

课程编号: A073003

北京理工大学 2009-2010 学年第二学期

线性代数 B 试题 A 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 设 A 是三阶矩阵, A^* 是其伴随矩阵, 已知 $|A| = \frac{1}{2}$, 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值。

二、(10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

三、(10分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

问: λ 取何值时, 此方程组有唯一解? 无解? 有无穷多解? 并在有无穷多解时求通解.
(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10分) 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$ 。

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10分) 已知 \mathbb{R}^3 的两组基:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T,$$

$$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 0, -1)^T, \beta_3 = (1, 2, 0)^T,$$

(1) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $\alpha = (3, 2, 1)^T$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标。

六、(10 分) 设矩阵 $A \sim B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{pmatrix}$, 求 a, b 的值.

七、(10 分) 已知向量组: $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, 求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$ 的一个标准正交基.

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

(1) 求一正交变换 $X = QY$ ，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形；

(2) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是否正定。

九、(10 分) 设 X_0 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个特解， X_1, X_2, \dots, X_t 是其导出方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系，证明： $X_0, X_1, X_2, \dots, X_t$ 线性无关。

十、(10分) 设三阶矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解。

(1) 求 A 的特征值与特征向量;

(2) 证明: 存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(3) 求 $(A - \frac{3}{2}E)^6$, 其中 E 为三阶单位矩阵。