

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 九个大题, 试卷后面空白纸撕下做草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
签名										

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 设 $e^y = xy + e$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____, $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0} =$ _____.

2. $I_1 = \int_e^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ 与 $I_2 = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ 中收敛的为 _____, 其值等于 _____.

3. $\int_{-1}^1 3\sqrt{1-x^2} dx =$ _____, $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} dx =$ _____.

4. 变量代换 _____ 能将微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 + 3xy}$ 化成可分离变量的微分方程, 所得可分离变量的微分方程为 _____.

5. 曲线 $xy = a$ ($a > 0$) 与直线 $x = a$, $x = 2a$ 及 x 轴所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_1 =$ _____, 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V_2 =$ _____.

6. 函数 $f(x) = xe^x - \cos x$ 的带佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$f(x) =$ _____.

7. 已知 $y = \frac{x^3}{2}$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = x^2$ 的解, 则 $P(x) =$ _____, 此微分方程的通解为 $y =$ _____.

二. (9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)e^x + x + 2}{\sin^3 x}$.

三. (9 分) 求不定积分 $\int x \ln(1+x) dx$.

四. (9分) 当船的速度为 6m/sec 时, 船的推进器停止工作, 5秒后船的速度减至一半, 已知船所受到的阻力与船的速度成正比, 求船的速度随时间的变化规律.

五. (8 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1 - \cos x^2}{x} & x < 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

六. (13 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = e^{-x} + \int_0^x (t-x)f(t)dt$, 求 $f(x)$ 的表达式.

七. (8 分) 一贮水池的上部是高 $h = 2 \text{ m}$, 半径 $R = 1 \text{ m}$ 的圆柱体, 下部是半径 $R = 1 \text{ m}$ 的半球体, 已知半球体部分装满了水, 圆柱体部分没有水, 如果将水从池中全部抽出, 求所作的功(水的密度 $\mu = 1000 \text{ kg/m}^3$).

八. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上可导, 且 $f(3) = -1$, $\int_1^2 f(x) dx = 1$, 证明在 $(0, 3)$ 内存在 ξ , 使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

九. (8 分) 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f'(x)}{e^x - 1} = 2$, $f(0) = 0$, 证明 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的驻点, 并判断 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值, 若是极值, 指出是极大值还是极小值.