

# U 弦长曲率:一种离散曲率计算方法<sup>\*</sup>

郭娟娟 钟宝江

(苏州大学 计算机科学与技术学院 苏州 215006)

**摘 要** 数字曲线的离散曲率计算在图像分析和计算机视觉的各个领域都有广泛应用. 文中提出一种离散曲率计算方法——U 弦长曲率. 数字曲线上的每个点, 它的支持领域由距离该点为给定弦长的两点确定, 再在这个支持领域内估算当前点的 U 弦长曲率, 理论分析论证 U 弦长曲率与曲线的真实曲率之间存在一种明确联系. 与现有的离散曲率计算方法相比, U 弦长曲率具有更强的抗旋转性和抗噪性, 适用于完成曲线匹配等对曲率计算稳定性要求高的一类任务. 仿真实验结果验证文中方法的有效性.

**关键词** 数字曲线, 离散曲率, 轮廓形状, 曲线匹配

**中图法分类号** TP 391

## U-Chord Curvature: A Computational Method of Discrete Curvature

GUO Juan-Juan, ZHONG Bao-Jiang

(College of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006)

### ABSTRACT

Discrete curvature computation of digital curves is widely applied to various tasks of image analysis and computer vision. A computational method of discrete curvature, U-chord curvature, is proposed. For each point in a digital curve, its support region is determined by two points with a given chord distance to the point, and then the U-chord curvature of the point is estimated. A theoretical analysis shows that there is a close relationship between the U-chord curvature and the real curvature of the curve. Compared with the existing computational methods of discrete curvature, the U-chord curvature is more stable under rotation transformations and noise condition. Therefore, it is suitable for image and vision tasks which require a high stability of curvature estimation, such as curve matching. Simulation experiments show the efficiency of the proposed method.

**Key Words** Digital Curve, Discrete Curvature, Shape Contour, Curve Matching

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金项目 (No. 61075040, 61033013)、江苏省自然科学基金项目 (No. BK2012645)、江苏省省属高校自然科学研究重大项目 (No. 10KJA520047)、江苏省产学研联合创新资金项目 (No. BY2012114)、苏州大学“东吴学者计划”项目资助

收稿日期: 2013-06-06; 修回日期: 2013-10-18

**作者简介** 郭娟娟, 女, 1987 年生, 硕士研究生, 主要研究方向为图像分析与理解. E-mail: 20114227024@suda.edu.cn. 钟宝江 (通讯作者), 男, 1972 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为图像分析与理解、计算机视觉. E-mail: bjzhong@suda.edu.cn.

# 1 引言

曲线的曲率是描述物体几何形状的重要数学工具之一. 在连续情形下, 曲率有着严格的数学定义, 易对其进行一系列处理. 然而在视觉和图像分析领域, 面对的是数字图像或数字曲线, 在这种离散情形下, 虽然也可通过差分算子直接将曲率计算公式转换过来, 但事实表明在很多情况下这一做法都不能解决问题. 主要有如下两个问题: 1) 曲率是考虑曲线在极限短时间内的转动率, 因此曲线上细小的噪声会给曲率计算带来灾难性的影响; 2) 人类视觉在分析曲线形状时一般会感知一定范围内而不仅仅是一点处的信息, 而严格数学意义上的曲率定义无法体现这一效果.

为此研究者提出众多的离散曲率计算方法, 如  $k$  余弦曲率计算方法<sup>[1]</sup>、 $k$  转角曲率计算方法<sup>[2]</sup>、带曲线平滑的差分方法<sup>[3-4]</sup> 等. 这些离散曲率计算方法各有自己的特色和优点, 但在方法构造上一般都遵循如下思想: 1) 曲线上细小的噪声不会对曲率计算结果产生明显影响; 2) 一点处的曲率可反映其所在曲线段的信息. 为体现思想 2), 离散曲率的计算过程一般是首先确定一个支持领域(以当前点为中心的一条曲线段), 然后根据支持领域内的所有点来计算当前点的曲率. 从这个意义上说, 离散曲率的计算方法已在本质上拓展了数学意义上的曲率定义.

除上述两点, 本文的研究工作还关注一个被忽视的问题, 即离散曲率计算方法的抗旋转性. 该问题的一个典型实际背景为视觉和图像分析领域的一些重要任务(如形状匹配), 可通过匹配曲线的离散曲率实现, 而在曲线匹配过程中, 待匹配的两条曲线往往具有不同的旋转角度, 因此所应用的曲率计算方法必须具有良好的抗旋转性. 简单地说, 同一条曲线在旋转前后其离散曲率计算结果的差别应越小越好. 定性分析和仿真测试均表明: 现有离散曲率计算方法一般都有一定的抗旋转能力, 但在曲线匹配任务中效果不佳. 导致这一问题的根本原因是这些方法在构造时很少考虑抗旋转性, 因此不适合处理曲线匹配这类对旋转稳定性要求很高的任务.

为解决以上问题, 本文提出一种离散曲率计算方法, 称为 U 弦长曲率. 由于 U 弦长曲率是针对曲线匹配问题设计和构造的, 因此在抗旋转性方面相比现有方法具有明显优势. 同时其设计原理也保证抗噪性能的优良性. 另一方面, U 弦长曲率为强化对旋转和噪声的稳定性, 减少对曲线局部特征的保留,

因此不合适解决角点检测这类密切依赖曲线局部特征的视觉任务. 概括来说, U 弦长曲率是针对曲率计算稳定性要求高的一类视觉任务而设计的离散曲率计算方法, 可和现有方法结合使用以解决不同性质的问题.

## 2 现有的离散曲率计算方法

### 2.1 $k$ 余弦曲率的提取

Rosenfeld 等<sup>[1]</sup> 提出的  $k$  余弦曲率是早期用于离散曲率计算的最具代表性的方法之一, 该方法目前仍被广泛使用<sup>[5-7]</sup>.

对于给定的参数  $k$ ,  $k$  余弦曲率首先在曲线当前点  $p_i$  处定义两个矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ik} &= (x_i - x_{i-k}, y_i - y_{i-k}), \\ \mathbf{b}_{ik} &= (x_i - x_{i+k}, y_i - y_{i+k}). \end{aligned}$$

然后计算  $\mathbf{a}_{ik}$  和  $\mathbf{b}_{ik}$  夹角的余弦值:

$$c_{ik} = \frac{\mathbf{a}_{ik} \cdot \mathbf{b}_{ik}}{\|\mathbf{a}_{ik}\| \|\mathbf{b}_{ik}\|}.$$

最后从  $m = k$  开始, 计算  $c_{im}, c_{i,m-1}, \dots$ , 并根据条件

$$c_{im} < c_{i,m-1} < \dots \leq c_{i,h-1} < c_{ih},$$

选取  $c_{ih}$  作为  $p_i$  的离散曲率值.

### 2.2 带曲线平滑的差分曲率

差分算子可将连续情形下的曲率定义直接转换成离散曲率的计算公式, 但会受到噪声的严重影响, 为此可首先平滑处理曲线. 特别地, 基于尺度空间的曲线处理技术在实施时会对曲线进行持续的平滑(称为曲线演化), 因此一般使用差分曲率法来计算离散曲率<sup>[3-4]</sup>.

记所需处理的曲线

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\},$$

其中  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$  表示边界的像素点. 尺度空间技术应用高斯函数演化曲线(平滑处理), 记演化后的曲线为

$$\mathbf{A}_k = \{\mathbf{p}_1^k, \mathbf{p}_2^k, \dots, \mathbf{p}_n^k\}, \quad \mathbf{p}_i^k = (x_i^k, y_i^k),$$

可应用差分法计算当前点的离散曲率:

$$\kappa_i^k = \frac{\Delta x_i^k \Delta^2 y_i^k - \Delta x_i^k \Delta y_i^k}{((\Delta x_i^k)^2 + (\Delta y_i^k)^2)^{1.5}}, \quad (1)$$

其中

$$\Delta x_i^k = \frac{x_{i+1}^k - x_{i-1}^k}{2}, \quad \Delta y_i^k = \frac{y_{i+1}^k - y_{i-1}^k}{2};$$

$$\Delta^2 x_i^k = \frac{\Delta x_{i+1}^k - \Delta x_{i-1}^k}{2}, \quad \Delta^2 y_i^k = \frac{\Delta y_{i+1}^k - \Delta y_{i-1}^k}{2}.$$

### 2.3 切线法

Cui 等<sup>[8]</sup> 于 2009 年提出的切线法首先寻找当前

点  $p_i$  所在的最长直线段<sup>[9]</sup>,由此估算该点的离散切线,最后求出该点的曲率.

设  $p_i$  处的最长直线段位于两点  $M、N$  之间,则  $MN$  为离散切线. $p_i$  的离散曲率可由如下步骤求出.

- step 1 计算切线  $MN$  与  $x$  轴的夹角  $\theta$ .
- step 2 求  $M、N$  点离散切线,并同时求得它们与  $x$  轴的夹角  $\theta_M、\theta_N$ .
- step 3 计算  $\delta_1 = |\theta_M - \theta|, \delta_2 = |\theta_N - \theta|$ .
- step 4 计算  $p_i$  处离散曲率:

$$\kappa(p_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_1}{d(MP)} + \frac{\delta_2}{d(NP)} \right).$$

(2)

2.4 L 曲率

L 曲率<sup>[10]</sup>是与本文所提出的 U 弦长曲率最相近的离散曲率计算方法.L 曲率基本思想是:对于给定的参数  $L$ ,首先由约束条件

$$|p_i p_{i-L_b}| = |p_i p_{i+L_f}| = L$$

(3)

确定当前点  $p_i$  的一个领域,其中,  $L > 0$  为输入参数,  $L_b$  和  $L_f$  都是正整数,  $|\cdot|$  表示两个像素点的拓扑距离,如

$$|p_i p_{i+j}| = \sum_{k=1}^j \sqrt{(x_{i+k} - x_{i+k-1})^2 + (y_{i+k} - y_{i+k-1})^2}.$$

(4)

由于数字曲线的离散特性,约束条件式(3)无法被精确满足.为此可隐式精化处理曲线<sup>[10]</sup>,也就是做线性插值使数字曲线变得连续,从而确定一个精确满足式(3)的支持领域  $\Omega(p_i) = [p_i^b, p_i^f]$ .最后根据  $\Omega(p_i)$  计算  $p_i$  的 L 曲率:

$$c_i = s_i \sqrt{1 - \left(\frac{D_i}{2L}\right)^2},$$

(5)

其中

$s_i = \text{sign}[(x_i - x_i^b)(y_i^f - y_i^b) - (x_i^f - x_i^b)(y_i - y_i^b)]$  为离散曲率值的符号; $D_i = \|p_i p_i^f\|$  是  $p_i^f、p_i^b$  这两点间的欧氏距离; $(x_i^b, y_i^b)、(x_i^f, y_i^f)$  分别是  $p_i^f$  和  $p_i^b$  的坐标.

为增强 L 曲率描述曲线局部特征的能力,还可以较小的  $L$  值计算  $p_i$  支持领域内几个点的离散曲率,然后借助逆向高斯平滑函数得到一种增强的 L 曲率计算公式<sup>[11]</sup>.

3 U 弦长曲率

本文提出一种离散曲率计算方法——U 弦长曲率.方法基本思想是:对于输入的参数  $U$ ,按照欧氏距离在曲线当前点处确定一个支持领域,并应用文

献[10]中的曲线精化策略改进计算精度,由此计算离散曲率.本节同时分析 U 弦长曲率与曲线的真实曲率之间的关系,论证方法在理论上的可行性.

3.1 支持领域

早期的一些离散曲率计算方法(如  $k$  曲率)依据像素点数目确定支持领域,但由于两个相邻像素点之间的距离可能为 1,也可能为  $\sqrt{2}$ ,当曲线旋转或是有噪声时,固定数目的像素点将对应不同的曲线段,因此这些方法的抗噪性和抗旋转性得不到保证.L 曲率<sup>[10]</sup>依据曲线的拓扑边长确定支持领域,提高离散曲率计算的抗旋转性,但曲线上的噪声依然会带来消极影响.为此本文提出根据欧氏距离确定支持领域的方法,能同时减少旋转和噪声对曲率计算结果的影响.

记

$$l = \{p_i : (x_i, y_i, i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

为一条数字曲线,考虑当前点  $p_i$ ,其支持领域

$$\Omega(p_i) = [p_{i-U_b}, p_{i+U_f}]$$

由约束条件

$$\|p_i p_{i-U_b}\| = \|p_i p_{i+U_f}\| = U$$

确定,其中,  $U > 0$  为输入的参数,  $\|\cdot\|$  表示两个像素点之间的欧氏距离,即

$$\|p_i p_{i+j}\| = \sqrt{(x_{i+j} - x_i)^2 + (y_{i+j} - y_i)^2}.$$

由于数字曲线的离散特征,上面所确定的结果只能近似满足约束条件式(6).为此借鉴文献[10]中的隐式精化数字曲线策略提高计算的准确性,使得式(6)能被精确满足.具体地,令

$$p_i^f = up_{i+U_{f-1}} + (1-u)p_{i+U_f}, \quad 0 \leq u < 1,$$

根据条件  $\|p_i p_i^f\| = U$  求出待定系数  $u$  的值,从而得到领域前端点  $p_i^f$ ,同理得到领域后端点  $p_i^b$ ,由此调整支持领域.相应的算法步骤如下.

算法 1 支持领域的确定

- step 1 输入参数  $U$  和点  $p_i = (x_i, y_i)$ .
- step 2 令  $j = i - 1$ , 向前遍历,直到满足条件  $\|p_i p_j\| \geq U$ , 取  $p_{i-U_b} = p_j$ .
- step 3 令  $j = i + 1$ , 向后遍历,直到满足条件  $\|p_i p_j\| \geq U$ , 取  $p_{i+U_f} = p_j$ .
- step 4 设
- $$p_i^f = up_{i+U_{f-1}} + (1-u)p_{i+U_f},$$
- 根据条件  $\|p_i p_i^f\| = U$  求出  $u(0 \leq u < 1)$ , 由此得到  $p_i^f$ .
- step 5 设
- $$p_i^b = up_{i-U_{b+1}} + (1-u)p_{i-U_b},$$
- 根据条件  $\|p_i p_i^b\| = U$  求出  $u(0 \leq u < 1)$ , 由此得

到  $p_i^b$ .

step 6 确定  $[p_i^b, p_i^f]$  为点  $p_i$  的支持领域.

图 1 直观地描述  $U$  曲率支持领域的确定方法.

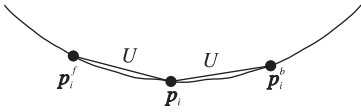


图 1 计算  $U$  弦长曲率的支持领域  
Fig. 1 Support region for computing U-chord curvature

3.2 U 曲率计算

类似于  $k$  曲率和  $L$  曲率,计算  $U$  弦长曲率时,应用与支持领域前后臂矢量夹角相关的一个余弦值作为离散曲率,具体计算公式为

$$c_i = s_i \sqrt{1 - \left(\frac{D_i}{2U}\right)^2}, \tag{7}$$

其中,  $s_i$  为  $U$  弦长曲率值的符号,与 2.4 节中  $L$  曲率符号的计算相同;  $(x_i^b, y_i^b)$ 、 $(x_i^f, y_i^f)$  分别为点  $p_i^f$ 、 $p_i^b$  的坐标;  $D_i = \|p_i^b p_i^f\|$  是  $p_i^b$ 、 $p_i^f$  间的欧氏距离.

3.3 几何意义

$U$  弦长曲率和曲线的真实曲率之间存在密切联系. 为说明这一点,考虑两个特殊的情形,其他情形可由此综合分析.

1) 考虑一个标准的圆角,如图 2(a) 所示. 记圆角上各点的实际曲率为  $\kappa$ . 因为  $op_i = op_i^f = r$ , 所以

$$\angle Ep_i p_i^f = \angle Fp_i^f o,$$

可得

$$\angle Ep_i^f p_i = \angle Fop_i^f,$$

因此

$$\sin \angle Ep_i^f p_i = \sin \angle Fop_i^f,$$

相应地,

$$\frac{h}{U} = \frac{U}{2} \cdot \frac{1}{r},$$

从而

$$\begin{aligned} c_i &= \sqrt{1 - \left(\frac{D_i}{2U}\right)^2} = \frac{1}{U} \sqrt{U^2 - \left(\frac{D_i}{2}\right)^2} \\ &= \frac{h}{U} = \frac{U}{2} = \frac{U}{2} \kappa. \end{aligned}$$

在此情形下,  $U$  弦长曲率  $c_i$  是真实曲率  $\kappa$  的一个线性函数,从而曲线的弯曲程度越大 (即  $\kappa$  的取值越大), 计算所得的  $c_i$  取值也越大.

2) 考虑一个尖角,如图 2(b) 所示. 可证明

$$\begin{aligned} c_i &= \sqrt{1 - \left(\frac{D_i}{2U}\right)^2} = \frac{1}{U} \sqrt{U^2 - \left(\frac{D_i}{2}\right)^2} \\ &= \frac{h}{U} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

在此情形下,  $U$  弦长曲率  $c_i$  是关于尖角角度  $\theta$  的一个减函数,从而曲线的弯曲程度越大 (即  $\theta$  的取值越小), 计算所得的  $c_i$  取值也越大.

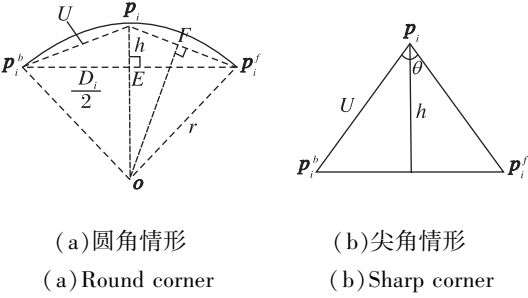


图 2  $U$  弦长曲率的几何意义  
Fig. 2 Geometric meaning of U-chord curvature

综合 1) 和 2),  $U$  曲率和曲线的真实曲率或尖角角度密切相关,因此可用来合理考察数字曲线的几何性质.

4 稳定性测试

本节测试  $U$  曲率的稳定性,包括其抗噪性和抗旋转性. 用于测试对比的包括第 2 节所概述的 4 种现有代表性方法. 设计如下的指标公式量化评价各种方法的稳定性:

$$E = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_n}{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}}, \tag{8}$$

其中,  $E_i$  表示加噪或旋转前后第  $i$  个点处离散曲率变化的差值,  $\kappa_{\max}$  和  $\kappa_{\min}$  分别表示曲线最大、最小离散曲率值. 在式 (8) 中,以  $\kappa_{\max} - \kappa_{\min}$  (即离散曲率的波动幅度) 正规化各点离散曲率差值  $E_i$ ,从而保证不同计算方法之间的可比性. 总体误差  $E$  的取值越小,说明所使用的方法对旋转或噪声具有越好的稳定性.

4.1 数字圆测试

数字圆测试是一个简单的测试方法<sup>[8,12]</sup>. 在连续情形下,圆上各点处曲率相同 (这里设置为单位曲率值,即取值为 1). 在离散情形下,由于各点的离散方向不同,会引起离散曲率的波动. 波动越小,说明所使用的曲率计算方法抗旋转能力越强. 如果在数字圆上加入一定程度的噪声,则可通过这种波动综合测试方法的抗旋转性和抗噪性.

图 3(a) 为一个数字圆,有 415 个像素点; (b) 是数字圆加上噪声后的情形. 图 4 给出 4 种现有曲率计算方法及  $U$  弦长曲率对于加噪声前后数字圆



离散曲率的计算结果,其中参数值均取为 30 (除切线法不需选取参数外). 直观地可看出,U 弦长曲率的波动性低于其他 4 种方法,说明其抗旋转性优于其他方法. 而总体误差  $E$  的对比结果则表明,U 弦长曲率在抗噪性能上也优于其他方法.

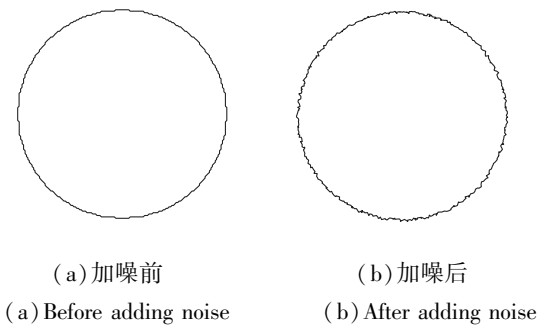


图 3 数字圆模型  
Fig. 3 Digital circle model

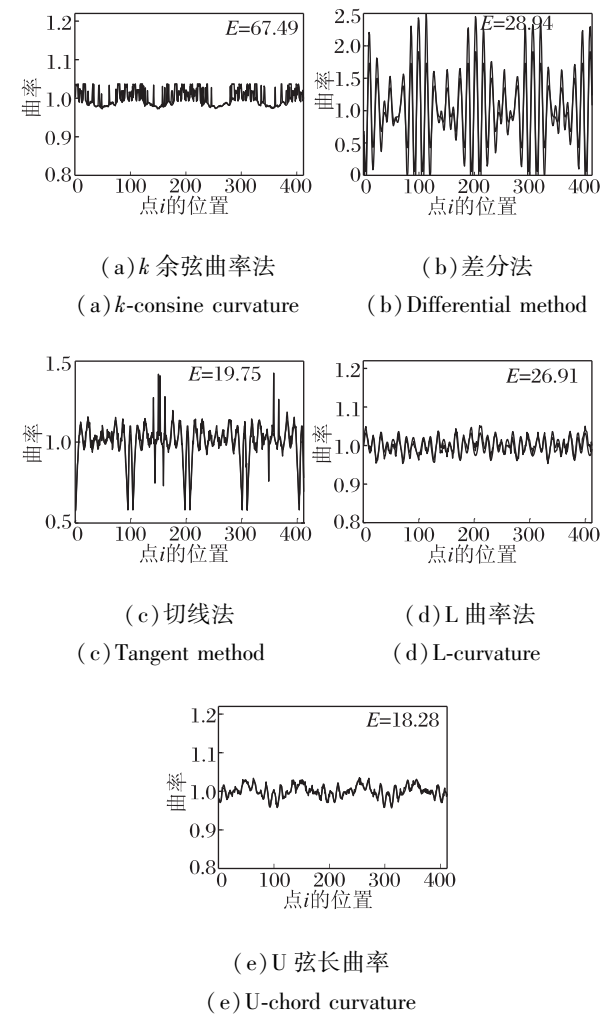


图 4 数字圆加噪前后离散曲率(重叠)的对比  
Fig. 4 Comparison of the discrete curvatures overlapping of the digital circle before and after adding noise

4.2 抗噪性测试

在相关文献和 MPGE-7 形状数据库中选择 3 幅具有代表性的曲线作为测试曲线,这些曲线都具有丰富的细节特征,能较全面地展示各种离散曲率计算方法的性能和特点. 除切线法不需选择参数外,其他 4 种方法的参数值都取为 8.

图 5(a)是 3 条测试曲线,分别为经典文献中的“染色体”和“飞机”曲线,以及取自于 MPEG-7 数据库中的“砖块”曲线. 通过随机函数分别给这 3 条曲线的各点坐标上加入扰动,由此产生噪声,得到有噪声的曲线 (见图 5(b)).

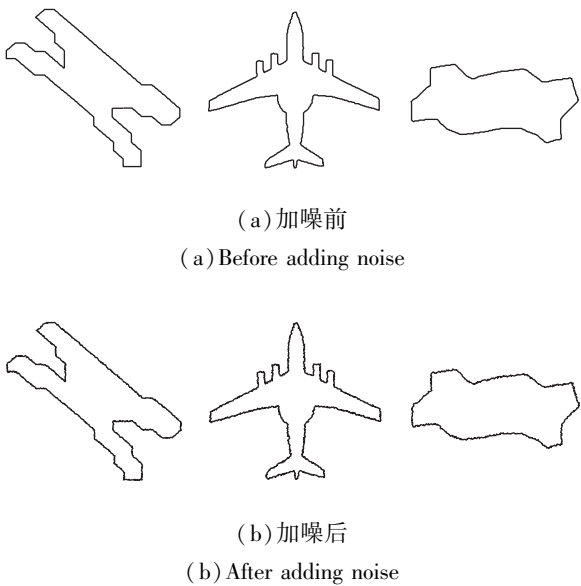


图 5 噪声环境下的测试曲线  
Fig. 5 Test curvature in the presence of noise

对于所测试的每个方法,分别计算 3 条曲线在加噪前后的离散曲率. 首先为直观演示抗噪性,将第一条测试曲线加噪前后的离散曲率计算结果重叠地显示在同一幅图中,见图 6. 加噪前后所计算的离散曲率重合度越好,说明该方法的抗噪性越强.

在图 6 中同时统计总体误差  $E$  的取值. 可看到, $k$  余弦曲率的抗噪性最弱 ( $E=20.95$ ); $L$  曲率由于噪声对曲线的拓扑边长影响很大,因此其抗噪性能也较差 ( $E=15.23$ );差分法由于其实行的曲线平滑步骤能过滤噪音,其抗噪性强于前面两种方法 ( $E=11.99$ ). 由于染色体曲线具有规范的结构 (各曲线段要么垂直,要么呈  $45^\circ$  方向),非常合适应用切线法计算离散曲率,因此切线法的表现较优 ( $E=6.75$ ). 然而即便如此,U 弦长曲率方法仍表现出更优的抗噪性 ( $E=6.72$ ).

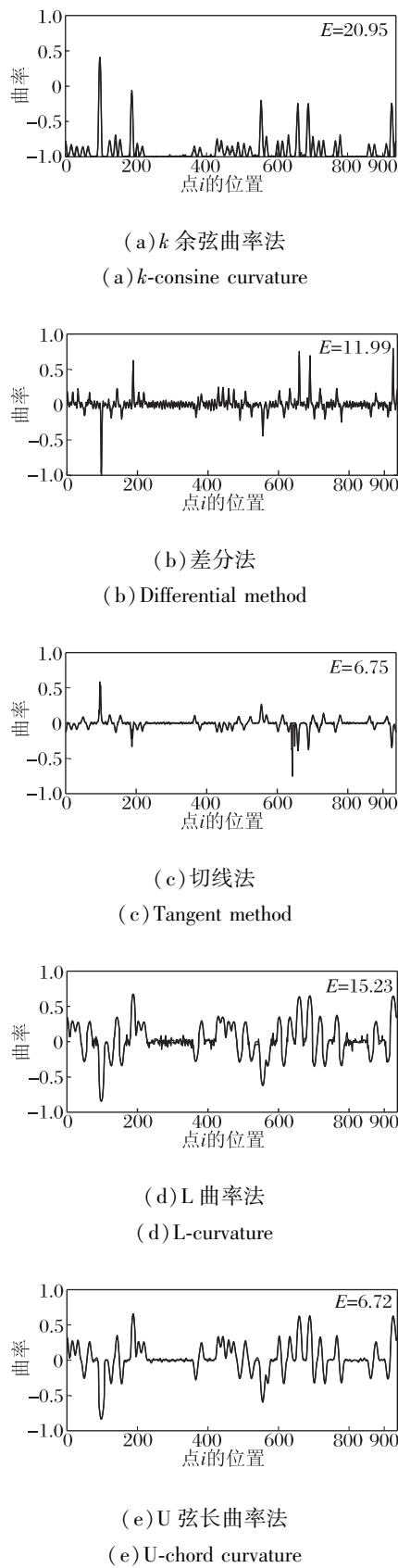


图 6 “染色体”曲线加噪前后离散曲率(重叠)的对比  
Fig. 6 Comparison of the discrete curvatures overlapping of the "chromosome" before and after adding noise

实际上,U 弦长曲率方法的设计原理保证离散曲率计算只在支持领域的两个端点处受到噪声影响,而其他方法则会被支持邻域内所有点上的噪声影响,因此 U 弦长曲率方法能在抗噪性方面胜出.

为更全面地评估各种方法的抗噪性能,图 7 给出这些方法在总体误差  $E$  方面的统计数据.对比发现, $k$  余弦曲率的抗噪性最弱; L 曲率、差分法与切线法表现一般; U 弦长曲率的表现最好,对 3 条所测试的曲线均表现出最强的抗噪性.这一结果也在更多测试中得到同样验证.

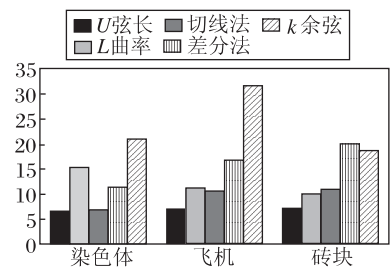


图 7 不同曲率计算方法抗噪性统计数据对比  
Fig. 7 A statistical comparison of different curvature measures in the presence of noise

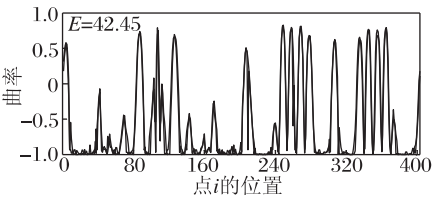
4.3 抗旋转性测试

抗旋转性测试所使用的测试曲线与 4.2 节相同(见图 6(a)). 分别将 3 条曲线逆时针旋转  $45^\circ$  (见图 8). 这一旋转角度能使得曲线上各点的分布发生最大程度的变化. 如旋转前曲线上的两点之间的距离或为 1 或  $\sqrt{2}$  (这是由数字曲线的特性决定的); 在旋转  $45^\circ$  后,距离为 1 的两个点之间距离变化为  $\sqrt{2}$ ,而距离为  $\sqrt{2}$  的两个点之间距离则变化为 1. 在这种最大程度的变化下,如果所使用的离散曲率计算方法对旋转敏感,则总体误差  $E$  会很大. 反之如果方法的抗旋转性良好,则  $E$  会很小.

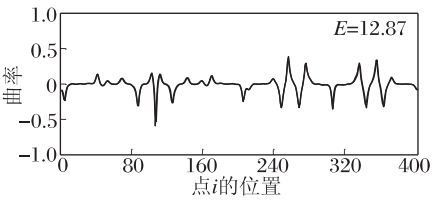


图 8 旋转变换下的测试曲线  
Fig. 8 Test curves under rotation

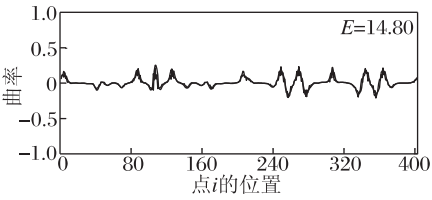
各种测试方法参数选取如 4.2 节. 类似于图 6, 图 9 选择飞机曲线直观对比旋转前后的离散曲率计算结果.



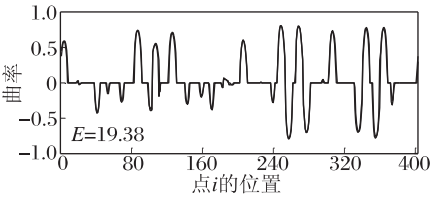
(a)  $k$  余弦曲率法  
(a)  $k$ -cosine curvature



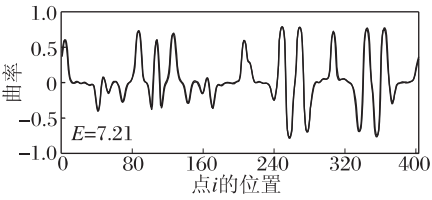
(b) 差分法  
(b) Differential method



(c) 切线法  
(c) Tangent method



(d) L 曲率法  
(d) L-curvature



(e) U 弦长曲率法  
(e) U-chord curvature

图 9 飞机旋转前后离散曲率(重叠)的对比  
Fig. 9 Comparison of the discrete curvatures overlapping of the "plane" before and after rotation

由总体误差  $E$  的取值可知,在该实验中各种方

法抗旋转性由弱到强的次序为: $k$  余弦曲率 ( $E = 42.45$ ),L 曲率 ( $E = 19.38$ ),差分法 ( $E = 17.43$ ),切线法 ( $E = 14.8$ ),U 弦长曲率 ( $E = 7.21$ ). 特别地,U 弦长曲率的总体误差明显低于其他方法,不到切线法的一半,显示其较强的抗旋转性.

图 10 全面对比 5 种方法对测试曲线的总体误差,可看到, $k$  余弦的抗旋转性最弱;差分法、切线法与 L 曲率的表现一般;U 曲率的表现较优,对于所测试的曲线均表现出最好的抗旋转性. 这一结果也在更多测试中得到验证.

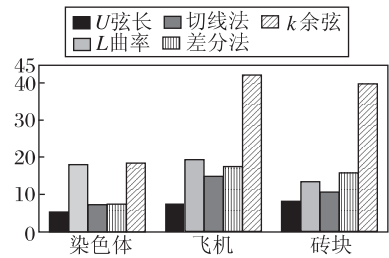


图 10 不同曲率计算方法抗旋转性统计数据对比  
Fig. 10 A statistical comparison of different curvature measures under rotation

### 5 在曲线匹配中的应用

物体的轮廓曲线是最重要的图像特征之一,在很多图像分析任务中得到广泛应用. 曲线匹配是离散曲率计算的实际应用背景之一. 以下在这一具体的应用背景下评估 U 弦长曲率解决实际问题的效率,参与评估对比的仍包括前述的其他 4 种曲率计算方法. 方法中的参数一般与曲线的总弧长成正比,可选取为总弧长的  $1/M$ ,其中  $M$  取值在  $10 \sim 20$  之间.

图 11 给出两张待拼接的照片碎片. 通过角点提取和曲线形态判断技术,易将碎片的边缘分割并去除直线边缘,得到待匹配的不规则边缘曲线,如图 12 所示(注:本文不讨论整个碎片拼接过程的实现,仅考虑离散曲率计算在曲线匹配中的表现).

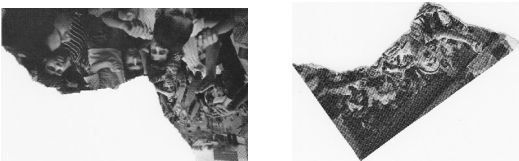


图 11 待拼接的照片碎片  
Fig. 11 Picture fragments to be matched



图 12 提取出的可匹配曲线

Fig. 12 Extracted edge curves that can be matched

由于待拼接的照片碎片具有不同的方位角度,同时碎片边缘具有毛边,因此图 12 中的曲线合适用来同时测试离散曲率计算方法的抗旋转性和抗噪性. 本节所考虑的曲线匹配策略如下:分别从待匹配曲线的一个端点处开始,按照固定的欧氏长度等距地在曲线上截取若干的点作为匹配点,计算这些点上的离散曲率.

在截取匹配点的过程中,为提高计算精度继续使用隐式精化数字曲线策略,因此所得到的点一般位于两个像素点中间. 此时应用算法 1 计算 U 曲率的 step 2 中  $j$  的初始取值为前一个像素点的位置, step 3 中  $j$  的初始取值为后一个像素点的位置. 然后考察两条曲线在匹配点处曲率值的总体误差  $E$  的大小,若  $E$  小于给定的一个阈值,则认定两条曲线之间的匹配关系(具体算法过程较复杂,将另文讨论). 这里只评估离散曲率计算结果在确实存在匹配关系的曲线对上的一致性. 一致性越高,即总体误差  $E$  越小,说明所使用的方法效率越好.

在图 12 中,在两条曲线上等距截取 10 个点,分别以三角形和星号标记. 图 13 演示 5 种曲率计算方法的表现. 直观地可看出, U 弦长曲率在两条曲线上的计算结果几乎完全一致. 为更清楚地说明问题,图 14 详细列出各种测试方法在曲线每个截取点上的正规化误差. 从图 14 同样可看出, U 弦长曲率的单点误差取值较平衡,总体水平明显优于其他方法. 总体误差  $E$  也验证这一点 ( $E=0.22$ , 见图 13). 相较于其他 4 种方法 ( $E=2.60, 1.32, 0.53, 1.32$ ), U 弦长曲率的表现有利于确认两条曲线的匹配关系.

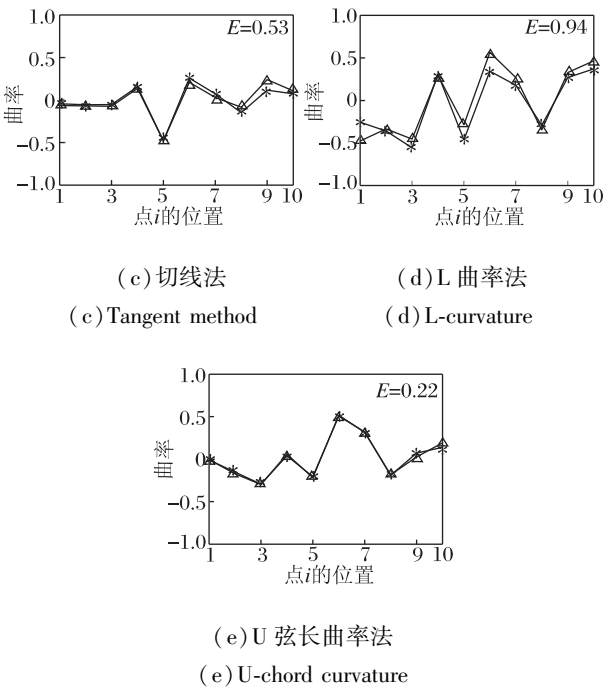
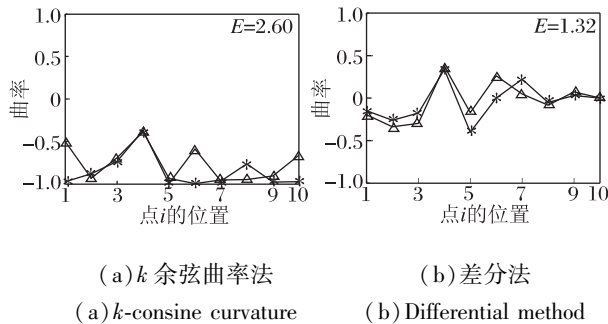


图 13 2 条待匹配曲线离散曲率(重叠)计算结果的对比

Fig. 13 Comparison of the discrete curvatures overlapping of 2 curves to be matched

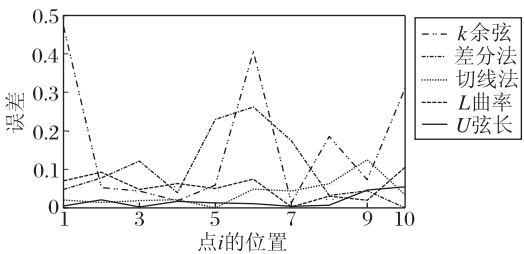


图 14 不同计算方法对 2 条待匹配曲线曲率计算结果的误差对比

Fig. 14 Comparison of curvature error of different methods for 2 curves to be matched

6 结束语

本文针对离散曲率计算过程中的稳定性问题,设计一种离散曲率计算方法,称为 U 弦长曲率. 论证 U 弦长曲率与曲线实际曲率之间的密切关系,全面测试 U 弦长曲率对于旋转和噪声的稳定性. 实验结果表明, U 弦长曲率的稳定性优于现有方法. 这一曲率计算方法是针对曲线匹配这类对曲率计算稳定性要求很高的视觉和图像分析任务所设计的独特方法,在实际应用中可和现有的曲率计算方法配合使用,相互补充.



参 考 文 献

[1] Rosenfeld A, Johnston E. Angle Detection on Digital Curves. IEEE Trans on Computers, 1973, 22(9): 875-878

[2] Pla F. Recognition of Partial Circular Shapes from Segmented Contours. Computer Vision and Image Understanding, 1996, 63(2): 334-343

[3] Zhong B J, Ma K K, Liao W H. Scale-Space Behavior of Planar-Curve Corners. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(8): 1517-1524

[4] He X C, Yung N H C. Corner Detector Based on Global and Local Curvature Properties. Optical Engineering, 2008. DOI: 10.1117/1.2931681

[5] Lee D, Park Y. Vision-Based Remote Control System by Motion Detection and Open Finger Counting. IEEE Trans on Consumer Electronics, 2009, 55(4): 2308-2313

[6] Ran L K, He L, Chen Z. A Localization and Extraction Method Research for Phalange ROI and Carpal ROI from Left Hand Radiography. Advanced Materials Research, 2012. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.340.259

[7] Ran L K. A Location Method for the Key Points of the Skeletal Images Based on Corner Detection. Electronic Design Engineering, 2011, 19(14): 175-177 (in Chinese)

(冉隆科. 一种基于角点检测方法的骨龄图像关键点定位. 电子设计工程, 2011, 19(14): 175-177)

[8] Cui Q, Wang L. A Method Based on Discrete Tangent for Curvature Estimation of Digital Curve // Proc of the WRI Global Congress on Intelligent Systems. Xiamen, China, 2009, IV: 330-334

[9] Cui Q, Xi P, Dai M. An Improved Method for Tangent Estimation of Digital Curves. Journal of Engineering Graphics, 2006, (1): 70-75 (in Chinese)

(崔 芊, 席 平, 戴 模. 对于离散曲线上逐点切线方向估计的一种改进算法. 工程图学学报, 2006, (1): 70-75)

[10] Zhong B J, Liao W H. Corner Detection Based on Accumulative Chord Length of Refined Digital Curves. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(7): 939-943 (in Chinese)

(钟宝江, 廖文和. 基于精化曲线累加弦长的角点检测技术. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(7): 939-943)

[11] Zhong B J, Liao W H. Enhanced Corner Detection Based on the Topology Boundary of Refined Digital Curves. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2005, 18(2): 165-170 (in Chinese)

(钟宝江, 廖文和. 基于精化曲线拓扑边长的角点增强检测. 模式识别与人工智能, 2005, 18(2): 165-170)

[12] Zhong B J. On the Stability of Refined L-curvature under Rotation Transformations. Applied Mechanics and Materials, 2010. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.20-23.401