一、填空题（每空3分，共18分）

1. 为提高计算精度，当正数x充分大时，应将$\ln(x-\sqrt{x^2-1})$改写为______________。

2. 设$f(0)=0, f(1)=16, f(2)=46,$ 则 $f[0,1]=$ ______, $f[0,1,2]=$ ______, $f(x)$的二次Newton插值多项式为________________________。

3. 解线性方程组$AX=b$的迭代方法$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$ 收敛的充要条件是__________。

4. 记$h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\cdots,n$，计算$\int_a^b f(x)dx$的复化梯形公式为_________。

二、（10分）当$x=1,-1,2$时，$f(x)=0,-3,4$，写出$f(x)$的二次Lagrange插值多项式。

三、（10分）设$\varphi=span\{1,x\}$, $x\in[0,1]$，求x^2的最佳平方逼近多项式。

四、（12分）确定下列求积公式的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：$\int_0^1 f(x)dx\approx A_0 f(0)+A_1 f(1)+B_0 f'(0).$

五、（10分） 设方程组$Ax=b$的系数矩阵为$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，判断解此方程组的Jacobi迭代法和Gauss - Seidel 迭代法的敛散性。

六、（10分）试就函数$f(x)=\sqrt{x}(x>0)$讨论Newton 法的收敛性和收敛速度。

七、（10分）用列选主元三角分解法(LU)求下列线性方程组的解：

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 9\\ 3\end{bmatrix}$$

八、（10分）证明：若矩阵A的范数小于1，即$\|A\|<1$，则$I-A$非奇异，且

$$\|(I-A)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|A\|}$$

九、（10分）用$Euler$预估—校正法求初值问题$\begin{cases}y'=x+y^2, x>0,\\ y(0)=1,\end{cases}$ 的解函数$y(x)$在$x=0.1$的近似值(取步长$h=0.1$，小数点后保留四位)。

《数值分析》模拟题一参考答案

一、填空题（每空3分，共18分）

1. $-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$。 2. 16，7，$16x+7x(x-1)$。3. $\rho(B)<1$。 4. $\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)]$。

二、（10分）解： 由 Lagrange 插值公式得：

$$L_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(-2)(-3)}(-3)+\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}\times 4=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}。$$

三、（12分）解： 因为

$$(1,1)=\int_0^1 1dx=1,\quad (1,x)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad (x,x)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\quad (x^2,1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},$$

$$(x^2,x)=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

所以得方程组 $\begin{cases} c_1+\frac{1}{2}c_2=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2=\frac{1}{4} \end{cases}$， 解得：$c_1=-\frac{1}{6},\quad c_2=1$。

从而得 x^2 的最佳平方逼近多项式为：$S(x)=-\frac{1}{6}+x$。

四、（10分）解： 令原式对 $f(x)=1,x,x^2$ 准确成立，可得方程组：

$$\begin{cases} A_0+A_1=1 \\ A_1+B_0=\frac{1}{2} \\ A_1=\frac{1}{3} \end{cases}$$

， 解之得：$A_0=\frac{2}{3},A_1=\frac{1}{3},B_0=\frac{1}{6}$。故相应的求积公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{2}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)+\frac{1}{6}f'(0).$$

将 $f(x)=x^3$ 代入上述公式可得，$\frac{1}{4}$=左边$\neq$右边$=\frac{1}{3}$，故它仅有二阶精度。

五、（10分）解： 两种迭代法的迭代矩阵分别为

$$B_1=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}\qquad B_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&2&-1\\0&8&-6\end{bmatrix}$$

分别解得其最大特征根为 $\rho(B_1)=0<1,\quad \rho(B_2)=2(1+\sqrt{2})>1$，

从而知 Jacobi 迭代法收敛，Gauss-Seidel 迭代法发散。

六、（10分）解： 由于 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

从而：$\left|\varphi'(x)\right|=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4x}}=1$，可知 Newton 迭代法发散 。

七、（10分）解：由紧凑格式的列主元高斯消去法可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 9 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 9 \\ \frac{2}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{59}{7} \end{bmatrix}$$

从而得等价的方程组为：$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ \frac{14}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = -1 \\ \frac{2}{7}x_3 = \frac{59}{7} \end{cases}$ 解得 $x_1 = -\frac{11}{2}, x_2 = 4, x_3 = \frac{59}{2}$。

八、（10分）证明：由 $\|A\| < 1$ 可知，1不是矩阵 A 的特征值，故 $\det(I-A) \neq 0$，因此，$I-A$ 非奇异。

再由 $(I-A)(I-A)^{-1} = I$ 可得，$(I-A)^{-1} = I + (I-A)^{-1}A$，故

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \|I\| + \|(I-A)^{-1}\|\|A\|$$

又 $\|A\| < 1$，因此有 $\|(I-A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}$。

九、（10分）解：预估校正格式为

$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = y_k + h(x_k + y_k^2) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(x_k + y_k^2 + x_{k+1} + \tilde{y}_{k+1}) \end{cases}$ 由此即得 $\begin{array}{l} \tilde{y}_1 = 1 + 0.1 = 1.1 \\ y_1 = 1 + 0.05(1 + 0.1 + 1.1^2) \approx 1.1155 \end{array}$

一、填空题（每空3分，共24分）

1. 设 $l_i(x)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是 n 次 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) =$ ___；

$l_i(x_j) =$ ____。

2. 已知 $\pi = 3.14159265\cdots$，若取 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似值，则它有______位有效数字；若要使其近似值 π^* 的相对误差限不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，则 π^* 应取______位有效数字。

3. 4个节点的牛顿-柯特斯求积公式的代数精度为________；4个节点的插值型求积公式最高代数精度为_________。

4. 解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ 是__　　______阶方法。

5. 若用复化梯形公式计算积分 $\int_0^2 2x^2 dx$，区间 $[0,2]$ 应等分为 $n =$ _____才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$。

二、计算题（每小题9分，共18分）

1. 求满足$P(x_j)=f(x_j)$ $(j=0,1,2)$及$P'(x_1)=f'(x_1)$的插值多项式及其余项表达式。

2. 设$f''(x)$在$[0,1]$存在，给定求积节点$x_0=\dfrac{1}{4}$，$x_1=\dfrac{3}{4}$，试推出计算积分$\int_0^1 f(x)dx$的插值型求积公式，并写出它的截断误差。

三、（8 分） 设$\varphi=span\{1,x\}$，$x\in[0,1]$，求函数$f(x)=x^2$最佳一致逼近多项式，并求最佳逼近值。

四、（10 分） 对$\int_0^3 f(x)dx$构造一个至少具有 3 次代数精度的求积公式。

四、（10 分） 对$\int_0^3 f(x)dx$构造一个至少具有 3 次代数精度的求积公式。

五、（10 分） 设方程组$Ax=b$的系数矩阵为$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，判断解此方程组的Jacobi迭代法和Gauss - Seidel迭代法的敛散性。

六、（10 分） 设$f(x)=(x^3-a)^2$，写出解$f(x)=0$的牛顿迭代格式，并证明此迭代格式是线性收敛的。

七、（10 分） 用列选主元三角分解法(LU)求下列线性方程组的解

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 9\\ 3\end{bmatrix}$$

八、（10 分） 证明对任意的参数t，下列龙格-库塔公式是二阶的：

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(K_2+K_3);\\ K_1=f(x_n+y_n);\\ K_2=f(x_n+th,y_n+fhK_1);\\ K_3=f(x_n+(1-t)h,y_n+(1-t)hK_1).\end{cases}$$

1. 1； $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j.\end{cases}$ 2. 7， 4. 3. 3, 7. 4. 2. 5. 400.

二、（每小题10分，共20分）

1. 解： 由给定条件，可确定一个不超过 3 次的插值多项式。由于此多项式过

$$P(x_j)=f(x_j)\ (j=0,1,2),$$

故其形式为

$$P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

其中 A 为待定系数，可由条件 $P'(x_1)=f'(x_1)$ 确定，通过计算得

$$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$ （5 分）

设余项 $R(x)=f(x)-P(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$，其中 $k(x)$ 为待定系数。反复利用罗尔定理，

可求得 $k(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$，故 $R(x)=f(x)-P(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$，其中 ξ 位于 x_0， x_1 ，

x_2 和 x 所界定的范围内。 （10 分）

---

2. 解：因所求的公式是插值型的，故其求积系数可表示为

$$A_0=\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1\frac{(x-\frac{3}{4}))}{(x_0-x_1)}dx=\frac{1}{2},\quad A_1=\int_0^1 l_1(x)dx=-\int_0^1\frac{(x-\frac{1}{4}))}{(x_0-x_1)}dx=\frac{1}{2}$$

故求积公式为 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\right]$ （5 分）

该求积公式的截断误差为

$$R(f)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})\right]=\int_0^1\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)dx$$

其中 $\xi\in(0,1)$ 并依赖于 x。 （10 分）

三、（8 分）解：（1）作变量代换 $x=t+1$， 则当 $x\in[0,2]$ 时， $t\in[-1,1]$。

令 $g(t)=f(t+1)=(t+1)^2=t^2+2t+1$ ， 则 $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上 的 一 次 最 佳 一 致 逼 近 多 项 式 为

$P_1(t)=g(t)-2^{1-2}T_2(t)=g(t)-\frac{1}{2}(2t^2-1)=2t+\frac{3}{2}$，故 $f(x)$ 在[0,2]上的一次最佳一致逼近多项式为：

$$P_1(x-1)=2(x-1)+\frac{3}{2}=2x-\frac{1}{2}\ ，$$

其最佳逼近值为： $\|f(x)-P_1(x-1)\|_\infty=\|g(t)-P_1(t)\|_\infty=\|2^{1-2}T_2(t)\|_\infty=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 。

四、（10分）解：具有 4 个节点的插值型求积公式，至少有 3 次代数精度。

如果在 $[0,3]$ 上取节点为 0，1，2，3，则插值型求积公式为：

$$\int_0^3 f(x)dx\approx A_0 f(0)+A_1 f(1)+A_2 f(2)+A_3 f(3)$$

下面求 $A_i\ \ (i=0,1,2,3)$

$$A_0=\int_0^3 l_0(x)dx=\int_0^3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}dx=\frac{3}{8}$$

同理可求得

$$A\ =\frac{9}{8},\quad A_2=\frac{9}{8},\quad A_3=\frac{3}{8}\ （8分）$$

即有 $\int_0^3 f(x)dx\approx\frac{3}{8}f(0)+\frac{9}{8}f(1)+\frac{9}{8}f(2)+\frac{3}{8}f(3)$，且该公式具有 3 次代数精度。

五、（10分）解：两种迭代法的迭代矩阵分别为

$$B_1=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&2&-2\\1&0&1\\2&2&0\end{bmatrix}\qquad B_2=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&2&-1\\0&8&-6\end{bmatrix}\qquad （5分）$$

分别解得其最大特征根为 $\rho(B_1)=0<1,\quad \rho(B_2)=2(1+\sqrt{2})>1$，（7分）

从而知 Jacobi 迭代法收敛，Gauss-Seidel 迭代法发散。（10分）

六、（10分）解：因 $f(x)=(x^3-a)^2$，故 $f'(x)=6x^2(x^3-a)$，由牛顿迭代公式得下面的迭代格式：

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{6}+\frac{a}{6x_n^2},\qquad n=0,1,\cdots\qquad （4分）$$

因迭代函数 $\varphi(x)=\frac{x}{6}+\frac{a}{6x^2}$，而 $\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{a}{3}x^{-3}$，又 $x^*=\sqrt[3]{a}$ 则

$\varphi'(\sqrt[3]{a})=\frac{5}{6}-\frac{a}{3}\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-3}=\frac{1}{2}\neq 0$ ，故此迭代格式是线性收敛的。（10分）

七、（10分）解：由紧凑格式的列主元高斯消去法可得

$$\begin{bmatrix}2&4&0&5\\3&-1&1&9\\-2&-2&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-1&1&9\\\frac{2}{3}&\frac{14}{3}&-\frac{2}{3}&-1\\-\frac{2}{3}&-\frac{4}{7}&\frac{2}{7}&\frac{59}{7}\end{bmatrix}$$

从而得等价的方程组为：$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=9\\\frac{14}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3=-1\\\frac{2}{7}x_3=\frac{59}{7}\end{cases}$ 解得 $x_1=-\frac{11}{2},x_2=4,x_3=\frac{59}{2}$。

八、（10分）证明： 设 $y_n = f(x_n)$，又 $y'(x) = f(x,y)$ 则

$$y'' = f_x'(x,y) + f_y'(x,y)f(x,y) \qquad （3 分）$$

又 $K_2 = y'(x_n) + thy''(x_n) + O(h^2)$，$K_3 = y'(x_n) + (1-t)hy''(x_n) + O(h^2)$，

所以 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$，

而 $y(x_{n+1}) = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$，得局部截断误差为 $R_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = O(h^3)$

故所给的公式对任意的参数 t 是二阶的。 （10 分）

一、填空题（每空 5 分，共 20 分）

1. 设 $x > 0$，其相对误差为 δ，则 $\ln x$ 的误差为______。

2. $f(x) \in C[a,b]$，则在区间 $[a,b]$ 上其零次最佳一致逼近多项式为______。

3. 设 $x_i\ (i = 0,1,2,3,4,5)$ 为互异节点，$l_i(x)$ 为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数，

   则 $\sum_{i=0}^{5}(x_i^5 + 2)l_i(0)$= ______ ；$\sum_{i=0}^{5}(3x_i^5 + x_i^3 + 1)l_i(x)$= ______ 。

二、（10 分）用插值基函数的方法求在插值节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上满足

$y_j = f(x_j),\quad m_j = f'(x_j),\quad j = 0,\dots n$ 的插值多项式。

三、（10 分）求 x^2 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式（其中内积为

$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$）。

四、（10 分）给定求积公式 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$，求出求积系数，

使得代数精度尽可能高，并指明代数精度。

五、（15 分） 写出常微分方程数值解法的梯形方法公式，推导其局部截断误差，并判

断该方法的阶数。

六、（15 分） 证明牛顿迭代法中 $\lim_{k\to\infty}\frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$，其中 x^* 是方程

$f(x) = 0$ 的单根。

七、（10 分）用直接 LU 分解方法解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+3x_2+2x_3=6 \\ x_1+2x_2+2x_3=5 \end{cases}$。

八、（10 分）写出计算线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=5 \\ -x_1+3x_2=-1 \\ 2x_1+7x_3=2 \end{cases}$ 的 Gauss-Seidel 迭代格式，并分析敛散性。

一、**解**：1. δ；　2. $\dfrac{\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)+\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)}{2}$；　3. 2；$3x^5+x^3+1$

二、**解**：设满足条件的多项式为 $H_{2n+1}(x)$，则用插值基函数写为

$H_{2n+1}(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}[y_j\cdot\alpha_j(x)+m_j\cdot\beta_j(x)]$，其中基函数满足条件：

$$\begin{cases} \alpha_j(x_k)=\delta_{jk} & \alpha_j'(x_k)=0 \\ \beta_j(x_k)=0 & \beta_j'(x_k)=\delta_{jk} \end{cases} j,k=0,1,\ldots n,$$

又 Lagrange 基函数为 $l_j(x)=\prod\limits_{k=0,k\neq j}^{n}\dfrac{x-x_k}{x_j-x_k}$，故设 $\alpha_j(x)=(ax+b)\cdot l_j^2(x)$，由基函数条件

知 $\begin{cases} \alpha_j(x_j)=(ax_j+b)l_j^2(x_j)=1 \\ \alpha_j'(x_j)=l_j'(x_j)[al_j(x_j)+2(ax_j+b)l_j'(x_j)]=0 \end{cases}$，故 $\begin{cases} a=-2l_j'(x_j) \\ b=1+2x_jl_j'(x_j) \end{cases}$，即

$\alpha_j(x)=[1-2(x-x_j)\sum\limits_{k=0,k\neq j}^{n}\dfrac{1}{x_j-x_k}]l_j^2(x)$。　　（5 分）

同理可得 $\beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x)$。　　（10 分）

三、**解**：设一次最佳平方逼近多项式为 $P_1(x)=c_0+c_1x$，则满足

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (x^2,1) \\ (x^2,x) \end{bmatrix} \text{即} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$　　（5 分）

解之得 $c_0=-\dfrac{1}{6},\quad c_1=1$，最佳逼近为 $P_1(x)=-\dfrac{1}{6}+x$。　　（10 分）

四、**解**：令 $f(x)=1,x,x^2$，代入求积公式两端，得

$$
\begin{cases}
A_{-1}+A_0+A_1=2h \\
A_{-1}(-h)+A_{-1}(h)=0 \\
A_{-1}(-h)^2+A_{-1}(h)^2=\dfrac{2h^3}{3}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A_{-1}=\dfrac{1}{3}h \\
A_0=\dfrac{4}{3}h \\
A_1=\dfrac{1}{3}h
\end{cases}
$$ （7 分）

令 $f(x)=x^3$ 得公式精确成立，但是 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故代数精度为 3。 （10 分）

五、解： 梯形方法公式 $y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$， （5 分）

其局部截断误差为 $T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

$$=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[y'(x_n)+y'(x_n+h)]$$

$$=-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)+O(h^4)$$

由此可知，该方法为 2 阶的。 （15 分）

六、证明： $x_k=x_{k-1}-\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, x_k-x_{k-1}=-\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$，

六、证明： $x_k=x_{k-1}-\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, x_k-x_{k-1}=-\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$，

$$\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2})^2},$$

$f(x_{k-1})=f(x_{k-2})+f'(x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-2})+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2$，其中 ξ 位于 x_{k-1} 与 x_{k-2} 之间， （3 分）

又由 $x_{k-1}-x_{k-2}=-\dfrac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}$ 有 $f(x_{k-1})=\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2$ （8 分）

故有 $\dfrac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\dfrac{f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2}{2f'(x_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=\dfrac{-f''(\xi)}{2f'(x_{k-1})}$， 即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{\left(x_{k-1}-x_{k-2}\right)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$ （15 分）

七、解：先求系数矩阵 A 的 LU 分解：$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\&u_{22}&u_{23}\\&&u_{33}\end{bmatrix}$，

对 k=1，由公式 $u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj},\ j=k,k+1,\ldots n$ 得 $u_{11}=2,u_{12}=1,u_{13}=1$，

又由 $l_{ik}=(a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk})/u_{kk},\ i=k+1,\ldots n$ 得 $l_{21}=l_{31}=1/2$。

同理 k=2, 可得 $u_{22}=2.5,u_{23}=1.5,l_{32}=0.6$，当 k=3 时，$u_{33}=0.6$。

即 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\0.5&1&\\0.5&0.6&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\&2.5&1.5\\&&0.6\end{bmatrix}$ （5 分）

由 $\begin{cases}y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k, & i=1,\ldots n\\ x_i=(y_i-\sum_{k=i+1}^{i-1}u_{ik}x_k)/u_{ii}, & i=n,n-1,\ldots,1\end{cases}$ 得 $y=(4,4,0.6)^T,\ x=(1,1,1)^T$。 （10 分）

八、解：由 Gauss-Seidel 迭代公式 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=5+2x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}\\ x_2^{(k+1)}=(-1+2x_1^{(k+1)})/3,\\ x_3^{(k+1)}=(2-2x_1^{(k+1)})/7\end{cases}$ （5 分）

其迭代矩阵的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=26/21$，$\rho(G)=26/21>1$，故发散。 （10 分）

一、填空题（每空 4 分，共 24 分）

1. 若 $f(x)=x^7+x^3+1$，则 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=$ ______ ；$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=$ ______。

2. $f(x)=9x^5+7$，$x_i=\frac{1}{2}i$，其中 $i=0,1,2,\cdots$，则 $\Delta^6 f_0=$ ______ ；$\Delta^5 f_2=$ ______。

3. 形如 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 的插值型求积公式，其代数精度至少可达 ______ 阶；至多只能达 ______阶。

二、（6 分）求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$，使他满足 $P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$p(2)=1$。

三、（10 分）求 e^x 在区间 $[0,1]$ 上一次最佳一致逼近多项式。

四、（10 分） 令 $T_n{}^*(x)=T_n(2x-1)\ \ x\in[0,1]$，其中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式。证明 $\{T_n{}^*(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

五、（10 分）设函数 $f(x)\in C^2[a,b]$，写出计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的中矩形公式并估计误差。

六、（10 分）设有显式线性两步法 $y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+h(\beta_0 f_n+\beta_1 f_{n-1})$，其中 $f_n=f(x_n,y_n), f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})$，试确定参数 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$，使得该公式为三阶格式。

七、(10 分） 设 $a>0$，用牛顿法求 $\sqrt{a}$，并证明得到的迭代序列收敛到 $\sqrt{a}$。

八、(10 分） 用 Doolittle 方法解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4\\x_1+3x_2+2x_3=6\\x_1+2x_2+2x_3=5\end{cases}$

九、(10 分）设线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a&1&3\\1&a&2\\-3&2&a\end{bmatrix}$，试求能使 Jacobi 方法收敛的 a 取值范围。

1)1；0。 2) 0；$\dfrac{135}{4}$。 3) n；$2n+1$。

二、解：由 $P_3(0)=P_3^{'}(0)=0$，$P_3(1)=P_3^{'}(1)=1$，依两点三次 Hermite 插值公式可得

$$P_3(x)=x^2(2-x) \qquad (4分)$$

再设 $P(x)=P_3(x)+Ax^2(x-1)^2$ 由 $p(2)=1$，得 $A=\dfrac{1}{4}$，

故 $P(x)=x^2(2-x)+\dfrac{1}{4}x^2(x-1)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)^2$。 (6 分)

三、**解**：设 e^x 在区间 $[0,1]$ 上最佳一次一致逼近多项式为 $P(x)=a_0+a_1x$。

于由 e^x 的二阶导数在 $(0,1)$ 内保号，区间 $[0,1]$ 的两个端点为偏差点，故偏差点 $x_0=0, x_2=1$。设另外一个偏差点为 x_1 且满足 $(e^x-a_0-a_1x)'=e^x-a_1=0$，即 $e^{x_1}=a_1 \Rightarrow x_1=\ln(e-1)$。 (5 分)

由交错点组定义知：$e^0-a_0-a_1\cdot 0=e^1-a_0-a_1\cdot 1 \Rightarrow a_1=e-1$。由偏差点性质 $e^0-a_0-a_1\cdot 0=-(e^{x_1}-a_0-a_1\cdot x_1)$，故 $a_0=\dfrac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$。所求最佳逼近多项式为 $P(x)=(e-1)x+\dfrac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$。 (10 分)

四、 证：$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \quad x\in[-1,1]$，则

$$\int_0^1 \frac{T_n^*(x)T_m^*(x)}{\sqrt{x-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{\cos(n\arccos(2x-1))\cos(m\arccos(2x-1))}{\sqrt{x-x^2}}dx \quad （5 分）$$

令 $2x-1=\cos\theta \quad \theta\in[0,\pi]$，则原式化为

$$\int_0^\pi \frac{2\cos n\theta\cos m\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{2}d\theta=\int_0^\pi \cos n\theta\cos m\theta d\theta=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m=n\neq 0 \\ \pi & m=n=0 \end{cases} \quad （10 分）$$

五、 解：计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$，　（3 分）

令 $f(x)$ 在点 $x=\frac{a+b}{2}$ Taylor 展开，得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3 \quad \eta\in(a,b) \quad （10 分）$$

六、 解：由 Taylor 展开式得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2+\frac{y'''(x_n)}{3!}h^3+O(h^4),$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-y'(x_n)h+\frac{y''(x_n)}{2!}h^2-\frac{y'''(x_n)}{3!}h^3+O(h^4),$$

$$f_n=f(x_n,y_n)=y'(x_n)$$

$$f_{n-1}=f(x_{n-1},y_{n-1})=y'(x_{n-1})=y'(x_n)-y''(x_n)h+\frac{y'''(x_n)}{2!}h^2+O(h^3) \quad （6$$

两边对比系数，得方程 $\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1=1 \\ -\alpha_1+\beta_0+\beta_1=1 \\ \dfrac{\alpha_1}{2}-\beta_1=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\alpha_1}{6}+\dfrac{\beta_1}{2}=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=-4 \\ \alpha_1=5 \\ \beta_0=4 \\ \beta_1=2 \end{cases}$　（1

七、 解：设 $f(x)=x^2-a$，则 $f'(x)=2x$。由牛顿法得 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$。

即 $x_{k+1}=(x_k+a/x_k)/2$，则对 $\forall x_0>0$，当 $0<x_0<\sqrt{a}$ 时，

$x_1-\sqrt{a}=\dfrac{x_0+a/x_0}{2}-\sqrt{a}=\dfrac{(x_0-\sqrt{a})^2}{2x_0}>0$，即 $x_1>\sqrt{a}$。（5分）

同理，$\forall x_k>\sqrt{a}$，可证 $x_{k+1}>\sqrt{a}$。又 $x_{k+1}-x_k=\dfrac{a-x_k^2}{2x_k}<0$，即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是单调有界数列，

故有极限，设为 x^*，则牛顿法公式中令 $k\to\infty$ 得 $x^*=\sqrt{a}$。（10分）

八、 解：先求系数矩阵 A 的 LU 分解：$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\&u_{22}&u_{23}\\&&u_{33}\end{bmatrix}$，

对 **k=1**，由公式 $u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj},\ j=k,k+1,\ldots n$ 得 $u_{11}=2,u_{12}=1,u_{13}=1$，

又由 $l_{ik}=(a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk})/u_{kk},\ i=k+1,\ldots n$ 得 $l_{21}=l_{31}=1/2$

同理 k=2, 可得 $u_{22}=2.5,u_{23}=1.5,l_{32}=0.6$，当 k=3 时，$u_{33}=0.6$。

即 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\0.5&1&\\0.5&0.6&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\&2.5&1.5\\&&0.6\end{bmatrix}$（5分）

由 $\begin{cases}y_i=b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k, & i=1,\ldots n\\ x_i=(y_i-\sum_{k=i+1}^{i-1}u_{ik}x_k)/u_{ii}, & i=n,n-1,\ldots,1\end{cases}$ 得 $y=(4,4,0.6)^T,x=(1,1,1)^T$。（10分）

九、 解：当 $a\neq0$ 时，Jacobi 迭代矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0&-\dfrac{1}{a}&-\dfrac{3}{a}\\-\dfrac{1}{a}&0&-\dfrac{2}{a}\\\dfrac{3}{a}&-\dfrac{2}{a}&0\end{bmatrix}$$（4分）

由 $|\lambda I-B|=0$ 得 $\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm\dfrac{2}{|a|}$，故 $\rho(B)=\dfrac{2}{|a|}$，由 $\rho(B)<1$ 得 $|a|>2$。（10分）

1．要使 $\sqrt{39}$ 的近似值的相对误差限不超过10^{-3}，至少应取多少位有效数字？

2．设 $y_n = 2^n$，求 $\delta^{10} y_n$。

3．设方程 $f(x)=0$ 在$[0,1]$上有且仅有一个实根，若用二分法求解，至少经多少次二分后求得的近似根误差不大于 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$？

4．设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，求 $\rho(\mathbf{A})$ 和 $cond(\mathbf{A})_2$。

5．用辛浦生公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 的近似值(取 $\sqrt{e}=1.6487$， $e=2.7183$)。

二、(15分）当 $x=0,2,3,5$ 时， $f(x)=1,3,2,5$，用插值基函数法求 $f(x)$ 的拉格朗日三次插值多项式。

三、(14分）设 $\varphi=\{x^{100},x^{101}\}, \rho(x)=1$, 在 φ 上求 $f(x)=x^2\in C[0,1]$ 的最佳平方逼近多项式，并估计平方误差。

四、(14分）用改进的欧拉方法解下列初值问题，计算到 $y(0.2)$ 的近似值（取步长 $h=0.1$）：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=x^2+x-y\ (0<x<1) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

五、(12分）应用牛顿法于方程 $f(x)=x^n-a=0(a\neq 0)$，写出求 $\sqrt[n]{a}$ 的牛顿迭代公式，并求 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})\Big/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$。

六、(20分）给定方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{pmatrix}$， $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

1．求单位下三角阵 $\mathbf{L}$ 和上三角阵 $\mathbf{U}$，使得 $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$，并求解该方程组；

2．若用雅可比迭代法解上述方程组，是否收敛？

1.（5 分）因为 $\sqrt{39}=6.2\cdots(m=1)$，令 $\frac{1}{2\times 6}\times 10^{-(n-1)}\le 0.001$ 得 $n\ge 3$，所以至少取 3 位有效数字。

2.（5 分）$\delta y_n = y_{n+\frac{1}{2}} - y_{n-\frac{1}{2}} = 2^{n+\frac{1}{2}} - 2^{n-\frac{1}{2}} = 2^{n-\frac{1}{2}}$，

$\delta^2 y_n = 2^{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - 2^{n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$，所以 $\delta^{10} y_n = 2^{n-5}$。

3.（5 分）令 $\left|x^* - x_k\right| = (b-a)/2^{k+1} = (1-0)/2^{k+1} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$，得 $k\ge 14$，所以至少经过 14 次二分。

4.（5 分）令 $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$，得 $\lambda_1=6, \lambda_2=1$，所以 $\rho(\mathbf{A})=6, Cond(\mathbf{A})_2=6$。

5.（5 分）$S=\frac{b-a}{4}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\frac{1-0}{6}[f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)]$

$=\frac{1}{6}[e^0+4e^{-0.5}+e^{-1}]\approx 0.6323$ 。

二、(15 分)解：

$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}=-\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5)$；（3 分）

$l_1(x)=\frac{x(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}=\frac{1}{6}x(x-3)(x-5)$；（3 分）

$l_2(x)=\frac{x(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(2-5)}=-\frac{1}{6}x(x-2)(x-5)$；

$l_3(x)=\frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}=\frac{1}{30}x(x-2)(x-3)$，

所以 $L_3(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+y_3l_3(x)=l_0(x)+3l_1(x)+2l_2(x)+5l_3(x)$

$=(9x^3-65x^2+124x+30)/30$。

三、（14 分）解：

令 $p_1(x)=a_0x^{100}+a_1x^{101}$， $\rho(x)=1$， $f(x)=x^2$，

则 $d_0=\int_0^1\varphi_0 f(x)dx=\int_0^1 x^2x^{100}dx=1/103,\ d_1=\int_0^1\varphi_1 f(x)dx=\int_0^1 x^2x^{101}dx=1/104,$

$\int_0^1\varphi_0\varphi_0dx=\int_0^1 x^{200}dx=1/201,\ \int_0^1\varphi_0\varphi_1dx=1/202,\ \int_0^1\varphi_1\varphi_1dx=1/203$

有 $\begin{pmatrix} 1/201 & 1/202 \\ 1/202 & 1/203 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/103 \\ 1/104 \end{pmatrix}$，得 $a_0 = 373.7015,\quad a_1 = -373.5647$，

所以 $p_1(x) = 373.7015x^{100} - 373.5647x^{101}$。

平方误差：$\|\delta\|_2^2 = \|f\|_2^2 - a_0 d_0 - a_1 d_1$

$$= \frac{1}{5} - 373.7015 \times \frac{1}{103} + 373.5647 \times \frac{1}{104} \approx 0.1638。$$

四、（14分）解：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

当 $x = 0$ 时，$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ f(x_0, y_0) = 0$

当 $x_1 = 0.1$ 时，$y(0.1) \approx y_1 = y_0 + \frac{0.1}{2}[0 + f(x_1, y_0 + h \times 0)]$

$$= 0 + 0.05f(x_1, 0) = 0.05(0.1^2 + 0.1) = 0.0055$$

当 $x_2 = 0.2$ 时，$f(x_1, y_1) = x_1^2 + x_1 - y_1 = 0.1^2 + 0.1 - 0.0055 = 0.1045$，

$$y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.0055 + 0.1 \times 0.1045 = 0.01595，$$

$$y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.0055 + 0.1 \times 0.1045 = 0.01595，$$

$$y(0.2) \approx y_2 = y_1 + [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1 + hf(x_1, y_1))]$$

$$= 0.0055 + 0.05[0.1045 + f(0.2, 0.01595)]$$

$$= 0.0055 + 0.05[0.1045 + 0.2^2 + 0.2 - 0.01595] \approx 0.0219。$$

五、（12分）解：

因为 $f'(x) = nx^{n-1}$， 所以求 $\sqrt[n]{a}$ 的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{(n-1)x_k^n + a}{nx_k^{n-1}}\ (k = 0, 1, 2, \cdots)，$$

又因为 $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x) = \dfrac{n-1}{n}x + \dfrac{a}{nx^{n-1}}$，

则有 $\varphi'(x) = \dfrac{n-1}{n} - \dfrac{(n-1)a}{nx^n}$， $\varphi''(x) = \dfrac{(n-1)a}{x^{n+1}}$，

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a} - x_{k+1})\big/(\sqrt[n]{a} - x_k)^2 = -\lim\limits_{k\to\infty} e_{k+1}\big/e_k^2 = -\dfrac{\varphi''(x^*)}{2} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(n-1)a}{(\sqrt[n]{a})^{n+1}} = -\dfrac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$。

1. 令 $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$， 由 $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ 得：

（i） $u_{11}=1$，$u_{12}=2$，$u_{13}=6$；

（ii） $l_{21}=a_{21}/u_{11}=2/1=2$， $l_{31}=a_{31}/u_{11}=6/1=6$；

(iii) $a_{22}=l_{21}u_{12}+u_{22}\Rightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=5-2\times2=1$；

$a_{23}=l_{21}u_{13}+u_{23}\Rightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=15-2\times6=3$；

$a_{32}=l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}\Rightarrow l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}=(15-6\times2)/1=3$；

$a_{33}=l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\Rightarrow u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=46-6\times6-3\times3=1$，

所以 $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\6&3&1\end{pmatrix}$， $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，

由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$，令 $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{y}=(1,0,-3)^T$，

所以 $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\6&3&1\end{pmatrix}$， $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1&2&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$，

由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$，令 $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{y}=(1,0,-3)^T$，

令 $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}\Rightarrow\mathbf{x}=(1,9,-3)^T$，即 $\mathbf{x}_1=1,\mathbf{x}_2=9,\mathbf{x}_3=-3$。

2. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&6\\2&5&15\\6&15&46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&46\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\-6&-15&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2&-6\\0&0&-15\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以雅可比迭代矩阵 $\mathbf{B}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/5&0\\0&0&1/46\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&-6\\-2&0&-15\\-6&-15&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-6\\-2/5&0&-3\\-3/23&-15/46&0\end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B})=\lambda^3+\frac{18}{23}+\frac{18}{23}-\frac{18}{23}\lambda-\frac{4}{5}\lambda-\frac{45}{46}\lambda=\lambda^3-\frac{221}{230}\lambda+\frac{36}{23}=f(\lambda),$$

因为 $f(-1)>0,f(-2)<0$，所以 $\rho(\mathbf{B})>1$，即雅可比迭代法发散。

一、完成下列各题（每题5分，共20分）

1．要使 $\sqrt{2}$ 的近似值的相对误差限不超过 10^{-3}，至少应取多少位有效数字？

2．设 $y_n = 2^n$，求 $\nabla^{10} y_n$。

3．设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$，求 $\rho(\mathbf{A})$ 和 $Cond(\mathbf{A})_2$。

4. 确定下列求积公式的待定参数，使其具有尽可能高的代数精度，并指出其代数精度：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

二、计算题（共52分）

1．(10分）当 $x = 0, 2, 3, 5$ 时，$f(x) = 1, 3, 2, 5$，构造差商表，求三次牛顿插值多项式。

2. （12 分）将函数 $f(x) = \arccos(x)$ 在 $[-1,1]$ 上按切比雪夫多项式 $\{T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, \cdots\}$ 展开，求 $f(x)$ 的二次最佳平方逼近多项式（取3位小数计算）。

3．(14分）应用牛顿法于方程 $f(x) = 1 - \dfrac{a}{x^n} = 0 (a \neq 0)$，写出求 $\sqrt[n]{a}$ 的牛顿迭代公式，并求 $\lim\limits_{k \to \infty} (\sqrt[n]{a} - x_{k+1}) \Big/ (\sqrt[n]{a} - x_k)^2$。

4．(16分）给定方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(1) 求单位下三角阵 $\mathbf{L}$ 和上三角阵 $\mathbf{U}$，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$，并求解该方程组；

三、证明题（每题14分，共28分）

1．试用一种方法推导出一般欧拉公式，并讨论其局部截断误差。

2．设 $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ 为对称正定阵，定义 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}} = (\mathbf{Ax}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$，证明 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}$ 为 R^n 上向量的一种范数。

一、(共 20 分)解：

1.（5 分）因为 $\sqrt{2}=1.4\cdots(m=1)$，令 $\frac{1}{2\times 1}\times 10^{-(n-1)}\le 0.001$，得 $n\ge 4$，所以至少取 4 位有效数字。

2.（5 分）$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$，$\nabla^2 y_n = 2^{n-1}-2^{n-2}=2^{n-2}$，所以 $\nabla^{10} y_n = 2^{n-10}$。

3.（5 分）令 $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$，得 $\lambda_1=11,\lambda_2=1$，所以 $\rho(\mathbf{A})=11, Cond(\mathbf{A})_2=11$。

4.（5 分）$A=1/3, B=4/3, C=1/3$。

二、(共 52 分)解：

1.（10 分）差商表为：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	
0	1				
2	3	1			
3	2	−1	−2/3		
5	5	3/2	5/6	3/10	（6 分）

$$N_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=1+1\times(x-0)$$

$$+(-2/3)\times(x-0)(x-2)+3/10\times(x-0)(x-2)(x-3)$$

$$=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1。$$

2.（12 分） $$(f,T_0)=\int_{-1}^{1}\arccos x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi^2/2,$$

$$(f,T_1)=\int_{-1}^{1}\arccos x\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-2,$$

$$(f,T_2)=\int_{-1}^{1}\arccos x\frac{(2x^2-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

所以 $a_0=(f,T_0)/\pi=\pi/2, a_1=2(f,T_1)/\pi=-4/\pi, a_2=2(f,T_2)/\pi=0$，

$$S_2(x)=a_0T_0(x)+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)=\pi/2-4x/\pi。$$

3.（14 分） $f(x)=1-\frac{a}{x^n}$，$f'(x)=na/x^{n+1}$，$f''(x)=-n(n+1)a/x^{n+2}$，

所以求$\sqrt[n]{a}$ 的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{1-a/x_k^n}{na/x_k^{n+1}}=[(n+1)ax_k-x_k^{n+1}]/na\,(k=0,1,2,\cdots),$$

又因为$\varphi(x)=x-f(x)/f'(x)$，则有

$$\varphi'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2}=f(x)f''(x)/[f'(x)]^2$$

$$=(1-a/x^n)[-n(n+1)a/x^{n+2}]/[na/x^{n+1}]^2=\frac{n+1}{n}-\frac{n+1}{na}x^n,$$

$\varphi''(x)=-\dfrac{n+1}{a}x^{n-1}$，所以 （

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2=-\lim_{k\to\infty}e_{k+1}/e_k^2=-\frac{\varphi''(x^*)}{2}=\frac{n+1}{2a}\times a^{\frac{n-1}{n}}=\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}。$$ （

4.（16 分）

（1） 令 $\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix}$， $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$， 由 $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ 得: （

（i） $u_{11}=1$， $u_{12}=2$， $u_{13}=-2$；

（ii） $l_{21}=a_{21}/u_{11}=1$， $l_{31}=a_{31}/u_{11}=2$；

（iii） $a_{22}=l_{21}u_{12}+u_{22}\Rightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=-1$；

$a_{23}=l_{21}u_{13}+u_{23}\Rightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=3$；

$a_{32}=l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}\Rightarrow l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}=2$；

$a_{33}=l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}\Rightarrow u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=-1$，

$$\therefore \mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{U}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&3\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$，令 $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{y}=(1,0,-1)^T$，

令 $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}\Rightarrow\mathbf{x}=(-3,3,1)^T$，即 $\mathbf{x}_1=-3,\mathbf{x}_2=3,\mathbf{x}_3=1$。

（2） $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\-2&-2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

所以高斯-塞德尔迭代矩阵 $\mathbf{B}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B})=\lambda(\lambda-2)^2$，所以 $\rho(\mathbf{B})=2>1$，即高斯-塞德尔迭代法发散。

三．(共 28 分)证明：

1．（14 分） 设 $y=y(x)$ 为问题的解，则 $y(x_{n+1})$ 在 (x_n,y_n) 处台劳展开式为

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)\approx y(x_n)+hy'(x_n)(h\to 0)$$

$$=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

将 $y(x_{n+1})$ 和 $y(x_n)$ 的近似值分别用 y_{n+1} 和 y_n 表示，则欧拉公式为

将 $y(x_{n+1})$ 和 $y(x_n)$ 的近似值分别用 y_{n+1} 和 y_n 表示，则欧拉公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \qquad (3\text{ 分})$$

设 $y_n=y(x_n)$，则称 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ 为局部截断误差，由欧拉公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 和台劳展开

$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$ 得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=[y(x_n)-y_n]+h[y'(x_n)-f(x_n,y_n)]+h^2y''(\xi_n)/2$$

$$=0+h\times 0+h^2y''(\xi_n)/2=h^2y''(\xi_n)/2\approx h^2y''(x_n)/2 \qquad (5\text{ 分})$$

称 $h^2y''(x_n)/2$ 为欧拉公式的局部截断误差。（2 分）

2．（14 分） （1） $\mathbf{A}\in R^{n\times n}$ 为对称正定阵，所以 $\forall\mathbf{x}\in R^n,\mathbf{x}\neq 0$ 有

$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}=(\mathbf{Ax},\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}=(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax})^{\frac{1}{2}}>0$，当且仅当 $\mathbf{x}=0$ 时有 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}=0$；（3 分）

（2） $\forall\alpha\in R,\|\alpha\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}=(A(\alpha\mathbf{x}),\alpha\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}=(\alpha^2(\mathbf{Ax},\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}}=|\alpha|(\mathbf{Ax},\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}$；（3 分）