10.2 正项级数

定义：如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中各项均有$u_n \geq 0$，这种级数称为正项级数.

定理：(正项级数收敛的充要条件)：

正项级数收敛的充分必要条件是其部分和所成的数列s_n有界.

1. 比较判别法(不等式形式)

设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，且满足$u_n \le v_n$（当 n 充分大时）

则（1）当$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

（2） 当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

上页 下页 返回

推论： 设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，且有

$u_n \le C v_n \quad (C>0)$（当 n 充分大时）

则 （1）当$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

（2）当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

例： 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}$ (k为正整数）的敛散性。

$$\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} \quad 但 \frac{2}{n+k} \ge \frac{1}{n} \quad (n \ge k)$$

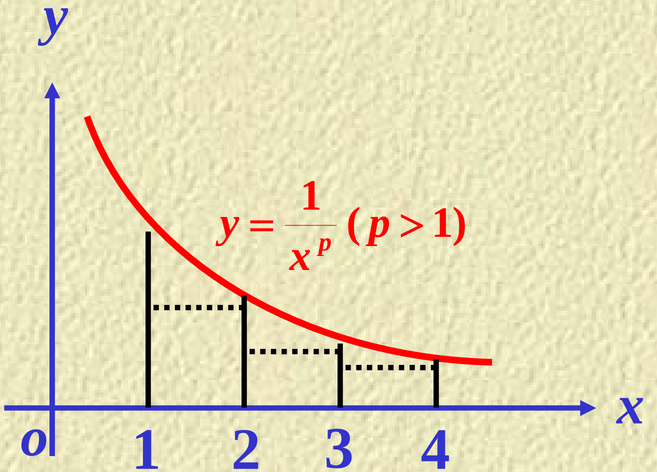
故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+k}$的发散。

比较判别法的不便： 须有参考级数.

例 1（书中例 1）讨论 P–级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解　设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则 $P-$级数发散.



设 $p>1$, 由图可知 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$

$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n\frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}$$

上页　下页　返回

即 s_n 有界，则 $P-$ 级数收敛 .

$P-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}当p>1时， & 收敛\\ 当p\le 1时， & 发散\end{cases}$

重要参考级数:

等比级数
几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ $\begin{cases}当|q|<1时,收敛于 \dfrac{a}{1-q}\\ 当|q|\ge 1时,发散\end{cases}$

P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}当p>1时， & 收敛\\ 当p\le 1时， & 发散\end{cases}$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

我们利用等比(几何)级数、P-级数、调和级数作为比较对象，用比较判别法可以判别许多级数的收敛性。

比较前先对级数作一个大致的判断（便于决定缩或放通项)，一般是对其通项进行估计：

看通项是否是无穷小。

若不是无穷小，由级数收敛的必要条件知级数发散)；

若是无穷小，由于 P-级数中，以 $p = 1$ 为临界，故以 $\frac{1}{n}$ 为基本无穷小量来估计 u_n 的阶数.

上页 下页 返回

即确定 k，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^k}=C,\quad (C>0)$ 则 u_n 为 k 阶无穷小量。

由于 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^k=\dfrac{1}{n^k}$，当 $k>1$ 时收敛，故在使用比较判别法时，可用 $p=k$ 的 P–级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^k}$ 作为比较。

上页 下页 返回

例 2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明

$$\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n(n+n)}} > \frac{1}{2n},$$

用比较判别法（不等式形式）判别时，当被判别的级数估计发散时，将通项适当缩小。

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 的敛散性.

解：$u_n \to 0,\quad u_n / \frac{1}{n} = \frac{1}{2^n} \to 0$

$$u_n = \frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n} \quad (n > 1)$$

用比较判别法（不等式形式）判别时，当被判别的级数估计收敛时，将通项适当放大。

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 为 $q = \frac{1}{2},\quad a = 1$ 的等比级数，它是收敛的。

由比较判别法知：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ 也收敛。

上页 下页 返回

例 4 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解: $u_n \to 0,\quad u_n / \frac{1}{n} = \ln n \to \infty$

$$u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad (n \geq 3)$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

由比较判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 也发散。

例 5（书中例 4）判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$的敛散性

解　通项$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$为无穷小量，

据通项形式选几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$作比较

由$\frac{1}{n^n}\le\frac{1}{2^n}(n\ge 2)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，

由比较判别法知：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$收敛。

2. 比较判别法(极限形式)

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $(v_n \neq 0)$，且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$$

(1) 若 $\lambda > 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛和发散；

(2) 若 $\lambda = 0$，则由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) 若 λ 为 $+\infty$，则由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

若通项是同阶无穷小，则相应级数有相同的敛散性；阶数越高，相应级数收敛的可能性越大。

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$ 的敛散性.

当被判别的级数需要适当放大或缩小时有时可利用带拉格朗日余项的泰勒公式。

解 1：$u_n \to 0$

$$\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x + \frac{5}{2}\pi)}{5!}x^5$$

$$\therefore \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{3!n^3} \qquad \because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \text{ 收敛}$$

由比较判别法知：$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$ 也收敛。

上页 下页 返回

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 2: $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{4}$$ $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛,

由比较判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 也收敛。

例 6 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 3: $\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

可利用带皮亚诺余项的泰勒公式确定级数通项的阶数。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛 由比较判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 也收敛。

练习： 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性.

例 7 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ 的敛散性.

解： $u_n \to 0$， 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，但 $u_n = \frac{1}{2^n - n} > \frac{1}{2^n}$

现用极限形式的比较判别法:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - n} / \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$$

由比较判别法知: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 有相同的敛散性，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ 收敛。

$$\frac{1}{2^n - n} < \frac{1}{2^n - \frac{1}{2} 2^n} = \frac{2}{2^n} \quad (n > 2)$$

上页 下页 返回

例 8　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$的敛散性.

解：$u_n \to 0$，$u_n = \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$　$(\because \sin x < x)$

但因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故不能用不等式形式的比较判别法。

现用极限形式的比较判别法：　$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}/\frac{1}{n}=1$

由比较判别法知：$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$有相同的敛散性，

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散。

3.比值判别法 (达朗贝尔D'Alembert判别法)

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，且$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$，

(1) 若$\lambda<1$，则级数收敛；

(2) 若$\lambda>1$或λ为$+\infty$，则级数发散；

(3) 若$\lambda=1$，则无法确定级数敛散性。

上页 下页 返回

比值判别法的优点：不必找参考级数.

使用比值法注意两点:

1. 当 $\lambda = 1$ 时比值判别法失效;

例　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

$\Bigg\}(\lambda = 1)$

当 $\lambda = 1$ 时，无法判别级数的敛散性，有时可以观察 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 。若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，即后项总大于前项，通项不趋向于 0，由此得级数发散。

上页　下页　返回

2. 条件是充分的, 而非必要.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n,\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6},$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2},\qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例 9　判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

解　(1) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

通项中带有“阶乘”时，应使用比值判别法。

上页　下页　返回

例 9 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

---

(2) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\frac{n+1}{10}\to\infty \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

例 9　判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

---

(3) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=1,$

比值判别法失效, 改用比较判别法

$\because \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}$,　$\because$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

上页　下页　返回

例 10　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ 的敛散性。

解： $\because u_n=\frac{2^n}{n}$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}/n+1}{2^n/n}=\frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2>1$$

由比值判别法知：该级数发散。

实际上，可检验 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\infty$

上页　下页　返回

例 11　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}$ 的敛散性。

解: $\because u_n=\frac{n\cos^2\frac{n}{3}\pi}{2^n}\le\frac{n}{2^n}=v_n$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1/2^{n+1}}{n/2^n}$

此例综合运用了两种判别法

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$

由比值判别法知：该级数收敛。

上页　下页　返回

4. 根值判别法 (柯西判别法)

设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$

(1) 若 $\lambda < 1$，则级数收敛；

(2) 若 $\lambda > 1$ 或 λ 为 $+\infty$，则级数发散。

(3) 若 $\lambda = 1$ 则无法确定级数敛散性。

例如，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 的敛散性

$$\because \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$$ 级数收敛.

上页 下页 返回

例 12　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^{n}}\quad(a>0)$ 的敛散性。

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}$

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，级数发散；

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，级数收敛；

当 $a=1$ 时，此法不能判定，

但 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\infty$，故级数发散。

上页　下页　返回

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$ 的敛散性.

例 5(书中例 4) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 的敛散性

例 10 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ 的敛散性。

例 11 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n}{3}\pi}{2^n}$ 的敛散性。

以上各例用根值法很简单。

上页 下页 返回

5. 积分判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的单调递减连续函数，$f(n)=u_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的收敛性。

上页 下页 返回

例 13　判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性。

解：设 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$

$\because$ 广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^p}$

当 $p>1$ 时收敛；　$p\le 1$ 时发散。

由积分判别法知：级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

当 $p>1$ 时收敛；　$p\le 1$ 时发散。

积分判别法建立了无穷级数和无穷积分在敛散性上的联系，但是级数和与积分值不同。

例
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2^x}=-\left.\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{2\ln 2}$$

上页 下页 返回

小结

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">正 项 级 数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">收敛判别法</td><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$,则级数收敛;
2. 当 $n \to \infty$, $u_n \not\to 0$, 则级数发散;
3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.不等式形式比较法
6.比值法
8.积分法</td><td>5.极限形式比较法
7.根值法</td></tr>
</table>

上页 下页 返回

如何选用正项级数的判别法？

例：　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性。

解：［法 1］不等式比较判别法

因 $0 < \sin\frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{3^n}$，故 $2^n \sin\frac{\pi}{3^n} < 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n} = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$，，

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是公比为 $\frac{2}{3} < 1$ 的几何级数，它是收敛的，

所以由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

上页　下页　返回

例：判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性。

[法 2]极限比较判别法

因$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \pi$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$是公比为$\frac{2}{3}<1$的几何级数，它是收敛的，所以由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

上页 下页 返回

例:　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性。

[法 3] 比值判别法

因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}2\frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1,$$

所以由比值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

上页　下页　返回

例：　判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的敛散性。

[法 4]根值判别法

因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n \sin\frac{\pi}{3^n}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\right)^{\frac{1}{n}} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1,$$

所以由根值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

例: 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性。

分析 **如果认为**$n\to\infty$时，无穷小量$\frac{2+(-1)^n}{2^n}$与$\frac{1}{2^n}$，

“同阶”而使用比较判别法的极限形式，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[2+(-1)^n]/2^n}{1/2^n}=\lim_{n\to\infty}[2+(-1)^n]$$

上述极限是不存在的，可见用此法不能判别。

如果考虑用比值判别法，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}$$

例：　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}=\begin{cases}\frac{3}{2}, & n\text{为奇数}\\ \frac{1}{6}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

由于极限不存在，所以比值判别法失效。

可见本例用通常认为比较方便的方法都失效了。

先考虑用不等式形式的比较判别法：

因为 $\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots)$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}<1$ 的几何级数，它是收敛的，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛。

上页　下页　返回

例: 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性。

如果用根值判别法，那么因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[2+(-1)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

（$\because 1\le\left[2+(-1)^n\right]^{\frac{1}{n}}\le 3^{\frac{1}{n}}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，由夹逼定理$\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+(-1)^n\right]^{\frac{1}{n}}=1$）

所以由根值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛。

上页 下页 返回

P233习题10.1第4题.

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$a_n \le b_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛.

参考解答

证明 因为$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，且$b_n \le c_n \quad (n=1,2,\cdots)$，

所以由比较判别法$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。?

所给级数未必是正项级数。

上页 下页 返回

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$都收敛，且$a_n \le b_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛.

正确的证明1

设$u_n = c_n - b_n \ge 0$，$v_n = c_n - a_n \ge 0$且$v_n \ge u_n$，

由$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$都收敛，由性质得$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，由比较

判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$a_n \le b_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛.

正确的证明1

又$b_n = c_n - (c_n - b_n) = c_n - u_n$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$和

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$都收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$a_n \le b_n \le c_n$

$(n = 1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛.

正确的证明2(不用比较判别法)

设$u_n = c_n - b_n \ge 0,\quad v_n = c_n - a_n \ge 0$且$v_n \ge u_n$，设

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$，则$S_n$单调递增，且有$\sigma_n \ge S_n$，

由$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，得$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，

上页 下页 返回

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$a_n \le b_n \le c_n$

$(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛.

正确的证明2(不用比较判别法)

由单调有界准则知$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

而$b_n = c_n - (c_n - b_n) = c_n - u_n$,由于$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

由性质得$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛。

上页 下页 返回

思考题 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛?反之是否成立?

思考题解答

由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，可以推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

? u_n可能为 0

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

反之不成立. 例如：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

思考题 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛?反之是否成立?

思考题解答 1 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$的前 n 项部分和为$\sigma_n$，则有

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 = S_n^2 \le S^2$$

即σ_n单调增加有上界，$\therefore \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛。

上页 下页 返回

思考题 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$收敛?反之是否成立?

思考题解答 2 因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，故有$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

因而∃正整数K，当$n > K$时，$0 \le u_n < 1$，

$$\therefore u_n \ge u_n^2 \quad (n > K)$$

由不等式形式的比较判别法知：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$收敛。

上页 下页 返回

思考题 设有级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$a_n > 0$，$b_n > 0$，

且$a_{n+1}b_n \le a_n b_{n+1}$ 证明：若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

也收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

证明 $\because \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \dfrac{a_n}{b_n}$ $a_n > 0$，$b_n > 0$，$\therefore \dfrac{a_n}{b_n}$

单调递减，有下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在，设

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad \lambda \ge 0$$

思考题 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$a_n > 0$，$b_n > 0$，

且 $a_{n+1}b_n \le a_n b_{n+1}$ 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

若 $\lambda > 0$，由比较判别法，当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

思考题 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$a_n > 0$，$b_n > 0$，且 $a_{n+1}b_n \le a_n b_{n+1}$ 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

若 $\lambda = 0,$ 由比较判别法，当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda = 0$，可得 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$ 由比较判别法，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

思考题 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$a_n > 0$，$b_n > 0$，

且 $a_{n+1}b_n \le a_n b_{n+1}$ 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

也收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

法 2：见习题 10.7 第 13 题的解答

作业：

P239： 1偶. 2偶 3奇.