2008-2009 学年《微积分A》第二学期期末考试

参考答案及评分标准

2009 年 6 月 26 日

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{\sqrt{2}}=\dfrac{z+1}{-1}$　　2. $12x-4y+3z-12=0$;　$\dfrac{12}{13}$;

3. $gradu=\{x^{y-1}yz, x^y z\ln x, x^y\}$;

$div(gradu)=y(y-1)x^{y-2}z+x^y z\ln^2 x$;

4. 2π;　　5. πR^3;

6. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

7. $p>\dfrac{1}{2}$;　$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$.

二、　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0$　　得驻点为 $(0,0),(1,1)$　　……… 2 分

又　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x$,　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3$,　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$　　……… 4 分

在点 $(0,0)$ 处：　$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$,　$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3$,　$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$B^2-AC=9>0$, 所以 $(0,0)$ 点不是极值点.　　……… 6 分

在点 $(1,1)$ 处：　$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6$,　$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3$,　$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6$

$B^2-AC=-27<0$, 且 $A=6>0$, 所以 $(1,1)$ 点是极小值点，极小值为：　$z_{极小}=-1$.　　……… 8 分

三、(1) 圆锥面与抛物面的交线为：$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2-x^2-y^2 \end{cases}$，即$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Ω在xoy面的投影区域$D: x^2+y^2\le 1.$ ……… 2 分

$S_1: z=2-x^2-y^2, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$

$S_2: z=\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}.$

$$S=\iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy+\iint_D \sqrt{2}dxdy$$ ……… 4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho+\sqrt{2}\pi$$ ……… 6 分

$$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\sqrt{2}\pi.$$ ……… 7 分

(2) $J_z=\iiint_V \mu(x^2+y^2)dV \quad (\mu=1)$ ……… 9 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho\int_\rho^{2-\rho^2}dz$$ (柱坐标系) ……… 11 分

$$=\frac{4}{15}\pi.$$ ……… 12 分

四、记 $X=3xy^2-y^m,\quad Y=3x^n y-3xy^2$

由题意知：$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$ ……… 2 分

$\Rightarrow \quad 3nx^{n-1}y-3y^2=6xy-my^{m-1}$

$\Rightarrow \quad m=3, n=2$ ……… 4 分

由题意知曲线积分与路径无关，且路径的起点、终点坐标分别为：

$(0,0),(\pi a,2a)$，选择折线路径：$(0,0)\to(\pi a,0)\to(\pi a,2a)$，则

$$I=\int_0^{\pi a}0dx+\int_0^{2a}[3(\pi a)^2 y-3\pi a y^2]dy$$ ……… 6 分

$= 2\pi a^4(3\pi - 4)$ ……… 8 分

（也可求出原函数后用牛顿–莱布尼茨公式或选择其他积分路径）

五、 $f(x) = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x})$ ……… 1 分

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{1+(x-3)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}]$ ……… 3 分

$= \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}]$ ……… 5 分

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{3^{n+1}})(x-3)^n$ ……… 6 分

收敛域为：$2 < x < 4.$ ……… 8 分

六、添加辅助面 $S: z = 0, x^2 + y^2 \le R^2$, 取下侧， ……… 2 分

$I = \frac{1}{R^2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2 z + 1)dxdy + y^2 xdydz + z^2 ydzdx$ ……… 3 分

$= \frac{1}{R^2}(\iint\limits_{\Sigma+S} - \iint\limits_{S})$ （利用高斯公式）

$= \frac{1}{R^2}[-\iiint\limits_{V}(y^2+z^2+x^2)dxdydz + \iint\limits_{D:x^2+y^2\le R^2}dxdy]$ ……… 5 分

$= -\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\, dr + \pi$ （由球坐标）…. 8 分

$= -\frac{2\pi}{5}R^3 + \pi.$ ……… 10 分

七、 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$，所以收敛半径 $R = 1$. 又当 $x = \pm 1$ 时，级数发散，

所以幂级数的收敛域为：$D = (-1,1).$ ……… 3 分

记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n$ … 4 分

$$=-\frac{x}{1+x}+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}dx \qquad \ldots\ldots.\ 7\text{ 分}$$

$$=-\frac{x}{1+x}+\int_0^x -\frac{1}{1+x}dx \qquad \ldots\ldots\ 8\text{ 分}$$

$$=-\frac{x}{1+x}-\ln(1+x) \qquad x\in(-1,1) \qquad \ldots\ldots\ 10\text{ 分}$$

八、将 $f(x)$ 进行偶延拓，由狄立克莱收敛定理知:

$$S(x)=\begin{cases}\pi+x & x\in(0,\pi]\\ \pi-x & x\in[-\pi,0]\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ 2\text{ 分}$$

由和函数的周期性，当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时， $x-2\pi\in[-\pi,0]$

$$S(x)=S(x-2\pi)=3\pi-x \qquad \ldots\ldots\ 3\text{ 分}$$

又 $-5+2\pi\in(0,\pi)$, $\quad\therefore\quad S(-5)=S(-5+2\pi)=3\pi-5.$ ……… 5 分

$$b_n=0, \qquad n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi+x)dx=3\pi, \qquad \ldots\ldots\ 6\text{ 分}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi+x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n=2k,k=1,2,\cdots\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n=2k-1,k=1,2,\cdots\end{cases} \qquad \ldots\ldots\ 8\text{ 分}$$

九、由球坐标与直角坐标的关系，有

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi \qquad \ldots\ldots\ 2\text{ 分}$$

（1） $u=f(x,y,z)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)$……. 3 分

（2）令 $\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}=t,\ \Rightarrow\quad f'_x=tx,\quad f'_y=ty,\quad f'_z=tz.$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=f'_x\cdot x'_\theta+f'_y\cdot y'_\theta+f'_z\cdot z'_\theta$$

$$= f_x' \cdot r\sin\varphi(-\sin\theta) + f_y' \cdot r\sin\varphi\cos\theta + f_z' \cdot 0$$ …….. 4 分

$$= tx \cdot r\sin\varphi(-\sin\theta) + ty \cdot r\sin\varphi\cos\theta$$

$$= tr^2\sin^2\varphi(-\sin\theta)\cos\theta + tr^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$

$$=0$$ ……… 5 分

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = f_x' \cdot x_\varphi' + f_y' \cdot y_\varphi' + f_z' \cdot z_\varphi'$$

$$= f_x' \cdot r\cos\varphi\cos\theta + f_y' \cdot r\cos\varphi\sin\theta - f_z' \cdot r\sin\varphi$$ …… 6 分

$$= tx \cdot r\cos\varphi\cos\theta + ty \cdot r\cos\varphi\sin\theta - tz \cdot r\sin\varphi$$

$$= tr^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + tr^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - tr^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= tr^2\sin\varphi\cos\varphi - tr^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=0$$ ……… 7 分

由此知u与φ，θ无关，仅与r有关，即u仅为r的函数.

……… 8 分