北京理工大学《数学分析 B》

2007-2008 学年第二学期期末考试试卷及参考答案(A 卷)

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-3y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f_x'(0,0)=$______，$f_y'(0,0)=$______.

2．设 $f(x,y)=x^3+8y^3-3x^2-12y^2$，则 $f(x,y)$ 取得极小值的点为__________，$f(x,y)$ 取得极大值的点为____________．

3．函数 $f(x,y,z)=x^2+3y^2-z^2$ 在 $P(-2,2,1)$ 点处沿着从 P 到 $O(0,0,0)$ 方向的方向导数为 ____________________．

4．设 L 是曲线弧 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$（$0\le t\le 2$），则曲线积分 $\int_L \dfrac{ds}{x^2+y^2+z^2}=$________________________.

5．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？答：__________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<1\\ x^2-1 & 1\le x<\pi\end{cases}$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 2π 为周期的余弦级数展开式的和函数，则 $S(1)=$_____，$S(\pi)=$_____，$S(-2\pi)=$_____，$S(-2)=$_____.

7．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 的麦克劳林级数的展开式为______________________，其收敛域为_____________________.

二、（10 分）设 $u(x,y)$ 是由方程 $u^2-z^2+2y^2-x=0$ 确定的可微的隐函数，其中 $z=z(x,y)=xy^2+y\ln y-y$，且 $u(x,y)>0$，求 $(2,1)$ 点处 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

三、（8 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(y^2-x)dxdy$，其中 D 是由抛物线 $x=y^2$ 与 $x=3-2y^2$ 围成的有界闭区域.

四、（10 分）在曲面 $\Sigma: z=xy$ 上求一点 P，使曲面 Σ 在 P 点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出 Σ 在 P 点处法线的标准方程.

五、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{2^{2n}}x^{2n-1}$ 的收敛区间及和函数.

六、(10 分) 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=2x$ 所围成的立体, 其上质量分布是均匀的(密度为 μ), 求 Ω 绕 z 轴旋转的转动惯量.

七、（10 分）计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{S}2xdydz+(z+2)^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

八、（8 分）设 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导函数，k 是一个待定常数. 已知曲线积分 $\int_{\Gamma}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$ 与路径无关，且对任意的 t, 有

$$\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy=2t^2$$

求 $f(u)$ 的表达式和常数 k 的值.

九、（6 分）设 $u_n>0$，$v_n>0$，且 $v_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}\geq a>0$，$n=1,2,\cdots$，其中 a 为常数. 求证：(1) 数列 $\{u_nv_n\}$ 单调有界；　　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

—

参考答案

一、填空（每小题 4 分，共 28 分）

1. $f'_x(0,0)=2,\quad f'_y(0,0)=-3;$

2. 极小值点为 $(2,1)$，极大值点为 $(0,0)$；

3. $-10;$

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2});$

5. 绝对收敛;

6. 1， π^2-1， 2 ， 3 （各 1 分）

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{4}-\dfrac{1}{12\times 3^n}]x^n$ ， $-1<x<1$

（3 分，其中展开式没有合并扣 1 分，1 分）

二、将 $x=2,y=1$ 代入已知方程得 $u=1,z=1$ ………… 2 分

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-1=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2 \end{cases}$$ ………… 4 分

将 $x=2,y=1$， $u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{3}{2},\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$ ………… 6 分

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+4y=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy+\ln y \end{cases}$$ ………… 8 分

将 $x=2,y=1$， $u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4$ ………… 10 分

三、　$I=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^{3-2y^2}(y^2-x)dx$ ……………　3 分

$=\int_0^1(18y^2-9y^4-9)dy$ ……………　6 分

$=-\dfrac{24}{5}$ ……………　8 分

四、设所求点为(x_0,y_0,z_0)，曲面在此点的法向量为

$\vec{n}=\{y_0,x_0,-1\}$ ……………　3 分

由题设 $\vec{n}//\{1,3,1\}$，故 $\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{x_0}{3}=\dfrac{-1}{1}$ ……………　5 分

得　$x_0=-3$，$y_0=-1$，$z_0=x_0y_0=3$

所求点为　$(-3,-1,3)$ ……………　8 分

法线方程为　$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ ……………　10 分

五、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{2n+1}{2^{2n+2}}}{\frac{2n-1}{2^{2n}}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{(2n-1)4}=\dfrac{1}{4}$, ……………1 分

$R=2$，　收敛区间为 $(-2,2)$ ……………2 分

令　$\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-2}$

$\int_0^x\sigma(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2n}}x^{2n-1}$ ……………5 分

$=\dfrac{x}{4-x^2}$ ……………7 分

$\sigma(x)=\left(\dfrac{x}{4-x^2}\right)'=\dfrac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ ……………9 分

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n}}x^{2n-1}=x\sigma(x)=\dfrac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ ……………10 分

六、 $I_z=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+y^2)dV$ ………… 2 分

$=\mu\iint\limits_{D}(x^2+y^2)dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x}dz$ ………… 5 分

$=\mu\iint\limits_{D}(x^2+y^2)(2x-x^2-y^2)dxdy$

$=\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho d\rho$ ………… 7 分

$=\frac{2^6}{15}\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta$ ………… 9 分

$=\frac{2}{3}\mu\pi$ ………… 10 分

七、补充平面 $S_1:z=0,x^2+y^2\le4,$ 取下侧，则由 Gauss 公式

$\oiint\limits_{S+S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy=-\iiint\limits_{\Omega}[2+2(z+2)]dxdydz$ ………… 2 分

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^2(6+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$ ………… 4 分

$=-24\pi$ ………… 6 分

$\iint\limits_{S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy$

$=\iint\limits_{S_1^-}4dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}4dxdy=-16\pi$ ………… 8 分

$I=\oiint\limits_{S+S_1^-}-\iint\limits_{S_1^-}2xdydz+(z+2)^2dxdy$

$=-24\pi+16\pi=-8\pi$ ………… 10 分

八、记 $X=x^2y^3+2x^5+ky,\quad Y=xf(xy)+2y,$ 由题意，有

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x},$$ ………… 1 分

即 $3x^2y^2+k=f(xy)+xyf'(xy)$ ………… 2 分

令 $u=xy$，有 $f'(u)+\frac{1}{u}f(u)=3u+\frac{k}{u}$ ………… 3 分

解得: $f(u)=u^2+k+\frac{C}{u}.$ ………… 4 分

由题设可得 $f(0)=k$，解得 $C=0$，故

$$f(u)=u^2+k$$ ………… 5 分

选择折线路径:$(0,0)\to(t,0)\to(t,-t)$,则有

$$I=\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[xf(xy)+2y]dy$$

$$=\int_{(0,0)}^{(t,-t)}(x^2y^3+2x^5+ky)dx+[x(x^2y^2+k)+2y]dy$$

$$=\int_0^t 2x^5dx+\int_0^{-t}(t^3y^2+kt+2y)dy$$ ………… 6 分

$$=(1-k)t^2=2t^2$$ ………… 7 分

$1-k=2$，$k=-1$ ………… 8 分

九、(1) 由已知条件，有 $\frac{u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}}\geq a>0$，即

$$u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1}>0,\quad u_nv_n>u_{n+1}v_{n+1}$$

又 $u_nv_n>0$，所以 $\{u_nv_n\}$ 单调减少且有界 ………… 2 分

(2) 由 (1) 得 $u_{n+1}\leq\frac{1}{a}(u_nv_n-u_{n+1}v_{n+1})$ ………… 3 分

又 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 的部分和满足

$$S_n=u_2+u_3+\cdots+u_{n+1}\leq\frac{1}{a}(u_1v_1-u_{n+1}v_{n+1})\leq\frac{1}{a}u_1v_1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。 ………… 6 分