课程编号：MTH17003　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

工科数学分析期末试题（A 卷）

班级＿＿＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸, 试卷背面也可做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分, 共 10 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos x}{x\sin x})=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 具有特解 $y_1=e^{-x}$，$y_2=xe^{-x}$，$y_2=e^{x}$ 的三阶常系数线性齐次微分方程为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿-.

3. 已知 $f(2)=0$，$f'(2)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+\arctan x^3)}{e^{2x^3}-1}=$ ＿＿＿＿＿＿＿.

4. $\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. 设 $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数，且 $\dfrac{dy}{dx}=xe^x$，则当 $x>0$ 时，$\dfrac{d^2x}{dy^2}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿.

二. (8 分) 已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，求 a,b 的值。

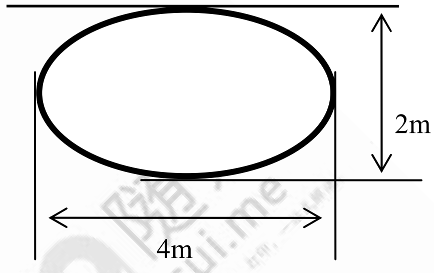
三. (8 分) 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，求不定积分 $\int xf'(x)dx$ 。

四. (8 分) 设方程 $x-y+\cos y=1$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

五. (9 分) 求反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan x dx$ 。

六. (11 分) 求微分方程 $xdy-(x+2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$，直线 $x=0$， $x=1$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小。

七. (8 分) 一椭圆（如图）垂直立于水中，水面与椭圆的最高点相齐，求椭圆所受到的水压力。（要画出坐标系）



八. (11 分) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = (x-1)e^{x}$ 的通解。

九. (8 分)一单位质点（质量为 1kg）沿 x 轴运动。已知质点所受到的力为 $f(x)=-\sin x$（单位：N，方向与 x 轴平行）。若质点的初始位置在原点，初速度 $v_0=2\mathrm{m/sec}$，求质点的位置 x 与速度 v 所满足的微分方程，并求出此微分方程的解。

十. (9 分) 判断方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^1 e^{x^2}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有几个不同实根。

十一. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 单调增加，且是奇函数，设

$$F(x)=\int_0^x (2t-x)f(x-t)dt$$

证明 $F(x)$ 单调减少，且是奇函数。

2010-2011-第一学期　工科数学分析期末试题解答（**2010.1**）

一．**1.** $\frac{1}{3}$

2. $y''' + y'' - y' - y = 0$

3. $\frac{1}{2} f'(2)$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. $-\frac{1+x}{x^3 e^{2x}}$

二．

$a + b = 3$ …………………(1 分)

$y' = 3ax^2 + 2bx$ …………………(3 分)

$y'' = 6ax + 2b$ …………………(5 分)

$6a + 2b = 0$ …………………(6 分)

解得　$a = -\frac{3}{2}$ ，$b = \frac{9}{2}$ …………………(8 分)

三．由题意　$\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C_1$ ……………………(2 分)

$f(x) = (\frac{\sin x}{x} + C_1)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ ……………………(4 分)

$\int xf'(x)dx = \int xdf(x)$ ……………………(5 分)

$= xf(x) - \int f(x)dx$ …………………(7 分)

$= \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$ …………(8 分)

四．

$1 - \frac{dy}{dx} - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ …………………(3 分)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin y}$ ……………………(4 分)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cos y \cdot \frac{dy}{dx}}{(1 + \sin y)^2}$ ……………(6 分)

$= \frac{-\cos y \cdot \frac{1}{1+\sin y}}{(1 + \sin y)^2} = \frac{-\cos y}{(1 + \sin y)^3}$ ……………(8 分)

五. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan x dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x}$ ……………….(1 分)

$=\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$ ……………….(3 分)

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$ ……………….(5 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}$ ………………..(7 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ ………………..(9 分)

六. 方程化为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=1$ ……………….(1 分)

$y=e^{-\int -\frac{2}{x}dx}(C+\int e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx)$ ……………….(3 分)

$=x^2(C+\int\frac{1}{x^2}dx)$

$=x^2(C-\frac{1}{x})=Cx^2-x$ ……………….(5 分)

$V(C)=\int_0^1\pi(Cx^2-x)^2dx$ ………………..(7 分)

$=\pi(\frac{1}{5}C^2-\frac{1}{2}C+\frac{1}{3})$ ………………..(8 分)

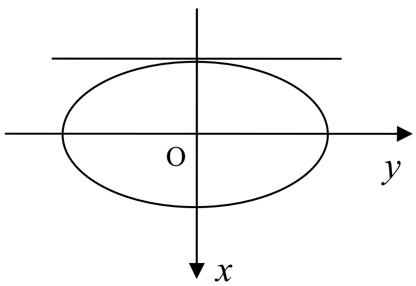
$V'(C)=\pi(\frac{2}{5}C-\frac{1}{2})$ ....……(9 分)

令 $V'(C)=0$， 得 $C=\frac{5}{4}$ ....……(10 分)

由于 $V''(C)=\frac{2}{5}\pi>0$，故 $C=\frac{5}{4}$ 是极小值点也是最小值点，

所求解为 $y=\frac{5}{4}x^2-x$ ....……(11 分)

七.



$dP=\mu g(1+x)2ydx$ ……..(2 分)

$=4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ …..(3 分)

$P=\int_{-1}^1 4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ ..(5 分)

$=8\mu g\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx$ ……..(6 分)

$= 2\mu g\pi = 2000\pi g\,(N)$ ……(8 分)

八． $r^2 + r - 2 = 0$ ……………….(1 分)

$r_1 = 1$， $r_2 = -2$ ……………….(3 分)

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ ……………….(5 分)

设 $y^* = x(Ax + B)e^x$ ………………..(7 分)

$y^{*\prime} = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x$

$y^{*\prime\prime} = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x$

代入方程得 $6A = 1$，$2A + 3B = -1$ ………………..(9 分)

解得 $A = \dfrac{1}{6}$， $B = -\dfrac{4}{9}$ ………………..(10 分)

$y^* = (\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{4}{9}x)e^x$

通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{4}{9}x)e^x$ ……………..(11 分)

九． $f = ma$ ……………………..(1 分)

$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$ ……………………..(3 分)

得 $v\dfrac{dv}{dx} = -\sin x$ …………………….....(4 分)

$v\big|_{x=0} = 2$ …………………….....(5 分)

$vdv = -\sin x dx$ …………………….....(6 分)

$\dfrac{1}{2}v^2 = \cos x + C$ …………………..(7 分)

由初值得 $C = 1$

$v^2 = 2(\cos x + 1)$ ……………………….(8 分)

十.　设　$f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^1 e^{x^2} dx$ ……………………….(1 分)

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ ……………………….(2 分)

令　$f'(x) = 0$，　得　$x = e$ ……………………….(3 分)

$f(x)$ 在 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 单调 ……………………….(4 分)

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$，　$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ……………………….(6 分)

$f(e) = \int_0^1 e^{x^2} dx > 0$ ……………………….(7 分)

故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 内各有一不同实根，

所以方程在 $(0, +\infty)$ 内有两个不同实根。 ……………………….(9 分)

十一.　令　$x - t = u$，　得

$F(x) = \int_0^x (x - 2u) f(u) du$ ……………………….(1 分)

$= x\int_0^x f(u) du - 2\int_0^x uf(u) du$ ……………………….(2 分)

$F'(x) = \int_0^x f(u) du - xf(x)$ …………(4 分)

$= \int_0^x (f(u) - f(x)) du$

因为 $f(x)$ 单调增加，故 $F'(x) < 0$，所以 $F(x)$ 单调减少　……(6 分)

$F(-x) = \int_0^{-x} (-x - 2u) f(u) du$ ……………………….(7 分)

令　$t = -u$，得

$F(-x) = -\int_0^x (-x + 2t) f(-t) dt$ ……………………….(8 分)

$= -\int_0^x (x - 2t) f(t) dt$

$= -\int_0^x (x - 2u) f(u) du = -F(x)$

故　$F(x)$　是奇函数 ……………….(10 分)