课程编号：A073003

北京理工大学2014-2015学年第一学期

线性代数B试题 A卷

一、（10分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\3&4&3\end{pmatrix}$，求行列式$\begin{vmatrix}0&3A^*\\B&0\end{vmatrix}$的值。

二、（10分）设矩阵X满足$XA=B+2X$， 其中$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

（1）证明：$A-2I$可逆；（2）求X。

三、（10分）已知平面上三条直线的方程$x-y+a=0, 2x+3y-1=0, x-ay-\frac{1}{2}=0$

讨论的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

四、（10 分）已知

$\boldsymbol{\alpha_1=(1,2,3,-4)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_2=(2,3,-4,1)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_4=(3,-4,1,2)^T}$ （1）求向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$是向量空间$\boldsymbol{R^3}$的一个基,$\boldsymbol{\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}$， $\boldsymbol{\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3}$，$\boldsymbol{\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3}$。

(1) 证明$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$为$\boldsymbol{R^3}$的一个基;

(2) 求基$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$到基$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$的过渡矩阵;

(3) 求向量$\boldsymbol{\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3}$关于基$\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$的坐标。

六、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1=(1,0,-1)}$, $\boldsymbol{\alpha_2=(2,2,0)}$, $\boldsymbol{\alpha_3=(0,1,1)}$。求生成子空间$\boldsymbol{L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$的一个标准正交基。

七、（10 分）设为 $\boldsymbol{A}$ 正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，求证 $\boldsymbol{\lambda}=-1$ 为的 $\boldsymbol{A}$ 一个特征值。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

九、（10 分）设三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_1\\ 3\boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$,其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$都是三维行向量，且已知行列式$|\boldsymbol{A}|=18, |\boldsymbol{B}|=2$，求$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$。

十、（10 分）设$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}\quad (\boldsymbol{0}<\boldsymbol{r}\le\boldsymbol{n})$。

(1) 试确定$\boldsymbol{A}$的特征值的取值范围；

(2) 证明$\boldsymbol{A}$一定可以相似对角化；

(3) 求行列式$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{3I}|$的值。