课程编号：07000130　　北京理工大学 2008-2009 学年第一学期

数学分析 B 期末试题(A 卷)

班级________　　学号________　　姓名________

(本试卷共 5 页，九个大题)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评阅人										

一. 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\dfrac{d(\arcsin x)}{d\sqrt{1-x^2}}=$ ____________.

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $y''=x+\sin x$，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 在原点处相切，则

$f(x)=$ ____________.

3. 函数 $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值 $M=$ ______，最小值 $m=$ ______.

4. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=x^2$ 的通解为____________.

5. 函数 $f(x)=x\ln(1+x)-e^{x^2}$ 的 5 阶麦克劳林公式(带佩亚诺余项)为

$f(x)=$ ____________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x^2} & x>0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{bx} & x<0\end{cases}$ 是连续函数，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

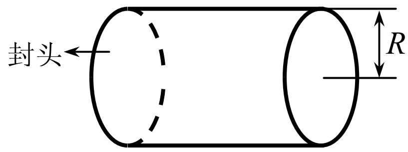
7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^{\tan x}\dfrac{\sin t}{t}dt}=$ ____________.

二. (9 分) 求微分方程 $y''+y'-2y=e^{x}$ 的通解.

三. (9 分) 求不定积分 $\int x^{2}\arctan x dx$.

四. (9 分) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=1$，求 a 和 b 的值.

五. (9 分) 已知油罐车上的油罐是半径为 R 的圆柱体, 两边的封头是半径为 R 米的圆板 (如图), 若油的密度 $\mu = 800\,\text{kg/m}^3$, 并假定油罐装满了油, 求油罐的每个封头所受的侧压力.



六. (9 分) 求反常积分$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

七. (9 分) 已知函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加，且对任意$t>1$，曲线$y=f(x)$在$[1,t]$上的弧长等于此曲线与直线$x=1$，$x=t$及x轴所围图形面积的 2 倍，又曲线过点$(1,\frac{1}{2})$，求$f(x)$.

八. (9 分) (1)设 $I_1=\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx$，$I_2=\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx$，比较 I_1, I_2 的大小(要说明理由);

(2) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$，证明 $F(x)$ 恒为正的常数.

九. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $|f''(x)|\le 1$，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$. (1) 证明 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点; (2) 证明 $|f'(0)|+|f'(2)|\le 2$.

2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\frac{1}{x}$

2. $\frac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y=Cx+\frac{x^3}{2}$ (没有 y 扣 1 分)

5. $-1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{4}+o(x^5)$

6. ± 2, $-\frac{1}{4}$ (2 分(没有 $\pm$ 扣 1 分), 2 分)

7. e

二. $r^2+r-2=0$ ……………………….(1 分)

$r_1=1 \quad r_2=-2$ ……………………….(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ……………………….(5 分)

设 $y^*=Axe^x$ ……………………….(6 分)

代入方程得 $A=\frac{1}{3} \quad y^*=\frac{1}{3}xe^x$ ……………………….(8 分)

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{1}{3}xe^x$ ……………………….(9 分)

三. $\int x^2\arctan x dx=\frac{1}{3}\int \arctan x d(x^3)$ ……………………….(2 分)

$=\frac{1}{3}(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx)$ ……………………….(5 分)

$=\frac{1}{3}[x^3\arctan x-\int(x-\frac{x}{1+x^2})dx]$ ……………………….(7 分)

$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$ ……………………….(9 分)

四. 由题设，当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2)\sim x^2$ ……………….(2 分)

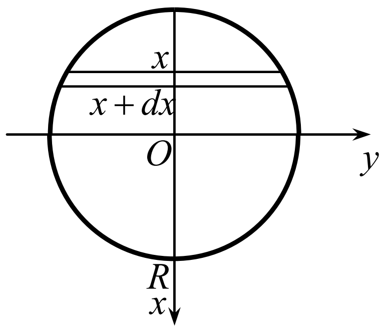
$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$$ ………………(4 分)

$$=(1-a)x+(-\frac{1}{2}-b)x^2+o(x^2)$$ ……………………(5 分)

$$1-a=0 \qquad -\frac{1}{2}-b=1$$ ……………………(7 分)

$$a=1 \qquad b=-\frac{3}{2}$$ ……………………(9 分)

五. 如图建立坐标系



$$dP=\mu g(x+R)2ydx$$ …...............................(2 分)

$$=2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………...(3 分)

$$P=\int_{-R}^{R}2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ………………………(5 分)

$$=4\mu gR\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ………………………(6 分)

$$=\pi\mu gR^3=800\pi gR^3\,(\mathrm{N})$$ ………………………(9 分)

六. 令$t=\sqrt{x+1}$，即$x=t^2-1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{ 分})$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{ 分})$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{ 分})$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

七. 设曲线方程为$y=y(x)$

$$\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}dx=2\int_1^t ydx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{ 分})$$

两端对t求导

$$\sqrt{1+(y')^2}=2y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{ 分})$$

$$y'=\sqrt{4y^2-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{ 分})$$

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2-1}}=dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6\text{ 分})$$

积分得 $$\frac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=x+C_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{ 分})$$

由 $y\big|_{x=1}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=-1$ ……………………..(8 分)

$$\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=2(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}ch2(x-1)=\frac{e^{2(x-1)}+e^{-2(x-1)}}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

八. (1) 在$(0,\pi)$, $e^{\sin x}\sin x>0$，故$I_1>0$，在$(\pi,2\pi)$，$e^{\sin x}\sin x<0$，故$I_2<0$

$$I_1>I_2 \qquad \text{………………………(3 分)}$$

(2) $$F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x$$

$$=e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}\sin x=0$$

所以$F(x)$为常数 ……………………….(5 分)

令$u=x-\pi$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{\sin(\pi+u)}\sin(\pi+u)du=-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=I_1+I_2$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$$

当$t\in(0,\pi)$，$\sin t>0$，$e^{\sin t}>1$，$e^{-\sin t}<1$，$\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})>0$

故$F(0)>0$，因此$F(x)$为正的常数 …………………..(9 分)

九. (1) 由题设，得 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$，$f(1)=0$ …………………..(2 分)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

故$f(x)$在$(0,2)$内存在驻点 …………………..(4 分)

(2) 根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，$\exists\xi_2\in(1,2)$，使

$$f'(1)-f'(0)=f''(\xi_1)\qquad f'(2)-f'(1)=f''(\xi_2)$$ ……………...(6 分)

$$|f'(0)|+|f'(2)|=|f'(1)-f'(0)|+|f'(2)-f'(1)|$$ ……………..(8 分)

$$=|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\le1+1=2$$ …………………(9 分)