2007 级《微积分 A》第一学期期末

参考答案

2008.1.17

一、1 -3;　　2 $y''-y'-2y=0$；

3 $\dfrac{1}{2}\arcsin^2 x+x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$（缺少 C 扣 1 分）；

4 $\dfrac{1}{2}$；　　5 $a=-1, b=0, c=-\dfrac{1}{2}$（每空 1 分）；　　6 $\dfrac{\pi}{8}$；

7 $y=\dfrac{1}{2}x^4+Cx^2$（缺少“$y=$”扣 1 分；写对通解公式扣 2 分）；

8 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$；　　9 $[1,+\infty)$, 或 $(1,+\infty)$;　　10 $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

二、 解： 方程两端对 x 求导： $y'\ln y+y'=1-y'$ ……………**1 分**

$$y'=\frac{1}{\ln y+2},$$ ……………**3 分**

上式两端再对 x 求导； $y''\ln y+y'\dfrac{y'}{y}+y''=-y''$ ……………**2 分**

$$y''=\frac{-y'^2}{y(\ln y+2)}=\frac{-1}{(\ln y+2)^3}$$ ……………**6 分**

当 $x=1, y=1$ 时， $y'=\dfrac{1}{2}$;　$y''=-\dfrac{1}{8}<0$ ……………**7 分**

故曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近是向上凸的曲线. ……………**8 分**

三、证明： 令 $x=\dfrac{\pi}{2}-u,\quad dx=-du$，有 ……………**2 分**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{f(\cos u)}{f(\sin u)+f(\cos u)}(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$$ ……………**4 分**

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\cos x)+f(\sin x)}dx$$

$=\frac{\pi}{2}$ ……………**6** 分

$\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}$ ……………**8** 分

四、证明：设 $f(x)=e^x-(1+\frac{x}{2})^2$，则 $f(0)=0,$ ……………**1** 分

$f'(x)=e^x-1-\frac{x}{2},\quad f'(0)=0$ ……………**2** 分

$f''(x)=e^x-\frac{1}{2}>0,\quad (x>0)$ ……………**4** 分

$\therefore f'(x)$ 单调增加，当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>f'(0)=0$ …………**6** 分

$\therefore f(x)$ 单调增加，当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$，

所以，当 $x>0$ 时，有 $e^x>(1+\frac{x}{2})^2.$ ……………**8** 分

（注：本题也可以用泰勒公式，但要注意余项为拉格朗日余项。）

五、解：（1）切点 $A(x_0,y_0)=A(x_0,\sqrt{x_0}),$ ……………**1** 分

切线方程为：$y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

即 $y=\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2}.$ ……………**4** 分

(2) $S=\int_2^6(\frac{x}{2\sqrt{x_0}}+\frac{\sqrt{x_0}}{2})dx-\int_2^6\sqrt{x}dx$

$=\frac{8}{\sqrt{x_0}}+2\sqrt{x_0}-\frac{4(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}$ ……………**6** 分

$\frac{dS}{dx_0}=\frac{x_0-4}{x_0^{3/2}}$；令 $\frac{dS}{dx_0}=0,$ 得唯一驻点 $x_0=4$，又 ……………**8** 分

当 $x<4$ 时，$\dfrac{dS}{dx_0}<0$；当 $x>4$ 时，$\dfrac{dS}{dx_0}>0$.

所以 $x_0=4$ 是 S 的极小值点，又驻点唯一，所以 $x_0=4$ 是 S 的最小值点.

即 $x_0=4$ 时 S 取得最小值，$S_{最小}=8-\dfrac{4(3\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}$. ……………**10** 分

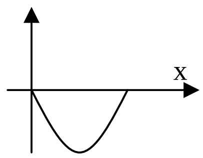
六、（1）由题意，知：$f'(x)=ax-6,\quad f'(1)=0,\quad f(1)=-3.$ ……………**2** 分

所以，有 $a\times1-6=0,\Rightarrow a=6,$ 又 ……………**3** 分

$f'(x)=6x-6,$，积分得 $f(x)=3x^2-6x+C.$

由 $f(1)=-3,\Rightarrow C=0$，所以 $f(x)=3x^2-6x.$ ……………**5** 分

（2）$f(x)$ 的草图如左图，

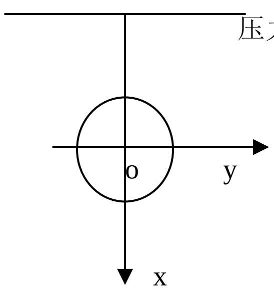


$V=\int_0^2\pi(3x^2-6x)^2dx$ （或 $V=2\int_0^1\pi(3x^2-6x)^2dx$ ）……**8** 分

$=\dfrac{48\pi}{5}.$ ……………**10** 分

七、解：建立如图所示坐标系，则圆方程为：$x^2+y^2=R^2$. ……………**2** 分

取 x 为积分变量，$x\in[-R,R]$.



压力微元为：$dP=g(2R+x)\times2ydx=2g(2R+x)\sqrt{R^2-x^2}dx$

……………**4** 分

$P=\int_{-R}^{R}2g(2R+x)\sqrt{R^2-x^2}dx$ ……………**6** 分

$=2\pi gR^3.$ ……………**8** 分

（本题压力微元及圆方程与所建坐标系有关）.

八、解：$f(x)=xe^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt=xe^x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$

……………**1** 分

上式两端对 x 求导，得：$f'(x)=(x+1)e^x+\int_0^x f(t)dt$ ……………**2** 分

再对 x 求导得：$f''(x)=(x+2)e^x+f(x)$， …………….3 分

则 $f(x)$ 满足初值问题：$\begin{cases} f''(x)-f(x)=(x+2)e^x \\ f(0)=0,\quad f'(0)=1 \end{cases}$ …………….5 分

对应齐次方程的通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$

设非齐次方程的特解为：$\bar{y}=x(ax+b)e^x$ …………….6 分

代入原方程，得：$2a+4ax+2b=x+2$

得：$a=\dfrac{1}{4},\quad b=\dfrac{3}{4},\quad \bar{y}=\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$ …………….8 分

通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x$

由初始条件，得：$C_1=\dfrac{1}{8},\quad C_2=-\dfrac{1}{8}.$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{8}e^x-\dfrac{1}{8}e^{-x}+\dfrac{1}{4}(x^2+3x)e^x.$ …………….10 分

九、证明：由积分中值定理，知存在 $\eta\in(0,1)$ 使得

$$f(1)=\int_0^1 xf(x)dx=\eta f(\eta),$$ …………….2 分

构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则有 $F(\eta)=F(1),$ …………….4 分

这样 $F(x)$在$[\eta,1]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理，至少存在一点

$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1),$ 使得 $F'(\xi)=0,$ 又

$F'(x)=f(x)+xf'(x),$

所以有 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，结论成立. …………….8 分