

课程编号：A073122

北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

一、(10 分) 已知 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，且 $A^{-1}XA^* = A^{-1} - A^*XB$ ，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 2 & 2 & \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & -1 & 0 & \\ -4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 X 。

解：

$$A^{-1}XA^* = A^{-1} - A^*XB,$$

$$XA^* = I - AA^*XB$$

$$X(A^* + |A|B) = I$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}, \quad |A^*| = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

$$X = (A^* + 2B)^{-1}$$

$$X = (A^* + 2B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

二、(10 分) 问 a, b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 并求出有无穷多组解时的通解 (用导出组的基础解系表示通解)。

解 方法一: $B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

(1) 当 $r(A) = 4 \Leftrightarrow a \neq 1$ 时, 方程组有唯一解;

(2) 当 $a = 1$ 时, 方程组无解或无穷多解, 此时

$$B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

① 当 $b = -1$ 时, $r(A) = r(B) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解; 此时

$$B = [A:b] \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{方程组的通解为 } X = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数};$$

② 当 $b \neq -1$ 时, $r(A) = 2, r(B) = 3$, 方程组无解

综上可得:

(1) 当 $a \neq 1$ 时, 方程组有惟一解;

(2) 当 $a = 1, b = -1$ 时, 方程组有无穷多解;

(3) 当 $a = 1, b \neq -1$ 时, 方程组无解

方法二: 方程组的系数行列式 $|A| = (a-1)^2$. (1) 当 $|A| = (a-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ 时, 方程

组有唯一解; (2)以下同方法一.

三、(10 分) 已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明: $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x) = 1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

解:

$$(1) \quad k_1 \mathbf{1} + k_2(1+x) + k_3(1+x+\frac{x^2}{2!}) + k_4(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}) = \mathbf{0}$$

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)\mathbf{1} + (k_2+k_3+k_4)x + \left(\frac{k_3}{2!} + \frac{k_4}{2!}\right)x^2 + \frac{k_4}{3!}x^3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4 = 0 \\ k_2+k_3+k_4 = 0 \\ k_3+k_4 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}, \quad \text{所以} \quad k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

故 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基

$$(2) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -30 \\ 36 \end{pmatrix}$$

四、(10 分) 已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 0, 1)^T, \alpha_3 = (2, 1, 3, 0)^T, \alpha_4 = (2, 5, -1, 4)^T, \alpha_5 = (1, -1, 3, -1)^T$$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 将其余向量用极大无关组表示出来。

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以向量组秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大无关组,

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_5 = -\alpha_2 + \alpha_3$$

五、(10 分) 设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda + 1)^3, (\lambda - 1)^2, \lambda$ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形; (2) 求 A 的特征值。

解: (1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A 的特征值为 -1 (三重), 1 (二重), 0

六、(10 分) 在线性空间 $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中定义线性变换 σ :

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 证明: σ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换;

(2) 写出 σ 在基 $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。

解 (1) 易知 σ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个变换, 任取 $X, Y \in M_2(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}$, 由矩阵运算性质, 得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (aX + bY) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

即 $\sigma(aX + bY) = a\sigma(X) + b\sigma(Y)$, 故 σ 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的线性变换。

(2) 显然 $M_2(\mathbb{R})$ 是实数域上四维线性空间, 其标准基为

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{因 } \sigma(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = E_1 + 2E_2 + E_3 + 2E_4,$$

$$\sigma(E_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -E_1 + E_2 - E_3 + E_4,$$

$$\sigma(E_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = E_1 + 2E_2 + E_3 + 2E_4,$$

$$\sigma(E_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -E_1 + E_2 - E_3 + E_4,$$

$$\text{故 } \sigma(E_1, E_2, E_3, E_4) = [E_1, E_2, E_3, E_4] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

σ 在标准基下的矩阵为上式最右边矩阵。

七、(10 分) 求下列实系数齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一组标准正交基。

解 解此方程组得基础解系: $\alpha_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (4, -5, 0, 0, 1)$.

$$\beta_1 = \alpha_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \left(\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1\right)$$

再单位化得

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0, 0)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, -1, 2, 0)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\left(\frac{7}{3}, -2, 2, \frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

八、(10 分) 已知实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,

(1) 问 A 是否可逆;

(2) 求一正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

解: (1) $A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, 故 A 可逆.

(2)

由方程

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 4 - 4\lambda & 4 - (\lambda - 2)(\lambda - 5) \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0 \end{aligned}$$

得 A 的特征值为 1 (二重) 和 10.

对于 $\lambda = 1$, 特征方程组 $(\lambda I - A)X = 0$ 为

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

特征向量为

$$X_1 = (-2, 1, 0)^T, X_2 = (2, 0, 1)^T$$

正交化

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (-2, 1, 0)^T \\ \xi_2 &= X_2 - \frac{(X_2, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)} \xi_1 \\ &= (2, 0, 1)^T + \frac{4}{5}(-2, 1, 0)^T \\ &= \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^T\end{aligned}$$

再单位化

$$\eta_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \eta_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T$$

对 $\lambda = 10$, 特征方程组

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

特征向量

$$X_3 = (1, 2, -2)^T$$

单位化

$$\eta_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

令

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

九、(10分) 如果 n 阶方阵 A 满足

$$(A - aE)(A - bE) = 0$$

其中 $a \neq b$, $E = I_n$ 为单位矩阵, 证明: A 可以对角化。

证 由 $(A - aE)(A - bE) = 0$, 有

$$|A - aE| = 0 \quad \text{或} \quad |A - bE| = 0,$$

故 A 的特征值为 a 或 b 。

若 a 是 A 的特征值, b 不是 A 的特征值, 则 $|A - bE| \neq 0$, 即 $A - bE$ 是可逆阵, 于是有

$$A - aE = 0, \quad \text{即} \quad A = aE,$$

可见 A 可对角化。

若 b 是 A 的特征值, a 不是 A 的特征值, 同理可证 $A = bE$, 故此时 A 可对角化。

若 a, b 都是 A 的特征值, 只需证

$$[n - r(aE - A)] + [n - r(bE - A)] = n \quad \text{或} \quad r(aE - A) + r(bE - A) = n,$$

即可得 A 可对角化。

因为 $(A - aE)(A - bE) = (aE - A)(bE - A) = 0$, 所以 $r(aE - A) + r(bE - A) \leq n$ 。

又因为

$$\begin{aligned} r(aE - A) + r(bE - A) &= r(aE - A) + r(A - bE) \\ &\geq r(aE - A + A - bE) = r((a - b)E) = n. \quad (a \neq b). \end{aligned}$$

所以

$$r(aE - A) + r(bE - A) = n.$$

综上所述, A 可对角化。

十、(10 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + 2(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $3y_1^2 + 2y_2^2$ 。

证明: (1) $f(x_1, x_2, x_3) = 3(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + 2(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

$$\begin{aligned} &= 3(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 2(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) (3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T$

(2) α 与 β 正交, 故 $\alpha^T\beta = 0$, α, β 为单位向量, 故 $\alpha^T\alpha = 1$, 同样 $\beta^T\beta = 1$.

$A\alpha = (3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T)\alpha = 3\alpha\alpha^T\alpha + 2\beta\beta^T\alpha = 3\alpha$, 由于 $\alpha \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_1 = 3$.

$A\beta = (3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T)\beta = 2\beta$, 由于 $\beta \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_2 = 2$.

又由于 $r(A) = r(3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T) \leq r(3\alpha\alpha^T) + r(2\beta\beta^T) = r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \leq 1 + 1 = 2 < 3$.

所以 $|A| = 0$, 故 $\lambda_3 = 0$,

因此, f 在正交变换下的标准型为 $3y_1^2 + 2y_2^2$