习题 6.3（P16）

1. 已知$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，计算(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (2) $(\vec{a},\vec{b})$ (3) $(\vec{b})_{\vec{a}}$

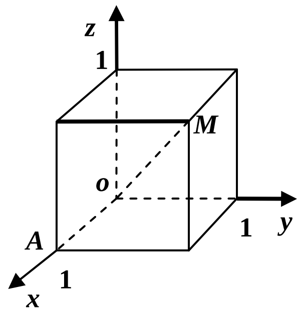
解：(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$

(2) $(\vec{a},\vec{b})=\arccos\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\arccos\dfrac{-9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{3\pi}{4}$

(3) $(\vec{b})_{\vec{a}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{-9}{\sqrt{18}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2．在边长为 1 的立方体中，设OM 为对角线，OA 为棱，求$(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}$.

解 1：将立方体如图所示置于坐标系中，则



$\overrightarrow{OA}=\{1,0,0\}$，$\overrightarrow{OM}=\{1,1,1\}$，

故 $(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{1\times1+0\times1+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解 2：由几何知识得：$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3}$ ，$(\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}=1$

由 $|\overrightarrow{OM}|(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=|\overrightarrow{OA}|(\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}$ 得

$$(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=\frac{|\overrightarrow{OA}|(\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3．将质量为$100kg$ 的物体从点$M(3,1,8)$沿直线移动到点$N(1,4,2)$（坐标的单位为m），计算重力所做的功.

解：由题意可得$\vec{F}=\{0,0,-100g\}$，$\overrightarrow{MN}=\{-2,3,-6\}$，则

$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{MN}=0\times(-2)+0\times3+(-100g)\times(-6)=600g$ （焦耳）

4．设$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=2$，$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求$|2\vec{a}-3\vec{b}|$

解：$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$= 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 - 12|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) = 76$$

故 $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{76}$

5．已知四边形顶点为 $A(2,-3,1)$，$B(1,4,0)$，$C(-4,1,1)$ 和 $D(-5,-5,3)$，证明它的两条对角线 AC 和 BD 互相垂直.

证明：因为 $\overrightarrow{AC} = \{-6, 4, 0\}$，$\overrightarrow{BD} = \{-6, -9, 3\}$，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (-6)\times(-6) + 4\times(-9) + 0\times 3 = 0$$

故两条对角线 AC 和 BD 互相垂直.

6．已知向量 $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$，$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$，求一向量 $\vec{p}$，使 $\vec{p}$ 与 z 轴垂直，且 $\vec{a}\cdot\vec{p} = 9$，$\vec{b}\cdot\vec{p} = 4$

解：设所求向量 $\vec{p} = \{x, y, z\}$，由题意得：

$$\begin{cases} z = 0 \\ 3x - y + 5z = 9 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

解得：　$x = \dfrac{22}{7}$，$y = \dfrac{3}{7}$，$z = 0$

故所求向量 $\vec{p} = \left\{\dfrac{22}{7}, \dfrac{3}{7}, 0\right\}$

7．设 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$，$\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$，试求 λ 的值，使得

（1）$\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 z 轴垂直.

(2) $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 并证明此时 $\left|\lambda\vec{a} + \vec{b}\right|$ 取最小值.

解：(1) $\lambda\vec{a} + \vec{b} = \{3\lambda + 2, 5\lambda + 1, -2\lambda + 4\}$，

则由 $\{3\lambda + 2, 5\lambda + 1, -2\lambda + 4\}\cdot\{0, 0, 1\} = 0$ 得 $-2\lambda + 4 = 0$，即 $\lambda = 2$

(2) 由$\{3\lambda+2, 5\lambda+1, -2\lambda+4\}\cdot\{3, 5, -2\}=0$得

$3\times(3\lambda+2)+5\times(5\lambda+1)-2(-2\lambda+4)=0$，即$\lambda=-\dfrac{3}{38}$

设$f(\lambda)=\left|\lambda\vec{a}+\vec{b}\right|^2$，则$f(\lambda)$与$\left|\lambda\vec{a}+\vec{b}\right|$有相同的极值点，

又$f(\lambda)=(3\lambda+2)^2+(5\lambda+1)^2+(-2\lambda+4)^2=38\lambda^2+6\lambda+21$

$f'(\lambda)=76\lambda+6$，令 $f'(\lambda)=0$，得唯一驻点 $\lambda=-\dfrac{3}{38}$，

而$f''(\lambda)=76<0$，故$\left|\lambda\vec{a}+\vec{b}\right|$取最小值.

8. 设$\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ (2) $2\vec{a}\times7\vec{b}$ (3) $\vec{i}\times\vec{a}$.

解：(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$

(2) $2\vec{a}\times7\vec{b}=14(\vec{a}\times\vec{b})\overset{\text{利用(1)}}{=\!=\!=}42\vec{i}-98\vec{j}-70\vec{k}$

(3) $\vec{i}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=\vec{j}+2\vec{k}$

9. 设$|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$，$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$，计算以向量$\vec{a}-2\vec{b}$和$3\vec{a}+2\vec{b}$为边的三角形的面积.

解：由向量积模的几何意义得：

所求三角形的面积$=\dfrac{1}{2}\left|(\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})\right|\overset{\text{由分配律及}}{\underset{\text{反交换律}}{=\!=\!=}}\dfrac{1}{2}\left|8\vec{a}\times\vec{b}\right|=4\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

$$=4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=4\times5\times5\cdot\cos\frac{\pi}{4}=50\sqrt{2}$$

注：本题出错大都因将反交换律应用为交换律：$\left|(\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})\right|=4\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

10．求与$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$都垂直的单位向量.

解：$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$$

故所求向量为 $\pm\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\pm\left(-\dfrac{1}{\sqrt{35}}\vec{i}+\dfrac{3}{\sqrt{35}}\vec{j}+\dfrac{5}{\sqrt{35}}\vec{k}\right)$

11．已知$A(1,2,0)$，$B(3,0,-3)$，$C(5,2,6)$，计算ΔABC的面积.

解：$\overrightarrow{AB}=\{2,-2,-3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{4,0,6\}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}$$

故 $\Delta ABC\text{的面积}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2\,|\,(-24)^2+8^2}=14$

12．λ为何值时，四点$(0,-1,-1)$，$(3,0,4)$，$(-2,-2,2)$，$(4,1,\lambda)$在一个平面上.

解：分别将四点按序记为A、B、C、D，

则$\overrightarrow{AB}=\{3,1,5\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-2,-1,3\}$，$\overrightarrow{AD}=\{4,2,\lambda+1\}$，

由题意得：向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$共面，即$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$

亦即 $\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ -2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=-\lambda-7=0$

解得： $\lambda=-7$

13．求以四点$O(0,0,0)$，$A(2,3,1)$，$B(1,2,2)$，$C(3,-1,4)$为顶点的四面

体体积.

解：$\overrightarrow{OA}=\{2,3,1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{1,2,2\}$，$\overrightarrow{OC}=\{3,-1,4\}$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&3&1\\1&2&2\\3&-1&4\end{matrix}\right\|=\frac{19}{6}$$

14．已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$不共面，证明：$2\vec{a}+3\vec{b}$，$3\vec{b}-5\vec{c}$，$2\vec{a}+5\vec{c}$共面.

证明：法 1：因为$2\vec{a}+5\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}-(3\vec{b}-5\vec{c})$

即向量$2\vec{a}+5\vec{c}$可由向量$2\vec{a}+3\vec{b}$、$3\vec{b}-5\vec{c}$线性表出，

故$2\vec{a}+3\vec{b}$，$3\vec{b}-5\vec{c}$，$2\vec{a}+5\vec{c}$共面（这是线性代数中的结论）.

法 2：由于$(2\vec{a}+3\vec{b},3\vec{b}-5\vec{c},2\vec{a}+5\vec{c})$

$=(2\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{b}-5\vec{c})\cdot(2\vec{a}+5\vec{c})$

$=(6\vec{a}\times\vec{b}-10\vec{a}\times\vec{c}-15\vec{b}\times\vec{c})\cdot(2\vec{a}+5\vec{c})$

$=-30\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}+30\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=-30\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}+30\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=0$

故$2\vec{a}+3\vec{b}$，$3\vec{b}-5\vec{c}$，$2\vec{a}+5\vec{c}$共面.

15．应用向量证明不等式

$$\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}\ge|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

成立，其中a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3为任意实数，并指出式中等号成立的条件.

证明：令$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，

因为 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，

即 $|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}$

当 $|\cos\theta|=1$时，有$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，即 当a_1,a_2,a_3与b_1,b_2,b_3成比例时，式中等号成立.