课程编号：A073122　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 2 & 2 & \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & -1 & 0 & \\ -4 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{X}$。

二、（10 分）问 a,b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解（用导出组的基础解系表示通解）。

三、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1,x,x^2,x^3$。

(1) 证明：$1,1+x,1+x+\frac{x^2}{2!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1,x,x^2,x^3$ 到基 $1,1+x,1+x+\frac{x^2}{2!},1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x)=1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,0,2,1)^T,\alpha_2=(1,2,0,1)^T,\alpha_3=(2,1,3,0)^T,\alpha_4=(2,5,-1,4)^T,\alpha_5=(1,-1,3,-1)^T$$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩和一个极大无关组;

（2）将其余向量用极大无关组表示出来。

五、（10 分）设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda+1)^3,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda$ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；　　(2) 求 A 的特征值。

六、（10 分）在线性空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$中定义变换$\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$是线性变换；

（2）写出$\boldsymbol{\sigma}$在基$\boldsymbol{I}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{I}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{I}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵。

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\x_1+x_2-x_3+x_5=0\\3x_1+2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0\end{cases}$

的解空间的一标准正交基。

八、（10 分）　已知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$。

（1）判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆；　（2）求一正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，化二次型为标准形。

九、（10 分）如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{I})=\mathbf{0}$$

其中 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

十、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T$；

(2) α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $3y_1^2+2y_2^2$。