北京理工大学《数学分析 B》

2005-2006 学年第二学期期中试题及参考答案

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 已知$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$，且 $\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ 与 $3\vec{a}-\vec{b}$ 垂直，求 λ 的值.

2. 设 $z=f(x+\varphi(x-y),y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，φ 有二阶导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 的切线和法平面方程.

4. 计算积分 $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy$.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 求函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处沿曲线 $x=t,\quad y=2t^2$，$z=-2t^4$ 在点 M 的切线的正方向(即 t 增大的方向)上的方向导数.

2. 设 $z=x+f^2(y-z)$，其中 f 是可导函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},dz$.

3. 求点 $M(1,0,2)$ 到直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的距离.

4. 设 f 是连续函数，试将 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}f(z)dz$ 化成定积分.

三. (9 分)设 D 是由直线 $x+y=6$ 与 x 轴和 y 轴所围成的平面有界闭区域，求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在区域 D 上的最大值和最小值.

四．(9 分）已知直线 L 在平面 $\pi: x+y+z+1=0$ 上，且通过直线

$L_1:\begin{cases} x+2z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ 与平面 π 的交点并与 L_1 垂直，求直线 L 的方程.

五．（14 分）分别就下列区域 V 计算积分 $I=\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$：

(1) V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 围成;

(2) V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2\ \ (z\ge 0)$ 与平面 $z=1$ 围成.

六. (8 分) 设 $F(t)=\iiint\limits_\Omega [z^2+f(x^2+y^2)]dV$，其中 f 是连续函数,

$\Omega: x^2+y^2\le t^2\ (t>0),\ 0\le z\le h$，求 $\dfrac{dF}{dt}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

七．（8 分）求常数 a,b,c 的值，使函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点

$M(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正方向的方向导数有最大值 64.

参考答案

一. 1. $(\lambda\vec{a}+17\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=3\lambda\vec{a}^2+(51-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-17\vec{b}^2$

$=12\lambda+(51-\lambda)\times 2\times 5\times(-\frac{1}{2})-17\times 5^2=17\lambda-680=0$ …………(5 分)

$\lambda=40$ ………………..(6 分)

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(1+\varphi')$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-\varphi')+f_2'$ ………………(4 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''\cdot(-\varphi')+f_{12}''](1+\varphi')-f_1'\cdot\varphi''$ …………………(6 分)

3. 〈**解 1**〉 $\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$,

将点 $(1,-2,1)$ 代入，解得 $\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{dz}{dx}=-1$，

$\vec{n}=\{1,0,-1\}$ …………………(4 分)

切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$

法平面 $(x-1)-1(z-1)=0$ 即

$x-z=0$ …………………(6 分)

〈**解 2**〉

$\vec{n}=\{2x,2y,2z\}\times\{1,1,1\}=\{2,-4,2\}\times\{1,1,1\}=6\{-1,0,1\}$ …………(4 分)

切线 $$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{1}$$

法平面 $-(x-1)+(z-1)=0$ 即

$x-z=0$ ………………..(6 分)

4. 原式

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}ye^{xy}dx+\int_{1}^{2}dy\int_{1}^{2}ye^{xy}dx$$ …………………(2 分)

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{xy}\Big|_{\frac{1}{y}}^{2}dy+\int_{1}^{2}e^{xy}\Big|_{1}^{2}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(e^{2y}-e)dy+\int_{1}^{2}(e^{2y}-e^{y})dy$$

$$=\frac{1}{2}e^{4}-e^{2}$$ ……………….……...(6 分)

二. 1. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ………….........

.(2 分)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=-\frac{1}{27}\qquad\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=-\frac{2}{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=\frac{2}{27}$$ ……………..(3 分)

$$\vec{T}=\{1,4t,-8t^3\}\Big|_{t=1}=\{1,4,-8\}$$

$$\vec{T}^0=\{\frac{1}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\}$$ …………….(5 分)

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{T}}=-\frac{1}{27}\times\frac{1}{9}-\frac{2}{27}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{27}(-\frac{8}{9})=-\frac{25}{243}$$ ………………

…(7 分)

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=1+2f\cdot f'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial x})$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+2f\cdot f'}$ ………………..(3 分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=2f\cdot f'\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial y})$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2f\cdot f'}{1+2f\cdot f'}$ ………………..(6 分)

$dz=\frac{1}{1+2f\cdot f'}dx+\frac{2f\cdot f'}{1+2f\cdot f'}dy$ …………………(7 分)

3. 〈解 1〉 $d=\frac{|\{1,1,1\}\times\{2,-2,1\}|}{|\{2,-2,1\}|}=\frac{|\{3,1,-4\}|}{3}=\frac{\sqrt{26}}{3}$ …………………..(7 分)

〈解 2〉 过点 (1,0,2) 与已知直线垂直的平面为

$2x-2y+z-4=0$ …………………..(2 分)

它与直线的交点为 $N(\frac{2}{9},-\frac{11}{9},\frac{10}{9})$， …………………..(5 分)

$d=MN=\sqrt{(1-\frac{2}{9})^2+(\frac{11}{9})^2+(2-\frac{10}{9})^2}=\frac{\sqrt{26}}{3}$ …………………..(7 分)

4. 原式 $=\int_0^1 f(z)dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}dy$ …………………..(3 分)

$= \int_0^1 f(z)dz \int_0^{1-z}(1-x-z)dx$ …………………(5 分)

$= \int_0^1 f(z)(\frac{1}{2}-z+\frac{z^2}{2})dz = \int_0^1 f(z)\frac{1}{2}(z-1)^2 dz$ …..………(7 分)

三. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4y-2xy-y^2 = 0$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x-x^2-2xy = 0$

解得 $x = y = \frac{4}{3}$ 得驻点 $P_1(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ ………………..(4 分)

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上，$z \equiv 0$ ………………..(5 分)

由 $x+y=6$ 得 $y=6-x$，代入目标函数得

$$z = 2(x^2-6x)$$

$\frac{dz}{dx} = 2(2x-6) = 0$ 得 $x=3$ 故 $y=3$ 得点 $P_2(3,3)$ …………(7 分)

$$z(\frac{4}{3},\frac{4}{3}) = \frac{64}{27}$$

$z(3,3) = -18$ …………….(8 分)

$$z_{\max} = \frac{64}{27}$$

$z_{\min} = -18$ ……………..(9 分)

四．解 $\begin{cases} x+2z=0 \\ y+z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}$ 得 L_1 与 π 的交点

$(0,-1,0)$ ……………(3 分)

L_1 的方向向量为

$\bar{s}_1=\{1,0,2\}\times\{0,1,1\}=\{-2,-1,1\}$ ……………….(5 分)

L 的方向向量为

$\vec{s}=\{1,1,1\}\times\{-2,-1,1\}=\{2,-3,1\}$ ……………….(7 分)

$L:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ ………………..(9 分)

五． (1)

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\cos\varphi dr$ …………………..(3 分)

$=\dfrac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^6\varphi d\varphi$ …………………..(5 分)

$=-\dfrac{64\pi}{35}\cos^7\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{64}{35}\pi$ …………………..(7 分)

(2)

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_1^{\sqrt{2-\rho^2}}z\sqrt{\rho^2+z^2}dz$ ……………………(10 分)

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 \rho(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\sqrt{2-\rho^2}}d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^1 \rho[2^{\frac{3}{2}}-(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}]d\rho$$ …………………

…(12 分)

$$=\frac{2\pi}{3}[\sqrt{2}\rho^2-\frac{1}{5}(\rho^2+1)^{\frac{5}{2}}]\Big|_0^1=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{15}\pi$$ ………………(14 分)

六 .

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^h(z^2+f(\rho^2))dz$$ ……………………(2 分)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho d\rho\int_0^h z^2dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho\int_0^h dz$$

$$=\frac{1}{3}\pi t^2h^3+2\pi h\int_0^t\rho f(\rho^2)d\rho$$ ……………………(4 分)

$$\frac{dF}{dt}=\frac{2}{3}\pi th^3+2\pi htf(t^2)$$ ……………………(6 分)

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{2t}=\lim_{t\to0^+}[\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(t^2)]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(0)$$ …………………(8 分)

七. $f'_x=ay^2+3cx^2z^2$　　$f'_y=2axy+bz$　　$f'_z=by+2cx^3z$

$gradf(M)=\{4a+3c,4a-b,2b-2c\}$ ……………….(3 分)

$4a+3c=0$ $4a-b=0$

$2b-2c=64$ ……………….(6 分)

解 得 $a=6$ $b=24$

$c=-8$ ………………..(8 分)