2009级《微积分A》第一学期期末试题

参考答案及评分标准（A卷）

2010年1月29日

一、 填空（每小题4分，共28分）

1. 2;　　　　2. $dy=-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2}e^{f(\frac{1}{x})}dx;$

3. $2\sqrt{1+\tan x}+C,$　　　2;

4. $\dfrac{dy}{dx}=e^{(y+x)^2}-1,$　　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1;$

5. $y=\dfrac{1}{2}+Ce^{-2x^2}$;

6. 切线：$x-ey-e=0,$　　法线：$ex+y+1=0$;

7. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

二、(10分)（1）当$-1\le x<0$时，有

$$F(x)=\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

当$0\le x\le 1$时，有

$$F(x)=\int_{-1}^{0}(t+1)dt+\int_{0}^{x}\arctan t dt$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2} & x\in[-1,0)\\ x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2} & x\in[0,1]\end{cases} \qquad \cdots\cdots 5\text{分}$$

（2）只需讨论$F(x)$在$x=0$处的可导性和连续性，

连续性：$F(0+)=F(0-)=F(0)=\frac{1}{2}$，$\therefore F(x)$在$x=0$处连续. …7 分

可导性：$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=1$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{x}=0$$

$F'_-(0)\neq F'_+(0)$，$\therefore F(x)$在$x=0$处不可导. ....10 分

三、(9 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t+4}}dt}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{x+4}}}{1-\cos x}$ ....2 分

=1 .... 3 分

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-ax-b}{x}=0$ ....5 分

$\Rightarrow a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1$ ....6 分

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}-1=-\dfrac{1}{2}$........ 9 分

（注：若思路正确，可适当给分）

四、(9 分) $y'=\dfrac{1}{x},\ y''=-\dfrac{1}{x^2}$ .... 2 分

曲率：$K=\dfrac{|y''|}{[1+y'^2]^{3/2}}=\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$，　$(x>0)$ .... 3 分

$K'_x=\dfrac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$， .... 4 分

令$K'_x=0$，得唯一驻点$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， .... 5 分

又当$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$K'_x>0$；当$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$K'_x<0$；

$\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是$K$的极大值点，又因为驻点唯一，

所以$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$是K的最大值点. ……………….7 分

所以曲线$y=\ln x$上曲率最大的点的坐标为$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2})=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\ln 2)$.

$K_{最大}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. ……………….9 分

（注：若导数求错，但解题思路正确，可适当给分；对求出的驻点不加判断，直接说是最大值点，扣 2 分）

五、(10 分)（1）由对称性，$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$ ………….……2 分

$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt$ ……………….4 分

$=6$ ……………….5 分

（2）$V=2\int_0^1 \pi y^2(x)dx$ ……………….7 分

$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t dt$ ……………….9 分

$=\dfrac{96\pi}{315}$. ……………….10 分

六、(10 分) 特征方程：$r^2-3r+2=0$ ……………….1 分

特征根：$r_1=1, r_2=2$ ……………….3 分

对应齐次方程通解为：$Y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$ ……………….4 分

设非齐次方程的特解为：$y^*=Axe^x$ ……………….5 分

代入原方程，得$A=-2,\quad y^*=-2xe^x$ ……………….6 分

非齐次方程的通解为：$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$ ……………….7 分

由题意，有如下初始条件：$y(0)=1, y'(0)=(2x-1)\big|_{x=0}=-1$ …………8 分

代入通解得：$C_1 = 1, C_2 = 0,$

所以 $y(x) = e^x - 2xe^x(1-2x)e^x.$ ………………. 10 分

七、（9 分） 证明：$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$

在$\int_a^{2a} f(x)dx$中，做定积分换元，令$x = 2a - t$,有

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-t)(-dt)$$

$$= \int_0^a f(2a-t)dt = \int_0^a f(2a-x)dx$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$$

$$= \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx.$$ ………………5 分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi d\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$= -\pi\ln|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\ln(1+\sqrt{2}).$$ ………………. 9 分

八、（9 分）设 t 时刻容器内溶液的含盐量为$m(t)$.

考虑时间间隔$[t, t+dt]$内，含盐量的改变量，得

$dm = 0 - \frac{m}{10+t}2dt$，初始含盐量为：$m(0) = 100g$. ………………4 分

分离变量，解方程，得 $m(t)=\dfrac{C}{(10+t)^2}$， ……………… 6 分

由初始条件 $m(0)=100g$.得 $C=10^4$

所以 $m(t)=\dfrac{10^4}{(10+t)^2}$， $m(30)=\dfrac{10^4}{(10+30)^2}=6.25g$. …………9 分

九、（6 分） 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+f(x))}{x-1}=0$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\ln(2+f(x))=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(1+f(x))=0$, $\Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$. ………………1 分

又 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2+f(x))}{x-1}\dfrac{f(x)+1}{\ln(2+f(x))}=0$ ………………2 分

又因为 $f(0)=\int_0^1 f(x)dx$，由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$f(0)=f(\eta)$，$f(x)$在区间$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件，有

存在$\tau\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $f'(\tau)=0$. ………………4 分

构造辅助函数: $F(x)=f'(x)e^x$， ………………5 分

$F(x)$在$[\tau,1]$上连续，在$(\tau,1)$内可导，且$F(\tau)=F(1)=0$，

由罗尔定理，有存在$\xi\in(\tau,1)\subset(0,2)$，使得 $F'(\xi)=0$

即 $F'(\xi)=e^{\xi}[f'(\xi)+f''(\xi)]=0$，又 $e^{\xi}\neq 0$

所以 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$ ……………6 分