课程编号：07000130　　　北京理工大学 2008-2009 学年第一学期

数学分析 B 期末试题(A 卷)

班级________　　学号________　　姓名________

(本试卷共 5 页，九个大题)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评阅人										

一. 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\dfrac{d(\arcsin x)}{d\sqrt{1-x^2}}=$________.

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $y''=x+\sin x$，且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 在原点处相切，则

$f(x)=$________.

3. 函数 $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值 $M=$________，最小值 $m=$________.

4. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=x^2$ 的通解为________.

5. 函数 $f(x)=x\ln(1+x)-e^{x^2}$ 的 5 阶麦克劳林公式(带佩亚诺余项)为

$f(x)=$________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x^2} & x>0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{bx} & x<0\end{cases}$ 是连续函数，则 $a=$________，$b=$________.

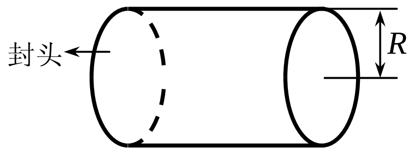
7. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^{\tan x}\dfrac{\sin t}{t}dt}=$________.

二. (9 分) 求微分方程 $y''+y'-2y=e^{x}$ 的通解.

三. (9 分) 求不定积分 $\int x^{2}\arctan x dx$.

四. (9 分) 设 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=1$，求 a 和 b 的值.

五. (9 分) 已知油罐车上的油罐是半径为 R 的圆柱体，两边的封头是半径为 R 米的圆板(如图)，若油的密度 $\mu = 800\,\mathrm{kg/m^3}$，并假定油罐装满了油，求油罐的每个封头所受的侧压力.



六. (9 分) 求反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

七. (9 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，且对任意 $t>1$，曲线 $y=f(x)$ 在 $[1,t]$ 上的弧长等于此曲线与直线 $x=1$，$x=t$ 及 x 轴所围图形面积的 2 倍，又曲线过点 $(1,\frac{1}{2})$，求 $f(x)$.

八. (9 分) (1)设 $I_1=\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx$，$I_2=\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx$，比较 I_1, I_2 的大小(要说明理由);

(2) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$，证明 $F(x)$ 恒为正的常数.

九. (9 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $\left|f''(x)\right|\le 1$，又 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$. (1) 证明 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点; (2) 证明 $\left|f'(0)\right|+\left|f'(2)\right|\le 2$.

2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\dfrac{1}{x}$

2. $\dfrac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(2 分, 2 分)

4. $y=Cx+\dfrac{x^3}{2}$　(没有 y 扣 1 分)

5. $-1-\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^5}{4}+o(x^5)$

6. ± 2, $-\dfrac{1}{4}$　(2 分(没有 $\pm$ 扣 1 分), 2 分)

7. e

二.

$r^2+r-2=0$ ....(1 分)

$r_1=1 \quad r_2=-2$ ....(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ....(5 分)

设 $y^*=Axe^x$ ....(6 分)

代入方程得 $A=\dfrac{1}{3}$　$y^*=\dfrac{1}{3}xe^x$ ....(8 分)

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\dfrac{1}{3}xe^x$ ....(9 分)

三.

$\int x^2\arctan x dx=\dfrac{1}{3}\int\arctan x d(x^3)$ ....(2 分)

$=\dfrac{1}{3}(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx)$ ....(5 分)

$=\dfrac{1}{3}[x^3\arctan x-\int(x-\dfrac{x}{1+x^2})dx]$ ....(7 分)

$=\dfrac{1}{3}x^3\arctan x-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$ ....(9 分)

四. 由题设，当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2)\sim x^2$ ……………….(2 分)

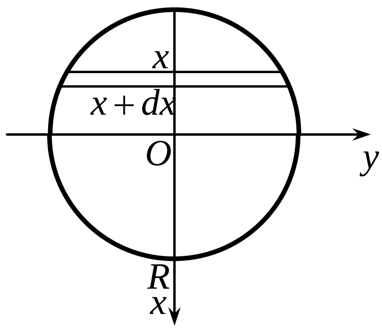
$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$$ ……………….(4 分)

$$=(1-a)x+(-\frac{1}{2}-b)x^2+o(x^2)$$ …………………….(5 分)

$$1-a=0 \qquad -\frac{1}{2}-b=1$$ …………………….(7 分)

$$a=1 \qquad b=-\frac{3}{2}$$ …………………….(9 分)

五. 如图建立坐标系



$$dP=\mu g(x+R)2ydx$$ …..................................(2 分)

$$=2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………...(3 分)

$$P=\int_{-R}^{R}2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(5 分)

$$=4\mu gR\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(6 分)

$$=\pi\mu gR^3=800\pi gR^3\,(\mathrm{N})$$ ……………………….(9 分)

六. 令 $t=\sqrt{x+1}$，即 $x=t^2-1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt$$ ……………………………(3 分)

$$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$ ……………………………(5 分)

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty}$$ ……………………………(7 分)

$$=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$ ……………………………(9 分)

七. 设曲线方程为 $y=y(x)$

$$\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}dx=2\int_1^t ydx$$ ……………………(2 分)

两端对 t 求导

$$\sqrt{1+(y')^2}=2y$$ ……………………(4 分)

$$y'=\sqrt{4y^2-1}$$ ……………………(5 分)

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2-1}}=dx$$ ……………………(6 分)

积分得 $\dfrac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=x+C_1$ ……………………(7 分)

由 $y\big|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$，得 $C_1=-1$ ……………………(8 分)

$$\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=2(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}ch2(x-1)=\frac{e^{2(x-1)}+e^{-2(x-1)}}{4}$$ ……………………(9 分)

八. (1) 在 $(0,\pi)$, $e^{\sin x}\sin x>0$，故 $I_1>0$，在 $(\pi,2\pi)$， $e^{\sin x}\sin x<0$，故 $I_2<0$

$$I_1>I_2$$ ……………………….(3 分)

(2) $$F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x$$

$$=e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}\sin x=0$$

所以 $F(x)$ 为常数 ……………………….(5 分)

令 $u=x-\pi$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{\sin(\pi+u)}\sin(\pi+u)du=-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin tdt=I_1+I_2$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin tdt-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin udu$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$$

当 $t\in(0,\pi)$， $\sin t>0$， $e^{\sin t}>1$， $e^{-\sin t}<1$， $\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})>0$

故 $F(0)>0$，因此 $F(x)$ 为正的常数 …………………..(9 分)

九. (1) 由题设，得 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$， $f(1)=0$ …………………(2 分)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点 …………………(4 分)

(2) 根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，$\exists\xi_2\in(1,2)$，使

$$f'(1)-f'(0)=f''(\xi_1)\qquad f'(2)-f'(1)=f''(\xi_2)$$ ……………...(6 分)

$$|f'(0)|+|f'(2)|=|f'(1)-f'(0)|+|f'(2)-f'(1)|$$ ……………..(8 分)

$$=|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\le1+1=2$$ …………………(9 分)