北京理工大学《数学分析》

2011-2012 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

班级________________　　学号__________________　　姓名___________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸，试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 平面 $\pi_1: 3x+2y-z+6=0$ 与 $\pi_2: 3x+2y-z-7=0$ 之间的距离 $d=$__________________.

2. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^3}$，根据偏导数的定义，$f'_y(0,0)=$_________________.

3. 设 $\vec{A}=e^{xy}\vec{i}+\sin(xy)\vec{j}+\sin(xz^2)\vec{k}$，则 $div\vec{A}=$____.

4. 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint\limits_S (x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)dS=$____________________________.

5. $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=3$ 处的泰勒级数展开式为 $f(x)=$__________________________________.

二. (8 分)已知 $e^z-xz=y$ 确定函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三. (8 分) 证明曲线$\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$在点$P(1,-2,1)$处的切线与直线$\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$垂直.

四. (11 分) 求函数$z = xy(1 - x - y)$的极值点和极值.

五. (9 分) 将 $I=\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}$ 化成极坐标系中的累次积分，并求出积分的值.

六. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ 的收敛域及和函数.

七. (9 分) 设 V 是由柱面 $y=x^2$，平面 $y+z=1$ 以及 xOy 面所围成的空间有界闭区域，计算 $I=\iiint\limits_V x^2\,dxdydz.$

八. (10 分) 已知 $\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ 在右半平面 $(x>0)$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分，求 a,b 的值，并求 $u(x,y)$.

九. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi\end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上以 2π 为周期的傅里叶级数展开式中 $\sin nx$ 的系数 b_n，并给出此傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数 $S(x)$ 的表达式.

十. (9 分) 利用高斯公式计算 $I=\iint\limits_{S} xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧.

十一. (9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且满足 $f(x)=\sin x+\int_0^x (x-u)f(u)du$，求 $f(0)$，$f'(0)$，并证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.

(2011-2012-2)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2012.6）

一. 1. $\dfrac{13}{\sqrt{14}}$

2. 0

3. $ye^{xy}+x\cos(xy)+2xz\cos(xz^2)$

4. $\dfrac{7}{3}\pi a^4$

5. $\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-3)^n$

二.
$$e^z\frac{\partial z}{\partial x}-z-x\frac{\partial z}{\partial x}=0$$
……………………………..(2 分)

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{e^z-x}$$
……………………………….(3 分)

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=1$$
……………………………..(5 分)

解得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z-x}$$
……………………………….(6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(e^z-x)-z\cdot e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}$$
…………………………….(7 分)

$$=\frac{(e^z-x-ze^z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}=\frac{e^z-x-ze^z}{(e^z-x)^3}$$
…………………………….(8 分)

三.
$$\begin{cases}2x-\dfrac{dz}{dx}=0\\ 3+2\dfrac{dy}{dx}=0\end{cases}$$
……………………(2 分)

将点 P 代入解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{dz}{dx}=2$ ……………………(3 分)

曲线的切向量为 $\vec{T}=\{1,-\dfrac{3}{2},2\}$ …………………(4 分)

直线的方向向量为 $\vec{s}=\{3,-5,5\}\times\{1,0,5\}=\{-25,-10,5\}$ …………(7 分)

由于 $\vec{T}\cdot\vec{s}=-25+15+10=0$　$\vec{T}\perp\vec{s}$　故得证 …………(8 分)

四. $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1-2x-y)$ $\frac{\partial z}{\partial y}=x(1-x-2y)$ ………………..(2 分)

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得驻点 $P_1(0,0)$ $P_2(0,1)$ $P_3(1,0)$ $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ………(4 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-2x-2y$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$ ………………(6 分)

在点 $P_1(0,0)$，$A=0,B=1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_1(0,0)$ 不是极值点 ………………(7 分)

在点 $P_2(0,1)$，$A=-2,B=-1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_2(0,1)$ 不是极值点 ………………..(8 分)

同理，$P_3(1,0)$ 不是极值点 ………………..(9 分)

在点 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$A=-\frac{2}{3},B=-\frac{1}{3},C=-\frac{2}{3}$ $AC-B^2=\frac{1}{3}>0$

又 $A<0$，故 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 是极大值点，极大值为 $z\Big|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=\frac{1}{27}$ ……………(11 分)

五. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}$ …………………………(4 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta$ ………………………(7 分)

$=\frac{\pi^2}{32}$ ……………………..(9 分)

六. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$ $R=1$ …………………..(1 分)

$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$，发散

$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$，收敛

收敛域为 $[-1,1)$ …………………(3 分)

设　$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$$ ……………..(6 分)

$$S(x)=-x-\ln(1-x)$$ ……………..(8 分)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\begin{cases}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) & x\in[-1,1),x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$ ……………..(9 分)

七.

$$I=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{1-y}x^2dz$$ ……………………..(4 分)

$$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 x^2(1-y)dy$$ ……………………..(6 分)

$$=2\int_0^1(\frac{1}{2}x^2-x^4+\frac{1}{2}x^6)dx$$ ……………………..(8 分)

$$=\frac{8}{105}$$ ……………………..(9 分)

八.

由　$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ ………………..(1 分)

$$-\frac{x^2+y^2-(x-y+b)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-(ax+y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$ ……………(3 分)

得　$a=1\quad b=0$ ………………..(4 分)

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C$$ ………………..(6 分)

$$=\int_1^x\frac{1}{x}dx-\int_0^y\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C$$ ………………..(8 分)

$$=-\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$$ ………………..(10 分)

九.
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx \quad \text{……………..(3 分)}$$
$$=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \quad \text{……………….(5 分)}$$
$$S(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 1 & 0<x<\pi\\ 0 & x=0,\pm\pi\end{cases} \quad \text{…………………..(8 分)}$$

十. 设曲面 $S_1:z=0 \quad (x^2+y^2\le 1)$

$$I=\oiint_{S+S_1^+}-\iint_{S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy \quad \text{……….(1 分)}$$

$$\oiint_{S+S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$$
$$=-\iiint_V(z^2+x^2+y^2)dV \quad \text{………………..(3 分)}$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr \quad \text{………………..(5 分)}$$
$$=-\frac{2}{5}\pi \quad \text{………………..(6 分)}$$
$$\iint_{S_1^+}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$$
$$=\iint_{S_1^+}(2xy+3)dxdy \quad \text{…………………..(7 分)}$$
$$=\iint_{D_{xy}}(2xy+3)dxdy=\iint_{D_{xy}}3dxdy=3\pi \quad \text{…………………..(8 分)}$$
$$I=-\frac{2}{5}\pi-3\pi=-\frac{17}{5}\pi \quad \text{…………………(9 分)}$$

十一.
$$f(x)=\sin x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du \quad \text{………………..(1 分)}$$
$$f'(x)=\cos x+\int_0^x f(u)du \quad \text{………………..(2 分)}$$
$$f(0)=0 \qquad f'(0)=1 \quad \text{………………..(3 分)}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=x+o(x)$$

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$$ ………………..(5 分)

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散 ………………..(6 分)

因为$f'(0)=1>0$，且$f'(x)$连续，故在$x=0$某邻域内$f'(x)>0$，

$f(x)$单调增加，因此当n充分大时，$f(\frac{1}{n})$单调减少 ……………(8 分)

又 $$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)=0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$收敛 ..…………………(9 分)