北京理工大学《数学分析》

2011-2012 学年第二学期期末试题及参考答案(A 卷)

班级________　　学号________　　姓名________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸，试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												
签名												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 平面 $\pi_1: 3x+2y-z+6=0$ 与 $\pi_2: 3x+2y-z-7=0$ 之间的距离 $d=$________.

2. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+|y|^3}$，根据偏导数的定义，$f_y'(0,0)=$________.

3. 设 $\vec{A}=e^{xy}\vec{i}+\sin(xy)\vec{j}+\sin(xz^2)\vec{k}$，则 $div\vec{A}=$________.

4. 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint\limits_S (x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)dS=$________.

5. $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=3$ 处的泰勒级数展开式为 $f(x)=$________.

二. (8 分)已知 $e^z-xz=y$ 确定函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三. (8 分) 证明曲线$\begin{cases} x^2 - z = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$在点$P(1,-2,1)$处的切线与直线$\begin{cases} 3x - 5y + 5z = 0 \\ x + 5z + 1 = 0 \end{cases}$垂直.

四. (11 分) 求函数$z = xy(1 - x - y)$的极值点和极值.

五. (9 分) 将 $I=\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}\frac{dy}{\sqrt{(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)}}$ 化成极坐标系中的累次积分，并求出积分的值.

六. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ 的收敛域及和函数.

七. (9 分) 设 V 是由柱面 $y=x^2$, 平面 $y+z=1$ 以及 xOy 面所围成的空间有界闭区域, 计算

$$I=\iiint_V x^2\,dxdydz.$$

八. (10 分) 已知 $\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ 在右半平面 $(x>0)$ 是函数 $u(x,y)$ 的全微分, 求 a,b 的值, 并求 $u(x,y)$.

九. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi\end{cases}$ ，求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上以 2π 为周期的傅里叶级数展开式中 $\sin nx$ 的系数 b_n，并给出此傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数 $S(x)$ 的表达式.

十. (9 分) 利用高斯公式计算 $I=\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z+3)dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧.

十一. (9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且满足 $f(x)=\sin x+\int_0^x (x-u)f(u)du$，求 $f(0)$，$f'(0)$，并证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.

(2011-2012-2)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2012.6）

一. **1.** $\dfrac{13}{\sqrt{14}}$

2. 0

3. $ye^{xy}+x\cos(xy)+2xz\cos(xz^2)$

4. $\dfrac{7}{3}\pi a^4$

5. $\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}(x-3)^n$

二. $$e^z\frac{\partial z}{\partial x}-z-x\frac{\partial z}{\partial x}=0$$ ……………………………..(2 分)

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{e^z-x}$$ ……………………………….(3 分)

$$e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=1$$ …………………………..(5 分)

解得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^z-x}$$ ……………………………….(6 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}(e^z-x)-z\cdot e^z\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}$$ …………………………(7 分)

$$=\frac{(e^z-x-ze^z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-x)^2}=\frac{e^z-x-ze^z}{(e^z-x)^3}$$ …………………………..(8 分)

三. $$\begin{cases}2x-\dfrac{dz}{dx}=0\\ 3+2\dfrac{dy}{dx}=0\end{cases}$$ …………………..(2 分)

将点 P 代入解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{2}$ $\dfrac{dz}{dx}=2$ …………………..(3 分)

曲线的切向量为 $\vec{T}=\{1,-\dfrac{3}{2},2\}$ ………………..(4 分)

直线的方向向量为 $\vec{s}=\{3,-5,5\}\times\{1,0,5\}=\{-25,-10,5\}$ …………(7 分)

由于 $\vec{T}\cdot\vec{s}=-25+15+10=0$ $\vec{T}\perp\vec{s}$ 故得证 …………(8 分)

四. $$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1-2x-y)\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x(1-x-2y)$$ ………………..(2 分)

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得驻点 $P_1(0,0)$ $P_2(0,1)$ $P_3(1,0)$ $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ………(4 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-2x-2y\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$$ ………………(6 分)

在点 $P_1(0,0)$，$A=0,B=1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_1(0,0)$ 不是极值点 ………………(7 分)

在点 $P_2(0,1)$，$A=-2,B=-1,C=0$ $AC-B^2=-1<0$

故 $P_2(0,1)$ 不是极值点 ………………..(8 分)

同理，$P_3(1,0)$ 不是极值点 ………………..(9 分)

在点 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$A=-\frac{2}{3},B=-\frac{1}{3},C=-\frac{2}{3}$ $AC-B^2=\frac{1}{3}>0$

又 $A<0$，故 $P_4(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 是极大值点，极大值为 $z\Big|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=\frac{1}{27}$ ……………(11 分)

五. $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}$$ …………………………(4 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta$$ ………………………(7 分)

$$=\frac{\pi^2}{32}$$ ……………………..(9 分)

六. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1\qquad R=1$$ …………………..(1 分)

$x=1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$，发散

$x=-1$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$，收敛

收敛域为 $[-1,1)$ …………………(3 分)

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x} \qquad \text{……………….(6 分)}$$

$$S(x)=-x-\ln(1-x) \qquad \text{……………..(8 分)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\begin{cases}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x) & x\in[-1,1),x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases} \qquad \text{……………..(9 分)}$$

七.

$$I=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{1-y}x^2dz \qquad \text{……………………..(4 分)}$$

$$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 x^2(1-y)dy \qquad \text{……………………..(6 分)}$$

$$=2\int_0^1(\frac{1}{2}x^2-x^4+\frac{1}{2}x^6)dx \qquad \text{……………………..(8 分)}$$

$$=\frac{8}{105} \qquad \text{……………………..(9 分)}$$

八.

由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ ………………..(1 分)

$$-\frac{x^2+y^2-(x-y+b)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2+y^2-(ax+y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{……………(3 分)}$$

得 $a=1 \quad b=0$ ………………..(4 分)

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C \qquad \text{………………..(6 分)}$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}dx-\int_0^y\frac{x-y}{x^2+y^2}dy+C \qquad \text{………………..(8 分)}$$

$$=-\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C \qquad \text{………………..(10 分)}$$

九. $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$$ ……………..(3 分)

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$ ………………(5 分)

$$S(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \end{cases}$$ …………………..(8 分)

十. 设曲面 $S_1 : z = 0 \quad (x^2 + y^2 \le 1)$

$$I = \oiint_{S+S_1^+} - \iint_{S_1^+} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3)dzdx + (2xy + y^2 z + 3)dxdy$$ ……….(1 分)

$$\oiint_{S+S_1^+} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3)dzdx + (2xy + y^2 z + 3)dxdy$$

$$= -\iiint_V (z^2 + x^2 + y^2)dV$$ ………………..(3 分)

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi dr$$ ………………..(5 分)

$$= -\frac{2}{5}\pi$$ ………………..(6 分)

$$\iint_{S_1^+} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3)dzdx + (2xy + y^2 z + 3)dxdy$$

$$= \iint_{S_1^+} (2xy + 3)dxdy$$ …………………..(7 分)

$$= \iint_{D_{xy}} (2xy + 3)dxdy = \iint_{D_{xy}} 3dxdy = 3\pi$$ …………………..(8 分)

$$I = -\frac{2}{5}\pi - 3\pi = -\frac{17}{5}\pi$$ …………………(9 分)

十一. $$f(x) = \sin x + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$ ………………..(1 分)

$$f'(x) = \cos x + \int_0^x f(u)du$$ ………………..(2 分)

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$$ ………………..(3 分)

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)=x+o(x)$$

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$$ ………………..(5 分)

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$发散 ………………..(6 分)

因为$f'(0)=1>0$，且$f'(x)$连续，故在$x=0$某邻域内$f'(x)>0$，

$f(x)$单调增加，因此当n充分大时，$f(\frac{1}{n})$单调减少 ……………(8 分)

又 $$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)=0$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$$收敛 ..…………………(9 分)