2010 级《微积分 A》第一学期期末试题

参考答案及评分标准（A 卷）

2011 年 1 月 20 日

一、 填空（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{\pi}{3}$;

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}$;

3. $f(x)=e^{2x}+C$;

4. $y=\frac{-\cos x+\pi-1}{x}$;

5. $-\frac{1}{3}$.

二、(9 分) 瑕点为： $x=1$ ………………… 1 分

令 $\sqrt{1-x}=t,\ x=1-t^2,\cdots dx=-2tdt$ ………………… 3 分

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$ ………………… 5 分

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\frac{2dt}{1+t^2}$$ ………………… 7 分

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\arctan t\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^1$$

$$=\frac{\pi}{2}$$ ………………… 9 分

三、（9 分）

（1） 定义域 $D: x\neq1$ ………………… 1 分

（2） $y'=\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}$, ………………… 2 分

$y''=\frac{3x}{(x-1)^4}$ ………………… 3 分

（3）令 $y'=0$, 得驻点： $x_1=0,\ x_2=3.$

令 $y''=0$, 得可能拐点横坐标: $x=0.$

（4）列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	不	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	存	+		+
$f(x)$	$\nearrow$	拐点	$\nearrow$	在	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$f(x)$的单增区间：$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，　$f(x)$的单减区间：$(1,3)$，

$f(x)$的凹区间：$(0,1)\cup(1,+\infty)$，　$f(x)$的凸区间：$(-\infty,0)$，

极小值：$f(3)=\dfrac{27}{8}$，

拐点：$(0,0)$ ………………… 7 分

（5）渐近线：$\because \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$，$\therefore x=1$为其垂直渐近线，

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=1$$

所以有斜渐近线：$y=\dfrac{1}{2}x+1.$ ………………… 9 分

四、（9 分） 证明：做定积分换元，令$x^2=u$，$du=2xdx$

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\int_0^{a^2}\frac{u}{2}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$$ ………………… 4 分

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$$ ………………… 6 分

$$=\frac{1}{2}[-x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$$

$$=\frac{1}{2}.$$ ………………… 9 分

五、（9 分） 特征方程：$r^2-2r-3=0$

特征根: $r_1=-1, r_2=3$ ………………… 2 分

对应齐次方程通解为: $Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ ………………… . 3 分

设非齐次方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ (1) 的特解为: $y_1^*=Axe^{-x}$

代入方程(1)，得 $A=-\frac{1}{4}$, $y_1^*=-\frac{1}{4}xe^{-x}$ ………………… 5 分

设非齐次方程 $y''-2y'-3y=x$ (2) 的特解为: $y_2^*=ax+b$

代入方程(2)，得 $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{2}{9}$ $y_2^*=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}$ ………………… 7 分

由解的叠加原理知原非齐次方程的通解为:

$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}.$ ………………… 9 分

六、(9 分) 原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1-\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2}$ ………………… 2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1-\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{2x}$ ………………… 4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x^2)^{-\frac{1}{\sin 2x^2}\bullet\frac{-\sin 2x^2}{x^2}}$ ………………… 6 分

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin 2x^2}{x^2}}=e^{-2}.$ ………………… 9 分

七、(9 分)(1) $S=\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ 令$x=\sin t$, $dx=\cos tdt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt$ ………………… 2 分

$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………………… 3 分

(2) $V_x=\int_0^1\pi(4-x^2)dx$ ………………… 5 分

$$=\frac{11\pi}{3}.$$ …………………6 分

$$V_y=\int_0^1 2\pi x\sqrt{4-x^2}\,dx$$ …………………8 分

$$=-\frac{2\pi}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi(8-3\sqrt{3})}{3}.$$ …………………9 分

八、(9 分) $\frac{dy}{dx}=-4t^2e^{-t}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=(4t-8)e^{-2t}$. …………………5 分

当$t=0$时。有$\frac{dy}{dx}=0,\frac{d^2y}{dx^2}=-8$

曲率半径$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{1}{8}$. …………………9 分

九、(9 分)(1)连续性

$$f(0)=\frac{1}{2},\quad f(0+)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$$f(0-)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\frac{1}{2},$$

$f(0+)=f(0-)=f(0)$，所以 $f(x)$在$x=0$处连续; …………………3 分

(2) 可导性

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2-2\cos x-x^2}{2x^3}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2(e^x-1)}=-\frac{1}{12},$$

$f_-'(0)\neq f_+'(0)$，所以 $f(x)$在$x=0$处不可导. …………………7 分

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2} & x<0\\ \text{不存在} & x=0\\ \dfrac{x\sin x-2+2\cos x}{x^3} & x>0\end{cases}$$ ………………. 9 分

十、（9 分）证明：记运动员开伞时刻为 $t=0$，且记此刻运动员的速度为 v_0.

由牛顿第二定律知，运动员的速度满足下列微分方程初值问题：

$$\begin{cases}m\dfrac{dv}{dt}=mg-kv^2\\ v(0)=v_0\end{cases}$$ ………………. 4 分

分离变量，得微分方程的解为：

$$\frac{v-\sqrt{\dfrac{mg}{k}}}{v+\sqrt{\dfrac{mg}{k}}}=\frac{v_0-\sqrt{\dfrac{mg}{k}}}{v_0+\sqrt{\dfrac{mg}{k}}}e^{-\frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}t}$$ ………………. 7 分

在上式中令 $t\to+\infty$，得 $v\to\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$. 结论得证. ………………. 9 分

十一、（9 分）构造辅助函数：$F(x)=xe^{1-x}f(x)$， ………………. 2 分

又因为 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{1-x}f(x)dx$，由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2})$，使得

$f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$，即 $F(1)=F(\eta)$ ………………. 4 分

$F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，且 $F(\eta)=F(1)$，由罗尔定理，有至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$. ………………. 6 分

又 $F'(x)=e^{1-x}[f(x)+xf'(x)-xf(x)]$

即 $F'(\xi)=e^{1-\xi}[f(\xi)+\xi f'(\xi)-\xi f(\xi)]=0$，又 $e^{1-\xi}\neq 0$

所以 $f(\xi)+\xi f'(\xi)-\xi f(\xi)=0$

即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$. ………………. 9 分