

课程编号：A073003

北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

## 线性代数 B 试题 A 卷

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

一、(10 分) 已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 求行列式  $\begin{vmatrix} 0 & A^* \\ 3B & 0 \end{vmatrix}$  的值。

二、(10 分) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 矩阵  $X$  满足  $\frac{1}{3}A^*XA = 2A + XA$ , 求  $X$ 。

三、(10 分) 对下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

试讨论：当  $\lambda$  取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。  
(用导出组的基础解系表示通解)

四、(10 分) 已知

$$\alpha_1 = (-2, 1, 0, 3), \alpha_2 = (1, -3, 2, 4), \alpha_3 = (3, 0, 2, -1), \alpha_4 = (2, -2, 4, 6)$$

- (1) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的秩和一个极大无关组;
- (2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、(10 分) 已知  $\mathbf{R}^3$  的一个基:  $\beta_1 = (0, 1, 1), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (1, 1, 0)$ 。

- (1) 求  $\mathbf{R}^3$  的自然基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  到基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的过渡矩阵;
- (2) 求向量  $\alpha = (2, -1, 3)$  关于基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的坐标。

六、(10 分) 设  $X_0$  是非齐次线性方程组  $AX = b$  的一个特解,  $X_1, X_2, \dots, X_t$  是其导出方程组  $AX = 0$  的一个基础解系, 证明:  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_t$  线性无关。

七、(10 分) 已知线性方程组  $AX = 0$  的通解为  $k_1(1,0,0)^T + k_2(1,1,0)^T$ ，其中  $k_1, k_2$  为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、(10 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3$ 。

- (1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换；
- (2) 判断二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  是否正定。

九、(10 分) 设  $\alpha, \beta$  为 3 元单位列向量, 且  $\alpha^T \beta = 0$ , 记  $A = \alpha \alpha^T + \beta \beta^T$ 。证明:

(1) 齐次线性方程组  $AX = 0$  有非零解;

(2)  $A$  相似于矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

十、(10 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  都是 3 元向量, 且  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关,  $\beta_1, \beta_2$  线性无关。

(1) 证明: 存在非零向量  $\gamma$ , 使得  $\gamma$  既可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表出, 又可由  $\beta_1, \beta_2$  线性表出;

(2) 当  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 5, 3)^T, \beta_1 = (2, 3, -1)^T, \beta_2 = (-1, 0, 3)^T$  时, 求出所有既可由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表出, 又可由  $\beta_1, \beta_2$  线性表出的向量。