# 一、主要内容

- （一）曲线积分与曲面积分
- （二）各种积分之间的联系

# （一）曲线积分与曲面积分


上页 下页 返回

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">曲线积分</th></tr>
<tr><td></td><td>对弧长的曲线积分</td><td>对坐标的曲线积分</td></tr>
<tr><td>定义</td><td>$\int_L f(x,y,z)dl=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i\zeta_i)\Delta L_i$</td><td>$\int_L X(x,y,z)dx$<br>$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$</td></tr>
<tr><td>联系</td><td colspan="2">$\int_L Xdx+Ydy+Zdz=\int_L (X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)dl$</td></tr>
<tr><td>计算</td><td>$\int_L f(x,y,z)dl=$<br>$\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$<br>一代二换三定限 (α < β)</td><td>$\int_L Xdx$<br>$=\int_\alpha^\beta X(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$<br>一代二换三定限 (与方向有关)</td></tr>
</table>

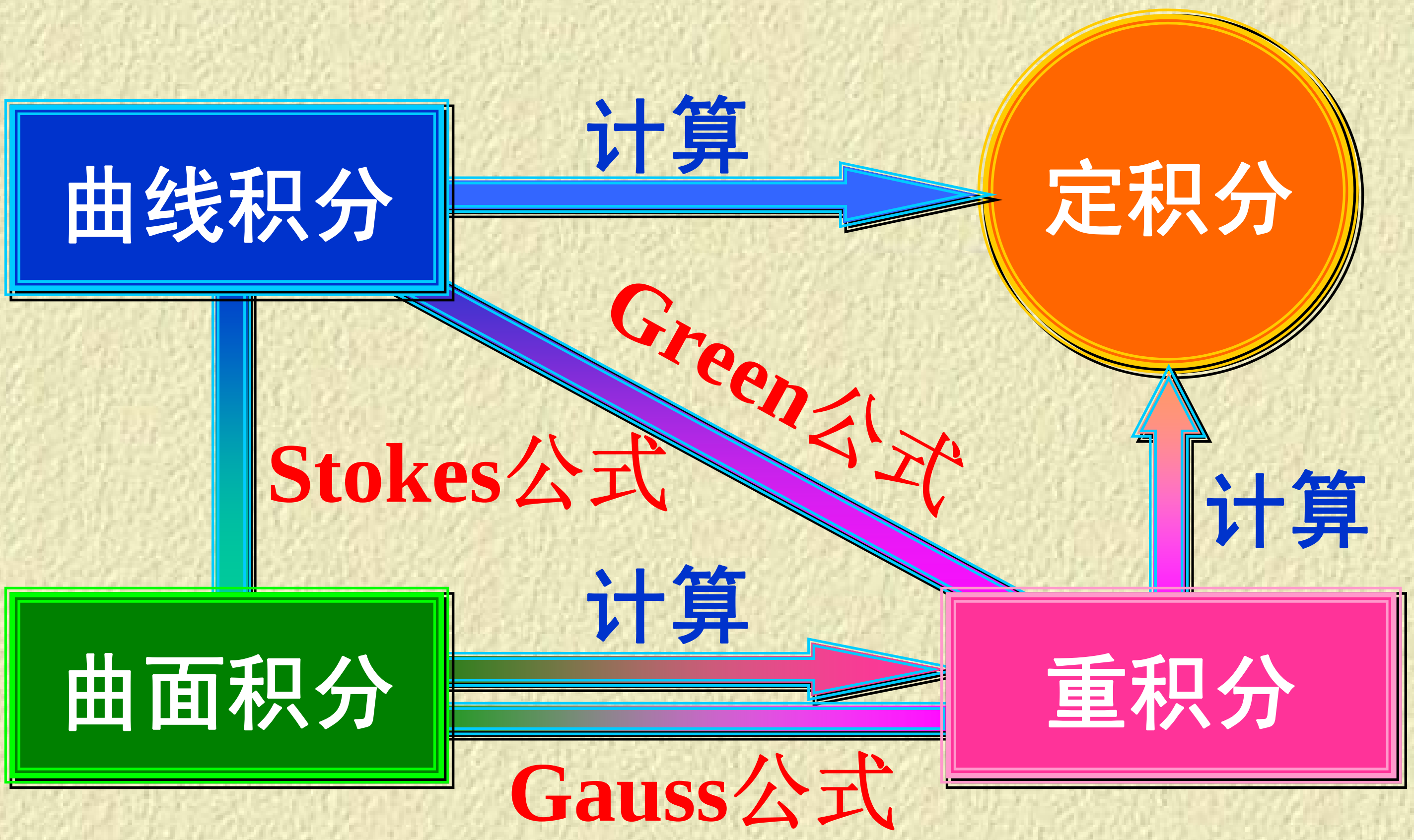
上页 下页 返回

| | 与路径无关的三个等价命题 |
|---|---|
| 条件 | 在单连通域 $D$ 内 $X(x,y),Y(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下四个命题成立. |
| 等价命题 | (1) $\int_L Xdx+Ydy$ 与路径无关<br>$(\oint_C Xdx+Ydy=0$, 封闭曲线 $C\subset D)$<br>(2) $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$<br>(3) 在 $D$ 内存在 $U(x,y)$ 使 $du=Xdx+Ydy$ |

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">曲 面 积 分</td></tr>
<tr><td></td><td>对面积的曲面积分</td><td>对坐标的曲面积分</td></tr>
<tr><td>定义</td><td>$\iint\limits_{S} f(x,y,z)ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$</td><td>$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\sigma_{i,xy}$</td></tr>
<tr><td>联系</td><td colspan="2">$\iint\limits_{S} Xdydz+Ydzdx+Zdxdy=\iint\limits_{S}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)dS$</td></tr>
<tr><td>计算</td><td>$\iint\limits_{S} f(x,y,z)ds$<br>$=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$<br>一代,二换,三投(与侧无关)</td><td>$\iint\limits_{S} Z(x,y,z)dxdy$<br>$=\pm\iint\limits_{D_{xy}} Z[x,y,z(x,y)]dxdy$<br>一代,二投,三定向 (与侧有关)</td></tr>
</table>

上页 下页 返回

## （二）各种积分之间的联系




上页 下页 返回

## 二、例题

例 1　计算 $I=\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$,

其中 $L$ 为由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的曲线 $y=1-\cos\frac{\pi}{2}x$.

思路:

$$I=\int_L Xdx+Ydy$$

$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$：非闭 → $I=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Xdx+Ydy$；闭合 → $I=\int_L Xdx+Ydy=0$

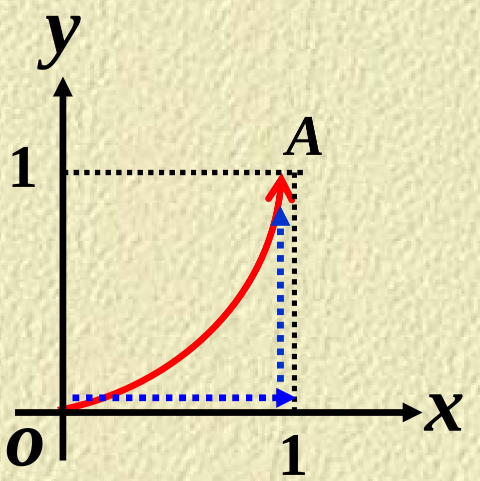
$\frac{\partial X}{\partial y}\neq\frac{\partial Y}{\partial x}$：闭合 → $I=\iint_D (\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy$；非闭 → 补充曲线或直接算

上页　下页　返回

解　由 $I=\int_L(x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$$




即 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$,

故原式 $=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\dfrac{23}{15}.$

上页　下页　返回

例 2 （99，5）求

$$I=\int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy,$$

其中 $a, b$ 为正的常数，$L$为从点$(2a,0)$沿曲线

$y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点$O(0,0)$的弧.

分析：本题如果直接计算是很困难的.有两种办法可简化计算：一是补线再利用格林公式；二是将原积分分为两部分，使其一部分与路径无关.

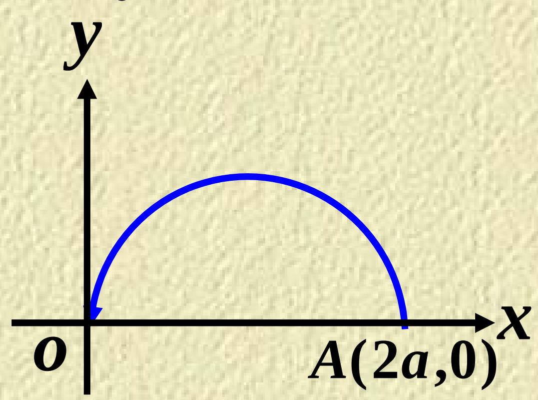
解1 补线段$\overline{OA}$，则

$$I=\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$-\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\iint_D(e^x\cos y-a-e^x\cos y+b)dxdy-\int_0^{2a}(-bx)dx$$

其中$D$为$L$和线段$\overline{OA}$围成的半圆域




$$I=\iint_D(b-a)dxdy+2a^2b$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}(b-a)+2a^2b=(\frac{\pi}{2}+2)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

上页 下页 返回

例 2 （99，5）求

$$I=\int_L (e^x \sin y-b(x+y))dx+(e^x \cos y-ax)dy,$$

其中 $a,b$ 为正的常数，$L$ 为从点 $(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

---

解2 将原线积分分为两部分

$$I=\int_L (e^x \sin y-b(x+y))dx+(e^x \cos y-ax)dy$$

$$=\int_L (e^x \sin y dx+e^x \cos y dy)$$

$$-\int_L [b(x+y)dx+axdy]$$

上页 下页 返回

而 $\int_L (e^x \sin y dx + e^x \cos y dy) = \int_L d(e^x \sin y)$

$$= e^x \sin y \Big|_{(2a,0)}^{(0,0)} = 0$$

$L$的参数方程为 $\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

则 $\int_L [b(x+y)dx + axdy]$

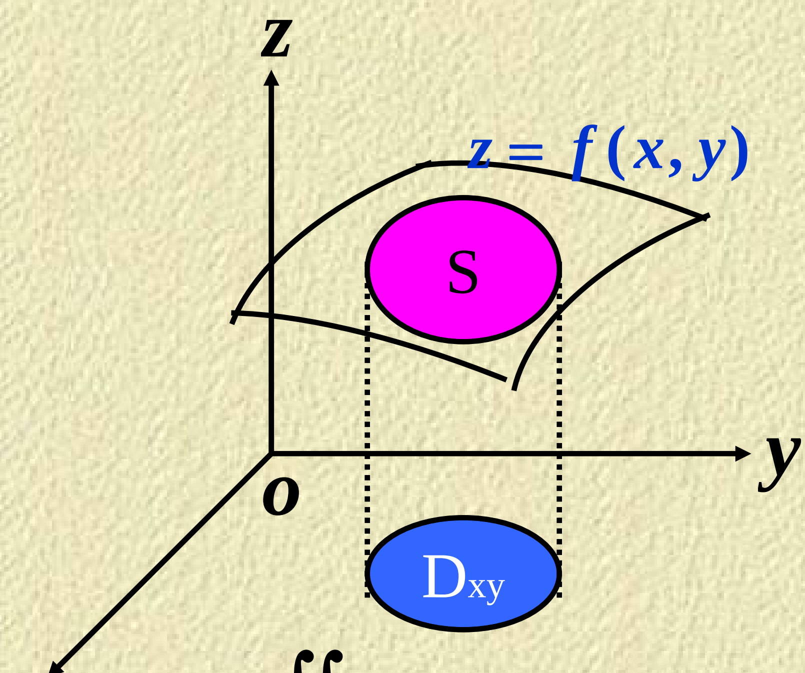
$$= \int_0^{\pi} (-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t$$

$$+ a^3\cos t + a^3\cos^2 t)dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3$$

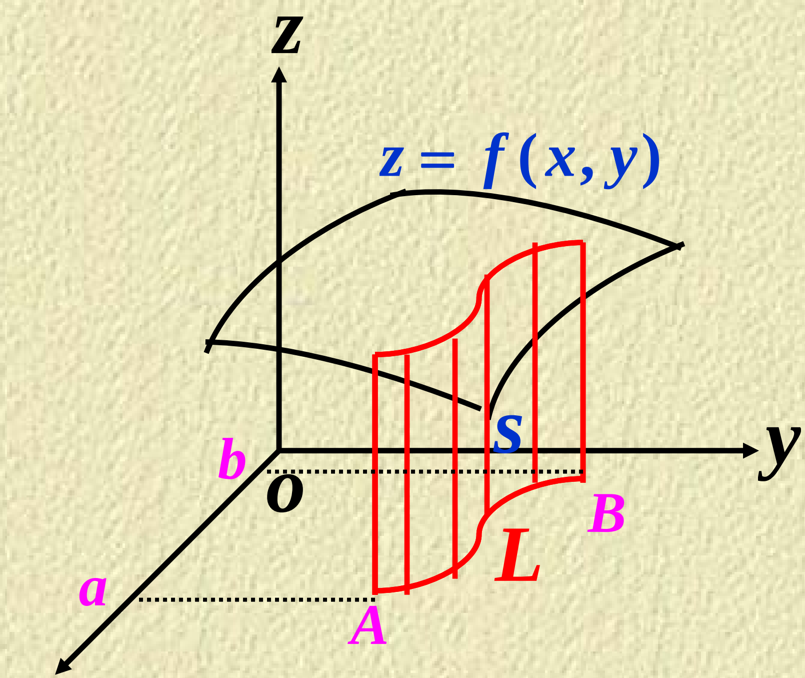
从而 $I = (\frac{\pi}{2} + 2)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$

# 曲面面积的计算法




$$S=\iint_S dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$




$$S=\int_{L(A,B)} f(x,y)ds$$

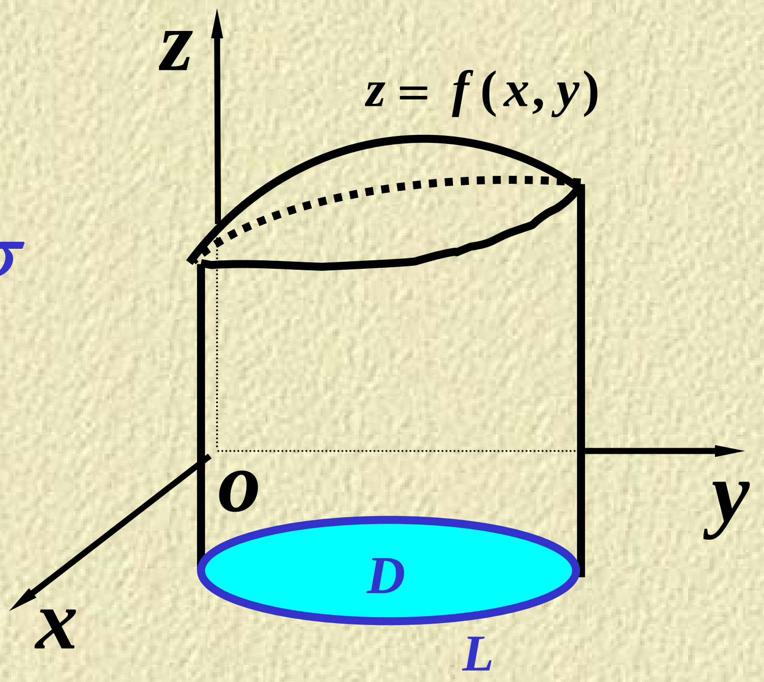
$$=\int_a^b f(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$$

## 曲顶柱体的表面积

如图曲顶柱体,

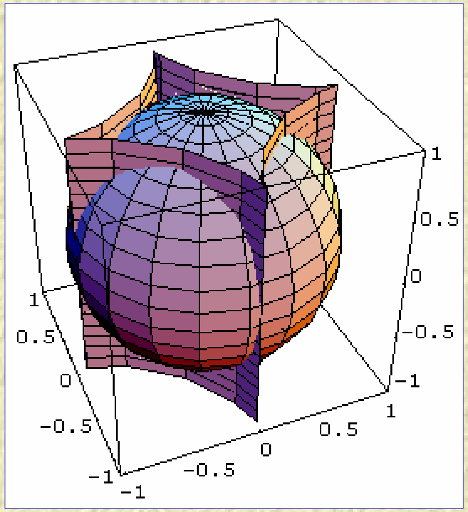
$$S=\iint_D \left(1+\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\right)d\sigma$$

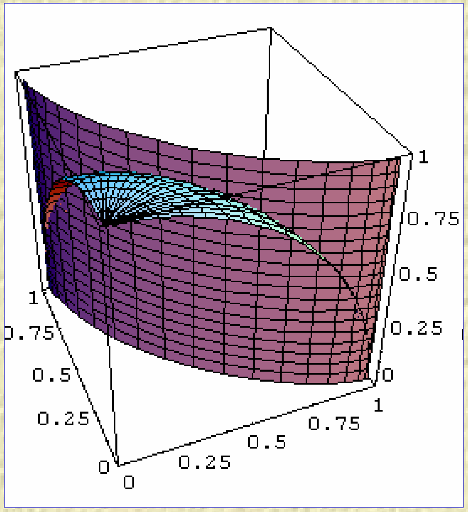
$$+\oint_L f(x,y)ds$$




上页 下页 返回

**例 3** 求柱面$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$在球面$x^2+y^2+z^2=1$内的侧面积.




**解** 由对称性

$$S=8\int_L z\,ds$$

$$=\int_L \sqrt{1-x^2-y^2}\,ds$$

$\because$ $L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, 参数方程为$\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$

上页 下页 返回

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt = 3\sin t\cos t dt,$$

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^6 t - \sin^6 t}\, 3\sin t\cos t dt$$

$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin^2 t\cos^2 t}\sin t\cos t dt$$

$$= 24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

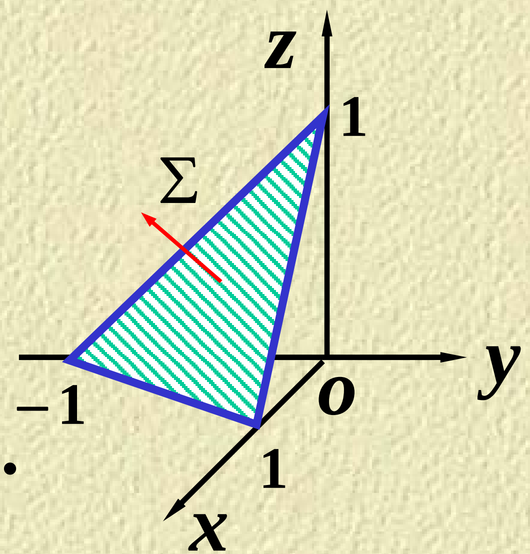
上页 下页 返回

例 4　计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx$$

$+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，$\Sigma$ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解　利用两类曲面积分之间的关系




$\because \Sigma$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$,

$$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$I=\iint_{\Sigma}\{\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+x]$$

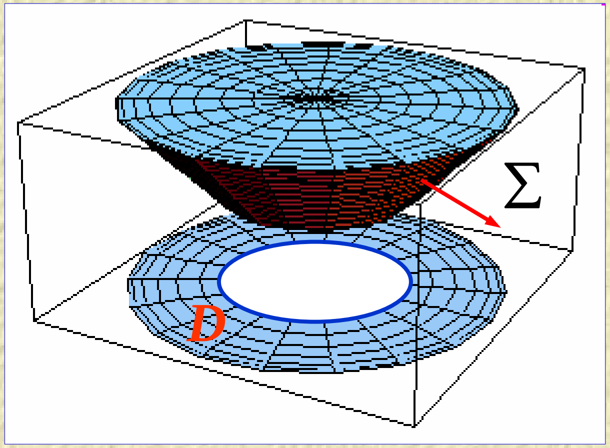
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}[2f(x,y,z)+y]+\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+z]\}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}1\cdot\sqrt{3}dxdy=\frac{1}{2}.$$

例 5　计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\,dydz - x\,dzdx + z^2 dxdy$，其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

**解**　利用向量点积法




$$\because\ z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$I = \iint_{\Sigma} \{y, -x, z^2\} \cdot \left\{ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right\} dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} z^2 dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) dxdy \qquad [D_{xy}: \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4]$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cdot r dr \quad = -\frac{15}{2}\pi.$$

上页 下页 返回

例 6（87，10）　计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕$y$轴旋转一周

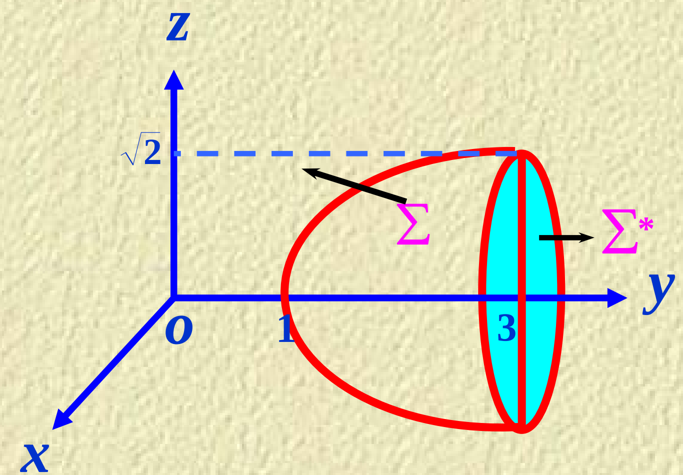
所成的曲面, 它的法向量与$y$轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

**解**　$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转面方程为

$$y-1=z^2+x^2$$　（如下图）

上页　下页　返回

欲求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)x\,dydz+2(1-y^2)dzdx-4yz\,dxdy$




且有 $I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(8y+1-4y-4y)dv=\iiint\limits_{\Omega}dv$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}dxdz\int_{1+z^2+x^2}^{3}dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{1+\rho^2}^{3}dy$$

上页 下页 返回

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho - \rho^3)d\rho = 2\pi,$$

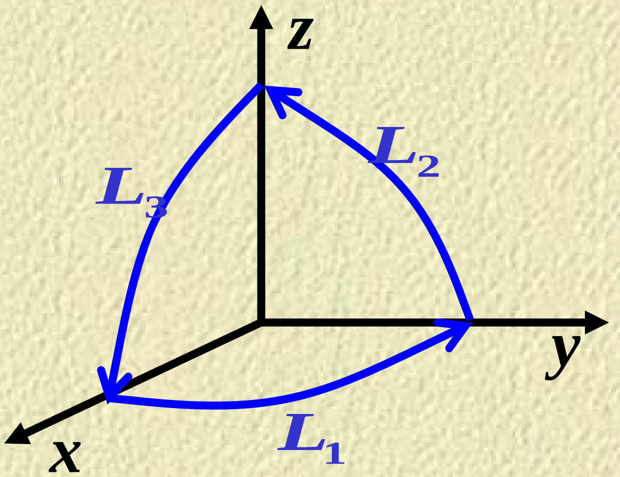
$$\iint\limits_{\Sigma^*} = 2\iint\limits_{\Sigma^*}(1 - 3^2)dzdx = -32\pi,$$

故$I = 2\pi - (-32\pi) = 34\pi.$

例 7（P187 习题 9-2，第 4 题） 计算

$$\oint_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

其中 $L$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限与三坐标面的交线，其方向是从点 $(1,0,0)$ 出发，经过点 $(0,1,0)$ 再回到点 $(1,0,0)$.




解

$$L_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z = 0 \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

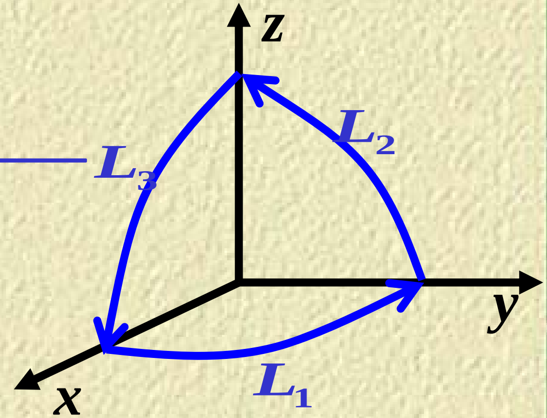
$$L_3: \begin{cases} z^2 + x^2 = 1 \\ z \ge 0, \quad x \ge 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

上页 下页 返回

例 7（P187 习题 9-2，第 4 题）　计算

$$\oint_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

其中 $L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限与三坐标面的交线，其方向是从点 $(1,0,0)$ 出发，经过点 $(0,1,0)$ 再回到点 $(1,0,0)$.




---

$$\therefore \oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$$

$$= 3\int_{L_1} (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

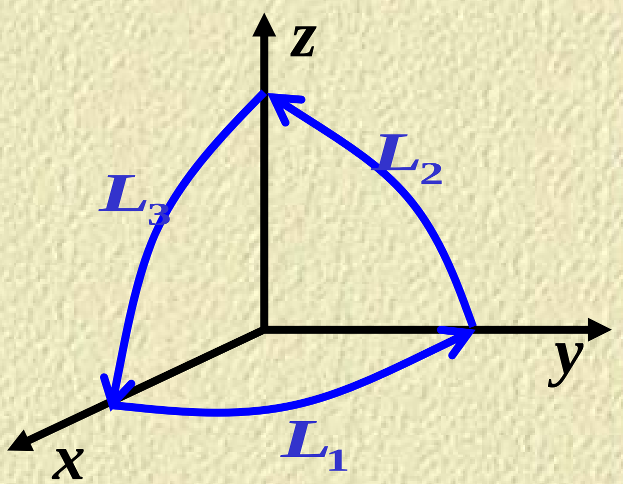
$$\text{或} = 3\oint_L (x^2-y^2)dz = -4$$

上页　下页　返回

修改例 7（P187 习题 9-2，第 4 题）　计算

$$\oint_L (x^2 - z^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

其中 $L$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限与三坐标面的交线，其方向是从点 $(1,0,0)$ 出发，经过点 $(0,1,0)$ 再回到点 $(1,0,0)$.




**解**

$$L_1:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z = 0 \end{cases}$$

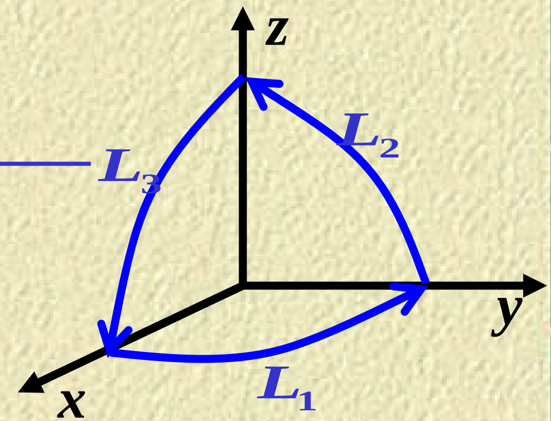
$$L_2:\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad x = 0 \end{cases}$$

$$L_3:\begin{cases} z^2 + x^2 = 1 \\ z \ge 0, \quad x \ge 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

修改例 7（P187 习题 9-2，第 4 题）　计算

$$\oint_L (x^2 - z^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

其中 $L$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限与三坐标面的交线，其方向是从点 $(1,0,0)$ 出发，经过点 $(0,1,0)$ 再回到点 $(1,0,0)$.




---

$$\therefore \oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$$

$$= 3\int_{L_1} (x^2 - z^2)dy + (x^2 - y^2)dz = 2$$

$$\text{或} = 2\oint_L (x^2 - y^2)dz = 0$$

?

上页　下页　返回

# 2004-2005 第二学期重考试题

二. 3.　计算第一类曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS,$$

其中 $\Sigma$ 为半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

六.　计算第二类曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$ 其中 $\Sigma$ 为

上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\quad(z\geq 0)$ 外侧.

# 2004-2005 第二学期重考试题

七. 设有曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}$，试在以下两种情况下求积分 I 的值：

(1) $L$ 为椭圆 $x^2+4y^2=a^2$ 的逆时针方向，其中 $a$ 为任意正实数；

(2) $L$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 的逆时针方向

解

**作业：**

P227： 12至19（共8题）

**此8题本周三不交，下周三交.**