课程编号：A073122 北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{A}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

二、（10 分）已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = p \\ qx_1 + 2x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

有解，且其导出组基础解系有一个向量。（1）求 p,q 的值；（2）求方程组的一般解。（用导出组的基础解系表示通解）

三、（10 分）在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，令 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\beta_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求自然基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(3) 求 $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

四、（10 分）已知$\boldsymbol{\alpha_1}=(-\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1}),\ \ \boldsymbol{\alpha_2}=(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0}),\ \ \boldsymbol{\alpha_3}=(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1})$。

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$的一个极大无关组；

(2) 求生成子空间$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})$的一个标准正交基。

五、（10 分）设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\boldsymbol{\lambda+1},\ (\boldsymbol{\lambda-2})^2,\ \boldsymbol{\lambda}^2$。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$：$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$。求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\mathbf{1},\mathbf{1}+\boldsymbol{x},\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2,\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3$ 下的矩阵。

七、（10 分）证明：n阶方阵A可相似对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

八、（10 分）已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$经过正交变换$X=QY$化为$y_1^2+2y_2^2$，其中$X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。

(1) 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)$是否正定； (2) 求行列式$|A|$的值；

(3) 若$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，求矩阵$A$。

九、（10 分）设 $A=\left(a_{ij}\right)$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij}=A_{ij}\quad (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。证明：A 为正交矩阵。

十、（10 分）已知 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 元列向量组，满足 $A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3$，$A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$。

(1) 求矩阵 A 的特征值；(2) 求矩阵 A 的特征向量。