北京理工大学《数学分析 B》

2005-2006 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. .设$u(x,y,z)=x^y+\ln(y^2+z^2)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$及全微分$du(e,1,2)$.

2. 求曲线$x=t^2,y=-t,z=t^3$的与平面$3x+9y+z-1=0$平行的切线方程.

3. 将$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$化为极坐标系下的累次积分, 并计算$I$的值.

4. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\tan\dfrac{2}{\sqrt{n}}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$的敛散性.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 设函数$f(u)$具有二阶连续导数, 且$z=f(e^x\sin y)$满足方程

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求$f(u)$的表达式.

2. 计算第一类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}zdS$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱体$x^2+y^2\le 2x$内的部分.

3. 设$S(x)$函数$f(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x\le 0\\ x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$的以$2\pi$为周期的傅里叶级数展开式的和函数, 求$S(6),S(-6),S(2\pi),S(3\pi)$的值.

4. 计算曲线积分$I=\oint_L y^2dx+2xdy-z^2dz$，其中$L$是平面$x+z=2$与柱面

$x^2+y^2=1$的交线，若从z轴正向往负向看去，L取逆时针方向.

三. (8 分）把函数$f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)}$展成$x-1$的幂级数，并指出收敛域.

四. （8 分）设V是由曲面$x^2+y^2+z^2=2z$围成的立体，其上任一点处的密度与该点到原点的距离成正比(比例系数为k)，(1)求V的质量; (2) 求V的质心坐标.

五.（8 分）证明曲面$xyz=m \quad (m\neq 0$为常数)上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之积为常数.

六. （8 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$的收敛区间及和函数.

七. (8 分)计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+[yf(yz)+y^3]dzdx+[z^3-zf(yz)]dxdy$,

其中函数f有连续的导函数，Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

八. (8 分) 设函数$f(y)$在$-\infty<y<+\infty$内有连续的导函数，且$\forall y$，$f(y)\geq 0$，$f(1)=1$，已知对右半平面$\{(x,y)|-\infty<y<+\infty,x>0\}$内任意一条封闭曲线$\Gamma$，都有$\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{ydx-xdy}{x^2+f(y)}=0$，求$f(y)$的表达式.

参考答案

一 . 1. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}$ $\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x+\frac{2y}{y^2+z^2}$

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{y^2+z^2}$ …………(3 分)

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(e,1,2)}=1$ $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(e,1,2)}=e+\frac{2}{5}$

$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(e,1,2)}=\frac{4}{5}$ ………….(5 分)

$du=dx+(e+\frac{2}{5})dy+\frac{4}{5}dz$ ………………(6 分)

2.

$\vec{T}=\{2t,-1,3t^2\}$ ………………..(1 分)

由题设 $6t-9+3t^2=0$，即

$t^2+2t-3=0$ …………………(2 分)

解得 $t=1$，$t=-3$ ……………………(3 分)

切点为 $(1,-1,1)$ 或 $(9,3,-27)$

$\vec{T}=\{2,1,3\}$ 或 $\vec{T}=\{-6,-1,27\}$

切线为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ 或

$\frac{x-9}{-6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+27}{27}$ ……………(6 分)

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}d\rho$ …………………..(2 分`)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-1)$ ……………………(6 分)

4.

$\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{2}{\sqrt{n}}\sim\frac{2}{n}$ ………………………..(2 分)

$\because\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散 $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{2}{\sqrt{n}}$ 发散……………….(3 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ………………………..(4 分)

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调减少且趋于零，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛 ……..(6 分)

二. 1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\sin y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot e^x\cos y$ ………………………..(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot e^{2x}\sin^2 y+f'\cdot e^x\sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot e^{2x} \cos^2 y - f' \cdot e^x \sin y$$ …………………………..(4 分)

代 入 已 知 方 程 得

$f'' - f = 0$ …………………………..(5 分)

$$r^2 - 1 = 0 \qquad r = \pm 1$$

$$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$$ ……………….(7 分)

2..

$$I = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}dxdy$$ …………………….(3 分)

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho$$ ………………….(5 分)

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$ ……………….(7 分)

3.

$$S(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \\ 1 & x = 0 \\ 1 + \dfrac{\pi^2}{2} & x = \pm\pi \end{cases}$$ ……………….(3 分)

$$S(6) = S(6 - 2\pi) = 2 \qquad S(-6) = S(2\pi - 6) = (2\pi - 6)^2$$

$$S(2\pi) = S(0) = 1$$

$$S(3\pi) = S(\pi) = 1 + \frac{\pi^2}{2}$$ ………..(7 分)

4. 解 1

$L: x=\cos t, y=\sin t, z=2-\cos t$ …………….(2 分)

$I=\int_0^{2\pi}[(-\sin^3 t+2\cos^2 t-(2-\cos t)\sin t]dt$ ……….……….(5 分)

$=2\pi$ ………………….(7 分)

解 2 利用斯托克斯公式, 设 S 是 L 所围平面

$I=\iint\limits_{+S}(2-2y)dxdy$ ………………...(3 分)

$=\iint\limits_{D_{xy}}(2-2y)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=2\pi$ …………………….(7 分) 三 .

$f(x)=\frac{1}{3}(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-3})$ …………………..(2 分)

$=\frac{1}{3}[\frac{-1}{1+(x-1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}]$ ……………………..(4 分)

$=\frac{1}{3}[-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x-1}{2})^n]$ ……………(6 分)

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^{n+1}}](x-1)^n$ ……………….(7 分)

由 $|x-1|<1$ 及 $\left|\frac{x-1}{2}\right|<1$ 得收敛域

$x\in(0,2)$ …………(8 分)

四. (1) $$m=\iiint_V k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$ ……………..(1

分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}kr^3\sin\varphi dr$$ ……………(

3 分)

$$=8k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi=\frac{8k\pi}{5}$$ ……………(

4 分)

(2) $$\bar{x}=0\qquad \bar{y}=0$$ …………………..(5

分)

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_V zk\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$. ……………(6

分)

$$=\frac{k}{m}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\cos\varphi dr$$ …………. (7

分)

$$=\frac{64k\pi}{5m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^6\varphi d\varphi=\frac{64k\pi}{35m}=\frac{8}{7}$$ ……………(8

分)

V 的质心为 $(0,0,\frac{8}{7})$

五. 曲面上任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面法向量为

$\vec{n} = \{y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0\}$ ……………………(2 分)

切平面

$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y\ \ ) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$ ……….(4 分)

即 $y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3x_0 y_0 z_0$

在三坐标轴上截距分别为

$3x_0, 3y_0, 3z_0$ ……………….(6 分)

$3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0 = 27x_0 y_0 z_0 = 27m$ ………………..(8 分)

六 .

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = 1$ …………………(1 分)

$R = 1$, 收敛区间

$-1 < x < 1$ ………………….(2 分)

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$

$S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}$ …………………..(3 分)

.

$S''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ …………………..(4 分)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}$$ ………..………(6 分)

$S'(x)=2\arctan x$ …………………(7 分)

$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$ …………………(8 分)

七. 设 $S:x^2+y^2\le 1, z=0$，利用高斯公式

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+S} -\iint x^3dydz+[yf(yz)+y^3]dzdx+[z^3-zf(yz)]dxdy$$ ………..(2 分)

$$=\iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)dV-0$$ ……………………..(4 分)

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr$$ ……………………(6 分)

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{6\pi}{5}$$ ……………………(8 分)

八 . $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{x^2-f(y)}{[x^2+f(y)]^2}$

$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{x^2+f(y)-yf'(y)}{[x^2+f(y)]^2}$ ………..(4 分)

由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 得 $\frac{x^2-f(y)}{[x^2+f(y)]^2}=\frac{x^2+f(y)-yf'(y)}{[x^2+f(y)]^2}$

即

$yf'(y)=2f(y)$ ……………………(5 分)

$\frac{df(y)}{f(y)}=\frac{2dy}{y}$ ……………………(6 分)

$$\ln|f(y)|=2\ln|y|+C_1$$

$f(y)=Cy^2$ …………………(7 分)

由 $f(1)=1$ 得 $C=1$

$\therefore f(y)=y^2$ …………………..(8 分)