习题 5.9(P347)

1. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$，试求 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0)=0$.

解：先解初值问题 $\begin{cases}y'-2y=2\\ y(0)=0\end{cases}$ （一阶线性非齐次微分方程）

解得：$y=e^{\int 2dx}\left[\int 2e^{-\int 2dx}dx+C\right]=e^{2x}\left[C-e^{-2x}\right]=Ce^{2x}-1$

由初始条件可得：$C=1$，故 $y=e^{2x}-1$　由此得：$y(1)=e^{2}-1$

再解初值问题 $\begin{cases}y'-2y=0\\ y(1)=e^{2}-1\end{cases}$ （一阶线性齐次微分方程）

解得：$y=Ce^{2x}$　由初始条件可得：$C=1-e^{-2}$，故 $y=(1-e^{-2})e^{2x}$

所以方程的解为：$\begin{cases}y=e^{2x}-1 & x\le 1\\ y=(1-e^{-2})e^{2x} & x>1\end{cases}$

2. 求解初值问题

$$\begin{cases}y''+4y=3|\sin x|, \quad -\pi\le x\le\pi\\ y(\dfrac{\pi}{2})=0, \quad y'(\dfrac{\pi}{2})=1\end{cases}$$

解：由初值条件，知先求 $\begin{cases}y''+4y=3\sin x, \quad 0\le x\le\pi\\ y(\dfrac{\pi}{2})=0, \quad y'(\dfrac{\pi}{2})=1\end{cases}$　　(1)

这是二阶线性非齐次微分方程.

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+4=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，

设非齐次方程的特解为 $y_1=a\cos x+b\sin x$ （i 不是特征根）

代入非齐次方程得：$\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$，所以 $y_1=\sin x$

由线性非齐次方程的通解结构定理知通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\sin x$，

由初始条件可得$C_1=1$，$C_2=-\dfrac{1}{2}$，

所以方程在区间$[0,\pi]$上的解为 $y=\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

由 y 及 y' 的连续性可得 $y(0)=1$， $y'(0)=0$

再求 $\begin{cases} y''+4y=-3\sin x, & -\pi\le x<0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{cases}$ (2)

观察方程(1)、(2)的非齐次项可知， $y_2=-y_1$是方程(2)的特解，即 $y_2=-\sin x$

由线性非齐次方程的通解结构定理知通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\sin x$

由初始条件可得$C_1=1$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，

所以方程在区间$[-\pi,0)$上的解为 $y=\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x-\sin x$

故方程的解为 $y=\begin{cases} \cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x-\sin x & -\pi\le x<0 \\ \cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x & 0\le x\le\pi \end{cases}$

3．已知线性常系数齐次方程的特征根，试写出相应的阶数最低的微分方程.

(1) $r_1=-2, r_2=-3$

解:特征方程为$(r+2)(r+3)=0$,即$r^2+5r+6=0$,所以所求方程为 $y''+5y'+6y=0$

(2) $r_1=r_2=1$

解：特征方程为$(r-1)^2=0$，即$r^2-2r+1=0$，所以所求方程为 $y''-2y'+y=0$

(3) $r_{1,2}=-1\pm 2i$

解：特征方程为$(r+1-2i)(r+1+2i)=0$，即$r^2+2r+5=0$，所以所求方程为

$y''+2y'+5y=0$

(4) $r_{1,2}=\pm i$， $r_3=-1$

解：特征方程为$(r+i)(r-i)(r+1)=0$，即$r^3+r^2+r+1=0$，所以所求方程为

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

4．利用代换 $y = \dfrac{u}{\cos x}$，将方程 $y''\cos x - 2y'\sin x + 3y\cos x = e^x$ 化简，并求出原方程的通解.

解：令 $y = \dfrac{u}{\cos x}$，则 $u = y\cos x$，

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}\cos x + y(-\sin x)，\qquad 所以 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(\frac{du}{dx} + y\sin x)，$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cos x + 2\frac{dy}{dx}(-\sin x) + y(-\cos x)，所以$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos x}(\frac{d^2u}{dx^2} + 2\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x)$$

把 y，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的表达式代入原方程，并整理得 $\dfrac{d^2u}{dx^2} + 4u = e^x$，解此二阶线性常系数非齐次微分方程得：$u = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{5}e^x$，

所以原方程的通解为 $\quad y = \dfrac{1}{\cos x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{5}e^x)$

或 $\quad y = C_1\dfrac{\cos 2x}{\cos x} + 2C_2\sin x + \dfrac{e^x}{5\cos x}$

5．设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y' \neq 0$， $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1)试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程.

(2)求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0$， $y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 的解.

解：(1) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^{-3}}$，代入原方程并整理得：$y'' - y = \sin x$

(2) 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm 1$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$，

设非齐次方程的特解为 $y_0 = a\cos x + b\sin x$ （$_i$ 不是特征根）

代入非齐次方程，得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$，所以 $y_0 = -\dfrac{1}{2}\sin x$

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$，

由初始条件可得 $C_1 = 1$，$C_2 = -1$，所以方程的解为 $y = e^x - e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$

6．求通过点 $(1, 2)$ 的曲线方程，使此曲线在 $[1, x]$ 上所形成的曲边梯形面积的值等于此曲线段终点的横坐标 x 与纵坐标 y 的乘积 2 倍减 4

解：设所求曲线为 $y = f(x)$，依题意，此曲线满足的积分方程为 $\begin{cases} \int_1^x f(t)dt = 2xf(x) - 4 \\ f(1) = 2 \end{cases}$，

对方程两边求导并整理，得：$2xf'(x) + f(x) = 0$，这是一个可分离变量的方程，求得

$f(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$，代入初始条件，得 $C = 2$，所以 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

7. 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x, y)\quad (x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $(\dfrac{1}{2}, 0)$.

(1)试求曲线 L 的方程.

(2)求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 及两坐标轴所围成图形的面积最小值.

解：点 $P(x, y)$ 的切线方程为：　$Y - y = y'(X - x)$

令 $X = 0$，得切线在 y 轴上的截距 $Y = y - xy'$，

令 $Y = 0$，得切线在 x 轴上的截距 $X = x - \dfrac{y}{y'}$

(1) 由题意得：$y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$，即 $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

令 $u = \frac{y}{x}$，得 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$，两端积分得 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln\frac{C}{x}$

$x(u + \sqrt{1+u^2}) = C$，即 $y + \sqrt{x^2 + y^2}) = C$，

因为 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$.故得 $C = \frac{1}{2}$，解得：$y = \frac{1}{4} - x^2$

(2) 该切线与 L 及两坐标轴所围成图形的面积

$$A(x) = \frac{1}{2}(y - xy')(x - \frac{y}{y'}) - \int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4} - x^2)dx = \frac{(\frac{1}{4} + x^2)^2}{4x} - \frac{1}{12}$$

由于函数 $B(x) = \frac{(\frac{1}{4} + x^2)^2}{x}$ 与 $A(x)$ 有相同的极值点，而 $C(x) = \ln B(x)$ 与 $B(x)$ 有相同的极值点，即 $C(x) = 2\ln(\frac{1}{4} + x^2) - \ln x$ 与 $A(x)$ 有相同的极值点，

令 $C'(x) = \frac{4x}{\frac{1}{4} + x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3x^2 - \frac{1}{4}}{x(\frac{1}{4} + x^2)} = 0$，得唯一驻点 $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$，且在 $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 的邻域内从左至右 $C'(x)$ 由负变正，即该点为最小值点. 当 $x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ 时，$y = \frac{1}{6}$，$y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

故所求切线为：$y - \frac{1}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2\sqrt{3}})$，即 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{3}$

8. 设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$，其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程.

(2)已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s.

解：(1)过 P 点的法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$，令 $X = 0$，则得法线与 y 轴的交点坐

标 $Q(0, y+\frac{x}{y'})$，令 $Y=0$，则得法线与 x 轴的交点坐标 $N(x+yy',0)$，由题意得

$|PN|=|NQ|$，即 $\sqrt{(yy')^2+y^2}=\sqrt{(x+yy')^2+\left(y+\frac{x}{y'}\right)^2}$

展开后整理得 $2y(y')^3+x(y')^2+2yy'+x=0$，即 $[(y')^2+1](2yy'+x)=0$

所以 $2yy'+x=0$，这是可分离变量的方程，解得 $y^2=-\frac{x^2}{2}+C$，由于曲线过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，

代入得 $C=\frac{1}{2}$，故曲线方程为 $x^2+2y^2=1\quad(x\ge 0, y\ge 0)$

(2)由题意得 $l=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-\theta} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}d\theta$，

对方程 $x^2+2y^2=1$ 求导得 $x+2yy'=0$，$y'=-\frac{x}{2y}$

所以 $s=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{4y^2}}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{4y^2}}dx$，令 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{cases}$

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2\theta}{4\sin^2\theta}}\cdot\sin\theta d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2\theta}d\theta=\frac{l}{2\sqrt{2}}$$

9．微分方程 $y'''-y'=0$ 的哪一条积分曲线在原点处有拐点，且以 $y=2x$ 为它的切线.

解：特征方程为 $r^3-r=0$，特征根为 $r_1=0\ r_{2,3}=\pm 1$，所以此齐次方程的通解为

$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$，依题意初值条件为 $y(0)=0$，$y'(0)=2$，$y''(0)=0$，解得

$C_1=0$，$C_2=1$，$C_3=-1$，即 $y=e^x-e^{-x}$

10. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1)求 $f'(x)$

(2)证明：当 $x\ge 0$ 时，不等式 $e^{-x}\le f(x)\le 1$ 成立.

解：(1)由等式得 $f'(0)=-f(0)=-1$

将等式变形为 $(x+1)[f'(x)+f(x)]=\int_0^x f(t)dt$，两端求导得

$f'(x)+f(x)+(x+1)[f''(x)+f'(x)]=f(x)$，整理得 $f''(x)+\dfrac{x+2}{x+1}f'(x)=0$

令 $f'(x)=P$，则 $P'+\dfrac{x+2}{x+1}P=0$，这是一阶线性齐次方程，其解为

$P=f'(x)=Ce^{-\int\frac{x+2}{x+1}dx}=Ce^{-[x+\ln(x+1)]}=C\cdot\dfrac{e^{-x}}{x+1}$，由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$

故 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$

(2)当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减，由题设 $f(0)=1$ 得 $f(x)\le 1$

对 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$ 两端积分 $\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=\int_0^x-\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt$

即 $f(x)-1=\int_0^x-\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt=\int_0^x\dfrac{1}{t+1}de^{-t}=\left.\dfrac{e^{-t}}{t+1}\right|_0^x+\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}dt$

$f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}+\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}dt$

由于 $\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}>0$，则当 $x\ge 0$ 时，$\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}dt\ge 0$，所以 $f(x)\ge\dfrac{e^{-x}}{x+1}\ge e^{-x}$

(注：求 $f(x)$ 时用到了定积分，积分上限为 x，而积分下限为 0，这个方法常常被使用。一般积分下限的值依据初始条件而定，若初始条件为 $f(x_0)=y_0$，则积分下限为 x_0)

11．设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且满足

$$f'(x)+3\int_0^x f'(t)dt+2x\int_0^1 f(xt)dt+e^{-x}=0$$

$f(0)=1$，求 $f(x)$.（提示：对 $\int_0^1 f(xt)dt$ 作变量代换 $u=xt$）

解：由 $f(0)=1$，代入原方程可得 $f'(0)=-1$

令 $u=xt$，则 $\int_0^1 f(xt)dt=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，所以原方程变形为

$$f'(x)+3\int_0^x f'(t)dt+2\int_0^x f(u)du+e^{-x}=0,$$

上式两边对 x 求导并整理，得初值问题

$$\begin{cases} f''(x)+3f'(x)+2f(x)=e^{-x} \\ f(0)=1, \qquad f'(0)=-1 \end{cases},$$

这是一个二阶线性常系数非齐次线性微分方程，

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，特征根为 $r_1=-1$，$r_2=-2$，

对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$，

设非齐次方程的特解为 $y_0=axe^{-x}$（-1 是特征根），代入非齐次方程得 $a=1$，

因此 $y_0=xe^{-x}$.

由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+xe^{-x}$，

代入初始条件解得 $C_1=0$，$C_2=1$，

所以 $f(x)=e^{-2x}+xe^{-x}$

12．设 $y=y(x)$ 的二阶导函数连续，且 $y'(0)=0$，求由方程

$y(x)=1+\dfrac{1}{3}\int_0^x[6xe^{-x}-2y(x)-y''(x)]dx$ 确定的函数 $y(x)$.

解：对此积分方程两边求导并整理得

$$y''+3y'+2y=6xe^{-x}$$

这是一个二阶线性常系数非齐次线性微分方程，对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+3r+2=0$，特征根为 $r_1=-1$，$r_2=-2$，对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$，设非齐次方程的特解为 $y_0=x(a+bx)e^{-x}$（-1 是特征根），代入非齐次方程得 $a=-6$，$b=3$ 因此 $y_0=(3x^2-6x)e^{-x}$. 由线性非齐次方程的通解结构定理知所求通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}$，代入初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 解得 $C_1=8$，$C_2=-7$，所以 $y=8e^{-x}-7e^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}$

13. 某湖泊的水量为V，每年排入湖泊内含污染物A的污水量为$\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含A的水量为$\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为$\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中A的质量为$5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含A污水的质量浓度不超过$\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年，湖泊中污染物A的质量降至m_0以内？（设湖水中A的质量浓度是均匀的）

解：以$t=0$表示 2000 年初，第t年湖泊中污染物A的总量为$m(t)$，浓度为$\frac{m(t)}{V}$.

在时间间隔$[t,t+dt]$内，排入湖泊中A的量为$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt$，流出湖泊的水中$A$的量为$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt$，故$dt$时间内$A$的改变量为$dm=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)dt$，即$\begin{cases}\frac{dm}{dt}+\frac{m}{3}=\frac{m_0}{6}\\ m(0)=5m_0\end{cases}$，这是一阶线性非齐次方程，所以$m=e^{-\int\frac{1}{3}dt}\left(\int\frac{m_0}{6}e^{\int\frac{1}{3}dt}dt+C\right)=\frac{m_0}{2}+Ce^{-\frac{t}{3}}$，由初始条件得

$C=\frac{9}{2}m_0$，$m=\frac{m_0}{2}\left(1+9e^{-\frac{t}{3}}\right)$，当$m=m_0$时，得$t=6\ln 3$

14. 一个半球体状的雪堆，其融化的速率（体积）与半球面面积A成正比，比例常数$k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为r_0的雪堆在开始融化的$3h$内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多长时间？

解：由题意得：$\begin{cases}\frac{dV}{dt}=-kA \qquad V=\frac{2}{3}\pi R^3 \qquad A=2\pi R^2\\ R(0)=r_0 \qquad V(3)=\frac{1}{8}V(0)=\frac{2}{3}\pi(\frac{r_0}{2})^3\end{cases}$

$\because \frac{dV}{dt}=2\pi R^2\frac{dR}{dt}=A\frac{dR}{dt}$，　　$\therefore \frac{dR}{dt}=-k$，

解得　$R=-kt+C$，由初始条件得　$C=r_0$，故$R=r_0-kt$

所以 $V=\frac{2}{3}\pi(r_0-kt)^3$，由$V(3)=\frac{2}{3}\pi(\frac{r_0}{2})^3$，得$k=\frac{r_0}{6}$

即$R=r_0-\frac{r_0}{6}t$，也即$t=6(1-\frac{R}{r_0})$，当$R=0$时，$t=6$

所以雪堆全部融化需要 6 小时。