

课程编号: A073122

北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 和 X 满足 $XA = B + 2X$, 求 X 。

二、(10 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = b \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases}$$

- (1) 求参数 a, b , 使得方程组有解;
- (2) 当方程组有解时, 求出方程组的导出方程组的一个基础解系以及方程组的通解.

三、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (1, 3, 0, 5)^T, \quad \alpha_2 = (1, 2, 1, 4)^T, \quad \alpha_3 = (1, 1, 2, 3)^T, \quad \alpha_4 = (1, -3, 6, -1)^T,$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、(10 分) 已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

- (1) 证明: $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;
- (2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;
- (3) 求 $h(x) = 1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

五、(10 分) 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 计算行列式 $\left| \frac{1}{3}A^* + 2I \right|$ 。

六、（10 分）设 5 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda - 3$, $\lambda + 2$, $(\lambda - 1)^2$, λ .

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形 J ;

(2) 如果可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}AP = J$, 判断 P 的哪几列是 A 的特征向量.

七、（10 分）在线性空间 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中定义变换 σ :

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: σ 是线性变换;

(2) 写出 σ 在基 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3$

(1) 用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换;

(2) 该二次型是否正定?

九、(10 分) 设向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 向量 γ 不是 $AX = 0$ 的解. 证明向量组 $\gamma, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 是线性无关的.

十、(10 分) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$,

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$