

数学分析期中试题

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 5 页, 九个大题)

题号	一	二, 三	四, 五	六, 七	八, 九	总分
得分						

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x =$ _____.

2. 曲线 $y = \frac{x^2}{4} + \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的拐点坐标为_____.

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} & x > 1 \end{cases}$ 的间断点为_____, 是第_____类间断点.

4. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - \sin x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则 $c =$ _____, $k =$ _____.

5. 已知直线 $y = 2x$ 与曲线 $y = \log a^x$ 相切, 则切点为_____, $a =$ _____.

6. 已知 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{3}{n}) - f(x_0 - \frac{2}{n})) =$ _____.

7. 设方程 $ye^x + \ln y = 1$ 确定函数 $y = y(x)$, 则 $y'(0) =$ _____, $y''(0) =$ _____.

二. (8 分) 设 $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

三. (8 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$.

四. (8 分) 已知 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} (e^{\frac{\pi}{2} x^2} - 1) & x < 0 \end{cases}$, 求 $df(x)$.

五. (9 分) 证明不等式 $x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) > \sqrt{x^2 - 1}$ ($x > 1$).

六. (9 分) 讨论方程 $3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ 在区间 $[-2, 2]$ 上有几个不同实根.

七. (9 分) 某公司用卡车运送产品, 卡车速度为每小时 v 千米, $50 \leq v \leq 70$, 假定每千米运行费用(汽油等)为 $\frac{1}{100}(30 + \frac{v}{2})$ 元, 每小时需支付给司机的工资为 18 元, 设行驶路程为 L 千米, 求卡车速度为多少时运送总费用 $P(v)$ 最小.

八. (13 分) 研究函数 $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{1 - x}$ 的性态, 并作出其图形.

九. (8 分) 已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1)$, 证明在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = \frac{3f''(\xi)}{1-\xi}$.