7.3 全微分

1. 全微分的概念

由一元函数微分学中增量与微分的关系得

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \\ f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{array}} \begin{array}{l} = \Delta_x z \approx \\ = \Delta_y z \approx \end{array} \boxed{\begin{array}{l} f'_x(x,y)dx \\ f'_y(x,y)dy \end{array}}$$

二元函数
对 x 和对 y 的偏增量

二元函数
对 x 和对 y 的偏微分

上页 下页 返回

全增量的概念

如果函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$的某邻域内有定义，并设$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

为函数在点P对应于自变量增量$\Delta x, \Delta y$的全增量，记为Δz，

即 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

下面讨论二元函数当自变量 x, y 取得增量时，函数全增量的变化情况。

例如：用 S 表示边长分别是 x、y 的矩形的面积。

$$S = xy$$

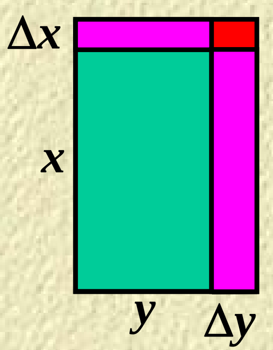
当边长 x、y 分别取得增量 Δx、Δy 时，面积的全增量

$$\Delta S = S(x+\Delta x, y+\Delta y) - S(x, y)$$

$$= \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{} + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{}$$

Δx、Δy的线性主部

当$\Delta x \to 0$、$\Delta y \to 0$时，比 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 较高阶的无穷小



上页 下页 返回

全微分的定义

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$仅与$x,y$有关而不依赖于$\Delta x,\Delta y$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$处可微，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$处的**全微分**，记为$dz$或$df$，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

函数若在某区域 D 内各点处处可微，则称这函数在 D 内可微.

当 $f(x,y)$ 在点(x,y)可微时,即

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$$

定理 1 (可微与连续的关系)如果函数$z = f(x,y)$在点(x,y)可微, 则函数 $f(x,y)$ 在点(x,y)处一定是连续的.

可微必连续。故不连续必定不可微。

上页 下页 返回

问题： (1) 当函数 $f(x,y)$ 在点(x,y)的全微分存在时，必有什么条件成立?该点的全微分是什么?

(2) 在什么条件下，函数 $f(x,y)$ 在点(x,y)的全微分存在?

2. 可微的必要条件与充分条件

定理 2（可微的必要条件）如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则 $f(x,y)$ 在点(x,y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$， $\frac{\partial z}{\partial y}=B$

即函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

上页 下页 返回

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

$$dy = f'(x)dx$$

多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

偏导数都存在 $\not\Longleftrightarrow$ 连续;

可微 $\Rightarrow$ 连续。

显然多元函数中，可微与偏导数都存在是不等价的。

例如，
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

在点(0,0)处有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

上页 下页 返回

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

如果考虑点$P'(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$y=x$趋近于$(0,0)$,

则
$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

说明它不能随着$\rho\to 0$而趋于 0, 当$\rho\to 0$时,

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]\neq o(\rho),$$

函数在点$(0,0)$处不可微.

多元函数在某点连续或该点各个偏导数都存在，并不能保证函数在该点的全微分存在。(即不一定可微)

定理 3（可微的充分条件）　如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 是可微的.

习惯上，记全微分为 $dz=\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}dx}_{\text{对}x\text{的偏微分}}+\underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}dy}_{\text{对}y\text{的偏微分}}.$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

例 1　计算函数$z=e^{xy}$在点$(2,1)$处的全微分.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$,　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$,

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2$,　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$,

所求全微分　$dz=e^2dx+2e^2dy$.

例 2 计算函数$u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$的全微分.

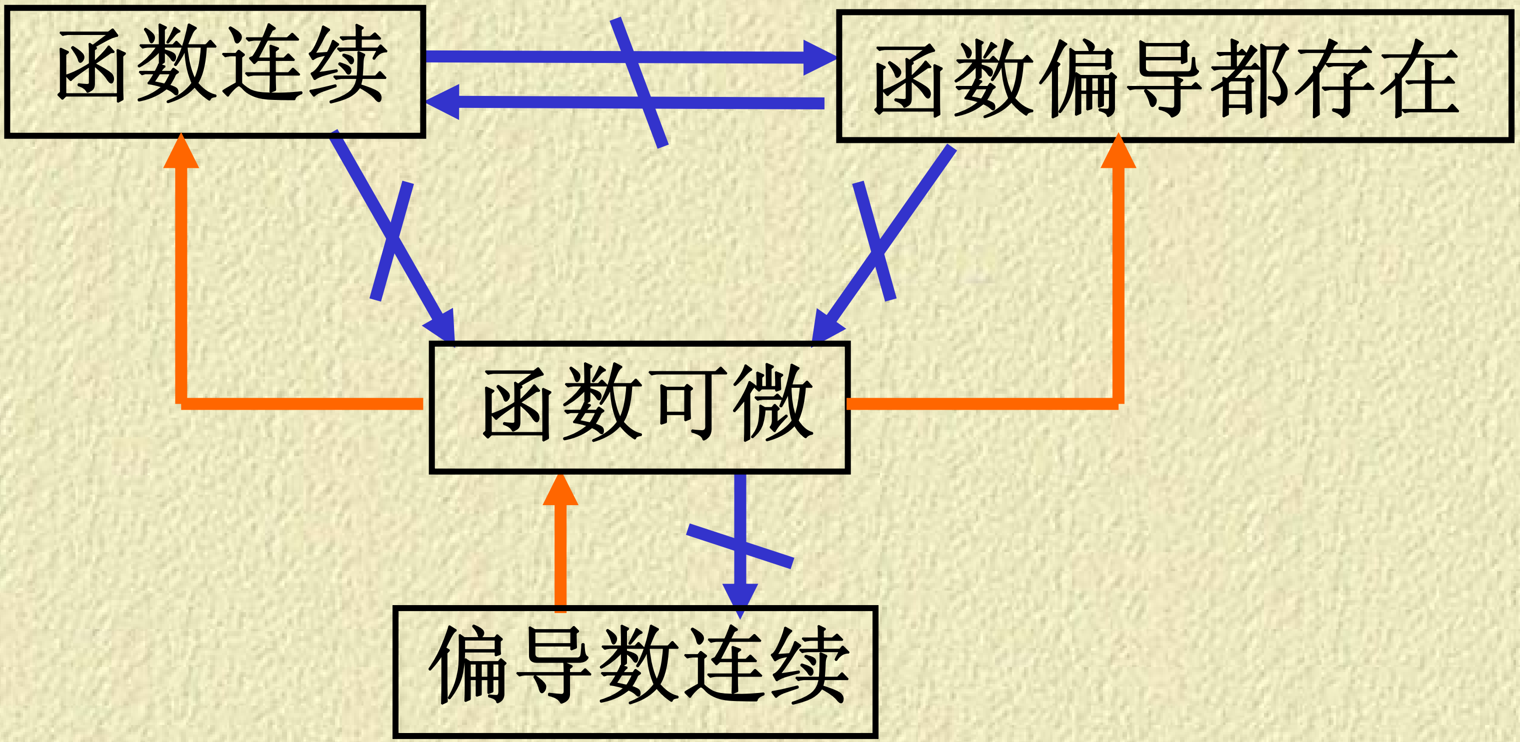
解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz},$

$\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$

所求全微分

$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz.$$

多元函数连续、偏导都存在、可微的关系



证明函数在某点可微的 方法2种 (定义、偏导数连续)

证明函数在某点不可微 的方法 3种

(定义、不连续、有一偏 导数不存在)

上页 下页 返回

3. 全微分在近似计算中的应用

当二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$可微(即有 $\Delta z = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$)，且 $|\Delta x| = |x - x_0|, |\Delta y| = |y - y_0|$都较小时，有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$
$$\approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y.$$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0)$$
$$+ f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

例 5 计算$(1.04)^{2.02}$的近似值.

解 设函数 $f(x,y)=x^y$.

取 $x_0=1, y_0=2, \Delta x=0.04, \Delta y=0.02.$

$$\because \quad f(x_0,y_0)=f(1,2)=1,$$

$$f'_x(x,y)=yx^{y-1}, \quad f'_y(x,y)=x^y\ln x,$$

$$f'_x(1,2)=2, \qquad f'_y(1,2)=0,$$

由公式得 $(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$

利用全微分进行误差估计

设函数 $z = f(x, y)$, x_0, y_0, z_0分别是 x, y, z近似值．
若$|x - x_0| \le \varepsilon(x_0)$, $|y - y_0| \le \varepsilon(y_0)$, $|z - z_0| \le \varepsilon(z_0)$
则数 $\varepsilon(x_0)$、$\varepsilon(y_0)$、$\varepsilon(z_0)$分别叫做 x_0, y_0, z_0的绝对误差限．

若 $\left|\dfrac{x - x_0}{x_0}\right| \le \varepsilon_r(x_0)$ $\left|\dfrac{y - y_0}{y_0}\right| \le \varepsilon_r(y_0)$

$\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| \le \varepsilon_r(z_0)$

则数 $\varepsilon_r(x_0)$、$\varepsilon_r(y_0)$、$\varepsilon_r(z_0)$分别叫做 x_0, y_0, z_0的相对误差限．

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，$z_0=f(x_0,y_0)$,

$$\Delta z \approx dz = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y.$$

$$z-z_0 \approx f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$|z-z_0| \le |f_x'(x_0,y_0)||x-x_0|+|f_y'(x_0,y_0)||y-y_0|$$

$$\le |f_x'(x_0,y_0)|\varepsilon(x_0)+|f_y'(x_0,y_0)|\varepsilon(y_0)$$

取$\varepsilon(z_0)=|f_x'(x_0,y_0)|\varepsilon(x_0)+|f_y'(x_0,y_0)|\varepsilon(y_0)$

$$\therefore \varepsilon_r(z_0)=\frac{\varepsilon(z_0)}{|z_0|}$$

$$=\left|\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\varepsilon(x_0)+\left|\frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\varepsilon(y_0)$$

$$=\left|\frac{x_0 f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\varepsilon_r(x_0)+\left|\frac{y_0 f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\varepsilon_r(y_0)$$

例 6（书中例 4） 用有毫米刻度的尺子量得长方形的长和宽分别是 80 厘米、45 厘米，并以此计算长方形的面积，已知尺子的测量误差为 ± 0.05 厘米，求面积的绝对误差限与相对误差限。

解 设长方形的长为 x, 宽为 y, 面积为 z. 则 $z = xy$

则 $x_0 = 80,\ y_0 = 45,\ \varepsilon(x_0) = \varepsilon(y_0) = 0.05.$

$$\varepsilon(z_0) = \left|f_x'(x_0, y_0)\right|\varepsilon(x_0) + \left|f_y'(x_0, y_0)\right|\varepsilon(y_0)$$

$$= |y_0|\varepsilon(x_0) + |x_0|\varepsilon(y_0)$$

$$= 45 \times 0.05 + 80 \times 0.05 = 6.25\,(cm^3)$$

$$\varepsilon_r(z_0) = \frac{\varepsilon(z_0)}{|x_0 y_0|} = \frac{6.25}{80 \times 45} \approx 0.001736 \approx 0.17\%$$

上页 下页 返回

小结

1、多元函数全微分的概念

2、多元函数全微分的求法

3、多元函数连续、偏导都存在、可微的关系

（注意：与一元函数有很大区别）

4、证明函数在某点可微的方法**(**定义、偏导数连续**)**

5、证明函数在某点不可微的方法

(定义、不连续、有一偏导数不存在**).**

思考题

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微的充分条件是:

（1） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续;

（2） $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域存在;

（3） $\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y$，当$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时是无穷小量;

（4） $\dfrac{\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，当$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时是无穷小量.

上页 下页 返回

作业：

P62： 1. 2. 4. 5. 7.