课程编号：A073003 北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\3&4&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&3\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix}&3A^*\\B&0\end{vmatrix}=(-1)^{3\times3}\left|3A^*\right|\left|B\right|=-3^3\left\|A\right|A^{-1}\right|\left|B\right|\ =-27\left|A\right|^2\left|B\right|=-27\cdot(-1)^2\cdot1=-27$$

二、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$， 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆；（2）求 $\boldsymbol{X}$。

解 由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ 得 $X（A-2I）=B$

$A-2I=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\left|A-2I\right|=-1$，故 $A-2I$ 可逆。所以 $X=B(A-2I)^{-1}$

而 $$\left(A-2I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&-9&-6\\-1&8&5\end{pmatrix}$$

三、（10 分）已知平面上三条直线的方程 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}=0,2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-1=0,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}-\frac{1}{2}=0$

讨论的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

解：$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-a\\2&3&1\\1&-a&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&-a\\0&5&1+2a\\0&1-a&\frac{1}{2}+a\end{bmatrix}=\overline{B}$

若 $a=1$，上述矩阵已化为阶梯形，此时，方程组无解，三条直线中第一条与第三条平行但不重合，与第二条相交。若 $a\neq1$，继续进行初等行变换，有

$$\overline{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}+a\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 1 & 1+2a\\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3)\end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为$\begin{cases} 2x+3y=1\\ 5y=2a+1\\ 0=(2a+1)(2a+3)\end{cases}$

当$a\neq-\frac{1}{2}$且$a\neq-\frac{3}{2}$时，方程组无解。此时，三条直线不交于一点，但任意两条直线都相交。

当$a=-\frac{1}{2}$时，方程组有唯一解$x=-\frac{1}{2},y=0$，此时，三条直线交于点（$-\frac{1}{2}$,0），且任意两条直线不重合。

当$a=-\frac{3}{2}$时，方程组有唯一解$x=\frac{11}{10},y=-\frac{2}{5}$，此时，三条直线交于点（$\frac{11}{10},-\frac{2}{5}$），且其中后两条直线重合。

四、（10 分）已知

$\boldsymbol{\alpha_1=(1,2,3,-4)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_2=(2,3,-4,1)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T}$，$\boldsymbol{\alpha_4=(3,-4,1,2)^T}$（1）求向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：$\left[\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}\right]=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} & \mathbf{8} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$

所以秩为 3，$\boldsymbol{\alpha_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,}$

五、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$是向量空间$\boldsymbol{R^3}$的一个基,$\boldsymbol{\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}$，$\boldsymbol{\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3}$，$\boldsymbol{\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3}$。

(1) 证明$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$为$\boldsymbol{R^3}$的一个基;

(2) 求基$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$到基$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\boldsymbol{\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3}$关于基$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$的坐标。

解：

（1）

$$\left[\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}\right]=\left[\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 可逆，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基;

（2）过度矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

（3）坐标

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

六、（10 分）已知 $\alpha_1 = (1,0,-1)$，$\alpha_2 = (2,2,0)$，$\alpha_3 = (0,1,1)$。求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个标准正交基。

解： $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以 α_1，α_2 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一个基。取

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1,0,-1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = (1,2,1)$$

单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$

为成生子空间的一组基。

七、（10 分）设为 A 正交矩阵,且 $|A| = -1$，求证 $\lambda = -1$ 为的 A 一个特征值。

证明：因为

$$|A+I| = |A + AA^T| = |A||I + A^T| = -|I^T + A^T| = -|A+I|,$$

所以

$$|A+I| = 0$$

所以 $\lambda = -1$ 为的 A 一个特征值。

八、（10 分）已知二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2}$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

解：由方程

由方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 4-4\lambda & 4-(\lambda-2)(\lambda-5)\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得 A 的特征值为 1（二重）和 10.

对于 $\lambda=1$，特征方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 为

$$\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

特征向量为 $X_1=(-2,1,0)^T, X_2=(2,0,1)^T$

正交化

$$\xi_1=(-2,1,0)^T$$

$$\xi_2=X_2-\frac{(X_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1$$

$$=(2,0,1)^T+\frac{4}{5}(-2,1,0)^T$$

$$=(\frac{4}{5},\frac{4}{5}1)^T$$

再单位化 $\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,\eta_2=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T$

对于 $\lambda=10$，特征方程组 $\begin{bmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$

特征向量 $X_3=(1,2,-2)^T$

单位化

$\eta_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})^T$

令 $$Q=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

经正交变换 $X=QY$，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

九、（10 分）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{2\gamma_1}\\ \boldsymbol{3\gamma_2}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma_1}\\ \boldsymbol{\gamma_2}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma_1},\boldsymbol{\gamma_2}$ 都是三维行向量，且已知行列式 $\boldsymbol{|A|=18,|B|=2}$，求 $\boldsymbol{|A-B|}$。

解：两矩阵相减，其对应行分别相减，因而

$$|A-B|=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\ 2\gamma_2-\gamma_2\\ 3\gamma_3-\gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\ \gamma_2\\ 2\gamma_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}$$

上述行列式的第 1 行为两分行之差，因而可拆分为两行列式之差，得到

$$|A-B|=2\begin{vmatrix}\alpha\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\\ 2\gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\alpha\\ 2\gamma_2\\ 3\gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{vmatrix}$$
$$=(1/3)\times18-2\times2=2$$

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A^2=A}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}$ $\quad(\boldsymbol{0<r\le n})$。

(1) 试确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；
(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；
(3) 求行列式 $\boldsymbol{|A-3I|}$ 的值。

解（1）设 A 的特征值为 λ，则由 $A^2-A=0$

得 $\lambda^2-\lambda=0$ 因而 $\lambda=1或\lambda=0$

（2）由 $r(A)=r$，得 $q_{\lambda=0}=n-r$

$$\left.\begin{array}{c} A^2-A=0 \Rightarrow -A(I-A)=0 \\ \Rightarrow r(A)+r(I-A) \le n \\ A+(I-A)=I \\ \Rightarrow r(A)+r(I-A) \ge n \end{array}\right\} \begin{array}{c} r(A)+r(I-A)=n \\ r(I-A)=n-(n-r)=r \\ \text{得} q_{\lambda=1}=r \end{array}$$

矩阵 A 的两个互异特征值的几何重数之和等于 n，所以 A 可以对角化。

$$(3)\ \left|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}\right| = (0-3)^{n-r}\cdot(1-3)^{r} = (-3)^{n-r}\cdot(-2)^{r}$$