习题 2.4(P118)

1．求下列函数的高阶导数.

(1) $y=e^{-\sin x}$，求 y''.

解： $y'=-\cos xe^{-\sin x}$， $y''=\sin xe^{-\sin x}+\cos^2 xe^{-\sin x}=e^{-\sin x}(\sin x+\cos^2 x)$

(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y''.

解： $y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$， $y''=-\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{(\sqrt{x^2+1})^3}=\dfrac{-x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$

(3) $y=e^{2x}\cdot\sin(2x+1)$，求 y''.

解： $y'=2e^{2x}\cdot\sin(2x+1)+2e^{2x}\cos(2x+1)=2e^{2x}[\sin(2x+1)+\cos(2x+1)]$

$$y''=4e^{2x}[\sin(2x+1)+\cos(2x+1)]+2e^{2x}[2\cos(2x+1)-2\sin(2x+1)]$$

$$=8e^{2x}\cdot\cos(2x+1)$$

(4) $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{2}\arctan x$，求 y''.

解： $y=\dfrac{1}{4}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]-\dfrac{1}{2}\arctan x$

$$y'=\frac{1}{4}[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}]-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2})$$

$$y''=\frac{1}{2}[\frac{2x}{(1-x^2)^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}]=\frac{2x(1+x^4)}{(1-x^4)^2}$$

(5) $y=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$，求 $y^{(n)}$.

解： $y=\ln(a+bx)-\ln(a-bx)$，由 $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ 及复合函数求导法得：

$$y^{(n)}=b^n(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(a+bx)^n}-(-b)^n(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(a-bx)^n}$$

$$=b^n(n-1)!\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(a+bx)^n}+\frac{1}{(a-bx)^n}\right]$$

(6) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

解：$y=\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$

由 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$ 及复合函数求导法得：$y^{(n)}=-2^n\cos(2x+\dfrac{n\pi}{2})$

(7) $y=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$，求 $y^{(n)}$.

解：$y=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}$，

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+3)^{n+1}}+(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+3)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

(8) $y=e^{ax}\sin bx$，求 $y^{(n)}$.

解：设 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，则 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$，则

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$$

$$=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$$

$$=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin bx+\sin\varphi\cos bx)=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)$$

同理可得：

$$y^{(n)}=e^{ax}(\sqrt{a^2+b^2})^n\sin(bx+n\varphi)\ \ y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\arctan\frac{b}{a})$$

(9) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(n)}$.

解：$y=\dfrac{2}{1+x}-1$，$y^{(n)}=2\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}\quad(n\geq 1)$

由 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ 及复合函数求导法得：$y^{(n)}=(-1)^n\cdot 2\cdot\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

(10) $y=(x^2+x+1)\sin x$，求 $y^{(15)}$.

解：令 $u=\sin x$， $v=x^2+x+1$，则 $u^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$， $v'=2x+1$， $v''=2$，

$v^{(n)}=0\ \ (n\geq 3)$，由莱布尼兹公式得：

$$y^{(15)}=u^{(15)}v+C_{15}^{1}u^{(14)}v'+C_{15}^{2}u^{(13)}v''$$

$$=(x^2+x+1)(-\cos x)+15(-\sin x)(2x+1)+15\times 14\cos x$$

$$=(209-x^2-x)\cos x-15(2x+1)\sin x$$

3．设函数 $f(x)$ 有任意阶导数，且 $f'(x)=f^2(x)$，求 $f^{(n)}(x)$.

解： $f''(x)=2f(x)f'(x)=2f^3(x)$， $f'''(x)=3!f^2(x)f'(x)=3!f^4(x)$

………………………………， $f^{(n)}(x)=n!f^{n+1}(x)$

4． 求下列隐函数的二阶导数.

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$

解：原式化为：$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$，

两端同时对 x 求导得：$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2}$

故 $(x-y)y'=x+y$， $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

上式两端再同时对 x 求导：$(1-y')y'+(x-y)y''=1+y'$，

即 $y''=\dfrac{1+(y')^2}{x-y}=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

(4) $xy=e^{x+y}$

解：两端同时对 x 求导得：$y+xy'=e^{x+y}(1+y')$，$y'=\dfrac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$

上式两端再同时对 x 求导：$2y'+xy''=e^{x+y}(1+y')^2+e^{x+y}y''$

故 $y''=\dfrac{e^{x+y}(1+y')^2-2y'}{x-e^{x+y}}=\dfrac{e^{x+y}(x-y)^2-2(e^{x+y}-y)(x-e^{x+y})}{(x-e^{x+y})^3}$

注： 注意到 $xy=e^{x+y}$，故第一次求导后化为 $y+xy'=xy(1+y')$，应更简便，结果应

为 $y''=\dfrac{y(x-y)^2+2y(1-x)(1-y)}{x^2(1-y)^3}$

5．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy-\sin(\pi y^2)=0$ 确定，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{y=1}$.

解：当 $y=1$ 时，$x=0$

两端同时对 x 求导得：$y+xy'-2\pi yy'\cos(\pi y^2)=0 \qquad (1)$

将 $x=0$，$y=1$ 代入(1)得：$1+2\pi y'\big|_{y=1}=0$，故 $y'\big|_{y=1}=-\dfrac{1}{2\pi}$

(1)式两端再同时对 x 求导：

$$2y'+xy''-2\pi[(y')^2\cos(\pi y^2)+yy''\cos(\pi y^2)-2\pi(yy')^2\sin(\pi y^2)]=0 \qquad (2)$$

将 $x=0$，$y=1$，$y'\big|_{y=1}=-\dfrac{1}{2\pi}$ 代入(2)得：$-\dfrac{1}{\pi}-2\pi\left[-\dfrac{1}{4\pi^2}-y''\big|_{y=1}\right]=0$

即 $y''\big|_{y=1}=\dfrac{1}{4\pi^2}$

6. 求 $y=x+x^5$（$x\in(-\infty,+\infty)$）的反函数的二阶导数.

解：设反函数为 $x=x(y)$，则由反函数求导法得

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+5x^4}$$

上式两端再对 y 求导（注意 $x=x(y)$），得

$$x''_{yy}=\left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_y=\left(\frac{1}{1+5x^4}\right)'_x\cdot x'_y=-\frac{20x^3}{(1+5x^4)^2}\cdot\frac{1}{1+5x^4}=-\frac{20x^3}{(1+5x^4)^3}$$

一般结论：$\because x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$，

$$\therefore x''_{yy}=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x\cdot x'_y=-\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2}\cdot\frac{1}{y'_x}=-\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

7．求下列由参数方程所确定的函数的高阶导数.

(3) $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，其中 $f''(t)$ 存在且不为 0，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{tf''(t)}{f''(t)}=t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{f''(t)}$

(4) $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=2te^{2t}\end{cases}$，求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{2e^{2t}(1+2t)}{-e^{-t}}=-2e^{3t}(1+2t)$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-2e^{3t}(5+6t)}{-e^{-t}}=2e^{4t}(5+6t)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}=\frac{2e^{4t}(26+24t)}{-e^{-t}}=-2e^{5t}(26+24t)$$

9．设参数方程$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^x\sin t-y+1=0\end{cases}$确定函数 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

解：当 $t=0$ 时，$x=3$，$y=1$

参数方程两端同时对 t 求导：$x'_t=6t+2$，$e^xx'_t\sin t+e^x\cos t-y'_t=0$，

$y'_t=e^xx'_t\sin t+e^x\cos t=e^x(6t+2)\sin t+e^x\cos t$，$x'_t|_{t=0}=2$，$y'_t|_{t=0}=e^3$

故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{e^x(6t+2)\sin t+e^x\cos t}{6t+2}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{e^3}{2}$

等式$(6t+2)\dfrac{dy}{dx}=e^x(6t+2)\sin t+e^x\cos t$两端分别对$t$求导：

$$6\frac{dy}{dx}+(6t+2)\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^x x_t'(6t+2)\sin t+6e^x\sin t+e^x(6t+2)\cos t+e^x x_t'\cos t-e^x\sin t$$

代入$t=0$， $3e^3+2\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{t=0}=0+0+2e^3+2e^3-0$， $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{t=0}=\dfrac{e^3}{2}$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|_{t=0}}{\left.x_t'\right|_{t=0}}=\frac{\frac{e^3}{2}}{2}=\frac{e^3}{4}$$