[illegible]

2006级线性代数试题 B卷

班级 学号____ 姓名________ 成绩

一、(10分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&3\\3&4&10\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}2A^T&0\\0&A^{-1}\end{vmatrix}$。

解：$\begin{vmatrix}2A^T&0\\0&A^{-1}\end{vmatrix}=|2A^T||A^{-1}|=2^3|A^T||A|^{-1}=2^3|A||A|^{-1}=8$

二、(10分) 已知矩阵方程 $X\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&0&3\\3&2&1\end{pmatrix}=2A$，$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求X。

解：由题得 [illegible]

$\longrightarrow$ [illegible] $\longrightarrow$ [illegible]

$X=$ [illegible]

三、(10分) 求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases}x_1-x_3+x_2+x_4=1\\x_1+2x_2+2x_3-2x_4=2\\-x_1+x_2+x_3-x_4=1\\x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$$

(要求用导出组的基础解系表示通解)。

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ c_1, c_2 为任意常数

四、（10分）已知 $\alpha_1=(2,1,3)$，$\alpha_2=(3,-1,2)$，$\alpha_3=(5,0,5)$，$\alpha_4=(-1,2,1)$，$\alpha_5=(1,1,1)$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩和一个极大无关组；

（2）把其余向量用该极大无关组线性表示。

解：
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 秩为3，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 为一个极大无关组。

(2) 易知 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$

五、（10分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是4维线性空间 V 的两个基，已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，已知向量 γ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(1,-1,2,-2)$，求 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标。

$(2,\ 1,\ 2,\ -6)$

六、（15分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使得 P^TAP 是对角矩阵。

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left((\lambda-2)^2-9\right) = (\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda+1)$

特征值为 -1，5

$\lambda=-1$：$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 对应特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=5$：$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 行变换 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 对应特征向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P=$ [illegible]　　$P^TAP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

三、(10分) 已知向量 $\alpha_1=(2,1,3)$，$\alpha_2=(1,1,-1)$，求一个向量 α_3 与 α_1,α_2 都正交，使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维空间 R^3 的一个正交基。

解： 设 α_3 与 α_1，α_2 正交，即

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\alpha_3 = (4, -5, -1)$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一个正交基。

四、(10分) 求可逆线性变换，化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 - 3x_3^2$$

为标准形。

$$f = (x_1-2x_2)^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 = y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

解：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \sqrt{3}\,y_2 \\ z_3 = \sqrt{3}\,y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 \end{cases}$$

五、(10分) 设 A 是 n 阶实矩阵，证明：若存在 n 阶正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵，则 A 是对称矩阵。

证明： $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$，则 $A = Q\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}Q^{-1}$

$$A^T = (Q^{-1})^T\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}Q^T = Q\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}Q^{-1} = A. \quad (Q^T = Q^{-1})$$

所以 A 是对称矩阵。

六、(10分) 举例说明：在实数域上，可对角化的矩阵不一定是对称矩阵。

证明：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 A 有两个不同的特征值，可对角化，但 A 不是对称矩阵。

若有 $Q^{-1}AQ$ 是对角矩阵，则 A 是对称矩阵，矛盾。