一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix}$ 的值。

$$\begin{vmatrix} A^* & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix} = |A^*||2B| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$= 2^2 \left\| A \right| A^{-1} \left\| B \right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$$

$$= 4|A|^2|B| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

$$= 4\cdot(-1)^2\cdot 1 = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^{-1}XA=2A+XA$，求 X。

$$A\times A^{-1}XA=2A+XA\times A^{-1}$$

$$X=2A+AX\Rightarrow(I-A)X=2A$$

$$X=2(I-A)^{-1}A$$ ························6

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$$ ················8

$$X=2\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 10 & 4\\ -2 & 4 & 2\\ -4 & 10 & 0\end{pmatrix}$$ ·········10

三、（10分）对下列线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

试讨论:当a取何值时,它有唯一解?无解?有无穷多解?在有无穷多解时求其通解.(用导出组的基础解系表示通解)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & (1+a)^2(1-a) \end{pmatrix}$$

讨论　情形1　$a \neq 1,-2$　　方程组有唯一解; ……3

$$x_1 = -\frac{a+1}{a+2}, x_2 = \frac{1}{a+2}, x_3 = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$ ………5

情形2　$a=-2$时　　方程组无解.

情形3　$a=1$时　　方程组有无穷多解；　……7

$x_1+x_2+x_3=1$　　$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$是一特解。

导出组的基础解系　$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

一般解

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ …………10

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(1,0,0),\ \alpha_4=(1,2,-3)$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 按列排成矩阵:

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&4\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

秩为3　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组. …………6

$\alpha_4=-3\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3$ ……… …………10

五、(10 分) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_3=\alpha$

(1) 证明 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(2) 求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\gamma=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

(1)方法一 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$ 满秩

β_1,β_2,β_3 线性无关， $\dim(R^3)=3$

β_1,β_2,β_3 是其一组基 ……………………4

方法二

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3\alpha_3=0$$

$$k_1\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3)\alpha_3=0$$

$$\begin{cases} k_1=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_1+k_2+k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=0, k_2=0, k_3=0$$

β_1,β_2,β_3 线性无关，$\dim(R^3)=3$

β_1,β_2,β_3 是其一组基.

(2) $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},$$ ………………………6

(3) $\gamma=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

向量γ关于基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

10…………………

六、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一个正交向量组，

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

$$\alpha_1^T \quad k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$$

$$k_1\alpha_1^T\alpha_1+k_2\alpha_1^T\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_1^T\alpha_m=0$$

$$k_1\alpha_1^T\alpha_1=0 \quad \Rightarrow k_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$$

同理可证 $k_2=0, k_3=0, \cdots k_m=0$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10

七、（10 分）已知线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $k_1(1,0,0)^T+k_2(2,1,0)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

$$\beta_1=(1,0,0)^T$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5$$

$$=(2,1,0)^T-\frac{2}{1}(1,0,0)^T$$

$$=(0,1,0)^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$ ……………………2

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$$

$\lambda=0,\lambda=3$ ……………………4

$\lambda = 0$

$$(\lambda I - A)X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$$

基础解系 $X_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交化

$$Y_{11} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化

$$Z_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Z_{12} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

……………………6

$\lambda = 3 \qquad (3I - A)X = 0$

基础解系 $X_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位化 $Z_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}_{12}$$

…………………8

(2) A不是正定的,因为它的特征值不全大于.

…………………10

九、（10 分）已知 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\mathbf{1},\mathbf{-1},\mathbf{0})$ 。

(1) 求 $A^2 - I$ 的所有特征值;

(2) 证明 $A^2 - I$ 为不可逆矩阵。

解 (1) A的所有特征值为$1,-1,0$

$A^2 - I$ 的所有特征值为 $0,0,-1$ ……………………5

(2) $\det(A^2 - I) = 0\cdot 0\cdot(-1) = 0$ $A^2 - I$为不可逆矩阵。

……………………10

$$A^2 - I = (A - I)(A + I) = -(I - A)(A + I)$$

1为A的特征值,故$\det(I - A) = 0$, $I - A$ 不可逆

$A^2 - I$为不可逆矩阵。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{r}$ $(\boldsymbol{0} < \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n})$。

(1) 试确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}|$ 的值。

解 (1) 设A的特征值为λ, 则由 $A^2 - A = 0$

得 $\lambda^2 - \lambda = 0$ 因而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$ ……………………5

(2) 由 $r(A)=r$, 得 $q_{\lambda=0} = n - r$

$$A^2 - A = 0 \Rightarrow -A(I - A) = 0$$

$$\Rightarrow r(A) + r(I - A) \le n$$

$$A + (I - A) = I$$

$$\Rightarrow r(A) + r(I - A) \ge n$$

$r(A) + r(I - A) = n$

A有n个线性无关的特征向量,所以可以对角化.

$r(I - A) = n - r$

得 $q_{\lambda=1} = r$ ………………8

$$(3)\ \left|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}\right| = (0-2)^r \cdot (1-2)^{n-r} = (-2)^r \cdot (-1)^{n-r}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10