课程编号：A073003

北京理工大学2007-2008学年第一学期

2006级线性代数试题A卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10分）已知 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-6\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B\end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B\end{vmatrix}=|A^{-1}|\cdot|2B|=|A|^{-1}\cdot 2^2|B|$

$=\frac{1}{7}\cdot 4\cdot(-2)=-\frac{8}{7}$

二、（10分）已知3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}4&3&-18\\2&4&0\\-1&-1&4\end{pmatrix}$ 和 X 满足 $4XA^{-1}=X-A^{-1}$，求 X。

解：$4XA^{-1}=X-A^{-1}$ （左右两边右乘 A）

$4X=XA-I$

$X(4I-A)=-I$

$(A-4I)X=I$ （A-4I 与 X 互逆 所以可交换）

$X=(A-4I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&3&-18&1&0&0\\2&0&0&0&1&0\\-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&3&-18&1&0&0\\0&-1&0&0&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&-18&1&\frac{3}{2}&3\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&1&-\frac{1}{18}&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{6}\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&-1\\-\frac{1}{18}&-\frac{1}{12}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

三、（10 分）求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

（用导出组的基础解系表示通解）

解：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（简化阶梯形矩阵 并且主元在主对角线上）

那么特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

四、（10 分）已知

$$\alpha_1 = (1,1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,2,4,8)^T, \alpha_3 = (1,3,9,27)^T, \alpha_4 = (1,4,12,34)^T$$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组。

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 12 \\ 1 & 8 & 27 & 34 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \\ 0 & 7 & 26 & 33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为3　$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 是一个极大无关组

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 4 维向量空间 V 的两个基，从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$。已知向量 γ 关于基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的坐标为 $(1,-1,2,-2)$，求 γ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标。

解: $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A$

$$\gamma=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-6\end{pmatrix}$$

坐标为 $\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-6\end{pmatrix}$

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&0&6\\0&-3&4\\0&0&-5\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}-5&&\\&-3&\\&&-3\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$。

解 P的3列是对应于特征值 -5, -3, -3 A的特征向量

$$A-(-5)I=\begin{pmatrix}2&0&6\\0&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$A-(-3)I=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&4\\0&0&-2\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ 特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

七、（10 分）已知欧氏空间 R^3 的一个基 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(2,3,1),\alpha_3=(1,1,-1)$，求 R^3 的一个标准正交基。

解：$(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ 是 R^3 的一个标准正交基

八、（10 分）求可逆线性替换，把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2+x_1x_3$$

化为标准形。

解：$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

得 $f=-2y_1^2+2y_2^2+y_1y_3+y_2y_3$

$=-2(y_1-\frac{1}{4}y_3)^2+2(y_2+\frac{1}{4}y_3)^2$

$\begin{cases} z_1=y_1-\frac{1}{4}y_3 \\ z_2=y_2+\frac{1}{4}y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1=z_1+\frac{1}{4}z_3 \\ y_2=z_2-\frac{1}{4}z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$

$f=-2z_1^2+2z_2^2$

$\begin{cases} x_1=z_1+z_2 \\ x_2=z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$

九、（10 分）证明：若 n 阶方阵 A,B,C 满足：$AB=AC,B\neq C$，则 A 不满秩。

证明　若 A 满秩 则 A 可逆 即 $A^{-1}A=I$

$A^{-1}AB=A^{-1}AC \Rightarrow B=C$ 与 $B\neq C$ 矛盾

故 A 不满秩

十、（10 分）举例说明：由 $AB=AC,A\neq 0$ 不能导出 $B=C$。

解　$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

则 $AB=AC=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　$A\neq 0$.

$B\neq C$.