北京理工大学《数学分析》

2010-2011 学年第二学期期中试题及参考答案

班级______________ 学号________________ 姓名_________________

(本试卷共 6 页，十一个大题，试卷后面空白纸撕下作草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 已知空间四点 $A(1,0,1), B(4,4,6), C(2,2,3), D(1,2,0)$，则以此四点为顶点的四面体的体积 $V=$ ______________。

2. 直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 与平面 $2x-2y+z-7=0$ 的夹角 $\varphi=$ _____________。

3. 函数 $u=z\ln(x+y^2)$ 在点 $(0,e,2)$ 处沿方向 _________________ 增加的最快。

4. 函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 的带皮亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

   $f(x,y)=$ ____ 。

5. 设 $I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dz$，其中 $f(x,y,z)$ 是连续函数，若将积分次序变换成：先对 y 积分，再对 x 积分，最后对 z 积分，则 $I=$ ______________________________。

二. (9 分) 求点 $A(1,2,-2)$ 到直线 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 的距离。

三. (9 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$，并讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性。

四. (9 分) 已知点 $\mathrm{A}(1,2), B(2,3), C(1,0)$，函数 $z=f(x,y)$ 可微，且在点 A 处沿 $\vec{AB}$ 方向的方向导数为 $2\sqrt{2}$，沿 $\vec{AC}$ 方向的方向导数为 -3，求 $f(x,y)$ 点 A 处沿 $\vec{AO}$ 方向的方向导数

五. (9 分) 设 $z=f(x,\frac{x}{y})+g(x^2+y^2)$，其中 g 二阶可导， f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

六.(9 分)设 V 是曲面 $z=8-x^2-y^2$ 与平面 $z=2x$ 所围成的空间有界闭区域,求 V 的体积。

七. (9 分) 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 15 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线方程。

八. (9 分) 证明曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上截距的平方和为常数。

九.(9 分) 计算 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\cos(x+y)}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0, y=x, y=\pi$ 所围成的平面有界闭区域。

十.(9 分) 计算 $I=\iiint\limits_{V}\frac{dxdydz}{1+(x^2+y^2+z^2)^3}$，其中 V 是由 yoz 平面上的区域 D 绕 z 轴旋转一周而成的立体，而 D 是由曲线 $z=\sqrt{1-y^2}$，直线 $z=\sqrt{3}y$ 及 z 轴所围成的。

十一.(9 分) 已知平面上两定点 $A(1,2), B(0,-2)$，试在曲面 $x^2 - y^2 = 1\ (x \ge 1)$ 上求一点 C，使 ΔABC 的面积最小。

2010-2011 工科数学分析第二学期期中试题解答

一. 1. $\dfrac{2}{3}$

2. $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3. $\{\dfrac{2}{e^2},\dfrac{4}{e},2\}$，（与此方向相同的都对）

4. $y+\dfrac{1}{2}(2xy-y^2)+o(\rho^2)$

5. $\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{\sqrt{x}}f(x,y,z)dy$

二. 设点 $B(-1,0,1)$，$\vec{s}=(1,1,2)$，

$$d=\frac{|\overrightarrow{BA}\times\vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\frac{|\{2,2,-3\}\times\{1,1,2\}|}{|\vec{s}\,|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

$$=\frac{|\{7,-7,0\}|}{|\vec{s}\,|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7\text{ 分})$$

$$=\frac{\sqrt{7^2+(-7)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{7}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{ 分})$$

三. $$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

沿 $y=x$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^4+x^2}=0$ ……………………(7 分)

沿 $y=x^2$， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$ ……………………(8 分)

即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续 ……………………(9 分)

四. $\vec{AB}=\{1,1\}$，$\vec{AC}=\{0,-2\}$，$\vec{AB}^0=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$，$\vec{AC}^0=\{0,-1\}$ ……………(2 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AB}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial z}{\partial y}=2\sqrt{2}$$ ………………………………(4 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AC}}=-\frac{\partial z}{\partial y}=-3$$ ……………..……………..(5 分)

解得： $\frac{\partial z}{\partial x}=1$， $\frac{\partial z}{\partial y}=3$ …………………………………(7 分)

$\vec{AO}=\{-1,-2\}$， $\vec{AO}^0=\{-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\}$ ………………………………… .(8 分)

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{AO}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{7}{\sqrt{5}}$$ ……………………………(9 分)

五. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'+2xg'$ ………………………………(3 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}''+\frac{1}{y}(f_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}'')+2g'+4x^2g''$$

$$=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''+2g'+4x^2g''$$ ………………………………… (6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\cdot\frac{-x}{y^2}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\cdot\frac{-x}{y^2}+4xyg''$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f''-\frac{1}{y^2}f_2'+4xyg''$$ ……………………………(9 分)

六. 由 $z=8-x^2-y^2$ 和 $z=2x$ 消去 z 得 D 的边界 $(x+1)^2+y^2=9$ …………… (2 分)

$$V=\iint_D(8-x^2-y^2-2x)dxdy$$ ………………………… (4 分)

令 $x=-1+\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ ……………………….. (5 分)

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3(9-\rho^2)\rho d\rho$$ ……………………... (7 分)

$$= 2\pi \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{2}\pi$$ ………………………..... (9 分)

七. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$ ……………………………….(3 分)

将点 $(1,-1,2)$ 代入得 $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2 - 2\dfrac{dy}{dx} \\ 1 - 2y\dfrac{dy}{dx} + 6\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$

解得: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{13}{14}$, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{7}$ ……………………… (6 分)

切向量 $\vec{s} = \{1, \dfrac{13}{14}, \dfrac{1}{7}\}$ ………………………… (7 分)

切线 $\dfrac{x-1}{14} = \dfrac{y+1}{13} = \dfrac{z-2}{2}$ …………………….. (9 分)

八. 设 (x,y,z) 是曲面上的任一点，此点处法向量为

$$\vec{n} = \{x^{-\frac{1}{3}}, y^{-\frac{1}{3}}, z^{-\frac{1}{3}}\}$$ .... (2 分)

切平面 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}(X-x) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}(Y-y) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}(Z-z) = 0$ .... (4 分)

即 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}X + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}Y + \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}}Z = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ ………………… (6 分)

三截距为 $a = 4\sqrt[3]{x}$， $b = 4\sqrt[3]{y}$， $c = 4\sqrt[3]{z}$ .... (8 分)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4^2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) = 4^2 \times 4 = 64$$ ……………… (9 分)

九. 将 D 分成两块： $D_1: x + y \le \pi$， $D_2: x + y \ge \pi$

$$I = \iint_D \sqrt{2\cos^2\frac{x+y}{2}}\,dxdy$$ .... (1 分)

$$= \sqrt{2}\iint_{D_1}\cos\frac{x+y}{2}dxdy - \sqrt{2}\iint_{D_2}\cos\frac{x+y}{2}dxdy$$ .... (3 分)

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int_y^{\pi-y}\cos\frac{x+y}{2}dx - \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\pi-x}^{x}\cos\frac{x+y}{2}dy$$ .... (7 分)

$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin y)dy - 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x - 1)dx$ .... (8 分)

$= 2\sqrt{2}(\pi - 2)$ .... (9 分)

十．V 由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成 .... (2 分)

$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 \sin\varphi}{1+r^6} dr$ .... (6 分)

$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^6} dr$ .... (7 分)

$= \frac{\pi^2}{6}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ .... (9 分)

十一．　设 $C(x,y)$，ΔABC 的面积为 S，则

$S = \frac{1}{2}|4x-y-2|$ .... (2 分)

令　　$f(x,y) = (4x-y-2)^2$

约束条件　$x^2 - y^2 = 1$ .... (4 分)

设　$F(x,y) = (4x-y-2)^2 + \lambda(x^2-y^2-1)$ .... (5 分)

令　$F_x'(x,y) = 8(4x-y-2) + 2\lambda x = 0$

$F_y'(x,y) = -2(4x-y-2) - 2\lambda y = 0$ .... (7 分)

解得　$y = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$，$x = \pm\frac{4}{\sqrt{15}}$（负值舍去） .... (8 分)

由实际问题，最小值存在，故当 $x = \frac{4}{\sqrt{15}}$，$y = \frac{1}{\sqrt{15}}$ 时，

ΔABC 的面积最小，点 $C(\frac{4}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}})$ 即为所求。 .... (9 分)