课程编号：A073003

北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^*$，求 X 。

二、（10 分）已知

$$\alpha_1=(2,-2,4,6)^T，\quad \alpha_2=(-2,1,0,3)^T，\quad \alpha_3=(3,0,2,-1)^T，\quad \alpha_4=(1,-3,2,4)^T$$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

三、（10 分）在 $F[x]_4$ 中，求自然基 $1,x,x^2,x^3$ 到基 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵，以及 $h(x)=1-x+x^2-x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）设 V 是由实数域上的全体 2 阶矩阵构成的线性空间，在 V 上定义映射 $\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma(X) = AX - XA}$，其中 X 为任意矩阵，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$为 V 中某一取定矩阵。

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$ 为 V 上的而一个线性变换；

（2）证明：对任意的 $\boldsymbol{X, Y \in V}$ 都有 $\boldsymbol{\sigma(XY) = \sigma(X)Y + X\sigma(Y)}$；

（3）求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{I_{11}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{12}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{21}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{22}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$下的矩阵。

五、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的值；（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP = B}$ 。

六、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 6 阶方阵，且已知存在 6 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -a & 1 & & & & \\ & -a & & & & \\ & & b & & & \\ & & & c & 1 & \\ & & & & c & \\ & & & & & d \end{bmatrix}$$

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子；
(2) 判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

七、（10 分）证明：若 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ ，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

（1） 判断该二次型的定性；（2）用正交变换将其化为标准形并给出所用的正交变换。

九、（10 分）设方程组$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$

(1) 证明：若a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，则此方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知 β_1,β_2 是方程组的两个解，其中 $\beta_1=[-1,1,1]^T,\beta_2=[1,1,-1]^T$，写出此方程组的通解。

十（10 分）已知四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2015 & 1 & 0 \\ 2015 & 0 & 2015 & 0 \\ 1 & 2015 & 0 & 2015 \\ 0 & 0 & 2015 & 0 \end{pmatrix}$

（1） 求$|A|$

（2） 有两个正特征值和两个负特征值。