

课程编号: A073003

北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

## 线性代数 B 试题 B 卷

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
| 签名 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

一、(10 分) 已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 求行列式  $\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B^{-1} \end{vmatrix}$  的值, 其

中  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵。

二、(10 分) 例设矩阵  $X$  满足  $AX = A + 2X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 。

(1) 证明  $A - 2I$  可逆: (2) 求  $X$ 。

三、(10 分) 对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论：当  $a$  取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）。

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 2, 2)^T, \quad \beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 1, 1)^T$$

(1) 求基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵；

(2) 求向量  $\gamma = (1, 3, 0)^T$  关于基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的坐标。

五、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (0, 4, 2)^T, \quad \alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (-2, 4, 3)^T, \quad \alpha_4 = (-1, 1, 1)^T$$

求生成子空间  $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  的维数和一组基。

六、(10 分) 已知  $\alpha_1 = (1, 1, -1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ , 把  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  化为欧氏空间  $R^3$  的标准正交基。

七、(10 分) 设  $A$  与  $B$  是同阶方阵, 且  $A, B, A+B$  都可逆, 证明:  $A^{-1} + B^{-1}$  也可逆。

八、(10 分) 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ , 其中已知  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求一正交变换  $X = QY$ , 将二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  化为标准形;

(2) 判断二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  是否正定。

九、(10 分) 已知  $A, B$  都是 4 阶矩阵,  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1]$ 、 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2]$   
且  $|A| = 3, |B| = -1$ , 求行列式  $|A + B|$  的值。

十、(10 分) 设  $A$  是 3 阶矩阵,  $\alpha$  是 3 元列向量, 已知向量组  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$  线性无关,  
且  $A^3\alpha = 3A\alpha - 2A^2\alpha$ .

(1) 记  $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ , 求矩阵  $B$ , 使得  $A = PBP^{-1}$ ;

(2) 证明: 矩阵  $C = (\alpha, A\alpha, A^4\alpha)$  可逆;

(3) 证明: 矩阵  $CC^T$  正定。