课程编号：A073003　　北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

2006 级线性代数试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-6\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&0\\0&2\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$ 。

二、（10 分）已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&3&-18\\2&4&0\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 满足 $4\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{-1}$，求 $\boldsymbol{X}$。

三、（10 分）求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=-1\\2x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-3\\4x_1+3x_2-3x_3+3x_4=-3\end{cases}$$

（用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,4,8)^T,\alpha_3=(1,3,9,27)^T,\alpha_4=(1,4,12,34)^T$$

求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组。

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 4 维向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的两个基，从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$。已知向量 γ 关于基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的坐标为 $(1,-1,2,-2)$，求 γ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标。

六、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&0&6\\0&-3&4\\0&0&-5\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-5&&\\&-3&\\&&-3\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

七、（10 分）已知欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-1)$，求 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个标准正交基。

八、（10 分）求可逆线性替换，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+x_1x_3$$

化为标准形。

九、（10 分）证明：若 n 阶方阵 A,B,C 满足：$AB=AC,B\neq C$，则 A 不满秩。

十、（10 分）举例说明：由 $AB=AC,A\neq 0$ 不能导出 $B=C$。