课程编号: A073003

北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

## 线性代数 B 试题 A 卷

一、
$$(10 \, \text{分})$$
 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 求行列式  $\begin{vmatrix} 0 & 3A^* \\ B & 0 \end{vmatrix}$  的值。

解

$$\begin{vmatrix} 3A^* \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3\times3} |3A^*| |B| = -3^3 |A| A^{-1} |B| = -27 |A|^2 |B| = -27 \cdot (-1)^2 \cdot 1 = -27$$

二、(10 分) 设矩阵 
$$X$$
 满足  $XA = B + 2X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 

(1) 证明: A - 2I 可逆; (2) 求x。

解 由 XA = B + 2X 得 X(A-2I) = B

$$A-2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
,  $|A-2I| = -1$ , 故  $A-2I$  可逆。所以  $X = B(A-2I)^{-1}$ 

而

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

所以

$$X = B(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & -6 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

三、 $(10 \, f)$  已知平面上三条直线的方程 x-y+a=0, 2x+3y-1=0,  $x-ay-\frac{1}{2}=0$  讨论的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

$$\widehat{\mathbf{R}} \colon \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -a & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\widehat{\tau}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}+a \end{bmatrix} = \overline{B}$$

若 a=1,上述矩阵已化为阶梯形,此时,方程组无解,三条直线中第一条与第三条平行但不重合,与第二条相交。若 a≠1,继续进行初等行变换,有

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & \frac{1}{2}+a \end{bmatrix} \xrightarrow{\widehat{77}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 1+2a \\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3) \end{bmatrix}$$

对应的阶梯形方程组为 
$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=2a+1 \\ 0=(2a+1)(2a+3) \end{cases}$$

当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 且 $a \neq -\frac{3}{2}$ 时,方程组无解。此时,三条直线不交于一点,但任意两条直线都相交。

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,方程组有唯一解 $x=-\frac{1}{2},y=0$ ,此时,三条直线交于点( $-\frac{1}{2},0$ ),且任意两条直线不重合。

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时,方程组有唯一解 $x = \frac{11}{10}$ ,  $y = -\frac{2}{5}$ ,此时,三条直线交于点( $\frac{11}{10}$ ,  $-\frac{2}{5}$ ),且其中后两条直线重合。

四、(10分)已知

$$\alpha_1 = (1,2,3,-4)^T$$
,  $\alpha_2 = (2,3,-4,1)^T$ ,  $\alpha_3 = (2,-5,8,-3)^T$ ,  $\alpha_4 = (3,-4,1,2)^T$  (1) 求 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

$$\widetilde{\mathbb{H}}: \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以秩为 3, $\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,

五、(10 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 $R^3$ 的一个基, $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ , $\beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$ , $\beta_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$ 。

- (1) 证明  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  为  $R^3$  的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

解:

$$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right] = \left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
 可逆,故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 $R^3$ 的一个基;

(2) 过度矩阵 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

六、(10 分)已知  $\alpha_1$  = (1,0,-1),  $\alpha_2$  = (2,2,0),  $\alpha_3$  = (0,1,1)。求生成子空间  $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$  的一个标准正交基。

所以 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的一个基。取

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1,0,-1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = (1,2,1)$$

单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$

为成生子空间的一组基。

七、 $(10 \, \text{分})$  设为 A 正交矩阵,且 |A|=-1,求证  $\lambda=-1$  为的 A 一个特征值。证明: 因为

$$|A + I| = |A + AA^{T}| = |A||I + A^{T}| = -|I^{T} + A^{T}| = -|A + I|$$

所以

$$|A+I|=0$$

所以 $\lambda = -1$ 为的A一个特征值。

八、(10分) 已知二次型  $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2$ 

(1) 用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换;(2) 该二次型是否正定?解:由方程

由方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 - 4\lambda & 4 - (\lambda - 2)(\lambda - 5) \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^{2} (\lambda - 10) = 0$$

得 A 的特征值为 1 (二重) 和 10.

对于 $\lambda=1$ ,特征方程组( $\lambda I-A$ )X=0为

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

特征向量为 $X_1 = (-2,1,0)^T, X_2 = (2,0,1)^T$ 

正交化

$$\xi_1 = (-2,1,0)^T$$

$$\xi_2 = X_2 - \frac{(X_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1$$

$$= (2,0,1)^T + \frac{4}{5} (-2,1,0)^T$$

$$= (\frac{4}{5}, \frac{4}{5}1)^T$$

再单位化
$$\eta_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)^T, \eta_2 = (\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})^T$$

对于
$$\lambda = 10$$
,特征方程组
$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

特征向量 
$$X_3 = (1,2,-2)^T$$

单位化

$$\eta_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

经正交变换 X = QY, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

九、(10 分) 设三阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\gamma_1 \\ 3\gamma_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ , 其中  $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$  都是三维行向量,且已知行列式

 $|A| = 18, |B| = 2, |\Re|A - B|$ 

解:两矩阵相减,其对应行分别相减,因而

$$|A-B| = \begin{vmatrix} \alpha - \beta \\ 2\gamma_2 - \gamma_2 \\ 3\gamma_3 - \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - \beta \\ \gamma_2 \\ 2\gamma_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha - \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$

上述行列式的第1行为两分行之差,因而可拆分为两行列式之差,得到

$$|A - B| = 2 \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{vmatrix}$$
$$= (1/3) \times 18 - 2 \times 2 = 2$$

十、(10分)设n阶矩阵A满足 $A^2 = A$ , r(A) = r ( $0 < r \le n$ )。

- (1) 试确定A 的特征值的取值范围;
- (2) 证明A一定可以相似对角化;
- (3) 求行列式|A-3I|的值。

解(1)设A的特征值为 $\lambda$ ,则由 $A^2-A=0$ 

得
$$\lambda^2 - \lambda = 0$$
因而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$ 

(2) 由 
$$r(A) = r$$
, 得  $q_{\lambda=0} = n - r$ 

$$A^{2} - A = 0 \Rightarrow -A(I - A) = 0$$

$$\Rightarrow r(A) + r(I - A) \leq n$$

$$A + (I - A) = I$$

$$\Rightarrow r(A) + r(I - A) \geq n$$

$$\uparrow q_{\lambda=1} = r$$

矩阵 A 的两个互异特征值的几何重数之和等于 n,所以 A 可以对角化。

$$(3) |A - 3I| = (0 - 3)^{n - r} \cdot (1 - 3)^{r} = (-3)^{n - r} \cdot (-2)^{r}$$