课程编号：A071001　北京理工大学 2005-2006 学年第一学期

数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=0$ 处有极值 2，曲线 $y=f(x)$ 有一拐点 $(-1,4)$，求 a,b,c,d 的值，并指出 $f(0)$ 是极大值还是极小值.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}$.

3. 设 $y=f(\tan x)$，$f'(x)=e^{x^2-2x+2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

4.计算广义积分 $\int_0^1\dfrac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 求极坐标系下由方程 $\rho=\theta$ 所确定的曲线在点 $(\rho,\theta)=(\pi,\pi)$ 处的法线的直角坐标方程.

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\sin x}{1+\cos x}dx$.

3. 设 $f(x)$ 的二阶导函数连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\cos x}{x^2}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

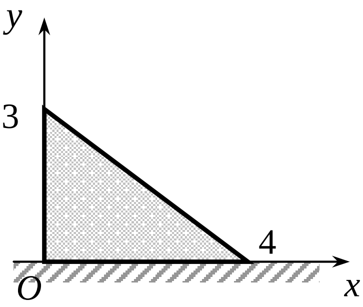
4. 求微分方程 $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$ 的通解.

三.（8 分）设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(\pi)=2$，

$\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin x dx=5$，求 $f(0)$.

四．（8 分）设位于第一象限内的曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 处的切线与两坐标轴及过点 M 平行于 y 轴的直线所围成的梯形面积等于常数 3，且曲线经过点(1,1)，求此曲线的方程.

五. (8 分)一块边长分别为 $3m,4m,5m$，重为 $500kg$ 的直角三角形钢板水平放置在地板上，现将此钢板铅直立起，使其 $4m$ 长的边着地(如图)，设钢板的面密度为常数 λ，求克服重力所作的功.



六.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 满足方程

$y'(x)+3y(x)+2\int_0^x y(x)dx+2\cos x=0$，且 $y(0)=-1$，求 $y(x)$.

七．（7 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明当 $x\neq 0$ 时，

$f(x)>x$.

八. (7 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)+f'(x)>0$，

又设 $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)+f(\dfrac{1}{x})]=0$，$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-f(\dfrac{1}{x})]=1$，求证:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内必有零点;

(2) 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点.

(数学分析 B 期末试题(A 卷)) 参考答案 (2006.1)

一. 1. $f(0)=2$，得 $d=2$，　　---------------------------(1 分)

$f'(0)=(3ax^2+2bx+c)\big|_{x=0}=0$，得 $c=0$，　---------------------------(2 分)

$f''(-1)=(6ax+2b)\big|_{x=-1}=-6a+2b=0$　　--------------------------(3 分)

$f(-1)=-a+b-c+d=-a+b+2=4$，　　--------------------------(4 分)

解得　　$a=1$，　$b=3$，　　---------------------------(5 分)

因为　　$f''(0)=2b=6>0$，　故 $f(0)$ 是极小值.　---------------------------(6 分)

2. $$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{(e^{x^5}-1)5x^4}$$ ----------------------(2 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x^4)}{x^5\cdot 5x^3}$$ ---------------------------------------(4 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{5}.$$ --(6 分)

3. 令　$u=\tan x$，　$u\big|_{x=0}=0$，

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=e^{u^2-2u+2}\frac{1}{\cos^2 x},$$ -------------------------------(5 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e^2.$$ ---(6 分)

4. 令 $t=\sqrt{1-x^2}$，　即 $x^2=1-t^2$，　　-----------------------------------(1 分)

$$\int_0^1\frac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}$$ ---------------------------------------(3 分)

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$ --(4 分)

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$$ --(6 分)

二. 1. $x=\theta\cos\theta$，$y=\theta\sin\theta$， --------------------------------(1 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$ --------------------------------(3 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}=\pi,\quad x\big|_{\theta=\pi}=-\pi,\quad y\big|_{\theta=\pi}=0$$ ----------------------------(5 分)

法线方程为 $y=-\dfrac{1}{\pi}(x+\pi)=-\dfrac{1}{\pi}x-1$. ------------------------------(7 分)

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$ ------------------(1 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$ -----------------------------(2 分)

$$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}+4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 4.$$ --------------------------------(7 分)

3. $$f(x)+\cos x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$$ ------- --(2 分)

由题设，得 $f(0)+1=0$，$f'(0)=0$，$\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{2}=1$，------------------------(5 分)

解得 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=3$. ------------------------(7 分)

4. 方程变成 $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3},$$ ---------------------------(1 分)

令 $\dfrac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，----------------------------(3 分)

方程变成 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{1+u^3}$，$\dfrac{1+u^3}{u^4}du=-\dfrac{dx}{x}$，----------------------------(4 分)

积分得 $$-\frac{1}{3u^3}+\ln|u|=-\ln|x|+C_1,$$ ----------------------------(6 分)

即 $\ln|y|=\dfrac{x^3}{3y^3}+C_1$，$y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$. ----------------------------(7 分)

三. $\int_0^\pi [f''(x)+f(x)]\sin xdx=\int_0^\pi f''(x)\sin xdx-\int_0^\pi f(x)d\cos x$ -------(2 分)

$=\int_0^\pi f''(x)\sin xdx-f(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos xdx$ ----------------------(4 分)

$=\int_0^\pi f''(x)\sin xdx+f(\pi)+f(0)+\int_0^\pi f'(x)d\sin x$

$=\int_0^\pi f''(x)\sin xdx+2+f(0)+f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin xdx$

$=2+f(0)=5$ --------------------------------(7 分)

$\therefore f(0)=3.$ --------------------------------(8 分)

四. (图 1)过 $M(x,y)$ 的切线 $Y-y=y'(X-x)$,

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$, ------------------------------------(2 分)

梯形面积 $A=\dfrac{1}{2}(y+y-xy')x=\dfrac{1}{2}x(2y-xy')=3$,

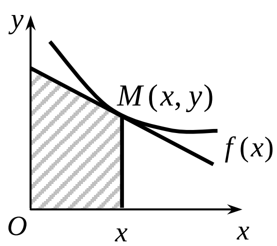
即 $y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{6}{x^2}$, $y(1)=1$, ----------------------------------(5 分)

解得 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}(C+\int-\dfrac{6}{x^2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)=Cx^2+\dfrac{2}{x}$, --------------------------(7 分)

由初始条件, 得 $C+2=1$, $C=-1$,

所求曲线为 $y=-x^2+\dfrac{2}{x}$. -----------------------------------(8 分)

图1



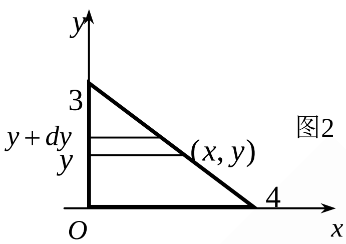


图2

五. (如图 2) $x=4-\dfrac{4}{3}y$, ------------------------------(1 分)

$\rho=\dfrac{500}{\frac{1}{2}\times 3\times 4}=\dfrac{250}{3}(kg/m^2)$, ------------------------------(2 分)

$dW=\rho g\cdot y\cdot xdy=\rho g\cdot y(4-\dfrac{4}{3}y)dy$, ------------------------------(5 分)

$W=\int_0^3\rho g(4y-\dfrac{4}{3}y^2)dy$ --(7 分)

$=6\rho g=500g(J)$. --(8 分)

六. 方程两边对 x 求导，得

$$y''+3y'+2y=2\sin x,$$

$$y(0)=-1,\quad y'(0)=1,$$ ----------------------------------(2 分)

$$r^2+3r+2=0,\quad r_1=-1,\quad r_2=-2,$$ ----------------------------(4 分)

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x},$$ -----------------------------(5 分)

设 $$y^*=A\cos x+B\sin x,$$ -----------------------------(6 分)

代入方程解得 $$A=-\frac{3}{5},\quad B=\frac{1}{5},$$

$$y^*=-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ---------------------------(7 分)

通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ---------------------------(8 分)

由初始条件得 $$C_1=0,\quad C_2=-\frac{2}{5},$$

$$y=-\frac{2}{5}e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$ ------------------------------(10 分)

七. 证 1 由题设，得 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$ ---------------------------(1 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,$$ ---------------------------(2 分)

当 $x\neq 0$， $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2>x.$$ --------------(7 分)

证 2 令 $$F(x)=f(x)-x,$$ ----------------------------------(1 分)

$$F'(x)=f'(x)-1,$$

由题设，得 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$ -----------------------------------(3 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad F'(0)=0,$$ ------------------------------(4 分)

$$F''(x)=f''(x)>0,$$

$F(0)=0$ 是极小值也是最小值，故当 $x\neq 0$，有 $F(x)>0$，即

$$f(x)>x.$$ ------------------------------------(7 分)

八. (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(\frac{1}{x})]=1$，得 $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(\frac{1}{x})-f(x)]=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}[\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)+f(\frac{1}{x})+f(x)-f(\frac{1}{x})]=-\frac{1}{2}<0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}>0$,

故　$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使　$f(\xi)=0$；　------------------------------(4 分)

(2) 令　$F(x)=f(x)e^x$,

若 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$，$\xi_1<\xi_2$，使　$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$,

则　$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$,

因而　$\exists c\in(\xi_1,\xi_2)$,　使　$F'(c)=0$,

但由题设,　$F'(x)=[f'(x)+f(x)]e^x>0$,

矛盾，故 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点.　-----------------------------(7 分)