选自往年考试题目

第一章 命题逻辑复习题

1. 选择题

1) 以下语句是命题的是（ ）。

A. 此命题为假。 B. 外星球上有生物。

C. 我正在说谎话。 D. 咱们去西藏吧!

2) 下面哪一个命题是假命题（ ）。

A. 如果一个公式的合取范式唯一，那么汶川 2008 年发生了地震。

B. 如果一个公式的合取范式不唯一，那么汶川 2008 年发生了地震。

C. 如果一个公式的析取范式唯一，那么汶川 2008 年没有发生地震。

D. 如果一个公式的析取范式不唯一，那么汶川 2008 年没有发生地震。

3) 下列各组公式中，哪组是互为对偶的，其中 P 为单独的命题变元，A 为含有联结词的命题公式（ ）。

A. P，P B. P，$\neg$P

C. A, (A*)* D. A，A

4) 前提$\neg P \vee Q, \neg Q \vee R, R \to S$的有效结论是（ ）。

A. $P \wedge Q$ B. $P \to S$

C. S D. $\neg P \vee \neg Q$

5) 设 A* 和 B* 分别是公式 A 和 B 的对偶式，有如下四个命题:

(1) $A^* \Leftrightarrow A$ (2) 若 $A \Leftrightarrow B$ 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$

(3) 若 $A \Rightarrow B$ 则 $A^* \Rightarrow B^*$ (4)（$(A^*)^* \Leftrightarrow A$

则以下说法正确的是（ ）。

A. 只有 1 个命题成立 B. 有 2 个命题成立

C. 有 3 个命题成立 D. 有 4 个命题成立

6) 下面哪个集合不是最小全功能联结词组（ ）。

A. $\{\neg,\wedge\}$ B. $\{\neg,\vee\}$

C. $\{\neg,\to\}$ D. $\{\neg,\uparrow\}$

2. 判断题

1) $P \vee \neg R \vee Q$ 既是一个析取范式又是一个合取范式。　　　　　　　　　　（　）

2) 若 $A \bar{\vee} C \Leftrightarrow B \bar{\vee} C$，则 $A \Leftrightarrow B$。　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

3. 填空题

1) P：我留下，Q：你走，则“我留下仅当你走”的符号化形式为______。

2) $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q)$ 的主析取范式为____________________。

3) $P \rightarrow \neg Q$ 的逆换式为____________________。

4) $P \wedge (\neg R \wedge Q)$ 的主合取范式为Π______________________。

4. 证明 $\{\neg, \xrightarrow{c}\}$ 是最小全功能联结词组。

5. 符号化下面各命题，并给出推理证明。

$\sqrt{2}$ 是有理数或无理数。 若 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 2 能整除 3。 若 $\sqrt{2}$ 是无理数，则 $\sqrt{3}$ 也是无理数。 而 2 不能整除 3。 所以 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是无理数。.

令 P：$\sqrt{2}$ 是有理数。Q：$\sqrt{2}$ 是无理数。 R：2 能整除 3。 S：$\sqrt{3}$ 是无理数。

6. 设计举重表决器：设有主裁判 A 以及副裁判 B 和 C，在主裁判认定并且副裁判中至少有一位认定时，则成功举起。将结果用命题公式表示，并加以简化。

7. 甲、乙、丙、丁 4 人中有且只有 2 个人参加比赛。关于谁参加比赛，下列判断都是正确的：

(1) 甲和乙只有 1 人参加；
(2) 丙参加，则丁必参加；
(3) 乙或丁至多参加 1 人；
(4) 丁不参加，则甲也不参加。

符合化各命题并判断哪两个人参加了比赛。

答　案

1.答案

(1) B (2) D (3) A　(4) B (5) B (6) D

2.答案

（1）是 （2）是

3.答案

（1）$P \to Q$ 或者 $\neg Q \to \neg P$

（2）0 或者 F 或者 $(F \wedge Q) \vee (F \wedge \neg P)$

（3）$\neg Q \to P$

（4）$\prod_{0,1,2,3,4,5,7}$

4.

证明：因为$\{\neg, \vee\}$是最小全功能联结词组，且$\neg(\neg A \xrightarrow{c} B) \Leftrightarrow \neg A \to B \Leftrightarrow A \vee B$，故$\{\neg, \xrightarrow{c}\}$是全功能联结词组. .

由公式的定义可知，仅用一元联结词是不能表示二元联结词的，所以$\{\neg\}$不是全功能联结词组. .

若$\{\xrightarrow{c}\}$是全功能联结词组，则

$$\neg P \Leftrightarrow P \xrightarrow{c} (P \xrightarrow{c} \ldots (P \xrightarrow{c} \ldots) \ldots)$$

对 P 指派为 F，则等价式左边为 T，右边为 F，矛盾..

5.

$\sqrt{2}$ 是有理数或无理数。 若 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 2 能整除 3。 若 $\sqrt{2}$ 是无理数，则 $\sqrt{3}$ 也是无理数。 而 2 不能整除 3。 所以 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是无理数。.

P：$\sqrt{2}$ 是有理数.　Q：$\sqrt{2}$ 是无理数.　R：2 能整除 3.　S：$\sqrt{3}$ 是无理数.

前提：$P \bar{\vee} Q$，$P \to R$，$Q \to S$，$\neg R$

结论：$Q \wedge S$

(1) $P\to R$ P
(2) $\neg R$ P
(3) $\neg P$ T(1)(2)
(4) $P \bar{\vee} Q$ P
(5) $(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$ T(4)
(6) $P\vee Q$ T(5)
(7) Q T(3)(6)
(8) $Q\to S$ P
(9) S T(7)(8)
(10) $Q\wedge S$ T(7)(9)

或者(1) $P\to R$ P
(2) $\neg R$ P
(3) $\neg P$ T(1)(2)
(4) $P \bar{\vee} Q$ P
(5) $\neg(P\leftrightarrow Q)$ T(4)
(6) $P\leftrightarrow\neg Q$ T(5)
(7) $(P\to\neg Q)\wedge(\neg Q\to P)$ T(6)
(8) $\neg Q\to P$ T(7)
(9) Q T(3)(8)
(10) $Q\to S$ P
(11) S T(9)(10)
(12) $Q\wedge S$ T(9)(11)

6. 答案

设：A：主裁判 A 认定。B：副裁判 B 认定。C：副裁判 C 认定。D：成功举起。

则：$(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\Rightarrow D$

$$
\begin{aligned}
S &\Leftrightarrow (A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\\
&\Leftrightarrow (A\wedge(\neg B\vee B)\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge(\neg C\vee C))\\
&\Leftrightarrow (A\wedge C)\vee(A\wedge B)\\
&\Leftrightarrow A\wedge(B\vee C)
\end{aligned}
$$

故，简化为 $A\wedge(B\vee C)\Rightarrow D$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

7.

A：甲参加了比赛. B：乙参加了比赛.
C：丙参加了比赛. D：丁参加了比赛.
则 $A \bar{\vee} B$ 或 $(\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)$，$C\to D$，$\neg(B\wedge D)$ 或 $B\to\neg D$ 或 $B\uparrow D$ 或 $(B \bar{\vee} D)\vee(\neg B\wedge\neg D)$ 或 $(\neg B\wedge D)\vee(B\wedge\neg D)\vee(\neg B\wedge\neg D)$，$\neg D\to\neg A$. （4 分）

由(1)可知 A 与 B 有且只有 1 个成立

(a) 若 A 成立

(1) A　P

(2) $\neg D \to \neg A$　P

(3) D　T(1)(2)

所以 A、D 成立，

即甲、丁参加比赛

(b) 若 B 成立

(1) B　P

(2) $\neg(B \wedge D)$　P

(3) $\neg B \vee \neg D$　T(2)

(4) $\neg D$　T(1)(3)

(5) $\neg D \to \neg A$　P

(6) $\neg A$　T(4)(5)

(7) $C \to D$　P

(8) $\neg C$　T(4)(7)

(9) $\neg D \wedge \neg A \wedge \neg C$　T(4)(6)(8)

即有 3 人都不去，与题意矛盾

选自往年考试题目

第二章 命题逻辑复习题

1. 选择题

1) $\forall x(A(x) \vee \neg B(x)) \to (\forall x A(x) \vee \exists x \neg B(x))$的公式类型为（ ）。

A. 永真式　　B. 可满足式
C. 不可满足式　　D. 蕴含式

2) 公式$(\forall x)(F(x) \to (\exists y)G(x,y))$的前束范式为（ ）。

A. $(\forall x)(\exists y)(F(x) \to G(x,y))$　　B. $(\exists x)(\exists y)(F(x) \to G(x,y))$

C. $(\forall x)(\forall y)(F(x) \to G(x,y))$　　D. $(\exists x)(\forall y)(F(x) \to G(x,y))$

3) 对于下列各式：

(1) $\exists y \forall x A(x，y)$　　(2) $\exists x \forall y A(x，y)$

(3) $\forall x \exists y A(x，y)$　　(4) $\exists y \exists x A(x，y)$

存在着（ ）。

A. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$　　B. $(2) \Rightarrow (1), (3) \Rightarrow (4)$

C. $(1) \Rightarrow (3), (4) \Rightarrow (3)$　　D. $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4), (2) \Rightarrow (4)$

4) 下列公式中，不正确的是（ ）。

A. $\exists x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$

B. $\exists x(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to \exists x A(x)$

C. $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$

D. $\exists x(B \vee A(x)) \Leftrightarrow B \vee \exists x A(x)$

2. 判断题

1) $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$。　（ ）

2) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \wedge C(x)$是命题。　（ ）

3) $\exists x \forall y A(x，y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x，y)$。　（ ）

4) $(\forall x)(\exists y)(P(x，z) \to Q(y)) \leftrightarrow S(x，y) \Leftrightarrow (\forall u)(\exists v)(P(u，z) \to Q(v)) \leftrightarrow S(x，y)$。

( )

5) $\exists x A(x) \to B \Rightarrow \forall x A(x) \to B$。 ( )

3. 填空题

1) 设谓词的个体域为$\{a,b,c\}$，公式$\forall x(A(x) \to B(x))$在该域上消去量词后应为

________________。

2) 谓 词 公 式 $\neg((\forall x)F(x) \to (\forall y)G(y)) \wedge (\forall y)G(y)$ 的 公 式 类 型 为

________________。

3) 设 A(x)：x 是考生，B(x)：x 提前进入考场，C(x)：x 取得好成绩，D(x,y)：x=y。则“有且只有一个提前进入考场的考生未取得好成绩”的符合化形式为 ________________。

(08)

4. 符号化下面各命题，并给出推理证明。 (07)

为赈灾捐款的每个人都是有爱心的。有爱心的都是品德高尚的。乞丐老王为赈灾捐了款。因此，乞丐老王是品德高尚的。

设 D(x)：x 是为赈灾捐款的人，L(x)：x 是有爱心的，R(x)：x 是品德高尚的。

a：乞丐老王。

第二章 命题逻辑复习题-答案

选择题：A , A, D, A
判断题：F F T, T, T
填空题：

1) $(A(a) \to B(a)) \wedge (A(b) \to B(b)) \wedge (A(c) \to B(c))$

或$(\neg A(a) \vee B(a)) \wedge (\neg A(b) \vee B(b)) \wedge (\neg A(c) \vee B(c))$

2) 不可满足式/矛盾式/永假式

3) $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$

$\wedge \forall x \ \forall y(A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x) \wedge A(y) \wedge B(y) \wedge \neg C(y) \to D(x, y)))$

证明题：

证明：前提：$(\forall x)(D(x) \to L(x))$

$(\forall x)(L(x) \to R(x))$

$D(a)$

结论：$R(a)$

(1) $(\forall x)(D(x) \to L(x))$	P
(2) $D(a) \to L(a)$	US (1)
(3) $(\forall x)(L(x) \to R(x))$	P
(4) $L(a) \to R(a)$	US (3)
(5) $D(a) \to R(a)$	T (2)(4)
(6) $D(a)$	P
(7) $R(a)$	T (6)(7)

另证：

前提：$(\forall x)(D(x) \to L(x))$

$(\forall x)(L(x) \to R(x))$

结论：$D(a) \to R(a)$

(1) $(\forall x)(D(x) \to L(x))$	P
(2) $D(a) \to L(a)$	US (1)
(3) $(\forall x)(L(x) \to R(x))$	P
(4) $L(a) \to R(a)$	US (3)
(5) $D(a) \to R(a)$	T (2)(4)

选自往年考试题目

第三章 集合与关系复习题

1. 选择题

1) 下列关于集合的命题错误的是（ ）。

A. $\{x\} \subseteq \{x\}$　　B. $\{x\} \in \{x\}$

C. $\{x\} \in \{x,\{x\}\}$　　D. $\{x\} \subseteq \{x,\{x\}\}$

2) 下列等式不成立的是（ ）。

A. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

B. $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$

C. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

D. $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

3) 设 R 和 S 都是 A 上的反对称关系，则（ ）也是反对称的。

A. $R \oplus S$　　B. $R \cup S$

C. $R - S$　　D. $R \circ S$

4) 对任一集合 A，下式能成立的是（ ）。

A. $A \in P(A)$　　B. $\{A\} \in P(A)$

C. $A \in A - \varnothing$　　D. $A \in A \oplus \varnothing$

5)设 $M = \{x \mid f_1(x) = 0\}$， $N = \{x \mid f_2(x) = 0\}$，则方程 $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ 的解是（）。

A. $M \cap N$　　B. $M \cup N$

C. $M \oplus N$　　D. $M - N$

2. 判断题

1) 集合的对称差运算 $\oplus$ 既满足交换律也满足结合律。（ ）

2) 设 A，B，C 为三个集合，则 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$。（ ）

3) n 个元素的集合上，可以定义 2^{n^2} 个关系。（ ）

4) 设 A,B,C 为任意集合，则 $(A - B) \cup (A - C) = \varnothing$ 的充要条件是 $A \subseteq B \cap C$。（ ）

5) 设 R 是 A 上的关系，若 $R^2=R$，则 R 是自反和传递的。（ ）

6) 设 R 和 S 是集合 A 上的关系，则 $r(R \cup S)=r(R) \cup r(S)$。（ ）

3. 填空题

1) 给定自然数集合 N 的下列子集：A={1,2,7,8}，B={i|i^2<50}，C={i|i 可被 3 整除且 0≤i≤30}，则 B-(A∪C)=______________。

2) 集合 A={a,b,c}上关系 R 的关系图如图 1 所示，则 R 的传递闭包 t(R)=_________。

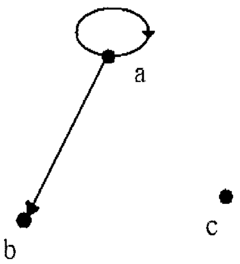


图 1

3) 设|A|=3，则 A 上有__________个对称关系。

4) 设 A 是 12 的所有正因子组成的集合，其上的偏序关系为整除关系，则{2,3}的上界是____________________。

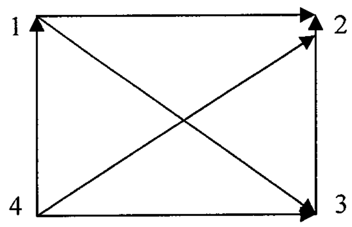
5) 设集合 A={a,b,c}，则集合 S_1={{a,b},{b,c}}，S_2={{a},{a,b},{a,c}}，S_3={{a},{b,c}}，S_4={{a,b,c}}，S_5={{a},{b},{c}}和 S_6={{a},{a,c}}中是 A 覆盖的有__________________；是 A 划分的有______________________。

4. 设 R 是集合 S 上的关系，S'是 S 的子集，定义 S'上的关系 R'如下：

R' = R∩(S'×S')。

证明：如果 R 是 S 上的偏序关系，那么 R'是 S'上的偏序关系。

5. 下图给出了集合{1,2,3,4}上的一个偏序关系图，请画出其哈斯图，并说明是否是全序，是否是良序。



6. 设 R 是二元关系，S={<a,b>|存在某个 c，使得<a,c>∈R 且<c,b>∈R}。
证明：如果 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

第三章 集合与关系 复习题答案

选择题：

（1）B (2) B (3) C （4）A （5） B

判断题：

T F T T F T

填空题

（1） {4，5}
（2）$t(R)=R$
（3） 64, 2^6
（4）{6, 12}
（5）s1, s2, s3, s4, s5; s3, s4, s5

4

证明：①自反性：对任意的 $a\in S'$，$\langle a,a\rangle\in S'\times S'$。又因为 S'是 S 的子集，所以 $\langle a,a\rangle\in S$，因为 R 是自反的，所以 $\langle a,a\rangle\in R$，因此 $\langle a,a\rangle\in R\cap(S'\times S')=R'$。.

②反对称性：对任意的 $a,b\in S'$且 $a\neq b$，若 $\langle a,b\rangle\in R'\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R\cap(S'\times S')$, 因为 R 是反对称的，故必有 $\langle b,a\rangle\notin R$，所以 $\langle b,a\rangle\notin R'$。.

③传递性：对任意的 $a,b,c\in S'$,

$\langle a,b\rangle\in R'\wedge\langle b,c\rangle\in R'$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R\cap(S'\times S')\wedge\langle b,c\rangle\in R\cap(S'\times S')$

$\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R\wedge\langle a,b\rangle\in(S'\times S')\wedge\langle b,c\rangle\in(S'\times S')$

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\wedge a\in S'\wedge b\in S'\wedge c\in S'$ （可省略）

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle a,c\rangle\in S'\times S'$ (因为 R 是偏序关系, $S'\times S'$是全域关系, 都满足传递性)

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R\cap(S'\times S')$

$\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R'$.

上述证明过程中“$\Rightarrow$”可用文字叙述替代。

5.

该篇序关系是全序，良序。

6.

1) 设 R 是 A 上的等价关系。任取 x，

$x \in A \Rightarrow \quad \langle x,x\rangle \in R$ （因为 R 在 A 上自反）

$\Rightarrow \exists x(\langle x,x\rangle \in R \wedge \langle x,x\rangle \in R) \Rightarrow \langle x,x\rangle \in S$

S 在 A 上自反。

2) 任取 $\langle x,y\rangle$，

$\langle x,y\rangle \in S \Rightarrow \exists c(\langle x,c\rangle \in R \wedge \langle c,y\rangle \in R)$

$\Rightarrow \exists c(\langle c,x\rangle \in R \wedge \langle y,c\rangle \in R)$ （因为 R 在 A 上对称）

$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in S$

S 是对称的。

3) 任取 $\langle x,y\rangle$，$\langle y,z\rangle$

$\langle x,y\rangle \in S \;\wedge\; \langle y,z\rangle \in S$

$\Rightarrow \exists c(\langle x,c\rangle \in R \wedge \langle c,y\rangle \in R) \;\wedge\; \exists d(\langle y,d\rangle \in R \wedge \langle d,z\rangle \in R)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \;\wedge\; \langle y,z\rangle \in R$ （因为 R 在 A 上传递）

$\Rightarrow \langle x,z\rangle \in S$

S 是传递的。

选自往年考试题目

第四章 集合与关系复习

1. 选择题

1) 设 $f \circ g$ 是复合函数，则以下说法正确的是哪些（　）。

（1）如果 $f \circ g$ 是满射的，则 f 是满射的。

（2）如果 $f \circ g$ 是满射的，则 g 是满射的。

（3）如果 $f \circ g$ 是入射的，则 f 是入射的。

（4）如果 $f \circ g$ 是入射的，则 g 是入射的。

A.（1）和（3）成立　　B.（2）和（4）成立

C.（1）和（4）成立　　D.（2）和（3）成立

2. 判断题

1) 令 X 和 Y 都是集合，且 $|X|=|Y|$，则 $f: X \to Y$ 是入射的，当且仅当它是一个满射。（　）

2) 如果 f 和 g 均为从 X 到 Y 的函数，则 $f \cap g$ 也是从 X 到 Y 的函数。（　）

3. 填空题

1) 假定 $f: A \to B$，并定义一个函数 $g: B \to P(A)$，对于 $b \in B$，$g(b)=\{x \in A | f(x)=b\}$。如果 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是______________（入射、满射、双射）。

答案:

1. C

2. 错，对，

3. 入射

选自往年考试题目

第五章 复习题

选择题

（1）在自然数集 N 上，下列定义的运算中不可结合的只有____。

A. $a*b=\min\{a,b\}$

B. $a*b = a+b$

C. $a*b =GCD(a,b)$ (a, b 的最大公约数)

D. $a*b = a(\bmod b)$

（2）存在阶数为____的群不是阿贝尔群。

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 6

（3）设集合 G=N，$x*y=\min\{x,y\}$，则<G, *>是

A. 广群　　B.半群

C. 独异点　　D. 群

（4）设 R 为实数集，$R^+=\{x|x\in R \wedge x>0\}$，*是数的乘法运算，$<R^+, *>$是一个群，则下列集合关于数的乘法运算构成该群子群的是______。

A. { R^+中的有理数}　　B.{ R^+中的无理数}

C. { R^+中的自然数}　　D. {1，2，3}

（5）设集合 G=N，$x*y=\max\{x,y\}$，则<G, *>是

A. 广群　　B.半群

C. 独异点　　D. 群

（6）代数系统<{命题}，∨>的零元是____。

A. T　　B. 不存在

C. F　　D. ϕ

（7）在实数集合 R 上，下列定义的运算中不存在幺元的只有____。

A. $a*b=a+b$

B. $a*b = |x-y|$

C. $a*b = \max\{x, y\}$

D. $a*b = a\times b$

（8）代数系统<{命题}，∧>的幺元是____。

A. T　　B. 不存在

C. F　　D. ϕ

（9）_____<G, *>的运算表中的每一行或每一列都是 G 的元素的一个置换。

A. 广群　　B.半群

C. 独异点　　D. 群

判断题

（1） 在实数集合上定义二元运算 X*Y=XY-2X-2Y+6，则*满足结合律。

（2） 群中可能有零元。

（3） 循环群的任一子群都是循环群。

（4） 一个循环群的生成元是唯一的。

（5） 群中除幺元外，不含其他等幂元。

填空题

（1） 若*为集合 A 上的二元运算，它的幺元也是零元，则 A 的基数是_____。

（2） S 为非空集合，P(S)是 S 的幂集，则代数系统<P(S), U>的幺元是____，零元是_____。

（3） 设$<Z_6, +_6>$是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，$Z_6=\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$，写出$<Z_6, +_6>$的所有子群______________，________________，________________，____________。

（4） S 为非空集合，P(S)是 S 的幂集，则代数系统$<P(S), \cap>$的幺元是____，零元是_____。

（5） 对于下面的集合 G 和运算•，循环群<G, •>的生成元为______。

$$G=\{1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$$
$$=\{1,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}\text{为}x^3=1\text{的解}$$

·	1	ε_1	ε_2
1	1	ε_1	ε_2
ε_1	ε_1	ε_2	1
ε_2	ε_2	1	ε_1

证明题

（1） 设<G, *>是一个群，x∈G。定义：a∘b=a*x*b，∀a, b∈G。证明<G, ∘>是群。

（2） 设<G, >是群，对任一 a∈G，令 H={y| y* a= a* y, y∈G }，证明<H, *>是<G, *>的子群。

（2） 设 G={φ| φ: x→ax+b, 其中 a,b∈R 且 a≠0, x∈R}, 二元运算o是映射的复合。证明<G, o>是一个群。

答案：

选择题

（1） D
（2） D
（3） B
（4） B
（5） C
（6） A
（7） C
（8） A
（9） D

判断题

（1） 是
（2） 否
（3） 是
（4） 否
（5） 否

填空题

（1） 1
（2） ϕ， S
（3） $<Z_6, +_6>$，$<\{[0]\}, +_6>$，$<\{[0],[3]\}, +_6>$，$<\{[0],[2],[4]\}, +_6>$
（4） S，ϕ
（5）

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$

证明题

（1） 要证∘是 G 群，需证封闭性、结合性成立，同时有单位元，每个元素有逆元。

（a） $\forall a, b \in G, x \in G$，有 $a \circ b = a*x*b \in G$。因此运算是封闭的。

（b） $\forall a, b, c \in G$，有 $(a \circ b) \circ c = (a*x*b)*x*c = a*x*(b*x*c) = a \circ (b \circ c)$，因此，运算是可结合的。

（c） x^{-1} 是 $<G, \circ>$ 的单位元。

$\forall a \in G$，有 $a \circ x^{-1} = a*x*x^{-1} = a$； $x^{-1} \circ a = x^{-1}*x*a = a$。

（d） $\forall a \in G$，$x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}$ 是 a 在 $<G, \circ>$ 中的逆元。

$a \circ (x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}) = a*x*x^{-1}*a^{-1}*x^{-1} = x^{-1}$

$(x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}) \circ a = x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}*x*a = x^{-1}$

(2)　(a) 因为 $H=\{y \mid y*a=a*y, y\in G\}$，有 $H\subseteq G$。又<G, >是群，所以*在 H 中满足结合性。

(b) 对于任意的 $x,y\in H$，任意的 $a\in G$，有

$(x*y)*a=x*y*a=x*(y*a)=x*a*y=a*x*y=a*(x*y)$，

所以，$x*y\in H$，*关于 H 是封闭的。

(c) 因为 $e*a=a*e$，所以 $e\in H$，即存在幺元。

(d) 对于任意的 $x\in H$，在 G 上有 $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$，所以

$a*x^{-1}=(x^{-1}*x)*(a*x^{-1})=x^{-1}*(x*a)*x^{-1}$

$=x^{-1}*a*x*x^{-1}=x^{-1}*a$

因此，$a*x^{-1}=x^{-1}*a$。即 $x^{-1}\in H$。

综上所述，<H, *>是<G, *>的子群。

(3)　(a) 对于任意的 $\varphi_1, \varphi_2\in G$, 设 $\varphi_1(x)=ax_1+b_1$, $a_1\neq 0$, $\varphi_2(x)=ax_2+b_2$, $a_2\neq 0$, 由于

$$\varphi_1\circ\varphi_2(x)=\varphi_1(\varphi_2(x))=\varphi_1(a_2x+b_2)=a_1(a_2x+b_2)+b_1$$
$$=(a_1a_2)x+(a_1b_2+b_1)$$

$a_1a_2\in R$,　$a_1b_2+b_1\in R$ 且 $a_1a_2\neq 0$，所以 $\varphi_1\circ\varphi_2\in R$。

(b) 对于任意的 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\in G$, 有

$$(\varphi_1\circ\varphi_2)\circ\varphi_3(x)=(\varphi_1\circ\varphi_2)(\varphi_3(x))=(\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x)))$$

而 $\varphi_1\circ(\varphi_2\circ\varphi_3)(x)=\varphi_1(\varphi_2\circ\varphi_3)(x)=(\varphi_1(\varphi_2(\varphi_3(x)))$

所以 $(\varphi_1\circ\varphi_2)\circ\varphi_3=\varphi_1\circ(\varphi_2\circ\varphi_3)$

(c) 幺元为 $\varphi_e\in G$，使 $\varphi_e(x)=x$。这是因为，对于任意的 $\varphi\in G$，设 $\varphi(x)=ax+b$, 则

$$\varphi_e\circ\varphi(x)=\varphi_e(ax+b)=ax+b,$$
$$\varphi\circ\varphi_e(x)=\varphi(x)=ax+b,$$

所以，$\varphi_e\circ\varphi(x)=\varphi\circ\varphi_e(x)$。

(d) 对于任意的 $\varphi\in G$，设 $\varphi(x)=ax+b$，$a\neq 0$, 于是存在 $\varphi^{-1}\in G$，使得

$\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$，且有

$$\varphi\circ\varphi^{-1}(x)=\varphi(\varphi^{-1}(x))=\varphi(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})=a(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a})+b=x$$

$$\varphi^{-1}\circ\varphi(x)=\varphi^{-1}(ax+b)=\frac{1}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}=x$$

所以，$\varphi\circ\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\circ\varphi=\varphi_e$。

选自往年考试题目

第七章 复习题

1. 选择题

1) 设 $G=<V, E>$为无环的无向图，$|V|=6$，$|E|=16$，则 G 是（　）。

A. 完全图　　B. 零图
C. 简单图　　D. 多重图

2) 连通图 G 是一棵树当且仅当 G 中（　）。

A. 有些边不是割边　　B. 每条边都是割边
C. 无边割集　　D. 每条边都不是割边

3) 对于任意的图 G，有（　），其中 x(G)为图 G 的最小着色数，⊿(G)为图 G 的最大度。

A. $x(G) \leqslant ⊿(G)+1$　　B. $x(G) \geqslant ⊿(G)+1$
C. $x(G) < ⊿(G)+1$　　D. $x(G) > ⊿(G)+1$

4) 下列图的顶点度数序列哪个可以图解为一个简单图（　）

A. (5,4,4,4,2,1)　　B. (5,4,3,2,2)
C. (3,3,3,1)　　D. (4,4,3,3,2,2)

5) 设图 G 如图 1 所示，下列哪个结点集合不是点割集（　）

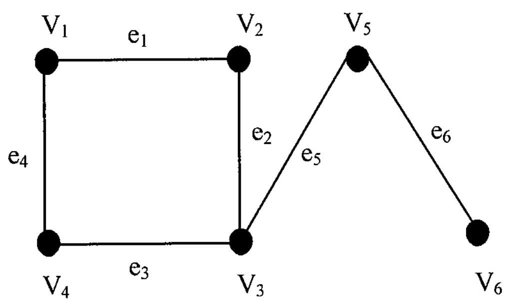


图 1

A. $\{v_1,v_4\}$　　B. $\{v_2,v_4\}$
C. $\{v_3\}$　　D. $\{v_5\}$

2. 判断题

2) 仅当 $n \leqslant 4$ 时，K_n 为平面图。　（　）
3) 偏序集合的哈斯图一定是一个连通图。　（　）
5) 当且仅当 e 是 G 的割边时，e 才在 G 的每棵生成树中。　（　）

3. 填空题

1) 请写出所有非同构的五阶树的度数序列____________。

2) n 阶零图、二部图及完全图 K_n 的着色数分别为______________。

3) 6 个结点 5 条边的所有可能不同构的无向简单连通图有________个。

4) 图 G 如图 2 所示，则 G 中从结点 v_3 到 v_1 的长度不超过 3 的路的数目为_____________。

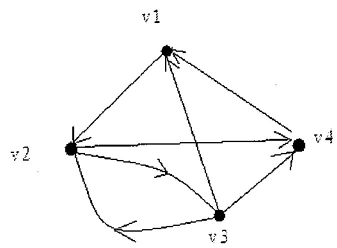


图 2

5) 6 阶所有非同构的无向树有_________个。

6) 连通平面图 G 有 20 个顶点，每个顶点的度都是 3，则 G 把平面分成_________个区域。

7) 已知图 G 如图 3 所示，图 G 的点连通度为______，边连通度为______。

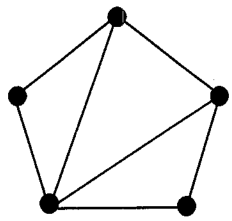


图 3

4. 有向图 D = <V , E>的邻接矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，请问

D 中 v_1 到 v_3 长度为 2 的通路数是多少？ v_1 到 v_3 长度为 3 的通路数是多少？ v_1 到 v_3 长度为 4 的通路数是多少？

5. 已知有 9 个人 $v_1,v_2,v_3,\ldots v_9$，其中 v_1 和两个人握过手，v_2,v_3, v_4,v_5 各和 3 个人握过手，v_6 和 4 个人握过手，v_7,v_8 各和 5 个人握过手，v_9 和 6 个人握过手。试证明 9 个人中一定可以找出 3 个人相互握过手。

6. 试用图论的方法证明：在任何两个或两个以上人的组内，存在两个人在组内有相同个数的朋友。

7. 设 G 是 n（n≥11）阶无向简单图，证明 G 或 G 的补图必为非平面图。

8. 设 G 是连通简单平面图，结点数为 v（v≥3），边数为 e，面数为 r，则 r≤2v-4。

9. 证明：小于 30 条边的平面简单图有一个结点度数小于等于 4。

10. 证明：在 6 个结点 12 条边的联通平面的简单图中，每个面用 3 条边围城。

第 7 章复习题答案

答案：

1. 选择题：D, B, A, D, A
2. 判断题：对，错，对
3. 填空题：

（1）（1 1 2 2 2）（1 1 1 2 3）（1 1 1 1 4）

（2）1,2，n

（3）6 个

（4）4 个

（5）6 个

（6）12 个

（7）2,2

4.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

由 A^2 中 $a_{13}=3$ 可知， v_1 到 v_3 长度为 2 的通路有 3 条。. v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有 4 条。. v_1 到 v_3 长度为 4 的通路有 6 条。.

5

证明：（1）以 $v_1,v_2,v_3,\ldots v_9$ 为结点，v_i 与 v_j 握过手就连一条边（v_i, v_j），得简单图 G。根据题意有 $d(v_1)=2,d(v_2)=d(v_3)=d(v_4)=d(v_5)=3,d(v_6)=4, d(v_7)=d(v_8)=5, d(v_9)=6$。

（2）与 v_9 邻接的点有 6 个，其中必有一点 v_k 为 v_6,v_7,v_8 之一，因此有 $d(v_k)\geq 4$。与 v_9 邻接的其余 5 个点中必存在一点 v_h 与 v_k 相邻（如图 1），否则有 $d(v_k)\leq 8-5=3$，与已证结论 $d(v_k)\geq 4$ 矛盾。

由此 v_9, v_h,v_k 三个人相互握过手。

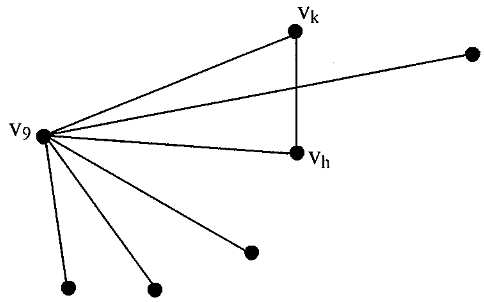


图 1

6.

证明：把每个人当作图中的结点，两个人有朋友关系则两点相邻。显然该图是简单图。问题就转化为证明“至少有两个结点的简单图有两个相同度数的结点。”

因为每个结点仅仅能够与另外 n-1 个结点邻接，所以每个结点的度数小于等于 n-1。由于度数是 0 的结点是孤立结点，而度数是 n-1 的结点与其它所有结点都邻接，所以 0 和 n-1 度的结点在图 G 中不能同时出现。

因此在 G 中可以出现的度数应该分成以下两种情况：

（1）0,1,2,…,n-2　（2）1,2,3,…,n-1

无论哪种情况 n 个结点最多有 n-1 种不同的度数，因此，一定有两个或两个以上的结点有相同的度数。

7.

证明：用反证法.假设 G 与 G 的补图都是平面图。

因为 G 与 G 的补图的边数中至少有一个≥Kn 边数的一半。不妨设 G 的边数 $m \geq n(n-1)/4$.

由定理 3 有

$n(n-1)/4 \leqslant m \leqslant 3n-6$ 即

$n^2-13n+24 \leqslant 0$, 解此不等式，得到

$2 < n < 11$ 这与 $n \geq 11$ 相矛盾。

故 G 或 G 补图为非平面图。

8. 证：因为 G 是结点数 $v \geq 3$ 的简单连通平面图，所以 $e \leqslant 3v-6$ ，

（1） $e=2$ 时，$v=3$，则 $r=1$，$2v-4=2$，故 $r\leqslant 2v-4$。

（2） $e\geqslant 3$ 时，则连通简单平面图的每个面至少有 3 条边围成，于是

$3r\leqslant 2e\leqslant 2(3v-6)$， 故 $r\leqslant 2v-4$。

9. 证明 使用反证法。假设每个结点的度数 > 4，即 $\deg(v_i)>=5$。因为 $2e=\sum_{i=1}\deg(v_i)>=5v$，即 $v<=2e/5$，由于 $e<=3v-6$，代入后得到 $e<=6e/5-6$，既有 $e>=30$，与边数小于 30 相矛盾。

10. 证明：$v=6$，$e=12$，由欧拉公式 $r=2+e-v=8$。因为 $\sum_{i=1}^{8}\deg(r_i)=2e=24$

而 $\deg(r_i)>=3$，故必有 $\deg(r_i)=3$，即每个面用 3 条边围城。