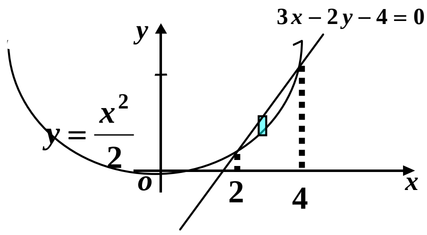
习题 4.6(P262)

1. 求由抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $3x-2y-4=0$ 所围图形的面积.

解：联立曲线方程 $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4} \\ 3x-2y-4=0 \end{cases}$ 得交点



$(2,1)$，$(4,4)$，选取 x 做为积分变量，

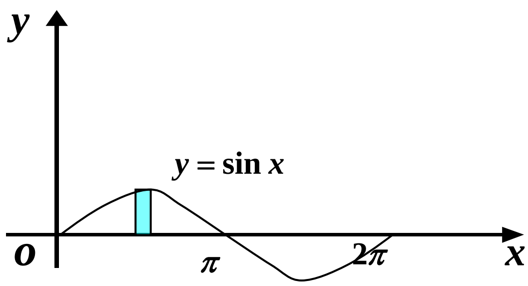
则 $dA=(\dfrac{3}{2}x-2-\dfrac{x^2}{4})dx$，故

$$A=\int_2^4(\frac{3}{2}x-2-\frac{x^2}{4})dx=(\frac{3}{4}x^2-2x-\frac{x^3}{12})\bigg|_2^4=\frac{1}{3}$$

2. 求正弦曲线 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的一段与 x 轴所围图形的面积.

解：设 A_1 为曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的面积，则 $dA_1=\sin x dx$，由对称性得：

$$A=2A_1=2\int_0^{\pi}\sin x dx=2(-\cos x)\big|_0^{\pi}=4$$

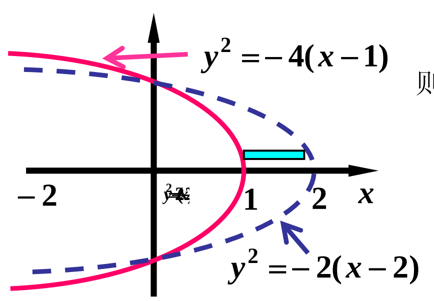


3. 求由抛物线 $y^2=-4(x-1)$ 与 $y^2=-2(x-2)$ 围成的图形的面积.

解：联立曲线方程 $\begin{cases} y^2=-4(x-1) \\ y^2=-2(x-2) \end{cases}$ 得交点

$(0,-2)$，$(0,2)$，选取 y 做为积分变量，

设 A_1 为两条曲线在第一象限围成的图形的面积 则



$$dA_1=[(-\frac{y^2}{2}+2)-(-\frac{y^2}{4}+1)]dy,$$

$$=(-\frac{y^2}{4}+1)dy,$$ 由对称性，

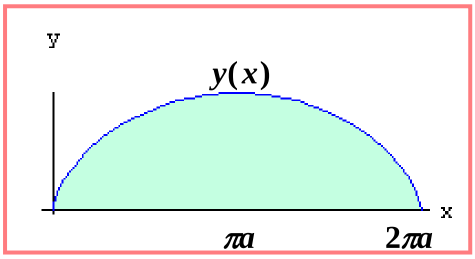
$$A = 2A_1 = 2\int_0^2 (-\frac{y^2}{4} + 1)dy = 2(-\frac{y^3}{12} + y)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

4. 求由摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的一拱$(0 \le t \le 2\pi)$与$x$轴所围图形的面积.

解：设A_1为摆线与x轴在$t \in [0, \pi]$上所围图形的面积，则$dA_1 = ydx$，由对称性得：

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi a} ydx = 2\int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt \xlongequal{\frac{t}{2} = u} 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du$$



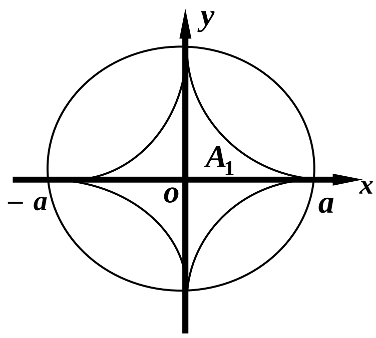
$$= 16a^2 I_4 = 16a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$

5.求星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$与圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$所围图形的面积.

解：设A_1为星形线与x轴在第一象限围成的图形的面积，则$dA_1 = ydx$

$$A = \text{圆的面积} - 4A_1 = \pi a^2 - 4\int_0^a ydx$$

$$= \pi a^2 - 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$



$$= \pi a^2 - 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt$$

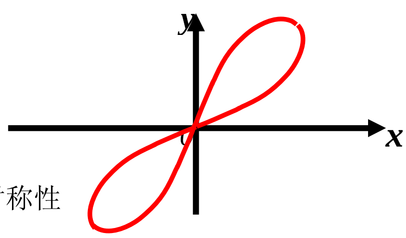
$$= \pi a^2 - 12a^2 (I_4 - I_6) = \frac{5}{8}\pi a^2$$

6.求双扭线$\rho^2 = 4\sin 2\theta$所围图形的面积.

解：由方程知 $\sin 2\theta \ge 0$，即

$0 \le 2\theta \le \pi$ 或 $2\pi \le 2\theta \le 3\pi$，

得$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$或$\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$，



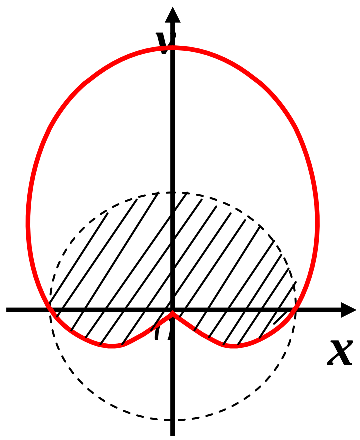
故双纽线的两个分支分别位于第一象限和第三象限，由对称性

$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2 d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta=-2\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4$$

7.求圆 $\rho=1$ 与心形线 $\rho=1+\sin\theta$ 所围图形公共部分的面积

解：设 A_1 为心形线与 x 轴在第四象限围成的图形的面积，则

$dA_1=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^2 d\theta$，由对称性



$$A=\text{半圆的面积}+2A_1$$

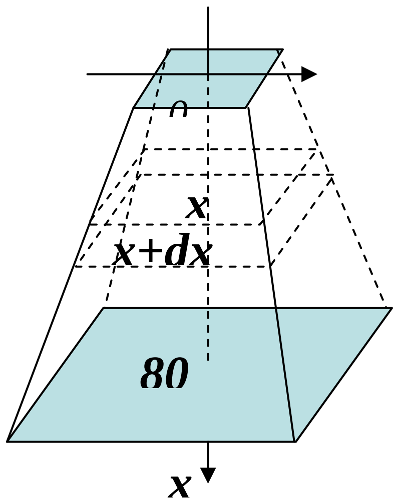
$$=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^2 d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi-2$$

8.已知塔高为 $80m$，距离其顶点 x 米处的水平截面是边长为 $\frac{1}{400}(x+40)^2$（单位为 m）的正方形，求塔的体积.

解：如图建立坐标系，则



$$A(x)=\frac{1}{400^2}(x+40)^4$$

$$V=\int_0^{80}A(x)dx$$

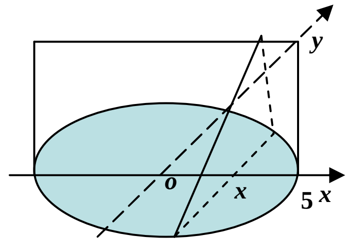
$$=\frac{1}{400^2}\int_0^{80}(x+40)^4 d(x+40)$$

$$=\frac{(x+40)^5}{400^2\times 5}\Bigg|_0^{80}=30976m^3$$

9.一立体的底面是一半径为 5 的圆面，已知垂直于底面的一条固定直径的截面积都是等边三角形，求立体的体积.

解：设立体如图，固定直径在 x 轴上，则立体底面圆的方程为 $x^2+y^2=5^2$，

且位于 x 轴上点 x 处的截面是一边长为 $2|y|$ 的等边三角形，故等边三角形的高为 $\sqrt{3}|y|$，其面积为



$$A(x)=\frac{1}{2}(2|y|)(\sqrt{3}|y|)=\sqrt{3}y^2=\sqrt{3}(5^2-x^2),$$

由对称性，立体的体积为 $V=2\int_0^5 A(x)dx=2\sqrt{3}\int_0^5(5^2-x^2)dx=\dfrac{500}{\sqrt{3}}$

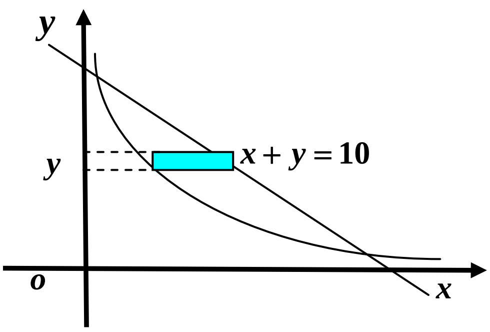
截面积 $A(x)$ 还可以由正弦定理得到：由于底面弦长 $2\sqrt{5^2-x^2}$， 所以

$$A(x)=\frac{1}{2}2\sqrt{5^2-x^2}\cdot 2\sqrt{5^2-x^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}(5^2-x^2)$$

10 求下列旋转体的体积.

(1) 在第一象限中， $xy=9$ 与 $x+y=10$ 之间的图形绕 y 轴旋转.

解：联立曲线方程 $\begin{cases}xy=9\\x+y=10\end{cases}$ 得交点



$(1,9)$， $(9,1)$，选取 y 做为积分变量，

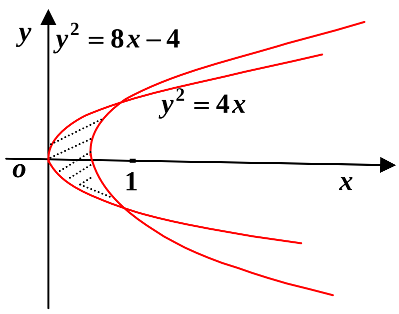
$dV_y=\pi[(10-y)^2-\dfrac{9^2}{y^2}]dy$，故

$$V_y=\pi\int_1^9[(10-y)^2-\frac{9^2}{y^2}]dy=\frac{512}{3}\pi$$

若选取 x 做为积分变量，则 $V_y=2\pi\int_1^9 x[(10-x)-\dfrac{9}{x}]dx=\dfrac{512}{3}\pi$

(2) 抛物线 $y^2=4x$ 与 $y^2=8x-4$ 之间的图形绕 x 轴旋转.

解：联立曲线方程 $\begin{cases}y^2=4x\\y^2=8x-4\end{cases}$ 得交点



$(1,-2)$， $(1,2)$，旋转体可视为由第一象限的平面图形绕 x 轴旋转而得，
选取 y 做为积分变量，则

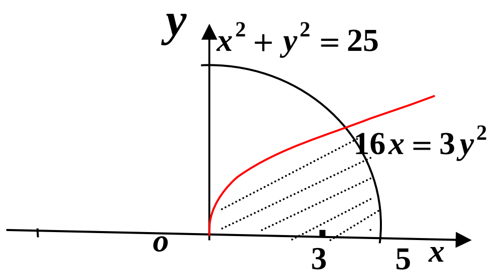
$$dV_x = 2\pi y[(\frac{y^2+4}{8}) - \frac{y^2}{4}]dy$$

$= \pi(y - \frac{y^3}{4})dy$，　　　　故$V_x = \pi\int_0^2 (y - \frac{y^3}{4})dy = \pi$

若选取 x 做为积分变量，则$V_x = \pi[\int_0^1 4xdx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (8x-4)dx] = \pi$

(3) 在第一象限中，右边为圆周 $x^2 + y^2 = 25$，左边为抛物线$16x = 3y^2$的图形绕 x 轴旋转.

解：联立曲线方程$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 16x = 3y^2 \end{cases}$得曲线



在第一象限的交点$(3, 4)$，　选取 x 做为积分变量，则$V_x = V_1 + V_2$，

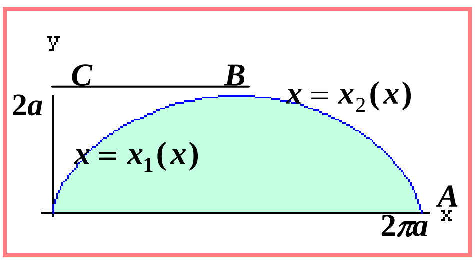
$$dV_1 = \pi\frac{16}{3}xdx，\quad V_2 = \pi(25 - x^2)dx$$

$$V_x = \frac{16\pi}{3}\int_0^3 xdx + \pi\int_3^5 (25 - x^2)dx = \frac{124}{3}\pi$$

若选取 y 做为积分变量，则$V_x = 2\pi\int_0^4 y[\sqrt{25 - y^2} - \frac{3}{16}y^2]dy = \frac{124}{3}\pi$

(4) 摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$的一拱$(0 \le t \le 2\pi)$与 x 轴之间的图形绕 y 轴旋转.

解：可看作平面图$OABC$ 与OBC 分别绕 y 轴旋转构成旋转体的体积之差. 选取 y 做为积分变量，则



$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy$$

$$= \pi\int_{2\pi}^{\pi} a^3(t - \sin t)^2 \sin tdt$$

$$-\pi\int_0^{\pi} a^3(t - \sin t)^2 \sin tdt = -\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)^2 \sin tdt = 6\pi^3 a^3$$

若选取 x 做为积分变量，则

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi a} xydx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt$$

$$\xlongequal{u=t-\pi} 2\pi a^3\int_{-\pi}^{\pi}(u+\pi+\sin u)(1+\cos u)^2du$$

$$=4\pi^2a^3\int_0^{\pi}(1+\cos u)^2du=4\pi^2a^3\int_0^{\pi}4\cos^4\frac{u}{2}du$$

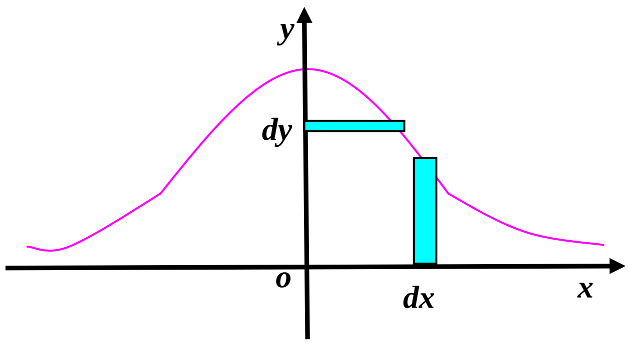
$$\xlongequal{\frac{u}{2}=s} 32\pi^2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 sds=32\pi^2a^3I_4=6\pi^3a^3$$

11. 钟形曲线 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 绕 y 轴旋转形成一山峰状的旋转体，求其体积.

解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=e^{-\frac{x^2}{2}}=0$，所以函数

$y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图像以 $y=0$ 为渐近线，

所求旋转体可视为由第一象限的平面图形绕 y 轴旋转而得，选 y 做为积分变量，则



$$dV_y=\pi x^2dy=\pi(-2\ln y)dy$$

$$V_y=\int_0^1\pi(-2\ln y)dy$$

$$=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\pi(-2\ln y)dy=\lim_{a\to0^+}[-2\pi y(\ln y-1)]_a^1=2\pi$$

若选取 x 做为积分变量，则 $dV_y=2\pi xydx=2\pi xe^{-x^2/2}dx$

$$V_y=2\pi\int_0^{+\infty}xe^{-x^2/2}dx=-2\pi e^{-x^2/2}\Big|_0^{+\infty}=2\pi$$

12.求下列指定曲线段的弧长.

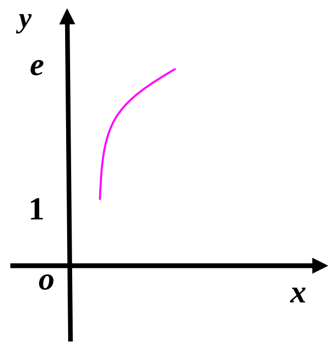
(1) 曲线 $y=\cosh x$ 从 $x=-1$ 到 $x=1$

解： $y'=\sinh x$

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\cosh x$$

$$s=\int_{-1}^1\cosh xdx=\sinh x\Big|_{-1}^1=e-e^{-1}$$

(2) 曲线 $x=\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y$ 从 $y=1$ 到 $y=e$



解： $x'=\frac{1}{2}(y-\frac{1}{y})$，

$$ds=\sqrt{1+(x')^2}dy=\frac{1}{2}(y+\frac{1}{y})dy$$

$$s=\frac{1}{2}\int_1^e(y+\frac{1}{y})dy$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{y^2}{2}+\ln y)\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

(3) 曲线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$

解： $x'=at\cos t$， $y'=at\sin t$， $ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=atdt$

由 $x(-t)=x(t)$， $y(-t)=-y(t)$ 知，曲线图形关于 x 轴对称（注：本题可不利用对称性计算，也很简单。这里旨在介绍曲线图形对称性的讨论，若参数方程满足 $x(t+\pi)=-x(t)$，$y(t+\pi)=-y(t)$，则曲线图形关于原点对称；若曲线图形既关于 x 轴对称又关于原点对称，则曲线图形既关于 x 轴对称又关于 y 轴对称），由对称性 $s=2a\int_0^\pi tdt=2a\pi^2$

(4) 曲线 $\rho=2\theta^2$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=3$

解： $\rho'=4\theta$， $ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\theta=2\theta\sqrt{\theta^2+2^2}d\theta=\sqrt{\theta^2+2^2}d(\theta^2+2^2)$

$$s=\int_0^3\sqrt{\theta^2+2^2}d(\theta^2+2^2)=\frac{2}{3}(\theta^2+2^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=\frac{2}{3}[(13)^{\frac{3}{2}}-8]$$