

线性代数 A 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $AXA^{-1} = XA^{-1} + 3I$, 求 X 。

二、(10 分) 对下面线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

试讨论：当 λ 取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

（用导出组的基础解系表示通解）

三、(10 分) 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

的列向量组的秩和一个极大无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示。

四、(10 分) 在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中, 令 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一组基;

(2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标。

五、(10 分) 设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $\lambda - 1, (\lambda - 2)^2, \lambda^3$ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形; (2) 求 A 的特征值。

六、(10 分) 函数集合 $V = \{(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$ 对于函数的线性运算构成线性空间, 在 V 中取一组基

$$f_1(x) = x^3e^x, f_2(x) = x^2e^x, f_3(x) = xe^x, f_4(x) = e^x$$

求微分运算 $D(f(x)) = f'(x)$ 在这组基下的矩阵, 并判断该线性变换是否可逆。

七、(10 分) 求下列实系数齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一组标准正交基。

-
- 八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = tx_1^2 + tx_2^2 + tx_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- (1) 判断当 t 取何值时, 二次型正定;
- (2) 当 $t=0$ 时, 求一正交变换 $X=QY$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形。

九、(10 分) 设 $A=I-ee^T$, 其中 I 为 n 阶方阵, e 为 n 维非零列向量, 证明

- (1) $A=A^2$ 的充分必要条件为 e 为单位向量, 即 $e^Te=1$;
- (2) 当 $e^Te=1$ 时, A 不可逆。

十、(10 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的特征向量。令 $B = A^5 - 4A^3 + I$

- (1) 验证 α_1 也是 B 的特征向量;
- (2) 求 B 的全部特征值和特征向量;
- (3) 求 B 。