课程编号：A071001　　北京理工大学 2006-2007 学年第一学期

数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$ ，求常数 a.

2. 设曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求曲线在 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 对应点处的切线方程.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

4. 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 求由方程 $y=1+x^2e^y$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值，并判断该极值是极大值还是极小值.

2. 求不定积分 $\int x\arctan x dx$.

3. 已知 $y_1=x-x^2$，$y_2=3e^x-x^2$，$y_3=2x-x^2-e^x$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，求此微分方程的通解.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-a}{x^2} & x\neq 0 \\ b & x=0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，求 a,b 的值，并求 $f'(x)$.

三. (7 分) 试确定函数 $y=3x^4-4x^3-12x^2+10$ 在区间 $(0,3)$ 内零点的个数.

四.（8 分）设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$， 求 $f(x)$ 的表达式.

五. (7 分)设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，证明 $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}dt=C$，并求常数 C 的值.

六.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t$ $(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$v(t)=\pi[t^2 f^2(t)-f^2(1)]$，试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程的通解.

七. (8 分) 一容器内含有100升清水，现将每升含盐量4克的盐水以每分钟5升的速率由 A 管注入容器，假设瞬间即可混合均匀，同时让混合液以同样的速率由 B 管流出容器(容器内的液体始终保持为100升)，问在任意时刻 t 容器内溶液的含盐量是多少?

八. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内有二阶导数，且 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\frac{f(x)}{x})}{\sin x}=3$，$\int_1^2 f(x)dx=0$ ，(1) 求 $f'(0)$；(2) 证明 $\exists\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

数学分析期末试题(A)参考解答 (2007.1)

一. 1. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$$ ……………………….(2 分)

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9,$$ ………………………..(5 分)

$2a=\ln 9$, $\quad a=\ln 3$. ………………………..(6 分)

2. $t=\dfrac{\pi}{3}$时, $\quad x=-\ln 2$, $\quad y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$, …………………………(1 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\dfrac{\sin t}{\cos t}}=-t\cos t,$$ ….....…………………(4 分)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6},$$ …………………………(5 分)

切线方程 $\quad y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}(x+\ln 2)$. …………………………(6 分)

3. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$ …………….…………(2 分)

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$ …………….…………(6 分)

4. 解 1 　令 $t=\arcsin x$, 原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\sin t\,dt$ ………………………..(2 分)

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\,d\cos t=-2\left(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\,dt\right)$$ …………………..(5 分)

$$=-2\left(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$ …………………………(6 分)

解 2 　原式 $=2\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$ ………………(2 分)

$$=-2\left(\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}dx\right)$$ …………………………(5 分)

$$=-2\left(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$ …………………………(6分)

二. 1. $y' = 2xe^y + x^2 e^y y'$, ……………………………(2 分)

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$, ……………………………(3 分)

代入已知方程得 $y = 1$, ……………………………(4 分)

$y'' = 2e^y + 2xe^y y' + 2xe^y y' + x^2 e^y (y')^2 + x^2 e^y y''$, ………………(2 分)

$\because y''|_{x=0} = 2e > 0$, 故 $y|_{x=0} = 1$是极小值. ……………………(7 分)

2. $\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2)$ …………………………(1 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx)$ …………………………(4 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx)$ …………………………(6 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C$. …………………………(7 分)

3. $y_2 - y_1 = 3e^x - x$ 与 $y_3 - y_1 = -e^x + x$ …………………………(2 分)

通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2$. …………………………(7 分)

4. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - a}{x^2}\exists$, 得 $a = 1$, …………………………(1 分)

故 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - a}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$,

所以 $b = 1$, …………………………(2 分)

当 $x \neq 0$, $f'(x) = (\frac{e^{x^2} - 1}{x^2})'$

$= \frac{2xe^{x^2} x^2 - (e^{x^2} - 1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2} + 2}{x^3}$, …………………(5 分)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3}$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} - 2}{3x} = 0$. ……………………(7 分)

三.　$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$，　……………………..(2 分)

当 $x \in (0,3)$，令 $y' = 0$，　得　$x = 2$，　……………………..(3 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内单调,　……………………(4 分)

又 $y(0) = 10 > 0$，$y(2) = -22 < 0$，$y(3) = 37 > 0$　…………...………(6 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内各有一个零点，故在 $(0,3)$ 内有两个零点…...…….(7 分)

四.　$f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$，

$f''(x) + f(x) = 2e^x$，　……………………………(1 分)

$f(0) = 0$，　$f'(0) = g(0) = 2$，　……………………………..(2 分)

$r^2 + 1 = 0$，　$r = \pm i$，

$\bar{f}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$，　……………………………..(4 分)

设 $f^*(x) = Ae^x$，代入方程得 $A = 1$，$f^*(x) = e^x$，……………………….(6 分)

通解　$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$，　…………………………..….(7 分)

由初始条件得　$C_1 = -1$，$C_2 = 1$，

$f(x) = -\cos x + \sin x + e^x$.　…………...………………(8 分)

五.　令　$F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt$，

$F'(x) = \arcsin \sin x \cdot 2\sin x \cos x + \arccos \cos x \cdot (-2)\cos x \sin x$

$= 2x\sin x\cos x - 2x\cos x\sin x = 0$，　…………………….(3 分)

故　$F(x) = C$，　………………………..(4分)

又　$F(0) = \int_0^1 \arccos\sqrt{t}dt$　（令 $\arccos\sqrt{t} = u$）…………………...(5 分)

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} ud\cos^2 u$

$= -u\cos^2 u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 udu = \frac{\pi}{4}$，

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$.　………………………(7 分)

六. $\int_1^t \pi f^2(x)dx = \pi[t^2 f^2(t) - f^2(1)]$，…………………..………..(3 分)

对 t 求导得 $f^2(t) = 2tf^2(t) + 2t^2 f(t) f'(t)$，…………………………(5 分)

$f'(t) = \dfrac{1-2t}{2t^2} f(t)$， $\dfrac{df(t)}{f(t)} = (\dfrac{1}{2t^2} - \dfrac{1}{t})dt$，………………………..(8 分)

$\ln|f(t)| = -\dfrac{1}{2t} - \ln t + C_1$，

$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2x} - \ln x} = \dfrac{C}{x} e^{-\frac{1}{2x}}$. …………………..………..(10 分)

七. 设 t 时刻含盐量为 $m(t)$ 克，则

$dm = 4 \times 5dt - \dfrac{m}{100} \cdot 5dt$，……………………………(3 分)

$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} + \dfrac{m}{20} = 20 \\ m(0) = 0 \end{cases}$，……………………………..(4 分)

通解为 $m(t) = Ce^{-\frac{t}{20}} + 400$，………………………………(7 分)

由初始条件得 $C = -400$，

$\therefore m(t) = 400(1 - e^{-\frac{t}{20}})$. ………………………………(8 分)

八. (1) 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3$，所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$，……………………(1 分)

故 $f(0) = 0$， $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$； ……………………(3 分)

(2) 令 $F(x) = f'(x)e^x$，………..…………...(4 分)

根据积分中值定理，$\exists c \in [1,2]$，使

$f(c) = \int_1^2 f(x)dx = 0$，…..……………………(5 分)

由洛尔定理，$\exists c_1 \in (0, c)$，使 $f'(c_1) = 0$，…………..…………..(6 分)

$\therefore F(0) = F(c_1)$，

由洛尔定理，$\exists \xi \in (0, c_1) \subset (0,2)$，使 $F'(\xi) = 0$，

即 $f''(\xi)e^{\xi} + f'(\xi)e^{\xi} = 0$，

$f'(\xi) + f''(\xi) = 0$. ……………………..……..(8 分)