课程编号：A073122　　北京理工大学 2011-2012 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 4 阶矩阵 A,B 满足: $\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{YB}+\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}$， $\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{YA}+\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{I}$,

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&2&2\\1&1&2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 。

二、（10 分）对下面线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - 3x_3 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）已知

$$\alpha_1 = (1,1,-1,-1),\quad \alpha_2 = (1,0,1,1),\quad \alpha_3 = (2,1,0,0),\quad \alpha_4 = (-1,1,-3,1),$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ \beta_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\ \beta_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\ \beta_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

(1) 证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\gamma=\begin{bmatrix}1&2\\4&6\end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

五、（10 分）设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda+1)^2,\lambda-5,\ \lambda^3$，

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）在$\boldsymbol{F[x]_4}$中定义线性变换$\boldsymbol{\sigma}$：

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3-a_0+(a_0+a_1)x+a_2x^2+a_1x^3,$$

求$\boldsymbol{\sigma}$在$\boldsymbol{F[x]_4}$的自然基$\boldsymbol{1,x,x^2,x^3}$下的矩阵。

七、（10 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}$的任意一个特征值$\boldsymbol{\lambda}$都满足$\boldsymbol{\lambda<1}$. 证明：$\boldsymbol{I-A}$可逆（其中$\boldsymbol{I}$为单位矩阵）。

八、（10 分） 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经过正交变换 $X=QY$ 化为 $2y_1^2+2y_2^2+y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。

(1) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定； (2) 求行列式 $|A-I|$ 的值；

九、（10 分）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$$

讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

（1）证明至少可以找到一个向量 $X \in R^n$，使得向量组 $X, AX, A^2X \cdots A^{n-1}X$ 线性无关；

（2）如果 n 阶矩阵 A 与对角线上元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵相似，证明所有数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两不同。