课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^{*}$，求 X 。

解：由 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^{*}$ 知

$$AX=2X+|A|B,$$

而 $|A|=4$ 所以

$$X=4(A-2I)^{-1}B$$

$$\because A-2I=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad \therefore (A-2I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

所以

$$X=4\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&2\\4&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

二、（10 分）已知

$$\alpha_1=(2,-2,4,6)^T,\quad \alpha_2=(-2,1,0,3)^T,\quad \alpha_3=(3,0,2,-1)^T,\quad \alpha_4=(1,-3,2,4)^T$$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解:

$$\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&2\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&\\0&0&\end{pmatrix}$$

所以求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大无关组

$$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha$$

三、（10 分）在$F[x]_4$中，求自然基$1,x,x^2,x^3$到基$1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$的过渡矩阵，以及$h(x)=1-x+x^2-x^3$在后一个基下的坐标。

解：过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$h(x)=-1+3x+2x^3$在后一个基下的坐标

$$y=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

四、（10 分）设 V 是由实数域上的全体 2 阶矩阵构成的线性空间，在 V 上定义映射 σ： $\sigma[X]=AX-XA$，其中 X 为任意矩阵，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$为 V 中某一取定矩阵。

（1）证明：σ 为 V 上的而一个线性变换；

（2）证明：对任意的$X,Y\in V$ 都有$\sigma(XY)=\sigma(X)Y+X\sigma(Y)$；

（3）求σ在基$I_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},I_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},I_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},I_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$下的矩阵。

解：（1）对任意的$X,Y\in V$，$k,l\in R$都有

$$\begin{aligned}\sigma(kX+lY)&=A(kX+lY)-(kX+lY)A\\&=kAX+lAY-kXA-lYA\\&=k(AX-XA)+l(AY-YA)\\&=k\sigma(X)+l\sigma(Y)\end{aligned}$$

所以σ为 V 上的而一个线性变换。

（2）对任意的$X,Y\in V$ 有

$$\begin{aligned}\sigma(XY)&=AXY-XYA\\&=AXY-XAY+XAY-XYA\\&=(AX-XA)Y+X(AY-YA)\\&=\sigma(X)Y+X\sigma(Y)\end{aligned}$$

（3）根据$\boldsymbol{\sigma}$的定义，有

$$\sigma(I_{11}) = AI_{11} - I_{11}A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(I_{12}) = AI_{12} - I_{12}A = \begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

$$\sigma(I_{21}) = AI_{21} - I_{21}A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ b-a & -b \end{bmatrix},$$

$$\sigma(I_{22}) = AI_{22} - I_{22}A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\sigma}$在基$I_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, I_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

五、（10 分）设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，其中$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

（1）求$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的值；（2）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P^{-1}AP = B}$。

解:（1）由特征值的性质

$$x=2+y, \quad -x=y$$

解之得x=1，y=–1。

（2）A的特征值为–1，1，1，，

对应的特征向量分别是$X_1 = (1,0,0)^T$, $X_2 = (-1,1,0)^T$, $X_3 = (1,0,1)^T$,

取$\boldsymbol{P} = (X_1, X_2, X_3)$, 则$\boldsymbol{P^{-1}AP = B}$。

六、（10 分）设$\boldsymbol{A}$是 6 阶方阵，且已知存在 6 阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -a & 1 & & & & \\ & -a & & & & \\ & & b & & & \\ & & & c & 1 & \\ & & & & c & \\ & & & & & d \end{bmatrix}$$

(1) 试写出$\boldsymbol{A}$的初等因子；

(2) 判断 P 的哪几列是 A 的特征向量。

解 (1) A 的初等因子为 $(\lambda+a)^2,(\lambda-b),(\lambda-c)^2,(\lambda-d)$

(2)由 $AP=PJ$,得 P 的第一列,第三列,第四列,第六列是分别对应于 $-a,b,c,d$ 的特征向量。

七、（10 分）证明：若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 一定可以对角化。

证明: 设 A 的 n 个线性无关的特征向量为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

即

$$AX_1=\lambda_1X_1, AX_2=\lambda_2X_2,\cdots,AX_n=\lambda_nX_n$$

也即

$$A[X_1,X_2,\cdots,X_n]=[X_1,X_2,\cdots,X_n]\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

令 $P=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$，则上式化为

$$AP=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关，所以

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

所以 A 可以相似对角化。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&1&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

（1） 判断该二次型的定性；（2）用正交变换将其化为标准形并给出所用的正交变换。

解：（1）由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&-4\\2&\lambda-1&2\\-4&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$，

得 A 的特征值为 $\lambda=0$(二重), $\lambda=9$，所以二次型半正定。

(2) 由（1）A 的特征值为 $\lambda=0$(二重), $\lambda=9$.

$\lambda=0$ 的特征向量为 $X_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$X_2=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$，

将其正交化有 $\beta_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},1)^{\mathrm{T}}$，

单位化 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5)^{\mathrm{T}}$，

$\lambda=9$ 的特征向量为 $X_3=(2,-1,2)^T$，

单位化 $\xi_3=\frac{1}{3}(2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，

取 $Q=\left(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\right)$,作正交变换 $X=QY$,二次型化为 $f=9y_3^2$。

九、（10 分）设方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$

(1) 证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，则此方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知 β_1,β_2 是方程组的两个解，其中 $\beta_1=[-1,1,1]^T,\beta_2=[1,1,-1]^T$，写出此方程组的通解。

（1）证明：方程组增广矩阵行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}$ 为范德蒙行列式，

当 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等时，$D\neq 0$，所以方程组增广矩阵的秩 $r(\overline{A})$ =4，而系数矩阵的秩 $r(A)\le \min(3,4)<4$，故方程组无解。

（2）当 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}$$

此时方程组系数矩阵的秩为 2，所以基础解系中只有一个解向量，令

$$X_0=\beta_1-\beta_2=(-2,0,2)^T,X^*=\beta_1,$$

则方程组的通解为

$$X^{*}+kX_0, k\in R$$

十（10分）已知四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2015 & 1 & 0 \\ 2015 & 0 & 2015 & 0 \\ 1 & 2015 & 0 & 2015 \\ 0 & 0 & 2015 & 0 \end{pmatrix}$

（1） 求$|A|$

（2） 有两个正特征值和两个负特征值。

解：（1）$|A|=2015^4$

（2）A 为四阶实对称矩阵，因此其特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 为实数。

由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ 得 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda=2015^4$， （1）

这说明 A 的特征值或全为正，或全为负，或两正两负。

由 $trA=0$ 得 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$， （2）

由（1）（2）可知矩阵 A 的特征值必有 2 个为正数，2 个为负数。证毕。