课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

一、（10 分）设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^2B-A-B=I$, 其中 I 为 3 阶单位矩阵，若

$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$,　求 B 及 $|B|$.

解：由 $A^2B-A-B=I$ 得

$$(A^2-I)B=I+A,$$

由 $I+A$ 可逆，得到

$$B=(A-I)^{-1}$$ ……………………………5 分

而

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

所以

$$|B|=|(A-I)|^{-1}=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}^{-1}=-1.$$ ………………………10 分

二、（10 分）已知线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+\ x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$$

讨论参数 λ 取何值时，方程组无解，有唯一解和无穷多个解？在方程组有无穷多个解时，用导出组的基础解系表示解.

解

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&\lambda-3\\1&\lambda&1&-2\\1&1&\lambda&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&3(\lambda-1)\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)&3(\lambda-1)\end{pmatrix},$$

① 当 $\lambda=-2$ 时方程组无解;　　　　………………………3 分

② 当$\lambda \neq -2, \lambda \neq 1$时，方程组有唯一解；　　　　　　　　……………………6 分

③当$\lambda = 1$时，方程组有无穷多个解. 此时增广矩阵的简化阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特解取为$\xi^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系为$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，因此，通解为

$$\xi^* + c_1\xi_1 + c\,\xi\ .$$　……………………10 分

三、（10 分）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

（1）求 A 的列向量组的秩和它的一个极大无关组；

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余列向量.

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & -21 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$，所以列向量组的秩为 3，……………………3 分

则极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　　　　　　　……………………7 分

（2）

$$\alpha_4 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \alpha\ .$$　……………………10 分

四、（10 分）已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是向量空间$\mathbf{R}^3$的一个基，

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_3$$

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标.

解：(1)由于

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，故秩 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=$ 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此 β_1,β_2,β_3 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

……………………….4 分

(2)基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. ………7 分

(3)设 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$，则

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=(2k_1+3k_2)\alpha_1+(k_1+2k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

故 $k_1=-1,k_2=1,k_3=1$，则向量 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 $\beta_1,\beta_2\beta$ 的坐标为

$(-1, 1^T,$. ……………………….10 分

五、（10 分）用施密特正交化方法, 由向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(2,2,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

构造一组标准正交向量组.

解：令

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

…………………………6 分

单位化

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

…………………………10 分

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&2\end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 判断 A 是否可以相似对角化.

解：由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&0\\4&\lambda+1&0\\-4&8&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，可知 A 的特征值为

$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$$ …………………………3 分

当 $\lambda_1=2$ 时， $2I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\4&3&0\\-4&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，求出线性方程组

$(2I-A)X=0$ 的一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，全部特征向量为 $c_1\xi_1=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时， $I-A=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\4&2&0\\-4&8&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\0&10&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,求出线性方程组

$(I-A)X=0$ 的一个基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\10\end{pmatrix}$，全部特征向量为 $c_2\xi_2=c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\10\end{pmatrix}$.

…………………………7 分

由于 A 是三阶矩阵，而 A 只有两个线性无关的特征向量，故 A 不能对角化. …10 分

七、（10 分）如果 $\mathbf{F}^n$ 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是线性无关的，并且向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 是线性相关的，那么 b 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示，并且表示的方法是唯一的.

证明 因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$是线性相关的，所以存在$\mathbf{F}$中的不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_t,h$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+h\beta=0. \qquad ① \text{..........................3 分}$$

如果$h=0$，那么$k_1,k_2,\cdots,k_t$必不全为零，并且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0,$$

这意味着$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是线性相关的，与条件矛盾．因此，由等式①可得

$$\beta=\left(-\frac{k_1}{h}\right)\alpha_1+\left(-\frac{k_2}{h}\right)\alpha_2+\cdots+\left(-\frac{k_t}{h}\right)\alpha_t,$$

即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示.　　　　　　　　　　...........................6 分

假设

$$\beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_t\alpha_t, \qquad ②$$

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t, \qquad ③$$

都是β由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示的表示式．等式③与等式②相减得

$$(k_1-h_1)\alpha_1+(k_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(k_t-h_t)\alpha_t=0. \qquad ④$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是线性无关的，所以由等式④可得

$$k_1-h_1=0,\ k_2-h_2=0,\ \cdots,\ k_t-h_t=0,$$

即$k_1=h_1$，$k_2=h_2$，$\cdots$，$k_t=h_t$．因此，b由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性表示的表示方法是唯一的.　　　　　　　　　　　　………………………10 分

八、（10 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

（1）用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}$　　　　. ………………………2 分

特征方程
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+6)=0,$$

得 A 的特征值为 1,6 和 10.　　　　　　　　　　　………………………4 分

对于 $\lambda=1$，特征方程组 $(\lambda I-A)X=0$ 为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -3 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，由于

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -3 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为 $\xi_1=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，　单位化 $\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda=6$，特征方程组 $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，由于

$$\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -4 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为　　$\xi_2=(1,5,2)^{\mathrm{T}}$,

单位化　　$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,5,2)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda=-6$，特征方程组 $\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ -2 & -10 & -4\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，由于

$$\begin{pmatrix}-6 & -2 & 2\\ -2 & -10 & -4\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以特征向量为　　$\xi_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,

单位化　　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$.　　　　　　　　　　　　………………………6 分

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 经正交变换 $X=QY$，得 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-6y_2^2+6y_3^2$ **……**8 分

（2）二次型不正定。　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………10 分

九、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $AX=b$ 存在两个不同的解. 求 λ,a；

解：已知 $AX=b$ 有两个不同的解，$r(A)=r(A,b)<3$。……………………2 分

又 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………6 分

当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，此时，$AX=b$ 无解,

当 $\lambda=-1$ 时，代入有 $r(A)=r(A,b)$，得 $a=-2$.　　　　………………………10 分

十、(10 分)设 A 为三阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

（1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

解（1）法一：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 由于 α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，从而 α_1,α_2 线性无关，故 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中 l_1,l_2 不全为零（若 l_1,l_2 同时为 0，则 α_3 为 0，由 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 可知 $\alpha_2=0$）.

因为 $A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，所以

$$A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2,$$

又

$$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$$

所以 $-l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = \alpha_2 + l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，即 α_1,α_2 线性相关，矛盾（因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关）．所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………5 分

法二：假设存在 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \qquad （1）$$

用矩阵 A 左乘（1）式两端，并由题设知 $A\alpha_1 = -\alpha_1$，$A\alpha_2 = \alpha_2$ 得：

$$-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0 \qquad （2）$$

（1）减（2）得

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$$

由于 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关，从而 $k_1 = k_3 = 0$．代入（1）式得 $k_2\alpha_2 = 0$，而 α_2 是 A 的特征向量，所以 $\alpha_2 \neq 0$，故 $k_2 = 0$．综上 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　　　　　　　　　　　　　　．…………………………5 分

（2）记 $P = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 可逆，且

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$$

$$= (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即：$AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$　　…………………………10 分