课程编号：A073122　　北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足: $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 5x_2 - 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）已知线性空间$F[x]_4$的自然基为$1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明：$x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$为$F[x]_4$的一个基；

(2) 求自然基$1, x, x^2, x^3$到基$x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$的过渡矩阵;

(3) 求$h(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3$在后一个基下的坐标。

四、(10 分)已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,-1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1,0),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,-2,-1),\quad \boldsymbol{\alpha}_4=(-2,2,-1,1),$$

（1）求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 6 & 1 & & & \\ & & 6 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子；　　(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在 $\mathbf{R}^3$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, 3x_1)}$。求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵。

七、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 的实矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值都为实数的充要条件为 $|\boldsymbol{A}| \le \left(\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}}{2}\right)^2$（其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的迹，即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和）。

八、（10 分　已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$。

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）已知线性方程组 $A_{n\times n}X=b$ 对任何 b 的取值都有解的充要条件是 $A_{n\times n}$ 为可逆阵。

十、（10 分）设 A 相似于对角阵，λ_0 是 A 的特征值，X_0 是 A 对应于 λ_0 的特征向量，证明：

(1) 秩 $(A-\lambda_0 I)=$ 秩 $(A-\lambda_0 I)^2$；

(2) 不存在 Y，使得 $(A-\lambda_0 I)Y = X_0$；