[illegible] 2007-2008 学年 [illegible]

2008级线性代数试题A卷

班级 ______ 姓名 ______ 学号 ______

一、[illegible] $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&3\\2&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-6\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B^*\end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B^*\end{vmatrix} = |A^{-1}|\,|2B^*| = |A|^{-1}\cdot 2^2|B|$

$= \frac{1}{7} \cdot 4 \cdot (-2) = -\frac{8}{7}$

二、[illegible] $A=\begin{pmatrix}4&3&-18\\2&4&0\\-1&1&4\end{pmatrix}$，[illegible] $XA^{-1}-X=A^{-1}$，求 X。

解：令 $XA^{-1}=X+A^{-1}$ （[illegible] A）

$X = XA - I$

$X(I - A) = -I$

$(A-I)X = I$ （[illegible]）

$X = (A-I)^{-1}$

$\begin{pmatrix}3&3&-18&1&0&0\\2&3&0&0&1&0\\-1&1&3&0&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&[illegible]\\0&3&-18&[illegible]\\0&1&0&[illegible]\end{pmatrix}$

$\longrightarrow [illegible] \longrightarrow [illegible]$

$X = [illegible]$

四、(10分)求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-3 \\ 4x_1+5x_2-3x_3+3x_4=-3 \end{cases}$$

(要求用其导出组的基础解系表示)

解.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & \vdots & -3 \\ 4 & 3 & -3 & 3 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

(简化行阶梯形矩阵 [illegible] 对角线上)

特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

五、(10分)已知

$$\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\ \alpha_2=(1,2,4,8)^T,\ \alpha_3=(1,3,9,27)^T,\ \alpha_4=(1,4,12,[illegible])^T$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩与一个极大无关组。

解.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 8 & 27 & [illegible] \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \\ 0 & 7 & 26 & [illegible] \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为3　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组.

六、(10分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是4维线性空间V的两组基，且由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，已知向量 γ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(1,-1,2,2)$，求 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标。

解： $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A$

$\gamma=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$

$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$

坐标为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 6 \end{pmatrix}$

七、(10分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $B=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -3 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，

使 $P^{-1}AP=B$。

解：由题设知 A 的特征值 5，-3，-5，求各特征值对应的特征向量。

$A-5I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 特征向量为 [illegible]

$A+3I=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 特征向量为 [illegible]

$P=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

五、(10分) 已知三维向量空间 R^3 的一个基 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,3,1),\alpha_3=(1,1,-1)$，求 [illegible]

个向量的坐标。

解： $(1,0,0)\quad(0,1,0)\quad(0,0,1)$ 在 [illegible] 下的坐标 [illegible]

六、(10分) 用非退化线性替换，化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+x_1x_3$$

化为标准形。

解：
$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$$

得
$$\begin{aligned} f&=-2y_1^2+2y_2^2+y_1y_3+y_2y_3\\ &=-2(y_1-\tfrac{1}{4}y_3)^2+2(y_2+\tfrac{1}{4}y_3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1=y_1-\frac{1}{4}y_3\\ z_2=y_2+\frac{1}{4}y_3\\ z_3=y_3\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1=z_1+\frac{1}{4}z_3\\ y_2=z_2-\frac{1}{4}z_3\\ y_3=z_3\end{cases}$$

$$f=-2z_1^2+2z_2^2$$

$$\begin{cases} x_1=z_1+z_2\\ x_2=z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3\\ x_3=z_3\end{cases}$$

7、（10分）证明：若n阶方阵A满足AB=AC且B≠C，则A不可逆.

证明：若A可逆，则A逆存在，且 $A^{-1}A=E$

$A^{-1}AB=A^{-1}AC \Rightarrow B=C$ 与 $B\neq C$ 矛盾

故A不可逆

8、（10分）举例说明：由AB=AC且A≠0不能推出B=C.

解：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

则 $AB=AC=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $A\neq 0$

$B\neq C$.