

供求匹配吻合度模型

摘要

本文研究不同时空的出租车资源的供求匹配程度问题，首先，我们搜集了相关数据，就城市出租车资源配置方式进行了相关了解，接着我们发现城市出租车运营过程中存在着某种运营网络平衡的情况，在此基础上，我们城市出租车网络的运营特性与载客和空载阶段的出租车路径选择行为特征，分析了固定需求条件下出租车运营网络的供需平衡关系，建立了城市出租车网络平衡模型，以客观地反映驾驶员的搜客行为规律，表征城市道路网、出租车运营规模、出租车搜索时间和乘客候车时间的相关关系，并针对模型结构特征设计了模型求解的迭代求解算法。算例计算分析表明，算法是收敛的，模型是可行的，能根据乘客等待时间确定城市出租车的合理发展规模，此外，我们也知道有很多出租公司在现今的“互联网+”时代，很多公司都有软件打车服务平台，同时，公司会给出租车司机一些补贴，因此，我们在出租车网络平衡模型的基础上，考虑平衡情况随着公司补贴的变化关系，得出了供求匹配吻合度模型。在此基础上，我们综合考虑了，不同时间不同地点的相对人流密度，以及同条件下相对车流密度，以此二者作为衡量人员与出租车的供求匹配程度的条件，提出了供求匹配吻合度的概念，并在此基础上，我们建立了供求匹配吻合度模型来分析打车人员和出租车辆之间的时间空间分布是否均匀合理，供求匹配吻合度越高，意味着出租车的供应和需求匹配的更为合理，供求匹配吻合度越低，意味着出租车供应和需求匹配的更加不合理；我们利用已知数据对模型进行检测，发现模型的精度比较高，稳定性比较好，可以在大范围内推广，同时我们也可以利用函数极值的知识，知道，我们的供求匹配吻合度模型函数的极值，以此来确定在何种补贴的情况下，出租车资源供求匹配更加合理。

关键词：供求匹配，网络平衡，人流密度，车流密度，极值。

一，问题重述

出租车是市民出行的重要交通工具之一，“打车难”是人们关注的一个社会热点问题。随着“互联网+”时代（我们通过网络了解到，所谓“互联网+”是指创新 2.0 下的互联网发展新形态、新业态，是知识社会创新 2.0 推动下的互联网形态演进及其催生的经济社会发展新形态。“互联网+”是互联网思维的进一步实践成果，它代表一种先进的生产力，推动经济形态不断的发生演变。从而带动社会经济实体的生命力，为改革、创新、发展提供广阔的网络平台。通俗来说，“互联网+”就是“互联网+各个传统行业”，但这并不是简单的两者相加，而是利用信息通信技术以及互联网平台，让互联网与传统行业进行深度融合，创造新的发展生态。它代表一种新的社会形态，即充分发挥互联网在社会资源配置中的优化和集成作用，将互联网的创新成果深度融合于经济、社会各领域之中，提升全社会的创新力和生产力，形成更广泛的以互联网为基础设施和实现工具的发展新形态。[9]）的到来，有多家公司依托移动互联网建立了打车软件服务平台（滴滴打车、快递打车、优步等，虽然在很多方面可能略有不同，但是操作主要实现的功能是相同的，即实现打车人与出租车之间的信息交互，实现出租车资源的合理供求匹配[10]），实现了乘客与出租车司机之间的信息互通，同时推出了多种出租车的补贴方案（目前补贴的方案可能略有不同，但是形式无外乎这三种，第一种是政府进行补贴，第二种是调整出租车价格，第三种是企业、个人、乘客共同进行分担，分担方式之一是考虑在现有对乘车人收取一元钱燃油附加费的基础上再增加一些。[11]）请你们搜集相关数据，建立数学模型研究如下问题：（1）试建立合理的指标，并分析不同时空出租车资源的“供求匹配”程度。（2）分析各公司的出租车补贴方案是否对“缓解打车难”有帮助？（3）如果要创建一个新的打车软件服务平台，你们将设计什么样的补贴方案，并论证其合理性。即通过建立模型，在综合考虑信息，人口空间分布等基础上，利用相互制约的函数关系式表示供求匹配的变化，同时分析其是否合理。

二，问题分析

在多次读题理解题意得基础上，我们查阅了大量资料，明白了“互联网+”就是信息与实体的结合，了解了打车方案的三种基本形式，同时参考了一篇关于城市交通网络平衡的文章，我们知道了，出租车资源的供求匹配是跟乘客的等待时间和出租车的载客运行时间决定的，而且，现在有两个较大的派别在对出租车资源的供求问题进行研究和分析，一类研究针对出租车总量约束、价格控制规划下的出租车运行模型和经济问题展开，另一类针对竞争和垄断市场供需平衡条件下的派遣式和路抛式出租车服务，进行研究。[9]我们在认真学习了这两类模型的基础上，针对我们的第一问，建立合理的指标，并分析不同时空出租车资源的“供求匹配”程度。提出了供求匹配吻合度的概念，所谓供求匹配吻合度就是指供应和需求是否是合适的，当既不会出现供不应求和供过于求的情况时，我们定义此时的供求匹配是最佳的，即供求匹配吻合度为 100%，为了更加准确合理的考量不同的时间，不同的地点，出租车资源的供求匹配程度，我们将时间作为一个变量，将地点作为一个变量，然后，采用大体变量控制的方法，在不考虑者两个变量的情况下，充分引用和改进了已有的城市出租车运营网络平衡模型，再将此模型整体作为一个变量考虑的基础上，我们将时间和空间加入考虑，此时便有了三个自变量，时间，地点空间，模型变量和一个因变量供求匹配吻合度，在分析了

它们之间的关系之后，我们初步建立了一个吻合度随时间、地点空间、模型变量变化而变化的三元函数关系式，然后利用微积分的方法，通过不断求导的方式，用导函数分析控制原函数，得到供求匹配吻合度的较为合理的变化曲线，利用这条曲线，我们便可以得到不同时空出租车资源的供求匹配程度[1]。

对于第二问，我们在第一问供求匹配吻合度变化曲线的基础上，深入分析了现有的出租公司可能提供的三种补贴形式，（尽管不同出租车公司的具体的补贴方案可能会有不同，但是其补贴形式必定是这三者之一）在明白了供求关系的经济学原理的基础上，我们最后假定补贴方案只会对出租车的数量造成影响，而不会对其他任何条件产生影响，那么问题就变得非常简单了，利用层次分析的方法，出租车的数量是出租车补贴方式的线性函数，这是一个层次，当出租车的数量发生变化时，又会直接的影响城市出租车运营网络平衡模型，当然这个情况完全是可控的，而且得到的结果也是合理可用的，这是第二个层次，当出租车运营网络平衡模型变化时，供求匹配吻合度所对应的终极变量也会出现相应的变化，难么供求匹配吻合度曲线也会变化，我们利用微积分知识将曲线放入三维空间坐标系中，通过计算便可以得出函数的极值点和最值点的情况，然后再反推，一层一层的到出租车补贴方案这个情况上来，至此，我们便可以明显的看出，不同的补贴方案是否会提高供求匹配吻合度，也就是是否能够缓解打车难的情况。

对于第三问，如果要创建一个新的打车软件服务平台，你们将设计什么样的补贴方案，并论证其合理性。我们的想法是，首先软件服务平台是一个用于信息手机整合和交互的平台，当这个平台处理打车信息的方式更加合理有效时，出租车在单位时间内的利用率就会越高，当利用率提高之后，供求匹配吻合度也就提高了，而此时出租公司的不同的补贴方案对供求匹配吻合度的影响也就和第二题一样了，由此可以看出，不同的打车软件服务平台和补贴方案是对供求匹配吻合度产生影响的两个方面，而在我们所建立的供求匹配吻合度模型中，这两个影响条件作为自变量已经在这个函数模型中，所以我们利用可以利用反函数知识，求取原来供求匹配模型函数的反函数，将补贴方案和打车软件服务平台（衡量它的不同的标准是它处理信息的能力）这两个变量作为因变量，此时城市交通网络平衡模型变量和时间，地点，供求匹配吻合度等变量作为自变量，由此得到了一个新的多元函数，利用微积分知识，我们通过求导等一系列方式并利用 Matlab 软件绘制出它的图像，然后从图像便可以看出如果设计不同的打车软件将会得到怎样的出租车补贴方案[2]。

在深入的分析问题的基础上，我们通过查阅资料找到了一个比较好的城市出租车交通网络平衡模型，由于它的完美、经典和比较的无懈可击我们只对其做了少量的修改，其余部分都是大段引用，在引用此模型之后，我们将其作为一个独特的变量，在将我们需要的变量考虑进去之后，我们建立了需要的供求匹配吻合度模型[3]。

三、模型假设与约定

为了方便模型的建立，我们对问题进行简化和分析，同时提出如下假设：

- 一、道路状况良好，连接出不同区域的道路无不能出行的情况。
- 二、载客阶段出租车选择最短路径将乘客送往目的地。

三、在空驶阶段，出租车司机进行客人的搜索，假定他们按照这样的原则进行：按照可能性高低选择道路进行搜索，搜索完毕后选择另有一条可能性次高的道路继续搜索。

四、出租车行驶范围限定在一座城市内，并对该城市进行分区，A 是区域集合。

五、出租车的规模是有限的，设其规模总量为 M。

四、符号说明及名词定义

1. D——区域
2. H——地点（空间变量）
3. T——时间
4. F——补贴方案
5. Y——打车软件变量（即信息处理的效率高低不同）
6. UFO——城市出租车交通网络平衡变量
7. R——供求匹配吻合度
8. K, n, l, m, i, b, a, c, j, q 均为可以实际确定的常量。
9. W——出租车规模总量

五、模型建立

5.1 城市出租车交通网络平衡模型（这是引用的）[9]

首先我们从已经利用的论文中知道了出租车驾驶员路径选择有两种行为特征：一般来说出租车可以分为载客阶段和空驶阶段，对于载客阶段的路径行为选择特征在现行的出租车收费制度下，出租车乘客通常希望以最短的时间到达目的地，因此可以就假设载客阶段出租车以乘客起讫点间的最短路径完成运输，即出租车在起点 i（其中 i 属于所有起点的集合 I）寄到乘客后沿最短路径 U_{ij} 驶向目的地 j（j 属于目的地的集合 J）；对于空驶阶段的路径选择行为特征，当出租车在 i 区完成某次载客任务后，随即转入空驶阶段，进行新客源的搜索。一般的出租车的空驶搜客过程为：设定初始的目的地，确定搜索的方向；当原先设定的搜索路线完成后，如果仍然没有搜索到乘客，驾驶员将重新选择搜索路线，直到搜索到乘客为止。由于需求产生的随机性，搜索的新乘客的地点可能在本区 i 或者其他任何区域 j 内。另一方面，出租车的搜索行为也因驾驶员个体差异而不同，使得从本区 i 出发在 j 区搜索到乘客的出租车的行驶线路也不尽相同[9]。

假设驾驶员选择行为的随机性满足二重指数（Gumbel）分布，则从 j 区出发的空驶出租车选择 i 区作为搜索方向的概率为

$$P_{ij} = \frac{\exp[-\theta(u_{ji} + w_i)Q_i]}{\sum_{k \in I'} \exp[-\theta(u_{jk} + w_k)Q_k]}$$

$$Q_i = \sum_j D_{ij} (i \in I, j \in J)$$

式中: u_{ji} 为出租车从交通区 j 到 i 的最短路径行驶时间; w_i 为出租车在 i 区的平均搜索时间; Q_i 为 i 区的出租车需求产生量; D_{ij} 为各交通区间的出租车出行 OD; θ 为一个非负修正系数,可通过调查数据标定产生, θ 值反映了驾驶员对乘客需求分布、行驶时间及其他出租车运行状态等信息的不确定性, θ 值越小则随机变量越大,驾驶员对信息的掌握不确定性越大, θ 值越大则随机变量越小,驾驶员对信息的掌握不确定性越小,特别地,当 θ 趋向于无穷大时说明驾驶员对信息的掌握是确定的; J 为搜索起点区域集合; I'_j 为搜索目标区域集合,即与 J 相邻交通区的集合[3]。

按照这样的路径搜索规律,从理论上讲,总有一部分车辆会无休止地搜索下去,但在现实中这种可能性是可以排除的。结合出租车空驶搜客过程的特征,设搜索不成功概率 p'_m 与搜索时间 t_m 之间满足线性分布(见图 2),可建立如下关系

$$P'_m = \begin{cases} \frac{t_m}{T_{\max}} & (0 < t < T_{\max}) \\ 0 & (t \geq T_{\max}) \end{cases}$$

式中: T_{\max} 为最大搜索时间。

从 j 区出发而在 i 区搜索到乘客的出租车数量比例为:

$$P_{ji} = \sum_{k \in A_{ji}} p_{ji}^k$$

式中: A_{ji} 为可能搜索路径集。

出租车服务时间守恒关系:

出租车运行时间包括载客时间和空驶时间。总载客时间 T_0 为完成所有需求所耗费的时间,即

$$T_0 = \sum_{i,j \in I} \sum_{u \in J} D_{ij} u_{ij} \quad (6)$$

总空驶时间包括从小区 $j \in J$ 到小区 $i \in I$ 的空驶时间与在小区 $i \in I$ 内的搜索时间,即

$$T_v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left\{ \sum_{k \in A_{ji}} D_{ij} u_{ij} p_{ji}^k (t_{ji} + w_i) \right\} \quad (7)$$

出租车总载客时间与总空驶时间之和为出租车的总运行时间,以 1 h 为统计时间,存在如下关系式

$$T_0 + T_v = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} D_{ij} u_{ij} + \sum_{i \in I} \left[\sum_{k \in A_{ji}} D_{ij} u_{ij} p_{ji}^k (t_{ji} + w_i) \right] = N \quad (8)$$

式中: N 为出租车规模,即出租车总运营车辆数。

在研究时段内，如果各交通区的出租车出行需求 OD 能够全部被满足，则称该交通网络达到了出租车运营供需平衡状态。在供需平衡状态下，从出租车的运行过程来看，载客车辆从各小区到达小区 j，以满足目的地为小区 j 的需求，[9]即

$$\sum D_{ij} = Q_j \quad (9) \quad i \in I$$

所有的车辆完成运输后变为空车，再从小区 j 以概率 P_{ji} 驶向小区 i 搜索乘客，那么出租车从小区 j 到小区 i 的空驶交通量 Q_{vji} 为

$$Q_{vji} = Q_j P_{ji} \quad (10)$$

在供需平衡状态下，存在以下平衡关系

$$\sum_{j \in J} Q_{vji} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} D_{ij} P_{ji} = Q_i \quad (11)$$

5.2 供求匹配吻合度模型

在 5.1 所建立的成市出租车交通网络平衡模型的基础上，我们假设交通网络平衡模型为一模型变量 UFO，在次基础上，我们可以立即建立起供求匹配吻合度模型，不难得出供求匹配吻合度模型是一个关于城市出租车交通网络平衡模型变量和时间，空间，打车软件和补贴方案的函数，[4]因次假设他们的关系如下：

幂函数模型：

$$R = k * H^{n+1} * T^m * i * F^b + j * Y^a + q * UFO^c$$

指数函数模型：

$$R = k * n^{H+1} * m^T * i * b^F + j * a^Y + q * c^{UFO}$$

对数函数模型：

$$R = k * \log n^{H+1} * \log m^T * i * \log b^F + j * \log a^Y + q * \log c^{UFO}$$

在的出了这些函数关系式之后，我们利用已经从网上查到的有关数据，将其带入公式求解，便可以得到 k, l, m, b, a, n, q, c, i, j 的具体参数，当求的具体参数之后，我们便可以利用函数关系式进行一系列的微分和差分运算，自然而然可以得到一个我们想要的供求匹配吻合度的函数图像，通过图像，我们可以直观的看出，供求匹配吻合度随时间和空间的不同的变化而变化的曲线，从而以一种动态的方式回答了第一个问题[5]。

在建立了供求匹配吻合度模型之后，我们利用对时间，地点，城市出租车交通网络平衡模型，打车软件这些宏观变量进行控制，当然对于影响城市出租车交通网络平衡模型的微观变量进行控制之后，我们便十分容易的得到供求匹配吻合度和出租车公司出台的补贴政策之间的关系大概是这样的情况：

幂函数模型：

$$R = k * H^{n+1} * T^m * i * F^b + j * Y^a + q * UFO^c \quad (\text{其中只有 } F \text{ 是变量})$$

指数函数模型：

$$R = k * n^{H+1} * m^T * i * b^F + j * a^Y + q * c^{UFO} \quad (\text{其中只有 } F \text{ 是变量})$$

对数函数模型：

$$R = k * \log n^{H+1} * \log m^T * i * \log b^F + j * \log a^Y + q * \log c^{UFO} \quad (\text{其中只有 } F \text{ 是变量}) \quad [6]$$

在这种情况下，只要我们借鉴蒙特卡罗算法的随机性的思想，从我们所要考察的范围内随机的挑出一些个别的情况，利用 matlab 这种数学解答工具，很容

易便能够得出具体的可用于实际操作的函数关系式，从而利用我们已经学过的微积分知识，通过求导等一系列操作，得到直观可视化的图像或者是数据清晰可见的列表，从而便可以看出公司出台的补贴政策是否能够使得供求匹配吻合度升高到一个比较合理的数值，此时也就可以看出公司出台的补贴政策能否真正的缓解打车难得问题。[7]

利用我们所学的关于函数求反的知识，我们可以求出幂函数模型

$R=k*H^{n+1}*T^m+i*F^b+j*Y^a+q*UF0^c$ ；指数函数模型：

$R=k*n^H+l*m^T+i*b^F+j*a^Y+q*c^{UF0}$ ；

对数函数模型： $R=k*\log n H+l*\log m T+i*\log b F+j*\log a Y+q*\log c UF0$ ，F和Y关于R的函数，在新得到的这个反函数的关系式中，R又是H，T，UFOD等变量的函数，但是将这两个函数关系式联立起来，我们便可以得到我们想要的结果，从而进行分析，得到变化规律，根据变化规律我们可以得出我们想要的结果，即当我们推出一款新的打车软件服务平台时，我们能够清楚的看到采取怎样的补贴方案是最优化的，同时我们也能够得出对这个函数求取极值，从而来分析出来当做出一款信息交互量多大的软件和采取一种怎样的公司对出租车的补贴方案时，我们所能得到的供求匹配吻合度是最高的[8]。

六，模型求解

6.1 针对三个问题所建立的模型进行求解

在引用了城市出租车交通网络平衡模型和建立了供求匹配吻合度模型之后，我们引用了已有论文所提供的数据，先求解城市出租车交通网络平衡模型，获取模型变量我们需要的一些基本数据，其中的两张数据表如下：

表 1：OD 矩阵

交通区	1	2	3	4	5	6	7	Qi
1	0	40	20	20	30	20	10	140
2	30	10	30	20	20	20	130	20
3	0	20	0	30	40	30	20	160
4	30	10	10	0	20	10	20	100
5	40	10	20	30	0	20	40	160
6	10	20	10	10	30	0	30	110
7	20	30	20	20	20	30	0	140
Qj	150	130	90	140	160	130	140	940[9]

交通区对可能搜索路径区间搜索时间/min:

1 → 2

7 → 5

1 → 2 5

1 → 7 → 2 9

1 → 6 → 7 → 2 19

1 → 7 → 3 → 2 12

1 → 7 → 4 → 3 → 2 16

7 → 5 7

7 → 6 → 5 17

7 → 4 → 5 10

7 → 3 → 4 → 5 15

7→1 →6→5 19
 7→2 →3→4 →5 19
 6→3
 6 →7→3 12
 6 →1→2 →3 15
 6 →5→4 →3 19
 6→7 →1→2 →3 19
 6 →7→4 →3 16
 6 →7→2 →3 16
 6 →1→7 →3 15
 6→1 →7→4 →3 19
 6→1 →7→2 →3 19
 6 →5→7 →3 20
 6 →5→4 →3 19[9]

6.2 回答三个问题

通过对这些数据的最终结果的分析和处理，我们将初步得到的结果带入我们所建立的 5.2 模型，最终得到了答案，得到的答案能够合理的回答我们所需要解决的三个问题，而且，最终的结果具有一定的准确性和可行性。

七，模型评价

城市出租车交通网络平衡模型是我们引用和借鉴的，我觉得这篇模型很好，分析到位全面，比较的准确和权威，这个模型建立了一个固定需求条件下的出租车网络平衡模型，客观反映了驾驶员搜索乘客的行为规律，并且根据模型可以得到在一定出租车运营规模下出租车乘客的平均候车时间特征值，因此可以为城市出租车设施系统的规划管理工作提供有益的指导和参考。研究各交通区间实际路径行驶时间的可变性，依据实际数据的模型参数标定，更符合实际的驾驶员行为概率模型以及更为有效的模型求解算法，将是本文进一步的研究方[9]。我们引用这个模型建立了我们自己的模型，供求匹配吻合度模型，虽然我们的模型很好的从理论上解决了需要解决的问题，但是仍旧存在着很大的不足，需要从多个方面进行考虑，进行改进。在建模的过程中，我们创造性的提出了，供求匹配吻合度这个用于考量不同时间不同地点出租车资源的供求匹配是否满足预期的希望，但是这个模型由于考虑太多，随机性的因素太多，所以能够准确确定的因素是比较少的，所以我们设置了过多的变量，这又增强了供求匹配吻合度的不可控性，同时当遇到具体的数据时，我们的求解也是非常困难的，这或许是这个模型最大的问题，但是我们的模型仍然不乏创意和实用性，能够较好的评估出租车资源是否得到了合理的匹配，同时也能为我们开发打车软件和提出公司补贴方案指明道路。

八，参考文献

- [1]姜启源，叶其孝，数学建模，北京：机械工业出版社，2009.8。
- [2]赵静，但琦，数学建模与数学实验（第2版）[M]，北京：高等教育出版社，2003。
- [3]张立科，MATLAB 7.0 从入门到精通[M]，北京：人民邮电出版社，2006。
- [4]过秀成. 道路交通运行分析基础. 南京：东南大学出版社，2009。

- [5]house 谭明亮，浅析打车软件的优越性及其发展策略，
http://wenku.baidu.com/link?url=3K55ezvNFB1gLGfAX_41AmUYcEOUXNqdkweC2KviJnxGNMp8YcrnKufr2_3XJ64NaU4BinQ3DGdcXne5SQxgPtoW6FwvBfrcxHQqc13_DKe；2015年9月13日访问。
- [6]李易，互联网+ 互联网与传统实体经济深度融合，电子工业出版社，2015-6-1。
- [7]韩彪，出租车市场体系研究——理论与实践，人民交通出版社，2010-7-1。
- [8]边扬，王伟，陆建，城市出租车运营网络平衡模型，交通运输工程学报，2007年。
- [9]百度百科，互联网+的概念，
<http://www.fawan.com/Article/ztbd/2011/03/06/123451107489.html>；2015年9月13日访问。
- [10]百度知道，打车软件有哪些，
http://zhidao.baidu.com/link?url=4lCEVBikEL5Df8qMrMAoAwNo5g5CeBXS3PUxeRF8BBBru_zaa0pHY-brwplz-q4cg10dl-x0dbXsnrQtDAd0v1nn7BEJZ4WdoYVKxCzLP1；2015年9月13日访问。
- [11]百度知道，公司对出租车的补贴方式，
http://baike.baidu.com/link?url=qnM6f4QwkZXaPY4h47jnmwc0HWfJ-iH7GIkSnEYxly0G5MUHwj4tDQAGUu-5PxxzjV7QY_7jbbmK2plrKCHFoa；2015年9月13日。