课程编号：A073003　　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 ________学号_________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，计算行列式 $\left|3\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I}\right|$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩。

二、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\\2&3&4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 满足 $2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\qquad x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(\lambda+2)x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2-\qquad 2x_3=0 \end{cases}$$

问：λ取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷解？并在有无穷多解时求通解。

四、（10 分）已知

$\alpha_1=(-2,1,0,3)^T$， $\alpha_2=(1,-3,2,4)^T$， $\alpha_3=(3,0,2,-1)^T$， $\alpha_4=(2,-2,4,6)^T$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 R^3 的两个基： $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ ，

$\beta_1=(1,2,3)^T$，$\beta_2=(2,3,4)^T$，$\beta_3=(3,4,3)^T$ 。

(1) 求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵;

(2) 求向量$\alpha=(2,0,0)^T$关于基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的坐标。

六、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^T$，把$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 化为欧氏空间$\boldsymbol{R}^3$的标准正交基。

七、（10 分）证明：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。

八、（10 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

九、（10 分）设方程组$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$

(1) 证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，则此方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知 β_1,β_2 是方程组的两个解，其中 $\beta_1=[-1,1,1]^T,\beta_2=[1,1,-1]^T$，写出此方程组的通解。

十、（10 分）α 为 3 维实单位列向量，I 为三阶单位矩阵，令 $B=\alpha\alpha^T$

(1) 证明：$B\neq 0$；

(2) 求 B^2；

(3) 求 B 的相似对角矩阵；

(4) 求 $I-B$ 的秩。