

《微积分 A》(下)期末考试试卷(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

一、填空(每小题 4 分, 共 28 分)

1. 经过点 $M(3, 2, -1)$, 且与 x 轴, y 轴, z 轴正向的方向角分别为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ 的直线的

标准方程为_____.

2. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ 在点 $(1, 3, 4)$ 处的法平面 π 的方程为_____ ,

原点到平面 π 的距离 $d =$ _____.

3. 设 $u(x, y, z) = x^y z$, 则梯度 $\text{gradu} =$ _____ , 散度 $\text{div}(\text{gradu}) =$ _____ .

4. 设 L 为 $x^2 + y^2 = a^2$ 正向, 则曲线积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} =$ _____ .

5. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 则 $I = \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS =$ _____ .

6. 将 $I = \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$ 转化为极坐标系下的累次积分(先 ρ 后 θ),
 $I =$ _____ .

7. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 当 p 满足_____ 时级数绝对收敛.

当 p 满足_____ 时级数收敛.二、(8 分) 求函数 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值点和极值.三、(12 分) 设 Ω 是由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$ 所围成的均匀立体(密度 $\mu = 1$).(1) 求 Ω 的表面积;

(2) 求 Ω 绕 z 轴的转动惯量.

四、(8 分) 若 $(3xy^2 - y^m)dx + (3x^n y - 3xy^2)dy$ 是某二元函数的全微分, 求 m, n 的值, 并对上述 m, n 的值计算曲线积分

$$I = \int_L (3xy^2 - y^m)dx + (3x^n y - 3xy^2)dy, \text{ 其中 } L \text{ 是摆线 } x = a(t - \sin t),$$

$y = a(1 - \cos t)$ 从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的一段.

五、(8 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数, 并指出收敛域.

六、(10 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x^2 z + 1)dx dy + y^2 x dy dz + z^2 y dz dx}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是

下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

七、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} x^n$ 的收敛域及和函数.

八、(8 分) 设 $S(x)$ 是函数 $f(x) = \pi + x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的以 2π 为周期的余弦级数的和函数. 求 $S(x)$ ($x \in [\pi, 2\pi]$) 的表达式及 $S(-5)$ 的值, 并求出此余弦级数的系数.

九、(8 分) 设 $u = f(x, y, z)$, 其中 f 有连续偏导数, 且 $\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z}$.

(1) 将 x, y, z 换成球坐标, 求 $u = f(x, y, z)$ 的表达式;

(2) 求 $\frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, 并证明 u 仅为 r 的函数, (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).