高等数学期中试题(B 卷)参考解答（2010.5）

一. 1. 2, $\frac{2}{3}$

2. $\frac{7}{\sqrt{14}}$

3. $e^{\frac{1}{2}}$, 不存在

4. $\{-\frac{3}{5},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\}$， $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$

5. $\{3,-4,-1\}$， $\arccos\frac{5}{\sqrt{39}}$

6. $yf_1'+\frac{1}{y}f_2'+2x\varphi'$， $f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+2x\varphi''$

7. $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$

二. 设 L： $\frac{x+1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-4}{n}$

有 $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8l-7m+2n=0$

$\{l,m,n\}\cdot\{2,1,4\}=2l+m+4n=0$

解得 $l=\frac{15}{14}m$ $n=-\frac{11}{14}m$

故 L： $\frac{x+1}{15}=\frac{y}{14}=\frac{z-4}{-11}$

三. $\begin{cases} \frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} \\ 2x+4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

将点 P 代入得 $\begin{cases} \frac{dz}{dx}=2-2\frac{dy}{dx} \\ 1-2\frac{dy}{dx}+6\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{13}{14}$ $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{7}$

故切向量 $\vec{s}=\{1,\frac{13}{14},\frac{1}{7}\}$

法平面 π: $14(x-1)+13(y+1)+2(z-2)=0$

即 $14x+13y+2z-5=0$

四. 令 $\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^{y})\sin x=0$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y}(\cos x-1-y)=0$$

得驻点 $P_1(\pi,-2)$ $P_2(2\pi,0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^{y})\cos x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^{y}\sin x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{y}(\cos x-2-y)$$

在点 P_1 $A=1+e^{-2}$ $B=0$ $C=-e^{-2}$

$$AC-B^2=-(1+e^{-2})e^{-2}<0$$

故 P_1 不是极值点

在点 P_2 $A=-2$ $B=0$ $C=-1$

$$AC-B^2=2>0 \quad 且\ A<0$$

故 P_2 是极大值点，极大值 $z=2$

五. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\frac{y\sin x}{x}dz$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y\sin x}{x}(\frac{\pi}{2}-x)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\sin x dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

六. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial v}$

代入方程得 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

(2) $z=\arcsin u+f(v)$ (f 是任意可导函数)

$$=\arcsin x+f(x^2-y^2)$$

七. （1） $S: x^2+y^2+z^2=2z$

（2） $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

（3） $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^7\sin\varphi dr$

$=2^6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^8\varphi d\varphi$

$=\frac{64}{9}(1-\frac{\sqrt{2}}{32})\pi$

八. 设切点为 $M(x,y,z)$

则切平面 $\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0$

即 $\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1$

三截距为 $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$$

令 $f(x,y,z)=xyz$ 其中 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

$$\begin{cases} F_x'=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ F_y'=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ F_z'=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

解得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$ $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

由问题的实际意义，…，故 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$ 为所求点

$$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$$