课程编号：A073122　　　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=9\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）讨论 p,q 取何值时，方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=0\\3x_1+2x_2+px_3+qx_4=0\\2x_1+x_2+x_4=0\end{cases}$$

有非零解，并求其基础解系。

三、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1,x,x^2,x^3$。

(1) 证明：$1+x+x^2+x^3,1+x+x^2,1+x,1$ 为 $F[x]_4$ 的一个基；

(2) 求自然基 $1,x,x^2,x^3$ 到基 $1+x+x^2+x^3,1+x+x^2,1+x,1$ 的过渡矩阵，以及 $h(x)=1-x-x^2+x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha_1}=(\mathbf{1,0,1,1})$, $\boldsymbol{\alpha_2}=(\mathbf{1,1,1,1})$, $\boldsymbol{\alpha_3}=(\mathbf{0,1,0,1})$, $\boldsymbol{\alpha_4}=(\mathbf{2,1,2,2})$ 。

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）设矩阵$\boldsymbol{A}$的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & \\ & \mathbf{2} & & & \\ & & \mathbf{-1} & & \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(1) 试写出$\boldsymbol{A}$的初等因子；(2) 求$\boldsymbol{A}$的特征值。

六、（10 分）在$\mathbf{R}^3$中定义线性变换$\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})=(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2},\mathbf{-2}\boldsymbol{x_3})$ 。

求$\boldsymbol{\sigma}$在$\mathbf{R}^3$的自然基$\boldsymbol{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3}$下的矩阵。

七、（10 分）已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{k_1(1,0,1)^T+k_2(0,1,2)^T}$ ，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知实二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3}$ 。

(1) 求一正交变换 $\boldsymbol{X=QY}$ ，将二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)}$ 是否正定。

九、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{2} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$。

(1) 问 $\boldsymbol{a}$ 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化？

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 实矩阵，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\mathbf{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$。