北京理工大学《数学分析》

2009-2010 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

班级________　　学号________　　姓名________

(本试卷共 6 页，九个大题)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
签名										

一. 填空题 (每小题 4 分，共 28 分)

1. 已知 $A(1,1,0), B(1,-1,2), C(2,3,1)$，则 ΔABC 的面积 $S=$________，$\angle ABC=$________。

2. 已知圆的方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10z \\ x+2y+2z=19 \end{cases}$， 则圆心坐标为________，圆的半径为 $r=$________。

3. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$f(x_0,y_0)=0$，又在 (x_0,y_0) 处 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$，且 $f_y'=\sqrt{5}$，则 $f_x'=$____，曲线 $f(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 处指向 x 增大方向的单位法向量 $\vec{n}=$________。

4. $\dfrac{1}{x+3}$ 与 $\ln(x+3)$ 关于 $x-1$ 泰勒级数展开式分别为：
$\dfrac{1}{x+3}=$________________，$\ln(x+3)=$________________。

5. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$（$z\le 0$）所确定的隐函数，则
$dz(1,0)=$________，$gradz(1,0)=$________.

6. 设 $f(x,y)=x^y$，则 $f_y'=$________，$\int_0^1 \dfrac{x^3-x^2}{\ln x}dx=$________。

7. 设 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 0\le x\le\pi\\ x-1 & -\pi<x<0\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数展开式，此级数的和函数为 $S(x)$，则 $a_2=$____，$b_3=$____，$S(\pi)=$____，$S(\frac{5\pi}{2})=$____。

二. (9 分) 设 L：$y=\ln x$ $(\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15})$ 的线密度为常数 μ，求 L 关于 y 轴的转动惯量。

三. (9 分) 设区域 $V:|x|+|y|+|z|\le 1$，计算积分 $I=\iiint\limits_V(x^2+2y^2+3z^2+x^2y^2\sin z^3)dV$。

四. (9 分) 求函数 $z = x^2 + 2y^2 - y + 5$ 在区域 D：$x^2 + y^2 \le 1$ 上的最大值和最小值。

五. (9 分) 已知当 $x > 0, y > 0$ 时，$\dfrac{3y - x}{(x+y)^{\lambda}} dx + \dfrac{y - 3x}{(x+y)^{\lambda}} dy$ 是二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，

求 λ 的值，并求 $u(x, y)$ 的函数表达式。

六. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x+2}{3})^{n+1}$ 的收敛域及和函数。

七. (9 分)曲面 $z=4-x^2-y^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4z$ 分成两部分，求这两部分体积之比。

八. (9 分) 设 $I=\iint\limits_S(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$，其中 $S: z=-\sqrt{x^2+y^2}\quad(-1\le z\le 0)$，且 $\cos\gamma>0$。（1）将 I 化成第二类曲面积分；（2）利用高斯公式计算 I 的值。

九. (9 分) 设函数 $f(x)$ 满足条件 $a\le f(x)\le b$，且对 $\forall x,y\in[a,b]$，有 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$，其中 k 是常数，且 $0<k<1$。取 $x_0\in[a,b]$，令 $u_1=f(x_0)$，$u_{n+1}=f(u_n)$，$n=1,2,\cdots$。证明：（1）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在。

参考答案

一. 1. $\sqrt{11}$， $\arccos\dfrac{5}{6}$ (2 分, 2 分)

2. $(1,2,7)$， 4 (2 分, 2 分)

3. $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $\{\dfrac{1}{\sqrt{5}},-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\}$ (2 分, 2 分)

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$， $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n4^n}(x-1)^n$ (2 分, 2 分)

5. $dx-\sqrt{2}dy$， $\{1,-\sqrt{2}\}$ (2 分, 2 分)

6. $x^y\ln x$， $\ln\dfrac{4}{3}$ (2 分, 2 分)

7. 0，$\dfrac{4+2\pi}{3\pi}$，0，$\dfrac{\pi}{2}+1$ (1 分，1 分，1 分，1 分)

二.

$$I_y=\int_L x^2\mu dl \qquad \text{……………………(2 分)}$$

$$=\mu\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x^2\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}dx \qquad \text{……………………(6 分)}$$

$$=\mu\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{56}{3}\mu \qquad \text{……………………(9 分)}$$

三. 设V在第一卦限部分为V_1

$$I=6\iiint\limits_V x^2dV=48\iiint\limits_{V_1}x^2dV \qquad \text{……………(3 分)}$$

$$=48\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz \qquad \text{……………(6 分)}$$

$$=48\int_0^1x^2dx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy \qquad \text{……………(7 分)}$$

$$=24\int_0^1x^2(1-x^2)dx \qquad \text{……………(8 分)}$$

$$=\frac{4}{5} \qquad \text{……………(9 分)}$$

四. 令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y-1=0$ ………………(2 分)

解得 $x=0$，$y=\dfrac{1}{4}$， 得驻点 $(0,\dfrac{1}{4})$， ………………..(3 分)

由 $x^2+y^2=1$，得$x^2=1-y^2$，代入目标函数得

$$z=y^2-y+6 \quad (-1\le y\le 1)$$ ………………..(4 分)

令$\dfrac{dz}{dy}=2y-1=0$，得$y=\dfrac{1}{2}$，此时$x=\pm\dfrac{3}{2}$，得两点$(\pm\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$ ………..(6 分)

当$y=\pm 1$时，$x=0$，得两点$(0,\pm 1)$ ………………..(7 分)

$$z(0,\frac{1}{4})=\frac{39}{8}，\quad z(\pm\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{23}{4}，\quad z(0,-1)=8，\quad z(0,1)=6$$

$$z_{\max}=8，\qquad z_{\min}=\frac{39}{8}$$ ……………..(9 分)

五．由题意， 有 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$ ……………………….(1 分)

$$\frac{-3(x+y)^{\lambda}-(y-3x)\lambda(x+y)^{\lambda-1}}{(x+y)^{2\lambda}}=\frac{3(x+y)^{\lambda}-(3y-3)\lambda(x+y)^{\lambda-1}}{(x+y)^{2\lambda}}$$ …….(3 分)

即 $3x+3y-\lambda x-\lambda y=0$， $\lambda=3$ …………………….(4 分)

$$u(x,y)=\int_{(1,1)}^{(x,y)}\frac{3y-x}{(x+y)^3}dx+\frac{y-3x}{(x+y)^3}dy+C_1$$ …………………….(6 分)

$$=\int_1^x\frac{3-x}{(x+y)^3}dx+\int_1^y\frac{y-3x}{(x+y)^3}dy+C_1$$ …………………….(8 分)

$$=\frac{x-y}{(x+y)^2}+C$$ …………………….(10 分)

注：没有加C不扣分。

六. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^{n+1}$ (1)

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$， 得 (1) 的收敛半径 $R=1$ ……………(1 分)

$t=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散， $t=-1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，

故级数 (1) 的收敛域为$t\in[-1,1)$ ……………..(3 分)

由 $-1\le\frac{x+2}{3}<1$， 得原级数收敛域 $-5\le x<1$ ………………..(4 分)

设 $S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^{n}$ ， $S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ …………………(6 分)

$S(t)=-\ln(1-t)$ …………………(8 分)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x+2}{3})^{n+1}=-\frac{x+2}{3}\ln(1-\frac{x+2}{3})$ ……………………..(9 分)

七．由$\begin{cases}z=4-x^2-y^2\\x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$，消去$z$得$x^2+y^2=3$ …………………（1）

$V_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le3}[(4-x^2-y^2)-(2-\sqrt{4-x^2-y^2})]dxdy$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le3}(2-x^2-y^2)+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy$ …………………（3）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(2-\rho^2+\sqrt{4-\rho^2})\rho d\rho$ …………………（5）

$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(2\rho-\rho^3+\rho\sqrt{4-\rho^2})d\rho$

$=\frac{37}{6}\pi$ …………………（7）

$V_2=\frac{4}{3}\pi\times2^3-V_1=\frac{27}{6}\pi$ …………………（8）

$\frac{V_2}{V_1}=\frac{27}{37}$ …………………（9）

八. （1）$I=\iint\limits_{S} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ ………………..(1 分)

（2）设曲面 $S_1:z=-1$，$x^2+y^2\le 1$

$$I=\oiint\limits_{S+S_1^+} - \iint\limits_{S_1^-} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$ ………………..(1 分)

$$\oiint\limits_{S+S_1^+} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}(3x^2+3y^2+3z^2)dV$$ ……………..(4 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{-1}^{-\rho}(3\rho^2+3z^2)dz$$ ……………..(6 分)

$$=\frac{349}{30}\pi$$ ……………..(7 分)

$$-\iint\limits_{S_1^-}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_1^+}z^3dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-1)^3dxdy=-\pi$$

$$I=\frac{9}{10}\pi-\pi=-\frac{1}{10}\pi$$ ……………..(9 分)

九. （1）$|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|\le k|u_n-u_{n-1}|$

$\le k^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\le\cdots\le k^{n-1}|u_2-u_1|$

$=k^{n-1}|f(f(x_0))-f(x_0)|\le k^{n-1}|b-a|$ ……………..(4 分) 由于

$0<k<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{n-1}(b-a)$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛 ……………..(5 分)

（2） 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛， ……………..(6 分)

故其部分和 $S_n=u_{n+1}-u_1=u_{n+1}-f(x_0)$有极限 ……………..(8 分)

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}$ 存在，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在 ……………..(9 分)