

# 第7章 多元函数微分学

## 7.1 多元函数的极限与连续

### 1. 多元函数的概念

首先给出二元函数的定义。

先看两个实例：

例1：圆柱体的体积  $V$  与它的底半径  $r$  及高  $h$  之间具有关系  $V = \pi r^2 h$

例2：电阻  $R_1$ 、 $R_2$  与它们并联后的总电阻  $R$  之间具有关系  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

上页

下页

返回



**定义** 设 $D$ 是平面上的一个非空点集，如果对于每个点 $P(x, y) \in D$ ，变量 $z$ 按照一定的规则 $f$ 总有唯一确定的值与它对应，则称 $z$  (或 $f$ ) 是变量 $x, y$ 的二元函数 (或点 $P$ 的函数)，记为

$$z = f(x, y) \quad \text{或} \quad z = f(P)$$

其中， $x, y$ 称为自变量， $z$ 称为函数或因变量，点集 $D$ 称为该函数的定义域。

设 $n$ 为取定的一个自然数，我们称 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体为 **$n$  维空间**，而每个 $n$ 元数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 $n$ 维空间中的一个点，数 $x_i$ 称为该点的第 $i$ 个坐标。



说明：⌚  $n$ 维空间的记号为  $R^n$

若将二元函数定义中的平面点集换成  $n$  维空间点集，则可以类似地定义  $n$  元函数  $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，用  $P$  表示点  $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，则  $n$  元函数也可简记为  $u = f(P)$ 。

因而  $n$  元函数可统称为点函数。

根据定义可知， $n$  元函数均指单值函数。

二元函数及其以上的函数统称为多元函数。

以下重点讨论二元函数，其方法和结论很容易推广到三元以上函数的情形。

上页

下页

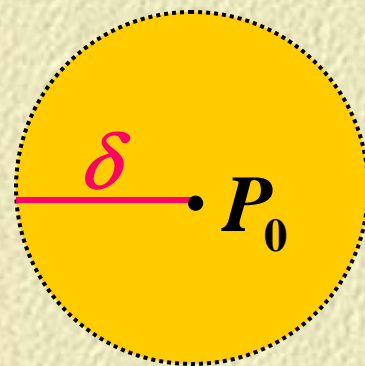
返回



## 相关概念

设  $P_0(x_0, y_0)$  是  $xoy$  平面上的一个点,  $\delta$  是某一正数, 以点  $P_0(x_0, y_0)$  为中心, 以  $\delta$  为半径的圆内部所有点  $P(x, y)$  的集合, 称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $N(P_0, \delta)$

$$\begin{aligned} N(P_0, \delta) &= \{P \mid |PP_0| < \delta\} \\ &= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\} \end{aligned}$$



若在  $N(P_0, \delta)$  中去掉点  $P_0(x_0, y_0)$ , 则称为点  $P_0(x_0, y_0)$  的去心  $\delta$  邻域。记作:

$$\overset{\circ}{N}(P_0, \delta)$$

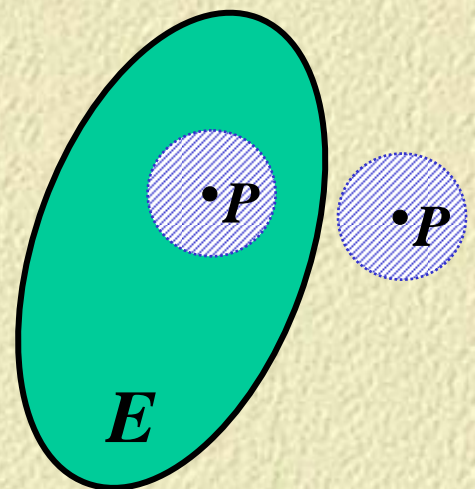


二元函数的定义域是平面上的某个点集  $E \subset \mathbb{R}^2$ ，根据点集  $E$ ，我们将  $\mathbb{R}^2$  中的点分作三类： $E$  的内点、外点、边界点。

设  $E$  是平面上的一个点集， $P$  是平面上的一个点。如果存在点  $P$  的某一邻域  $N(P) \subset E$ ，则称  $P$  为  $E$  的内点。 $E$  的内点属于  $E$ 。

如果存在点  $P$  的某一邻域  $N(P)$ ，使得  $N(P) \cap E = \Phi$ ，则称  $P$  为  $E$  的外点。

$E$  的外点不属于  $E$ 。

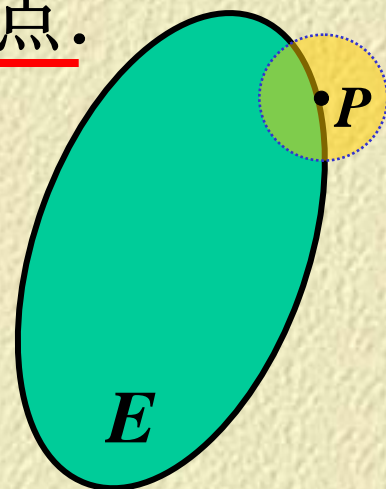




如果点  $P$  的任一个邻域内既有属于  $E$  的点，也有不属于  $E$  的点（点  $P$  本身可以属于  $E$ ，也可以不属于  $E$ ），则称  $P$  为  $E$  的边界点。

$E$  的边界点的全体称为  $E$  的边界。

如果点集  $E$  的点都是内点，  
则称  $E$  为开集。



例如， $E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

$E$  为开集的充要条件是  $E$  中没有边界点。

如果点集  $E$  包含所有边界点，则称  $E$  为闭集。

例如， $E = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$



$E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$  非开非闭集.

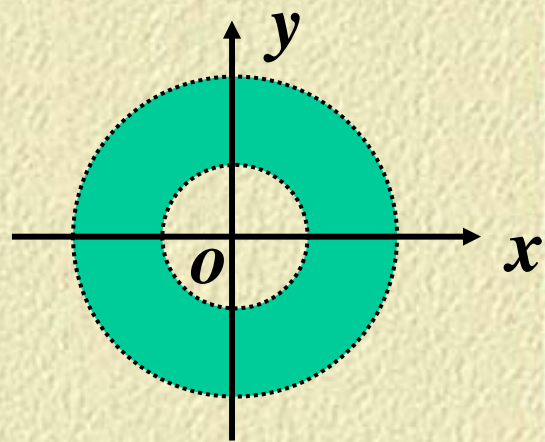
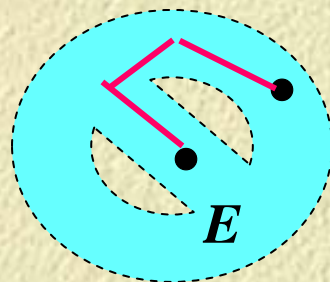
设  $E$  是开集. 如果对于  $E$  内任何两点, 都可用折线连结起来, 且该折线上的点都属于  $E$ , 则称开集  $E$  是连通的.

非连通集之例:

$$E = \left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 < 1 \\ x^2 + y^2 > 4 \end{array} \right\}$$

连通的非空开集称为区域或开区域.

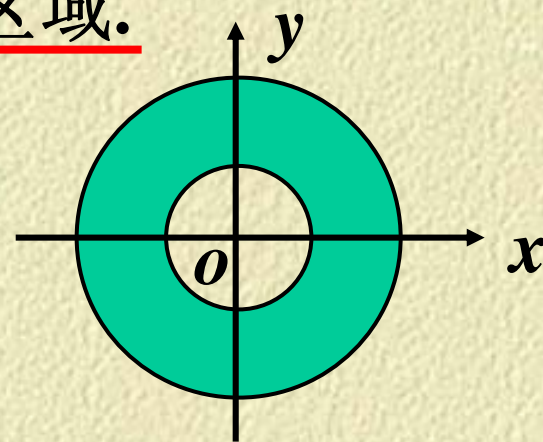
例如,  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ .





开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如,  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .



如果对于任意给定的  $\delta > 0$ , 点  $P$  的去心邻域  $\overset{\circ}{N}(P, \delta)$  内总有  $E$  中的点, 则称  $P$  是  $E$  的聚点.

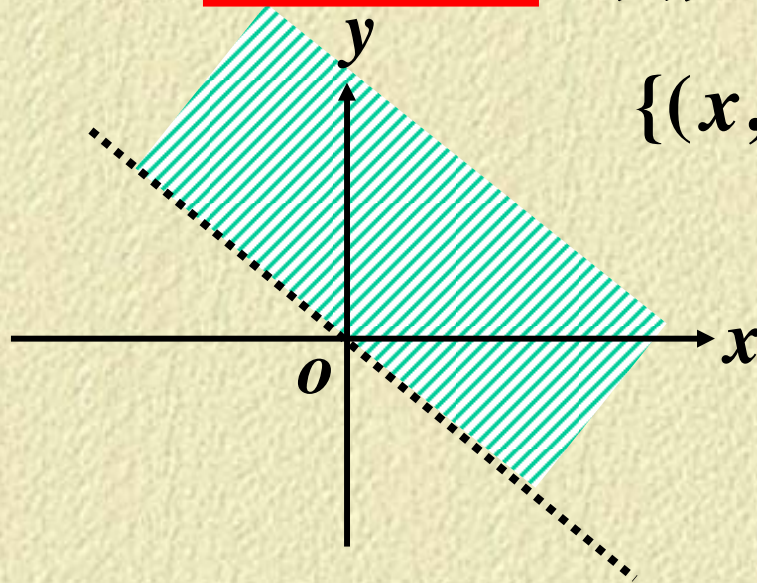
内点、边界点都是聚点.

$E$  的所有聚点所成的点集称为  $E$  的导集.



对于点集  $E$  如果存在正数  $K$ ，使一切点  $P \in E$  与某一定点  $A$  间的距离  $|AP|$  不超过  $K$ ，即  $|AP| \leq K$

对一切  $P \in E$  成立，则称  $E$  为有界点集，否则称为无界点集。例如，



$$\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

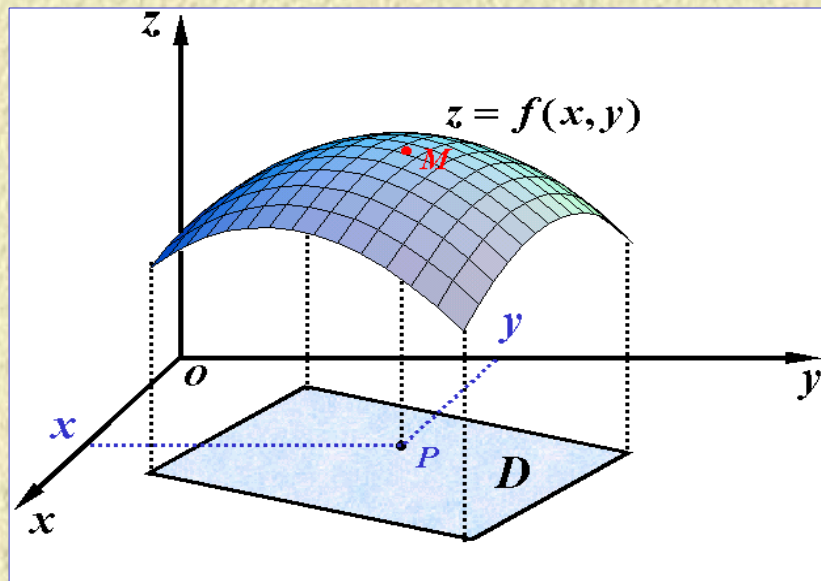
有界闭区域；

$$\{(x, y) | x + y > 0\}$$

无界开区域。



设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 $D$ ，对于任意取定的 $P(x, y) \in D$ ，对应的函数值为 $z = f(x, y)$ ，这样，以 $x$ 为横坐标、 $y$ 为纵坐标、 $z$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$ ，当 $(x, y)$ 取遍 $D$ 上所有点时，得一个空间点集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ ，这个点集称为**二元函数的图形**。



二元函数的图形通常是一张曲面.而曲面在 $xoy$ 面上的投影  $D$ 就是这个函数的定义域。



给定一个二元函数，应会求定义域，并画出定义域的图形。

确定二元函数定义域时与一元函数类似，使二元函数表达式有意义的  $x, y$  的取值范围。

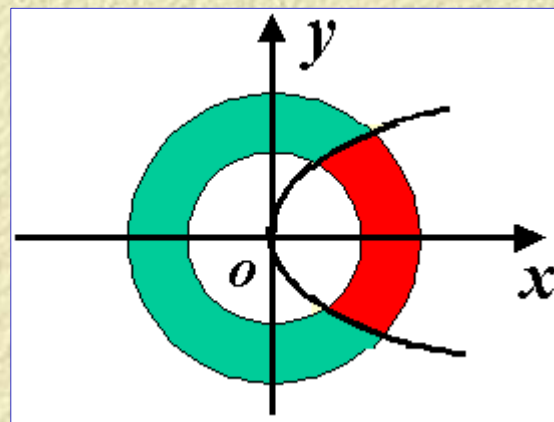
在画二元函数定义域的图形时，先将点  $(x, y)$  满足的条件中的不等式改写成等式，得到区域的边界方程，画出边界后，再确定满足不等式的点  $(x, y)$  位于边界的哪一边，最后考察定义域是否包含边界，包含时画实线，不包含时画虚线。



例1 求  $f(x, y) = \frac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$  的定义域.

解 
$$\begin{cases} |3 - x^2 - y^2| \leq 1 \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x > y^2 \end{cases}$$



所求定义域为  $D = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2\}$ .



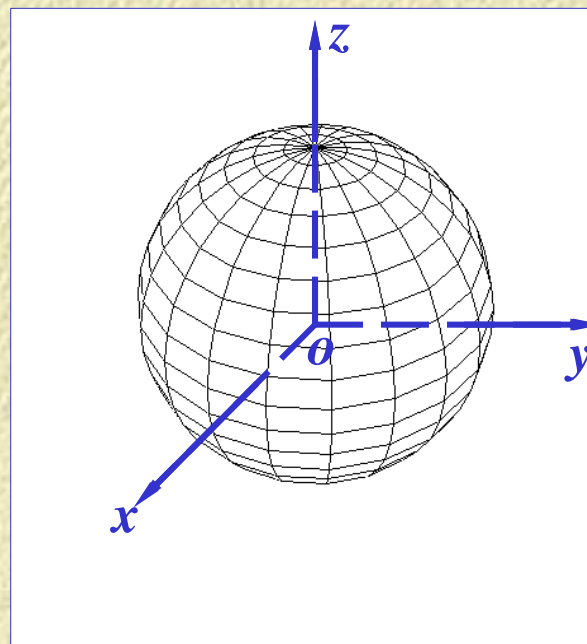
例如,  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

左图球面.

单值分支:  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

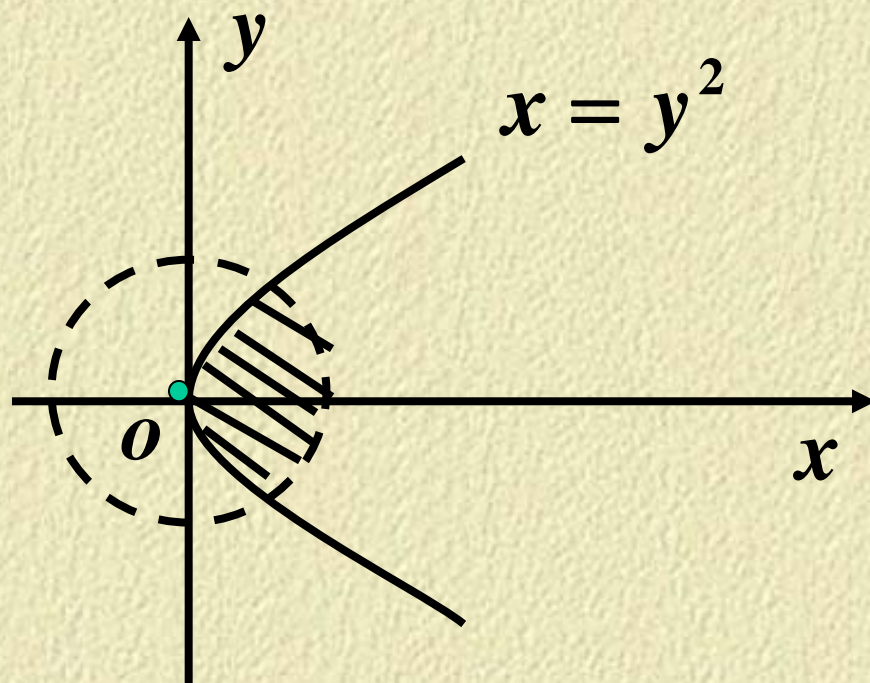




例2 求  $z = \frac{\sqrt{x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$  定义域

解:

$$D = \{(x, y) \mid x - y^2 \geq 0, 1 - x^2 - y^2 > 0, 1 - x^2 - y^2 \neq 1\}$$



上页

下页

返回



## 2. 二元函数的极限

**定义 1** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义 (点  $P_0$  可除外), 如果对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得对于满足不等式  $0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  的一切点, 都有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$  成立, 则称  $A$  为函数  $z = f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的二重**极限**,

记为  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$  或  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(p) = A$

(或  $f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0)$  这里  $\rho = |PP_0|$ ).



**定义 2** 设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ，点  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的聚点，如果对于任意给定的正数  $\varepsilon$ ，总存在正数  $\delta$ ，使得对于满足不等式  $0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  的一切  $D$  中的点，都有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$  成立，则称  $A$  为函数  $z = f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的二重**极限**，

记为  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$  或  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(p) = A$

(或  $f(x, y) \rightarrow A$  ( $\rho \rightarrow 0$ ) 这里  $\rho = |PP_0|$ ) .



说明:

(一) 定义中  $P \rightarrow P_0$  的方式是任意的;

确定极限不存在的方法:

找两种不同的趋近方式, 求出  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ , 若

两个值不相等, 此时可断言  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处极限不存在.

比如讨论  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  是否存在, 可令  $P(x, y)$

沿  $y = kx^n$  ( $n = 1$  用得较多) 趋向于点  $(0, 0)$ , 若极限值与  $k$  有关, 则可断言极限不存在;

上页

下页

返回



(二) 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

(三) 二重极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$  与累次极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  及  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  不同.

例如:  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

但  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  不存在. (令  $y = kx$ )



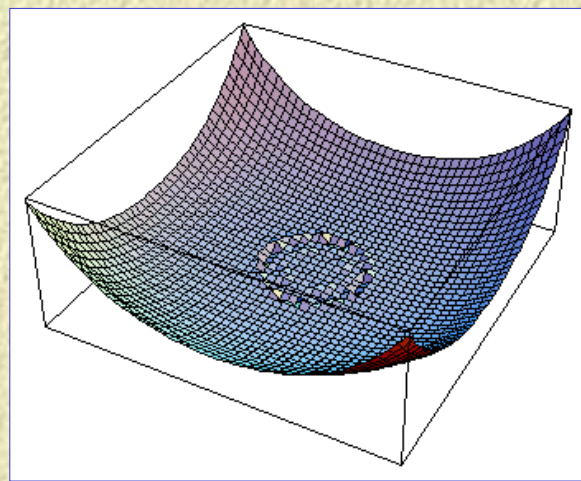
证明或计算二元函数极限时，可利用一元函数的某些方法和结论。

例3 求证  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$

证 令  $u = x^2 + y^2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} u \sin \frac{1}{u} = 0$$





例4 求极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 y^2)}{(x^2 + y^2)xy}$ .

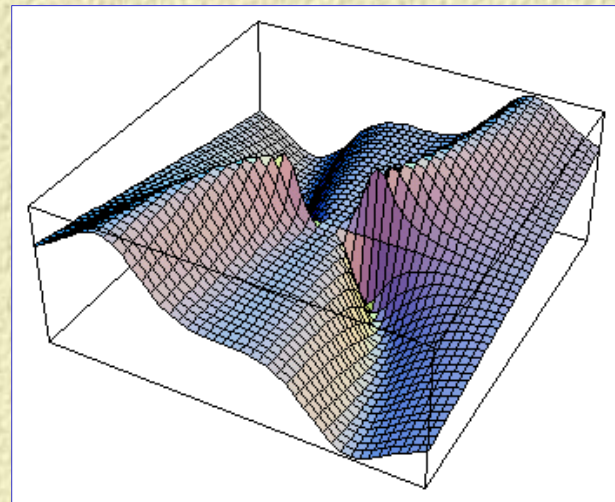
解  $\left| \frac{\sin(x^3 y^2)}{(x^2 + y^2)xy} \right| \leq \left| \frac{x^3 y^2}{2x^2 y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

注：函数在  $x$  轴及  $y$  轴上都没有定义，点  $P_0(0,0)$  是聚点，函数在点  $P_0(0,0)$  的去心邻域内没有定义。故按书中的定义无法讨论此点的极限，但按照极限的定义 2 就可以讨论此点的极限了。



例5 证明  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$  不存在.



证 取  $y = kx^3$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^3}} \frac{x^3 \cdot kx^3}{x^6 + k^2 x^6} = \frac{k}{1 + k^2},$$

其值随 $k$ 的不同而变化,

故极限不存在.



### 3. 二元函数的连续性

**定义** 设二元函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处**连续**.

若记  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  则定义中的极限也可以写成

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0 \quad \text{或}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta z = 0 \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$



设  $D$  是一闭区域,  $P_0(x_0, y_0)$  是闭区域  $D$  的边界点, 如果当点  $P(x, y) \in D$  以任何方式趋于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 都有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则称  $f(x, y)$  在边界点  $P_0(x_0, y_0)$  处 (有条件地) 连续.

这种连续性类似于一元函数在区间端点的左连续或右连续。



如果函数  $z = f(x, y)$  在区域  $D$  中的每一个内点处都连续, 则称函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  内连续  
如果函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  内连续, 且在闭区域  $D$  的每一个边界点处 (有条件地) 连续, 则称函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续.

当  $f(x, y)$  的定义域为一条曲线  $C$  时, 如果  $f(x, y)$  在曲线  $C$  的每一点处都 (有条件地) 连续, 则称函数  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上连续.

函数不连续的点称为间断点。



二元连续函数的图形是一个无孔、无裂缝、  
无洞的连续曲面，例： $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

而有间断点的图形可能是

一个孤立点， 例： $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$  （曲面上有孔）

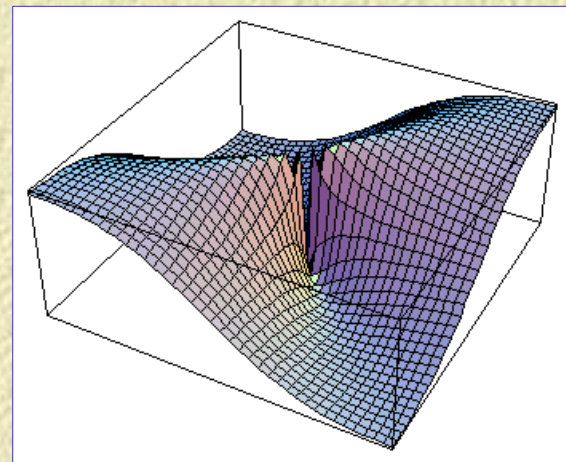
一条曲线， 例： $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$  （曲面上有裂缝）

一个区域， 例： $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$  （曲面上有洞）



### 例6 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$



在 $(0,0)$ 的连续性.

解 取  $y = kx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

其值随 $k$ 的不同而变化, 极限不存在.

故函数在 $(0,0)$ 处不连续.



# 闭区域上连续函数的性质

## (1) 有界性定理

若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则  $f(P)$  在  $D$  上有界, 即存在正数  $M$ , 使得对  $\forall P \in D$  有

$$|f(P)| \leq M$$

## (2) 最大值和最小值定理

若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则它在  $D$  上必定取得最大值和最小值, 即存在  $P_1, P_2 \in D$ , 使得对  $\forall P \in D$ , 有

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$$



### (3) 介值定理

若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续,  $M$  与  $m$  分别是  $f(P)$  在  $D$  上的最大值和最小值, 则对满足  $m \leq \mu \leq M$  的任意实数  $\mu$ , 必存在  $P \in D$  使得  $f(P) = \mu$

一元函数和、差、积、商的连续性以及复合函数的连续性同样适用于多元函数情形, 即多元连续函数的和、差、积、商 (分母不为零处) 仍是连续函数, 多元连续函数的复合函数仍是连续函数。



由常量及不同自变量的一元初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数。

例:  $xy + \cos(x^2 + y)$

$$\frac{\ln(1 + x^3 + yz)}{\sin(x + y)}$$

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。

定义区域是指包含在定义域内的开区域。



一般地, 求  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  时, 如果  $f(P)$  是初等函数, 且  $P_0$  是  $f(P)$  的定义域的内点, 则  $f(P)$  在点  $P_0$  处连续, 于是  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ .

例 7 求  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ .

解 原式  $= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}.$$



## 四、小结

二元函数的定义

二元函数极限的概念（注意趋近方式的任意性）

证明极限不存在的方法

二元函数连续的概念

闭区域上连续函数的性质



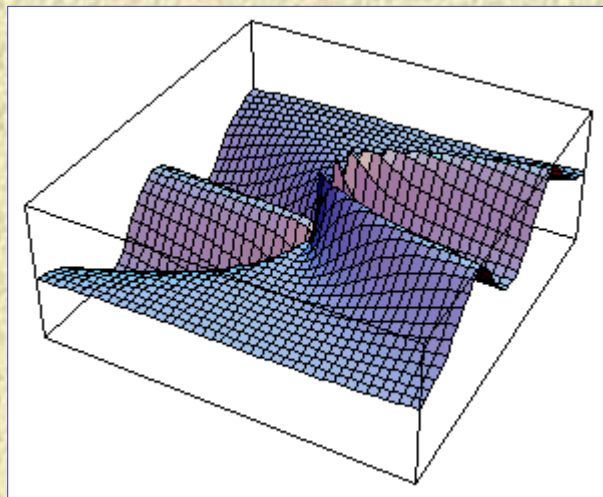
## 思考题

若点 $(x, y)$ 沿着无数多条平面曲线趋向于点 $(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 都趋向于  $A$ , 能否断定  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = A$  ?



## 思考题解答

不能.



例  $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)^2}, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$

取  $y = kx$ ,  $f(x, kx) = \frac{x^3 \cdot k^2 x^2}{(x^2 + k^4 x^4)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

但是  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在.

原因为若取  $x = y^2$ ,  $f(y^2, y) = \frac{y^6 y^2}{(y^4 + y^4)^2} \rightarrow \frac{1}{4}.$



## 思考题 讨论下列极限是否存在？

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y + 1} - 1}{x + y}$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y + 1} - 1}{x^2 + y}$$



## 思考题解答

(1) 下列解答是否正确？

错误解法 1 令  $y = kx$  ( $k \neq -1$ )

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{(1 + k)} = 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$  存在，且极限值为 0

**注释：** 即使当无穷多种方式趋近于点  $P_0$  时，二重极限趋近于同一个值，也不能认为极限存在。



错误解法 2

$$\text{令} \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$  存在，且极限值为 0

注释：  $\theta$  可取不同的值，会导致分母为零。

将此例改为  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{|x| + |y|}$ ，可以用上述方法。



### 错误解法 3

$$\because xy = o(x) = o(y)$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$  存在，且极限值为 0

**注释：** 二重极限中的自变量  $x, y$  是两个相互独立的量。



## 错误解法 4

先令  $y \rightarrow 0$  再令  $x \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y} = 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$  存在，且极限值为 0

**注释：** 相当于自变量在一种方式下二元函数的变化趋势。



## 错误解法 5 分子、分母同除 $xy$

$$\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$  存在，且极限值为 0

注释：当  $xy > 0$ （即  $x, y$  同号）时， $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = 0$

当  $xy < 0$ （即  $x, y$  异号）时， $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}$  为未定式。



## 错误解法 6

$$\because \left| \frac{xy}{x+y} \right| \leq \left| \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \right| = \left| \frac{\sqrt{xy}}{2} \right| \rightarrow 0$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$  存在，且极限值为 0

注释：不等式  $x+y \geq 2\sqrt{xy}$  只在  $x, y$  都大于零时才成立。



正确解法：令  $y = kx$  ( $k \neq -1$ )

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{(1 + k)} = 0$$

令  $y = x^2 - x$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = -1$$

所以极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$  不存在。



$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y + 1} - 1}{x + y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{(x + y)(\sqrt{x^2 y + 1} + 1)}$$

令  $y = kx \quad (k \neq -1)$

$$\text{上式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1 + k)(\sqrt{kx^3 + 1} + 1)} = 0$$

令  $y = x^3 - x$

$$\text{上式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x^3}{x^3 \sqrt{x^5 - x^3 + 1} + 1} = -\frac{1}{2}$$

故极限不存在.



$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y + 1} - 1}{x^2 + y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{(x^2 + y)(\sqrt{x^2 y + 1} + 1)}$$

$$\text{令 } y = kx \quad \text{或 } y = kx^2 (k \neq -1)$$

$$\text{上式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(x + k)(\sqrt{kx^3 + 1} + 1)} = 0$$

$$\text{令 } y = x^4 - x^2$$

$$\text{上式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - x^4}{x^4 \sqrt{x^6 - x^4 + 1} + 1} = -\frac{1}{2}$$

故极限不存在.

上页

下页

返回



# 作业:

P52: 1.  $3(1)(3).$   $4(2)(3).$  5.  $6(1)$

上页

下页

返回