

## 数学分析期中试题

班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

(本试卷共 5 页, 九个大题)

| 题号 | 一 | 二, 三 | 四, 五 | 六, 七 | 八, 九 | 总分 |
|----|---|------|------|------|------|----|
| 得分 |   |      |      |      |      |    |

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 28 分)

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x =$ \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $y = \frac{x^2}{4} + \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 的拐点坐标为\_\_\_\_\_.

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} & x > 1 \end{cases}$  的间断点为\_\_\_\_\_, 是第\_\_\_\_\_类间断点.

4. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $\tan x - \sin x$  与  $cx^k$  是等价无穷小, 则  $c =$ \_\_\_\_\_,  $k =$ \_\_\_\_\_.

5. 已知直线  $y = 2x$  与曲线  $y = \log a^x$  相切, 则切点为\_\_\_\_\_,  $a =$ \_\_\_\_\_.

6. 已知  $f'(x_0) = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{3}{n}) - f(x_0 - \frac{2}{n})) =$ \_\_\_\_\_.

7. 设方程  $ye^x + \ln y = 1$  确定函数  $y = y(x)$ , 则  $y'(0) =$ \_\_\_\_\_,  $y''(0) =$ \_\_\_\_\_.

二. (8 分) 设  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

三. (8 分) 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ .

四. (8 分) 已知  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} (e^{\frac{\pi}{2} x^2} - 1) & x < 0 \end{cases}$ , 求  $df(x)$ .

五. (9 分) 证明不等式  $x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) > \sqrt{x^2 - 1} \quad (x > 1)$ .

六. (9 分) 讨论方程  $3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$  在区间  $[-2, 2]$  上有几个不同实根.

七. (9 分) 某公司用卡车运送产品, 卡车速度为每小时  $v$  千米,  $50 \leq v \leq 70$ , 假定每千米运行费用(汽油等)为  $\frac{1}{100}(30 + \frac{v}{2})$  元, 每小时需支付给司机的工资为 18 元, 设行驶路程为  $L$  千米, 求卡车速度为多少时运送总费用  $P(v)$  最小.

八. (13 分) 研究函数  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{1 - x}$  的性态, 并作出其图形.

九. (8 分) 已知函数  $f(x)$  三阶可导, 且  $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1)$ , 证明在区间  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'''(\xi) = \frac{3f''(\xi)}{1-\xi}$ .