线性代数期末考试题（A卷）
参考答案与评分标准

一、（10分）

解法一：$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&-5&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$

$|A^{-1}|=1$ …… 4′

$|2B|=2^2|B|=4\times1=4$ …… 8′

从而

$\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B\end{vmatrix}=|A^{-1}||2B|=1\times4=4$ …… 10′

解法二：

$|A|=\begin{vmatrix}0&2&5\\0&1&3\\1&0&0\end{vmatrix}=1$

从而 $|A^{-1}|=|A|^{-1}=1$ …… 4′

$|2B|=2^2|B|=4\times1=4$ …… 8′

从而

$\begin{vmatrix}A^{-1}&0\\0&2B\end{vmatrix}=|A^{-1}||2B|=1\times4=4$ …… 10′

二.(10分)

解 在 $AXA^*=2XA^*+I$ 的两边同时右乘A,得

$$|A|AX=2|A|X+A \quad \cdots\cdots 2'$$

又 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3 \quad \cdots\cdots 4'$

则上式成为

$$3AX=6X+A$$

也即

$$(3A-6I)X=A$$

从而

$$X=(3A-6I)^{-1}A \quad \cdots\cdots 6'$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}A$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots 8'$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots 10'$$

三.(10分)

解: 写出方程组的增广矩阵,再用初等行变换将之化为阶梯形

$$A=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdots\cdots 3'$$

得,与原方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11 \\ \quad -14x_2+2x_3-7x_4=28 \end{cases}$$

选 x_3, x_4 为自由未知数,分离自由未知数,得

$$\begin{cases} x_1-5x_2=11-2x_3+3x_4 \\ \quad -14x_2=28-2x_3+7x_4 \end{cases}$$

令 $x_3=x_4=0$,得原方程组的一个特解:

$$X_0=(1,-2,0,0)^T \quad \cdots\cdots 5'$$

与导出方程组同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 3x_4 \\ \quad -14x_2 = -2x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_4=0$ 得

$$X_1 = \left(-\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, 1, 0\right)^T \quad \cdots\cdots 7'$$

令 $x_3=0, x_4=1$ 得

$$X_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)^T \quad \cdots\cdots 9'$$

得，原方程组的通解为

$$X_0 + k_1X_1 + k_2X_2 \quad \cdots\cdots 10'$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

四.(10分)

解(1) 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列构造矩阵，再用初等行变换将之化为阶梯形

$$[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T]=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&1&1&3\\1&1&0&2\\1&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots 2'$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此知，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为3，……4'

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的一个极大无关组；……6'

(2) 记

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\equiv[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4]$$

易见，$\eta_4=\eta_1+\eta_2+\eta_3$

所以 $\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ……10'

五、(10分)

(1) 证明：要证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 R^3 的一个基，只需证其线性无关。

法一：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(3\alpha_1+2\alpha_2)+k_3\alpha_3=0$$

整理得

$$(2k_1+3k_2)\alpha_1+(k_1+2k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知，

$$\begin{cases} 2k_1+3k_2=0 \\ k_1+2k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases}$$

解之得 $k_1=k_2=k_3=0$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关，从而构成 R^3 的一个基 ……4'

法二：

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3]=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关，从而构成 R^3 的一个基

…… 4'

(2) 解: $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以，基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ······ 7′

(3) 解: $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3](1, 1, 1)^T$

记 $X = (1, 1, 1)^T$

γ 对基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标

$$Y = A^{-1}X$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ······ 10′

六、(10分)

解：(1) 矩阵 A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$ ······ 3'

将 $\lambda_1=1$ 代入特征方程组，得

$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -4 & 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

求得其一个基础解系：$X_{11}=(-1,2,20)^T$，

于是，A 的属于特征值 1 的全部特征向量为

$$k_{11}X_{11}\quad(k_{11}\neq 0).$$ ······ 5'

再将 $\lambda_3=2$ 代入特征方程组，得

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ -4 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

求得其一个基础解系：$X_{31}=(0,0,1)^T$.

于是，A 的属于特征值 2 的全部特征向量为

$$k_{31}X_{31}\quad(k_{31}\neq 0)$$ ······ 7'

(2) 对特征值 1 来说，其几何重数为 1，而代数重数为 2

所以 A 不可以相似对角化。 ······ 10'

七.（10分）

解：由题，只需将 X_1, X_2 Schmidt 正交化，单位化。----2'

正交化：

令 $\beta_1 = X_1 = (1, 0, 1)^T$, ------3'

$$\beta_2 = X_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$= X_2 - \beta_1$$

$$= (1, 1, -1)^T$$ ------5'

单位化：

$$\eta_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$$ ------9'

于是，此齐次线性方程组的解空间的一个标准正交基为

η_1, η_2. ------10'

八、(10分)

解：(1) 由 $A \sim diag(1,1,0)$ 知，

A的特征值为 1，1，0. ------- 3'

得，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经合适变换化的标准形为

$y_1^2+y_2^2$ ------- 6'

(2) 解：由(1)知，f 的正惯性指数为2，小于 3，

从而 f 不正定. ------ 10'

法二：A的特征值不全大于零，

故A不正定，也即 f 不正定. ----- 10'

九、(10分)

(1) 解：由$|A|=0$知，0为A的一个特征值，…… 3'

从而A的所有特征值为

$1, 2, 0$.

进而A^2+I的所有特征值为

$2, 5, 1$ …… 6'

(2) 证明：由(1)知，

$$|A^2+I| = 2\times 5\times 1 = 10 \neq 0$$

所以矩阵A^2+I可逆. …… 10'

十、(10分)

解：(1) A为实对称矩阵，其属于不同特征值的特征向量正交，故有

$$1-2+a=0$$

解得 $a=1$ ······ 4′

(2) A为实对称矩阵，且其特征值为 $1,0,-2$，故

$$A \sim \mathrm{diag}(1,0,-2)$$

从而 $r(A)=2$.

故方程组 $AX=0$ 的基础解系中含 $3-r(A)=1$ 个解向量 ······ 6′

又A的属于特征值0的特征向量是 $AX=0$ 的非零解，

不妨设为 $(k_1,k_2,k_3)^T$，利用实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，得

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解得其基础解系为：$(1,0,-1)^T$

从而它构成 $AX=0$ 的一个基础解系. ······ 9′

故 $AX=0$ 的通解为：$k(1,0,-1)^T$. ······ 10′