

课程编号: A073003

北京理工大学 2009-2010 学年第一学期

线性代数(B)试题 B 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, 求行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A^T \\ B^{-1} & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

二、(10分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AXA^* = 2XA^* + 9I$, 求 X .

三、(10分) 对下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论: 当 a 取何值时, 它有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.
(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10分) 已知

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \alpha_2 = (1, -3, 2, 4), \alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2,$

$$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

- (1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 求向量 $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标。

六、(10分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

- (1) 求 A 的特征值和特征向量;
- (2) 判断 A 是否可以相似对角化.

七、(10 分) 已知向量组: $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, 求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$, 其中 A 相似于对角矩阵 $\text{diag}(1, -2, 3)$ 。

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的一个标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10分) 已知 A 是 3 阶矩阵, 非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 有通解 $\beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 其中 k_1, k_2 为任意常数, 求 A 的特征值和特征向量。

十、(10分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 都是 3 元向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关。

(1) 证明: 存在非零的 3 元向量 γ , 它既能由 α_1, α_2 线性表示, 又能由 β_1, β_2 线性表示;

(2) 当 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, -1, 1)^T, \beta_1 = (2, 1, 1)^T, \beta_2 = (-1, 2, -1)^T$ 时, 求(1)中的 γ 。