2011 年线性代数 A 期末考试 A 卷参考答案

一 解　在方程 $A^*X=2A^{-1}+2X$ 两端左乘 A 得

$$|A|X=2I+2AX$$

计算得 $|A|=4$，则 $X=(4I-2A)^{-1}\cdot 2I$，即

$$X=(2I-A)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

二、解方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\\lambda&5&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\\lambda+10&0&0\end{vmatrix}=\lambda+10$$

所以当 $\lambda\neq-10$ 方程组有唯一解.

当 $\lambda=-10$ 方程组有无穷多解，此时增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&1&2\\-10&5&-5&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-5&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $X_0=(1,0,0)^T$ 为方程组的一个特解， $X_1=(-1,3,5)^T$ 是导出组的一个基础解系，则一般解为

$X=X_0+k_1X_1$

三 解

（1）由（$x^3,x^2+x^3,x+x^2+x^3,1+x^3$）=（$1,x,x^2,x^3$）$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

且 $\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$ 满秩知　$x^3,x^2+x^3,x+x^2+x^3,1+x^3$ 为一组基.

（2）由（1）知过渡矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $h(x)=1+2x+4x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

四　解

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ……………

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,$ ……………

极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ …………… 剩余

向量的表出　$\alpha_4=-\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3$ ……………

五、解

(1) A 的初等因子为

$$\lambda+1, (\lambda-6)^2,\ \lambda^3$$

(2) A 的特征值为

-1, 6, 6, 0, 0, 0

六、解σ在$\mathbf{R}^3$的自然基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

七、证明：2×2的实矩阵A的特征值都为实数的充要条件为$|A|\le\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2$（其中$\mathrm{tr}A$为$A$的

迹）。

证明：我们知道

$$|\lambda I-A|=\lambda^2-(\mathrm{tr}A)+|A|. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以

$$\lambda=\frac{\mathrm{tr}A\pm\sqrt{(\mathrm{tr}A)^2-4|A|}}{2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故而A的特征值都为实数的充要条件为$(\mathrm{tr}A)^2-4|A|\geq 0$, 即

$$|A|\leq\left(\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)^2. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

八、解

（1） $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$

特征值为$\lambda_1=-1$(二重)，$\lambda_2=5$。

当$\lambda_1=-1$时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

相应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,1,0)$, $\alpha_2=(-1,0,1)$

正交化得 $\beta_1=(-1,1,0)$, $\beta_2=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 1\right)$,

单位化$\gamma_1=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$， $\gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

λ =5 时，$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)$，单位化为$\gamma_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

所以取$Q=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

令 $X=QY$，二次型化为 $f=-{y_1}^2-{y_2}^2+5{y_3}^2$.

（2）二次型不是正定的。

九、证明：充分性.设 A 可逆，则对任意 b，$X=A^{-1}b$.

必要性:

解法一: 使 b 取遍所有单位向量后, 原方程组都有解, 以这些解向量作为列向量构做矩阵 B, 显然 $AB=I$, 其中 I 为单位阵, 由此知, A 可逆.

解法二: 由题目假设知: 任何 n 维向量 b 都能由 A 的列向量组线性表出, 所以向量空间 R^n 的维数不会超过 A 的列向量组的秩, 由此得出: A 的列向量组的秩为 n, 即 A 可逆.

十、证：设 $A\sim\Lambda=\mathrm{diag}\{\underbrace{\lambda_0,\cdots,\lambda_0}_{k},\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n\}$, $\lambda_i\neq\lambda_0, i=k+1,\ldots,n.$

则 $A-\lambda_0 I\sim\Lambda-\lambda_0 I$, $(A-\lambda_0 I)^2\sim(\Lambda-\lambda_0 I)^2.$

故

$$rank(A-\lambda_0 I)=rank(\Lambda-\lambda_0 I)=rank(\mathrm{diag}\{\underbrace{0,\cdots,0}_{k},\lambda_{k+1}-\lambda_0,\cdots,\lambda_n-\lambda_0\}$$

$$=n-k$$

同理，

$$rank(A-\lambda_0 I)^2=rank(\Lambda-\lambda_0 I)^2=rank(\mathrm{diag}\{\underbrace{0,\cdots,0}_{k},(\lambda_{k+1}-\lambda_0)^2,\cdots,(\lambda_n-\lambda_0)^2\}$$

$$=n-k=rank(A-\lambda_0 I).$$

（2）如存在Y，使得$(A-\lambda_0 I)Y=X_0$，则

$$(A-\lambda_0 I)^2 Y=(A-\lambda_0 I)X_0=\theta,$$

由（1）知方程组$(A-\lambda_0 I)^2 X=\theta$与$(A-\lambda_0 I)X=\theta$同解。

从而$(A-\lambda_0 I)Y=\theta$，即$X_0=\theta$，与X_0为特征向量矛盾。