

课程编号: A073003

北京理工大学 2008 2009 学年第一学期

线性代数试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求行列式 $\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix}$ 。

二、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AXA^* = 2XA^* + I$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, I 为 3 阶单位矩阵, 求 X 。

三、(10 分) 求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,1,0), \alpha_3 = (0,1,0,1), \alpha_4 = (2,3,2,2),$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_3$.

- (1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

六、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$,

- (1) 求 A 的特征值和特征向量;
- (2) 判断 A 是否可以相似对角化。

七、(10 分) 已知线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的一个基础解系:

$$X_1 = (1, 0, 1)^T, \quad X_2 = (2, 1, 0)^T,$$

求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$, 其中 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(1, 1, 0)$ 。

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的一个标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 已知 3 阶矩阵 \mathbf{A} 有特征值 1, 2, 且 $|\mathbf{A}| = 0$ 。

(1) 求 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$ 的所有特征值;

(2) 证明 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}$ 为可逆矩阵。

十、(10 分) 设 \mathbf{A} 为 3 阶实对称矩阵, 其特征值为 $1, 0, -2$, 矩阵 \mathbf{A} 的属于特征值 1 和 -2 的特征向量分别是 $(1, 2, 1)^T$ 和 $(1, -1, a)^T$ 。

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 的通解。