北京理工大学《数学分析》

2010-2011 学年第二学期期末试题（A 卷）

班级________________　　学号__________________　　姓名___________________

(本试卷共 6 页，十一个大题，试卷后面空白纸撕下作草稿纸)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分, 共 10 分）

1. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=26$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=72$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是钝角，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______。

2. 设$u=x^2y+ye^z+yz\ln x$，则$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)\big|_{(1,1,1)}=$_______________。

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，但向量$\vec{a}+2\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\lambda\vec{a}+\vec{c}$共面，则$\lambda=$ __________。

4. 设 L 是曲线 $x=t,y=t^3,z=1$ 上从 $A(0,0,1)$ 到 $B(2,8,1)$ 的一段，若将 $I=\int_L x^2dx+ydy+zdz$ 化成第一类曲线积分，则有$I=$ ___________________________。

5. 变量替换$u=x,v=\dfrac{y}{x}$可将微分方程$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$化成 __________________________。

二. (9 分) 交换积分次序并计算$I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\dfrac{e^x}{x}dx$。

三. (9 分) 求函数 $f(x,y)=x^2y+\frac{1}{2}y^2-y$ 的极值和极值点。

四. (9 分)设方程 $z^3-2xz+y=5$ 确定函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

五. (9 分) 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使曲面在此点处的切平面垂直于直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$，并写出切平面方程。

六. (8 分) 证明方程 $yx^{y-1}dx+x^{y}\ln x dy=0$ 是全微分方程，并求出通解。

七. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$ 的收敛域及和函数。

八. (10 分) 设 V 是球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1\,(\mathrm{z}\ge 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的立体，其上每点的密度与此点到原点的距离的平方成反比（比例系数为 1），求 V 的质量及质心。

九.(9 分) 将 $f(x)=(x^2+1)\arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并指出收敛域。

十.(9 分) 利用高斯公式计算 $I=\iint\limits_S (y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中 S 是抛物面 $z=2-x^2-y^2$ $(z\geq 1)$ 的上侧。

十一.(8 分) 设 $a_n > 0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$b_n = 1 - \frac{\lambda \ln(1+a_n)}{a_n}$（$\lambda$ 是常数），判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收敛性。