07级A卷

一、$-\frac{8}{7}$

二、

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

三、$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

四、秩为3 ， $a_1a_2a_3$ 为一个极大无关组

五、坐标为$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

六、$p=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

七、$(1 \quad 0 \quad 0)$ $(0 \quad 1 \quad 0)$ $(0 \quad 0 \quad 1)$是 R^3 的标准正交基

八、$\begin{cases} X_1 = Z_1 + Z_2 \\ X_2 = Z_1 - Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 \\ X_3 = Z_3 \end{cases}$

九、证明：若 A 满秩，则 A 可逆。即 $A^{-1}A=I$　　$A^{-1}AB=A^{-1}AC$

$\Rightarrow B=C$ 与 $B\neq C$ 矛盾，故 A 不满秩

十、 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$　$C=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

则 $AB=AC=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$　$A\neq 0$　$B\neq C$

07 级 B 卷

一、 8

二、 $X=\begin{bmatrix}\frac{7}{25} & \frac{3}{5} & \frac{16}{75}\\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{15}\end{bmatrix}$

三、通解 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$　　a b 为任意常数

四、⑴秩为 3 ， $a_1a_2a_5$ 为一个极大无关组。

⑵ $a_3=a_1+a_2$

$A_4=a_1-a_2$

五、坐标 $\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-6\end{bmatrix}$

六、 $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

七、（1 0 0）（0 1 0）（0 0 1）是 R^3 的一个标准正交基

八、 $\begin{cases} X_1 = Z_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} Z_1 \\ X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_1 \\ X_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} Z_1 \end{cases}$

九、证明： $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$ 则 $A=Q\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}Q^{-1}$

$$A^T=\left(Q^{-1}\right)^T\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}Q^T=Q\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}Q^{-1}=A$$

故 A 是对角矩阵

十、证明：设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 则易证 A 可相似对角化。若存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵。由第九题知，A 是对角矩阵，矛盾，证毕。

08 级 A 卷

一、 4

二、 $X=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$X_0=(1,-2,0,0)^T$

三、 $X_1=\left(-\frac{7}{9},\frac{1}{7},1,0\right)^T$

$X_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1\right)^T$

通解为 $X_0+k_1X_1+k_2X_2$

四、 ⑴ $a_1a_2a_3$ 为它的一个极大无关组

⑵ $a_4=a_1+a_2+a_3$

五、 ⑴设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

将已知的 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 代入，由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关证明 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 线性无关，从而构成 R^3 的一个基。

⑵过渡矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

⑶坐标为 $\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

六、 ⑴特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$

属于 1 的特征向量 k_1（-1，2，20）^{T}

属于 2 的特征向量 k_2（0，0，1）^{T}

⑵几何重数小于代数重数，所以不可以相似对角化

七、 标准正交基 $a_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$a_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})^T$

八、 ⑴A 的特征值为 1，1，0　　所以二次型的一个标准型为 $y_1^2+y_2^2$

⑵特征根不全大于零，所以不正定

九、 ⑴特征值为 2，5，1

⑵因为 2×5×1≠0　所以 A^2+I 满秩 所以它是可逆矩阵

十、⑴a=1

⑵因为 a~diag（1，0，-2）　所以 r（A）=2

所以 AX=0 的基础解系有 n-r=1 个解向量

又 A 属于特征值 0 的特征向量是 AX=0 的非零解

设为（k_1，k_2，k_3）T　　属于不同特征值的特征向量正交

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \end{cases}$$ 求得（1，0，-1）^{T}

所以通解为（1，0，-1）^{T}

08 级 B 卷

一、 1

二、 $X=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

三、 基础解系 $X_1=(-\frac{3}{2},\frac{7}{2},1,0)$

$X_2=(-1,-2,0,1)$

通解为 $X=k_1X_1+k_2X_2$

四、 ⑴秩为 3 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 为极大无关组

⑵$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

五、 ⑴同 08 年第五题

⑵过渡矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

⑶坐标 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

六、 ⑴特征值 2 1（二重）

特征向量（0，0，1）^{T} $(-\frac{1}{20},\frac{1}{10},0)^T$

⑵ 可以相似对角化

09 级第一学期 A 卷

一、 4

二、 $X=\begin{bmatrix}-6 & 10 & 4\\ -2 & 4 & 2\\ -4 & 10 & 0\end{bmatrix}$

三、 a≠1，-2 时 方程组有唯一解 $X_1=\frac{(a+1)^2}{a+2}$

a=-2 时 方程组无解

A=1 时 方程组有无穷解

且通解为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

四、⑴秩为 3 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 为一个极大无关组

⑵$\alpha_4=-3\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3$

五、⑴略

⑵ $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

⑶坐标为 $\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$

六 、证明;设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots k_m\alpha_m=0$

$k_1\alpha_1^T+k_2\alpha_1^T\alpha_2+\dots k_m\alpha_1^T\alpha_m=0$

$k_1\alpha_1^T\alpha_1=0\Rightarrow k_1=0$

同理可证 $k_2=0\ k_3=0\ \dots k_m=0$

所以 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m$ 线性无关

七、标准正交基（1，0，0）^{T} （0，1，0）^{T}

八、⑴ $Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

⑵因为特征值不全大于零 ，所以不正定

九、⑴特征值 0，0，-1

⑵0×0×（-1）=0 所以不可逆 所以是不可逆矩阵

十、 λ =1 或 0

r（A）=r q λ =0=n-r

A2-A=0 $\Rightarrow$-A(I-A）=0 $\Rightarrow$ r(A)+r(I-A)≤n

A+(I-A)=n

r(A)+r(I-A)≥n

A 有 n 个线性无关的特征向量，所以可以对角化

得 $q_{\lambda=1}$=r

$|A-2I|=(0-2)^r\cdot(1-2)^{n-r}=(-2)^r\cdot(-1)^{n-r}$

09 年第一学期 B 卷

一、 4

二、

三、 略

四、 $\alpha_4=-3\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3$

五、 （1，-2，2）^{T}

六、 略

七、（1，0，0）^{T} （0，1，0）^{T} （0，0，1）^{T}

八、$Q=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 不正定

九、 0，0，-1

Det（A^2-I)=0×0×（-1）=0 所以不可逆

十、 见书本 235 页

09 年第二学期 A 卷

一、 $-\frac{16}{27}$

二、 $\begin{bmatrix}3 & -8 & -6\\2 & -9 & -6\\-2 & 12 & 9\end{bmatrix}$

三、 $\lambda=-1$ 时 无解， $\lambda\neq 3$ 和-1 时 有唯一解，

唯一解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\lambda+2}{\lambda+1}\\ x_2=-\dfrac{1}{\lambda+1}\\ x_3=\dfrac{1}{\lambda+1}\end{cases}$$

四、 秩为 2 $\alpha_3=3\alpha_1-2\alpha_2$

五、 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

六、 A=5 b=6

七、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

八、 $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ 不正定

九、设 $k_0x_0+k_1x_1+k_2x_2+\dots k_tx_t=0$

$A（k_0x_0+k_1x_1+k_2x_2+\dots k_tx_t）=0$

$k_0b=0$ 又 $b\neq0$ 所以 $k_0=0$

又 $x_1x_2x_3\dots x_t$ 线性无关

所以 $k_1k_2k_3\dots k_t$ 均等于零

所以 $x_0x_1x_2x_3\dots x_t$ 线性无关

十、

09 年第二学期 B 卷

一、 $\frac{27}{256}$

三、略

二、 $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

四、 $Y=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\beta_1=(0,-1,1)^T$

$\beta_2=(1,1,-2)^T$

$\beta_3=(0,1,1)^T$