1. 求上半球 $0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \le ax \quad (a > 0)$ 的公共部分在 xoy 面和 xoz 面上的投影

2. 设直线 L$_1$ 过点 $(1, 2, 3)$ 与直线 L$_2$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ 相交，且平行于平面 $3x - 2y + z + 5 = 0$，求直线 L$_1$ 的方程.

参考答案：

1. 解： 由方程 $x^2 + y^2 \le ax \quad (a > 0)$ 可知：$0 \le x \le a$，

又上半球面与柱面的交线为 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$

故该交线在 xoy 面上的投影为 $x^2 + y^2 = ax$，故公共部分在 xoy 面上的投影区域

为 $x^2 + y^2 \le ax$

上半球面与柱面的交线方程消去 y 得交线在 xoz 面上的投影曲线为

$z = \sqrt{a^2 - ax}$（这是顶点在 $(x, z) = (a, 0)$ 开口向 x 轴的负方向的抛物线）

所以公共部分在 xoz 面上的投影区域为

$$\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{a^2 - ax} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

2. 解：将直线 L_2 的方程化为参数方程：$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + t \end{cases}$

设 L_1 与 L_2 的交点为 $N(1 + 2t_0, -t_0, -2 + t_0)$

取 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = \overrightarrow{PN} = \{2t_0, -t_0 - 2, t_0 - 5\}$

$\because L_1 // \pi$，即 $\vec{s}_1 \perp \vec{n}$，故 $\vec{s}_1 \cdot \vec{n} = 0$，得 $t_0 = \dfrac{1}{9}$，$\therefore \vec{s}_1 = -\dfrac{1}{9}\{-2, 19, 44\}$

所以 L_1 的方程为 $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{19} = \dfrac{z-3}{44}$;