课程编号：A073003 北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

线性代数 B 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）设 A 是三阶矩阵，A^* 是其伴随矩阵，已知 $|A|=4$，求行列式 $\left|\frac{1}{4}A^* - (4A)^{-1}\right|$ 的值。

二、（10 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B$ 满足方程 $A^{-1}BA = 6A + BA$，求 B。

三、（10分）已知向量 $\alpha_1=(-2,1,0,3)$，$\alpha_2=(1,-3,2,4)$，$\alpha_3=(3,0,2,-1)$，$\alpha_4=(2,-2,4,6)$，

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、（10 分）设$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$与$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$是$\mathbf{R}^3$的两组基，且由基$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$到$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\ \mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$。

(1) 如果α在基$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$下的坐标为$(2,-1,3)$，求$\alpha$在基$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$下的坐标；

(2) 如果$\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(0,-1,1)^T$，求基$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$。

五、（10 分）求齐次线性方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_1+x_2+x_3+x_4=0}\\ \boldsymbol{x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0}\\ \boldsymbol{2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0}\end{cases}$$

的解空间的一个标准正交基。

六、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda x_1+x_2+x_3=1}\\ \boldsymbol{x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda}\\ \boldsymbol{x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2}\end{cases}$$

问：$\boldsymbol{\lambda}$取何值时，此方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求通解。（用导出组的基础解系表示通解）

七、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。

八、（10 分）已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

(1) 求一正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ ，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

九、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$。

(1) 证明存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{diag}(1,1,\ldots,1,0,\ldots$$

(2) 若 $\mathbf{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}$，则求 $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}\text{-}2\boldsymbol{I})$。

十、（10 分）已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

（$\boldsymbol{k}$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\mathbf{0}$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解。