

# 线性代数期末考试(A卷) 参考答案与评分标准

一. (10分)

解法一:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A^{-1}| = 1$$

----- 4'

$$|2B| = 2^2|B| = 4 \times 1 = 4$$

----- 8'

提

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix} = |A^{-1}| |2B| = 1 \times 4 = 4$$

----- 10'

解法二:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{提 } |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$$

----- 4'

$$|2B| = 2^2|B| = 4 \times 1 = 4$$

----- 8'

从而

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 2B \end{vmatrix} = |A^{-1}| |2B| = 1 \times 4 = 4$$

----- 10'

二. (10分)

解: 在  $AXA^* = 2XA^* + I$  的两边同时右乘  $A$ , 得

$$|A|AX = 2|A|X + A$$

----- 2'

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

----- 4'

则上式成为

$$3AX = 6X + A$$

也即

$$(3A - 6I)X = A$$

从而

$$X = (3A - 6I)^{-1}A$$

----- 6'

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1} A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

----- 8'

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

----- 10'

(2)

三、(10分)

解：写出方程组的增广矩阵，并用初等行变换将之化为阶梯形

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dots\dots 3'$$

现，与方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -14x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 28 \end{cases}$$

选  $x_3, x_4$  为自由未知数，分离自由未知数，得

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 11 - 2x_3 + 3x_4 \\ -14x_2 = 28 - 2x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

令  $x_3 = x_4 = 0$ ，得原方程组的一个特解：

$$X_0 = (1, -2, 0, 0)^T \dots\dots 5'$$

与导出方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 3x_4 \\ -14x_2 = -2x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

令  $x_3=1, x_4=0$  得

$$X_1 = \left(-\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 1, 0\right)^T \quad \text{----- } 7'$$

令  $x_3=0, x_4=1$  得

$$X_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)^T \quad \text{----- } 9'$$

于是，原方程组的通解为

$$X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad \text{----- } 10'$$

其中  $k_1, k_2$  为任意常数。

四. (10分)

解: (1) 以  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  为列构造矩阵, 再用初等行变换将之化为阶梯形

$$[\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... 2'

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此知, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩为 3, .....

4'

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为它的一个极大无关组; .....

6'

(2)

$$\text{记 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4]$$

$$\text{易见, } \eta_4 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

$$\text{所以 } \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

..... 10'

(5)

五. (10分)

(1) 证明: 要证明  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $R^3$  的一个基, 只需证其线性无关.

法一: 设  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ , 即

$$k_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(3\alpha_1 + 2\alpha_2) + k_3\alpha_3 = 0$$

整理得

$$(2k_1 + 3k_2)\alpha_1 + (k_1 + 2k_2)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关知,

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

解之得  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

故  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关, 从而构成  $R^3$  的一个基. ....4'

法二:

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又知  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  可逆

所以  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关, 从而构成  $R^3$  的一个基. ....4'

(6)

(2) 解:  $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以, 基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

----- 7'

(3) 解:  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3] (1, 1, 1)^T$

提  $X = (1, 1, 1)^T$

$\gamma$  关于基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的坐标

$$Y = A^{-1}X$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

----- 10'

六、(10分)

解: (1) 矩阵  $A$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

所以,  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$  ..... 3'

将  $\lambda_1 = 1$  代入特征方程, 得

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

求得其中一个基础解子:  $X_{11} = (-1, 2, 20)^T$ ,

是,  $A$  的属于特征值 1 的全部特征向量为

$$k_{11} X_{11} \quad (k_{11} \neq 0) \quad \dots\dots 5'$$

再将  $\lambda_3 = 2$  代入特征方程, 得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

求得其中一个基础解子:  $X_{31} = (0, 0, 1)^T$ ,

是,  $A$  的属于特征值 2 的全部特征向量为

$$k_{31} X_{31} \quad (k_{31} \neq 0) \quad \dots\dots 7'$$

(2) 对特征值 1 来说, 其代数重数为 1, 而几何重数为 2

从而  $A$  不能相似于对角化. .... 10'



七. (10分)

解: 由题, 只需将  $x_1, x_2$  Schmidt 正交化, 单位化. ----- 2'

正交化:

$$\text{令 } \beta_1 = x_1 = (1, 0, 1)^T, \quad \text{----- 3'}$$

$$\beta_2 = x_2 - \frac{(x_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$= x_2 - \beta_1$$

$$= (1, 1, -1)^T \quad \text{----- 5'}$$

单位化:

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T. \quad \text{----- 9'}$$

提, 此方程组的解空间的一个标准正交基为

$$\eta_1, \eta_2. \quad \text{----- 10'}$$

八、(10分)

解: (1) 由  $A \sim \text{diag}(1, 1, 0)$  知,

$A$  的特征值为  $1, 1, 0$ .

提, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  可经正交变换化为标准形

$$y_1^2 + y_2^2$$

(2) 法: 由 (1) 知,  $f$  的正惯性指数为 2, 小于 3,

从而  $f$  不定.

法 $\Rightarrow$   $A$  的特征值不全大于零,

故  $A$  不定, 也即  $f$  不定.

九、(10分)

(1) 证: 由  $|A| = 0$  知, 0 为  $A$  的一个特征值, ----- 3'

从而  $A$  的所有特征值为

$$1, 2, 0.$$

进而  $A^2 + I$  的所有特征值为

$$2, 5, 1$$

----- 6'

(2) 证明: 由 (1) 知,

$$|A^2 + I| = 2 \times 5 \times 1 = 10 \neq 0$$

所以矩阵  $A^2 + I$  可逆.

----- 10'

十. (10分)

解: (1)  $A$  为实对称矩阵, 其属于不同特征值的特征向量正交, 于是有

$$1 - 2 + a = 0$$

解得  $a = 1$

----- 4'

(2)  $A$  为实对称矩阵, 且其特征值为  $1, 0, 2$ , 于是

$$A \sim \text{diag}(1, 0, 2)$$

从而  $r(A) = 2$ .

于是方程组  $AX=0$  的基础解系中含  $3 - r(A) = 1$  个非零向量, 6'

又  $A$  属于特征值  $0$  的特征向量是  $AX=0$  的非零解,

不妨设为  $(k_1, k_2, k_3)^T$ , 利用实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交, 得

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解得其基础解系为:  $(1, 0, -1)^T$

从而可构成  $AX=0$  的一个基础解系. 9'

故  $AX=0$  的通解为:  $k(1, 0, -1)^T$ . 10'

(12)