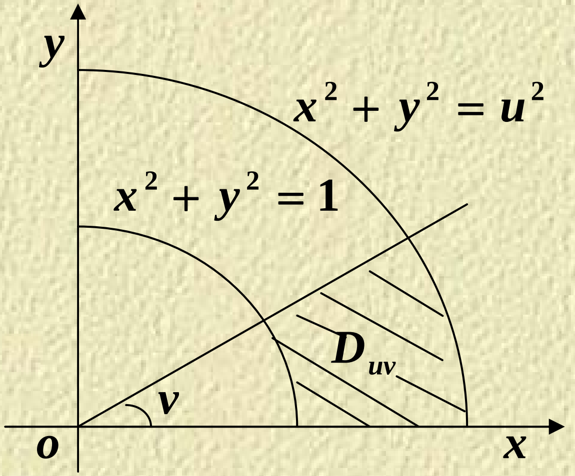
课堂练习



1. 已知 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$

2. 求 $\displaystyle\iint_D (x^2-y)dxdy$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$

3.设函数 $f(x)$ 连续，$F(u,v)=\displaystyle\iint_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，

其中 D_{uv} 为图中阴影部分，求 $\dfrac{\partial F}{\partial u}$

参考解答

1. 已知 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$

解：函数两端取对数：$\ln z=\dfrac{x}{y}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

方程两端同时对 x 求偏导：$\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{y}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)-1\right)$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$$

2. 求$\iint\limits_D (x^2-y)dxdy$，其中$D: x^2+y^2\le 1$

解：由于积分区域关于 x 轴对称，$\therefore \iint\limits_D ydxdy = 0$

由变量轮换的对称性，得 $\iint\limits_D x^2dxdy = \iint\limits_D y^2dxdy$

$$\therefore \iint\limits_D (x^2-y)dxdy = \iint\limits_D x^2dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$$

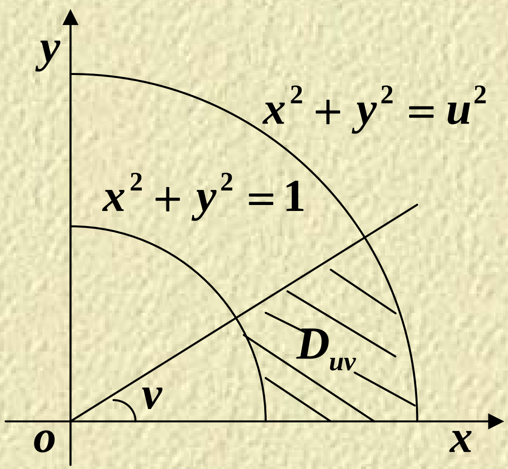
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

上页 下页 返回

3. 设函数 $f(x)$ 连续， $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ ，

其中 D_{uv} 为图中阴影部分，求 $\frac{\partial F}{\partial u}$



解：做极坐标变换：则 $D_{uv}:\begin{cases}0\le\theta\le v\\1\le\rho\le u\end{cases}$

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^v d\theta\int_1^u f(\rho^2)d\rho=v\int_1^u f(\rho^2)d\rho$$

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$$

上页 下页 返回

4. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi' \neq -1$ 时，求

(1) dz

(2)记 $u(x\ y) = \dfrac{1}{x - y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

5. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值

6. 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$，求曲线 C 上距离 xoy 面最远点和最近的点.

上页 下页 返回

4. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi' \neq -1$ 时，求

(1) dz

(2)记 $u(x\ y) = \dfrac{1}{x - y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

解(1)：方程两端同时求全微分：

$$2xdx + 2ydy - dz = \varphi' \cdot (dx + dy + dz)$$

$$\therefore dz = \frac{[2x - \varphi']dx + [2y - \varphi']dy}{1 + \varphi'}$$

4. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq -1$ 时，求

(1) dz

(2)记 $u(x\ y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

解(2)： 由(1)可得： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{[2x-\varphi']}{1+\varphi'}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{[2y-\varphi']}{1+\varphi'}$

$$\therefore u(x\ y)=\frac{2}{1+\varphi'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\cdot(1+z'_x)}{(1+\varphi')^2}=-\frac{2\varphi''\cdot(1+2x)}{(1+\varphi')^3}$$

上页 下页 返回

5. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值

解： 构造拉格朗日函数

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-4)$$

$$\text{令}\begin{cases} F_x'=2x-2\lambda x+\mu=0 \\ F_y'=2y-2\lambda y+\mu=0 \\ F_z'=2z+\lambda+\mu=0 \\ z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=8 \end{cases}$$

由问题的实际意义知，
必有最大值和最小值，

比较 $u(-2,-2,8)=72,\quad u(1,1,2)=6$ 的值得

$$u_{\max}(-2,-2,8)=72,\qquad u_{\min}(1,1,2)=6$$

6. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 上距离 xoy 面最远点和最近的点.

解： 空间上的点 $P(x,y,z)$ 到 xoy 面的距离 $d=|z|$

设 $F=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

令 $\begin{cases}F'_x=2\lambda x+\mu=0\\ F'_y=2\lambda y+\mu=0\\ F'_z=2z-2\lambda z+3\mu=0\\ x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\\ y=-5\\ z=5\end{cases}$

由问题的实际意义知，
必有最远点和最近点，

比较 $d(1,1,1)=1$, $d(-5,-5,5)=5$

最远点为 $(-5,-5,5)$，最近点为 $(1,1,1)$

上页 下页 返回