北京理工大学《数学分析 B》

2006-2007 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 设直线 $L:\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{n}$ 在平面 $\pi:3x-2y+z-8=0$ 上，求 a 与 n 的值.

2. 设 $z=xf(\dfrac{y}{x})+\varphi(x^2+y^2)$，其中 f,φ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设 D 是由直线 $y=x$，$y=2x$，$y=1$ 所围成的均匀薄片(面密度为 1)，求 D 对于 y 轴的转动惯量.

4. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，指出 p 在什么范围内取值时级数绝对收敛，p 在什么范围内取值时级数条件收敛，p 在什么范围内取值时级数发散(要说明理由).

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 已知 $\vec{n}$ 是曲面 $x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{2}=5$ 在点 $(1,1,2)$ 处指向 x 增大方向的单位法向量，$u=e^x+\ln(1+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(0,1,1)}$.

2. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于平面 $z=1$ 上方的部分，计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\dfrac{1}{z}dS$.

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dV$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的立体.

4. 求二元函数 $z=x^3+y^2-2xy$ 的极值点与极值.

三. (8 分) 设 $f(x)=\pi-2|x|$，$-\pi\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

四. (8 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3^n n}$ 的收敛域与和函数.

五. (8 分) 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_S 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\quad(0\le z\le 1)$ 的上侧.

六. (8 分) 将 $f(x)=\ln(5-2x)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，确定其收敛域， 并求 $f^{(5)}(1)$ 的值.

七. (10 分) 设 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内不取零值的可微函数，已知

$\varphi(x)(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3})dx+\varphi(x)(x^2+y^2)dy$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

(1) 求 $\varphi(x)$ 满足的微分方程及 $\varphi(x)$ 的表达式； (2)求 $u(x,y)$ 的表达式.

八. (6 分) 设 $t>0$，以 $\Omega(t)$ 表示由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=t$ 围成的有界闭区域. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，又设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2)dxdydz$.

(1) 求证：$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连可导，并求 $F'(t)$ 的表达式；

(2) 若 $\forall t>0$，有 $\dfrac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^t f(x)dx$ ，且 $f(0)=1$，试求 $f(x)$ 的表达式.

参考解答

一. 1. $\{2,1,n\}\cdot\{3,-2,1\}=4+n=0$ ……………………………..(2 分)

$n=-4$ ……………………………..(3 分)

将点 $(a,-1,2)$ 代入平面方程得 $3a-4=0$ ……………………………..(5 分)

$a=\dfrac{4}{3}$ ……………………………..(6 分)

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x})+2x\varphi'(x^2+y^2)$ ……………………………..(3 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})+4xy\varphi''(x^2+y^2)$ ……………………………..(6 分)

3. $I_y=\iint\limits_D x^2dxdy$ ……………………………..(2 分)

$=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}x^2dx$ ……………………………..(4 分)

$=\dfrac{7}{24}\int_0^1 y^3dy=\dfrac{7}{96}$ ……………………………..(6 分)

4. 当 $P>-\dfrac{1}{2}$，有 $\left|(-1)^n\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right|\sim\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$， ……………………………..(1 分)

当 $P>\dfrac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 收敛，原级数绝对收敛 ……………………..(2 分)

当 $-\dfrac{1}{2}<P\le\dfrac{1}{2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 发散，

但当 n 充分大时 $\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 单调减少趋于 0，原级数条件收敛 ……………..(4 分)

当 $p\le-\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^p\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ne 0$，级数发散 ……………………..(6 分)

二. 1. 曲面在点 $(1,1,2)$ 处的法向量为 $\{2x,4y,z\}\big|_{(1,1,2)}=\{2,4,2\}$

$$\vec{n}=\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\}$$ ……………………..(2 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+y^2+z^2} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{1+y^2+z^2}$$ ……………………..(5 分)

在点 $(0,1,1)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{3} \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2}{3}$ ……………………..(6 分)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(0,1,1)}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$ ……………………..(7 分)

2. $$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\sin\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$ ……………………..(3 分)

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^4\varphi d\varphi$$ ……………………..(6 分)

$$=\frac{\pi^2}{4}$$ ……………………..(7 分)

3. $$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dxdy=\frac{2}{z}dxdy$$ ……………………..(2 分)

$$\iint_S\frac{1}{z}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{2}{4-x^2-y^2}dxdy$$ ……………………..(4 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{4-\rho^2}\rho d\rho$$ ……………………..(6 分)

$$=2\pi\ln 4$$ ……………………..(7 分)

4. $$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2y=0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x=0$$ ……………………..(1 分)

解得 $\quad x=y=0 \quad$ 或 $\quad x=y=\frac{2}{3}$ ……………………..(3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

在点 $(0,0)$，$A=0,\ B=-2$，$C=2$

$AC-B^2=-4<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点 ……………………..(5 分)

在点 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$A=4,\ B=-2$，$C=2$

$AC-B^2=4>0$，且 $A>0$，故 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 是极小值点

极小值　$z(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=-\frac{4}{27}$ ……………………………(7 分)

三.　$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)dx=0$ ……………………………(2 分)

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nxdx$ ……………………………(3 分)

$=\frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$ ……………………………(5 分)

$$=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{8}{(2k-1)^2\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\quad(-\pi\le x\le\pi)$ ……………………(8 分)

或　$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx\quad(-\pi\le x\le\pi)$ ……………………(8 分)

四.　令 $t=\frac{x-1}{3}$，　得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$　(1) ……………………(1 分)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\qquad R_t=1$

$t=-1$ 时级数(1)收敛，$t=1$ 时级数(1)发散

级数(1)的收敛域为　$t\in[-1,1)$ …………………………(3 分)

由 $-1\le\frac{x-1}{3}<1$ 得原级数收敛域 $-2\le x<4$ …………………………(4 分)

$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\qquad S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ ……………………………(6 分)

$S(t)=-\ln|1-t|$ …………………………(7 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n\cdot n}=-\ln\left|1-\frac{x-1}{3}\right|$ …………………………(8 分)

五. $$I=\oiint\limits_{S+S_1^-}-\iint\limits_{S_1^-}2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$$ ……………………………..(2 分)

$$=-\iiint\limits_V zdV-\iint\limits_{S_1^-}-z^2dxdy$$ ……………………………..(4 分)

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 zdz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$ ……………………………..(6 分)

$$=-\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{5}{4}\pi$$ ……………………………..(8 分)

六. $$f(x)=\ln(3-2(x-1))=\ln 3+\ln(1-\frac{2}{3}(x-1))$$ ……………………..(2 分)

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{2}{3}(x-1))^n$$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{n\cdot 3^n}(x-1)^n$$ ……………………….(5 分)

由$-1<-\frac{2}{3}(x-1)\le 1$，得收敛域$-\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{2}$ ……………………….(7 分)

由 $\frac{f^{(5)}(1)}{5!}=\frac{-2^5}{5\cdot 3^5}$， 得 $f^{(5)}(1)=-(\frac{2}{3})^5 4!$ ………………………..(8 分)

七. (1) 由$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$， 得

$$\varphi'(x)(x^2+y^2)+2x\varphi(x)=\varphi(x)(2x+x^2+y^2)$$ ……………………..(3 分)

$$\varphi'(x)=\varphi(x)$$ ……………………………..(4 分)

$$\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=dx \qquad \varphi(x)=Ce^x$$ ……………………………..(6 分)

(2) $$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}Ce^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+Ce^x(x^2+y^2)dy+C_1$$ ………………..(7 分)

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y Ce^x(x^2+y^2)dy+C_1$$ ……………………………..(9 分)

$$=Ce^x(x^2y+\frac{y^3}{3})+C_1$$ ……………………………..(10 分)

八. (1) $$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho\int_{\rho^2}^{t}dz$$

$$=2\pi t\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho-2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho^3 d\rho$$ ……………………….(2 分)

$f(\rho^2)\rho$ 与 $f(\rho^2)\rho^3$ 连续，故 $\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$ 与 $\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho^3 d\rho$ 可导，因此 $F(t)$ 可导

$$F'(t)=2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ …………………………..(4 分)

(2) 由 $\frac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^t f(x)dx$ 对 t 求导得

$$2\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho=-e^{-t}-f(t)$$

$$f'(t)+f(t)=e^{-t}$$ …………………………..(5 分)

解得 $f(t)=e^{-t}(t+C)$

由 $f(0)=1$， 得 $C=1$

$$f(x)=e^{-x}(x+1)$$ …………………………..(6 分)

或 (1) $$F(t)=\int_0^t dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$$

$$=2\pi\int_0^t dz\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ …………………………..(2 分)

由于 $f(\rho^2)\rho$ 连续，故 $\int_0^{\sqrt{z}}f(\rho^2)\rho d\rho$ 可导，因此 $F(t)$ 可导

$$F'(t)=2\pi\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho$$ …………………………..(4 分)

(2) 由 $\frac{1}{\pi}F(t)=e^{-t}-\int_0^t f(x)dx$ 对 t 求导得

$$2\int_0^{\sqrt{t}}f(\rho^2)\rho d\rho=-e^{-t}-f(t)$$

$$f'(t)+f(t)=e^{-t}$$ …………………………..(5 分)

解得 $f(t)=e^{-t}(t+C)$

由 $f(0)=1$， 得 $C=1$

$$f(x)=e^{-x}(x+1)$$ …………………………..(6 分)