

北京理工大学《数学分析 B》2006-2007 学年第二学期期中试题

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 设直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$, $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 求 L_1 与 L_2 的夹角 θ .
2. 设 $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} + k\vec{b}$, 其中 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, 问 k 为何值时以 \vec{m} , \vec{n} 为邻边的平行四边形的面积为 9.
3. 求曲线 $x = \sin^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $z = \cos^2 t$ 上 $t = \frac{\pi}{3}$ 所对应的点 M 处的切线的方程.
4. 改变积分 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$ 的积分次序.

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 求函数 $f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 的一阶和二阶偏导数, 并写出 $f(x, y)$ 的二阶麦克劳林公式(带皮亚诺型余项).
2. 计算二重积分 $I = \iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
3. 已知方程 $u + e^u - x^2 y + \ln z = 1$ 确定函数 $u = u(x, y, z)$, 求 $du(1,1,e)$, 并指出在点 $M(1,1,e)$ 处沿哪个方向 $u(x, y, z)$ 增加得最快?
4. 将 $I = \int_0^2 dz \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} z \sqrt{x^2 + y^2} dy$ 化成柱坐标系中的累次积分并计算积分的值.

三. (8 分) 设 $z = f(xe^y, x-y)$, 其中 f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四. (8 分) 计算三重积分 $I = \iiint_V z \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$, 其中 V 是曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

五. (8 分) 已知一无盖长方体水箱的表面积为 $12m^2$, 问长, 宽, 高各为多少时水箱的容积最大?

六. (12 分) 设曲面 $S: z = x^2 + y^2$, 平面 $\pi: 2x + 4y - z = 0$.

(1) 求 S 的与 π 平行的切平面方程;

(2) 求 S 与 π 所围成立体的体积.

七. (6 分) 已知方程 $z = f(x - y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$, 其中 f 和 F 分别有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 且 $F'_y - f' \cdot F'_z \neq 0$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

八. (6 分) 设 D 是由曲线 $y = x^2$, 直线 $x = t$ ($t > 0$) 与 x 轴围成的区域, 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iint_D \arctan(1+y) dx dy}{t(1 - \cos t)}.$$