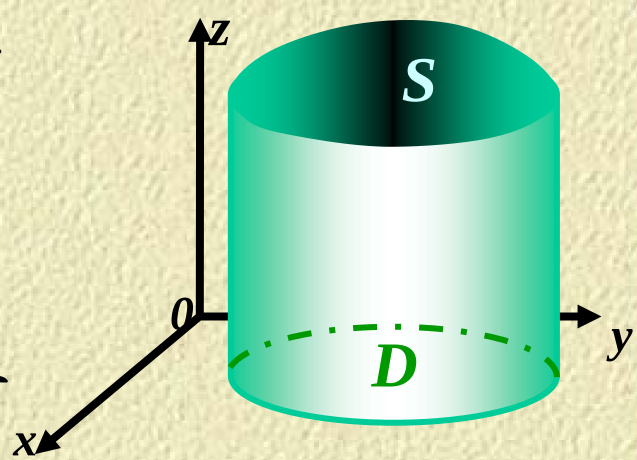
第8章 重积分

8.1 重积分的概念和性质

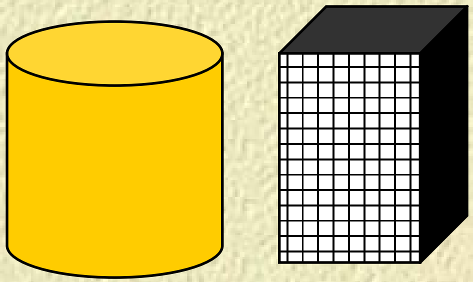
1．两个引例

引例 1．计算曲顶柱体的体积

设曲面 $S: z = f(x,y)$，其中 f 是平面有界闭区域 D 上的非负连续函数。以平面区域 D 为底，以曲面 S 为顶，以过 D 的边界、母线平行于 z 轴的柱面为侧面所围成的柱体，称为曲顶柱体。



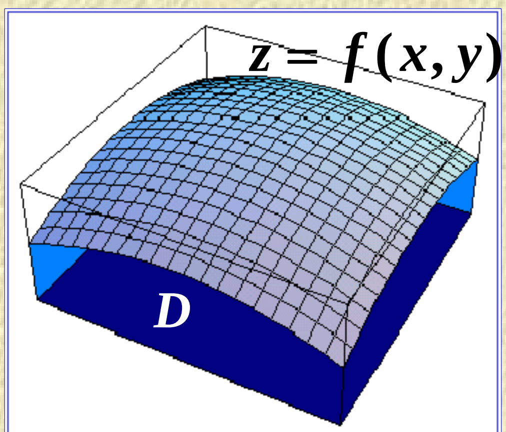
上页 下页 返回



平顶柱体 体积=底面积×高

特点：$z = h$

即：柱体在区域 D 上各点处的高 $f(x,y)$ 是不变的



曲顶柱体体积=?

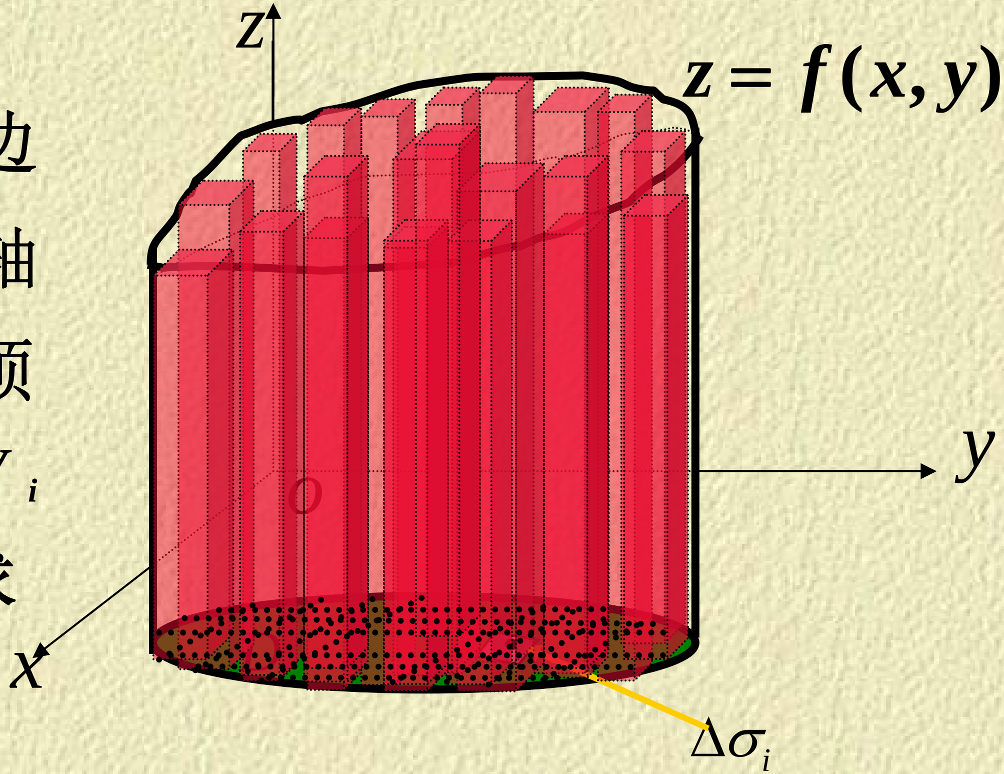
特点：$z = f(x,y)$

即：柱体在区域 D 上各点处的高 $f(x,y)$ 是变化的

步骤如下：

（1）分割：将曲顶柱体分成 n 个小曲顶柱体。

把平面区域 D 任意分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$，并以 $\Delta\sigma_i (i = 1,2\ldots, n)$ 表示第 i 个小区域的面积。



在每个小区域的边界上作母线平行于 z 轴的柱面，得 n 个小曲顶柱体，记其体积为 ΔV_i $(i = 1,2\ldots, n)$，则所求体积为

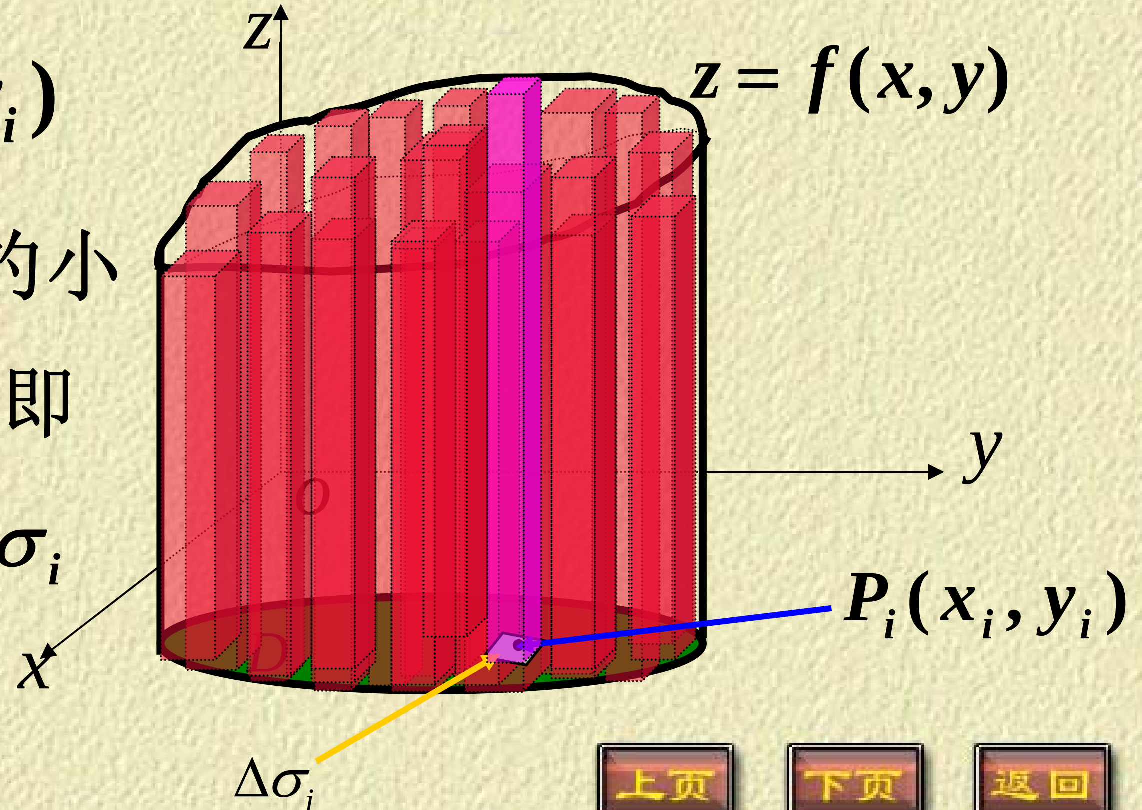
$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

上页 下页 返回

（2）近似：以小平顶柱体体积近似小曲顶柱体体积。

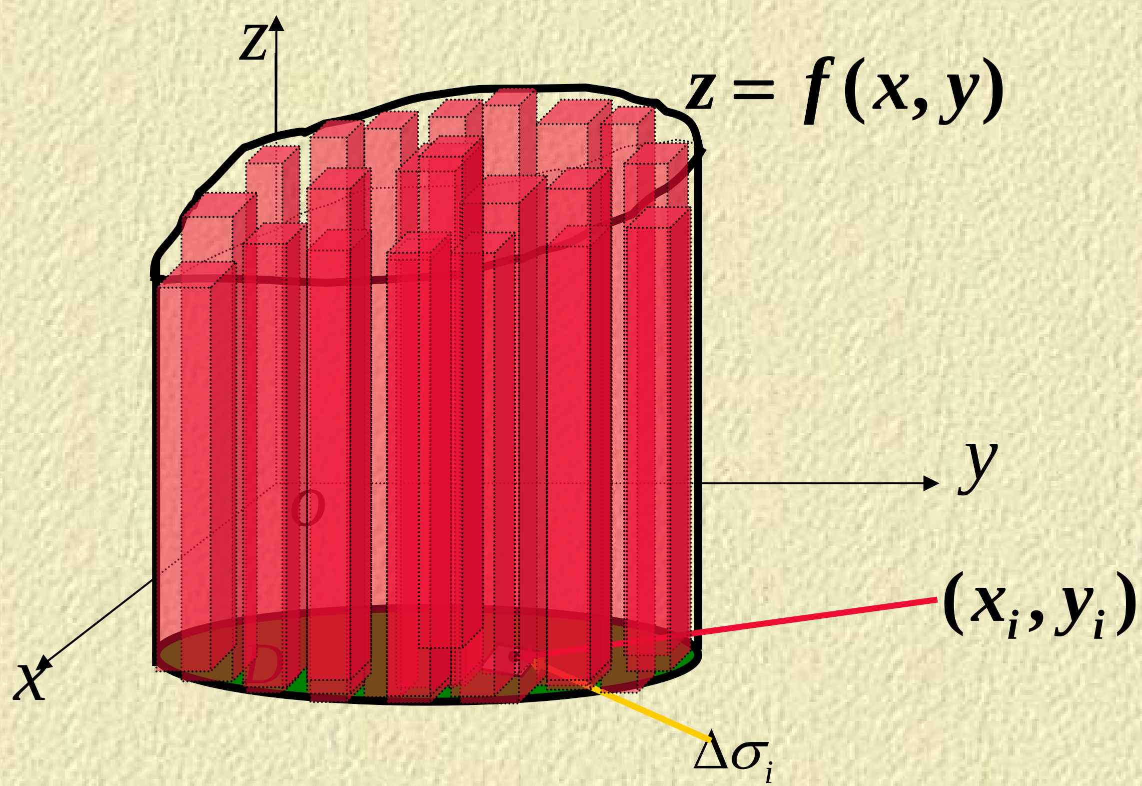
任取点 $P_i(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i (i = 1,\ldots n.)$，当分割很细密时，小曲顶柱体体积 $\Delta V_i (i = 1,2\ldots\ldots, n)$ 近似于以 $f(x_i, y_i)$ 为高，$\Delta\sigma_i$ 为底的小平顶柱体体积， 即

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$



上页 下页 返回

（3）求和：曲顶柱体体积近似于小平顶柱体体积之和，即 $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$



（4）取极限：设P_1, P_2是$\Delta\sigma_i$中任意两点，

记$\lambda_i = \max\limits_{P_1, P_2 \in \Delta\sigma_i} |P_1 P_2|$为小区域$\Delta\sigma_i$的直径，

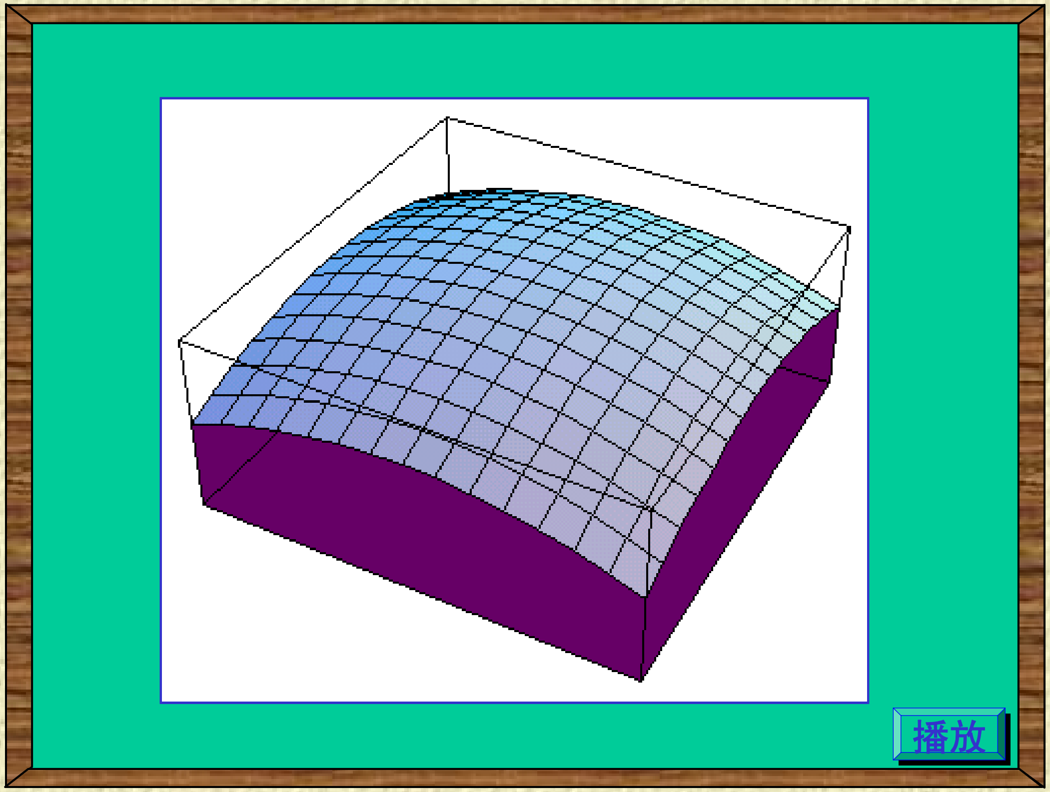
记$\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\lambda_i\}$为小区域直径中的最大者。

当$\lambda \to 0$时，平顶柱体体积之和将无限

近似于曲顶柱体体积，即

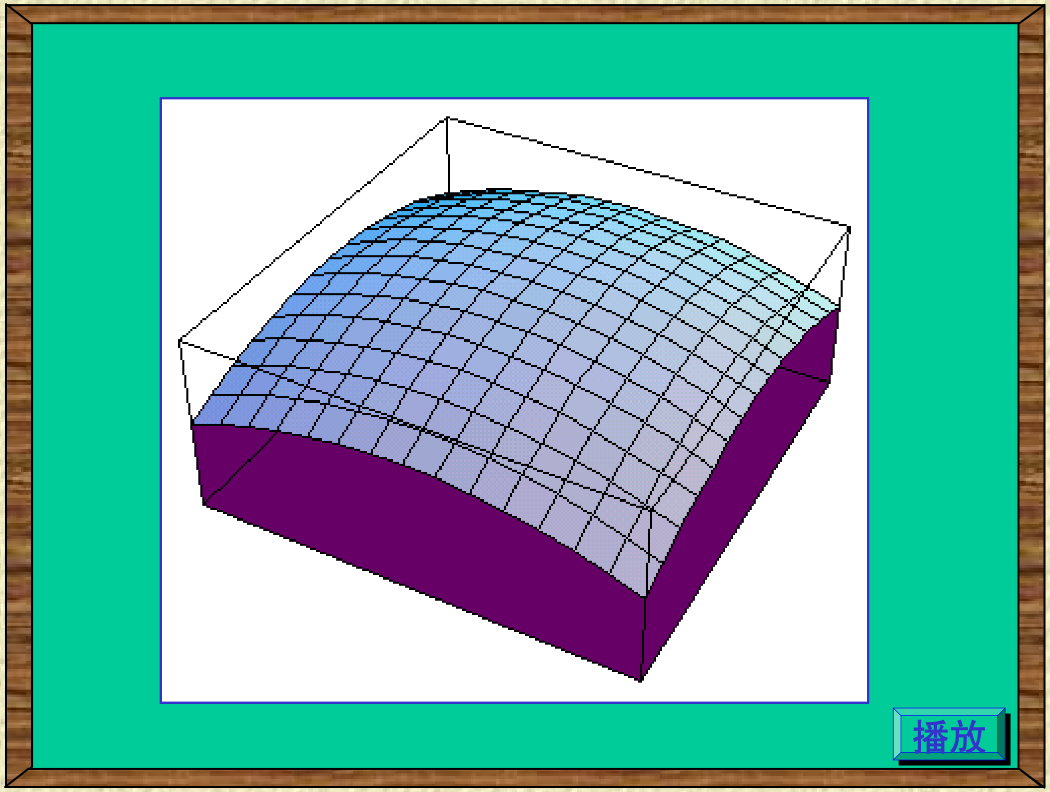
$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

求曲顶柱体的体积采用“分割、取近似、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



上页 下页 返回

求曲顶柱体的体积采用 “分割、取近似、求和、取极限” 的方法，如下动画演示.



上页 下页 返回

引例 2． 求非均匀物体的质量

设一物体占有空间有界区域V，物体的密度$\rho(x,y,z)$在区域V上连续，求此物体的质量m。

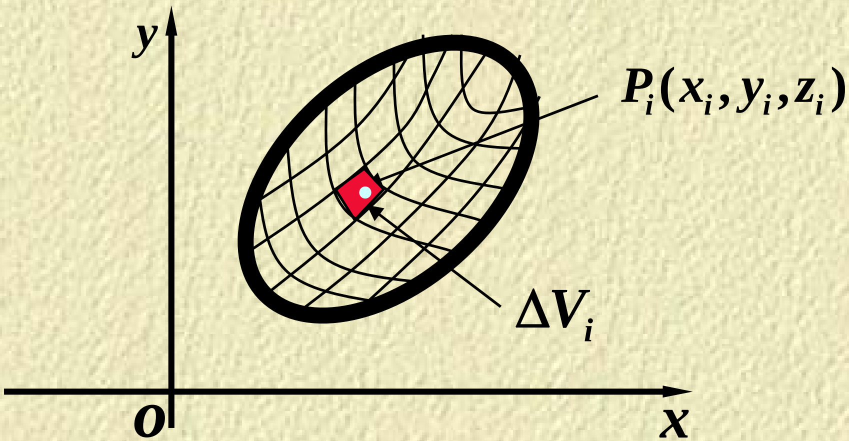
如果物体的密度不变，则

物体的总质量＝密度$\times$体积

由于非均匀物体各点的密度不同，不能直接用密度乘以体积的公式计算物体的总质量．但质量具有可加性，我们可以用引例 1 的思路和方法来解决此问题。

（1）分割：将空间区域V任意分成n个小区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$，同时以$\Delta V_i (i=1,2,\cdots,n)$表示第$i$个小区域的体积。记第$i$个小区域上的质量为$\Delta m_i$，则

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$$



（2）近似：在小区域 ΔV_i 上将物体近似为均匀物体。任取一点 $P_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i (i=1,\ldots n.)$，以$\rho(x_i, y_i, z_i)$作为小区域$\Delta V_i$上各点密度的近似值，则

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i, \ (i=1,2,\cdots n)$$

(3) 求和：物体总质量近似为各小块均匀物体质量之和，即

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

(4) 取极限：设 P_1, P_2 是空间区域 ΔV_i 中任意两点，

记 $\lambda_i = \max\limits_{P_1, P_2 \in \Delta V_i} |P_1 P_2|$ 为区域 ΔV_i 的直径，

记 $\lambda = \max\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ 为区域直径的最大者。

当 $\lambda \to 0$ 时，上述和式的值将趋近于物体总质量 m，即

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

1．曲顶柱体的体积

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

2．求非均匀物体的质量

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

2. 重积分的定义

设Ω表示xoy平面上的有界闭区域D或表示空间上的有界闭区域V， 多元函数f是Ω上的有界函数，将Ω任意分成n个小区域$\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \ldots\ldots \Delta\Omega_n$， 同时以$\Delta\Omega_i$作为第$i$个小区域的度量(面积或体积)。在$\Delta\Omega_i$上任意取一点$P_i$，作和式$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i$，

若当小区域直径中的最大者$\lambda \to 0$时,

上页 下页 返回

上述和式的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i$ 存在，则称 f 在区域 Ω 上可积，其极限值称为函数 f 在区域 Ω 上的重积分.

若 Ω 表示平面区域 D，f 为二元函数 $f(x,y)$，极限值称为二重积分，记为

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i .$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

若Ω 表示空间区域V，f 为三元函数$f(x,y,z)$，极限值称为三重积分，记为

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

体积元素

由重积分的定义可得

曲顶柱体的体积 $V = \iint_D f(x,y)d\sigma$

非均匀物体的质量 $m = \iiint_V \rho(x,y,z)dV$

对重积分定义的说明：

(1)在重积分的定义中，对有界闭区域Ω的划分是任意的．点P_i在$\Delta\Omega_i$上的取法也是任意的。

(2)当被积函数f在有界闭区域D上连续时，定义中和式的极限必存在，即重积分必存在.

二重积分的几何意义

当被积函数 $f(x,y)\geq 0$时，二重积分表示区域D上以$z=f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体的体积.

当被积函数 $f(x,y)\leq 0$时，二重积分表示区域D上以$z=f(x,y)$为曲顶的曲顶柱体体积的负值.

当被积函数有正、有负 时，二重积分表示平面区域D以上的曲顶柱体体积减去平面区域D 以下的曲顶柱体体积.

当被积函数 $f(x,y)\equiv 1$时，二重积分的值在数 值上等于积分区域 D的面积， 即$A=\iint\limits_D d\sigma$

二重积分的物理意义

二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$表示在$xoy$面的闭区域$D$上的非均匀平面薄片的质量，其中，$f(x,y)>0$表示平面薄片在点$(x, y)$处的面密度。

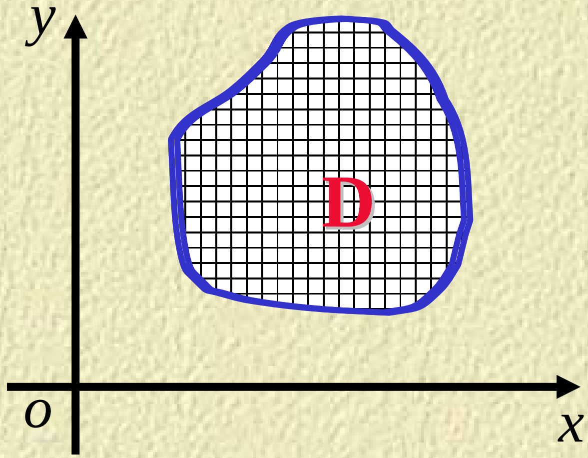
三重积分的物理意义

三重积分$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$表示空间闭区域$V$上的非均匀物体的质量，其中，$f(x,y,z)>0$表示物体在点$(x, y, z)$处的体密度。

当被积函数$f(x,y,z)\equiv 1$时，三重积分的值在数 值上等于积分区域 V的体积，即$V=\iiint\limits_V dV$

上页 下页 返回

在可积的条件下，在直角坐标系下，可用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，



则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

同理,体积元素为 $dV = dxdydz$

三重积分可写为

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

3. 重积分的性质

重积分与定积分有类似的性质,为叙述方便,以二重积分为例，列出常用的性质。

设 D 是 xoy 平面上的有界区域，函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在 D 上可积。

性质 1 $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]d\sigma$

$$= \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质 2 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$ k为常数

上页 下页 返回

性质 3 若区域 D_1、D_2 无公共内点，且 $D=D_1\cup D_2$

则 $$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质 4 若在区域D上 $f(x,y)\ge g(x,y)$,

则 $$\iint_D f(x,y)d\sigma\ge\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地 (1) 若 $f(x,y)\ge 0$, 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma\ge 0$

(2) $$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质5 设 M、m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值， A 为 D 的面积，则

$$mA \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MA$$

（二重积分估值不等式）

性质6 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续， A 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot A$$

（二重积分中值定理）

$f(\xi,\eta)$ 是函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的平均值 .

重积分计算时对称性的利用

(1) 设平面上的有界闭区域 D 可以分为关于 y 轴（或 x 轴）对称的两块区域 D_1 与 D_2，若被积函数 $f(x,y)$ 是 x（或 y）的奇函数，即 $f(-x,y)=-f(x,y)$ （或 $f(x,-y)=-f(x,y)$）

则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$

若被积函数 $f(x,y)$ 是 x（或 y）的偶函数，即 $f(-x,y)=f(x,y)$（或 $f(x,-y)=f(x,y)$）则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(2) 设空间区域 V 可以分为关于 xoy 坐标面（或 yoz 坐标面、或 zox 坐标面）对称的两块区域 V_1 与 V_2，

若被积函数 $f(x,y,z)$ 是 z（或 x 、或 y ）的奇函数，

则 $$\iiint_V f(x,y,z)dV = 0$$

若被积函数 $f(x,y,z)$ 是 z（或 x 、或 y ）的偶函数，

则 $$\iiint_V f(x,y,z)dV = 2\iiint_{V_1} f(x,y,z)dV = 2\iiint_{V_2} f(x,y,z)dV$$

例 1 不作计算，估计 $I=\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，

其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a)$.

解 区域 D 的面积 $\sigma=ab\pi$，

在 D 上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2$,

$$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma\le\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2}$,

$$ab\pi\le\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

上页 下页 返回

例 2　估计$I=\iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$的值，

其中 D：　$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$

解　$\because f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$，　区域面积$\sigma=2$,

在D上$f(x,y)$的最大值　$M=\dfrac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$的最小值　$m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}\quad (x=1, y=2)$

故$\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}\quad\Rightarrow 0.4\le I\le 0.5.$

例 3　判断 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号.

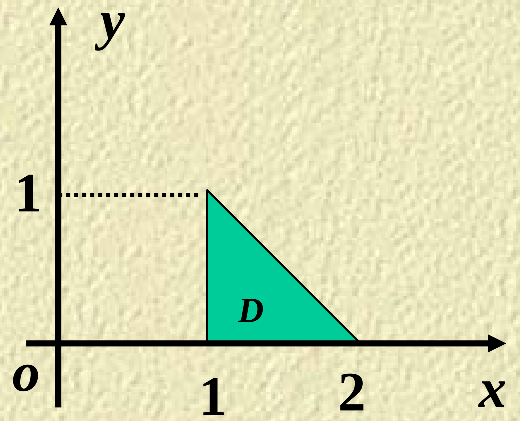
解　当 $r\le|x|+|y|\le 1$ 时，$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$,

故　$\ln(x^2+y^2)\le 0$；

又当 $|x|+|y|<1$ 时，　$\ln(x^2+y^2)<0$,

于是 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy<0.$

例 4 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0)，(1,1)，(2,0).



解 三角形斜边方程 $x+y=2$

在 D 内有 $1<x+y<2<e$，

故 $0<\ln(x+y)<1$，

于是 $\ln(x+y)>[\ln(x+y)]^2$，

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

例 5（书中例 1） 利用二重积分的几何意义，计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \le R^2$

解 被积函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心、以 R 为半径的上半球面，它与 xoy 坐标面的交线是 $\sqrt{R^2-x^2-y^2}=0$，即 $x^2+y^2=R^2$.以此交线为边界围成的平面区域为积分区域,由二重积分的几何意义得 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$ 表示上半球体的体积，由此可得

$$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2}{3}\pi R^3$$

例 6(书中例 6)　计算二重积分

$$A=\iint_D [\sin(xy^2)+\sin(x^2y)]d\sigma,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$

解：积分区域 D 关于 x 轴 y 轴都对称，$\sin(x^2y)$ 和 $\sin(xy^2)$ 分别关于 y 和 x 是奇函数，由性质及重积分的对称性得

$$A=\iint_D [(\sin(xy^2)+\sin(x^2y)]d\sigma$$

$$=\iint_D (\sin(xy^2)d\sigma+\iint_D \sin(x^2y)d\sigma=0$$

上页　下页　返回

例7(书中例 3). 设有空间区域

$V: \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0$;及

$V_1: \ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$;则

$(A) \oiiint\limits_V x dv = 4 \oiiint\limits_{V_1} x dv$

$(B) \oiiint\limits_V y dv = 4 \oiiint\limits_{V_1} y dv$

$(C) \oiiint\limits_V z dv = 4 \oiiint\limits_{V_1} z dv$

$(D) \oiiint\limits_V xyz dv = 4 \oiiint\limits_{V_1} xyz dv$

2.解：$\because$ 函数x, xyz在V（关于yoz对称）上关于 x 为奇函数；函数 y在V（关于xoz对称）上关于 y 为奇函数；故

$$\oiiint_V xdv = \oiiint_V ydv = \oiiint_V xyzdv = 0$$

而$4\oiiint_{V_1} xdv > 0;\quad 4\oiiint_{V_1} ydv > 0,\quad 4\oiiint_{V_1} xyzdv > 0$

$\because$ 函数z既在V（关于yoz对称）上关于 x 为偶函数又在 V（关于xoz对称）上关于 y为偶函数；

$\therefore \oiiint_V zdv = 4\oiiint_{V_1} zdv$ 故选(C)

上页 下页 返回

历年研究生试题

（重积分计算中区域对称性和函数奇偶性应用）

(91,3)设D是xoy平面上以$(1,1),(-1,1),(-1,-1)$为顶点的三角形区域， D_1是D在第一象限的部分，则$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$等于

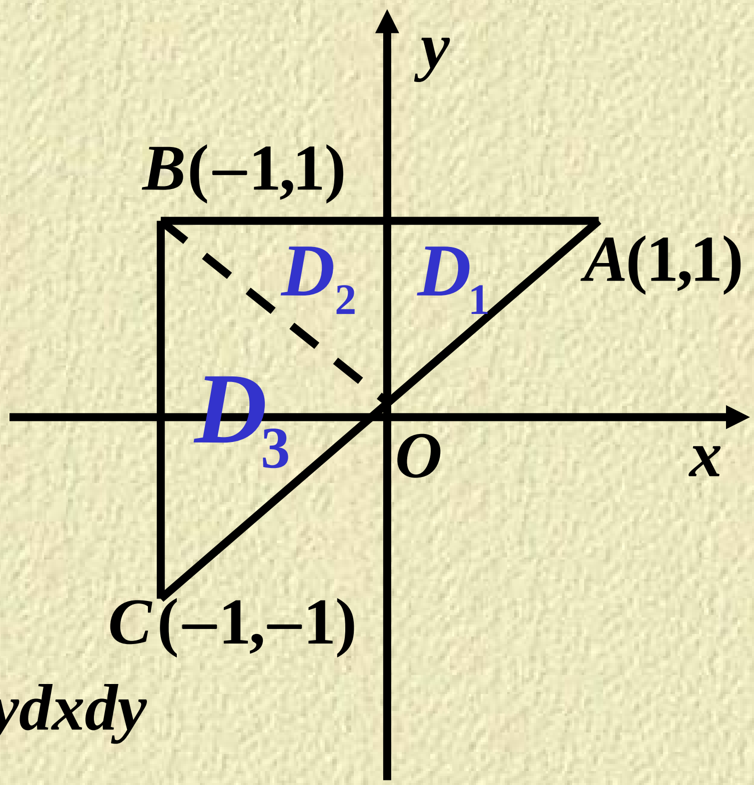
$(A)2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y dxdy$ $(B)2\iint\limits_{D_1} xydxdy$

$(C)4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$ $(D)0$

上页 下页 返回

分析：此类问题一般都要利用被积函数的奇偶性及积分区域的对称性，因此首先要画积分区域的草图.

解：$\because$ xy 在 $D_1 + D_2$ 上为关于 x 的奇函数； $\cos x \sin y$ 在 $D_1 + D_2$ 上为关于 x 的偶函数； $xy + \cos x \sin y$ 在 D_3 上为关于 y 的奇函数.



$$\therefore \iint_D (xy + \cos x \sin y) dxdy$$

$$= \iint_{D_1 + D_2} (xy + \cos x \sin y) dxdy$$

$$+ \iint_{D_3} (xy + \cos x \sin y) dxdy$$

$$= \iint_{D_1 + D_2} xydxdy + \iint_{D_1 + D_2} \cos x \sin ydxdy$$

$$= 0 + 2\iint_{D_1} \cos x \sin ydxdy$$

小结

重积分的定义 （和式的极限）

重积分的几何意义及物理意义

（曲顶柱体的体积）

（非均匀平面薄板、非均匀物体的质量）

重积分的性质

思考题

将二重积分定义与定积分定义进行比较，找出它们的相同之处与不同之处.

思考题解答

定积分与二重积分都表示某个和式的极限值，且此值只与被积函数及积分区域有关．不同的是定积分的积分区域为区间，被积函数为定义在区间上的一元函数，而二重积分的积分区域为平面区域，被积函数为定义在平面区域上的二元函数.

作业：

P111： 1(1)(3). 2(1)(3).

3(1)(3). 4(2) .