2010年线性代数A期末考试答案

一、(10分)

解：方程两边同时左乘A，得 $AX+X=AA^*+I$

即 $(A+I)X=(|A|+1)I$

又 $|A|=-2$，故 $(A+I)X=-I$

从而 $X=-(A+I)^{-1}=-\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&\frac{1}{3}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

二、(10分)

解：用初等行变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&-3&p\\q&2&6&3\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&p-2\\0&0&-4+4q&2p-1+q(1-p)\end{bmatrix}$$

由方程组有解，且其导出组 $AX=0$ 的基础解只有一个向量知

$r(A)=r(\hat{A})=2$

于是有 $\begin{cases}-4+4q=0\\2p-1+q(1-p)=0\end{cases}$ 解得 $q=1$，$p=0$

此时，$\hat{A}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-5&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&5&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1+4x_3\\x_2=2-5x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases}$ 故通解为 $X=(-1,2,0)^T+k(4,-5,1)^T$，k为任意常数

三、(10分)

1) 证明：已知矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的维数为4，要证 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $R^{2\times2}$ 的一个基，只需证其线性无关　设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$

则有 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3-k_4=0\\k_1+k_2-k_3+k_4=0\\k_1-k_2+k_3+k_4=0\\k_1-k_2-k_3-k_4=0\end{cases}$ 方程组只有零解 $k_i=0$，$i=1,2,3,4$

故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，为 $R^{2\times2}$ 的一个基

(2) 解：$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$

$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$

$\beta_4=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$

于是有 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$

故所求过渡矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$

(3) 解：法一：令 $\gamma=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4$

则有 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=1\\x_1+x_2-x_3+x_4=2\\x_1-x_2+x_3+x_4=3\\x_1-x_2-x_3-x_4=4\end{cases}$

解之得 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2},0)^T$

法二：γ 在自然基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为

$X=(1,2,3,4)^T$，于是，由坐标变换公式，γ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标

$$Y=A^{-1}X=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$=(\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2},0)^T$$

四、(10分)

解：(1) 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 作为列构造矩阵，再用初等行变换将之化为阶梯形

$$[\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由上可知，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的秩为2，其中任意两个向量都可作为向量组的一个极大无关组。不妨取α_1, α_2

(2) 由(1)知，α_1, α_2为$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的一个基

于是只要将其正交化，单位化即可

正交化，令$\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 + \beta_1 = (1, 2, 1)$

单位化，令$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

η_1, η_2为$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$的一个标准正交基

五，(10分)

解：(1) 初等因子$\lambda+1$，$(\lambda-2)^2$，λ^2对应的Jordan块分别为

$$J_1 = [-1], \quad J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

于是，A的Jordan标准形

$J = diag(J_1, J_2, J_3, J_4)$

(2) 由$A \sim J$知，A与J有相同的特征值

$$J = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

为上三角矩阵，它的对角元就是其全部特征值，故A的特征值为$-1, 2, 2, 0, 0$

六 (10分)

解：根据定义 $\delta(1) = 0$

$\delta(1+x) = 1$

$\delta(1+x+x^2) = 1+2x$

$\delta(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2$

故有 $[\sigma(1), \sigma(1+x), \sigma(1+x+x^2), \sigma(1+x+x^2+x^3)]$

$$=[1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3]\begin{bmatrix}0&1&-1&-1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 σ 在此基下的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&1&-1&-1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

法二：σ 在自然基下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

又自然基到基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故 σ 在基 $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&1&-1&-1\\0&0&2&-1\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

七、证明：若 n 阶矩阵 A 可相似对角化，则存在可逆矩阵 P，使

$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \cdots, \lambda_n)$

或 $AP=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

将 P 按列分块 $P=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 并代入上式得

$A[x_1, x_2, \cdots x_n]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$

即 $[Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n]=[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n]$

从而有 $Ax_i=\lambda_i x_i$，$i=1, 2, \cdots, n$

由P可逆知，$X_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 线性无关

从而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是A的 n个线性无关的特征向量，

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A的n个特征值。

反之，若 n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量，不妨设为 $X_1, X_2, \cdots X_n$，

则存在相应的特征值，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，使得

$AX_i=\lambda_i X_i$，$i=1,2,\cdots n$

此时，令 $P=[X_1, X_2, \cdots, X_n]$

P可逆，且有 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$

即A可相似对角化

八、(10分)

解：(1) 法一：由f的标准形可知，其正惯性指数为2，

故f不正定

法二：由已知条件知道，A的特征值为 1,2,0，故f不正定

(2) 由已知条件知道，A的特征值为 1,2,0，

故 $|A|=1\times 2\times 0=0$

(3) 由已知条件知道 $Q^TAQ=diag(1,2,0)$

于是 $A=Q\,diag(1,2,0)\,Q^T$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

九、(10分)

证明：由 $a_{ij}=A_{ij}$ 及伴随矩阵的定义知 $A^T=A^*$，则有

$|A|=|A^T|=|A^*|=|A|^2$，于是有 $|A|(|A|-1)=0$

又因 $A\neq 0$，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则有

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0$

故 $|A| = 1$　于是 $AA^T = AA^* = |A|I = I$

从而 A 为正交矩阵

十、(10分)

解：(1) 据已知条件，有

$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3]$

$= [-\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3, 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_1 + 3\alpha_3]$

$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

记 $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$

则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知 P_1 可逆，且 $P_1^{-1}AP_1 = B$　即 $A \sim B$

求 B 的特征值 $|\lambda I - B| = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

故 B 的特征值为 $1, 2, 3$，从而 A 的特征值也为 $1, 2, 3$

(2) 由 $(I - B)X = 0$，解得基础解系 $X_1 = (1,1,1)^T$

由 $(2I - B)X = 0$，解得基础解系 $X_2 = (2,3,3)^T$

由 $(3I - B)X = 0$，解得基础解系 $X_3 = (1,3,4)^T$

即特征值 $1, 2, 3$ 对应的特征向量分别为 X_1, X_2, X_3

令 $P_2 = [X_1, X_2, X_3]$，则有

$P_2^{-1}BP_2 = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$，于是令

$$P = P_1 P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3]$$

则有 $P^{-1}AP = (P_1P_2)^{-1}A(P_1P_2) = P_2^{-1}BP_2 = diag(1,2,3)$

所以矩阵A属于特征值1,2,3的特征向量分别为

$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ ，$k_2(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3)$，

$k_3(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3)$，$k_i \neq 0$，$i=1,2,3$