

课程编号：A073122

北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足: $A^* X = 2A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A

的伴随矩阵, 求 X 。

二、(10 分) 对下面线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 5x_2 - 5x_3 = \lambda \end{cases}$$

试讨论: 当 λ 取何值时, 它有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解。

(用导出组的基础解系表示通解)

三、(10 分) 已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明: $x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、(10 分)已知

$$\alpha_1 = (1, -1, 1, -1), \quad \alpha_2 = (1, 0, -1, 0), \quad \alpha_3 = (2, 1, -2, -1), \quad \alpha_4 = (-2, 2, -1, 1),$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 设矩阵 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 6 & 1 & & & \\ & & 6 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 试写出 A 的初等因子; (2) 求 A 的特征值。

六、(10 分) 在 \mathbf{R}^3 中定义线性变换 σ : $\sigma((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, 3x_1)$ 。

求 σ 在 \mathbf{R}^3 的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵。

七、(10 分) 设 A 为 2×2 的实矩阵，证明： A 的特征值都为实数的充要条件为

$$|A| \leq \left(\frac{\operatorname{tr} A}{2} \right)^2 \quad (\text{其中 } \operatorname{tr} A \text{ 为 } A \text{ 的迹, 即 } A \text{ 的主对角元之和}).$$

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

- (1) 求一正交变换 $X = QY$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;
- (2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 已知线性方程组 $A_{n \times n} X = b$ 对任何 b 的取值都有解的充要条件是 $A_{n \times n}$ 为可逆阵。

十、(10 分) 设 A 相似于对角阵, λ_0 是 A 的特征值, X_0 是 A 对应于 λ_0 的特征向量, 证明:

(1) $\text{秩}(A - \lambda_0 I) = \text{秩}(A - \lambda_0 I)^2$;

(2) 不存在 Y , 使得 $(A - \lambda_0 I)Y = X_0$;