北京理工大学《数学分析 B》2006-2007 学年第二学期期中试题

一. 解下列各题（每小题 6 分）

1. 设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$， $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，求 L_1 与 L_2 的夹角 θ.

2. 设 $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}+k\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 $(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$，问 k 为何值时以 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 为邻边的平行四边形的面积为 9.

3. 求曲线 $x=\sin^2 t,\ y=\sin t\cos t,\ z=\cos^2 t$ 上 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 所对应的点 M 处的切线的方程.

4. 改变积分 $I=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$ 的积分次序.

二. 解下列各题（每小题 7 分）

1. 求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 的一阶和二阶偏导数，并写出 $f(x,y)$ 的二阶麦克劳林公式(带皮亚诺型余项).

2. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

3. 已知方程 $u+e^u-x^2y+\ln z=1$ 确定函数 $u=u(x,y,z)$，求 $du(1,1,e)$，并指出在点 $M(1,1,e)$ 处沿哪个方向 $u(x,y,z)$ 增加得最快?

4. 将 $I=\int_0^2 dz\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dy$ 化成柱坐标系中的累次积分并计算积分的值.

三. (8 分) 设 $z=f(xe^y, x-y)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四. (8 分) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V z\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

五.(8 分) 已知一无盖长方体水箱的表面积为 $12m^2$，问长，宽，高各为多少时水箱的容积最大?.

六. (12 分) 设曲面 $S: z=x^2+y^2$，平面 $\pi: 2x+4y-z=0$.

(1) 求 S 的与 π 平行的切平面方程;

(2) 求 S 与 π 所围成立体的体积.

七. (6 分) 已知方程 $z = f(x-y)$ 和 $F(x,y,z)=0$，其中 f 和 F 分别有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 且 $F_y' - f' \cdot F_z' \neq 0$，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

八. (6 分) 设 D 是由曲线 $y = x^2$，直线 $x = t \quad (t>0)$ 与 x 轴围成的区域, 求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\iint\limits_D \arctan(1+y)\,dxdy}{t(1-\cos t)}.$$