2012年线性代数A期末考试答案

一、解：$\left|\frac{1}{3}A^* + 2I\right| = \left|\frac{1}{3}|A|A^{-1} + 2AA^{-1}\right|$ ···· 4分

$= \left|2A^{-1} + 2AA^{-1}\right|$ ···· 6分

$= 2^3|A^{-1}||I+A|$ ···· 8分

$= \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3$

$= 32$ ···· 10分

二、解：由 $AX = A + 2X$ 得 $X = 2(I-A)^{-1}A$ ··· 4分

$$(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ ··· 6分

所以 $X = \begin{bmatrix} -6 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 10 & 0 \end{bmatrix}$ ··· 10分

三、解：(1) 5 $k_1 + k_2(1+2x) + k_3(1+2x+3x^2) + k_4(1+2x+3x^2+4x^3) = 0$

可得 $(k_1+k_2+k_3+k_4) + 2(k_2+k_3+k_4)x + 3(k_3+k_4)x^2 + (k_1+k_2+k_3+k_4)x^3 = 0$

从而 $k_1=0, k_2=0, k_3=0, k_4=0$ ··· 4分

(2) 过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ··· 7分

(3) $h(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ 在后一个基下的坐标为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{7}{12} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ ··· 10分

四、解：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2$ 是一个极大无关组 ··· 5分

取 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}=(1,2,1)^T$

则 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$，$\eta_2=\frac{1}{2}(1,2,1)^T$

为一组正交基 ⋯ 10分

五、解：(1) A的初等因子为 $(\lambda+1)^2,(\lambda-1),\lambda+2$ ⋯ 4分

设 $P=[X_1,X_2,X_3,X_4]$，则 $AP=P\Lambda$

即 $$[AX_1,AX_2,AX_3,AX_4]=[X_1,X_2,X_3,X_4]\begin{bmatrix}-1&1&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-2\end{bmatrix}$$

$AX_1=(-1)X_1$，$AX_2=X_1-X_2$，$AX_3=X_3$，$AX_4=-2X_4$

所以 X_1,X_3,X_4 为A的特征向量 ⋯ 10分

六、解：(1) 设有多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$，则

$$\begin{aligned}\sigma(k_1f(x)+k_2g(x))&=\sigma((k_1a_0+k_2b_0)+(k_1a_1+k_2b_1)x+(k_1a_2+k_2b_2)x^2+(k_1a_3+k_2b_3)x^3)\\&=(k_1a_3+k_2b_3)-(k_1a_0+k_2b_0)+(k_1a_2+k_2b_2)x+(k_1a_0+k_2b_0+k_1a_1+k_2b_1)x^3\\&=k_1(a_3-a_0)+k_2(b_3-b_0)+k_1a_2x+k_2b_2x+k_1(a_0+a_1)x^3+k_2(b_0+b_1)x^3\\&=k_1[a_3-a_0+a_2x+(a_0+a_1)x^3]+k_2[b_3-b_0+k_2b_2x+k_2(b_0+b_1)x^3]\\&=k_1\sigma(f(x))+k_2\sigma(g(x))\end{aligned}$$ ⋯ 4分

(2) 由于 $\sigma(1)=-1+x^3$，$\sigma(x)=x^3$，$\sigma(x^2)=x$，$\sigma(x^3)=1$

故矩阵为 $A=\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$ ⋯ 7分

由于 $|A|=0$，故 σ 不可逆。 ⋯ 10分

七、证明：只需证明：$r(A^TA)=r(A)$

考虑齐次方程组 $AX=0$ ①

$A^TAX=0$ ②

任取方程组①的一个解 X_1，则 $AX_1=0$，此式两边同时左乘 A^T，得

$$A^TAX_1 = A^T0 = 0$$

所以，X_1是方程组②的解。反之，任取方程组②的一个解X_2，则$A^TAX_2=0$，此式两边同时左乘X_2^T，得 $X_2^TA^TAX_2=(AX_2)^T(AX_2)=X_2^T0=0$

根据例1.1.20，可得$AX_2=0$，故X_2也是方程组①的解 ··· 6分

综上所述，方程组①与方程组②同解。若方程组①②都只有零解，则显然$r(A)=r(A^TA)$，否则，两个齐次方程组有相同的基础解系。根据定理2.3.2，可得 $n-r(A)=n-r(A^TA)$

于是，$r(A)=r(A^TA)$ ··· 10分

八、解：设λ为对应的特征值$A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以$\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$ ··· 4分

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以$\lambda=-1$是三重特征值，但$r(\lambda I-A)\neq 0$，故A不可对角化。 ··· 10分

九、解：(1) $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ $\Delta_1=a$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1$，$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)$

$\Delta_2>0 \Rightarrow a<-1$或$a>1$，$\Delta_3>0 \Rightarrow a>1$或$a<-2$

所以A正定的范围是$a>1$或$a<-2$

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$

特征值为$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=4$。 ··· 4分

当$\lambda_1=1$时，$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

相应的特征向量为$\alpha_1=(-1,1,0)$，$\alpha_2=(-1,0,1)$

正交化得 $\beta_1=(-1,1,0)$，$\beta_2=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，

单位化得 $\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)$，$\gamma_2=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})$

$\lambda=4$时，$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

特征向量为$\alpha_3=(1,1,1)$，单位化为$\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$ ··· 8分

所以取 $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

令$X=QY$，二次型化为 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$ ··· 10分

十、解：令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，显然$P$可逆。记$\Lambda=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则依题意得$AP=P\Lambda$。

于是有$A=P\Lambda P^{-1}$，从而得$|A|=1$，即A可逆。··· 4分

由 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 知

$A^{-1}\alpha_1=\alpha_1$，$A^{-1}(\alpha_1-\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2$，$A^{-1}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

则$A^{-1}(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)\Lambda$，令$Q=(\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3)$

则$|Q|=|P|\neq0$，从而其可逆且 $A^{-1}=Q\Lambda Q^{-1}$ ··· 8分

故A与A^{-1}均与Λ相似。 ··· 10分