一. 填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 已知 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$, 则

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____1____, $|2\vec{a} - 3\vec{b}| =$ ____$2\sqrt{7}$____.

问题: $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 28$.（忘记开平方根了）

2. 点 $P(2, 3, 4)$ 到直线 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{6}$ 的距离 $d =$ ____$\sqrt{\dfrac{2}{5}}$____.

3. 设$u = x^2 y + xy^2 z$，在点$(2,1,0)$处沿方向$\underline{\quad \{4, 4, 2\} \quad}$ u增加得最快，且沿此方向u的变化率为$\underline{\quad 6 \quad}$.

问题：(1)有同学将第一个空填为$grad$，这四个字符没有完整的意义. 若填为$gradu(2,1,0)$可以算正确.

(2)有同学将第一个空填为$\{2, 2, 1\}$，这是一个正确的答案. 但第二个空随之填为3，显然是把几个一阶偏导数弄错了.

4. 曲线$x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, z = 5\theta$是什么曲线：$\underline{\quad 螺旋线 \quad}$，此曲线上$\theta = \dfrac{\pi}{2}$的点处的切向量$\vec{s} = \underline{\{-2, 0, 5\}}$.

问题：有一部分同学第一个空填错.

5. 函数 $f(x,y)=e^{x}\ln(1+y)$ 的二阶麦克劳林公式(带佩亚诺余项)为

$$f(x,y)=\underline{\;y+\frac{1}{2}(2xy-y^{2})+o(\rho^{2})\;}.$$

问题：此题的正确率在 5%.以内.有同学甚至在公式中出现 e^{x} 或 $\ln(1+y)$ 项，完全不理解泰勒公式的含义.

6. 设 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{x}{1+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y=0}=\sqrt{1+x}$，$z\big|_{x=0}=y$，则

$$z=\underline{\frac{x^{2}}{2}\arctan y+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+y-\frac{2}{3}}.$$

7．设 $z = f(x^2 + y^2, e^{x+y})$，其中 f 有二阶连续偏导数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{2xf_1' + e^{x+y} f_2'},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{4xyf_{11}'' + 2(x+y)e^{x+y} f_{12}'' + e^{2(x+y)} f_{22}'' + e^{x+y} f_2'}$$

问题：此题正确率较高.但还是有同学出错，比如：

(1)漏掉 $e^{x+y} f_2'$ 项；

(2)未利用条件“ f 有二阶连续偏导数”，没有合并含有 f_{12}'' 及 f_{21}'' 的项.

8．函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \le 1$ 上的最大值 $M = \underline{\;-3\;}$，最小值，$m = \underline{\;-5\;}$.

二. (10 分)设 $x^2+y^2+z^2=f(xy,z-2x)$，其中 f 有连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　法 1：$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}-2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-yf_1'+2f_2'}{f_2'-2z}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-xf_1'}{f_2'-2z}$$

法 2：设 $F(x,y,z)=f(xy,z-2x)-x^2-y^2-z^2$

$$F_x'=yf_1'+-2f_2'-2x$$

$$F_y'=xf_1'-2y$$

$$F_z'=f_2'-2z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2x-yf_1'+2f_2'}{f_2'-2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2y-xf_1'}{f_2'-2z}$$

法 3：方程两端求全微分

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = f_1' \cdot (ydx + xdy) + f_2' \cdot (dz - 2dx)$$

整理得 $$dz = \frac{2x - yf_1' + 2f_2'}{f_2' - 2z} dx + \frac{2y - xf_1'}{f_2' - 2z} dy$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yf_1' + 2f_2'}{f_2' - 2z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - xf_1'}{f_2' - 2z}$$

问题：此题正确率较高.但还是有同学出错，比如：

(1)法 2 利用隐函数微分法套公式漏掉负号：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} =$ 丢负号 ；

(2)计算错误.

三. (12 分) 证明直线 $L_1:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y=1\\ y+z=2\end{cases}$ 共面,

并求过直线 L_1 与 L_2 的平面方程.

解　法 1: L_1 的方向向量为 $\vec{s}_1=\{3,-2,2\}$, $P_1(2,-1,3)\in L_1$

L_2 的方向向量为 $\vec{s}_2=\{1,2,0\}\times\{0,1,1\}=\{2,-1,1\}$, $P_2(1,0,2)\in L_2$

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-1,1,-1\}$$

$$(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$$

故 L_1, L_2 共面;

所求平面法向量为 $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{0,1,1\}$

所求平面方程为 $1\times(y-0)+1\times(z-2)=0$

即 $y+z=2$

问题：仍有同学将平面方程写成直线方程.

求 $\vec{s}_2$ 的其它方法：

(1)在 L_2 上取两点 M_1、M_2，则 $\vec{s}_2=\overrightarrow{M_1M_2}$

(2)将 L_2 由一般方程化为标准方程，即得 $\vec{s}_2$.

法 2：将两个直线方程联立，求出两条直线的交点$(-1,1,1)$.

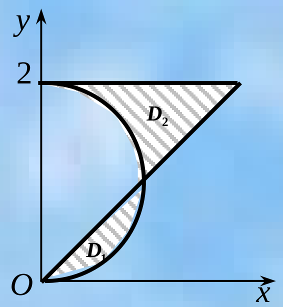
问题：只求交点，未指出：因为两条直线相交，所以共面.

法 3：将直线 L_1 由标准方程化为一般方程，得

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

由于 L_1 与 L_2 均在平面 $y+z=2$ 内，所以两条直线共面.

四. (12 分) 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{|y-x|}{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=2$，与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 所围成的阴影部分区域(如图).



解： $$I=\iint\limits_{D_1}\frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}(\cos\theta-\sin\theta)d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{\frac{2}{\sin\theta}}(\sin\theta-\cos\theta)d\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

$$=1-\ln 2$$

问题：(1)没有用极坐标变换，直接用直角坐标：

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{1-(y-1)^2}}\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\int_1^2 dy\int_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{y}\frac{y-x}{x^2+y^2}dx$$

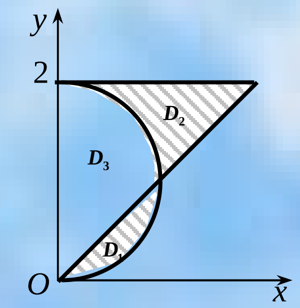
这种方法计算量很大，没有人算出结果，至少扣除 6 分；

(2)最后的结果未化简，写成：$1+2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $1+\ln\frac{1}{2}$，均被扣减 1 分.

另解：

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$$

$$+ \iint\limits_{D_3} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy + \iint\limits_{D_3} \frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$$



$$= \iint\limits_{D_1+D_3} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy + \iint\limits_{D_2+D_3} \frac{y-x}{x^2+y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} (\cos\theta - \sin\theta)d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\sin\theta}} (\sin\theta - \cos\theta)d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta - 2\sin^2\theta)d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta})d\theta$$

$$= 1 - 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + 2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) - 2\ln\sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \ln 2$$

五. (11 分) 在曲面$3x^2+y^2+z^2=16$上求一点，使曲面在此点的切平面与直线$L_1:\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z+1}{8}$和$L_2:x=y=z$都平行.

解　法 1：设切点$P(x_0,y_0,z_0)$，则　$3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16$

切平面法向量为　$\vec{n}=\{6x_0,2y_0,2z_0\}$

L_1,L_2的方向向量分别为$\vec{s}_1=\{4,5,8\}$，$\vec{s}_2=\{1,1,1\}$

$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\{-3,4,-1\}$

由题意，有 $\vec{n} // \vec{s}$，　故 $\dfrac{3x_0}{-3} = \dfrac{y_0}{4} = \dfrac{z_0}{-1}$

解得　$x_0 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　$y_0 = \mp\dfrac{8}{\sqrt{5}}$　$z_0 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

所求点为 $(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{8}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}})$ 或 $(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{8}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$

问题：(1)由于 $\vec{n} // \vec{s}$，　故 $\{6x_0, 2y_0, 2z_0\} = \{-3, 4, -1\}$

(2)有同学误认为 $\vec{n} \perp \vec{s}$.

(3)求切点的坐标时，计算有误.

法 2：设切点 $P(x_0, y_0, z_0)$,

切平面法向量为 $\vec{n}=\{6x_0, 2y_0, 2z_0\}=2\{3x_0, y_0, z_0\}$

L_1, L_2的方向向量分别为 $\vec{s}_1=\{4,5,8\}$, $\vec{s}_2=\{1,1,1\}$

由于 $\vec{s}_1\perp\vec{n}$, $\vec{s}_2\perp\vec{n}$, 即 $\vec{s}_1\cdot\vec{n}=0$, $\vec{s}_2\cdot\vec{n}=0$,

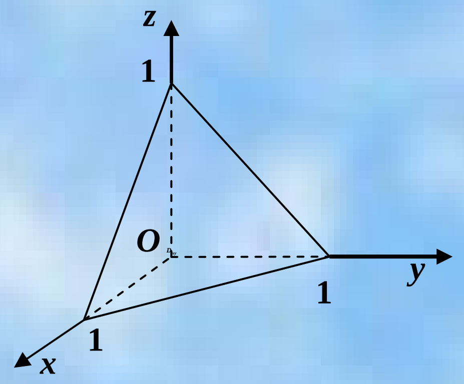
又点 P 在已知曲面上，故有

$$\begin{cases} 12x_0+5y_0+8z_0=0 \\ 3x_0+y_0+z_0=0 \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} x_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y_0=\mp\dfrac{8}{\sqrt{5}} \\ z_0=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

所求点为 $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{8}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 或 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{8}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

六. (11 分) 计算三重积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}e^{\frac{y}{1-x-z}}dz$.

解: $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}e^{\frac{y}{1-x-z}}dy$



$$=(e-1)\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-z)dz$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)\int_0^1(1-x)^2dx$$

$$=\frac{1}{6}(e-1)$$

问题：(1) 计算 $\int_0^{1-x-z} e^{\frac{y}{1-x-z}} dy$ 出错：

$$\int_0^{1-x-z} e^{\frac{y}{1-x-z}} dy = \frac{1}{1-x-z} e^{\frac{y}{1-x-z}} \Big|_0^{1-x-z} = \frac{e-1}{1-x-z}$$

正确的应为：

$$\int_0^{1-x-z} e^{\frac{y}{1-x-z}} dy = (1-x-z) e^{\frac{y}{1-x-z}} \Big|_0^{1-x-z} = (1-x-z)(e-1)$$

(2) 计算出错：$e^{\frac{0}{1-x-z}} = 0$，应为 $e^{\frac{0}{1-x-z}} = 1$

七. (12 分) 设 M 是椭圆 $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + z^2 = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$ 上的点，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 是函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 M 处沿方向$\{1,-1,1\}$的方向导数，求使 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 取得最大值和最小值的点 M 及 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ 的最大值和最小值.

解：$\vec{e} = \{\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\}$

$$f'_x = 2x \qquad f'_y = 2y \qquad f'_z = 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - y + z)$$

令 $g(x,y,z) = x - y + z$

$$F(x,y,z)=x-y+z+\lambda(2x^2-y^2+z^2-5)+\mu(x+y)$$

$$\begin{cases} F'_x=1+4\lambda x+\mu=0 \\ F'_y=-1-2\lambda y+\mu=0 \\ F'_z=1+2\lambda z=0 \\ 2x^2-y^2+z^2=5 \\ x+y=0 \end{cases}$$

解得 $x=\pm 2$, $y=\mp 2$, $z=\pm 1$

得两点 $M_1(2,-2,1)$, $M_2(-2,2,-1)$

最大值 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{M_1}=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$, 最小值 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|_{M_2}=-\dfrac{10}{\sqrt{3}}$

问题：(1) 方向向量没有单位化；

(2) 对方向导数的概念理解的不好；

例如：把方向导数看成向量，认为$\{F_x', F_y', F_z'\}$是方向导数；

(3) 对具有两个约束条件的条件极值，不知该如何构造拉格朗日函数；

(4) 没说清哪个点是最大值点，哪个点是最小值点.