9.4 第一类曲面积分

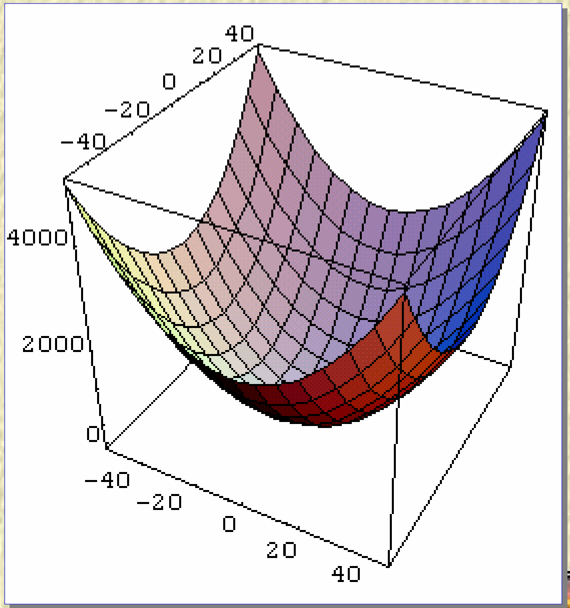
曲面积分与其它积分一样，也是一种特殊的积分和式的极限，只是积分区域是空间曲面。

曲面积分也分两类：第一类的曲面积分是对面积的曲面积分（曲面无方向），第二类曲面积分是对坐标的曲面积分（曲面为有向曲面）。

1. 概念和性质

引例 设有质量非均匀分布的光滑的物质曲面 S，其面密度为 $\mu = \rho(x,y,z)$，$\rho(x,y,z)$ 为 S 上的点 $P(x,y,z)$ 的连续函数，求曲面 S 的质量。

所谓曲面光滑即曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动.



上页 下页 返回

将曲面 S 任意分为 n 个小块ΔS_i $(i=1,2,\cdots,n)$，ΔS_i也表示第 i 个小块的面积，在其上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i)，那么第 i 小块的质量Δm_i可表示为$\Delta m_i=\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，曲面 S 的总质量 m 为$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

记$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$即表示$\Delta S_i$的直径的最大者，显然 $m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

定义 设曲面 S 是光滑的，函数 $f(x,y,z)$ 在 S 上有界，把 S 分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也表示第 i 小块曲面的面积），设点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 ΔS_i 上任意取定的点，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$，

并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，此和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上**对面积的曲面积分**或**第一类曲面积分**.

上页 下页 返回

记为 $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$.

即 $$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$叫被积函数， S叫积分曲面 ，

dS叫曲面面积元素 .

只要曲面 S 是逐片光滑的，被积函数 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，积分总是存在的。

引例中非均匀分布的物质曲面的质量为

$$m = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS$$

当 $f(x,y,z)=1$ 时， $\iint\limits_S dS =$ 曲面S的面积

上页 下页 返回

对面积的曲面积分的性质（常用）

(1)可加性：若S可分为分片光滑的曲面 S_1及S_2，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS.$$

(2)线性性质: $$\iint_S (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dS$$

$$= \alpha \iint_S f(x,y,z)dS + \beta \iint_S g(x,y,z)dS.$$

(3)（对称性） 当积分曲面 S 对称于坐标平面，且被积函数具有相应的奇偶性时，第一类曲面积分具有与三重积分类似的对称性质。

若S是闭曲面，常用$\oint\!\!\!\oint_S$代替$\iint_S$

第一类曲面积分除了求质量，还可求质心、转动惯量等物理量,其表达形式与三重积分类似。

质心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iint_S x\rho(x,y,z)dS}{\iint_S \rho(x,y,z)dS}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_S y\rho(x,y,z)dS}{\iint_S \rho(x,y,z)dS}\qquad \bar{z}=\frac{\iint_S z\rho(x,y,z)dS}{\iint_S \rho(x,y,z)dS}$$

上页 下页 返回

曲面绕坐标轴的转动惯量:

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS$$

$$J_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS$$

$$J_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dS$$

$$J_o = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dS$$

2. 第一类曲面积分的计算

按照曲面的不同情况分为以下三种：

(1). 若曲面S： $z=z(x,y)$ (即单值)

设平行于 z 轴的直线与曲面 S 只交于一点，D_{xy} 是 S 在 xoy 平面上的投影区域，且 $z(x,y)$ 在区域 D 上有连续偏导数。

则 $$\iint_S f(x,y,z)dS=$$

$$\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

上页 下页 返回

(2). 若曲面S： $y=y(z,x)$(即单值)

D_{zx} 是 S 在 zox 平面上的投影区域，且 $y(z,x)$ 在区域 D 上有连续偏导数。则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z'^2+y_x'^2}\,dzdx$$

(3). 若曲面S： $x=x(y,z)$(即单值)

D_{yz} 是 S 在 yoz 平面上的投影区域，且 $x(y,z)$ 在区域 D 上有连续偏导数。则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz$$

将第一类曲面积分化为二重积分的步骤可概括为“一代二换三投影”：

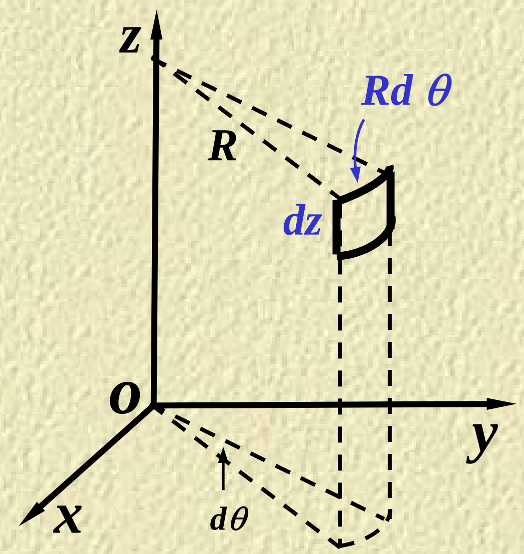
一代：是把曲面方程代入被积函数;

二换：是把曲面面积元素 dS 转换为平面面积元素 $dxdy$ 或 $dydz$ 或 $dzdx$;

三投影：是把曲面向相应的坐标面投影，得到的投影区域就是二重积分的积分域。

如果曲面是以 z 轴为旋转轴，半径为 R 的圆柱面 $S: x^2+y^2=R^2$，$h \le z \le H$，（$h<H$），则在柱坐标系中，即令

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (\rho = R)$$



此圆柱面的面积微元为

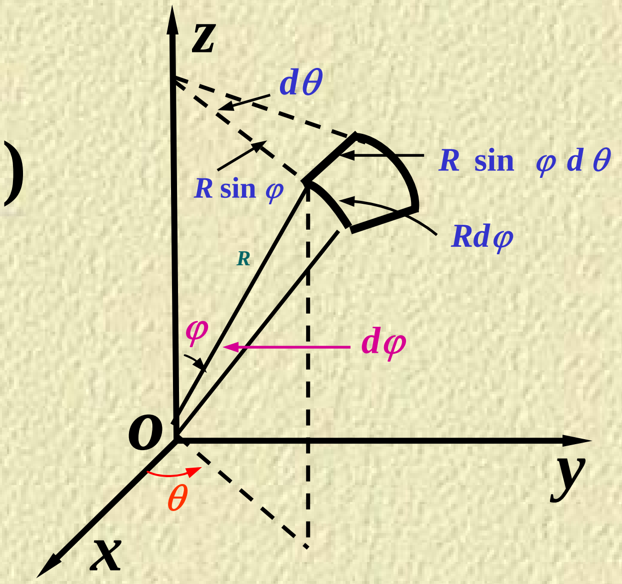
$$dS = Rd\,\theta\,dz$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_h^H f(R\cos\theta, R\sin\theta, z)Rdz$$

上页 下页 返回

类似地，如果曲面是以原点为球心，，半径为 R 的球面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2$（或球面的一部分），则在球坐标系中，即令

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad (r=R)$$



此球面的面积微元为

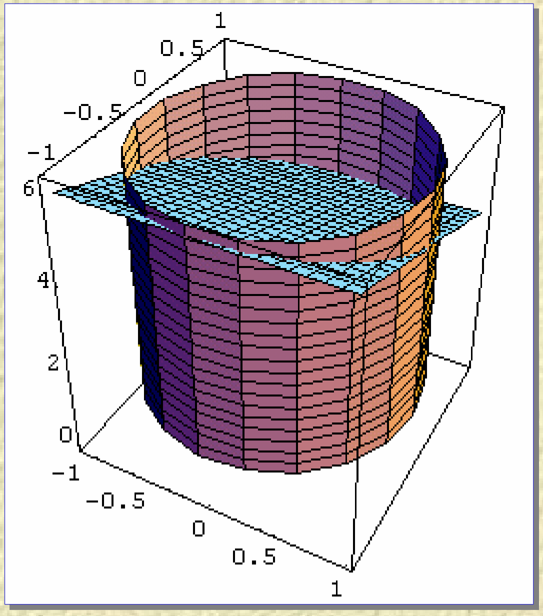
$$dS = R^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi} f(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)R^2\sin\varphi d\varphi$$

上页 下页 返回

例1 计算$\iint\limits_{S}(x+y+z)ds$，其中$S$为平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分.



解 积分曲面

S： $z=5-y$，

$$dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

投影域：

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 25\}$$

上页 下页 返回

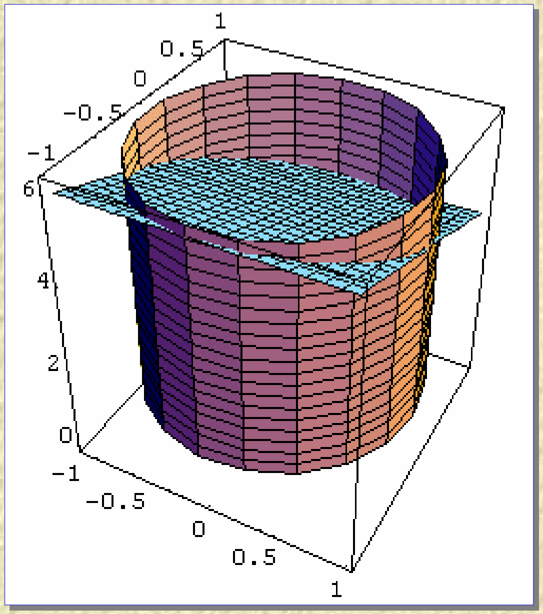
例1 计算 $\iint\limits_{S}(x+y+z)ds$，其中 S 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.

故 $\iint\limits_{S}(x+y+z)ds$

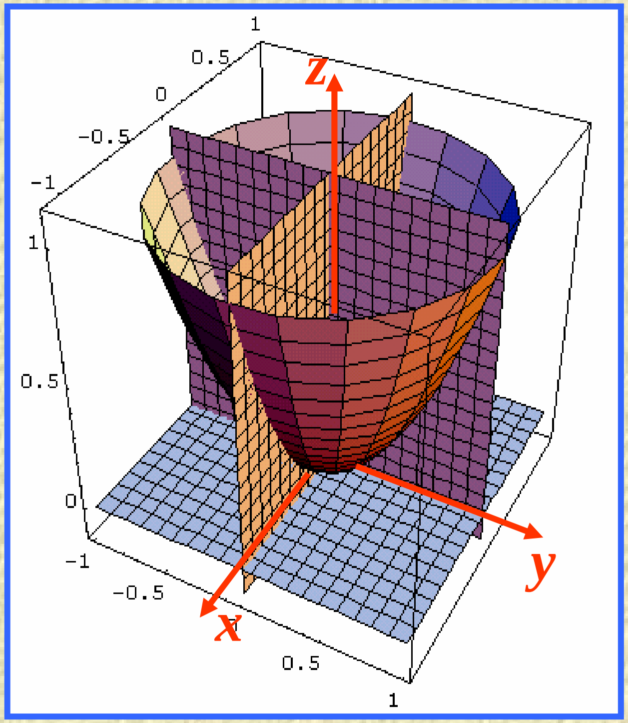
$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x+5)dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5(5+\rho\cos\theta)\rho d\rho$$

$$=125\sqrt{2}\pi.$$



例2　计算 $\iint_{S} | xyz | dS$，其中 S 为抛物面
$z = x^2 + y^2$（$0 \le z \le 1$）.



解　抛物面$z = x^2 + y^2$关于

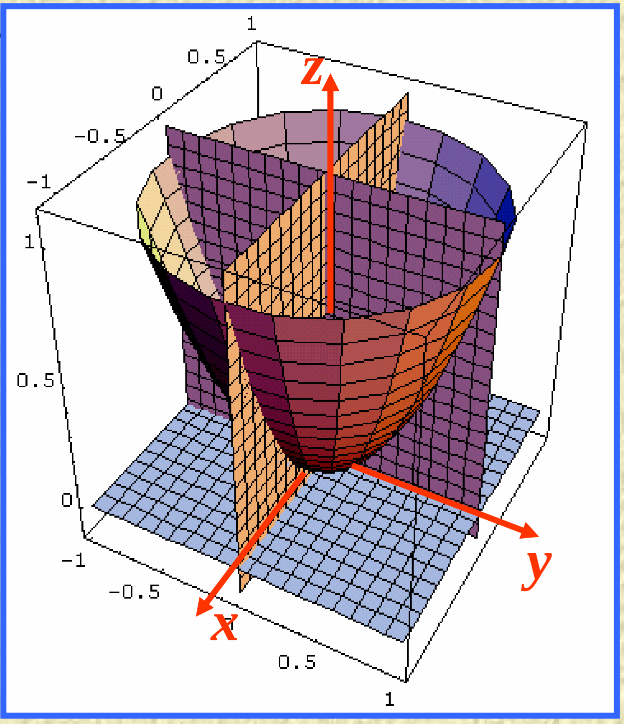
xoz、yoz坐标面对称，

被积函数$| xyz |$关于
x、y 是偶函数，

依对称性知：

有 $\iint_{S} = 4\iint_{S_1}$ 成立，(S_1 为第一卦限部分曲面)

例2　计算 $\iint\limits_S |xyz|\,dS$,其中 S 为抛物面 $z = x^2 + y^2$（$0 \le z \le 1$）.



$$dS = \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,dxdy$$

$$\text{原式} = \iint\limits_S |xyz|\,dS = 4\iint\limits_{S_1} xyz\ dS$$

$$= 4\iint\limits_{D'_{xy}} xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\,dxdy$$

其中 $D'_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$

上页　下页　返回

例2　计算 $\iint\limits_S |xyz|\,dS$，其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$）.

利用极坐标　$x=\rho\cos\theta$，

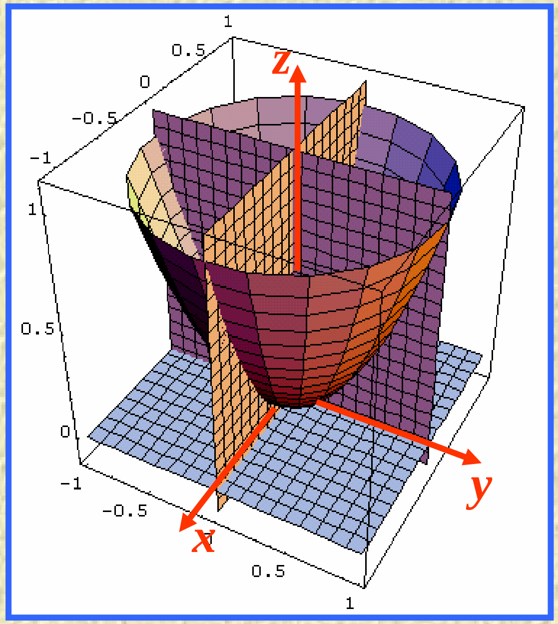
$y=\rho\sin\theta$，

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta\int_0^1\rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho$$

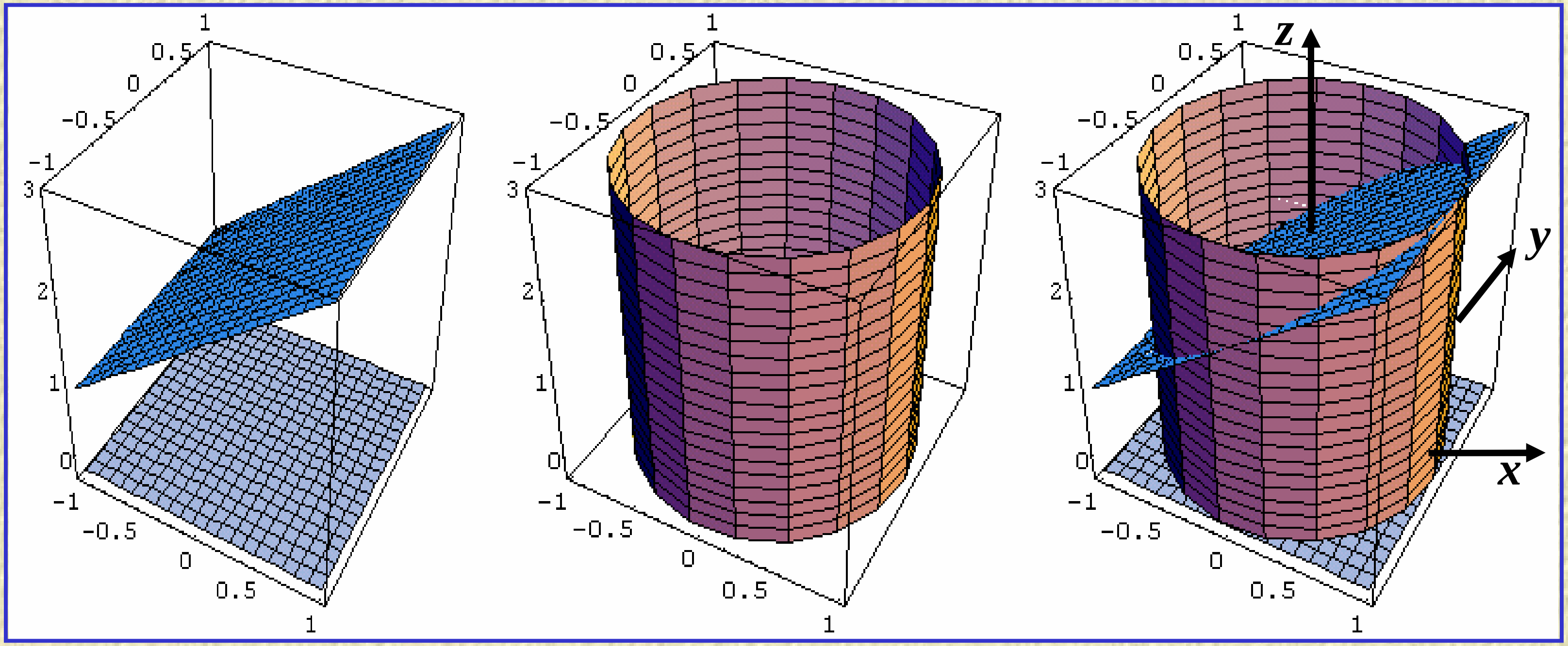
令 $u=1+4\rho^2$

$$=\frac{1}{4}\int_1^5\sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2du=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

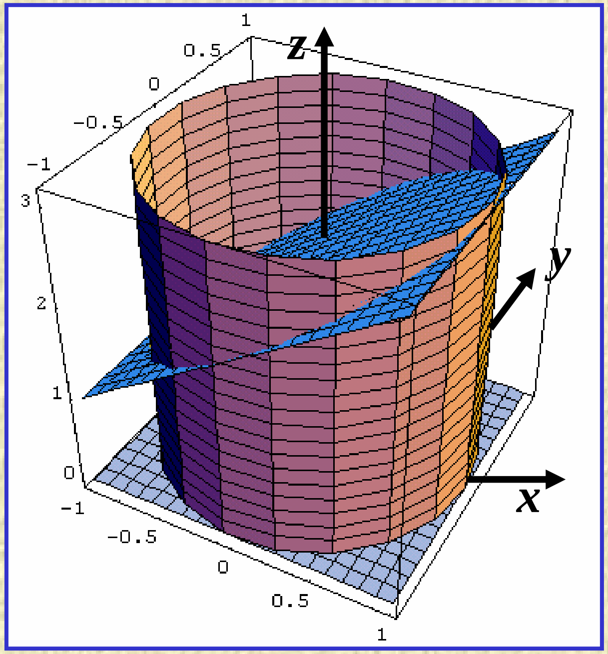


运用对称性简化了计算。

例3 计算 $\oiint_S x dS$ ，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=x+2$ 及 $z=0$ 所围成的空间立体的表面.



例3 计算 $\oiint_S xdS$ ，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=x+2$ 及 $z=0$ 所围成的空间立体的表面.



解 $\oiint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$

其中 S_1： $z=0$，　S_2： $z=x+2$，

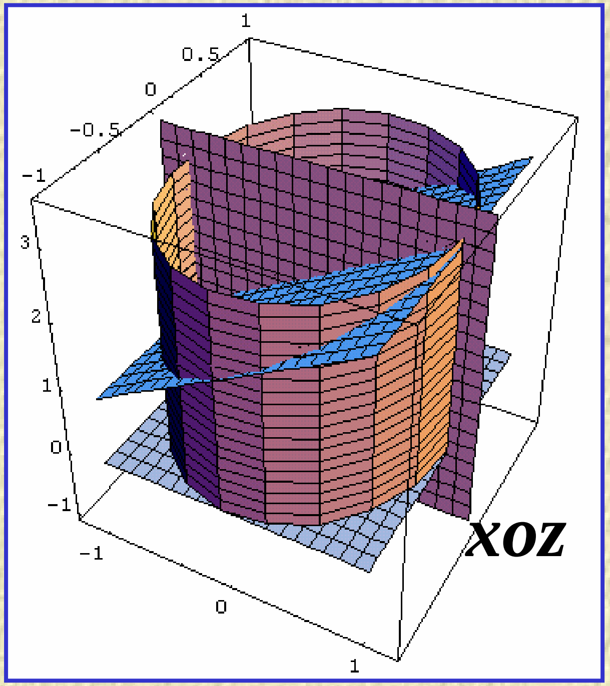
S_3： $x^2+y^2=1$.　投影域 D_1： $x^2+y^2\le 1$

显然 $\iint_{S_1} xdS = \iint_{D_1} xdxdy = 0$，

$\iint_{S_2} xdS = \iint_{D_1} x\sqrt{1+1}dxdy = 0$，

上页　下页　返回

例3 计算 $\oiint\limits_{S} x dS$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=x+2$ 及 $z=0$ 所围成的空间立体的表面.



讨论 S_3 时，将投影域选在 xoz 上.

（注意：$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 分为左、右两片）

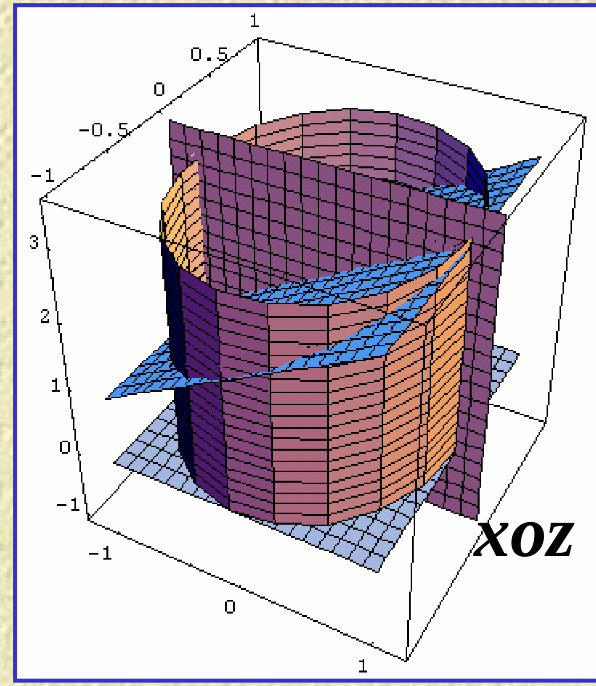
（左右两片投影相同）

$$\iint\limits_{S_3} x dS = \iint\limits_{S_{31}} x dS + \iint\limits_{S_{32}} x dS$$

利用对称性

$$= 2\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1+{y'_x}^2+{y'_z}^2}\,dxdz$$

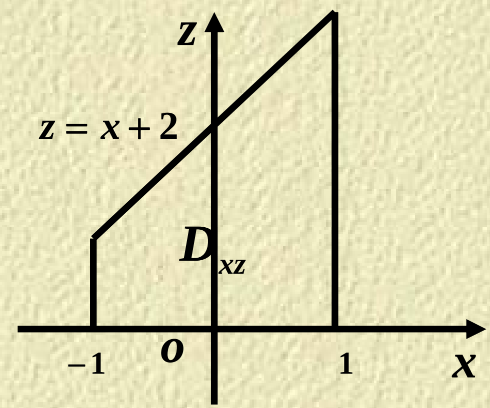
例3 计算 $\displaystyle\iint\limits_{S} x dS$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$, 平面 $z=x+2$ 及 $z=0$ 所围成的空间立体的表面.



$$=2\iint\limits_{D_{xz}} x\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dxdz$$

$$=2\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\int_0^{x+2}dz$$

$$=\pi$$



$$\therefore \iint\limits_{S} x dS = 0+0+\pi=\pi.$$

上页 下页 返回

例4 计算$\oiint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中$S$为内接于球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

解　被积函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，

关于x、y、z 为偶函数，

积分曲面S 关于各坐标面对称，

故原积分$\oiint\limits_{S} \quad = 8\iint\limits_{S_1} \quad$，

(其中S_1表示第一卦限部分曲面)

上页 下页 返回

例4 计算$\oint\!\!\!\oint_S (x^2+y^2+z^2)dS$，其中$S$为内接于球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

S_1：$x+y+z=a$，即$z=a-x-y$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

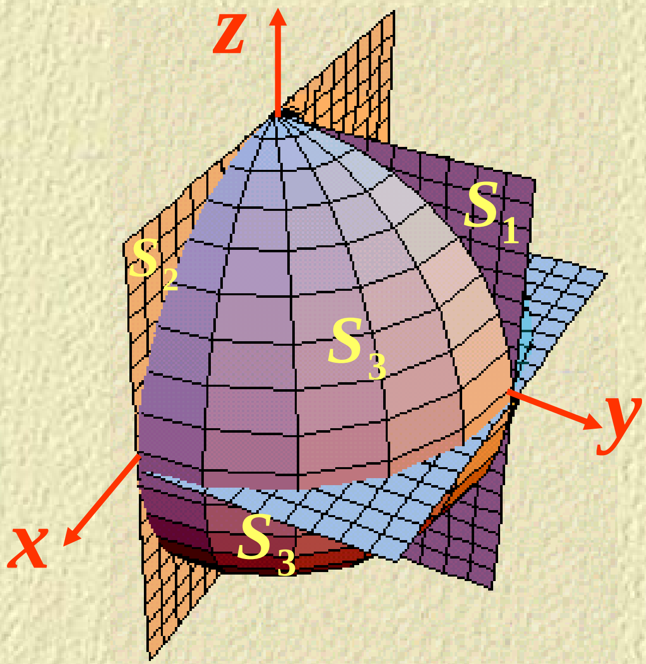
$$\oint\!\!\!\oint_S (x^2+y^2+z^2)dS=8\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=8\iint_{D_{xy}}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\sqrt{3}dxdy$$

$$=2\sqrt{3}a^4.$$

上页 下页 返回

例5（书中例3）计算$\oint\!\!\!\oint_S (x^2+y^2+z^2)dS$，$S$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x\geq 0, y\geq 0)$和坐标平面 $x=0,\ y=0$ 围成的闭曲面。



解：在 S_1 和 S_2 上，$dS = d\sigma$

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)dydz$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a \rho^2\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{4}a^4$$

上页 下页 返回

由变量轮换的对称性 ：

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{\pi}{4}a^4$$

$$\iint_{S_3}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=a^2\iint_{S_3}dS \quad (\text{四分之一的球面面积为 } \pi a^2)$$

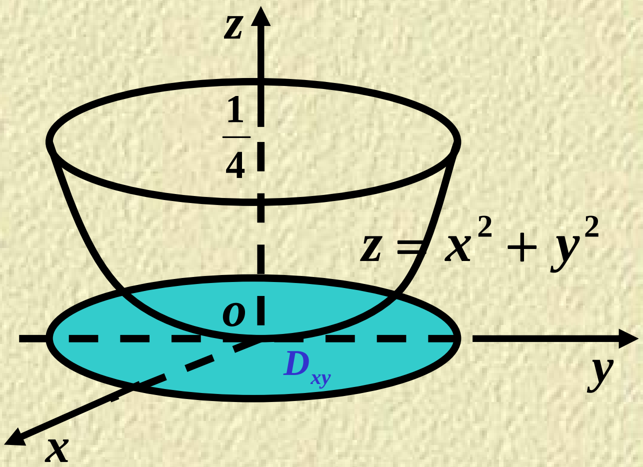
$$=a^2\cdot\pi a^2=\pi a^4$$

$$\iint_{S}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}$$

$$=\frac{\pi}{4}a^4+\frac{\pi}{4}a^4+\pi a^4=\frac{3}{2}\pi a^4$$

例6（书中例2）设质量均匀分布的物质曲面 S 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2,\ z \le \dfrac{1}{4}$，求 S 的质心。

解：由对称性得：$\overline{x} = \overline{y} = 0$



$$\overline{z} = \frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS}$$

$$dS = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy \qquad D_{xy}:\ x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$$

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{6}(2\sqrt{2} - 1)\pi$$

上页 下页 返回

$$\iint_S zdS = \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho = \frac{1}{60}(\sqrt{2}+1)\pi$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1+\sqrt{2}}{10(2\sqrt{2}-1)}$$

故质心为 $(0, 0, \dfrac{1+\sqrt{2}}{10(2\sqrt{2}-1)})$

例7 计算 $I=\oiint\limits_S[x^2+y^2+(z-R)^2]dS$，其中

$S: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: $I=\oiint\limits_S[(x^2+y^2+z^2)-2Rz+R^2]dS=\oiint\limits_S(2R^2-2Rz)dS$

法 1:（球坐标变换）令

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi)$$

$$I=\oiint\limits_S(2R^2-2R^2\cos\varphi]R^2\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$=2R^4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi=8\pi R^4$$

$$I=\oiint_S[(x^2+y^2+z^2)-2Rz+R^2]dS=\oiint_S(2R^2-2Rz)dS$$

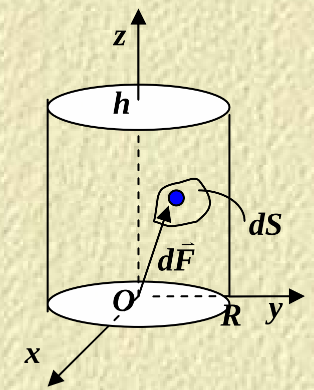
法 2: $I=2R^2\oiint_S dS-2R\oiint_S zdS$ （由对称性）

$$=2R^2\oiint_S dS$$

$=2R^2\cdot$球面的面积 $=2R^2\cdot 4\pi\mathrm{R}^2=8\pi R^4$

上页 下页 返回

例 8. 设圆柱面 $S: x^2+y^2=R^2 (0\le z\le h)$，其面密度 $\rho=1$，求它对原点处单位质点的引力.



解：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{n}=\{x,y,z\},\quad \vec{n}^0=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}$$

$$d\vec{F}=\frac{k\cdot 1\cdot 1\cdot dS}{r^2}\vec{n}^0=\left\{\frac{kxdS}{r^3},\frac{kydS}{r^3},\frac{kzdS}{r^3}\right\}$$

由 S 的对称性极质量分布的均匀性得

$$F_x=0,\quad F_y=0$$

上页 下页 返回

$$F_z = \iint_S \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dS$$

令

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le h)$$

$$F_z = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} R\,dz = 2k\pi R\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2-h^2}}\right)$$

所求引力为 $\vec{F} = \left(0, 0, 2k\pi R\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2-h^2}}\right)\right)$

小结

1、 对面积的曲面积分的概念;

$$\iint_{S} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

2、对面积的曲面积分的解法是将其化为投影域上的二重积分计算（一代二换三投影）.

（按照曲面的不同情况分为三种）

上页 下页 返回

将第一类曲面积分化为二重积分的步骤可概括为“一代二换三投影”，“一代”是把曲面方程代入被积函数，“二换”是把曲面面积元素 dS 转换为平面面积元素 $dxdy$ 或 $dydz$ 或 $dzdx$，“三投影”是把曲面向相应的坐标面投影，得到的投影区域就是二重积分的积分域。

在具体计算时应注意以下几点：

（1）曲面 S 的方程必须是单值函数（否则，应将曲面 S 划分成若干个小曲面，应用“可加性”），被积函数 $f(x,y,z)$ 中只有两个相互独立的变量，若 D_{xy} 上进行二重积分，必须将 z 由曲面方程表示为 x,y 的函数。

(2)在具体计算时，虽然可将曲面 S 投影到任一坐标面上，但应根据曲面方程的具体情况，选择合适的投影坐标面，使得在该面的投影区域上二重积分容易计算。

(3)若积分曲面（或部分积分曲面）就是坐标面的一部分，则计算时应将积分曲面投影到该坐标面上，这时的曲面积分就是在其上的重积分，dS 就是该坐标面上的面积元素，如在 xoy 面上，则 $dS = dxdy$.

(4)第一类曲面积分与曲面的方向无关，即计算时不必考虑曲面的侧。

(5)可运用对称性及变量轮换的对称性简化计算。

思考题： 利用变量轮换的对称性计算

$$\oiint_S (ax+by+cz+d)^2 dS,$$

其中 S ：$x^2+y^2+z^2=R^2$。

提示：

$$\oiint_S xdS=\oiint_S ydS=\oiint_S zdS$$

$$\oiint_S xydS=\oiint_S yzdS=\oiint_S xzdS$$

$$\oiint_S x^2dS=\oiint_S y^2dS=\oiint_S z^2dS$$

答案： $\dfrac{4}{3}\pi R^4(a^2+b^2+c^2)+4\pi R^2d^2$

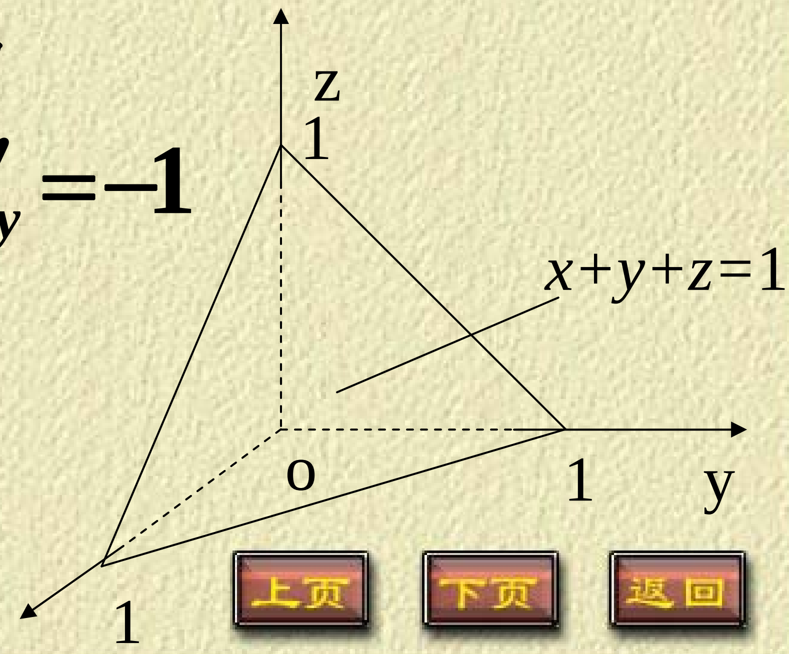
(书中例 1). 计算 $\iint_S (2x+y+2z)ds$，S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分。

解: 将曲面 S 投影到 xy 上，得闭域

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$$

曲面 S 的方程可表示为

$$z=1-x-y \quad z'_x=-1,\ \ z'_y=-1$$



上页 下页 返回

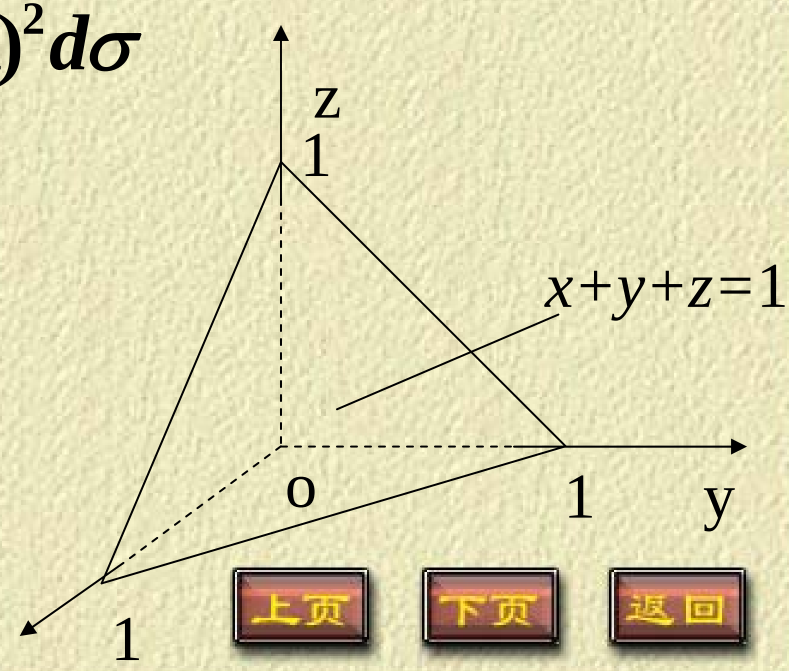
(书中例 1). 计算 $\iint\limits_{S}(2x+y+2z)ds$，S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分。

利用变量轮换的对称性，可只计算 $\iint\limits_{S} yds$

$$\iint\limits_{S} yds=\iint\limits_{D_{xy}} y\times\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}d\sigma$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} ydy$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}dx=\frac{\sqrt{3}}{6}$$



上页 下页 返回

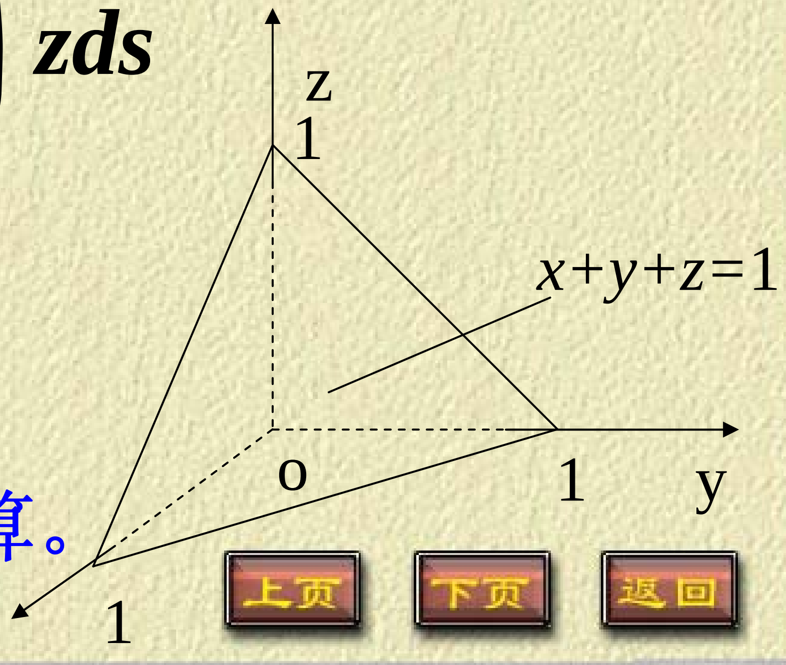
(书中例 1). 计算 $\iint\limits_S (2x+y+2z)ds$，S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分。

———————————————

$$\therefore \iint\limits_S (2x+y+2z)ds$$

$$=2\iint\limits_S xds+\iint\limits_S yds+2\iint\limits_S zds$$

$$=5\iint\limits_S yds=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$



变量轮换的对称性简化计算。

上页 下页 返回

历届研究生试题

第一类曲面积分

1.(89,9)设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球面内部的哪部分 面积最大?

分析：先求出球面 Σ 在定球面内的部分面积 $S(R)$,再求出 $S(R)$ 的最大值 .为了方便, Σ 的球心不妨取在 z 轴上.

解：设 Σ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$ 则两球面交线在 xoy 平面上的投影曲线方程 为

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2-\dfrac{R^4}{4a^2} \\ z=0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

令 $R^2 - \dfrac{R^4}{4a^2} = b^2, \quad (b > 0)$

从而，球面 Σ 在定球面内的部分面积 为

$$S(R) = \iint\limits_{x^2+y^2\le b^2} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le b^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}$$

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a} \quad \text{令} S'(R) = 0 \text{得} R = \frac{4}{3}a$$

且$S''(\frac{4}{3}a) < 0$,故$R = \frac{4}{3}a$是极大值点，又极值点唯一，故当$R = \frac{4}{3}a$时，球面Σ在定球面内的部分面积最大.

2.(95,6)计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} zds$，其中 Σ 为锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \le 2x$ 内的部分 .

解： $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$

曲面 Σ 在 xoy 平面上的投影区域记为 D：

$x^2 + y^2 \le 2x$， 则

$$\iint_{\Sigma} zdS = \sqrt{2}\iint_{D} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy \quad (D_1\text{为}D\text{的第}$$

$$= 2\sqrt{2}\iint_{D_1} \sqrt{x^2 + y^2}dxdy \quad \text{一象限部分})$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{32}{9}\sqrt{2}$$

3.(99,7)设S为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$， π为S在点P处的切平面， $\rho(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面π的距离，求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

分析：首先应写出 $\rho(x,y,z)$，然后代入积分计算.

解：设 (X,Y,Z)为π上任一点，则 π的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$$

上页 下页 返回

从而可知 $$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}}$$

由 $$z=\sqrt{1-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}}\,d\sigma$$

$$\therefore \iint_S \frac{zdS}{\rho(x,y,z)}=\frac{1}{4}\iint_D (4-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3}{2}\pi$$

上页 下页 返回

4.(00,3)设$S: x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geq 0)$,

S_1为S在第一卦限中的部分，　则有

$(A)\iint\limits_S xdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$　　$(B)\iint\limits_S ydS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$

$(C)\iint\limits_S zdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$　　$(D)\iint\limits_S xyzdS = 4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

解1: 由于(C)选项中的被积函数 z既是x的偶函数，也是 y的偶函数，而积分域 S既关于yoz平面对称，又关于 xoz平面对称，

则 $\iint\limits_S zdS = 4\iint\limits_{S_1} zdS == 4\iint\limits_{S_1} xdS$,故应选$(C)$.

解2　排除法：由于 x是x的奇函数，曲面 S关于yoz平面对称，　则 $\iint\limits_{S} x dS = 0$

同理 $\iint\limits_{S} y dS = 0,\quad \iint\limits_{S} xyz dS = 0$

而 $4\iint\limits_{S_1} x dS > 0$ (由于在 S_1内$x > 0$)

故(A)、(B)、(D)均不正确，应选 (C).

上页　下页　返回

作业：

P194： 2. 3. 4. 6. 7. 8. 9.