

2011 年线性代数 A 期末考试 A 卷参考答案

一 解 在方程 $A^*X = 2A^{-1} + 2X$ 两端左乘 A 得

$$|A|X = 2I + 2AX$$

计算得 $|A| = 4$, 则 $X = (4I - 2A)^{-1} \cdot 2I$, 即

$$X = (2I - A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

二、解方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 1$$

所以当 $\lambda \neq -10$ 方程组有唯一解.

当 $\lambda = -10$ 方程组有无穷多解, 此时增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $X_0 = (1, 0, 0)^T$ 为方程组的一个特解, $X_1 = (-1, 3, 5)^T$ 是导出组的一个基础解系, 则一般解为

$$X = X_0 + k_1 X_1$$

三 解

$$(1) \text{ 由 } (x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{且 } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ 满秩知 } x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3 \text{ 为一组基.}$$

(2) 由 (1) 知过渡矩阵为
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $h(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3$ 在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

四 解

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3, \dots\dots\dots$

极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots\dots$ 剩余

向量的表出 $\alpha_4 = -\frac{3}{2} \alpha_1 - \frac{3}{2} \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_3, \dots\dots\dots$

五、解

(1) A 的初等因子为

$$\lambda + 1, (\lambda - 6)^2, \lambda^3$$

(2) A 的特征值为

$$-1, 6, 6, 0, 0, 0$$

六、解 σ 在 \mathbf{R}^3 的自然基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

七、证明: 2×2 的实矩阵 A 的特征值都为实数的充要条件为 $|A| \leq \left(\frac{\text{tr}A}{2}\right)^2$ (其中 $\text{tr}A$ 为 A 的

迹)。

证明：我们知道

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + |A|. \quad \dots\dots\dots$$

所以

$$\lambda = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4|A|}}{2}. \quad \dots\dots\dots$$

故而 A 的特征值都为实数的充要条件为 $(\text{tr} A)^2 - 4|A| \geq 0$, 即

$$|A| \leq \left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2. \quad \dots\dots\dots$$

八、解

$$(1) \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$

特征值为 $\lambda_1 = -1$ (二重), $\lambda_2 = 5$ 。

$$\text{当 } \lambda_1 = -1 \text{ 时, } (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相应的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$

$$\text{正交化得 } \beta_1 = (-1, 1, 0), \beta_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{单位化 } \gamma_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \gamma_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\lambda = 5 \text{ 时, } (\lambda I - A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{特征向量为 } \alpha_3 = (1, 1, 1), \text{ 单位化为 } \gamma_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{所以取 } Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

令 $X=QY$, 二次型化为 $f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$.

(2) 二次型不是正定的。

九、证明：充分性. 设 A 可逆，则对任意 b ， $X = A^{-1}b$.

必要性：

解法一：使 b 取遍所有单位向量后，原方程组都有解，以这些解向量作为列向量构成矩阵 B ，显然 $AB=I$ ，其中 I 为单位阵，由此知， A 可逆。

解法二：由题目假设知：任何 n 维向量 b 都能由 A 的列向量组线性表出，所以向量空间 R^n 的维数不会超过 A 的列向量组的秩，由此得出： A 的列向量组的秩为 n ，即 A 可逆。

十、证：设 $A \mid \Lambda = \text{diag}\{\underbrace{\lambda_0, \dots, \lambda_0}_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_0, i = k+1, \dots, n$.

$$\text{则 } A - \lambda_0 I \mid \Lambda - \lambda_0 I, (A - \lambda_0 I)^2 \mid (\Lambda - \lambda_0 I)^2.$$

故

$$\begin{aligned} \text{rank}(A - \lambda_0 I) &= \text{rank}(\Lambda - \lambda_0 I) = \text{rank}(\text{diag}\{0, \dots, 0, \underbrace{\lambda_{k+1} - \lambda_0, \dots, \lambda_n - \lambda_0}_k\}) \\ &= n - k \end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned} \text{rank}(A - \lambda_0 I)^2 &= \text{rank}(\Lambda - \lambda_0 I)^2 = \text{rank}(\text{diag}\{0, \dots, 0, \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_0)^2, \dots, (\lambda_n - \lambda_0)^2}_k\}) \\ &= n - k = \text{rank}(A - \lambda_0 I). \end{aligned}$$

(2) 如存在 Y ，使得 $(A - \lambda_0 I)Y = X_0$ ，则

$$(A - \lambda_0 I)^2 Y = (A - \lambda_0 I) X_0 = \theta,$$

由 (1) 知方程组 $(A - \lambda_0 I)^2 X = \theta$ 与 $(A - \lambda_0 I)X = \theta$ 同解。

从而 $(A - \lambda_0 I)Y = \theta$ ，即 $X_0 = \theta$ ，与 X_0 为特征向量矛盾。