6.7　二次曲面

由三元二次方程所表示的曲面称之二次曲面.

如：球面、圆柱面、抛物柱面、双曲柱面、椭圆锥面.

相应地平面被称为一次曲面.

讨论二次曲面形状用平行截割法(截痕法)：

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌.

以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面.

1. 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

椭球面关于三坐标面对称.

且 $-a \le x \le a$， $-b \le y \le b$， $-c \le z \le c$，

即椭球面在平面 $x=\pm a,\ y=\pm b,\ z=\pm c$ 所围成的长方体内.

平行截割法(截痕法)：

椭球面与三个坐标面的交线：

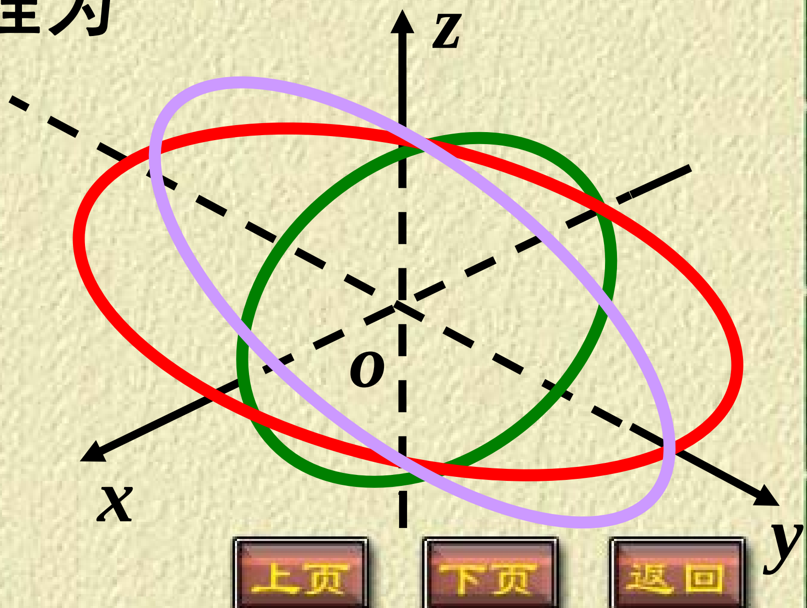
上页 下页 返回

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$

用平行于 xOy 面的平面 $z=h(|h|\le c)$ 去截椭球面,

截得的曲线称为截痕, 其方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$$

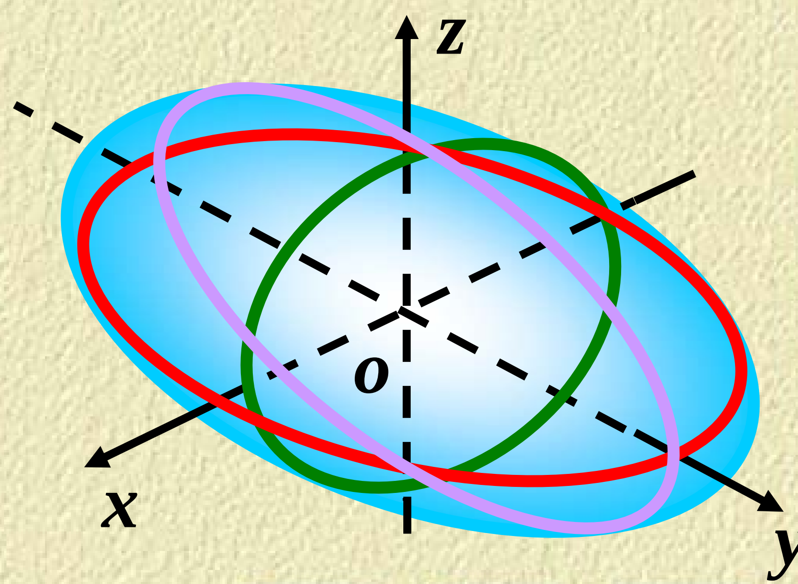


上页 下页 返回

当 $|h| < c$ 时，截痕为一椭圆，当 $|h|$ 由 0 变到 c 时，椭圆由大变小直至缩为一点 $(0,0,c)$ 或 $(0,0,-c)$.

用平行于面 yOx 或 zOx 的平面去截椭球面所得截痕与此类似.

如图



椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 方程可写为 $$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成 旋转椭球面

由椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成 旋转椭球面

(2) $a=b=c$, $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$ 球面

方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2. 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

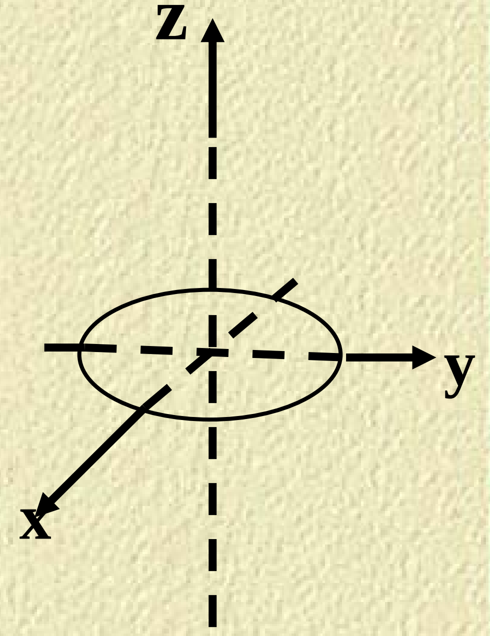
单叶双曲面对称于各坐标面.

平行截割法(截痕法):

（1）用坐标面 $xoy\,(z=0)$ 与曲面相截

截得中心在原点 $O(0,0,0)$ 的椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$



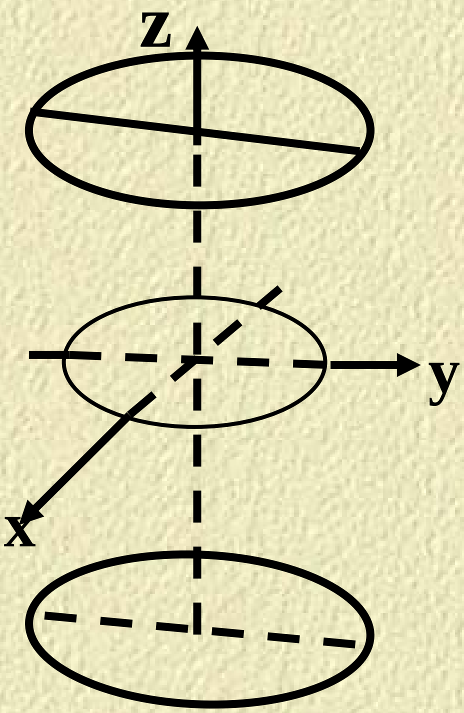
上页 下页 返回

与平面$z=h$的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}$$

由方程可知：$|h|$越大，

截痕椭圆的半轴越大



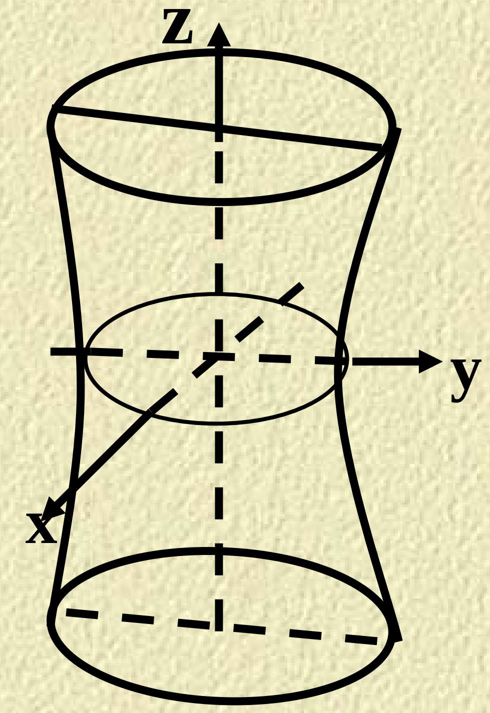
当h变动时，这种椭圆的中心都在z轴上.

（2）用坐标面 yoz $(x=0)$ 与曲面相截

截得中心在原点的双曲线.

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

实轴与 y 轴相合，
虚轴与 z 轴相合.



用平面 $x = h$ 的相截

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases}$$

当 $|h| \neq a$ 时，交线为双曲线.

上页 下页 返回

双曲线的中心都在x轴上.

$(1')\quad h^2 < a^2$，实轴与y轴平行，虚轴与z轴平行.

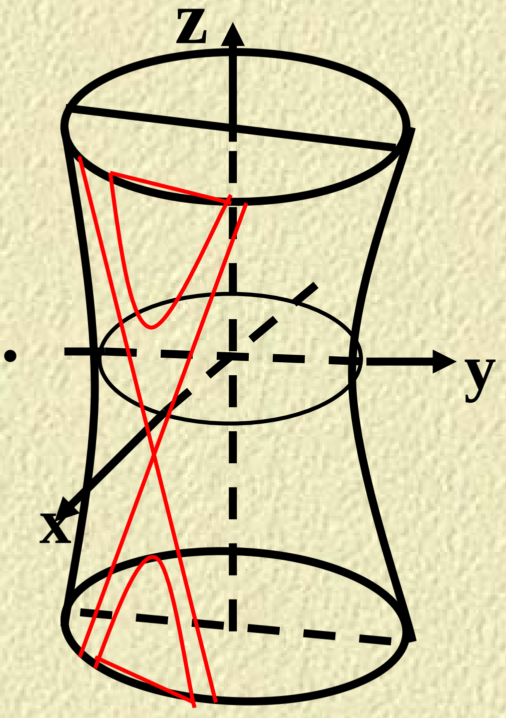
$(2')\quad h^2 > a^2$，实轴与z轴平行，虚轴与y轴平行.

当$|h| = a$ 时，

$(1')\quad h = a,$

截痕为一对相交于点$(a,0,0)$的直线.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{cases}$$



上页 下页 返回

$(2')\quad h=-a,$

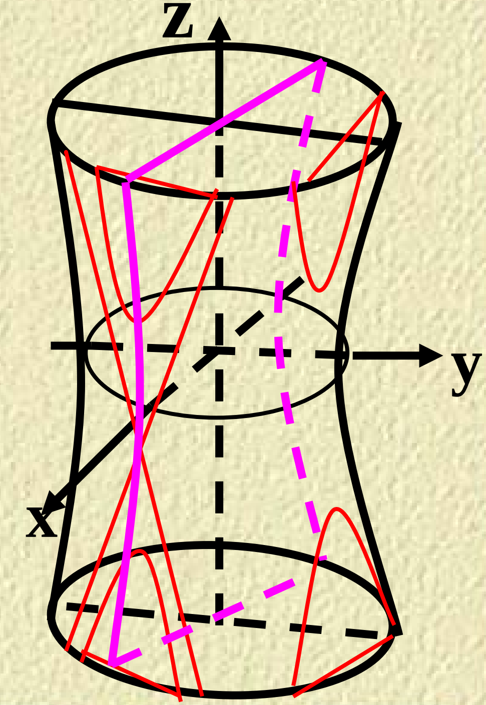
截痕为一对相交于点 $(-a,0,0)$ 的直线.

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0\\ x=-a\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0\\ x=-a\end{cases}.$$

（3）用坐标面 $zox(y=0)$ 与曲面相截

或用平面 $y=h$ 与曲面相截

结果与（2）相仿。



单叶双曲面其它方程：

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

3. 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

双叶双曲面对称于各坐标面.

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$， 有 $\frac{z^2}{c^2}\geq 1$，

故曲面在 $z=c$ 上方及 $z=-c$ 下方.

截痕法: 用平面 $z=h(|h|\geq c)$ 截得的截痕为椭圆,

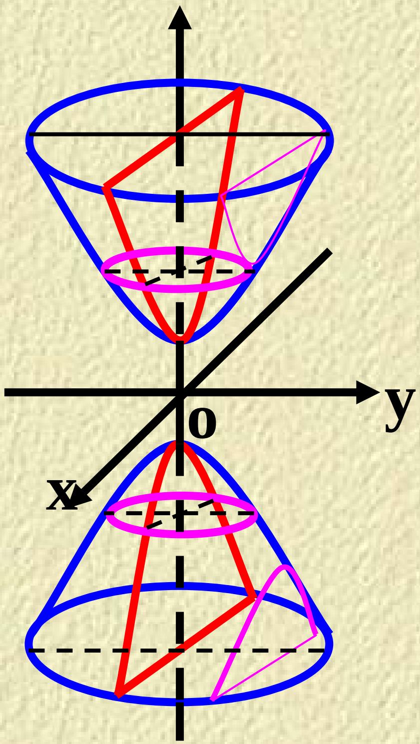
由方程可知: $|h|$ 越大，截痕椭圆的半轴越大，

特别地，当 $|h| = c$ 时，截痕为一点;

上页 下页 返回

用 $x=h$ 或 $y=h$ 截得的截痕都是双曲线.

如图



双叶双曲面其它方程:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

4. 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

椭圆抛物面经过原点， 关于 yOz 面和 zOx 面对称，

且 $z\geq 0$.

截痕法：

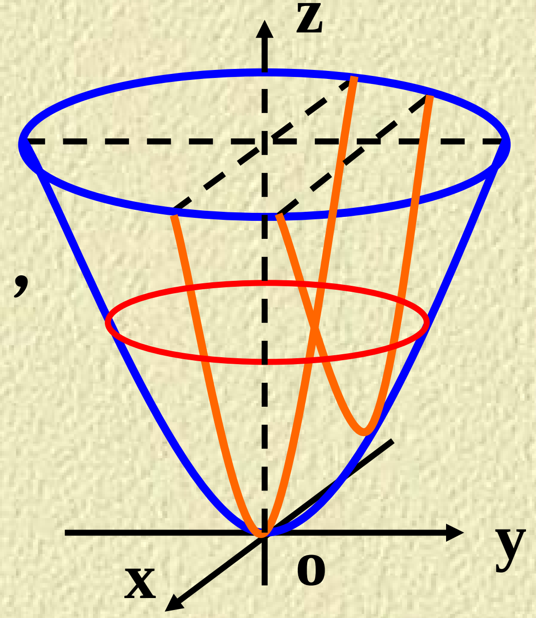
用平面 $z=h$ 截得的截痕为椭圆.

h 越大，截痕椭圆的半轴越大，

用平面 $x=h$ 或 $y=h$ 截得的

截痕都是开口向上的抛物线.

如图

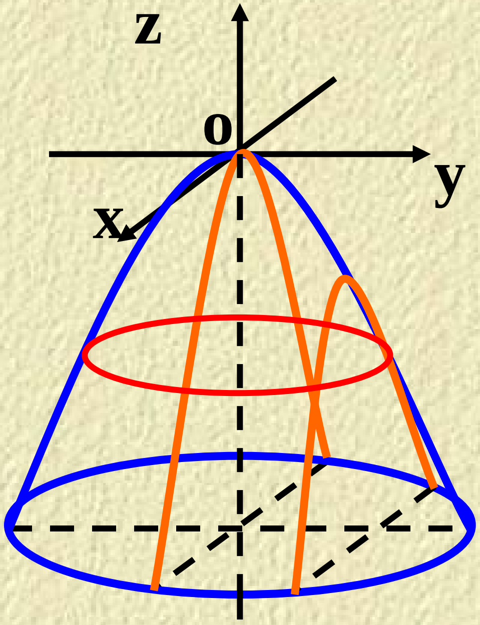


椭圆抛物面其它方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-z$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm y$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm x$$



上页 下页 返回

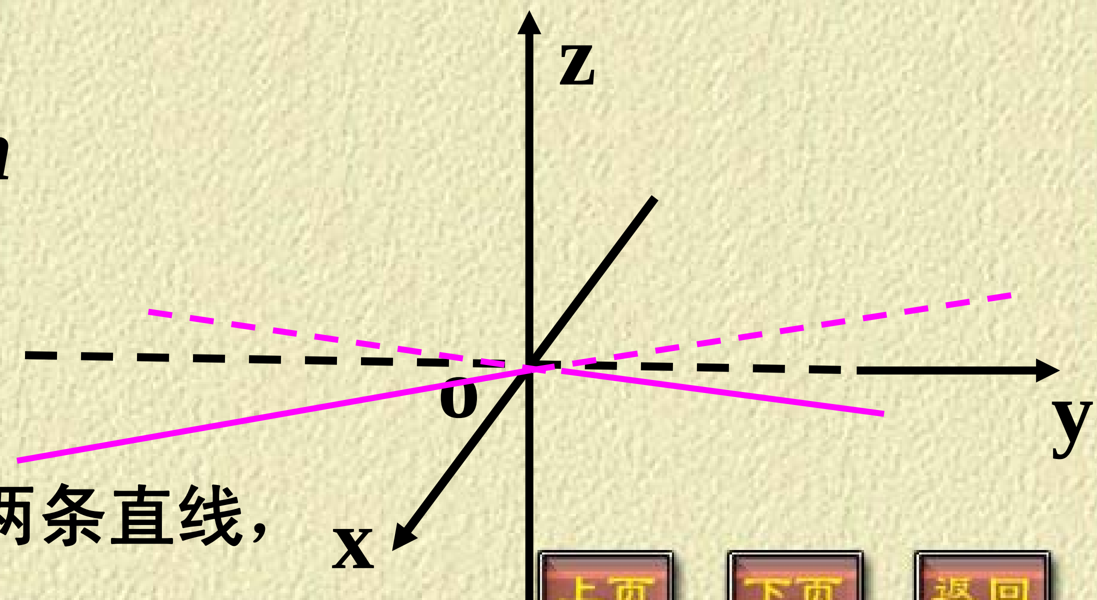
5. 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-z$

双曲抛物面经过原点，且关于 yOz 面和 zOx 面对称.

截痕法：

用平面 $z=h$ 截得的截痕为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-h \\ z=h \end{cases}$$



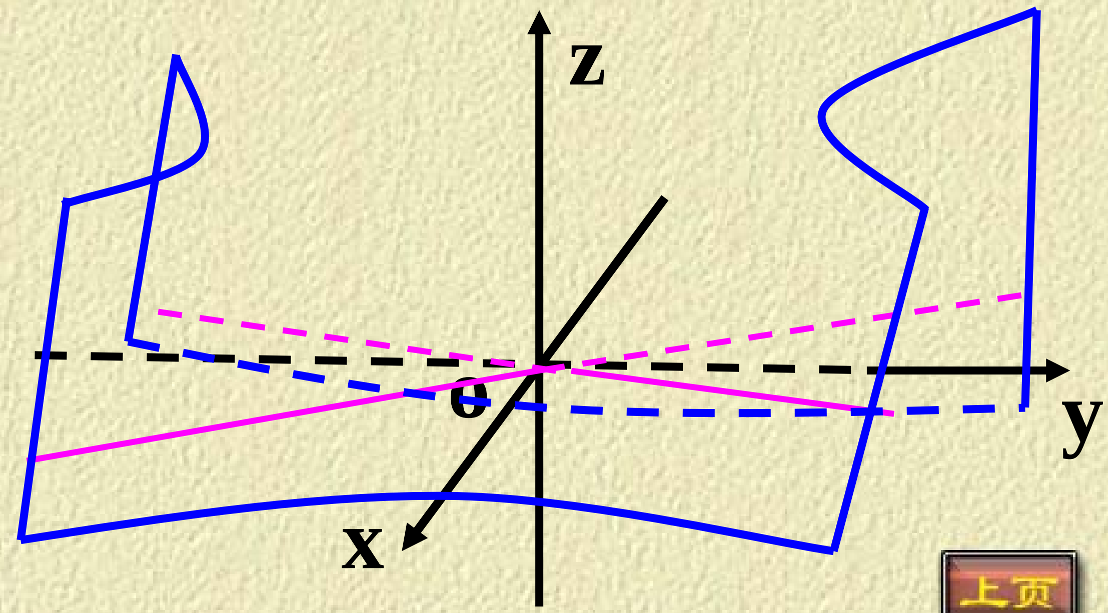
当 $h=0$ 时，截痕为两条直线，

上页 下页 返回

当 $h \neq 0$ 时，截痕为双曲线，双曲线的中心都在 z 轴上.

$(1')$ $h > 0$, 实轴与 y 轴平行，虚轴与 x 轴平行.

$(2')$ $h < 0$, 实轴与 x 轴平行，虚轴与 y 轴平行.

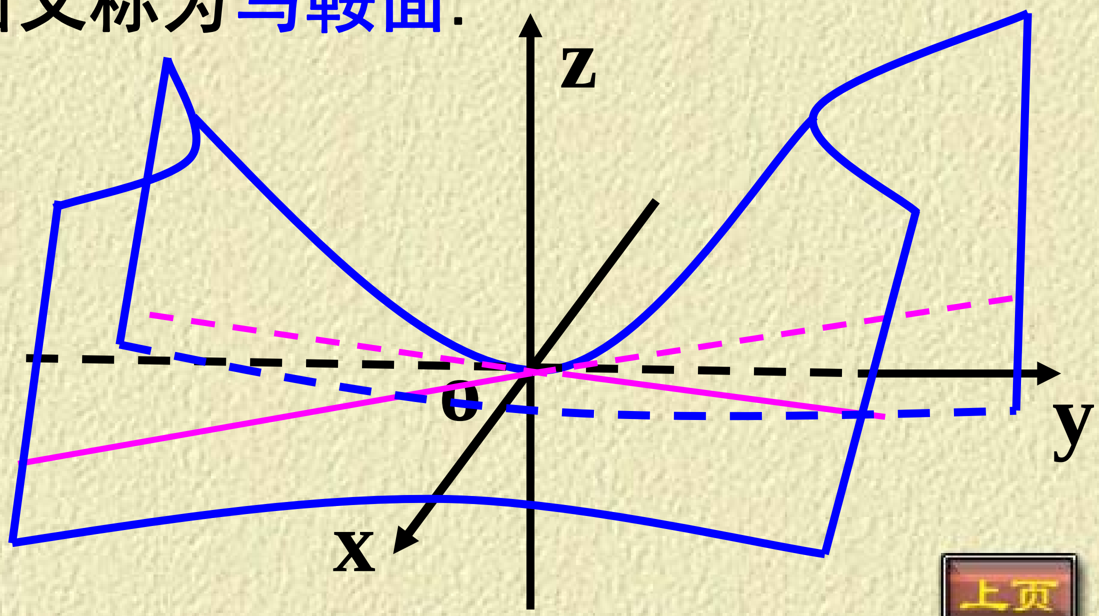


用平面 $x=h$ 与 $y=h$ 截得的截痕分别为

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = z + \dfrac{h^2}{a^2} \\ x = h \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = -z + \dfrac{h^2}{b^2} \\ y = h \end{cases}$$

分别是开口向上和开口向下的抛物线.

此曲面又称为马鞍面.



双曲抛物面其它方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm y$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm x$$

中学知识： 在平面解析几何中，如果将坐标原点平移到点 (a, b) 处，则新坐标 (X, Y) 与旧坐标 (x, y) 之间的关系为

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

补充知识： 如果新坐标系 XoY 与旧坐标系 xoy 有相同的坐标原点，由 ox 旋转到 oX 的角度为 θ，下面建立新坐标 (X, Y) 与旧坐标 (x, y) 的关系：

上页 下页 返回

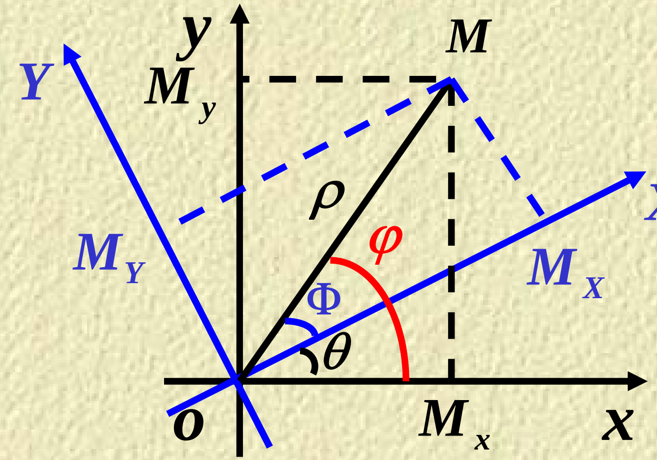
设 OX 与 oX 的角度为 θ ，

令 $|OM| = \rho$，φ 为 OX 到 OM 的角度，Φ 为 OX 到 OM 的角度，

因而有 $\varphi = \Phi + \theta$ (1)

根据直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad (2)$$



及 $$\begin{cases} X = \rho\cos\Phi \\ Y = \rho\sin\Phi \end{cases} \quad (3)$$

上页 下页 返回

由(1)、(2)得

$$x = \rho \cos \varphi = \rho \cos(\Phi + \theta)$$

$$= \rho (\cos \Phi \cos \theta - \sin \Phi \sin \theta)$$

$$= (\rho \cos \Phi) \cos \theta - (\rho \sin \Phi) \sin \theta$$

再由(3)得

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta$$

$$y=\rho\sin\varphi=\rho\sin(\Phi+\theta)$$

$$=\rho(\sin\Phi\cos\theta+\cos\Phi\sin\theta)$$

$$=(\rho\sin\Phi)\cos\theta+(\rho\cos\Phi)\sin\theta$$

$$=Y\cos\theta+X\sin\theta$$

$$=X\sin\theta+Y\cos\theta$$

得坐标变换公式

$$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta \end{cases}$$

由方程

$$z = axy$$

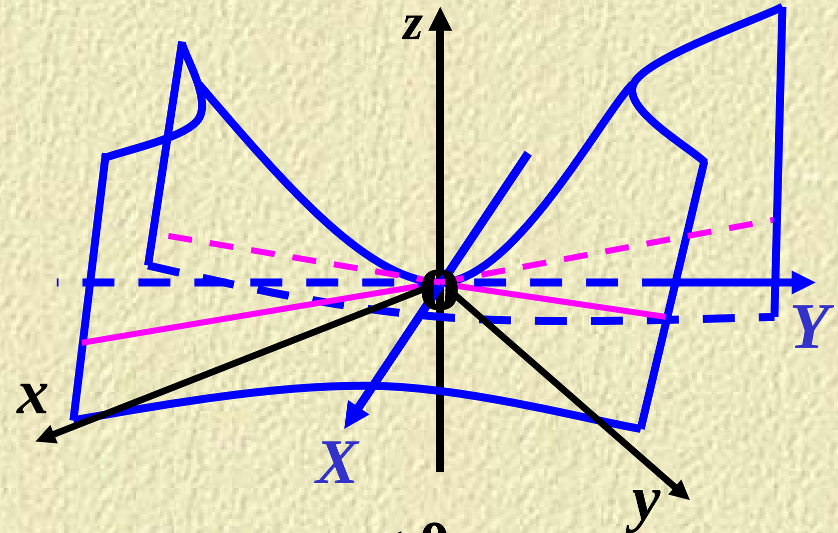
所确定的曲面也是双曲抛物面.

作坐标变换：保持原点和 z 轴不变， x 轴与 y 轴在 xoy 平面上旋转 $\frac{\pi}{4}$． 此时坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X - \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} X + \dfrac{\sqrt{2}}{2} Y \\ z = Z \end{cases}$$

将坐标变换代入方程得:

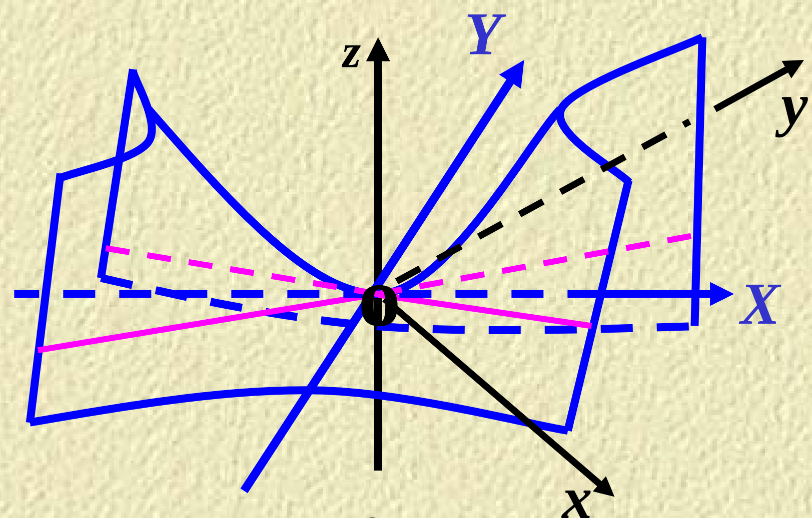
$$z=\frac{a}{2}(X^2-Y^2)$$



$a<0$

化为标准形式:

$$z=\frac{X^2}{\frac{2}{a}}-\frac{Y^2}{\frac{2}{a}}$$



$a>0$

特别地, $a=1$

$$z=xy$$

二次曲面小结

椭球面. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

双曲面(单叶、双叶).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

抛物面(椭圆、双曲).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-z$$

椭圆锥面.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

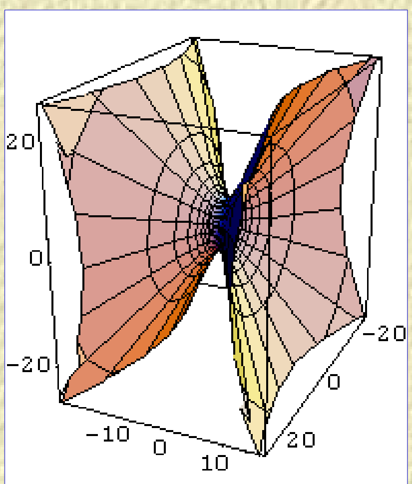
（熟知这几个常见曲面的特性）

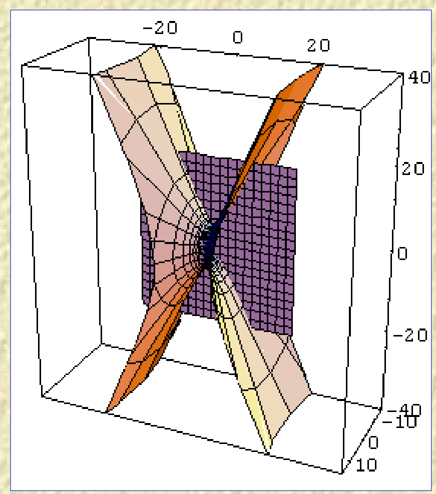
平行截割法(截痕法).

思考题 方程 $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

思考题解答

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y^2 + z^2 = 16 \\ x = -3 \end{cases}$$ 表示双曲线.





上页 下页 返回

作业：

P36：　2.