6.6 空间曲面与空间曲线

6.6.1 曲面的方程

曲面的实例： 水桶的表面、台灯的罩子面等.

曲面在空间解析几何中被看成是满足一定条件的动点的几何轨迹.

曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

（1） 曲面S上任一点的坐标都满足方程；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，

而曲面S就叫做方程的图形.

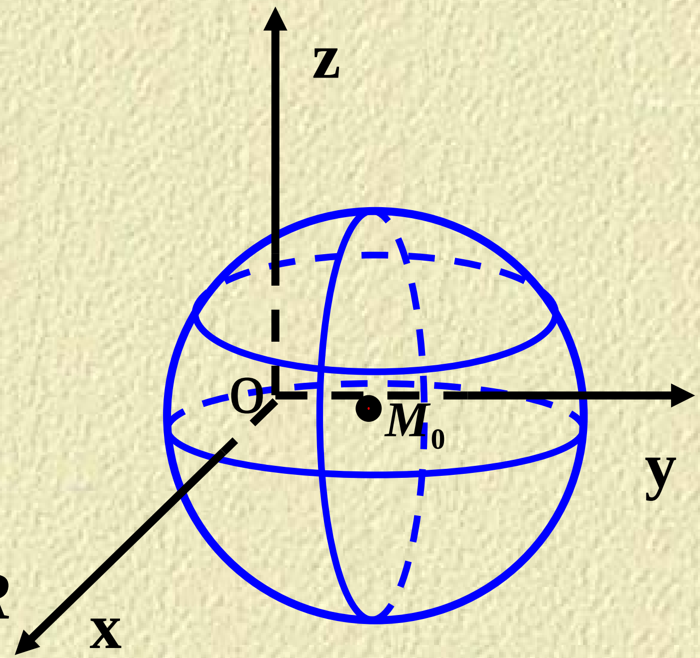
若曲面上的点(x, y, z)的坐标可以表示为两个

变量u、v的函数，

即
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

则上式叫做曲面的参数方程，其中u、v为参数.

例 1（书中例 1）建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面方程.



解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上任一点，

根据题意有 $|MM_0| = R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

球面的标准方程

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

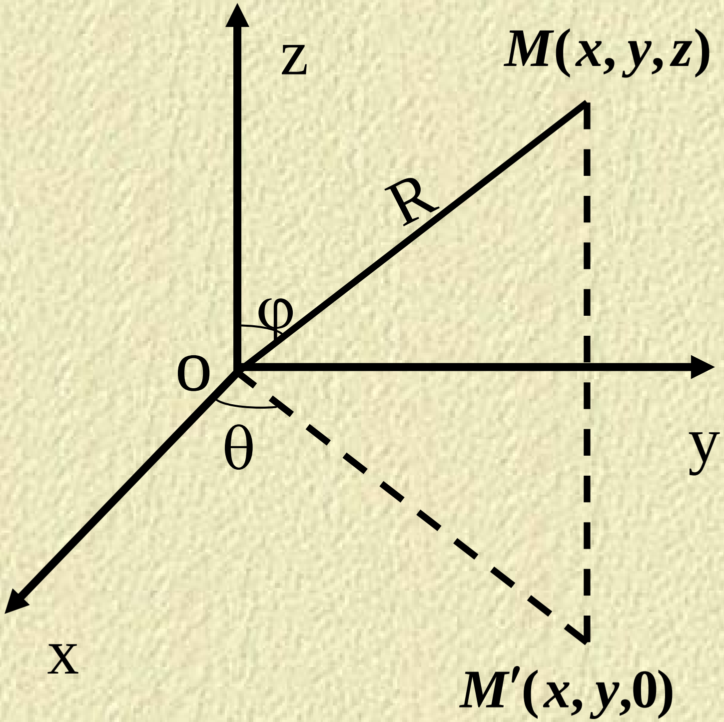
球面的一般方程

特殊地：球心在原点时方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

上页 下页 返回

球心在原点、半径为 R 的球面参数方程

若如图所示, 取角 θ 和 φ 作为参数,



则

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

$$(0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi)$$

球心在点 (a, b, c) 、半径为 R 的球面参数方程

例 2 求与原点O及$M_0(2,3,4)$的距离之比为$1:2$的点的全体所组成的曲面方程.

解 设$M(x,y,z)$是曲面上任一点,

根据题意有 $$\frac{|OM|}{|M_0M|}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

所求方程为 $$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}.$$

例 3 已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解1 设$M(x,y,z)$是所求平面上任一点，

根据题意有 $|AM|=|BM|$,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得所求方程 $2x-6y+2z-7=0$.

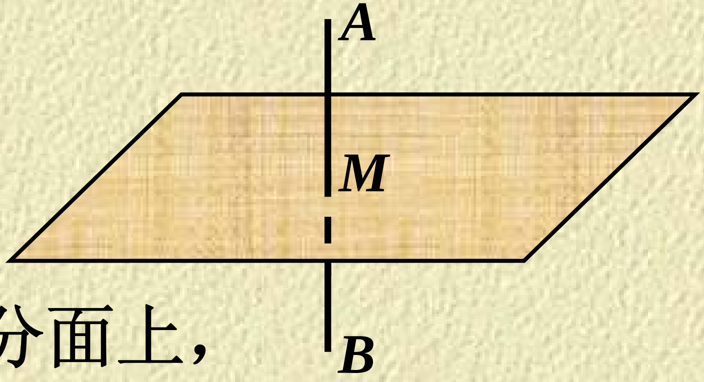
例 3 已知$A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解2 设$M(x,y,z)$是线段AB的中点，

则有 $x=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$ $y=\dfrac{2+(-1)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$z=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=\{1,-3,1\}$



点$M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$在垂直平分面上，

故 $(x-\dfrac{3}{2})-3(y-\dfrac{1}{2})+(z-\dfrac{7}{2})=0.$

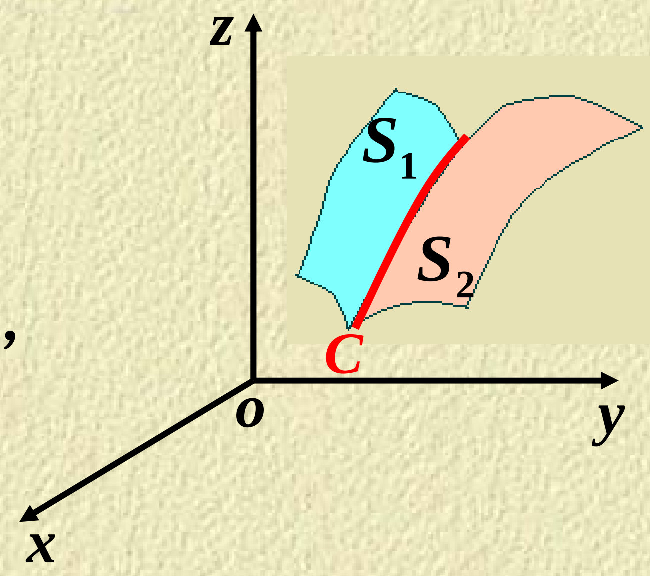
上页 下页 返回

6.6.2 曲线的方程

空间曲线C可看作空间两个曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程(不惟一)



特点： 满足方程的点都在曲线上，

曲线上的点都满足方程，

且不在曲线上的点不满足

方程.

曲线上的点(x, y, z)三个坐标常常可以表示成变量t的函数,

即 $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ 空间曲线的参数方程

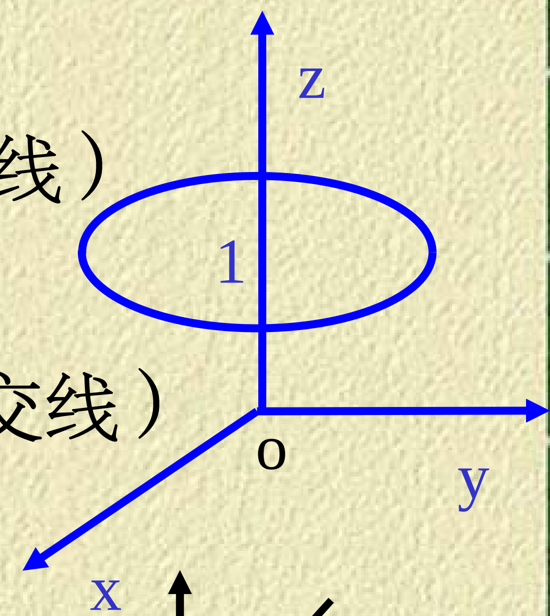
当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)

随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

例 2(书中例 2) 如图, 曲线C是一圆心在$(0,0,1)$、半径为 1 的圆, 圆C所在的平面与z轴垂直, 求它的一般方程和参数方程.

解:圆的一般方程有多种形式, 以下给出几种, 即

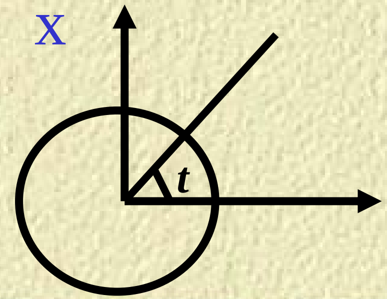
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=1 \end{cases}$$（一个球面与一个平面 的交线）



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$（一个圆柱面与一个平 面的交线）

它的参数方程可表示为

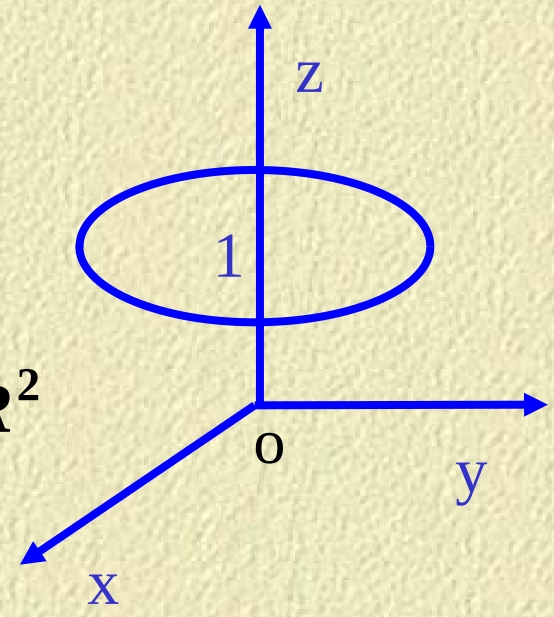
$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=1 \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$



上页 下页 返回

或 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ （两个球面的交线）

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x^2+y^2+(z-C)^2=R^2 \end{cases}$$



$$\because x^2+y^2=1,\ z=1 \Rightarrow \begin{cases} r^2=2 \\ 1+(1-C)^2=R^2 \end{cases}$$

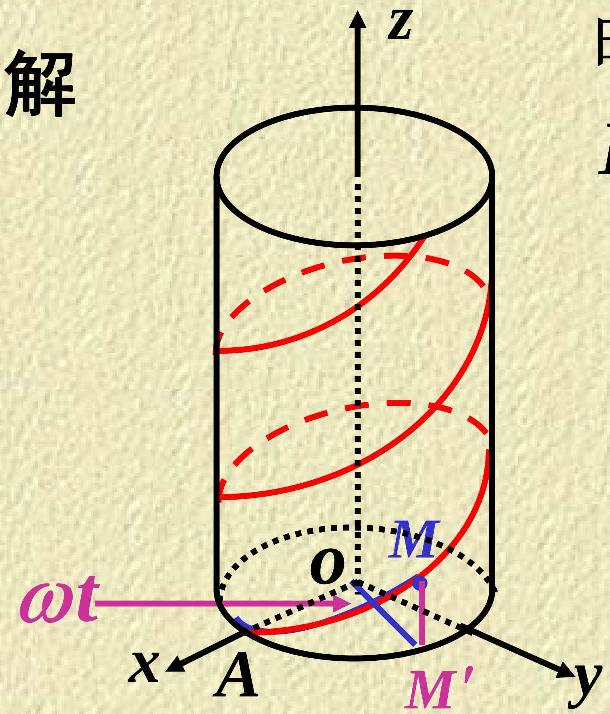
$$C=1,\ R^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$

$C=2,\ R^2=2$ $\qquad$ $C=3,\ R^2=10$

也可以形如 $\begin{cases} x^2+y^2+(z-C)^2=r^2 \\ x^2+y^2+(z-D)^2=R^2 \end{cases}$

例 3 (书中例 3) 设一动点 M 以角速度 ω 绕 z 轴匀速旋转，旋转半径为 a (即在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上旋转)，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向匀速上升（即 ω、v 都是常数），则点 M 构成的图形叫做螺旋线. 设 $t=0$ 时，动点 M 在点 $M_0(a,0,0)$，求动点的轨迹.

解



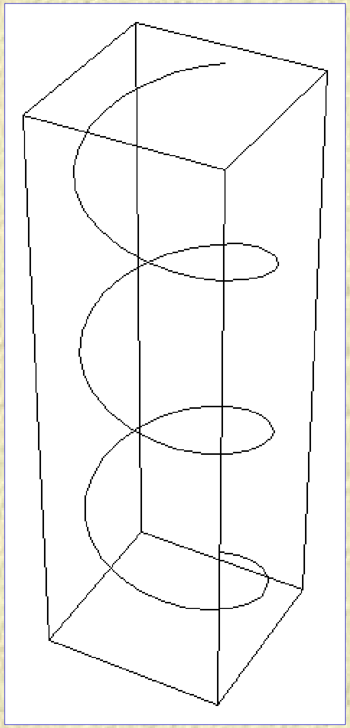
时刻 t，动点 M 在 xoy 面的投影 $M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \\ z &= vt \end{aligned}}$$

螺旋线的参数方程

上页 下页 返回

螺旋线的参数方程还可以写为



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \quad (\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比.

即 $\theta: \quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha, \qquad z: \quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

$\theta = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

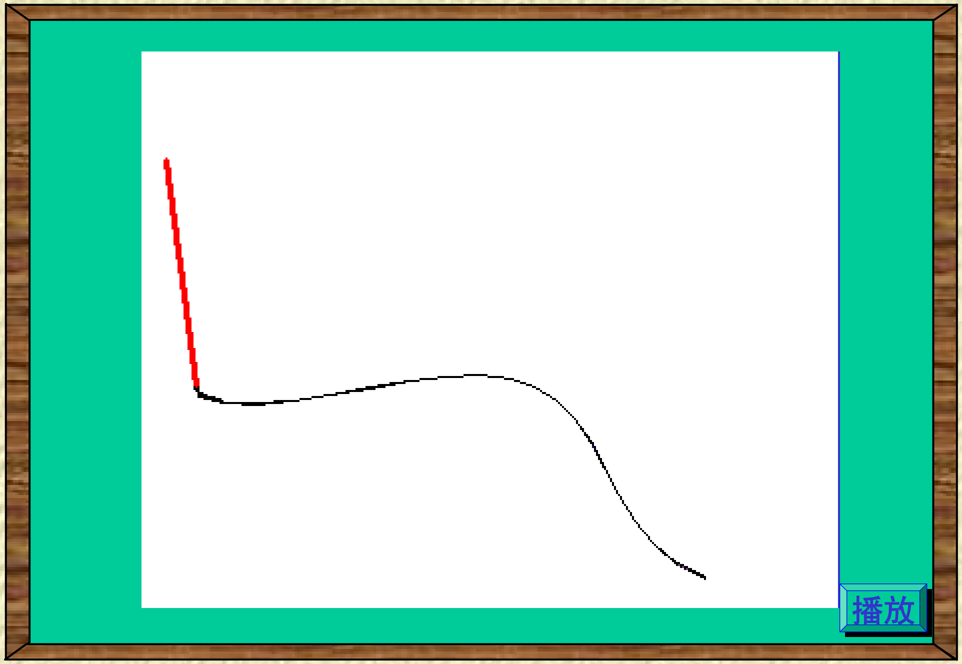
6.6.3 几种常见的曲面

1. 柱面

定义 一直线 L 沿一给定的曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面.

曲线 C 叫作柱面的准线，直线 L 叫作柱面的母线.

观察柱面的形成过程:



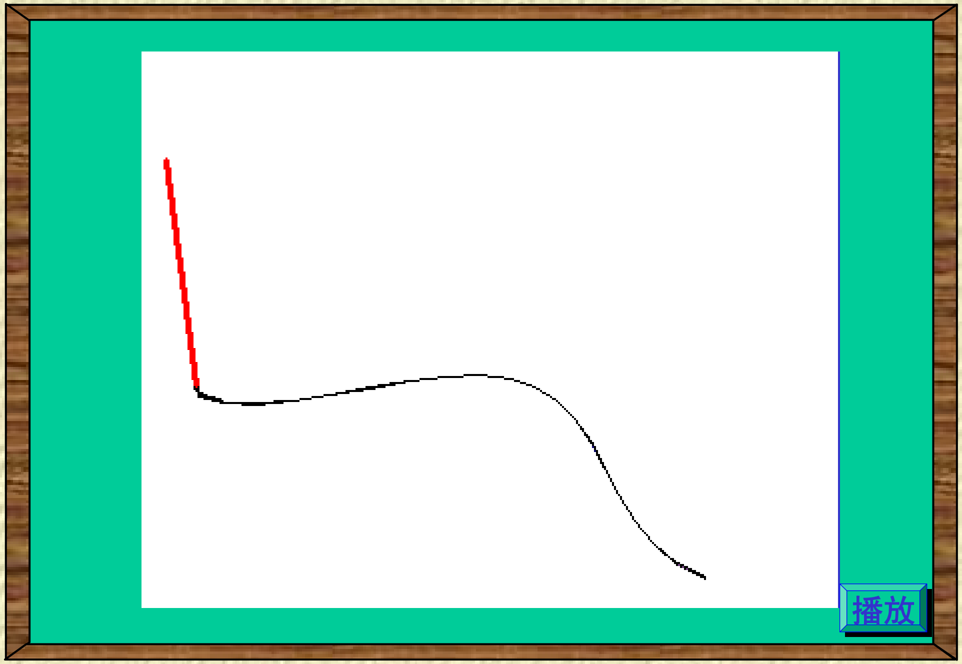
6.6.3 几种常见的曲面

1. 柱面

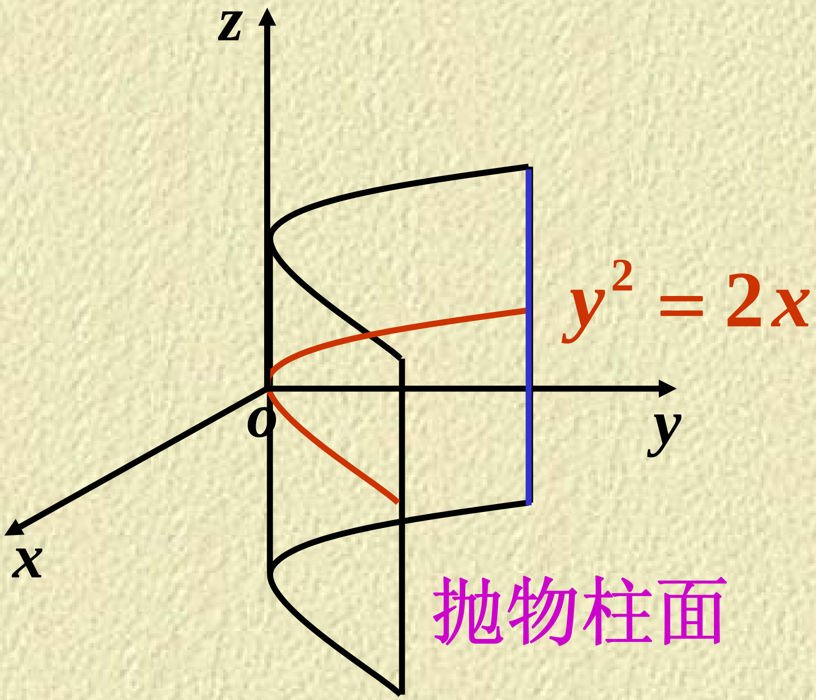
定义 一直线 L 沿一给定的曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面.

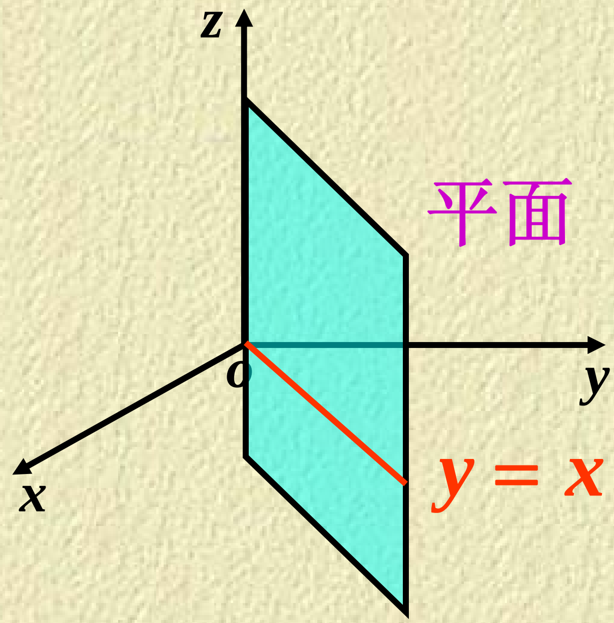
曲线 C 叫作柱面的准线，直线 L 叫作柱面的母线.

观察柱面的形成过程:



柱面举例





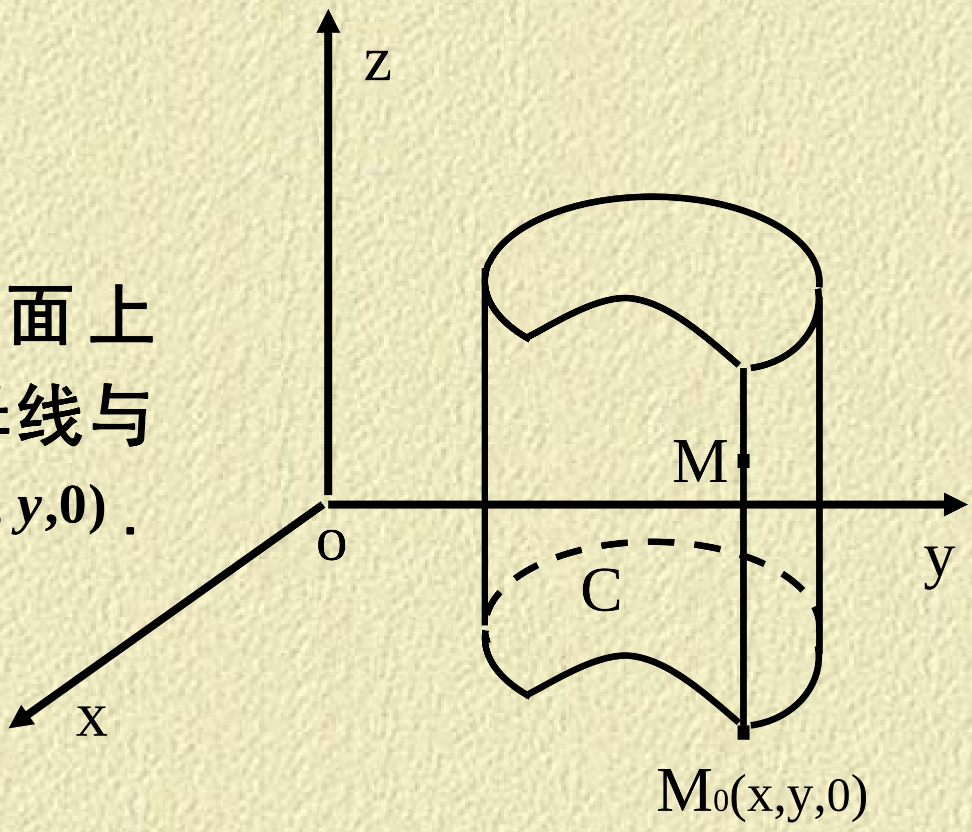
以下讨论最简单的情形：准线为坐标面上的曲线，母线平行于坐标轴的柱面。

上页 下页 返回

设柱面的母线平行于 z 轴，准线为 xOy 面上的曲线 C，其方程为

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

所形成的柱面如图



设 $M(x, y, z)$ 是柱面上任一点，点 M 所在的母线与准线 C 的交点为 $M_0(x, y, 0)$。因此点 M 的坐标满足

$$F(x, y) = 0$$

此即柱面的方程.

从柱面方程看柱面的特征：

只含x, y而缺z的方程$F(x, y) = 0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面.

（其他类推）

实例

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ 椭圆柱面 // x轴

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ 双曲柱面 // z轴

$$x^2 = 2pz$$ 抛物柱面 // y轴

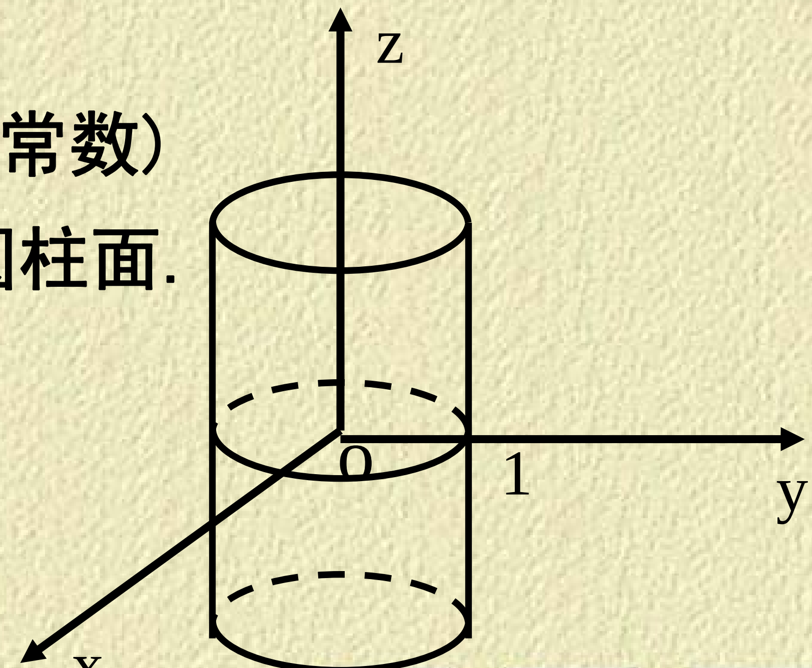
上页 下页 返回

例 4（书中例 4）方程 $x^2+y^2=1$， $x^2=2z$，$\dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 各表示什么曲面.

解 $x^2+y^2=1$ 表示的母线平行于 z 轴的柱面，它与平行于坐标面 xoy 的平面 $z=c$ 的交线

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=c \end{cases}$$ （c 为给定的常数）

是一圆，这个柱面称为圆柱面.

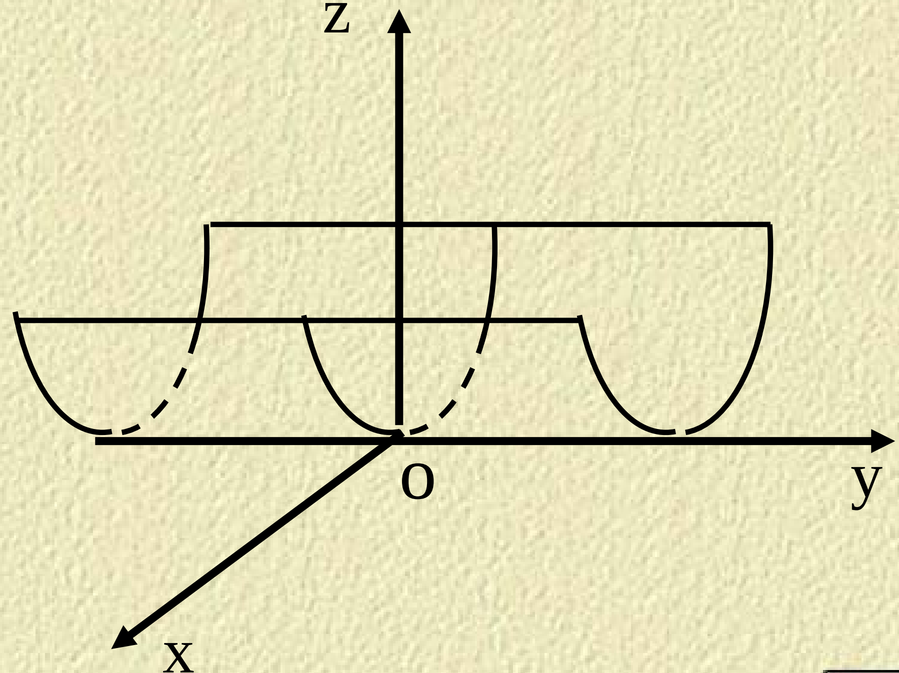


上页 下页 返回

$x^2=2z$ 表示的母线平行于 y 轴的柱面，它与平行于坐标面 zox 的平面 $y=c$ 的交线

$$\begin{cases} x^2=2z \\ y=c \end{cases}$$（c 为给定的常数）

是一抛物线，这个柱面称为抛物柱面.

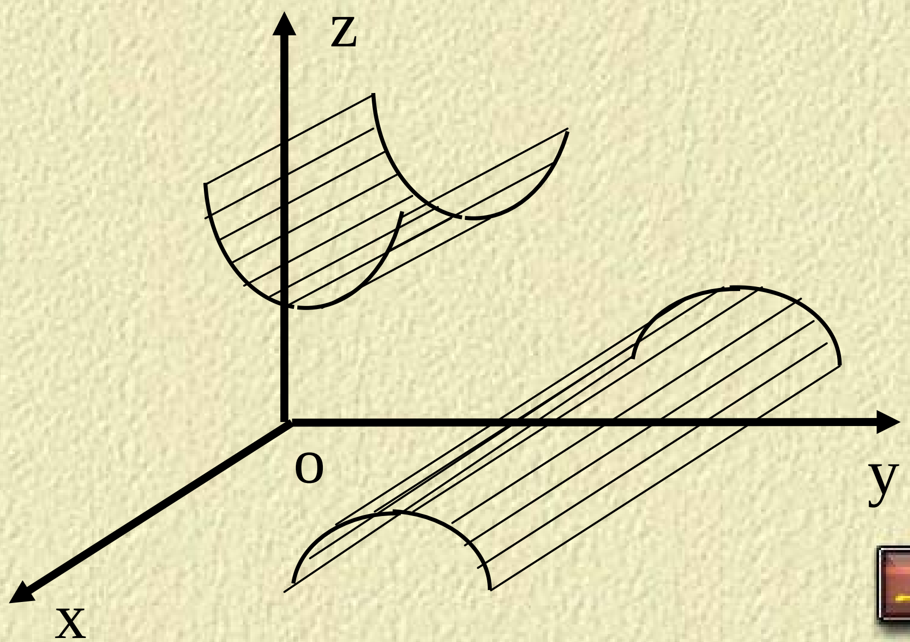


上页 下页 返回

$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示的母线平行于 x 轴的柱面，它与平行于坐标面 yoz 的平面 $x=c$ 的交线

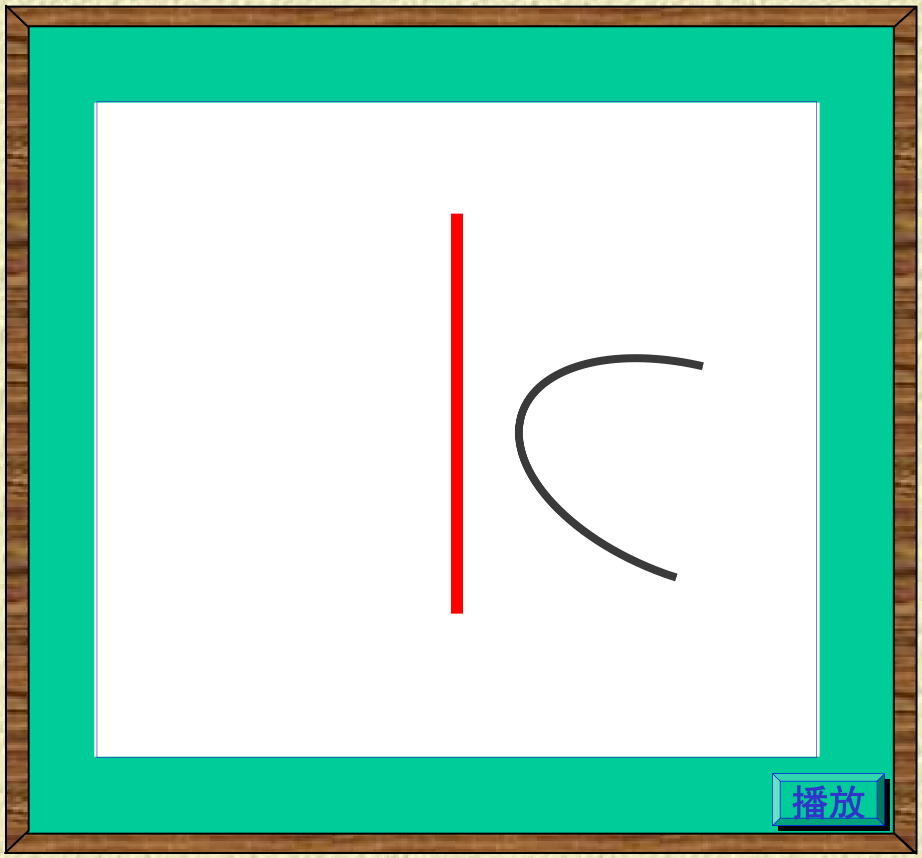
$$\begin{cases} \frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=c \end{cases}$$（c 为给定的常数）

是一双曲线，这个柱面称为双曲柱面.



2．旋转曲面

定义　一条平面曲线 C 绕其平面上的一条定直线 L 旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

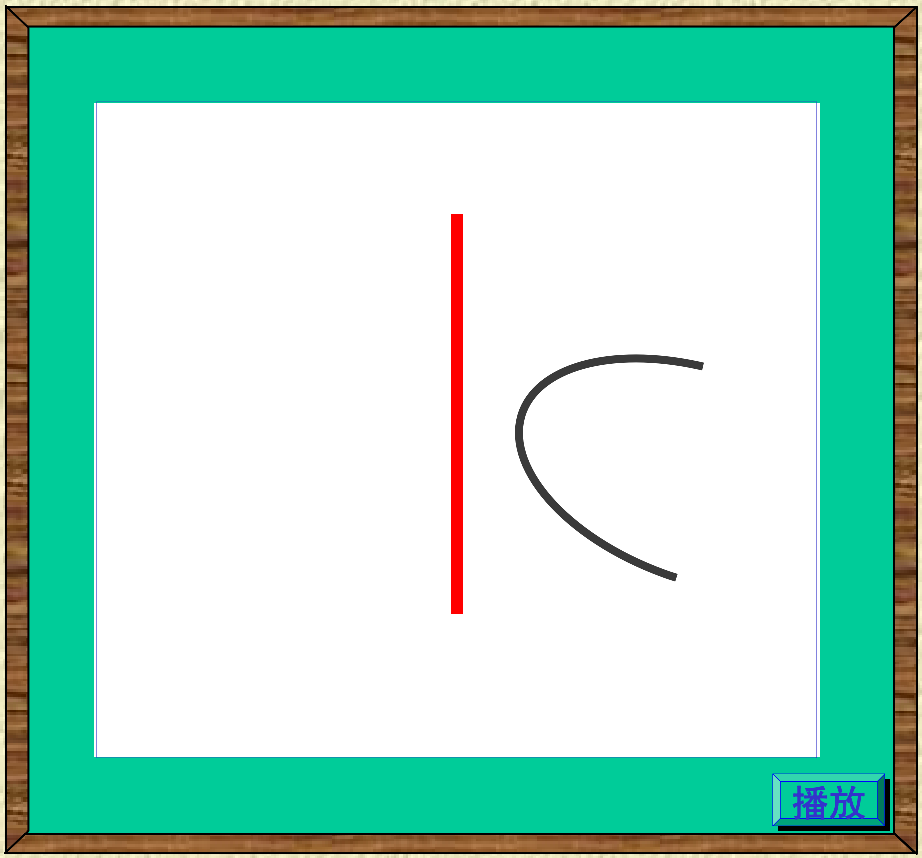


这条定直线 L 叫作旋转曲面的轴.

上页 下页 返回

2．旋转曲面

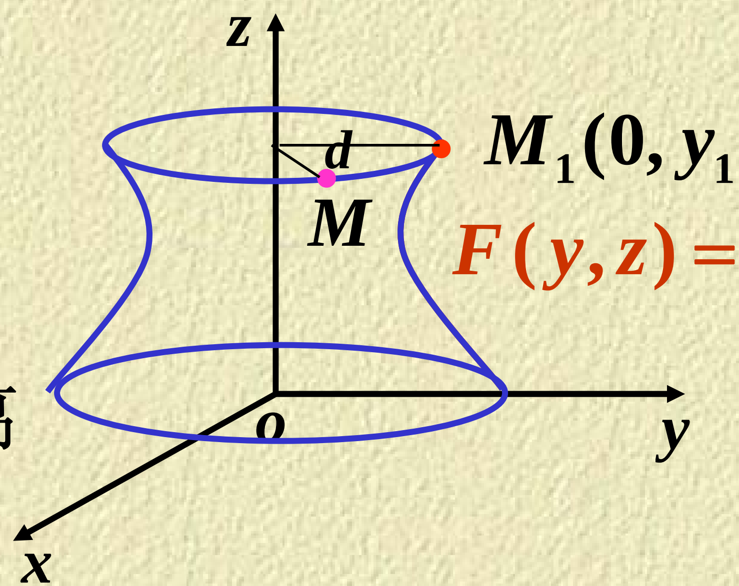
定义　一条平面曲线C 绕其平面上的一条定直线 L旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.



这条定直线 L 叫作旋转曲面的轴.

以下讨论最简单的情形：坐标面上的曲线，绕该坐标面上的某个坐标轴旋转所形成的旋转曲面的方程。

yoz 坐标面上的已知曲线 $F(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程.



如图　设 $M(x,y,z)$,

(1) $z=z_1$

（2）点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z=z_1$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入

$F(y_1,z_1)=0$　得方程　$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0,$

上页　下页　返回

同理：yoz坐标面上的已知曲线$F(y,z)=0$绕

y轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$$

设曲线$c:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$，将曲线$C$绕$y$轴

旋转一周得一旋转曲面，方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$$

同理，上述曲线C绕x轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

例 5　将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴；

绕 x 轴旋转　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转　$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转双曲面

上页　下页　返回

（2）椭圆$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴和$z$轴；

绕y轴旋转 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{c^2}=1$

绕z轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

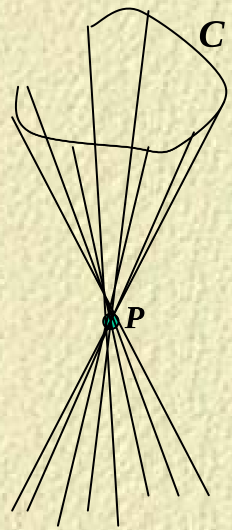
旋转椭球面

（3）抛物线$\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴；

$x^2+y^2=2pz$ 旋转抛物面

3．椭圆锥面

设 C 是一曲线， P 是不在 C 上的定点, 过 P 和 C 上的每一点作一直线 L , 所有这些直线形成的曲面称为**锥面**（即：过 P 点且沿曲线 C 移动的动直线所形成的曲面）。



其中：

直线 L 称为锥面的**母线**；

曲线 C 称为锥面的**准线**；

点 P 称为锥面的**顶点**。

如果准线 C 是一椭圆，则称锥面为**椭圆锥面**.

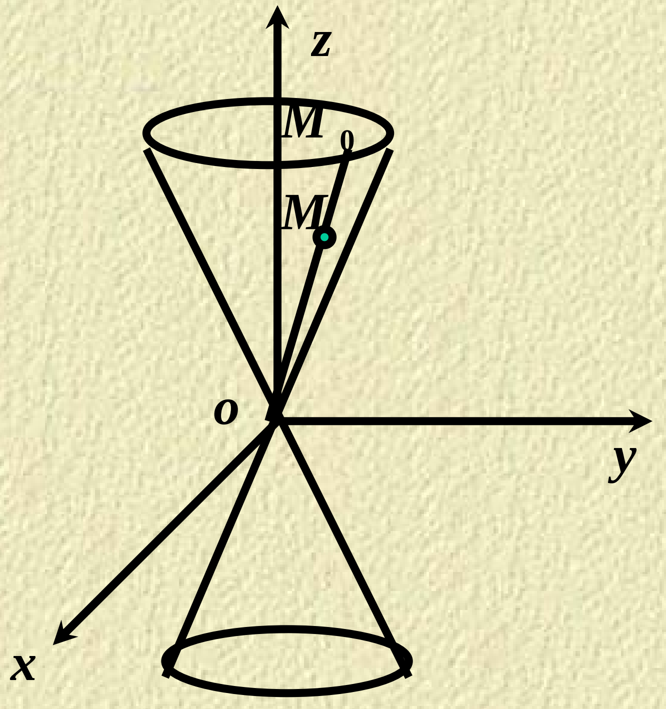
上页 下页 返回

顶点在原点准线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \quad (c\neq 0) \end{cases}$$

的椭圆锥面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



椭圆锥面又叫做二次锥面.

6.6.4 曲线在坐标面上的投影

设 C 是一空间曲线, 以 C 为准线作一母线平行于 z 轴的柱面, 称为曲线 C 的投影柱面, 投影柱面与 xOy 面的交线 C_{xy} 称为曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线, 简称投影.

设曲线 C 的方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 由此方程组消去 z 得一方程 $\Phi(x,y)=0$, 进而得投影曲线 C_{xy} 的方程为

$$\begin{cases} \Phi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

类似地：可求得空间曲线在其他坐标面上的投影

yoz 面上的**投影曲线** C_{yz}

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

xoz 面上的**投影曲线** C_{xz}

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

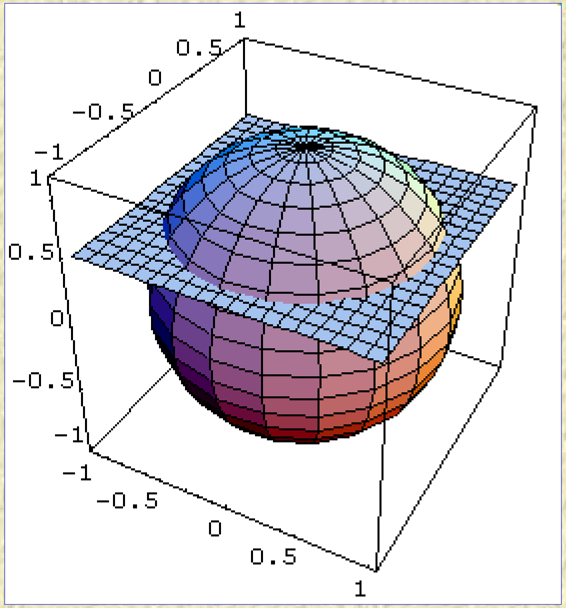
例 6　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标面上的投影.

解　（1）消去变量z后得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

在xoy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$$



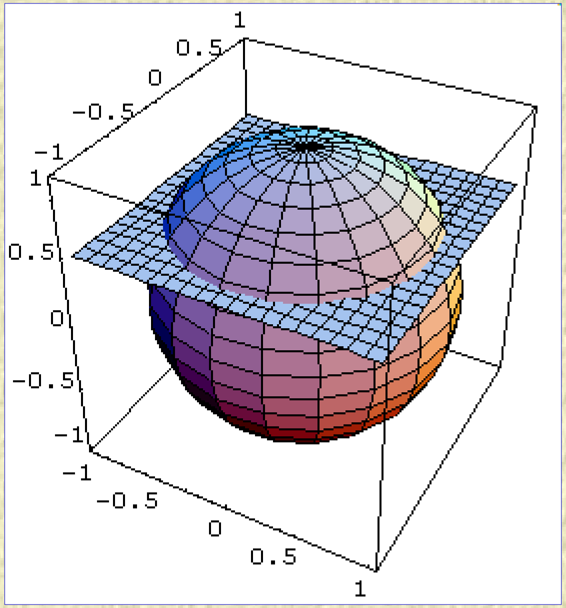
上页　下页　返回

例 6　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标面上的投影.

（2）因为曲线在平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上，

所以在 xoz 面上的投影为线段.

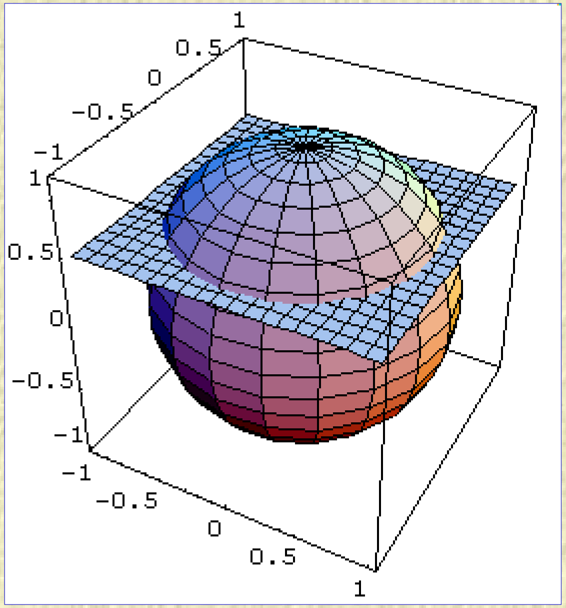
$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$



例 6　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标面上的投影.

（3）同理在 yoz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{2}, \\ x = 0 \end{cases} \quad |y| \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

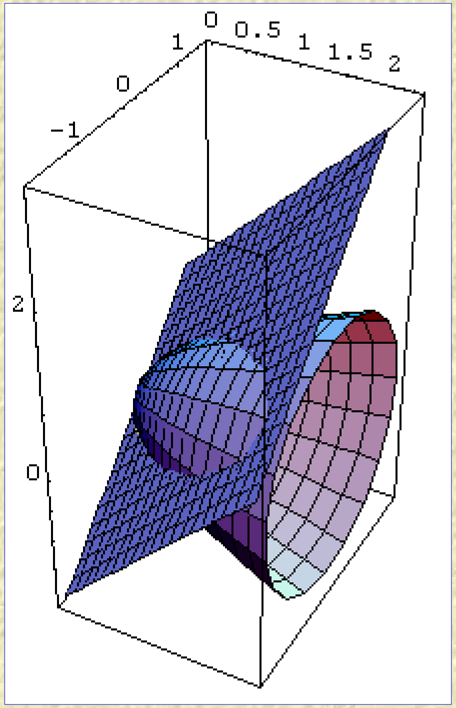


上页 下页 返回

例 7 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 交线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$



（1）消去 z 得投影

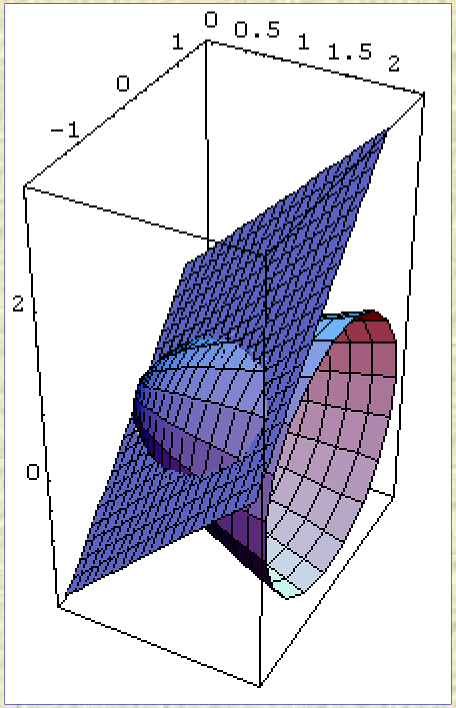
$$\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases},$$

上页 下页 返回

例 7 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 交线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$



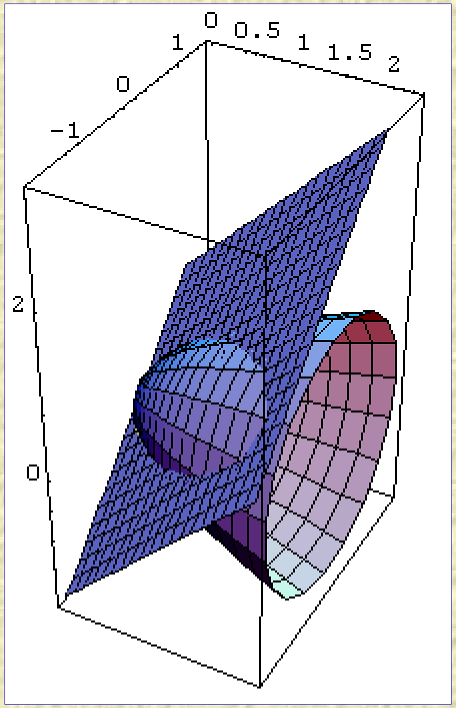
（2）消去 y 得投影

$$\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases},$$

例 7 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 交线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$



（3）消去 x 得投影

$$\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

小结

曲面方程的概念 $F(x,y,z)=0.$

曲面的参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

柱面的概念(母线、准线).

旋转曲面的概念及求法.

空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

思考题（2002年校高数竞赛题）

求以曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于向量 $\{1,1,1\}$ 的柱面方程。

思考题解答

解：设 $M(x,y,z)$ 为柱面上的任意一点，过 M 点作平行于 $\{1,1,1\}$ 的母线与曲线 C 的交点为 $M_0(x_0,y_0,0)$，则 $\overrightarrow{M_0M} // \{1,1,1\}$

即 $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{1}=\dfrac{z}{1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - z \\ y_0 = y - z \end{cases}$$

又 M_0 满足曲线 C 的方程 $x_0^2 + y_0^2 = 1$

$\therefore (x-z)^2+(y-z)^2=1$ 为所求柱面方程。

思考题

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？

(1) $x = 2$;　　(2) $x^2 + y^2 = 4$;

(3) $y = x + 1$.

上页　下页　返回

思考题解答

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在 $(0,0)$，半径为 2 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

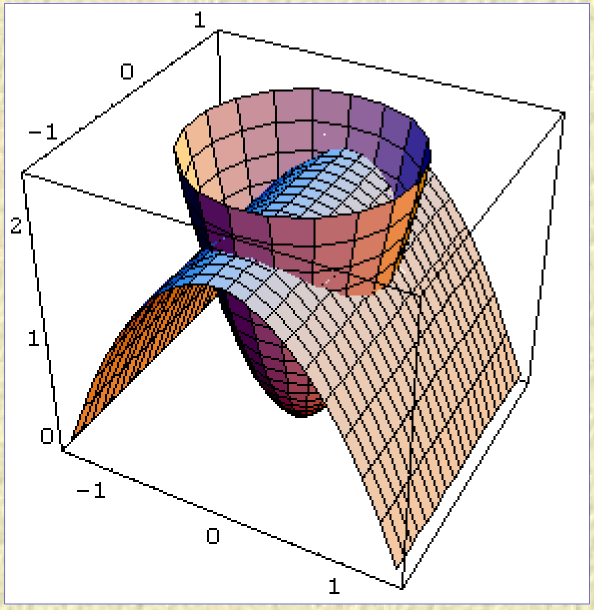
上页 下页 返回

思考题

求椭圆抛物面$2y^2+x^2=z$与抛物柱面$2-x^2=z$的交线关于xoy面的投影柱面和在xoy面上的投影曲线方程.

思考题解答

交线方程为 $\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases}$,



消去z得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1$,

在 xoy面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

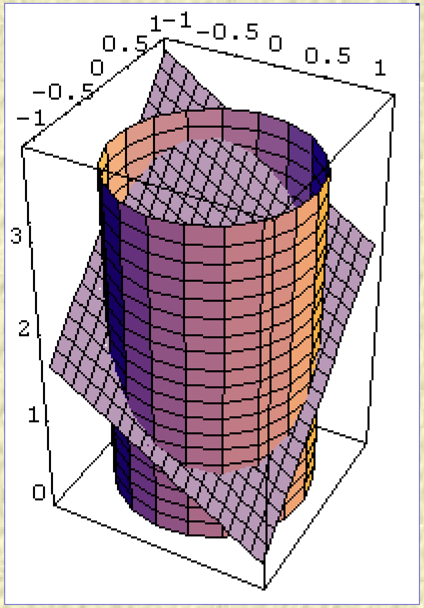
例1 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面，

$2x + 3y + 3z = 6$ 表示平面，

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

交线为椭圆.



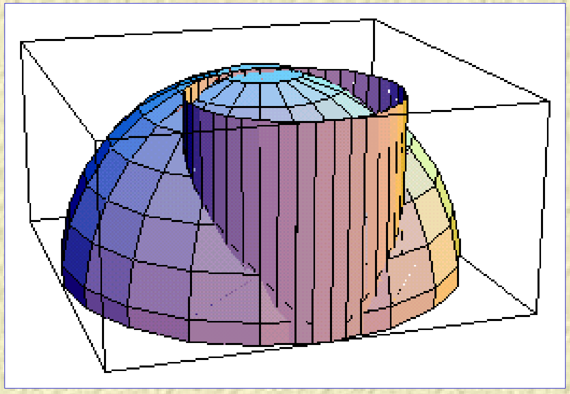
例2 方程组$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$表示怎样的曲线？

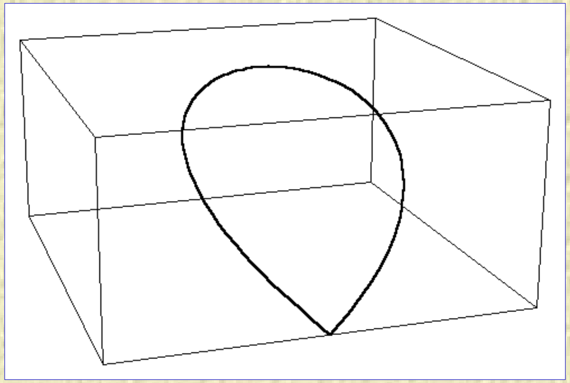
解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.





上页 下页 返回

作业：

P32：　1.　2.　4.　6.　7.　9.