6.4 平面的方程

6.4.1 平面的方程

平面解析几何中确定直线方程的方法:	空间解析几何中确定平面方程的方法:
点斜式	点法式
一般式	一般式
截距式	截距式
两点式	三点式

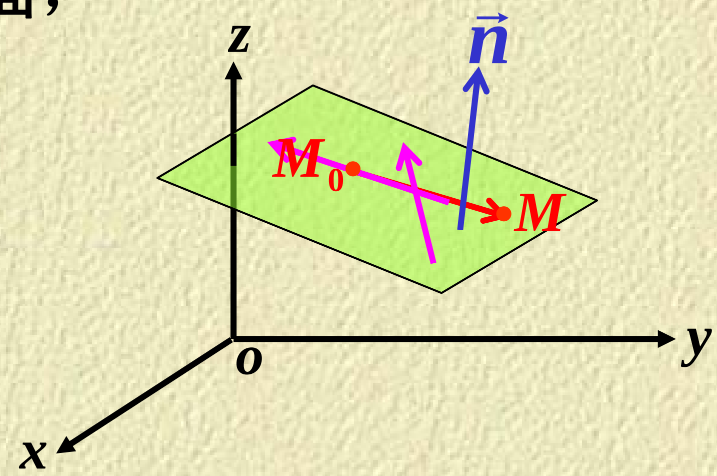
1. 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，

这向量就叫做该平面的**法线向量**.

法向量的**特征**：

垂直于平面内的任一向量.



已知平面法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$为平面上的一点

$M(x,y,z)$为平面上的任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}$, 故 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

因为 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$

则平面的点法式方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2．平面的一般方程

由点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

即 $Ax+By+Cz+D=0$

$\Leftarrow$ 取方程的一组解 x_0、y_0、z_0，

则 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

可得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

从平面方程中可得法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

问题 …需要几个条件确定 A, B, C, D?

上页 下页 返回

平面一般方程的几种特殊情况：

$Ax + By + Cz + D = 0$

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, 平面平行于 x 轴；

当 $D = 0$ 时，平面通过 x 轴；

类似地可讨论 $B = 0$, $C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面平行于 xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A = C = 0$, $B = C = 0$ 情形.

例 1 求过点 $(1,1,1)$，且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\},\quad \vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}=5\{2,3,1\}$$

取法向量 $\vec{n}=\{2,3,1\}$

所求平面方程为

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

例 2（书中例 3）求通过三点 $M_1(1,1,0)$,

$M_2(-2,2,-1)$, $M_3(1,2,1)$ 的平面方程.

解 由于三点都在平面上,

有 $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{n}$, $\overrightarrow{M_1M_3} \perp \vec{n}$

因此可取 $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \{2,3,-3\}$

所求平面 $2(x-1)+3(y-1)-3(z-0)=0$

化简得 $2x+3y-3z-5=0$

平面的三点式方程

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ 为平面上的三个点. $M(x, y, z)$ 为平面上的任意一点。

故向量 $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 共面, 即它们的混合积为零

故平面的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

例 3 设平面过原点及点 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解1 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点 $(6,-3,2)$ 知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}$, $\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

解2 $\vec{n}=\{6,-3,2\}\times\{4,-1,2\}=-2\{2,2,-3\}$

解 3：设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上任一点，则向量 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$, $\overrightarrow{OP}=\{6,-3,2\}$ 以及向量 $\vec{n}_1=\{4,-1,2\}$ 共面,

故 $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

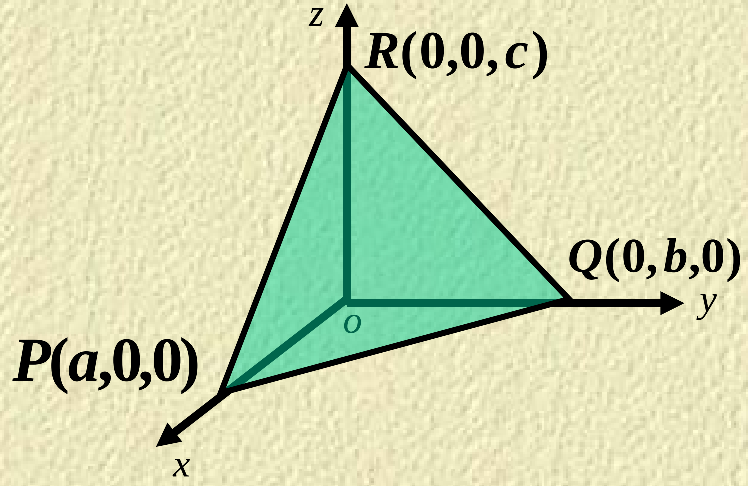
即平面方程为 $2x+2y-3z=0$

上页 下页 返回

例 4（书中例 4） 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得



$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

上页 下页 返回

将$A=-\dfrac{D}{a}$, $B=-\dfrac{D}{b}$, $C=-\dfrac{D}{c}$,

代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

小结　平面方程有四种形式:

(1)点法式方程;

(2)一般方程;

(3)截距式方程

(4) 三点式.

$\Rightarrow$ 可互相转化

注：利用向量共面也是建立平面方程的一种方法。

例 5（书中例 5） 求通过 y 轴且垂直于平面 $5x-4y-2z+3=0$ 的平面方程.

解 由于所求平面通过 y 轴，故一般方程缺少 y 项与常数项，设其方程为 $Ax+Cz=0$

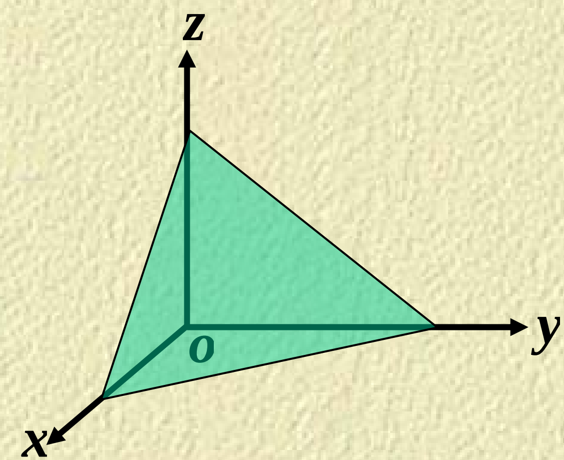
此平面与已知平面垂直，所以二者法向量互相垂直，故 $5A-2C=0 \Rightarrow A=\frac{2}{5}C$

所求平面为 $\frac{2}{5}Cx+Cz=0$

即 $2x+5z=0$

例 6　求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解1　设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$$\because V=1,\quad \therefore\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|abc|=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$（向量平行的充要条件）

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$， 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore \pm 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t} \quad \Rightarrow \quad t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$$

或 $a=-1,\quad b=-6,\quad c=-1,$

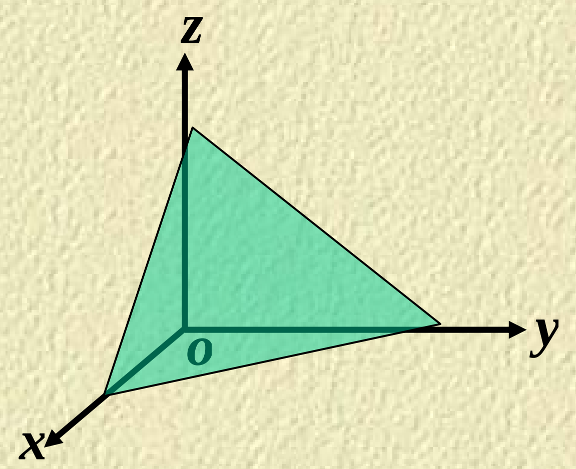
所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6.$

解2 设平面为 $6x + y + 6z + D = 0,$

化为截距式方程 $$\frac{x}{-\frac{D}{6}} + \frac{y}{-D} + \frac{z}{-\frac{D}{6}} = 1,$$

$\because V = 1,$

$$\therefore \frac{1}{6}\left|(-\frac{D}{6})(-D)(-\frac{D}{6})\right| = 1,$$



解得 $D = \pm 6$

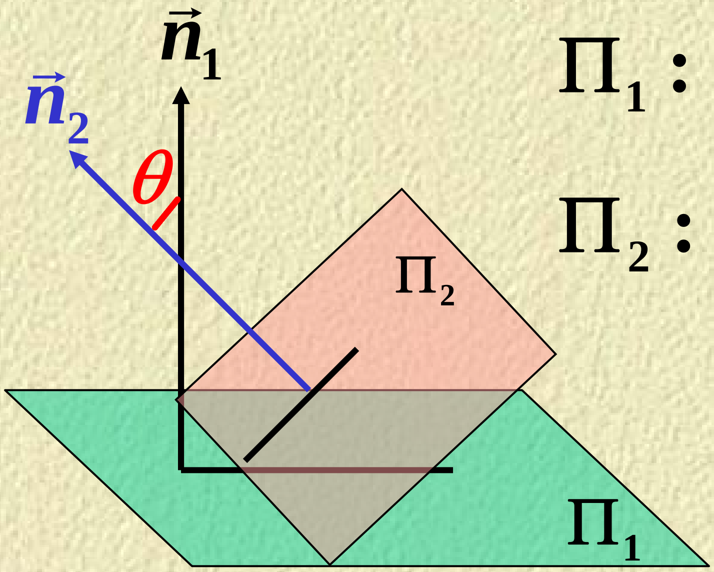
所求平面方程为 $6x + y + 6z = \pm 6.$

6.4.2 有关平面的一些问题

1．两平面的夹角

定义　两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

（通常取锐角）$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



$$\Pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\},$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\},$$

上页　下页　返回

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征:

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

例7 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

$$\vec{n}_1=\{2,-1,1\},\qquad \vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1\quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

$$\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2},$$ 两平面平行

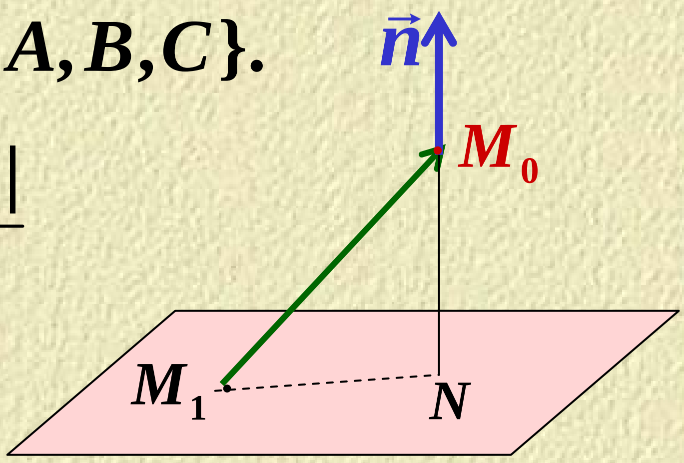
$\because M(0,1,0)\in\Pi_1\quad M(0,1,0)\in\Pi_2\ \therefore$ 两平面重合.

上页 下页 返回

2．点到平面的距离

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 在平面上取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 则向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 在平面的法向量 $\vec{n}$ 上的投影的绝对值就是点 M_0 到平面 π 的距离.

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\},\ \vec{n}=\{A,B,C\}.$$



$$d=|(\overrightarrow{M_1M_0})_{\vec{n}}|=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_0})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

上页 下页 返回

例 8(书中例 7) 求两平行平面 $3x+2y-z+6=0$ 及 $3x+2y-z-7=0$ 间的距离 d.

解 在平面 $3x+2y-z+6=0$ 上取一点，令 $x=y=0$，代入此方程得，$(0,0,6)$ 即为此平面上的点，故这两个平面的距离

$$d=\frac{|3\times0+2\times0-6-7|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{13}{\sqrt{14}}$$

实际上，可以借鉴中学中两个平行直线的距离公式，推出如下结论：已知两个平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$，$Ax+By+Cz+D_2=0$，则这两个平面的距离

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3．平面束

设平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 交于一直线 L,

系数A_1, B_1, C_1与A_2，B_2，C_2不成比例

过 L 的平面有无数个，所有这些平面构成一个平面束。

过 L 的平面束方程可表示为

$$\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

当上式所表示的平面不是 π_2 时, 可令 $\mu=1$,

则得平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

例：求过点$(1,1,1)$和直线$\begin{cases} 2x+3y-8=0 \\ y-2z+4=0 \end{cases}$的平面方程.

解：点$M\ (1,1,1)$不在平面$y-2z+4=0$上,

故$y-2z+4=0$不是所求平面,

因而设过已知直线的平面束方程为

$$2x+3y-8+\lambda(y-2z+4)=0$$

将点$M\ (1,1,1)$代入平面束方程，得$\lambda=1$,

故所求平面的方程为 $x+2y-z-2=0$

小结

平面的方程

- 点法式方程.
- 一般方程.
- 截距式方程.
- 三点式方程.

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

两平面的夹角.（注意两平面的位置特征）

点到平面的距离公式.

过已知直线的平面束方程.

思考题

若平面$x+ky-2z=0$与平面

$2x-3y+z=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，求$k=?$

思考题解答

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1\times 2+k\times(-3)-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-3k}{\sqrt{5+k^2}\cdot\sqrt{14}},\ \Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}.$$

作业：

P21： 2. 4. 5. 7. 9. 10. 12.