习题 10.4(P253)

1.求下列级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}x^n$

解：由收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=1$ 得：级数在 $(-1,1)$ 内绝对收敛.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$ ，此级数绝对收敛；

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ，此级数绝对收敛；

综上所述，级数的收敛域为 $[-1,1]$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n}$

解：法 1　该级数不是标准形式（ x 的奇次幂的系数为 0 ），不能直接用公式求收敛半径，由定理可由比值判别法求：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{4^{n+1}}\Big/\frac{x^{2n}}{4^n}\right|=\frac{x^2}{4}$$

当 $\frac{x^2}{4}<1$ 时，即 $|x|<2$ 时，级数收敛，故收敛区间为 $(-2,2)$，

当 $x=\pm 2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}1$，通项不趋于 0 ，此级数发散；

故级数的收敛域为 $(-2,2)$.

法 2　化为标准形式后用公式求收敛半径，令 $x^2=t$ ，则原级数化为新级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n}$ ，

新级数的收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^{n+1}}}\right|=4$，收敛区间为 $|t|<4$，即 $x^2<4$，因而得 $|x|<2$，

所以原级数的收敛区间为 $(-2,2)$，再讨论端点的收敛情况即得原级数的收敛域.

法 3　化为标准形式后用已知的结果直接得收敛域.，

令 $\dfrac{x^2}{4}=t$，则原级数化为新级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$，这是几何级数，因而新级数的收敛域为

$|t|<1$，即 $\dfrac{x^2}{4}<1$，从而得原级数的收敛域为 $(-2,2)$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+1}x^n$

解：由收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n}{n^2+1}\Big/\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\right|=\dfrac{1}{2}$ 得：级数在 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 内绝对收敛.

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n^2+1}$，此级数绝对收敛；

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，此级数收敛；

综上所述，级数的收敛域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

收敛半径还可由下列方法求出：$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n^2+1}}=2$，

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{2}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$

解：令 $x-5=t$，将原级数化为新级数(标准形式) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{\sqrt{n}}$，

新级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big/\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right|=1$，收敛区间为 $|t|<1$，即 $|x-5|<1$，

因而原级数收敛区间为 $(4,6)$，

当 $x=4$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，由交错级数判别法知，此级数条件收敛；

当 $x=6$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，此级数发散；

综上所述，级数的收敛域为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}(x+1)^n$

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}(x+1)^n \overset{令t=x+1}{=\!=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}t^n$，

新级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}\Big/\frac{2^{2n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right|=\frac{1}{4}$，收敛区间为$|t|<\frac{1}{4}$，即

$|x+1|<\frac{1}{4}$，因而原级数收敛区间为$(-\frac{5}{4},-\frac{3}{4})$，

当$x=-\frac{5}{4}$时，级数为$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$，此级数绝对收敛；

当$x=-\frac{3}{4}$时，级数为$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$，此级数收敛；

综上所述，级数的收敛域为$[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}]$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)x^n$

解：由收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\right|=1$

得：级数在$(-1,1)$内绝对收敛.

当$x=\pm1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)(\pm1)^n$，通项$u_n$ 不趋于0，所以级数发散；

故级数的收敛域为$(-1,1)$.

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$

解：由收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^n}{n!}\Big/\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2}=\infty$ 得：级数在 $(-\infty,\infty)$ 内绝对收敛，故级数的收敛域为 $(-\infty,\infty)$.

(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}\quad(a>0,\ b>0)$

解：由收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{a^n+b^n}\Big/\dfrac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n b}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n} & a\ge b\ (\text{分子分母同除}\quad a^n)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n a+b}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1} & a<b\ (\text{分子分母同除}\quad b^n)\end{cases}=\begin{cases}a & a\ge b\\ b & a<b\end{cases}=\max(a,b)$$

得：级数在 $(-R,R)$ 内绝对收敛.

当 $x=\pm R$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\pm R)^n}{a^n+b^n}$ ，通项 u_n 不趋于 0 ，所以级数发散；

故级数的收敛域为 $(-R,R)$.

2. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2}{2-x}$，其中 $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$，即 $|x|<2$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n$

解：令 $t=-\dfrac{x-3}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-t}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{x}，\quad |t|=\left|\frac{x-3}{3}\right|<1，$$

即 $0<x<6$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$

解：先求收敛域（略），得收敛域为 $(-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ ，

两端积分得 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，

两端求导得 $S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n-1}=2S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{3-x}{(1-x)^2}$， $|x|<1$

或 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\frac{1}{1-x}$

$$=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=2\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{3-x}{(1-x)^2}，\quad |x|<1$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$

解：先求收敛域（略），得收敛域为 $(-1,1)$，设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}$，

两端求导得 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}-1$

两端积分得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx$，由于 $S(x)=0$，故

$$S(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx=\int_0^x\left(\frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)}\right)dx-x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx-x=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，$|x|<1$

或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}\right)dx=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)dx$

$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，$|x|<1$

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

解：先求收敛域（略），得收敛域为 $[-1,1)$，当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1$

当 $x\neq 0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，　设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，

两端求导得 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，　$|x|<1$

两端积分得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$，

由于 $S(x)=0$，故 $S(x)=-\ln(1-x)$，$|x|<1$

由 $S(x)$ 的连续性得，　$S(x)=-\ln(1-x)$，$-1\le x<1$

综上所述，　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}1 & x=0\\ -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,1),\ x\neq 0\end{cases}$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$

解：　先求收敛域（略），得收敛域为 $(-1,1)$，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$

两端积分得 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$，

再积分得 $\int_0^x\left[\int_0^x S(x)dx\right]dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1-x}$，

两端求导得 $\int_0^x S(x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]$，

再求导得 $S(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]'=\frac{1}{(1-x)^3}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^3}$， $|x|<1$

或 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{1}{(1-x)^3}$， $|x|<1$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$

解：先求收敛域（略），得收敛域为 $[-2,2)$，当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{2}$，

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$， 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$，令 $t=\frac{x}{2}$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n=\int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$， $|x|<2$，

由 $S(x)$ 的连续性得， $S(x)=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$， $-2\le x<2$

综上所述， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0\\ -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) & x\in[-2,2),\ x\neq 0\end{cases}$

或对 $S(x)$ 关于 t 先逐项求导再逐项积分.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

解：先求收敛域（略），得收敛域为$[-1,1]$，设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

两端求导得$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n}$，再求导得$S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$,,

两端积分得，$S'(x)-S'(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$,

由于$S'(0)=0$，$S'(x)=-\ln(1-x)$,

再积分得$S(x)-S(0)=\int_0^x-\ln(1-x)dx=(1-x)\ln(1-x)+x$,

由于$S(0)=0$，$S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$，$|x|<1$

由$S(x)$的连续性，$S(1)=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\ln(1-x)+x=0+1=1$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x & -1\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

注：求幂级数的和函数时，要注意充分利用几何级数的求和公式：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$，并熟练运用幂级数的加、减运算的性质及逐项求导、逐项积分的性质，再复杂情况下要利用五个初等函数的幂函数展开式.

特别要注意：(1)和函数后，一定要标注x的取值范围（即收敛域）,否则，结果不能算正确，

(2) 利用几何级数的求和公式时，一定要注意n的起始值为0，当n的起始值不为0时，要先进行转化.

(3)对和函数先求导再积分，积分时一定要注意$\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)$，

常常有同学缺少$S(0)$，当$S(0)\neq0$时，导致错误（见习题 10.4 第 12 题中，

$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$；习题 10.4 第 11 题中，

$f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$，$f(0)=1$），即使$S(0)=0$，而你漏写了$S(0)$，同样认为有错误.

(4)若收敛域包含区间端点，则对和函数求导或积分时，和函数只在收敛区间上成立，则一点要运用和函数的连续性，求出收敛域的区间端点处的和.

3. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$的和.

解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n} \Big/ \dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right| = \dfrac{1}{2}|x|^2 < 1$

得收敛区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$，当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时，通项不趋于 0，级数发散，故收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ ，

两端积分得 $\int_0^x S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x \dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}, \quad x \neq 0$$

两端求导得 $S(x) = \left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)' = \dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 且 $x \neq 0$，由 $S(x)$ 的连续性得 $S(x) = \dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

或两端积分得 $\int_0^x S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n} = \dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = \dfrac{x}{2-x^2}$ ，

$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$（此后就不用讨论 $x \neq 0$ 的情形了）

或 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n-1}\right)' = \left[\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{n-1}\right]' = \left[\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\right]'$

$= \left[\dfrac{x}{2-x^2}\right]' = \dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$

令 $x=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n} = S(1) = \dfrac{2+1^2}{(2-1^2)^2} = 3$