`课程编号：A073003 北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷答案

一、（10 分）已知 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，计算行列式 $\left|3A^*-2I\right|$，其中 A^* 是 A 的伴随矩。

解:

$$\left|3A^*-2I\right|=\left|3|A|A^{-1}-2AA^{-1}\right|=\left|2(3I-A)A^{-1}\right|=2^4\left|3I-A\right|\left|A^{-1}\right|=2^4\cdot 2^3\cdot\frac{1}{2}=64$$

更正：$\left|3A^*-2I\right|=\left|6A^{-1}-2AA^{-1}\right|=2^4\left|3I-A\right|\left|A^{-1}\right|=2^6$

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\\2&3&4\end{pmatrix}$ 和 X 满足 $2XA^{-1}=-BA^{-1}+X$，求 X。

解:

$$2XA^{-1}=-BA^{-1}+X\Rightarrow 2XA^{-1}-X=-BA^{-1}\Rightarrow XA-2X=B\Rightarrow X(A-2I)=B$$
$$\Rightarrow X=B(A-2I)^{-1}$$

$$A-2I=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad (A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所以

$$X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&1&\frac{1}{2}\\3&2&2\end{pmatrix}$$

三、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\qquad x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(\lambda+2)x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2-\qquad 2x_3=0 \end{cases}$$

问：λ取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷解？并在有无穷多解时求通解。

解：方程的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda-2 & -3 \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda+1)$$

讨论：(1) 当$\lambda \neq 3, \lambda \neq -1$时，方程组有唯一解；

(2) 当$\lambda=-1$时，增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，方程组无解；

(3) $\lambda=3$时，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，方程组有无穷多解，

基础解系为(-7,3,1)，　特解为(3,-1,0)，　一般解 k(-7,3,1)+(3,-1,0)

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(-2,1,0,3)^T$，$\alpha_2=(1,-3,2,4)^T$，$\alpha_3=(3,0,2,-1)^T$，$\alpha_4=(2,-2,4,6)^T$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组；

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为极大无关组，

$$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

五、（10 分）已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基：$\boldsymbol{\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T}$，$\boldsymbol{\beta_1=(1,2,3)^T}$，$\boldsymbol{\beta_2=(2,3,4)^T}$，$\boldsymbol{\beta_3=(3,4,3)^T}$。

(1) 求基 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha=(2,0,0)^T}$ 关于基 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 的坐标。

解：$\boldsymbol{P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&4\\1&3&2\\4&5&4\end{pmatrix}}$

坐标为：

$$\boldsymbol{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}$$

更正：$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&4\\1&3&2\\4&5&4\end{pmatrix}$

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,-1,1)^T}$，把 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 化为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的标准正交基。

解：首先正交化，令

$$\beta_1=\alpha_2=(1,1,0)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_1-\frac{(\alpha_1,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,1)^T-(1,1,0)^T=(0,0,1)^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(1,-1,1)^T-(0,0,1)^T=(1,-1,0)^T$$

单位化

$$\eta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T,$$

$$\eta_2=(0,0,1)^T,$$

$$\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T$$

七、（10 分）证明：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。

证明：设λ_1,λ_2是实对称矩阵 A 的任意两个不同的特征值，它们对应的特征向量分别为X_1,X_2，则有

$$AX_1=\lambda_1X_1 \qquad (1)$$
$$AX_2=\lambda_2X_2 \qquad (2)$$

下面要证$X_1\perp X_2$，也即${X_2}^TX_1=0$，为此，对（2）式两端同时取转置，得

$${X_2}^TA^T=\lambda_2{X_2}^T$$
$${X_2}^TA=\lambda_2{X_2}^T \qquad (3)$$

将上式两端同时右乘X_1，得

$${X_2}^TAX_1=\lambda_2{X_2}^TX_1$$

将（1）代入上式，得

$$\lambda_1{X_2}^TX_1=\lambda_2{X_2}^TX_1$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2){X_2}^TX_1=0$$

又因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以${X_2}^TX_1=0$.

八、（10 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

解：$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$ $\qquad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

特征值λ=2(二重)，$\lambda=-3$

当λ=2时， $\qquad 2I-A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

基础解系为$\alpha_1=(2,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$

$\lambda = -3$时，$$-3I-A=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

基础解系为$\alpha_3=(1,0,-2)^T$

单位化：

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T,\eta_2=(0,1,0)^T,\eta_3=(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5})^T$$

取$Q=\left(\eta_1,\eta_2,\eta_3\right)$，则

$$Q^TAQ=diag(2,2,-3)$$

（2）不正定

九、（10 分）设方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$

(1) 证明：若a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，则此方程组无解；

(2) 设$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$，且已知$\beta_1,\beta_2$是方程组的两个解，其中$\beta_1=[-1,1,1]^T,\beta_2=[1,1,-1]^T$，写出此方程组的通解。

（1）证明：方程组增广矩阵行列式$D=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}$为范德蒙行列式，

当a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等时，$D\neq0$，所以方程组增广矩阵的秩$r(\overline{A})$=4，而系数矩阵的秩$r(A)\le\min(3,4)<4$，故方程组无解。

（2）当$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$，原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$$

此时方程组系数矩阵的秩为 2，所以基础解系中只有一个解向量，令

$$X_0=\beta_1-\beta_2=(-2,0,2)^T, X^*=\beta_1,$$

则方程组的通解为

$$X^*+kX_0, k\in R$$

（2）*当 $\boldsymbol{a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq 0)}$，原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}$$

将 $\boldsymbol{\beta_1=[-1,1,1]^T}$ 代入方程组中的第一个方程得 $\boldsymbol{-1+k+k^2=k^3}$，即 $\boldsymbol{k^3-k^2-k+1=0}$

所以 $\boldsymbol{k=\pm 1}$。当 $\boldsymbol{k=1}$ 时，方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

其基础解系为 $X_0=(1,0,-1)^T$

当 $\boldsymbol{k=-1}$ 时，方程组仍为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

其基础解系为 $X_0=(1,0,-1)^T$。令 $X^*=\beta_1$，则方程组的通解为

$$X^*+kX_0, k\in R$$

十、（10 分）$\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维实单位列向量，$\boldsymbol{I}$ 为三阶单位矩阵，令 $\boldsymbol{B=\alpha\alpha^T}$

(1) 证明： $\boldsymbol{B\neq 0}$；

(2) 求 $\boldsymbol{B^2}$；

(3) 求 $\boldsymbol{B}$ 相似对角矩阵；

(4) 求 $\boldsymbol{I-B}$ 的秩。

（1）证明：设 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，由于 α 为单位列向量，所以 a_1，a_2，a_3 不同时为零，

$B=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$（$a_1\quad a_2\quad a_3$），$b_{11}=a_1^2,b_{22}=a_2^2,b_{33}=a_3^2$不全为零，故$B\neq 0$。

（2）$B^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)\alpha^T=\alpha\alpha^T=B$

（3）由$B\alpha=\alpha\alpha^T\alpha=\alpha$知 1 是 B 的一个特征值；又$1\leq r(B)\leq\min(r(\alpha),r(\alpha^T))=1$，

故$r(B)=1$，

所以 0 是 B 的二重特征值，所以 B~diag（0，0，1）

(4) $I-B\sim diag(1,1,0)$，故$r\left(I-B\right)=2$