

课程编号：A073122

北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | |

一、(10 分) 已知 4 阶矩阵 A, B 满足: $XA + YB + A = 3I$, $XB + YA + B = -2I$,

其中

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

求 $A + B$ 。

二、(10 分) 对下面线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - 3x_3 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。
(用导出组的基础解系表示通解)

三、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (1, 1, -1, -1), \quad \alpha_2 = (1, 0, 1, 1), \quad \alpha_3 = (2, 1, 0, 0), \quad \alpha_4 = (-1, 1, -3, 1),$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、(10 分) 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中, 令

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \beta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一个基;
- (2) 求自然基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵;
- (3) 求 $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标。

五、(10 分) 设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda + 1)^2, \lambda - 5, \lambda^3$,

- (1) 试写出 A 的 Jordan 标准形; (2) 求 A 的特征值。

六、(10 分) 在 $F[x]_4$ 中定义线性变换 σ :

$$\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_3 - a_0 + (a_0 + a_1)x + a_2x^2 + a_1x^3,$$

求 σ 在 $F[x]_4$ 的自然基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵。

七、(10 分) 已知矩阵 A 的任意一个特征值 λ 都满足 $\lambda < 1$. 证明: $I - A$ 可逆 (其中 I 为单位矩阵)。

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 经过正交变换 $X = QY$ 化为 $2y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2$, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T, Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 。

(1) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定; (2) 求行列式 $|A - I|$ 的值;

九、(10 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 设

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{s-1} = \alpha_{s-1} + \alpha_s, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1$$

讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性。

十、(10 分) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 证明至少可以找到一个向量 $X \in R^n$, 使得向量组 $X, AX, A^2X \cdots A^{n-1}X$ 线性无关;

(2) 如果 n 阶矩阵 A 与对角线上元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的对角矩阵相似, 证明所有数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 两两不同。