课程编号：A073003　　　　北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

2006 级线性代数试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 3 & 4 & -10\end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix}2A^T & 0\\ 0 & A^{-1}\end{vmatrix}$ 。

二、（15 分）已知矩阵 X 满足 $X\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}=2X+\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 X。

三、（10 分）求下列线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=2\\ -x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$$

（要求用导出组的基础解系表示通解）

四、（10 分）已知 $\alpha_1=(2,1,3),\alpha_2=(3,-1,2),\alpha_3=(5,0,5),\alpha_4=(-1,2,1),\alpha_5=(1,1,1)$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩和一个极大无关组；

（2）用所求极大无关组线性表出其它向量。

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 4 维向量空间 V 的两个基，从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$。已知向量 γ 关于基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的坐标为 $(1,-1,2,-2)$，求 γ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的坐标。

六、（15 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵。

七、（10 分）已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)$，求与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交的向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，并把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 化为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个标准正交基。

八、（10 分）求可逆线性替换，把实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2$$

化为规范形。

九、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，证明：若存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

十、（10 分）举例说明，若 $\boldsymbol{A}$ 是可相似对角化的矩阵，则不一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是对角矩阵。