课程编号：A073122　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。（1）求 p,q 的值；（2）求方程组的一般解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

四、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1}=(-1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha_2}=(2,2,0)$, $\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,1)$。

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})$的一个标准正交基。

五、（10 分）设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\boldsymbol{\lambda+1,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda^2}$ 。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在 $\boldsymbol{F[x]_4}$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ ： $\boldsymbol{\sigma[f(x)]=f'(x)}$ 。求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3}$ 下的矩阵。

七、（10 分）证明：$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$有$\boldsymbol{n}$个线性无关的特征向量。

八、（10 分）已知实二次型$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=X^T AX}$经过正交变换$\boldsymbol{X=QY}$化为$\boldsymbol{y_1^2+2y_2^2}$，

其中$\boldsymbol{X=(x_1,x_2,x_3)^T, Y=(y_1,y_2,y_3)^T}$。

(1) 判断二次型$\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$是否正定； (2) 求行列式$\boldsymbol{|A|}$的值；

(3) 若$\boldsymbol{Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$。

九、（10 分）设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij}=A_{ij}\quad(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。证明：A 为正交矩阵。

十、（10 分）已知 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足 $A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3$，$A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$。

(1) 求矩阵 A 的特征值；(2) 求矩阵 A 的特征向量。