习题 2.1(P90)

1．有一质量分布不均匀的细杆 AB，长 $10cm$， AM 段质量与从 A 到点 M 的距离平方成正比，并且已知一段 $AM = 2cm$ 的质量等于 $8g$，试求

(1) $AM = 2cm$ 一段上的平均线密度.
(2) 全杆的平均线密度.
(3) 在 AM 等于 $4cm$ 的点 M 处的线密度.
(4) 在任意点 M 处的线密度.

解：(1) $AM = 2cm$ 一段上的平均线密度为 $8g/2cm = 4g/cm$；

(2) 设 AM 段质量为 m， A 到点 M 的距离为 x，

由题意得： $m = kx^2$，当 $x = 2$ 时， $m = 8$，得 $k = 2$，即 $m = 2x^2$

所以当 $x = 10$ 时，得 $m = 200$，故全杆的平均线密度为 $200g/10cm = 20g/cm$

(3) 在 $x = 4$ 处给以增量 Δx，则在区间段 $[4, 4+\Delta x]$ 的质量为

$$\Delta m = 2(4+\Delta x)^2 - 2\cdot 4^2 = 2\left[8(\Delta x) + (\Delta x)^2\right]$$

故在 AM 等于 $4cm$ 的点 M 处的线密度为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\left[8 + (\Delta x)\right] = 16(g/cm)$

(4) 在任意点 x 处给以增量 Δx，则在区间段 $[x, x+\Delta x]$ 的质量为

$$\Delta m = 2(x+\Delta x)^2 - 2\cdot x^2 = 2\left[2x\cdot(\Delta x) + (\Delta x)^2\right]$$

故在任意点 M 处的线密度为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\left[2x + (\Delta x)\right] = 4x(g/cm)$

2．若质点运动规律为 $s = vt - \dfrac{1}{2}gt^2$，求

(1) 在 $t_0 = 1$， $t = 1+\Delta t$ 之间的平均速度（$\Delta t = 0.5,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.01$）.

(2) 在 $t_0 = 1$ 时，质点的瞬时速度.

解：(1) 在 $t_0 = 1$， $t = 1+\Delta t$ 之间的平均速度（$\Delta t = 0.5,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.01$）分别为

$$\frac{\left[v(1+0.5) - \frac{1}{2}g(1+0.5)^2\right] - \left[v\cdot 1 - \frac{1}{2}g\cdot 1^2\right]}{0.5} = v - 1.25g$$

$$\frac{\left[v(1+0.1)-\frac{1}{2}g(1+0.1)^2\right]-\left[v\cdot 1-\frac{1}{2}g\cdot 1^2\right]}{0.1}=v-1.05g$$

$$\frac{\left[v(1+0.05)-\frac{1}{2}g(1+0.05)^2\right]-\left[v\cdot 1-\frac{1}{2}g\cdot 1^2\right]}{0.05}=v-1.025g$$

$$\frac{\left[v(1+0.01)-\frac{1}{2}g(1+0.01)^2\right]-\left[v\cdot 1-\frac{1}{2}g\cdot 1^2\right]}{0.01}=v-1.005g$$

(2) 在$t_0=1$处给以增量Δt，则在$t_0=1$，$t=1+\Delta t$之间的平均速度为

$$\frac{\left[v(1+\Delta t)-\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2\right]-\left[v\cdot 1-\frac{1}{2}g\cdot 1^2\right]}{\Delta t}=v-g-\frac{1}{2}g\Delta t$$

故在$t_0=1$时，质点的瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[v-g-\frac{1}{2}g\Delta t\right]=v-g$

3．利用导数定义，求下列函数在指定点x_0处的导数.

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$， $x_0=1$

解：$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-2}{(1+\Delta x)^2}=-2$$

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$， $x_0=4$

解：$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+\Delta x}}{2\cdot\Delta x\cdot\sqrt{4+\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{2\sqrt{4+\Delta x}\cdot(2+\sqrt{4+\Delta x})}=-\frac{1}{16}$$

(3) $f(x)=x|x|$， $x_0=0$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$

(4) $f(x)=\cos x$， $x_0=\frac{\pi}{4}$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+\Delta x)-f(\frac{\pi}{4})}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{4}+\Delta x)-\cos(\frac{\pi}{4})}{\Delta x}$

$$=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4．利用定义求下列函数的导数.

(1) $y=\sin 2x$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin 2(x+\Delta x)-\sin 2x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\Delta x\cdot\cos(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2\cos 2x$

(2) $y=e^{ax}$

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{a(x+\Delta x)}-e^{ax}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{ax}(e^{a\Delta x}-1)}{\Delta x}\overset{\text{无穷小}}{\underset{\text{替换}}{=\!=}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{ax}\cdot a\Delta x}{\Delta x}=ae^{ax}$

5. 求下列分段函数在分段点处的左、右导数，并指出函数在该点的可导性.

(1) $y=\begin{cases}x & x\ge 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$

解：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x-0}=0$

$$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$f'_-(0)\ne f'_+(0)$，故函数在点 $x=0$ 处不可导。

(2) $y=\begin{cases}x & x<0\\ \ln(1+x) & x\ge 0\end{cases}$

解： $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，

$f_-'(0)=f_+'(0)$，故 $f'(0)=1$

(3) $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

解： $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x-0}=0$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x-0}=0$

$f_-'(0)=f_+'(0)$，故 $f'(0)=0$

(4) $y=\begin{cases}\sin x & x\in[0,\pi]\\ -\sin x & x\in[-\pi,0)\end{cases}$

解： $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sin x-0}{x-0}=-1$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x-0}{x-0}=1$

$f_-'(0)\neq f_+'(0)$，故函数在 $x=0$ 处不可导.

注：讨论分段函数在分段点处的导数时，除了用定义计算该点的左右导数外，还可以根据教材中 P86 定理 2[设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0-h,x_0]$（或 $[x_0,x_0+h]$）上连续（$h>0$）且当 $x<x_0$（或 $x>x_0$）时存在导数 $f'(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$）则函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数（或右导数）存在，且 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A$（或 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$）]计算左右导数。但需特别提示：用公式 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A$（$f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$）计算左（右）导数时，**必须指出**（不需证明）$f(x)$ 在点 x_0 处左（右）连续。

举例：(4) $y=\begin{cases}\sin x & x\in[0,\pi]\\ -\sin x & x\in[-\pi,0)\end{cases}$

解：由于 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续，故 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\cos x=-1$

又 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续，故 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$

反例：$y=\begin{cases}\sin x & x\in[0,\pi]\\ -\sin x+1 & x\in[-\pi,0)\end{cases}$ 求 $f'_-(0)$，由于在 $x=0$ 处不左连续，故用公式 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A$ 求 $f'_-(0)$ 时，得出的是错误的结果。

6. 设函数在点处可导，试用表示下列极限.

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}\xlongequal{令\Delta x=2h}2f'(x_0)$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\xlongequal{令\Delta x=-h}f'(x_0)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0-\dfrac{1}{n})-f(x_0)]$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0-\dfrac{1}{n})-f(x_0)]=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{-\frac{1}{n}}\xlongequal{令\Delta x=-\frac{1}{n}}-f'(x_0)$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x_0+2h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x_0+2h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

$$\xlongequal[\text{的结果}]{\text{由(1)、(2)}} 2f'(x_0)-[-f'(x_0)]=3f'(x_0)$$

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$，取何值时，在点 $x=1$ 处连续且可导？

解：因为函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，故必在点 $x=1$ 处右连续，

即 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b=f(1)=3$，推得 $a+b=3$ (1)

又函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导， $f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2+2)-3}{x-1}=2$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)+(a+b-3)}{x-1}=a$$

应有 $f_-'(1)=f_+'(1)$，从而， $a=2$，代入(1)式得 $b=1$

8．求曲线 $y=\sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线方程和法线方程.

解：由导数的几何意义知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率为 $f'(x_0)$

$$y'=\cos x,\quad k_1=y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以曲线在点 $(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处切线的斜率，法线的斜率 $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\sqrt{2}$

故所求切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{\pi}{4})$，或 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi=0$

所求法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}(x-\dfrac{\pi}{4})$，或 $y+\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi=0$

9．求垂直于直线 $2x-6y+1=0$ 且与曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 相切的直线方程.

解：直线 $2x-6y+1=0$ 的斜率 $k_1=\dfrac{1}{3}$，而所求直线与其垂直，故其斜率 $k_2=-3$，

设直线与曲线的切点坐标为(x_0, y_0)，则应有 $y'\big|_{x=x_0} = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$，

解得： $x_0 = -1$，代入曲线方程得 $y_0 = -3$

所求直线方程为 $y + 3 = -3(x+1)$，或 $y + 3x + 6 = 0$

10．讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & -1 < x < 0 \\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} & x \geq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

解： $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x} = 1$，

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$$

$f'_-(0) = f'_+(0)$，故 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导；由于可导必连续， $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续.

11．如果 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明： $f'(0) = 0$

解：由于 $f'(0)$ 存在，应有 $f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0)$，而

$$f'_+(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xlongequal{令x=-t} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(-x) - f(0)}{-x}$$

$$\xlongequal[是偶函数]{利用条件f(x)} -\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -f'_-(0)$$

即得 $f'(0) = -f'(0)$，从而 $f'(0) = 0$

12．如果 $f(x)$ 是奇函数，且 $f'(x_0) = 1$，求 $f'(x_0) = 1$

解： $f'(-x_0) = \lim\limits_{x\to -x_0} \dfrac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} \xlongequal{令t=-x} \lim\limits_{t\to x_0} \dfrac{f(-t) - f(-x_0)}{-t + x_0}$

$$\xlongequal[是奇函数]{利用条件f(x)} \lim_{t\to x_0} \frac{-f(t) + f(x_0)}{-t + x_0} = \lim_{t\to x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = f'(x_0) = 1$$

注：此题在学习了复合函数求导法则后可有如下解法：

因为 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，

方程两端同时对 x 求导得：$-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$

因而 $f'(-x_0)=f'(x_0)=1$

13．设 $f'(0)=0$，$f'(0)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\overline{\overline{\frac{\text{由导数}}{\text{定义得}}}}\,f'(0)$

14. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 内有定义，且当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，证明：$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

解：由条件可得：$0\in(-\delta,\delta)$，有 $0\le|f(0)|\le 0^2$，即 $f'(0)=0$

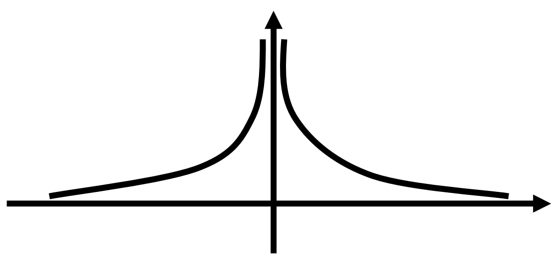
再次利用条件得 $0\le\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\dfrac{x^2}{x}=x$，由于 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

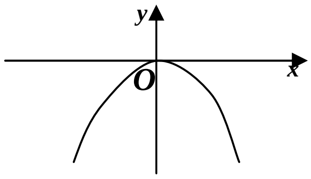
15．设函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$，试画出导函数的草图.

解：$y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

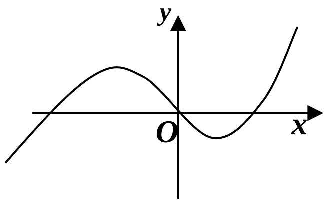
由于导函数是偶函数，且 $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=0$，故草图为



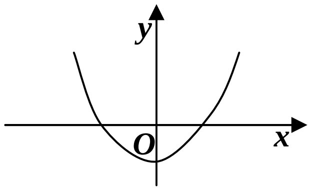
16．图中，（a）、（b）、（c）、（d）是函数的图形，(1)、(2)、(3)、(4)是相应导函数的图形，选择编号，使函数与导函数的图形相匹配.



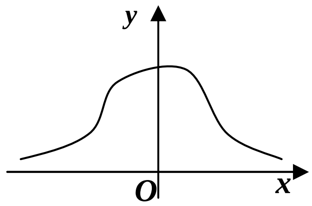
(1)



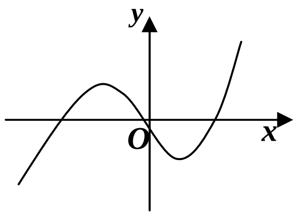
(a)



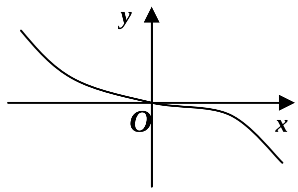
(2)



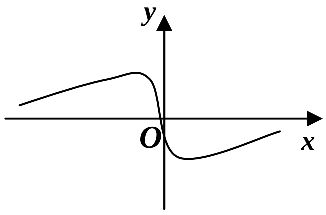
(b)



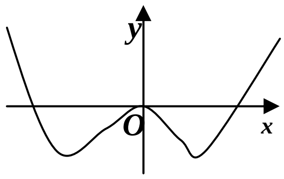
(3)



(c)



(4)



(d)

解：此题放在这节不合适，应放在第 3 章第 4 节

从（1）的图形可以看出函数的导数小于等于 0，即函数单调减少，故应选(c)；从（2）的图形可以看出，函数的导数先大于 0，再小于 0，然后再大于 0，即函数先单调递增再单调递减，然后再单调递增，故应选(a);从（3）的图形可以看出，函数的导数先小于 0，再大于 0，然后再小于 0，再大于 0，即函数先单调递减再单调递增，然后再单调递减，再单调递增，故应选(d)；从（4）的图形可以看出，图（4）为奇函数，并且函数先大于 0，再小于 0，而图(b)为偶函数，且函数先单调递增再单调递减，故应选(b)。