课程编号：A073003　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 B 试题 A 卷

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&5\\0&1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\3&4&3\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&3\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{vmatrix}$ 的值。

二、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$， 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆；（2）求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）已知平面上三条直线的方程 $x-y+a=0, 2x+3y-1=0, x-ay-\frac{1}{2}=0$
讨论的取值与这三条直线相互位置之间的关系。

四、（10 分）已知

$\boldsymbol{\alpha_1=(1,2,3,-4)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_2=(2,3,-4,1)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_3=(2,-5,8,-3)^T}$， $\boldsymbol{\alpha_4=(3,-4,1,2)^T}$ （1）求向量组 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R^3}$ 的一个基, $\boldsymbol{\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3}$， $\boldsymbol{\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3}$， $\boldsymbol{\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3}$。

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$ 为 $\boldsymbol{R^3}$ 的一个基;

(2) 求基 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 到基 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\boldsymbol{\gamma=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3}$ 关于基 $\boldsymbol{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$ 的坐标。

六、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1=(1,0,-1)}$, $\boldsymbol{\alpha_2=(2,2,0)}$, $\boldsymbol{\alpha_3=(0,1,1)}$。求生成子空间 $\boldsymbol{L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ 的一个标准正交基。

七、（10 分）设为 $\boldsymbol{A}$ 正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，求证 $\boldsymbol{\lambda}=-1$ 为的 $\boldsymbol{A}$ 一个特征值。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；（2）该二次型是否正定？

九、（10 分）设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_1\\ 3\boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 都是三维行向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=\mathbf{18},|\boldsymbol{B}|=\mathbf{2}$，求 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}\quad (\mathbf{0}<\boldsymbol{r}\le\boldsymbol{n})$。

(1) 试确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的取值范围；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}$ 一定可以相似对角化；

(3) 求行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|$ 的值。