2010年线性代数A期末考试答案

一、(10分)

解：方程两边同时左乘A，得 $AX+X=AA^*+I$

即 $(A+I)X=(|A|+1)I$

又 $|A|=-2$，故 $(A+I)X=-I$

从而 $X=-(A+I)^{-1}=-\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

二、(10分)

解：用初等行变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&-3&p\\q&2&6&3\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&p-2\\0&0&-4+4q&2p-1+q(1-p)\end{bmatrix}$$

由方程组有解，且其导出组 $AX=0$ 的基础解系只有一个向量知

$r(A)=r(\tilde{A})=2$

于是有 $\begin{cases}-4+4q=0\\2p-1+q(1-p)=0\end{cases}$ 解得 $q=1$，$p=0$

此时，$\tilde{A}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&5&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1+4x_3\\x_2=2-5x_3\\x_3=\quad\ \ x_3\end{cases}$ 故通解为 $X=(-1,2,0)^T+k(4,-5,1)^T$，k为任意常数

三、(10分)

1)证明：已知矩阵空间$R^{2\times2}$的维数为4，要证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $R^{2\times2}$的一个基，只需证其线性无关。设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

则有 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3-k_4=0\\k_1+k_2-k_3+k_4=0\\k_1-k_2+k_3+k_4=0\\k_1-k_2-k_3-k_4=0\end{cases}$ 方程组只有零解 $k_i=0$，$i=1,2,3,4$

故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，为$R^{2\times2}$的一个基

(2)解：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$

$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$

$\beta_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$

于是有 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$

故所求过渡矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$

(3)解：法一：设 $\gamma=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4$

则有 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=1\\x_1+x_2-x_3+x_4=2\\x_1-x_2+x_3+x_4=3\\x_1-x_2-x_3-x_4=4\end{cases}$

解之得 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2},0)^T$

法二：γ在自然基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为

$X=(1,2,3,4)^T$，于是，由坐标变换公式，γ在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标Y，

$$Y=A^{-1}X=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$=(\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2},0)^T$$

四、(10分)

解：(1)将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 组成列向量矩阵，再用初等行变换将之化为阶梯形，

$$[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T]=\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由上可知，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，其中任意两个向量都可作为向量组的一个极大无关组，不妨取α_1,α_2

(2) 由(1)知，α_1,α_2为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个基

于是只需将其正交化，单位化即可

正交化，令$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2+\beta_1=(1,2,1)$

单位化，令$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$

η_1,η_2为$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个标准正交基

五、(10分)

解：(1) 初等因子$\lambda+1$，$(\lambda-2)^2$，λ^2对应的Jordan块分别为

$J_1=[-1]$，$J_2=\begin{bmatrix}2&1\\&2\end{bmatrix}$，$J_3=\begin{bmatrix}0&1\\&0\end{bmatrix}$

故，A的Jordan标准形为

$J=diag(J_1,J_2,J_3,J_4)$

(2) 由$A\sim J$知，A与J有相同的特征值

$$J=\begin{bmatrix}-1&&&&\\&2&1&&\\&&2&&\\&&&0&1\\&&&&0\end{bmatrix}$$

为上三角矩阵，它的对角元就是其全部特征值，故A的特征值为$-1,2,2,0,0$

六、(10分)

解：根据定义 $\sigma(1)=0$

$\sigma(1+x)=1$

$\sigma(1+x+x^2)=1+2x$

$\sigma(1+x+x^2+x^3)=1+2x+3x^2$

故有 $[\sigma(1), \sigma(1+x), \sigma(1+x+x^2), \sigma(1+x+x^2+x^3)]$

$$=[1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3]\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 σ 在该基下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

法二：σ 在自然基下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

又自然基到基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 σ 在基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 证明：若 n 阶矩阵 A 可相似对角化，则存在可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n)$

或 $AP=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

将 P 按列分块 $P=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 并代入上式得

$A[x_1, x_2, \cdots, x_n]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

即 $[Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n]=[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n]$

从而有 $Ax_i=\lambda_i x_i$，$i=1, 2, \cdots, n$

由P可逆知，$x_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 线性无关

从而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是A的n个线性无关的特征向量，

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A的n个特征值。

充分性，若n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量，不妨设为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，

则存在相应的特征值，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，使得

$Ax_i=\lambda_i x_i,\ i=1,2,\cdots n$

此时，令 $P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$

P可逆，且有 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$

即A可相似对角化

八、(10分)

解：(1) 法一：由于f的秩为2可知，其正惯性指数为2，

故f不正定

法二：由已知条件知道，A的特征值为(1,2,0)，故f不正定

(2) 由已知条件知道，A的特征值为1,2,0，

故 $|A|=1\times2\times0=0$

(3) 由已知条件知道 $Q^TAQ=diag(1,2,0)$

于是 $A=Q\,diag(1,2,0)\,Q^T$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

九、(10分)

证明：由 $a_{ij}=A_{ij}$ 及伴随矩阵的定义知 $A^T=A^*$，则有

$|A|=|A^T|=|A^*|=|A|^2$，于是有 $|A|(|A|-1)=0$

又因$A\neq 0$，不妨设$a_{11}\neq 0$，则有

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0$$

故$|A|=1$，于是$AA^T = AA^* = |A|I = I$

从而A是正交矩阵

十、(10分)

解：(1) 据已知条件，有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3]$$

$$= [-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ 4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ -2\alpha_1+3\alpha_3]$$

$$= [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

记$B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$P_1=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$

则由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关知$P_1$可逆，且$P_1^{-1}AP_1=B$，即$A\sim B$

求B的特征值 $|\lambda I-B| = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

故B的特征值为1，2，3，从而A的特征值也为1，2，3

(2) 由$(I-B)X=0$，解得基础解系$X_1=(1,1,1)^T$

由$(2I-B)X=0$，解得基础解系$X_2=(2,3,3)^T$

由$(3I-B)X=0$，解得基础解系$X_3=(1,3,4)^T$

即特征值1，2，3对应的特征向量分别为X_1, X_2, X_3

令$P_2=[X_1,X_2,X_3]$，则有

$P_2^{-1}BP_2=\mathrm{diag}(1,2,3)$，于是

$$P = P_1 P_2 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3]$$

则有 $P^{-1}AP = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2) = P_2^{-1}BP_2 = diag(1,2,3)$

所以矩阵A属于特征值1,2,3的特征向量分别为

$k_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$，$k_2(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3)$，

$k_3(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3)$，$k_i \neq 0$，$i = 1, 2, 3$