习题 1.7(P77)

1.求下列各极限.

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\dfrac{0}{1}=0$， $|\cos n|\le 1$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\cos n=0$

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}\cdot(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}\ \underline{\underline{\text{分子分母}}}\ \text{同除}x^{50}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{1}{x})^{30}\cdot(3-\frac{2}{x})^{20}}{(2+\frac{1}{x})^{50}}$

$=\dfrac{2^{30}\cdot 3^{20}}{2^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\dfrac{1}{3}$

(4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x\cdot x}=\dfrac{1}{2}$

(5). $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\cos x}=e^1=e$

(6). $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

解： $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

(7). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}\quad(a>0,\ b>0)$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{\sqrt[x]{a}-1+\sqrt[x]{b}-1}{2}\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{\sqrt[x]{a}-1+\sqrt[x]{b}-1}{2}\right)}\overline{\overline{\underset{\text{替换}}{\text{无穷小}}}}\,e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt[x]{a}-1+\sqrt[x]{b}-1}{2}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[x]{a}-1)+\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[x]{b}-1)\right]}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{1}{x}\ln a)+\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{1}{x}\ln b)\right]}=e^{\frac{1}{2}[\ln a+\ln b]}=\sqrt{ab}$$

(8). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1)}$

$$=e^{1+\lim\limits_{x\to\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-1)}\overline{\overline{\underset{\text{替换}}{\text{无穷小}}}}\,e^{1+\lim\limits_{x\to\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-1)}=e^{1+\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{1}{x}\ln2)}=e^{1+\ln2}=2e$$

(9). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x/2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x/2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

(10). $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+\ln(1+x)]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x}=e$

(11). $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解： $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\xlongequal[\text{同除}-x]{\text{分子分母}}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=1$

(12). $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(13). $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+3x)}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot(3x)}{\sin x}}=e^6$

(14). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$

解： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}\xlongequal[\text{理化}]{\text{分子有}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(15). $\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0} e^{x+1}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x+1} \lim\limits_{x\to 0}(1+e^x\sin^2 x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$

$$= e\cdot e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x\sin^2 x)}{\sqrt{1+x^2}-1}} = e\cdot e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin^2 x}{x^2/2}} = e\cdot e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x^2}{x^2/2}} = e\cdot e^2 = e^3$$

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解： 因为当 $x\le -1$ 时，$e^x+x^n<0$； $f(x)$ 无意义；

当 $|x|<1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}} = 0$；

当 $x=1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e+1)}{\sqrt{n}} = 0$；

当 $x>1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left[x^n(\frac{e^x}{x^n}+1)\right]}{\sqrt{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x+\ln(\frac{e^x}{x^n}+1)}{\sqrt{n}} = \infty \qquad (\because \lim_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=0)$$

综上所述： $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}} = 0,\quad x\in(-1,1]$

3. 设 $x_1=\sqrt{a}$， $x_2=\sqrt{a+x_1}$， $\cdots$ ， $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$， $\cdots$ ，其中 $a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：（1）证 $\{x_n\}$ 单调递增（归纳法）

因为 $x_1=\sqrt{a}$， $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}\ge\sqrt{a}=x_1$，所以 $x_1\le x_2$；假设有 $x_{k-1}\le x_k$，下面证 $x_k\le x_{k+1}$：因 $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}\ge\sqrt{a+x_{k-1}}=x_k$，由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递增；

（2）证 $\{x_n\}$ 有上界（归纳法）.

$x_1=\sqrt{a}\le\sqrt{1+4a}$，设 $x_k\le\sqrt{1+4a}$

则 $x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}\le\sqrt{a+\sqrt{1+4a}}\le\sqrt{a+\sqrt{(1+2a)^2}}=\sqrt{1+3a}\le\sqrt{1+4a}$

由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界；

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对等式 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两端取极限，得 $A=\sqrt{a+A}$，解得

$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ （$A=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$ 不合题意，舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

4. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，求正整数 n 的值.

解： 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2/2)\cdot x^2}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ ， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^n}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x^n}{x^{n+1}}=1$

即 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$、$(e^{x^2}-1)$ 及分别是 4 阶、2 阶及 $n+1$ 的无穷小

由题意得：$2<n+1<4\quad(n\in N^+)$，即 $n+1=3$，故 $n=2$

5. 选择 a 的值，使下列函数处处连续.

(1). $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ a+x & x\ge0\end{cases}$

解： $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，推得 $a=1$，从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$

(2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & x\ge1\\ a\cos\pi x & x<1\end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}a\cos\pi x=-a$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x}=2$，

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，推得 $a=-2$，从而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2=f(0)$

(3). $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x) & x>0\\ 2x+a & x\le 0\end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(2x+a)=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，推得 $a=1$，从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$

(4). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin(x/2)} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$

解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^{2x}=a$，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin(x/2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{x/2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{x/2}=-2,$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，推得 $a=-2$，从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-2=f(0)$

6. 求常数 a 的值.

(1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$

解：$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{2a}{x-a}\right)}=e^{2a}$$

由 $e^{2a}=9=3^2$ 推得 $a=\ln 3$

(2). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$

解：$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{3a}{x-a}\right)}=e^{3a}$$

由 $e^{3a}=8=2^3$ 推得 $a=\ln 2$

(3). 当 $x\to0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\tan x$ 是等价无穷小.

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac14}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac14(-ax^2)}{x\cdot x}=-\dfrac{a}{4}$， 由 $-\dfrac{a}{4}=1$ 推得 $a=-4$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\tan x}}-1}{x\ln(1+x)}=A\neq0$，求 c 及 k，使 $f(x)\sim cx^k$（当 $x\to0$ 时）.

解： 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\tan x}}-1}{x\ln(1+x)}=A\neq0$ 可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\tan x}=0$， 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\tan x}}-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)}{2\tan x}}{x\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2\cdot\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^3}=A$$

即 $f(x)\sim 2Ax^3$，所以 $c=2A,\ k=3$

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{\sqrt{1-\cos x}} & x<0\\ b & x=0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & x>0\end{cases}$$

当 a ,b 为何值时， $f(x)$ 在点 $x\to0$ 处连续？

解： $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin(ax)}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2/2}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2/2}}=-\sqrt{2}a$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{x}=-1$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，推得 $a=\dfrac{1}{\sqrt2}$，

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$， $f(0)=b$， 由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ 推得 $b=-1$

9. 试求常数 a ,b 的值，使得下列等式成立.

(1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}-a-\dfrac{b}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}-a-\dfrac{b}{x}\right)=1-a=0$， 故 $a=1$；

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)=-1$

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax+b\right)=0$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-ax+b}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-a+\dfrac{b}{x}\right)=1-a=0$

故 $a=1$；

$b=-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

10. 确定常数 c，使极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$ 存在，且不为零，并求极限的值.

解： 由已知条件 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^c-x]$ 存在，且不为零，可知 $c>0$，且函数的最高方幂为 $5c$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^5+7x^4+2)^c-x}{x^{5c}}=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5}\right)^c-x^{1-5c}\right]=0$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^5}\right)^c=1$，得 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1-5c}=1$，推得 $1-5c=0$，即 $c=\dfrac{1}{5}$

$$\lim_{x\to\infty}[(x^5+7x^4+2)^{\frac{1}{5}}-x]=\lim_{x\to\infty}x\cdot[(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})^{\frac{1}{5}}-1]$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{无穷小}}\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{5}[\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}]=\frac{7}{5}$$

11. 求下列函数的间断点，并指出间断点的类型.

(1). $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}$

解： 当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}=x$， 当$|x|=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}=0$

当$|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{x^{2n}}-1)x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-x$，故 $f(x)=\begin{cases}x & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -x & |x|>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$；

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$；

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

故$x=\pm1$为第一类间断点（跳跃间断点）.

(2). $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0 \text{ 且 } x\neq1\\ \ln(1+x) & -1<x\le0\end{cases}$

解： $x=0$为分段点，而函数$f(x)$在点$x=1$处无定义，故讨论这两点：

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，故$x=0$为第一类间断点（跳跃间断点）；

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

故$x=1$为第二类间断点（无穷间断点）.

(3). $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}$

解： 欲使$f(x)$有意义，则$\sin x\neq0$且$1+x\ge0$，故$f(x)$的定义域为$x\ge-1$

在$x\neq k\pi\quad(k\text{为自然数})$，因而$x=k\pi\quad(k\text{为自然数})$是间断点

当$k=0$时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1+1-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{x/2}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{-x/3}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{6}$$

故 $x=0$ 为第一类间断点（可去间断点）；

当 $k\neq 0$ 时，

$$\lim_{x\to k\pi} f(x)=\lim_{x\to k\pi}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sin x}=\infty \quad (\lim_{x\to k\pi}[\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}]\neq 0,\ \lim_{x\to k\pi}\sin x=0)$$

故 $x=k\pi\quad (k\text{为正整数})$ 为第二类间断点（无穷间断点）.

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数，试确定 a , b 的值.

解： 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{a+b+1}{2}$

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{a-b-1}{2}$

当 $|x|>1$ 时（此时为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型），$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\underset{\text{同除}x^{2n-1}}{\overset{\text{分子分母}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+ax^{3-2n}+bx^{-2n}}{x+x^{-2n}}=\dfrac{1}{x}$

$$\text{故 } f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & |x|<1 \\ \dfrac{a+b+1}{2} & x=1 \\ \dfrac{a-b-1}{2} & x=-1 \\ \dfrac{1}{x} & |x|>1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax^2+bx)=a-b$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$，故得 $a-b=-1$，

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx)=a+b$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，故得 $a+b=1$，解得：$a=0, b=1$

可验证此时 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

13. 设函数 $f(x)$ 对一切 x_1，x_2 满足等式 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$

点连续，证明： $f(x)$ 在任一点 x 处都连续.

证明： $\forall x$，则有 $f(x+\Delta x)=f(x)\cdot f(\Delta x)$， $f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0)$

故 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)[f(\Delta x)-f(0)]$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点连续性得： $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-f(0)]=0$

因而得： $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)[f(\Delta x)-f(0)]=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-f(0)]=0$

即 $f(x)$ 在任一点 x 处都连续.

14. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

证明：因为 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知： $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上取得最大值 M 和最大值 m，即

$$m\le f(x_1)\le M$$

$$m\le f(x_2)\le M$$

……………………..

$$m\le f(x_n)\le M$$

不等式相加得： $m\le\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\le M$

令 $\mu=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$， 则 $m\le\mu\le M$，

（1）若 $\mu=m$ 或 $\mu=M$，则由最大值最小值定理知，$\exists\xi\in[x_1,x_n]$，使得 $f(\xi)=\mu$；

（2）若 $m<\mu<M$，，则由介值定理知，$\exists\xi\in(x_1,x_n)$，使得 $f(\xi)=\mu$，

总之，$\exists\xi\in[x_1,x_n]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

15. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续， $f(a^+)$， $f(b^-)$ 存在，证明： $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证明：构造辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+) & x=a \\ f(x) & x\in(a,b) \\ f(b^-) & x=b \end{cases}，\qquad 则 F(x) 在 [a,b] 上连续，$$

由最大值最小值定理的推论知：$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，因而 $F(x)$ 在 (a,b) 内也有界，而

$F(x)=f(x)\quad x\in(a,b)$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

16. 设函数 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\quad(a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 为实常数})$，证明：

(1). 若 $a_n>0$，且 n 为奇数，则方程 $f(x)=0$ 至少有一负根.

(2). 若 $a_n<0$，且 n 为奇数，则方程 $f(x)=0$ 至少有一正根.

(3). 若 $a_n<0$，且 n 为偶数，则方程 $f(x)=0$ 至少有一个正根和一个负根.

证明：（1）n 为奇数，故有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，由负无穷大的定义知：$\exists\, a<0$，使得 $f(a)<0$，

又 $f(0)=a_n>0$，在 $[a,0]$ 上应用零点定理：$\exists\xi\in(a,0)$，使得 $f(\xi)=0$

即方程 $f(x)=0$ 至少有一负根.

（2）n 为奇数，故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，由正无穷大的定义知：$\exists\, b>0$，使得 $f(b)>0$，

又 $f(0)=a_n<0$，在 $[0,b]$ 上应用零点定理：$\exists\xi\in(0,b)$，使得 $f(\xi)=0$

即方程 $f(x)=0$ 至少有一正根.

（3）n 为偶数，故有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，由正无穷大的定义知：$\exists\, a<0$，使得 $f(a)>0$，

$\exists\, b>0$，使得 $f(b)>0$，又 $f(0)=a_n<0$，分别在 $[a,0]$ 及 $[0,b]$ 上应用零点

定理：$\exists\xi_1\in(a,0)$，$\exists\xi_2\in(0,b)$，使得 $f(\xi_i)=0\ \ (i=1,2)$，

即方程 $f(x)=0$ 至少有一个正根和一个负根.