习题 9.3(P188)

1. 用格林公式计算下列各题.

(1) $\oint_L (x+y)dx - 2xydy$, L 为直线 $x=0$， $y=0$， $x+y=a\ (a>0)$ 围成的三角形的边界，取正向.

(2) $\oint_L (x+y+xy)dx+(x-y+xy)dy$， L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$， 取正向.

解：(1) $X=x+y$， $Y=-2xy$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=-2y$$

$$\oint_L (x+y)dx-2xydy=-\iint_D(2y+1)dxdy=-\int_0^a dx\int_0^{a-x}(2y+1)dy$$

$$=\int_0^a[(a-x)^2+(a-x)]d(a-x)=-\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}$$

(2) $X=x+y+xy$， $Y=x-y+xy$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=1+x,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=1+y$$

$$\oint_L (x+y+xy)dx+(x-y+xy)dy=\iint_D(y-x)dxdy\ \overline{\overline{\text{由对}}}\!\!\!\!\!\!\underset{\text{称性}}{}\ 0$$

2. 计算 $\oint_{\overset{\frown}{AMO}}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy$， n 为常数， $\overset{\frown}{AMO}$ 为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$.

解：法 1： $X=e^x\sin y-ny$， $Y=e^x\cos y-n$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=e^x\cos y-n,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=e^x\cos y$$

$$\oint_{\overset{\frown}{AMO}}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{AMO}+\overline{OA}}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy-\oint_{\overline{OA}}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy$$

$$=n\iint_D dxdy-0\ \overline{\overline{\text{由几何}}}\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{\text{意义}}{}\ n\cdot(\text{上半圆的面积})=\frac{n\pi a^2}{8}$$

法 2：设 $X=e^x\sin y$，$Y=e^x\cos y-n$，则

$$\frac{\partial X}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=e^x\cos y$$

故 $\oint\limits_{\overset{\frown}{AMO}} e^x\sin y dx+(e^x\cos y-n)dy$ 与路径无关，选其沿 $y=0$ 积分，则有

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{AMO}} e^x\sin y dx+(e^x\cos y-n)dy=0$$

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{AMO}}(e^x\sin y-ny)dx+(e^x\cos y-n)dy$$

$$=\oint\limits_{\overset{\frown}{AMO}} e^x\sin y dx+(e^x\cos y-n)dy-\oint\limits_{\overset{\frown}{AMO}} ny dx$$

$$=0-n\int_a^0\sqrt{ax-x^2}dx=n\int_0^a\sqrt{ax-x^2}dx\ \frac{\text{由定积分}}{\text{几何意义}}\ n\cdot(\text{上半圆的面积})=\frac{n\pi a^2}{8}$$

3. 计算 $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$，积分路径是与 y 轴不相交的任意曲线.

解：$X=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}$，$\quad Y=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

故积分与路径无关,取直线段 $L:y=\pi,\quad 1\le x\le 2$ 为积分路径

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$$

$$=\int_1^2(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x})dx=1+\pi[\sin\frac{\pi}{x}]_1^2=1+\pi$$

4. 计算 $\int\limits_L(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，$L$ 是由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\frac{\pi}{2},1)$ 的抛物线 $y^2=\frac{2}{\pi}x$ 的弧段.

解： $X=2xy^3-y^2\cos x$， $Y=1-2y\sin x+3x^2y^2$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

故积分与路径无关,取折线段 $\begin{cases} L_1: y=0, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ L_2: x=\dfrac{\pi}{2}, & 0\le y\le 1 \end{cases}$ 为积分路径，

$$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$$

$$=\int_0^1(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)dy=(y-y^2+\frac{1}{4}\pi^2y^3)_0^1=\frac{1}{4}\pi^2$$

5. 计算 $\int_L (x^4+4xy^3-1)dx+(6x^2y^2-5y^4+1)dy$, L 为圆 $x^2+y^2=9$ 在第一象限部分的圆弧，从点 $A(0, 3)$ 到点 $B(3, 0)$.

解： $X=x^4+4xy^3-1$， $Y=6x^2y^2-5y^4+1$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=12xy^2=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

故积分与路径无关,取折线段 $\overline{AO}, \overline{OB}$ 为积分路径，

$$\int_L (x^4+4xy^3-1)dx+(6x^2y^2-5y^4+1)dy$$

$$=\int_{\overline{AO}}(x^4+4xy^3-1)dx+(6x^2y^2-5y^4+1)dy$$

$$+\int_{\overline{OB}}(x^4+4xy^3-1)dx+(6x^2y^2-5y^4+1)dy$$

$$=\int_3^0(-5y^4+1)dy+\int_0^3(x^4-1)dx=\frac{1428}{5}$$

6. 计算 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, L 为

(1)椭圆 $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，取正向.

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，取正向.

解：$X=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $Y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

（1）$\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\xlongequal[\text{公式}]{\text{由格林}}\iint_D 0dxdy=0$

（2）原点在 L 内，故不满足格林公式，圆 $\Gamma: x^2+y^2=1$（逆时针方向）含在椭圆

$L:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 内，记由 L 和 Γ 围成的有界闭区域为 Ω，

$\Omega:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\le 1,\ x^2+y^2\ge 1$，记 $P(x,y)=-y$，$Q(x,y)=x$，

X,Y 在 Ω 内满足格林公式，P,Q 在 Γ 围成的闭区域 D 内满足格林公式，

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L+\Gamma^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_{\Gamma^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{由格林}}\iint_\Omega 0dxdy+\oint_\Gamma\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_\Gamma xdy-ydx$$

$$\xlongequal[\text{公式}]{\text{由格林}}2\iint_D dxdy=2\cdot(\text{单位圆的面积})=2\pi$$

7. 判断下列表达式是否为全微分，若是全微分，求出其原函数.

(1) $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$

(2) $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$

(3) $\dfrac{-1}{x^2+y^2}(ydx-xdy),\ x>0$

解：（1） $X=5x^4+3xy^2-y^3$， $Y=3x^2y-3xy^2+y^3$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

是全微分，

$$(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$$

$$=5x^4dx+(3xy^2dx+3x^2ydy)-(y^3dx+3xy^2dy)+y^2dy$$

$$=d(x^5)+d(\frac{3}{2}x^2y^2)+d(-xy^3)+d(\frac{y^3}{3})$$

$$=d(x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{y^3}{3})$$

故原函数 $u(x,y)=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{y^3}{3}+C$

（2）$X=2x\cos y-y^2\sin x$， $Y=2y\cos x-x^2\sin y$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

是全微分，

$$(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$

$$=(2x\cos ydx-x^2\sin ydy)+(-y^2\sin xdx+2y\cos xdy)$$

$$=d(x^2\cos y)+d(y^2\cos x)$$

$$=d(x^2\cos y+y^2\cos x)$$

故原函数 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C$

（3）$X=\frac{-y}{x^2+y^2}$， $Y=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

是全微分，

$$\frac{-1}{x^2+y^2}(ydx-xdy)=d(\arctan\frac{y}{x})$$

$$u(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+C$$

8. 判断下列方程是否为全微分方程，若是全微分方程，求出其通解.

(1) $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$

(2) $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$

(3) $\sin(x+y)dx+[x\cos(x+y)](dx+dy)=0$

(4) $(xe^{by}+e^{ax})\dfrac{dy}{dx}+(e^{by}+ye^{ax})=0\quad(a,b\text{为常数})$

解：(1) $X=3x^2+6xy^2$， $Y=6x^2y+4y^2$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=12xy=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

是全微分方程，

$$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy$$

$$=3x^2dx+(6xy^2dx+6x^2ydy)+4y^2dy$$

$$=dx^3+d(3x^2y^2)+d(\frac{4}{3}y^3)$$

$$=d(x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3)=0$$

方程的通解为： $x^3+3x^2y^2+\dfrac{4}{3}y^3=C$

（2） $X=yx^{y-1}$， $Y=x^y\ln x$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=\frac{\partial Y}{\partial x}\quad(x>0)$$

是全微分方程，

$$yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=d(x^y)=0$$

或 $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=\int_0^y x^y\ln xdy=x^y\Big|_0^y=x^y-1$

方程的通解为： $x^y-1=C_1$， 即 $x^y=C$

（3） $X=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$， $Y=x\cos(x+y)$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)=\frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}[\sin(x+y)+x\cos(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy$$
$$=\int_0^x[\sin x+x\cos x]dx+\int_0^y x\cos(x+y)dy$$
$$=x\sin x\Big|_0^x+x\sin(x+y)\Big|_0^y$$
$$=x\sin x+x\sin(x+y)-x\sin x$$
$$=x\sin(x+y)$$

或 $\sin(x+y)dx+[x\cos(x+y)](dx+dy)$

$$=\sin(x+y)dx+[x\cos(x+y)]d(x+y)$$
$$=d[x\sin(x+y)]$$

方程的通解为： $x\sin(x+y)=C$

(4) $X=e^{by}+ye^{ax}$， $Y=xe^{by}+e^{ax}$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=be^{by}+e^{ax},\quad \frac{\partial Y}{\partial x}=e^{by}+ae^{ax}$$

由 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$， 即 $be^{by}+e^{ax}=e^{by}+ae^{ax}$

推得 $a=b=1$，或 $a=b=0$

当 $a=b=1$ 时，

$$(xe^y+e^x)dy+(e^y+ye^x)dx$$
$$=(xe^ydy+e^ydx)+(e^xdy+ye^xdx)$$
$$=d(xe^y)+d(ye^x)=d(xe^y+ye^x)$$

方程的通解为： $xe^y+ye^x=C$

当 $a=b=0$ 时，

$$(x+1)dy+(1+y)dx=(xdy+ydx)+dx+dy$$
$$=d(xy)+dx+dy=d(xy+x+y)$$

方程的通解为： $xy+x+y=C$