课程编号: A073003

北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

线性代数B试题A卷

班级 ______ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

$$-, (10 分) 已知 A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, 求行列式 \begin{vmatrix} 0 & A^* \\ 2B & 0 \end{vmatrix} 的值。$$

二、
$$(10 分)$$
 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,矩阵 X 满足 $AXA^{-1} = 2XA^{-1} + I$,其中 I 为 3 阶单位矩阵,求 X 。

三、(10 分)问a,b为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解?无解?有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解(用导出组的基础解系表示通解).

四、(10分)已知

$$\alpha_1 = (1,0,1,0)^T$$
, $\alpha_2 = (1,1,1,0)^T$, $\alpha_3 = (0,1,0,1)^T$, $\alpha_4 = (2,1,2,-1)^T$

- (1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 \mathbf{R}^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3$.

- (1) 证明 β_1 , β_2 , β_3 为 R^3 的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

六、 $(10\ eta)$ 已知向量 $\alpha_1 = (2,1,3)^T, \alpha_2 = (1,1,1)^T$,求与向量 α_1,α_2 都正交的向量 α_3 ,并把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 化为欧氏空间 \mathbf{R}^3 的一个标准正交基。

七、
$$(10 \, \beta)$$
 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

- (1) 求 A 的特征值和特征向量;
- (2) 判断 A 是否可以相似对角化。

八、
$$(10\, eta)$$
 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$,其中 $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 。

- (1) 求一正交变换 X=QY,将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;
- (2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分)已知 A,B 都是 3 阶矩阵, $A = [\alpha,\beta,\gamma], B = [\alpha,\beta,\delta]$,|A| = 2, |B| = 3,求行列式|A+B|的值。

十、(10 分)设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组,并且满足 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$

- (1) 计算行列式 |A+I| 的值;
- (2) 求 A 的特征值;
- (3) 求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。