$,

上页 下页 返回

即 $$\begin{cases} \dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ \dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ \dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$ 可得 $$\begin{cases} x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, \\ z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

当切点坐标为$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$时，

四面体的体积最小$V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$.

上页 下页 返回

小结

1、二元函数的极值

（取得极值的必要条件、充分条件）

2、二元函数的最值

将函数在D 内所有驻点处的函数值、偏导数不存在的点的函数值及在D 的边界上的最大值和最小值（边界上有无穷个点，故应化为一元函数再求最值）相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

3、无条件极值

拉格朗日乘数法(注意：这类问题常常能用中学的方法解决，但出题的本意是用高等数学的方法解决问题，故注意避免丢分)

思考题

若 $f(x_0,y)$及 $f(x,y_0)$在(x_0,y_0)点均取得极值，则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)是否也取得极值？

思考题解答

未必．　例如 $f(x,y)=x^2-y^2$,

当$x=0$时，　$f(0,y)=-y^2$在$(0,0)$取极大值

当$y=0$时，　$f(x,0)=x^2$在$(0,0)$取极小值;

但$f(x,y)=x^2-y^2$在$(0,0)$不取极值.

上页　下页　返回

思考题

1.设 D 为平面上的有界区域， $f(x,y)$ 在 D 内可微，在 $\overline{D}$ 上连续，在 $\overline{D}$ 边界的上 $f(x,y)=0$，在 D 上满足方程 $f'_x+f'_y=f$，试证在 $\overline{D}$ 上 $f(x,y)\equiv 0$（$\overline{D}$ 表示由 D 及 D 的边界的并集所构成的有界闭区域）.

证：由于 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，故 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上必取得最大值与最小值;

假设 $f(x,y)$ 的极值点均在边界上，由于在边界上 $f(x,y)=0$，

故其在 $\overline{D}$ 上的最大值与最小值均为 0，

从而在 $\overline{D}$ 上 $f(x,y)\equiv 0$；

上页 下页 返回

假设存在$(x_0, y_0) \in D$为$f(x, y)$的极值点，

由于$f(x, y)$在D内可微，

则必有$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$，

从而由题设条件$f'_x + f'_y = f$　推得$f(x_0, y_0) = 0$，

即D内所有极值点处的函数值均为0，

由于在边界上$f(x, y) = 0$，

因而$f(x, y)$在$\overline{D}$上的最大值与最小值均为0，

从而在$\overline{D}$上$f(x, y) \equiv 0$；

历年研究生试题（极值、条件极值）

1.（02, 7） 设有一小山，它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$

(1)设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一个点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说，要在 D 的边界曲线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

?

上页 下页 返回

2.(03, 4) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A)点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

(D)根据所给的条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极大值点；

?

上页 下页 返回

3.（04, 12） 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

?

简单答案

1.$M_1(5,-5)$或$M_2(-5,5)$可作为攀登的起点 .

2.应选（ A ）.

3.点$(9,3)$为$z(x,y)$的极小值点，

极小值为 $z(9,3)=3$

点$(-9,-3)$为$z(x,y)$的极大值点，

极大值为 $z(-9,-3)=-3$

1. 解：(1)由梯度的几何意义知，

$h(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\mathrm{grad}\, h(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)\boldsymbol{i} + (x_0 - 2y_0)\boldsymbol{j}$$ 方向的方向导数最大，

方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2}$$

$$= \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0 y_0}$$

上页 下页 返回

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$

由题意，只需求 $f(x,y)$ 在约束条件

$75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点。令

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$$

则 $\begin{cases} L'_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & (1) \\ L'_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0 & (2) \\ L'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0 & (3) \end{cases}$

(1)+(2)得 $(x+y)(2-\lambda)=0$

从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$

上页 下页 返回

若 $\lambda = 2$ 则由(1)式得 $y = x$ 再由(3)式得

$x = \pm 5\sqrt{3} \quad y = \pm 5\sqrt{3}$

若 $y = -x$ 则由(3)式得 $x = \pm 5 \quad y = \mp 5$

于是得到四个可能的极值点

$$M_1(5,-5), \quad M_2(-5,5)$$

$$M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$$

由于 $f(M_1) = f(M_2) = 450$,

$f(M_3) = f(M_4) = 150$

返回

故 $M_1(5,-5)$或$M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点。

上页 下页 返回

2. 应选（A）.

返回

解由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的连续性及

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$$，知 $f(0,0)=0$

且 $\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha$ 其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha = 0$

则 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)^2$

令 $y=x$ 得 $f(x,x)=x^2+4x^4+4\alpha x^4=x^2+o(x^2)$

令 $y=-x$ 得 $f(x,-x)=-x^2+4x^4+4\alpha x^4=-x^2+o(x^2)$

从而，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内始终可正可负，

又 $f(0,0)=0$，由极值定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 没有极值。故应选（A）。

上页 下页 返回

3. (04, 12)　设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解：因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$

所以 $$2x-6y-2yz'_x-2zz'_x=0$$

$$-6x+20y-2z-2yz'_y-2zz'_y=0$$

令 $\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases}$ 将

上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$

上页 下页 返回

可得: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -9 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases}$

由于 $2 - 2yz''_{xx} - 2(z'_x)^2 - 2zz''_{xx} = 0$

$$-6 - 2z'_x - 2yz''_{xy} - 2z'_y z'_x - 2zz''_{xy} = 0$$

$$20 - 2z'_y - 2z'_y - 2yz''_{yy} - 2(z'_y)^2 - 2zz''_{yy} = 0$$

所以 $A = z''_{xx}\Big|_{(9,3,3)} = \dfrac{1}{6}, B = z''_{xy}\Big|_{(9,3,3)} = -\dfrac{1}{2}$

$$C = z''_{yy}\Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3}$$

上页 下页 返回

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}$， 又 $A=\frac{1}{6}>0$

从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$

类似地由

$$A=z''_{xx}\big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},B=z''_{xy}\big|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2}$$

$$C=z''_{yy}\big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$

所以点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为

$z(-9,-3)=-3$

返回

上页 下页 返回

作业：

P91： 1(1)(3). 2. 3(2)(4). 5. 7.

8. 9. 11.