习题 5.8(P338)

1. 一圆柱形水桶内有$40L$盐溶液，每升溶液中含盐$1kg$. 现有质量浓度为$1.5kg/L$的盐溶液以$4L/\min$的流速注入桶内，搅拌均匀后以$4L/\min$的速度流出. 求任意时刻桶内溶液所含盐的质量.

解：设$m=m(t)$为时刻t的含盐量，则时刻t流出的溶液的浓度为$\dfrac{m}{40}$，

在时间微元$[t,t+dt]$上，盐量的变化量等于流入的盐量减去流出的盐量，即

$$dm=1.5\times 4dt-\frac{m}{40}\times 4dt=\left(6-\frac{m}{10}\right)dt$$

因而所求初值问题为$\begin{cases}\dfrac{dm}{dt}=6-\dfrac{m}{10}\\ m\big|_{t=0}=40\end{cases}$，

解方程得 $m=60-Ce^{-\frac{t}{10}}$，由初始条件$m\big|_{t=0}=40$得$C=20$

故时刻t桶内溶液所含盐的质量$m=60-20e^{-\frac{t}{10}}$

2. 有直径$D=1m$，高$H=2m$的直立圆柱形桶，充满液体，液体从其底部直径$d=1cm$的圆孔流出. 问需要多长时间桶内的液体全部流出（流速为$v=c\sqrt{2gh}$，其中$c=0.6$，h为液面高，$g=9.8m/s^2$）.

解：取微元$[t,t+dt]$，则相应的液面高度的微元为$[h,h+dh]$，且dt与dh反号，在$[t,t+dt]$内液体的变化量等于桶内液体的流出量，当$dt>0$时，流出量$dQ_1>0$，

$$dQ_1=\pi\left(\frac{0.01}{2}\right)^2\cdot vdt=\frac{\pi c}{4}\sqrt{2gh}\cdot 10^{-4}dt$$

桶内液体的减少量 $dQ_2=\pi(0.5)^2(-dh)=-\dfrac{\pi}{4}dh$

由于桶内液体的减少量dQ_2与流出量dQ_1相等，即$\dfrac{\pi c}{4}\sqrt{2gh}\cdot 10^{-4}dt=-\dfrac{\pi}{4}dh$

从而得初值问题

$$\begin{cases} dt = \dfrac{10^{-4}}{c\sqrt{2g}} \dfrac{dh}{\sqrt{h}} \\ h\big|_{t=0} = 2 \end{cases}$$

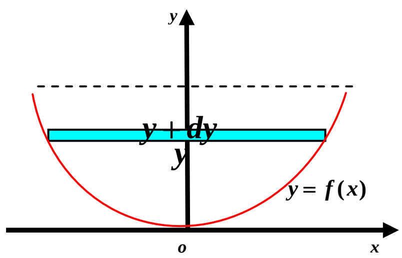
设 T 时桶内液体流净，则对方程两端积分得 $\int_0^T dt = \int_2^0 \dfrac{10^{-4}}{c\sqrt{2g}} \dfrac{dh}{\sqrt{h}}$

得 $T = \dfrac{10^4}{0.6\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h}\Big|_0^2 = \dfrac{2\times 10^4}{0.6\sqrt{9.8}} \approx 10648(s) \approx 3h$

3. 某容器是由曲线 $y = f(x)$ 绕 y 轴旋转而成的立体. 今按 $2tcm^3/s$ 的流量注水. 为使水面上升速率恒为 $\dfrac{2}{\pi}cm/s$， $f(x)$ 应是怎样的函数？（设 $f(0)=0$）.

解：解法 1：

取微元 $[t, t+dt]$，则相应的水面高度的微元为 $[y, y+dy]$，容器中水量的增加量



$$dQ = \pi x^2 dy \qquad (1)$$

注入水量 $$dQ = 2tdt \qquad (2)$$

又 $$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\pi} \qquad (3)$$

由(1)、(2)得 $$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{\pi x^2} \qquad (4)$$

由(3)、(4)得 $\dfrac{2t}{\pi x^2} = \dfrac{2}{\pi}$， 即 $t = x^2$ (5)

解方程(3)得 $y = \dfrac{2}{\pi}t + C$

当 $t=0$ 时， $y=0$，由此得 $C=0$，从而 $y = \dfrac{2}{\pi}t$，

(5) 代入上式得 即 $y = \dfrac{2}{\pi}x^2$

解法 2：

当水面高度为 y 时容量为 $V = \int_0^y \pi x^2 dy = \int_0^y \pi x^2(y)dy$

得 $$\frac{dV}{dy}=\pi x^2(y)$$

由题设得 $$\frac{dy}{dt}=\frac{2}{\pi} \qquad (6)$$

故有 $$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=\pi x^2(y)\cdot\frac{2}{\pi}=2x^2(y)$$

又由题设 $\dfrac{dV}{dt}=2t$，从而得 $2x^2=2t$

即 $$t=x^2 \qquad (7)$$

解方程(6)得 $y=\dfrac{2}{\pi}t+C$

当 $t=0$ 时，$y=0$，由此得 $C=0$，从而 $y=\dfrac{2}{\pi}t$，

(7) 代入上式得　　即 $y=\dfrac{2}{\pi}x^2$

4. 在半径（单位为 m）为 R 的圆柱形储水槽中，开始加水至 H（单位为 m）. 由半径（单位为 m）为 r_1 的给水管以 v_1 的流速（单位为 m/s）给水，同时由位于槽底部的半径为 r_2 的排水管以 v_2 的流速（单位为 m/s）排水，其中 $v_2=\sqrt{2gh}$，g 为重力加速度，y 为水位高度，试求时间 t 与水位高度 y 之间的函数关系 $t=t(y)$.

解：取微元 $[t,t+dt]$，则相应的水面高度的微元为 $[y,y+dy]$，

则给水量 $$dV_1=\pi r_1^2 v_1 dt$$

排水量 $$dV_2=\pi r_2^2\cdot c\sqrt{2gy}\,dt$$

槽内水量变化 $dV=\pi R^2 dy$，　由 $dV=dV_1-dV_2$ 得

$$\begin{cases} R^2\dfrac{dy}{dt}=r_1^2v_1-cr_2^2\sqrt{2gy} \\ y|_{t=0}=H \end{cases} \qquad (1)$$

记 $a=r_1^2v_1$，$b=cr_2^2\sqrt{2g}$

则 $$\frac{dy}{a-b\sqrt{y}}=\frac{dt}{R^2} \qquad (2)$$

令 $u=a-b\sqrt{y}$，则 $y=\frac{1}{b^2}(a-u)^2$， $dy=-\frac{2}{b^2}(a-u)du$

代入(2)得 $-\frac{2}{b^2}\frac{a-u}{u}du=\frac{1}{R^2}dt$

积分得 $$-\frac{2}{b^2}(a\ln u-u)=\frac{1}{R^2}t+C \qquad (3)$$

当 $t=0$ 时， $y=H$， $u=a-b\sqrt{H}$

代入(3)得 $C=\frac{2}{b^2}[a-b\sqrt{H}-a\ln(a-b\sqrt{H})]$

代入(3)得 $$t=\frac{2R^2}{b^2}\left[u-a+b\sqrt{H}+a\ln\frac{a-b\sqrt{H}}{u}\right]$$
$$=\frac{2R^2}{b}(\sqrt{H}-\sqrt{y})+\frac{2R^2}{b^2}\ln\frac{a-b\sqrt{H}}{a-b\sqrt{y}}$$
$$=\frac{R^2}{cr_2^2}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{H}-\sqrt{y})+\frac{v_1R^2r_1^2}{c^2gr_2^4}\ln\frac{r_1^2v_1-cr_2^2\sqrt{2gH}}{r_1^2v_1-cr_2^2\sqrt{2gy}}$$

5. 假设有人开始在一间 $60m^3$ 的房间里抽烟，从而向房间内输入含 5%（体积分数）CO 的空气，输入速度为 $0.002m^3/\min$．设烟气与其他空气立即混合，且以同样的速度从房间流出．试求 t 时刻 CO 的含量（体积分数）$\varphi(t)$．且 $\varphi(t)$ 何时达到 0.1%（此时可引起中毒）？

解：取微元 $[t,t+dt]$，记 $Q(t)$ 为时刻 t 一氧化碳的含量，则浓度 $C(t)=\frac{Q(t)}{60}$

则一氧化碳在 $[t,t+dt]$ 的变化量等于输入量减去流出量，即

$$dQ=0.05\times0.002dt-\frac{Q(t)}{60}\times0.002dt$$

即得初值问题 $$\begin{cases}\dfrac{dQ}{dt}=\dfrac{10^{-4}}{3}(3-Q)\\ Q\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

解此初值问题得 $Q=3(1-e^{-\frac{10^{-4}}{3}t})$

故 $C(t)=\frac{1}{20}(1-e^{-\frac{10^{-4}}{3}t})$

令 $C(t)=0.1\%$，代入上式得 $t=-30000\ln 0.08=606(\min)=10h6\min$

即从开始抽烟，经过 10 小时 6 分钟后，房间内空气中的一氧化碳含量达到 0.1% 的浓度.

6. 枯死的落叶在森林中以每年 $3g/cm^2$ 的速率聚集在地面上，同时这些落叶中每年又有 75% 会腐烂掉. 试求枯叶每平方厘米上的质量与时间的函数关系 $m(t)$，并讨论其变化趋势.

解：假设树叶的下落和腐烂是连续地进行的，开始时 $t=0$，质量 $m=0$

法 1： 落叶总质量 $m(t)$ 的变化率与树叶下落和腐烂有关. 下落的速率是质量变化率的一部分，另一部分是腐烂引起的质量减少. 因而得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dm}{dt}=3-0.75m\\ m|_{t=0}=0\end{cases}$$

解此初值问题得 $m(t)=4(1-e^{-0.75t})$

随着时间增加，落叶质量也增加，当 $t\to\infty$ 时，$m(t)\to 4$，即落叶总质量 $m(t)$ 的极限值为 $4g/cm^2$.

法 2（微元法）：取微元 $[t,t+dt]$，计算 dt 内落叶质量的变化. 由于下落而累积的质量为 $3dt$，由于腐烂而失去的质量为 $75\%\cdot mdt$，因此总量的变化量为

$$dm=3dt-0.75mdt$$

因而得初值问题 $$\begin{cases}\dfrac{dm}{dt}=3-0.75m\\ m|_{t=0}=0\end{cases}$$

解此初值问题得 $m(t)=4(1-e^{-0.75t})$

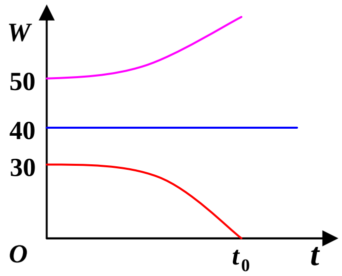
7. 假设某公司的净资产因资产本身产生利息而以每年 5% 的利率（连续复利）增长，该公司每年需支付职工工资 2 亿元. 设初始净资产为 W_0，求净资产与时间的函数关系 $W(t)$；并讨论当 W_0 为 30 亿元、40 亿元、50 亿元时，$W(t)$ 的变化趋势.

解：$W(t)$ 的变化率由两部分组成，支付工资为减少率 2，资本增长率为 $5\%\cdot W$，

因而得初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = 0.05W - 2 \\ W\big|_{t=0} = W_0 \end{cases}$

解此初值问题得 $W(t) = 40 + (W_0 - 40)e^{0.05t}$

当 $W_0 = 30$ 时，$W = 40 - 10e^{0.05t}$，W 是 t 的单调减函数，当 $t = t_0 = 2.77$ (年)时，$W = 0$，即此时净资产为 0；

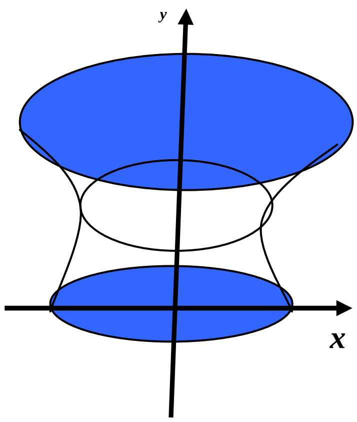


当 $W_0 = 40$ 时，$W = 40$，为常数；

当 $W_0 = 50$ 时，$W = 40 + 10e^{0.05t}$，W 是 t 的单调增函数，当 $t \to +\infty$ 时，$W \to +\infty$，

$W = W(t)$ 的曲线如图.

8. 有一平底容器，其内侧壁是曲线 $x = \varphi(y) \quad (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面，如图所示，容器底面圆的半径为 $2m$，根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）.



(1)根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式.

(2)求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

解：设时刻 t 液面的面积为 $A(t)$，注入的液体体积为 $V(t)$，则 $A(t) = \pi x^2$，

由题设可得 $x\big|_{t=0} = 2$，或 $x\big|_{y=0} = 2$

(1) 所以 $\dfrac{dA}{dt} = \pi \dfrac{d}{dt}[x^2] = 2\pi x \dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt}$，由题设 $\dfrac{dA}{dt} = \pi$ 得

$$\pi = \pi \frac{d}{dt}[x^2] = 2\pi x \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

即 $\dfrac{d}{dt}[x^2] = 1$，积分得 $x^2 = t + C$

由初始条件 $x\big|_{t=0}=2$ 得 $C=4$，$x^2=t+4$，即 $t=x^2-4$

故 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式为 $t=\varphi^2(y)-4$

(2) 取微元 $[t,t+dt]$，则相应的液面高度的微元为 $[y,y+dy]$，相应的体积微元为

$$dV=\pi x^2dy$$

故 $\dfrac{dV}{dt}=\pi x^2\dfrac{dy}{dt}$， 由题设 $\dfrac{dV}{dt}=3$，得

$$3=\pi x^2\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

(2) 代入 (1) 得 $6\dfrac{dx}{dy}=\pi x$

此为可分离变量的微分方程（或一阶常系数线性齐次微分方程），解得 $x=Ce^{\frac{\pi}{6}y}$

由初始条件 $x\big|_{y=0}=2$ 得 $C=2$

故曲线的方程为 $x=2e^{\frac{\pi}{6}y}$

9. 在某人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微函数），其变化率与已掌握新技术的人数和未掌握新技术的人数之积成正比，比例系数 $k>0$，求 $x(t)$.

解： $x(t)$ 的变化率就是 x 对 t 的导数，由题意得：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程，解得： $x=\dfrac{NCe^{kNt}}{1+Ce^{kNt}}$

由初始条件可得 $C=\dfrac{x_0}{N-x_0}$

故初值问题的解为 $x=\dfrac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}$

10. 物质 A 和 B 化合生成新物质 X. 设反应过程不可逆. 反应初始时刻 A、B、X 的量分别为 a、b、0，在反应过程中，A、B 失去的量为 X 生成的量，并且 X 中含 A 与 B 的比例为 $\alpha:\beta$. 已知 X 的量 x 的增长率与 A、B 的剩余量之积成正比，比例系数 $k>0$. 求过程开始后 t 时，生成物 X 的量 x 与时间 t 的关系（其中，$b\alpha-a\beta\neq 0$）.

解：生成物 X 中含物质 A 的量为 $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x$、含物质 B 的量为 $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}x$，

A 的剩余量为 $a-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x$、$B$ 的剩余量为 $b-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}x$

由题意得 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k\left(a-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x\right)(b-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}x)\\ x(0)=0\end{cases}$

这是一个可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{1}{b\alpha-a\beta}\left[\frac{\alpha}{a-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}x}-\frac{\beta}{b-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}x}\right]dx=k\,dt$$

两端积分得 $\dfrac{\alpha+\beta}{a\beta-b\alpha}\ln\dfrac{a(\alpha+\beta)-\alpha x}{b(\alpha+\beta)-\beta x}=kt+C$

由初始条件可得 $C=\dfrac{\alpha+\beta}{a\beta-b\alpha}\ln\dfrac{a}{b}$

故初值问题的解为 $\dfrac{\alpha+\beta}{a\beta-b\alpha}\ln\dfrac{ab(\alpha+\beta)-b\alpha x}{ab(\alpha+\beta)-a\beta x}=kt$

11. 潜水艇在下沉力 F（包含重力）的作用下向水下沉（此时没有前进速度）. 设水的阻力与下沉速度成正比（比例系数为 k），开始时下沉速度为 0，求速度与时间的关系（设潜水艇的质量为 m）.

解：设下沉速度为 v，时间为 t，由牛顿定律得

$$\begin{cases}m\dfrac{dv}{dt}=F-kv\\ v(0)=0\end{cases}$$

这是一个可分离变量的微分方程，解得：$v=\dfrac{1}{k}\left(F-Ce^{-\frac{k}{m}t}\right)$

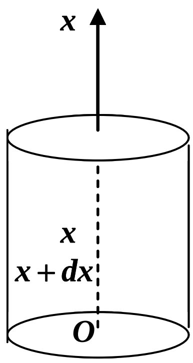
由初始条件可得 $C=F$

故初值问题的解为 $v=\dfrac{F}{k}\left(1-Ce^{-\frac{k}{m}t}\right)$

注：这个方程也是一个常系数线性非齐次微分方程，故可以用特征根法求出对应的齐次方程的通解，再用待定系数法求出非齐次方程的一个特解，然后利用线性非齐次方程的通解结构定理即求出该方程的通解。

12. 雨水从屋檐上滴入下面的一圆柱形水桶中，当雨停时，桶中雨水以与水深的平方根成正比的速率向桶外渗漏，如果水面高度在 $1h$ 内由开始的 $90cm$ 减少至 $88cm$，那么需要多长时间桶内的水能够全部渗漏掉.

解：如图所示. 取微元 $[t, t+dt]$，则相应的水面高度的微元为 $[x, x+dx]$



由题设得初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-k\sqrt{x}\\ x|_{t=0}=90, \qquad x|_{t=1}=88\end{cases}$

（负号表示高度函数为减函数）

此为可分离变量的微分方程，解得 $\sqrt{x}=-\dfrac{k}{2}t+C$

由初始条件可得 $C=\sqrt{90}$，$k=2(\sqrt{90}-\sqrt{88})$

$\sqrt{x}=-(\sqrt{90}-\sqrt{88})t+\sqrt{90}$

当 $x=0$ 时，$t=\dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{90}-\sqrt{88}}=\dfrac{\sqrt{90}(\sqrt{90}+\sqrt{88})}{2}=45+\sqrt{1980}\approx 45+44.5=89.5$

即需要约 89.5 小时的时间桶内的水能够全部渗漏掉.

13. 当轮船的前进速度为 v_0 时，轮船的推进器停止工作，一只船所受水的阻力与船速的平方成正比（比例系数为 mk，m 为船的质量），问经过多长时间船速减为原来的一半.

解：由题意得 $\begin{cases}m\dfrac{dv}{dt}=-mkv^2\\ v(0)=v_0\end{cases}$

这是一个可分离变量的微分方程，解得：$\dfrac{1}{v}=kt+C$

由初始条件可得 $C=\dfrac{1}{v_0}$，即方程的解为 $\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{v_0}=kt$

当 $v=\dfrac{1}{2}v_0$ 时，$t=\dfrac{1}{kv_0}$，即经过 $t=\dfrac{1}{kv_0}$ 后，船速减为原来的一半

14. 质量为$1\times10^{-3}kg$的质点受力作用作直线运动，力与时间成正比，且与质点的运动速度成正比，在$t=10s$时，速度等于$0.5m/s$所受力为$4\times10^{-5}N$，问运动开始后$60s$质点的速度是多少.

解：由题设得 $F=\dfrac{kt}{v}$ (1)，且 $v|_{t=10}=0.5$，$F|_{t=10}=4\times10^{-5}$

由牛顿定律得 $10^{-3}\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{kt}{v}$ (2)

由初始条件$F|_{t=10}=4\times10^{-5}$，代入(1)可得 $k=2\times10^{-6}$

故(2)式变为 $2vdv=4\times10^{-3}tdt$

两端积分得 $v^2=2\times10^{-3}t^2+C$

由初始条件$v|_{t=10}=0.5$可得 $C=0.05$

故 $v(t)=\sqrt{2\times10^{-3}t^2+0.05}$

$v(60)=\sqrt{7.25}\approx2.693\ (m/s)$

即运动开始后$60s$质点的速度大约是$2.693\ (m/s)$.

15. 质量为$0.2kg$的物体悬挂于弹簧上呈平衡状态. 现将物体下拉使弹簧伸长$2cm$，然后轻轻放开，使之振动，试求其运动方程. 假定介质阻力与速度成正比，当速度为$1cm/s$时，阻力为$9.8\times10^{-4}N$，弹性系数$\mu=49N/cm$

解：设从物体放开时开始计时，时间以t表示，弹簧的伸长长度设为x，则$x=x(t)$

由题意，利用牛顿定律得

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}-\mu x \\ x|_{t=0}=0.02,\quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

其中，$-\mu x$为弹性力，$-k\dfrac{dx}{dt}=-kv$为阻力，负号表示力阻碍运动进行.

由题设 $k\cdot0.01=9.8\times10^{-4}$，得$k=9.8\times10^{-2}$，$\mu=49N/cm=4900N/m$

方程变形为 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{\mu}{m}x=0$，即 $\frac{d^2x}{dt^2}+0.49\frac{dx}{dt}+24500x=0$

这是一个二阶常系数线性齐次微分方程，其特征根为 $r_{1,2}=-0.245\pm 156.5i$

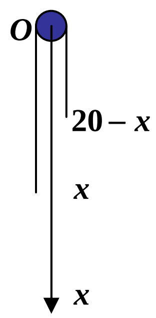
通解为 $x=e^{-0.245t}(C_1\cos 156.5t+C_2\sin 156.5t)$

由初始条件得 $C_1=0.02$，$C_2=0.313\times 10^{-4}$， 故初值问题的解为

$x=e^{-0.245t}(0.02\cos 156.5t+0.313\times 10^{-4}\sin 156.5t)$ （x 的单位为米，t 的单位为秒）

或 $x=e^{-0.245t}(2\cos 156.5t+0.00313\sin 156.5t)$ （x 的单位为厘米，t 的单位为秒）

16. 质量均匀的链条悬挂在钉子上，起动时一端距钉子 $8m$，另一端距钉子 $12m$，若不计钉子对链条产生的摩擦力，求链条自然滑下所需时间.



解：如图建立坐标系，设从链条启动时开始计时，在时刻 t，链条最下端的坐标为 x，则另一端的坐标为 $20-x$，设链条的线密度为 ρ（由于是均匀的链条，ρ 为常数）

则链条的质量为 20ρ，链条在下滑过程中所受重力为 $\rho g x$，

所受的阻力为 $\rho g(20-x)$，由牛顿定律得

$$\begin{cases} 20\rho\frac{d^2x}{dt^2}=\rho g x-\rho g(20-x) \\ x\big|_{t=0}=12,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 10\frac{d^2x}{dt^2}=g(x-10) \\ x\big|_{t=0}=12,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

这是一个二阶常系数线性非齐次微分方程，解得 $x=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10$

由初始条件得 $C_1=1$，$C_2=1$

故初值问题的解为 $x=e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}+10$

当链条全部滑过钉子时，$x=20$，因而得 $e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t}=10$

即 $ch\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right)=5$

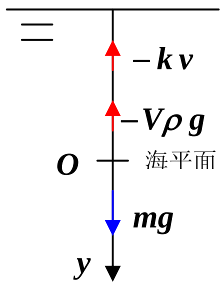
所以 $\sqrt{\dfrac{g}{10}}\,t = arch5 = \ln(5+\sqrt{5^2-1}) = \ln(5+2\sqrt{6})$

故链条滑下所需时间 $t=\sqrt{\dfrac{10}{g}}\ln(5+2\sqrt{6})$

17. 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器质量为 m，体积为 V，海水的密度为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

解：如图建立坐标系，仪器受力：重力为 $m\,g$，

浮力为 $-V\rho\,g$，阻力为 $-kv$.



由牛顿定律得如下初值问题

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2} = m\,g - V\rho\,g - kv \\ y\big|_{t=0}=0, \quad \dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

由于方程不显含自变量 t，故令 $\dfrac{dy}{dt}=v(y)$，则 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=v\cdot\dfrac{dv}{dy}$，

原方程化为 $m\,v\dfrac{dv}{dy}=m\,g-V\rho\,g-kv$，且初始条件化为 $v\big|_{y=0}=0$

这是可分离变量的微分方程，解得 $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-V\rho\,g)}{k^2}\ln(mg-V\rho\,g-kv)+C$

代入初始条件 $v\big|_{y=0}=0$ 得 $C=\dfrac{m(mg-V\rho\,g)}{k^2}\ln(mg-V\rho\,g)$

故 $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-V\rho\,g)}{k^2}\ln\dfrac{mg-V\rho\,g-kv}{mg-V\rho\,g}$

18. 同 P297 习题 5-2 的 11 题重复

19. 他是嫌疑犯吗？按照牛顿冷却定律，温度为 T 的物体在温度为 T_0 $(T_0<T)$ 的环境中冷

却的速度与温差$T-T_0$成正比，你能用该定律确定张某是下面案件中的嫌疑犯吗？

受害者的尸体于晚上$7:30$被发现，法医于晚上$8:20$赶到凶案现场，测得尸体温度为32.6^0C；$1h$后，当尸体即将被抬走时，测得尸体温度为31.4^0C，室温在几小时内始终保持在21.1^0C. 此案最大的嫌疑犯是张某，但张某声称自己是无罪的，并有证人说“下午张某一直在办公室上班，$5:00$时打了一个电话，打完电话后就离开了办公室”. 从张某的办公室到受害者家（凶案现场）需 5 分钟. 张某的律师发现受害者在死亡的当天下午去医院看过病，病历记录：发烧，体温38.3^0C. 假设受害者死时的体温是38.3^0C，试问张某能被排除在嫌疑犯之外吗？（注：死者体内没有发现服用过阿斯匹林等类似退热药物）

解：设$T(x)$表示时刻t尸体的温度，并记法医到达现场的时刻$20:20$分为$t=0$，则$T(0)=32.6$，$T(1)=31.4$，只要确定受害者的死亡时间，即求出使$T(t)=38.3$的时刻t_d，然后依据张某能否在时刻t_d到达案发现场，来判断他是否可以排除在嫌疑犯之外.

人体体温受大脑神经中枢调节，人死后体温调节功能消失，尸体的温度受外界环境温度的影响. 假设尸体温度的变化率服从牛顿冷却定律：尸体温度的变化率正比于尸体温度与室温的差. 从而得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k(T-21.1)\\ T(0)=32.6,\quad T(1)=31.4\end{cases}$$

这是可分离变量的微分方程，解得 $T(t)=21.1+Ce^{-kt}$

代入初始条件$T(0)=32.6$得 $C=11.5$

代入初始条件$T(1)=31.4$得 $e^k=\dfrac{115}{103}$， $k=\ln\dfrac{115}{103}\approx 0.11$

故 $T(t)=21.1+11.5e^{-0.11t}$，即$t=-\dfrac{1}{0.11}\ln\dfrac{T(t)-21.1}{11.5}$

所以 $$t_d=-\frac{1}{0.11}\ln\frac{38.3-21.1}{11.5}=-\frac{1}{0.11}\ln\frac{172}{115}\approx-3.66h\approx-3h40\min$$

故死亡时间约为 $20h20\min-3h40\min=16h40\min$

由于$17h$之前张某一直在办公室上班，因此仅从捉拿凶犯（而非同谋）的角度看，可以将张某排除在嫌疑犯之外.

20. 当一次谋杀发生后，尸体的温度从原来的37^0C按照牛顿冷却定律开始变凉，假设$2h$后

尸体温度变为35^0C，并且假定周围空气的温度保持20^0C不变，求尸体温度T与时间t的函数关系$T(t)$. 如果尸体被发现时的温度是30^0C，时间是下午 4 点整，那么谋杀是何时发生的？

解：设谋杀发生时，时间$t=0$，由冷却定律得

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-20) \\ T\big|_{t=0} = 37 \end{cases}$$

这是可分离变量的微分方程，解得 $T = 20 + Ce^{-kt}$

由初始条件得 $C = 17$，故 $T = 20 + 17e^{-kt}$

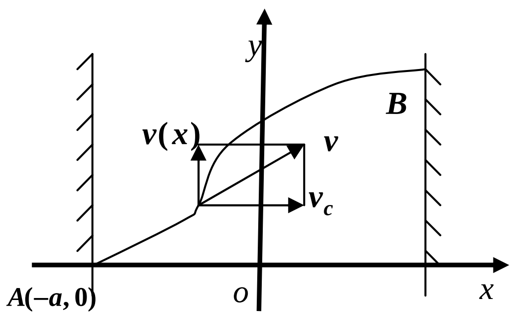
由题设，当$t = 2(h)$时，$T = 35$，即 $35 = 20 + 17e^{-2k}$，得 $k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{17}{15}$

所以 $T = 20 + 17e^{\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{17}{15}\right)t}$，故 $t = \dfrac{2\ln[(T-20)/17]}{\ln(15/17)}$

当$T = 30$时，$t = \dfrac{2\ln(10/17)}{\ln(15/17)} \approx 8.48(h) \approx 8h29\min$

依题意，谋杀发生后至被发现共经过了$8h29\min$，被发现的时间为$16:00$，故谋杀时间是$7:31$.

21. 设有一河流，水流速度的方向为y轴正向，如图所示，其大小$v(x) = v_0(1-\dfrac{x^2}{a^2})$，$v_0$为常数，有一渡船以常速$v_c$（方向与$y$轴垂直）由点$A(-a,0)$出发驶向对岸，试求航线$AB$的方程$y = y(x)$



解：设$P(x, y)$为曲线$\overset{\frown}{AB}$上任一点，α为该点处切线的倾角，则在此点处船的实际速度v沿曲线的切向，它由水流速度$v(x)$和船的常速v_c合成. $\vec{v} = \overrightarrow{v(x)} + \vec{v_c}$

又 $y' = \tan\alpha = \dfrac{v(x)}{v_c} = \dfrac{v_0}{v_c}(1-\dfrac{x^2}{a^2})$，因而得初值问题

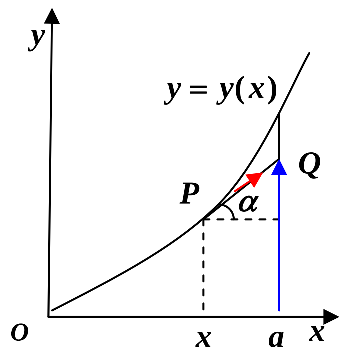
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_0}{v_c}(1 - \dfrac{x^2}{a^2}) \\ y\big|_{x=-a} = 0 \end{cases}$$

方程两端分别对 x 积分得 $y = \dfrac{v_0}{v_c}(x - \dfrac{x^3}{3a^2}) + C$， 由初始条件得 $C = \dfrac{2av_0}{3v_c}$

故航线 AB 的方程为 $y = \dfrac{v_0}{v_c}(\dfrac{2a}{3} + x - \dfrac{x^3}{3a^2})$

22. 一点从 x 轴上距原点 $a\ (a>0)$ 处出发，以匀速 v 沿平行于 y 轴的方向移动（取正向）. 另一点自原点同时出发，紧盯着前一点追赶，其速度为 $2v$，求后一点走过的路线及追上前一点所用的时间.

解：如图所示，设时刻 t 时，后点处于点 $P(x, y)$，前点处于点 $Q(a, vt)$，则



$$\tan\alpha = \frac{vt - y}{a - x}$$

PQ 为 $y = y(x)$ 的切线，因而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vt - y}{a - x}$$

即 $2(a-x)\dfrac{dy}{dx} = 2vt - 2y \qquad (1)$

$\overset{\frown}{OP}$ 为后点在时刻 t 的路程，因而有 $2vt = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (2)$

将 (2) 代入 (1) 得 $2(a-x)\dfrac{dy}{dx} = \int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx - 2y \qquad (3)$

(3) 两端对 x 求导得 $2(a-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$，

这是后点运动路线 $y = y(x)$ 满足的微分方程.

由于后点从原点出发，故 $y\big|_{x=0} = 0$，又由于后点出发时沿 x 轴方向运动，故 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$

因而初值问题为

$$\begin{cases} 2(a-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2} \\ y\big|_{x=0}=0, \qquad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0 \end{cases}$$

方程中不显含未知函数 y，故令 $y'=P(x)$，原方程化为

$$2(a-x)\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}$$

这是可分离变量的微分方程，解得 $p+\sqrt{1+p^2}=C_1(a-x)^{-\frac{1}{2}}$

代入初始条件 $P\big|_{x=0}=\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=0$，得 $C_1=a^{\frac{1}{2}}$

故 $p+\sqrt{1+p^2}=(\dfrac{a-x}{a})^{-\frac{1}{2}}$ (4)

即 $\dfrac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}$， 分母有理化得 $p-\sqrt{1+p^2}=-(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}$ (5)

$(4)+(5)$ 得 $p=\dfrac{1}{2}\left[(\dfrac{a-x}{a})^{-\frac{1}{2}}-(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}\right]$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left[(\dfrac{a-x}{a})^{-\frac{1}{2}}-(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}\right]$

两端对 x 积分得 $y=a\left[\dfrac{1}{3}(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{3}{2}}-(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}\right]+C_2$

代入初始条件 $y\big|_{x=0}=0$，得 $C_2=\dfrac{2}{3}a$

故后点走过的路线 $y=a\left[\dfrac{1}{3}(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{3}{2}}-(\dfrac{a-x}{a})^{\frac{1}{2}}\right]+\dfrac{2}{3}a$

当 $x=a$ 时，后点追上前点，此时有 $y=\dfrac{2}{3}a$

即前点在点 $(a,\dfrac{2}{3}a)$ 被后点追上，即 $vt=\dfrac{2}{3}a$，因此后点追上前点所用的时间 $t=\dfrac{2a}{3v}$.