北京理工大学《数学分析 B》

2006-2007 学年第二学期期末试卷及参考答案(B 卷)

（本试卷共 6 页、八个大题，满分 100 分；答题前请检查是否有漏印、缺页和印刷不清楚的情况，如有此种情况，请及时向监考教师反映）

一、求解下列各题（每小题 6 分）

1. 已知直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z+2}{3}$ 与平面 $\pi: x-y+2z+D=0$ 平行，且 L 到 π 的距离为 $\sqrt{6}$，求 m 与 D 的值.

2. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f,φ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 计算第二类曲线积分 $I=\int_L \dfrac{x^2}{y}dx+\dfrac{x}{y}dy$，其中 L 是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从点 $A(1,1)$ 到点 $B(4,2)$ 的弧段.

4. 设有级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\ln(1+\frac{1}{n})$，指出 p 在什么范围内取值时级数绝对收敛，在什么范围内取值时级数条件收敛，在什么范围内取值时级数发散(要说明理由).

二、解下列各题（每小题 7 分）

1. 已知$\vec{n}$是曲面$x^2-y^2+z^2=1$在点$(2,2,1)$处指向z增大方向的单位法向量，$u=xy^2-z\ln z$，求$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{(2,2,1)}$.

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求收敛区间及 $f^{(5)}(1)$ 的值.

3. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} x^2 z dV$，其中 Ω 是由柱面 $y=x^2$ 与平面 $y=1$，$z=0$，$z=2$ 所围成的立体.

4．求二元函数 $z=f(x,y)=x^3-3x^2-y^2-9x+2y$ 的极值点与极值.

三、(8 分) 设 $f(x)=x^2+1$，$-\pi \le x \le \pi$, 将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

四、（8 分）设 V 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体, 求 V 的表面积.

五、(8 分) 计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{S} x^{3}dydz+y^{3}dzdx+dxdy$，其中 S 是曲面 $z=x^{2}+y^{2}\quad(0\le z\le 1)$的下侧.

六、（8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{2}+n)x^{n}$ 的收敛域与和函数.

七、(8 分) 已知在半平面$x>0$内 $(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda}dx+(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda}dy$为二元函数$f(x,y)$的全微分. (1) 求$\lambda$的值； (2) 求 $f(1,\sqrt{3})-f(2,0)$的值.

八、（8 分）设$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，其中$t>0$. 已知$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，又设 $F(t)=\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

（1）求证：$F(t)$在$(0,+\infty)$内可导，并求$F'(t)$的表达式；

（2）设$f(0)\ne 0$，求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})$在$\lambda>0$时收敛，$\lambda\le 0$时发散.

(此页纸不够时可写到背面)

2006 级工科《数学分析 B》期末试卷(B 卷)参考答案与评分标准

一．求解下列各题

1. 直线过点(1,0,-2)，方向向量 $\vec{s}=\{2,m,3\}$，平面法向量 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$ --------------------2 分

$\vec{n}\perp\vec{s}\Rightarrow\{1,-1,2\}\cdot\{2,m,3\}=2-m+6=0\Rightarrow m=8$ ------------------------------------4 分

$d=\dfrac{|1-0-4+D|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}\Rightarrow D=9,-3$ --6 分

或 过 $(1,0,-2)$ 与 L,π 垂直的直线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ 与 π 交点：

$x=\dfrac{D-9}{6},\ y=\dfrac{15-D}{6},\ z=\dfrac{D-21}{3}$

$d=\sqrt{(\dfrac{D-9}{6}-1)^2+(\dfrac{5-D}{6})^2+(\dfrac{D-21}{3}+2)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow D=-3,9.$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}f(xy)+\dfrac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$ ---3 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$ --6 分

3. $\int_L\dfrac{x^2}{y}dx+\dfrac{x}{y}dy=\int_1^4(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}})dx$ --3 分

$=[\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{2}x]_1^4=\dfrac{139}{10}$ ------------------------------------6 分

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n^p}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{p+1}}}=1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1^n)\dfrac{1}{n^p}\ln(1+\dfrac{1}{n})|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\ln(1+\dfrac{1}{n})$ 有相敛散性 ---------------------------------2 分

1) $p>0$，绝对收敛；

2) $-1<p\le 0$，条件收敛；

3) $p<-1$，发散。 --6 分

二．解下列各题

1. $\vec{n}=\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$ --3 分

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2=4,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy=8,\frac{\partial u}{\partial z}=-\ln z-1=-1$ ------------------------------6 分

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(2,2,1)}=\{4,8,-1\}\cdot\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}=-3$ ------------------------------7 分

2. $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ ------------------------------ --1 分

$$=\frac{1}{x-1+2}-\frac{1}{x-1+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$ ------------------------2 分

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x-1}{2})^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x-1}{3})^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n})(x-1)^{n-1}$$ ------------------------4 分

收敛区间 $(-1,3)$ --5 分

$f^{(5)}(1)=-5!(\frac{1}{2^6}-\frac{1}{3^6})$ --7 分

3. $I=\iint\limits_D dxdy\int_0^2 zx^2dz$ --3 分

$$=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1dy\int_0^2 zx^2dz=\int_{-1}^1x^2dx\int_{x^2}^1dy\int_0^2 zdz$$ - ------------------------------4 分

$$=\frac{8}{15}$$ ------------------------------------7 分

4.二元函数的一阶偏导数

$$\begin{cases}f_x=3x^2-6x-9=0\\f_y=-2y+2=0\end{cases}$$ --2 分

$\Rightarrow(3,1),(-1,1)$ --3 分

$f_{xx}=6x-6,f_{xy}=0,f_{yy}=-2$ - --4 分

$H_1=\begin{pmatrix}12&0\\0&-2\end{pmatrix},(3,1)$，$H_2=\begin{pmatrix}-12&0\\0&-2\end{pmatrix},(-1,1)$ ------------------------------5 分

$f_{\max} = f(-1,1) = 8$ 为极大值，$(-1,1)$ 为极大值点。 ------------------------------------7 分

三． $f(x)$ 为偶函数，傅立叶级数为余弦级数

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)dx = \frac{2}{3}\pi^2 + 2$$ ---3 分

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+1)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$= \frac{2}{n\pi}[x^2\sin nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}2x\sin nxdx] + \frac{2}{n\pi}\sin nx|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$ ---5 分

$$= \frac{4}{n^2\pi}x\cos nx|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$ --6 分

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$ ---8 分

四． $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x^2+y^2=z^2. \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2, z = 1$ - ---2 分

立体在 xoy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2=1$ --3 分

$$S_1 = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \qquad z_x = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}, z_y = \frac{-y}{\sqrt{2-x^2-y^2}},$$

$$= \iint_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{2-r^2}}dr$$

$$= -2\sqrt{2}\pi(2-r^2)^{\frac{1}{2}}|_0^1 = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)$$ ---------------------------------------5 分

$$S_2 = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \qquad z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \iint_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\pi$$ ---7 分

$$S = \pi(4-\sqrt{2})$$ --8 分

五. $z=x^2+y^2, \vec{n}=\{z_x,z_y,-1\}=\{2x,2y,-1\}$ --------------------------------------2 分

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^3\cdot 2x+y^3\cdot 2y-1)dxdy=2\iint\limits_{D}(x^4+y^4)dxdy-\iint\limits_{D}dxdy$$ --------------4 分

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\cos^4\theta d\theta+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\sin^4\theta dr-\pi$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\frac{1+\cos 2\theta}{2})^2d\theta+\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos 2\theta}{2})^2d\theta-\pi$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos^2 2\theta d\theta-\pi$$

$$=-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2}d\theta=-\frac{\pi}{2}$$ ---8 分

或 加补平面 $S_1: z=1, x^2+y^2=1$ 上侧 -

$\Omega=\{(x,y,z)\mid z\ge x^2+y^2, z=1\}$ ---2 分

$$I+\iint\limits_{S_1}x^3dydz+y^3dxdz+dxdy=\iint\limits_{S+S_1}x^3dydz+y^3dxdz+dxdy \qquad =\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2)dxdydz$$

------------------------------4 分

$$\Rightarrow I=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2)dxdy-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=3\iint\limits_{x^2+y^2}dxdy\int_{x^2+y^2}^1(x^2+y^2)dz-\pi$$ ---6 分

$$=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$ ---8 分

六. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$，收敛区域为$(-1,1)$ ---2 分

$x\in(-1,1), S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$ ---------------------------4 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}$ --5 分

$$(\frac{x^2}{1-x})'' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$ ---------------------------------7 分

$$S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$$ --8 分

七．1). $P(x,y) = (x-y)(x^2+y^2)^\lambda, Q(x,y) = (x+y)(x^2+y^2)^\lambda$ --------------1 分

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -(x^2+y^2)^\lambda + 2y\lambda(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$ ----------------------2 分

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x^2+y^2)^\lambda + 2x\lambda(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$ ----------------------3 分

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 2(\lambda+1)(x^2+y^2)^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$ ----------------------4 分

2). $P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ --5 分

$$f(1,\sqrt{3}) - f(2,0) = \int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$ ------------------------------------6 分

$$= \int_0^{\sqrt{3}} Q(1,y)dy + \int_2^1 P(x,0)dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+y}{1+y^2}dy + \int_2^1 \frac{x}{x^2}dx$$

$$= \arctan y\,|_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\,|_0^{\sqrt{3}} - \ln 2$$

$$= \frac{\pi}{3}$$ --------------------------------------8 分

八．1). $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\sin\varphi d\rho$ --------------------------------------2 分

$$= 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho$$ ---------------------------------------3 分

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$$ - --4 分

2). $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda} F'(\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \frac{1}{n^{1+\lambda}} f(\frac{1}{n^2})$ --------------------------------6 分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\pi}{n^{1+\lambda}}f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^{1+\lambda}}}=4\pi f(0)$$

$\lambda > 0$ 时收敛，$\lambda \le 0$ 是发散。 -------------------------------------8 分