课程编号：A071001　北京理工大学 2005-2006 学年第一学期

数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=0$ 处有极值 2，曲线 $y=f(x)$ 有一拐点 $(-1,4)$，求 a,b,c,d 的值, 并指出 $f(0)$ 是极大值还是极小值.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}$.

3. 设 $y=f(\tan x)$，$f'(x)=e^{x^2-2x+2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

4.计算广义积分 $\int_0^1\dfrac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 求极坐标系下由方程 $\rho=\theta$ 所确定的曲线在点 $(\rho,\theta)=(\pi,\pi)$ 处的法线的直角坐标方程.

2. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\sin x}{1+\cos x}dx$.

3. 设 $f(x)$ 的二阶导函数连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\cos x}{x^2}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

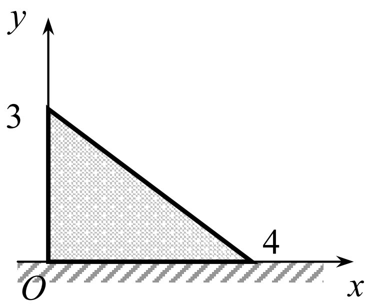
4. 求微分方程 $x^2ydx-(x^3+y^3)dy=0$ 的通解.

三.（8 分）设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(\pi)=2$，

$\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin x dx=5$，求 $f(0)$.

四.（8 分）设位于第一象限内的曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 处的切线与两坐标轴及过点 M 平行于 y 轴的直线所围成的梯形面积等于常数 3，且曲线经过点(1,1)，求此曲线的方程.

五. (8 分)一块边长分别为 $3m,4m,5m$，重为 $500kg$ 的直角三角形钢板水平放置在地板上，现将此钢板铅直立起，使其 $4m$ 长的边着地(如图)，设钢板的面密度为常数 λ，求克服重力所作的功.



六.（10 分）设函数 $y=y(x)$ 满足方程

$y'(x)+3y(x)+2\int_0^{x}y(x)dx+2\cos x=0$，且 $y(0)=-1$，求 $y(x)$.

七.（7 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明当 $x\neq 0$ 时，$f(x)>x$.

八. (7 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)+f'(x)>0$，又设 $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)+f(\frac{1}{x})]=0$，$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-f(\frac{1}{x})]=1$，求证:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内必有零点;

(2) 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点.

(数学分析 B 期末试题(A 卷)) 参考答案 (2006.1)

一. 1. $f(0)=2$，得 $d=2$， ---------------------------(1 分)

$f'(0)=(3ax^2+2bx+c)\big|_{x=0}=0$，得 $c=0$， ---------------------------(2 分)

$f''(-1)=(6ax+2b)\big|_{x=-1}=-6a+2b=0$ --------------------------(3 分)

$f(-1)=-a+b-c+d=-a+b+2=4$， --------------------------(4 分)

解得 $a=1$， $b=3$， ---------------------------(5 分)

因为 $f''(0)=2b=6>0$， 故 $f(0)$ 是极小值. ---------------------------(6 分)

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{(e^{x^5}-1)5x^4}$$ -----------------------(2 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x^4)}{x^5\cdot 5x^3}$$ --(4 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{5}.$$ ---(6 分)

3. 令 $u=\tan x$， $u\big|_{x=0}=0$，

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=e^{u^2-2u+2}\frac{1}{\cos^2 x},$$ -------------------------------(5 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e^2.$$ --(6 分)

4. 令 $t=\sqrt{1-x^2}$， 即 $x^2=1-t^2$， ----------------------------------(1 分)

$$\int_0^1\frac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}$$ ------------------------------------(3 分)

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$$ --(4 分)

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$$ ---(6 分)

二. 1. $x=\theta\cos\theta$, $y=\theta\sin\theta$, --------------------------------(1 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$ --------------------------------(3 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}=\pi,\quad x\big|_{\theta=\pi}=-\pi,\quad y\big|_{\theta=\pi}=0$$ ----------------------------(5 分)

法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x+\pi)=-\frac{1}{\pi}x-1$. ------------------------------(7 分)

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ ------------------(1 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$ -----------------------------(2 分)

$$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}+4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 4.$$ ---------------------------------(7 分)

3. $f(x)+\cos x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ ------- --(2 分)

由题设，得 $f(0)+1=0$, $f'(0)=0$, $\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{2}=1$, ------------------------(5 分)

解得 $f(0)=-1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=3$. ------------------------(7 分)

4. 方程变成 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$, ---------------------------(1 分)

令 $\frac{y}{x}=u$, 即 $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, ---------------------------(3 分)

方程变成 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}$, $\frac{1+u^3}{u^4}du=-\frac{dx}{x}$, ---------------------------(4 分)

积分得 $-\frac{1}{3u^3}+\ln|u|=-\ln|x|+C_1$, ---------------------------(6 分)

即 $\ln|y|=\frac{x^3}{3y^3}+C_1$, $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$. ---------------------------(7 分)

三. $\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin x dx=\int_0^{\pi}f''(x)\sin x dx-\int_0^{\pi}f(x)d\cos x$ -------(2 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin x dx-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cos x dx$ ---------------------(4 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin x dx+f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)d\sin x$

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin x dx+2+f(0)+f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\sin x dx$

$=2+f(0)=5$ --------------------------------(7 分)

$\therefore f(0)=3$. --------------------------------(8 分)

四. (图 1)过 $M(x,y)$ 的切线 $Y-y=y'(X-x)$,

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$, -----------------------------------(2 分)

梯形面积 $A=\dfrac{1}{2}(y+y-xy')x=\dfrac{1}{2}x(2y-xy')=3$,

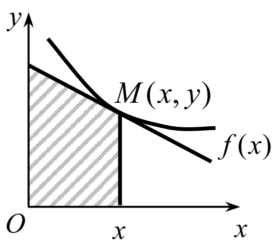
即 $y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{6}{x^2}$, $y(1)=1$, ----------------------------------(5 分)

解得 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}(C+\int-\dfrac{6}{x^2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)=Cx^2+\dfrac{2}{x}$, -------------------------(7 分)

由初始条件, 得 $C+2=1$, $C=-1$,

所求曲线为 $y=-x^2+\dfrac{2}{x}$. ------------------------------------(8 分)

图1



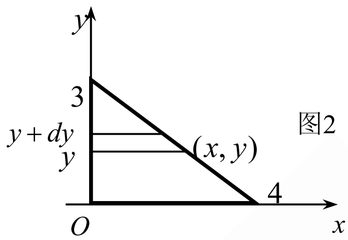


图2

五. (如图 2) $x=4-\dfrac{4}{3}y$, ------------------------------(1 分)

$\rho=\dfrac{500}{\frac{1}{2}\times 3\times 4}=\dfrac{250}{3}(kg/m^2)$, ------------------------------(2 分)

$dW=\rho g\cdot y\cdot x dy=\rho g\cdot y(4-\dfrac{4}{3}y)dy$, ------------------------------(5 分)

$W=\int_0^3\rho g(4y-\dfrac{4}{3}y^2)dy$ ---------------------------------------(7 分)

$=6\rho g=500g(J)$. --(8 分)

六. 方程两边对 x 求导, 得

$$y'' + 3y' + 2y = 2\sin x,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \qquad \text{-----------------------------------(2 分)}$$

$$r^2 + 3r + 2 = 0, \quad r_1 = -1, \quad r_2 = -2, \qquad \text{----------------------------(4 分)}$$

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}, \qquad \text{-----------------------------(5 分)}$$

设 $$y^* = A\cos x + B\sin x, \qquad \text{-----------------------------(6 分)}$$

代入方程解得 $A = -\frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$,

$$y^* = -\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x, \qquad \text{---------------------------(7 分)}$$

通解为 $$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x, \text{---------------------------(8 分)}$$

由初始条件得 $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{2}{5}$,

$$y = -\frac{2}{5}e^{-2x} - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x. \qquad \text{------------------------------(10 分)}$$

七. 证 1 由题设, 得 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ---------------------------(1 分)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \text{---------------------------(2 分)}$$

当 $x \neq 0$, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 > x$. --------------(7 分)

证 2 令 $$F(x) = f(x) - x, \qquad \text{-----------------------------------(1 分)}$$

$$F'(x) = f'(x) - 1,$$

由题设, 得 $$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \text{-----------------------------------(3 分)}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1, \qquad F'(0) = 0, \text{------------------------------(4 分)}$$

$$F''(x) = f''(x) > 0,$$

$F(0) = 0$ 是极小值也是最小值, 故当 $x \neq 0$, 有 $F(x) > 0$, 即

$$f(x) > x. \qquad \text{-------------------------------------(7 分)}$$

八. (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(\frac{1}{x})]=1$，得 $\lim\limits_{x\to0^+}[f(\frac{1}{x})-f(x)]=1$，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}[\lim_{x\to0^+}[f(x)+f(\frac{1}{x})+f(x)-f(\frac{1}{x})]=-\frac{1}{2}<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\lim_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}>0,$$

故 $\exists\xi\in(0,+\infty)$， 使 $f(\xi)=0$； ------------------------------(4 分)

(2) 令 $F(x)=f(x)e^x$，

若 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$，$\xi_1<\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，

则 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，

因而 $\exists c\in(\xi_1,\xi_2)$， 使 $F'(c)=0$，

但由题设， $F'(x)=[f'(x)+f(x)]e^x>0$，

矛盾， 故 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点. -----------------------------(7 分)