# 习题 4.1(P212)

1．一根细直杆 $OA$，长 $20cm$，其上任一点 $P$ 处的线密度与 $OP$ 的长度成正比，比例系数为 $k$，用定积分表示此细杆的质量.

解：以 $O$ 为坐标原点，$OA$ 所在直线为 $x$ 轴建立直角坐标系，坐标轴正向与 $OA$ 同向，则细杆的质量

$$M=\int_0^{20}kxdx$$

2．把定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ 写成积分和式的极限形式.

解：在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内任意插入 $n$ 个分点 $\quad 0=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=\frac{\pi}{2}$

把区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 分成 $n$ 个小区间，记每个小区间 $[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots n)$ 的长度 $\Delta x_i$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\sin\xi_i\,\Delta x_i$$

3．把在区间 $[0,1]$ 上的和式极限形式 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\Delta x_i$ 用定积分表示.

解：$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\Delta x_i=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

4. 利用定积分的定义计算下列定积分.

(1) $\int_a^b xdx$

解：设 $f(x)=x$，将区间 $[a,b]$ 分成 $n$ 等份，则每个小区间 $[x_{i-1},x_i]\ (i=1,2,\cdots n)$ 的长度 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，取 $\xi_i=x_i=a+\frac{(b-a)i}{n}$，则

$$\int_a^b xdx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{(b-a)i}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a\cdot\frac{b-a}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)i}{n}\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$= a(b-a)+(b-a)^2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

(2) $\int_0^1 e^x dx$

解：设 $f(x)=e^x$，将区间$[0,1]$分成$n$等份，则每个小区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots n)$的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取$\xi_i=x_i=\frac{i}{n}$，则$\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}$

$$\underline{\text{求公比为}e^{\frac{1}{n}}\text{的}}\atop\text{数列的前项和}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}[1-(e^{\frac{1}{n}})^n]}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{x}}}$$

$$=(1-e)\lim_{t\to0^+}\frac{te^t}{1-e^t}=(1-e)\lim_{t\to0^+}\frac{e^t+te^t}{-e^t}=(e-1)\lim_{t\to0^+}(1+t)=(e-1)$$

5．用定积分的几何意义计算下列各题.

(1) $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$

解：根据定积分的几何意义，定积分$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$表示由曲线$y=\sqrt{a^2-x^2}$以及$x$轴、$y$轴围成的在第 I 象限内图形面积，即半径为$a$的圆面积的四分之一，因此

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)=\frac{1}{4}\pi a^2$$

(2) $\int_0^1 2xdx$

解：根据定积分的几何意义，定积分$\int_0^1 2xdx$表示由直线$y=2x$、$x=1$以及$x$轴围成的三角形面积，因此$\int_0^1 2xdx=1$

(3) $\int_0^{2\pi}\sin xdx$

解：根据定积分的几何意义，$\int_0^{2\pi}\sin xdx$表示由曲线$y=\sin x(x\in[0,2\pi])$与$x$轴所围成的图形面积的代数和。由于函数$y=\sin x$在区间$[0,\pi]$上非负，在区间$[\pi,2\pi]$上非正，这两部分图形面积相等，但正负抵消，因此$\int_0^{2\pi}\sin xdx=0$

(4) $\int_{-a}^a f(x)dx$,其中$f(x)$在$[-a,a]$上连续且为奇函数.

解：根据定积分的几何意义，$\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 表示由曲线 $y=f(x)(x\in[-a,a])$ 与 $x$ 轴所围成的图形面积的代数和。由于函数 $y=f(x)$ 是连续的奇函数，其图像关于原点对称，因此函数在区间 $[0,a]$ 上图形与在区间 $[-a,0]$ 上图形一个位于 $x$ 轴上方，一个位于 $x$ 轴下方，这两部分图形面积相等，但正负抵消，因此 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

6. 比较下列各对积分的大小.

(1) $\int_1^e \ln xdx$ 和 $\int_1^e \ln^2 xdx$

解：区间 $[1,e]$ 上除两个端点 $x=1$ 和 $x=e$ 外，均有 $\ln x>\ln^2 x$ 故由性质可得 $\int_1^e \ln xdx>\int_1^e \ln^2 xdx$

(2) $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln xdx$ 和 $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln^2 xdx$

解：区间 $[\frac{1}{e},1]$ 上除点 $x=1$ 外，均有 $\ln x<\ln^2 x$ 故由性质可得 $\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln xdx<\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln^2 xdx$，所以 $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln xdx>\int_1^{\frac{1}{e}} \ln^2 xdx$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$

解：区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上除端点 $x=0$ 外，均有 $x>\sin x$ 故由性质可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$

(4) $\int_0^1 e^x dx$ 和 $\int_0^1 (1+x)dx$

解：设 $f(x)=e^x-(1+x)$，则 $f'(x)=e^x-1>0\ (x>0)$，$f(0)=0$，即在区间 $[0,1]$ 上除点 $x=0$ 外，均有 $f(x)>0$，所以 $\int_0^1 f(x)dx>0$，故 $\int_0^1 e^x dx>\int_0^1 (1+x)dx$

7. 估计下列定积分值的范围.

(1) $\int_1^2 e^{x^2}dx$

解：区间 $[1,2]$ 上，$e^1\le e^{x^2}\le e^4$，故由性质可得 $e=\int_1^2 edx\le\int_1^2 e^{x^2}dx\le\int_1^2 e^4dx=e^4$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx$

解：区间$[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$上，$1\le 1+\sin^2 x\le 2$，故由性质可得

$$\pi=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}1dx=2\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2 x)dx\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}2dx=2\pi$$

(3) $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$

解：设 $f(x)=x^2-x,x\in[0,2]$，则 $f'(x)=2x-1$，比较驻点、区间端点处函数值：

$f(0)=0$， $f(2)=2$（最大）， $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$（最小），

因此有$2e^{-\frac{1}{4}}=\int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le\int_0^2 e^2dx=2e^2$，

所以$-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le-2e^{-\frac{1}{4}}$

(4) $\int_{-2}^0 xe^x dx$

解：设 $f(x)=xe^x,x\in[-2,0]$，则 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$,，比较驻点、区间端点处函数值：$f(0)=0$（最大），$f(-2)=-2e^{-2}$，$f(-1)=-e^{-1}$（最小），

因此有 $-2e^{-1}=\int_{-2}^0 -e^{-1}dx\le\int_{-2}^0 xe^x dx\le\int_{-2}^0 0dx=0$

8．计算函数 $y=x^2$ 在$[0,1]$上的平均值

解：把区间$[0,1]$ $n$等分，则每个小区间的长度为$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，分点 $x_i$ 的坐标为 $x_i=\frac{i}{n}$，取$\xi_i=x_i$，所以

$$\overline{f(x)}=\frac{\int_0^1 x^2dx}{1-0}=\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}(\xi_i)^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{\infty}i^2=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}=\frac{1}{3}$$

注：因本节尚未学习定积分的计算，定积分$\int_0^1 x^2dx$ 又不能利用几何意义得出，故只能用定义求值。若学习了定积分的计算，则 $\overline{f(x)}=\frac{\int_0^1 x^2dx}{1-0}=\frac{1}{3}$