课程编号：A073122　　北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$ ，求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+4x_4=a \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=4 \\ x_1+2x_2+5x_3-2x_4=b \\ x_1+2x_2+\ \ x_3+6x_4=2. \end{cases}$$

(1) 求参数 a,b，使得方程组有解;

(2) 当方程组有解时，求出方程组的导出方程组的一个基础解系以及方程组的通解.

三、（10 分）已知

$$\alpha_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_4=(1,-3,6,-1)^{\mathrm{T}},$$

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

四、（10 分）已知线性空间$\boldsymbol{F[x]_4}$的自然基为$\boldsymbol{1,x,x^2,x^3}$。

(1) 证明：$\boldsymbol{1,1+x,1+x+\frac{x^2}{2!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}$为$\boldsymbol{F[x]_4}$的一个基；

(2) 求自然基$\boldsymbol{1,x,x^2,x^3}$到基$\boldsymbol{1,1+x,1+x+\frac{x^2}{2!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}$的过渡矩阵;

(3) 求$\boldsymbol{h(x)=1+3x^2+6x^3}$在后一个基下的坐标。

五、（10 分）已知 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$，计算行列式$\left|\frac{1}{3}A^*+2I\right|$。

六、　　（10 分）设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-3,\ \lambda+2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda$.

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$;

(2) 如果可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $P^{-1}AP=J$，判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 A 的特征向量.

七、（10 分）在线性空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中定义变换 σ：

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$$

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$是线性变换；

（2）写出$\boldsymbol{\sigma}$在基 $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵。

八、（10 分）已知二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3}$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；

（2）该二次型是否正定？

九、（10 分）设向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdot \cdot, \boldsymbol{\xi}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 证明向量组 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdot \cdot, \boldsymbol{\xi}_t$ 是线性无关的.

十、（10 分）设 A 为三阶矩阵，α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

（1）证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

（2）令 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$