

北京理工大学《数学分析 B》

2005-2006 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 设 $u(x, y, z) = x^y + \ln(y^2 + z^2)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 及全微分 $du(e, 1, 2)$.
2. 求曲线 $x = t^2, y = -t, z = t^3$ 的与平面 $3x + 9y + z - 1 = 0$ 平行的切线方程.
3. 将 $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$ 化为极坐标系下的累次积分, 并计算 I 的值.
4. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tan \frac{2}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的敛散性.

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z, \text{ 求 } f(u) \text{ 的表达式.}$$

2. 计算第一类曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

3. 设 $S(x)$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数展开式的和函数, 求 $S(6), S(-6), S(2\pi), S(3\pi)$ 的值.

4. 计算曲线积分 $I = \oint_L y^2 dx + 2x dy - z^2 dz$, 其中 L 是平面 $x + z = 2$ 与柱面

$x^2 + y^2 = 1$ 的交线, 若从 z 轴正向往负向看去, L 取逆时针方向.

三. (8 分) 把函数 $f(x) = \frac{1}{x(x-3)}$ 展成 $x-1$ 的幂级数, 并指出收敛域.

四. (8 分) 设 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成的立体, 其上任一点处的密度与该点到原点的距离成正比(比例系数为 k), (1) 求 V 的质量; (2) 求 V 的质心坐标.

五. (8 分) 证明曲面 $xyz = m$ ($m \neq 0$ 为常数) 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之积为常数.

六. (8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛区间及和函数.

七. (8 分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} x^3 dydz + [yf(yz) + y^3] dzdx + [z^3 - zf(yz)] dxdy$,

其中函数 f 有连续的导函数, Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

八. (8 分) 设函数 $f(y)$ 在 $-\infty < y < +\infty$ 内有连续的导函数, 且 $\forall y, f(y) \geq 0$,

$f(1) = 1$, 已知对右半平面 $\{(x, y) | -\infty < y < +\infty, x > 0\}$ 内任意一条封闭曲

线 Γ , 都有 $\oint_{\Gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + f(y)} = 0$, 求 $f(y)$ 的表达式.

参考答案

一 . 1. $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + \frac{2y}{y^2 + z^2}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{y^2 + z^2}$ (3 分)

$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(e,1,2)} = 1$ $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(e,1,2)} = e + \frac{2}{5}$

$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(e,1,2)} = \frac{4}{5}$ (5 分)

$du = dx + (e + \frac{2}{5})dy + \frac{4}{5}dz$ (6

分)

2.

$\vec{T} = \{2t, -1, 3t^2\}$ (1 分)

由 题 设 $6t - 9 + 3t^2 = 0$, 即

$t^2 + 2t - 3 = 0$ (2 分)

解 得 $t = 1$,

$t = -3$ (3 分)

切点为 $(1, -1, 1)$ 或 $(9, 3, -27)$

$\vec{T} = \{2, 1, 3\}$ 或 $\vec{T} = \{-6, -1, 27\}$

切 线 为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ 或

$\frac{x-9}{-6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+27}{27}$ (6 分)

3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} d\rho$ (2

分)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\cos \theta} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} - 1) \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

4.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \tan \frac{2}{\sqrt{n}} \sim \frac{2}{n} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \quad \text{发 散} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{发$$

散.....(3 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 单 调 减 少 且 趋 于 零, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 收
敛(6 分)

二 . 1.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot e^x \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot e^x \cos y \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \cdot e^{2x} \sin^2 y + f' \cdot e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot e^{2x} \cos^2 y - f' \cdot e^x \sin y \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

代 入 已 知 方 程 得

$$f'' - f = 0 \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$r^2 - 1 = 0 \quad r = \pm 1$$

$$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u} \quad \dots\dots\dots(7$$

分)

2..

$$I = \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dx dy \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32\sqrt{2}}{9} \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

3.

$$S(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \\ 1 & x = 0 \\ 1 + \frac{\pi^2}{2} & x = \pm\pi \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$S(6) = S(6 - 2\pi) = 2 \quad S(-6) = S(2\pi - 6) = (2\pi - 6)^2$$

$$S(2\pi) = S(0) = 1$$

$$S(3\pi) = S(\pi) = 1 + \frac{\pi^2}{2} \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

4.

解

1

$$L: x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$I = \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t + 2\cos^2 t - (2 - \cos t)\sin t)] dt \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$= 2\pi \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

解 2 利用斯托克斯公式, 设 S 是 L 所围平面

$$I = \iint_{+S} (2 - 2y) dx dy \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= \iint_{D_{xy}} (2 - 2y) dx dy = \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 2\pi \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分}) \text{ 三.}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-3} \right) \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{1+(x-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \right] \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left[(-1)^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

由 $|x-1| < 1$ 及 $\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$ 得 收 敛 域

$$x \in (0, 2) \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

四. (1) $m = \iiint_V k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ (1)

分)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} kr^3 \sin\varphi dr \quad \dots\dots\dots($$

3 分)

$$= 8k\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^4\varphi d\varphi = \frac{8k\pi}{5} \quad \dots\dots\dots($$

4 分)

(2) $\bar{x} = 0 \quad \bar{y} = 0$ (5)

分)

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_V zk\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \quad \dots\dots\dots(6$$

分)

$$= \frac{k}{m} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^4 \sin\varphi \cos\varphi dr \quad \dots\dots\dots(7$$

分)

$$= \frac{64k\pi}{5m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^6\varphi d\varphi = \frac{64k\pi}{35m} = \frac{8}{7} \quad \dots\dots\dots(8$$

分)

V 的质心为 $(0, 0, \frac{8}{7})$

五. 曲面上任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面法向量为

$$\vec{n} = \{y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0\} \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

切 平 面

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0 \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

即 $y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3x_0 y_0 z_0$

在 三 坐 标 轴 上 截 距 分 别 为

$$3x_0, 3y_0, 3z_0 \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0 = 27x_0 y_0 z_0 = 27m \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

六

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = 1 \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

$$R = 1, \text{ 收敛区间 } -1 < x < 1 \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

设
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} x^{2n}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)} x^{2n-1} \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1} x^{2n-2} \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2(-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2} \dots\dots\dots(6$$

分)

$$S'(x) = 2 \arctan x \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$S(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

七. 设 $S: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 利用高斯公式

$$I = \oint_{\Sigma+S} - \iint x^3 dydz + [yf(yz) + y^3] dzdx + [z^3 - zf(yz)] dxdy \dots\dots\dots(2$$

分)

$$= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV - 0 \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{6\pi}{5} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

八 .

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{x^2 - f(y)}{[x^2 + f(y)]^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{x^2 + f(y) - yf'(y)}{[x^2 + f(y)]^2} \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \text{ 得 } \frac{x^2 - f(y)}{[x^2 + f(y)]^2} = \frac{x^2 + f(y) - yf'(y)}{[x^2 + f(y)]^2}$$

即

$$yf'(y) = 2f(y) \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$\frac{df(y)}{f(y)} = \frac{2dy}{y} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\ln|f(y)| = 2\ln|y| + C_1$$

$$f(y) = Cy^2 \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$\text{由 } f(1) = 1 \text{ 得 } C = 1$$

$$\therefore f(y) = y^2 \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$