

2008 级《微积分 A》期中试卷

班级_____学号_____姓名_____成绩_____

一、 填空 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} =$ _____.

2. 设 $y = \arcsin \sqrt{x} + f^2(\arctan \frac{1}{x})$, f 为可微函数, 则 $dy =$ _____.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 则 $f(b) - f(a)$, $(b-a)f'(a)$, $(b-a)f'(b)$ 按由大到小的排列次序是: _____.

5. 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的法线方程为_____.

6. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{6})^n =$ _____.

7. 设 $f(x) = (x^{200} - 1)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $g(1) = 5$, 则 $f'(1) =$ _____.

8. $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-2x} = 1 + ax + bx^2 + o(x^2)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

9. 函数 $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ 的带皮亚诺余项的五阶麦克劳林公式为_____.

10. 设 $y = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$, 则 $y^{(n)} =$ _____.

.

二、(10 分) 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

三、(10 分) 证明不等式: 当 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$.

四、(10 分) 利用导数研究函数 $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的性态, 并画出其图形.

五、(10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x < 0 \\ 0 & x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 的连续性.

六、(10 分) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 (x_0, y_0) 处相切, 且在这一点曲线 $y = f(x)$ 的曲率 k_1 比 $y = g(x)$ 的曲率 k_2 大, $f''(x_0) > 0, g''(x_0) > 0$. 问在 (x_0, y_0) 附近, $y = f(x)$ 是在 $y = g(x)$ 的上方还是下方? 并说明理由.

七、(10 分) 在坐标平面上通过点 $(2,3)$ 引一条直线, 要使它在两坐标轴上的截距均为正, 且两截距之和为最小, 求此直线的方程.

八、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 求证:

至少存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $2f'(\xi) = \tan \frac{\xi}{2} f(\xi)$.