北京理工大学2009-2010学年第二学期

《微积分A》（下）期末试题解答及评分标准(A卷)

2010.7.7

一、1. $dz=\dfrac{\cos x dx+3dy}{1+e^z}$； 2. $P(1,1,2)$；

3. $\dfrac{22}{15}$； 4. $div\vec{A}=e+2$；

5. $a=4,\ p=3, q=2$； 6. 绝对收敛；

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1},\quad (-1,1).$

二、设平面π的方程为：$(4x-y+3z-6)+\lambda(x+5y-z+10)=0$

平面π的方向向量为：$\vec{n}=\{4+\lambda, 5\lambda-1, 3-\lambda\}$

平面π_1的方向向量为：$\vec{n}_1=\{2,-1,5\}$

由题意，平面$\pi\perp\pi_1$，$\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{n}_1$

$\vec{n}\bullet\vec{n}_1=0$，$\Rightarrow 2(4+\lambda)-(5\lambda-1)+5(3-\lambda)=0$

$\Rightarrow\quad \lambda=3$

所以平面π的方程为：$7x+14y+24=0.$

三、$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1 dz$

$$=2\pi\int_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

（或$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z:x^2+y^2\le z}dxdy=\int_0^1\pi z dz=\dfrac{\pi}{2}$）

由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kzdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}kdxdydz}=\frac{\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy}{\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy}=\frac{\int_0^1\pi z^2dz}{\pi/2}=\frac{2}{3}$$

所以Ω的质心坐标为：$(0,0,\dfrac{2}{3})$

四、$\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^x(x+1-\cos y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=(e^x+1)\sin y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x(x+2-\cos y),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^x\sin y,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(e^x+1)\cos y,$

在点(0,0)处，有$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=1, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\Delta = B^2-AC=2<0, 且A>0$$

所以 (0,0)是f的极小值点.

在点$(-2,\pi)$处，有$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-2}, B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-(1+e^{-2})$$

$$\Delta = B^2-AC=e^{-2}(1+e^{-2})>0$$

所以 $(-2,\pi)$不是f的极值点.

五、解交点$\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=2x+6 \end{cases}$，得 $A(-1,-2)$，　$B(5,4)$

$$I=\iint_D ydxdy=\int_{-2}^{4} ydy\int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} dx$$

$$=\int_{-2}^{4} y(y-\frac{y^2}{2}+4)dy=18.$$

六、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n n}{3^{n+1}(n+1)}=\dfrac{1}{3}$，所以收敛半径为：$R=3$

当 $x=3$ 时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n}$，发散;

当 $x=-3$ 时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3n}$，收敛;

所以收敛域为：$[-3,3)$.

记$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n}x^{n-1}$，　$S(0)=\dfrac{1}{3}$

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n}x^{n-1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n n}x^n$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\int_0^x x^{n-1}dx$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{n-1})dx$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{3-x}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{3})$$

所以 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-\dfrac{x}{3}), & x\neq 0, x\in[-3,3) \\ \dfrac{1}{3}, & x=0\end{cases}$

七、$a_4=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 4x dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-2x)\cos 4x dx=\dfrac{1}{4}$

$$S(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\in(-\pi,\pi) \\ \pi^2, & x=\pm\pi\end{cases}$$

$$S(\frac{10}{3}\pi)=S(4\pi-\frac{2\pi}{3})=S(-\frac{2\pi}{3})=\frac{4\pi(\pi+3)}{9}.$$

八、（1）L 为椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的逆时针方向;

$$I=\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\oint_L -ydx+xdy$$

$$=\iint_{D:x^2+4y^2\le 1}2dxdy=\pi.$$ （由格林公式）

(也可写出椭圆的参数方程，然后转化为定积分计算)

(2) L 为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=36$ 的逆时针方向，记 L_1 为椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的逆时针方向. L_1 包含在 L 内，记 L_1 与 L 所围区域为 D.

$$X=\frac{-y}{x^2+4y^2},\quad Y=\frac{x}{x^2+4y^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{x^2+4y^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

在不含原点的复连通区域 D 上应用格林公式，有:

$$\oint_{L-L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\iint_D(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy=0$$

$$\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}-\oint_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=0$$

$$I=\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\oint_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\pi.$$

九、添加辅助面 $S:z=1,\quad (x^2+y^2\le 1)$ 取下侧.

$$I=\iint_{\Sigma\cup S}(x^3+yz)dydz+(y^3+e^xz)dzdx+(z^3+3)dxdy$$
$$-\iint_S(x^3+yz)dydz+(y^3+e^xz)dzdx+(z^3+3)dxdy$$

$$=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iint\limits_{D:x^2+y^2\le 1}4dxdy$$

做球坐标变换：$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi+1 \end{cases}$

上式$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^1(r^2+2r\cos\varphi+1)r^2\sin\varphi\,dr+4\pi$

$$=-6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{1}{5}\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{3}\sin\varphi)d\varphi+4\pi$$

$$=-\frac{17}{10}\pi+4\pi=\frac{23}{10}\pi.$$

（也可做球坐标变换：$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$，但三重积分的计算较复杂；或用截面法（坐标轴投影法）计算三重积分）