习题 1.1(P31)

1. 回答下列问题（可举例说明）

（1） 如果在n无限变大过程中，数列y_n的各项越来越接近A，那么y_n是否一定以A为极限？

（2） 设在常数A的无论怎样小的ε邻域内密集着数列y_n的无穷多个点，那么y_n是否以A为极限？

（3） 设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，那么$y_n$中各项的值是否必须大于或小于$A$，能否等于$A$？

（4） 有界数列是否一定有极限？无界数列是否一定无极限？

（5） 单调数列是否一定有极限？

答：（1）否。例：$y_n = 1+\dfrac{1}{n}$，$A=0$

（2）否。例：$y_n = 1+(-1)^n$，$A=0$

（3）y_n中各项的值不一定必须大于或小于A，能等于A。

例：$y_n = 1+(-\dfrac{1}{n})^n$，$A=1$；　　或$y_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n\text{为偶数} \\ 0, & n\text{为奇数} \end{cases}$，$A=0$

（4）有界数列不一定有极限，例：$y_n = 1+(-1)^n$，$|y_n| \le 2$；

因为如果无界数列有极限，则由定理 2 得该数列必有界，矛盾！故无界数列一定无极限。

（5）否。例：$y_n = n$

2. 设$y_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

（1）求$|y_{10}-3|$，$|y_{100}-3|$的值

解：$|y_{10}-3| = \left|\dfrac{3\times 10+2}{10+1}-3\right| = \dfrac{1}{11}$，$|y_{100}-3| = \left|\dfrac{3\times 100+2}{100+1}-3\right| = \dfrac{1}{101}$

（2）求N，使当$n>N$时，恒有$|y_n-3|<10^{-4}$

解：$|y_n-3| = \left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right| = \dfrac{1}{n+1} < 10^{-4}$，得$n>10^4-1$，故$N=10^4-1$

（3）求N，使当$n>N$时，恒有$|y_n-3|<\varepsilon$

解：$\left|y_n-3\right|=\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，得 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$，故 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$

3．用数列极限定义证明下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

证明：（1）$\forall\varepsilon>0$，欲找 N，当 $n>N$ 时，

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}\right]=1$

证明：$\forall\varepsilon>0$，欲找 N，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}-1\right|=\left|(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$

4. 证明数列 $y_n=\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2^n}$ 存在极限.

证明：$y_{n+1}=\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2^n}+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}=y_n+\dfrac{1}{1+2^{n+1}}>y_n$

即 y_n 单调递增；

又 $y_n<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$，即 y_n 有界，

由单调有界准则知，该数列存在极限。

5．设 $y_1=10$，$y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}\ (n=1,2,\cdots)$，试证明：数列 $\{y_n\}$ 存在极限.（该题为 96 年考研试题，5 分）

证明：（1）证 $\{y_n\}$ 单调递减（归纳法）

因为 $y_1=10$，$y_2=\sqrt{6+10}=4$，所以 $y_1>y_2$；假设有 $y_{k-1}>y_k$，下面证 $y_k>y_{k+1}$：

因 $y_{k+1}=\sqrt{6+y_k}<\sqrt{6+y_{k-1}}=y_k$，由数学归纳法知$\{y_n\}$单调递减.

（2）证$\{y_n\}$有下界.

由 y_n 的表达式知 $y_n>0$.

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在.

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则对等式 $y_{n+1}=\sqrt{6+y_n}$ 两端取极限，得 $A=\sqrt{6+A}$，即 $A=3$（$A=-2$ 不合题意，舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=3$

6．设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\ (n=1,2,\cdots)$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

证明：（1）证$\{a_n\}$有下界.

因为 $a_1=2>1$，由均值不等式得 $a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}})\geq\sqrt{a_{n-1}\cdot\dfrac{1}{a_{n-1}}}=1\ (n=2,3,\cdots)$

即 $a_n\geq 1\ (n=1,2,3,\cdots)$

（2）证$\{a_n\}$单调递减

由 $a_n\geq 1\ (n=1,2,3,\cdots)$ 得：$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\leq\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{1})\leq\dfrac{1}{2}(a_n+a_n)=a_n$，

故$\{a_n\}$单调递减. 由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则对等式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$ 两端取极限，得 $A=\dfrac{1}{2}(A+\dfrac{1}{A})$，即 $A=1$（$A=-1$ 不合题意，舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

7．设 $x_1=1$，$x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1}$，$x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：（1）证$\{x_n\}$单调递增（归纳法）

$$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

因为 $x_1 = 1$， $x_2 = 2 - \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$，所以 $x_1 < x_2$；假设有 $x_{k-1} < x_k$，下面证 $x_k < x_{k+1}$：

因 $x_{k+1} = 2 - \frac{1}{1 + x_k} > 2 - \frac{1}{1 + x_{k-1}} = x_k$， 由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递增.

（2）证 $\{x_n\}$ 有上界.

由 $x_n = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ 的表达式知 $x_n < 2$.

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则对等式 $x_n = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ 两端取极限，得 $A = 2 - \frac{1}{1 + A}$，即

$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$（$A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 不合题意，舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

8．设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为非负数，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{1\le k\le m}\{a_k\}$

证明：设 $\max\limits_{1\le k\le m}\{a_k\} = A$，由 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为非负数得：

$$A = (A^n)^{\frac{1}{n}} \le (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \le (\underbrace{A^n + A^n + \cdots + A^n}_{m\text{项}})^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} \cdot (A^n)^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} \cdot A$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} \cdot A = A$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \max\limits_{1\le k\le m}\{a_k\}$

9．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ 且 $A > 0$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $y_n > 0$.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ 且 $A > 0$，对于给定的 $\varepsilon = \frac{A}{2}$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有

$|y_n - A| < \frac{A}{2}$，即 $y_n > \frac{A}{2} > 0$.