2010-2011 B - A

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$，求行列式 $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{A}^* \\ \mathbf{3}\boldsymbol{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 3}\left|\boldsymbol{A}^*\right|\left|3\boldsymbol{B}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$$

$$= \left|\boldsymbol{A}\right|^2 3^2 \left|\boldsymbol{B}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$$

$$= 1\cdot 9\cdot 1$$

$$= 9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

二、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^*XA=2A+XA$，求 X。

解

$$A\times\frac{1}{3}A^*XA=2A+XA \quad \times A^{-1} \quad \frac{1}{3}|A|X=2A+AX$$

$$|A|=3 \quad X=2A+AX\Rightarrow(I-A)X=2A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3$$

$$X=2(I-A)^{-1}A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&3&1\\-2&5&1\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

$$X=2\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&3&1\\-2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&10&4\\-2&4&2\\-4&10&0\end{pmatrix}\cdots\cdots 10$$

三、（10 分）对下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

试讨论：当λ取何值时，它有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。（用导出组的基础解系表示通解）

解

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix}=(5\lambda+4)(\lambda-1)$$ ················3

讨论　情形1 $\lambda\neq 1,-\dfrac{4}{5}$时　方程组有唯一解；

情形2 $a=-\dfrac{4}{5}$时 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{33}{25} & \frac{3}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

方程组无解

情形3 $a=1$时

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(\tilde{A})=r(A)=2<3$ 方程组有无穷多解. ·········6

$X_0=(1,-1,0)^T$ 是一特解。导出组基础解系 $X_1=(0,1,1)^T$，

一般解 $X_0+k_1X_1$ ·································10

四、（10 分）已知

$$\alpha_1=(-2,1,0,3),\ \ \alpha_2=(1,-3,2,4),\ \ \alpha_3=(3,0,2,-1),\ \ \alpha_4=(2,-2,4,6)$$

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解：将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 按列排成矩阵:

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

秩为3　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组. …………6

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ……………………10

五、（10 分）已知 R^3 的一个基：$\beta_1=(0,1,1),\beta_2=(1,0,1),\beta_3=(1,1,0)$。

(1) 求 R^3 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\alpha=(2,-1,3)$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解 (1) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P$ $\quad P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

…………5

(2) $$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

……………………10

六、（10 分）设 X_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解， $X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是其导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，证明： $X_0,X_1,X_2,\cdots,X_t$ 线性无关。

解 $A\times$ $k_0X_0+k_1X_1+\cdots+k_tX_t=0$ ……………………2

$$k_0AX_0+k_1AX_1+\cdots+k_tAX_t=0$$

$k_0b=0 \overset{b\neq 0}{\Rightarrow} k_0=0$ …………………………5

$$k_1X_1+\cdots+k_tX_t=0$$

$X_1,\cdots,$ X_t 线性无关 从而 $k_2=0,k_3=0,\cdots k_m=0$

$X_0,$ $X_1,\cdots,$ X_t 线性无关 ………………………10

七、（10 分）已知线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的通解为 $k_1(1,0,0)^T + k_2(1,1,0)^T$，

其中 k_1,k_2 为任意常数，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

解

$$\beta_1 = (1,0,0)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5$$

$$= (1,1,0)^T - \frac{1}{1}(1,0,0)^T$$

$$= (0,1,0)^T \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_2x_3$。

(1) 用正交变换将它化为标准形，并给出所用的正交变换;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定。

解

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda I-A\right|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$$

$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\ \lambda_3=4$ ……………………3

相应的彼此正交的特征向量为

$$X_1=(0,1,1)^T,\ X_2=(1,0,0)^T,\ X_3=(0,-1,1)^T$$

单位化

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\ \eta_2=(1,0,0)^T,\ \eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^T$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ ……………………8

$$f=y_2^2+4y_3^2$$

(2) A不是正定的,因为它的特征值不全大于.

……………………10

故X_0,α,β为A的三条线性无关的特征向量

令 $P=(X_0,\alpha,\beta)$

则 $P^{-1}AP=diag(0,1,1)$ ……………………10

(2) $|A|=0$ $\lambda_1=0$ $AX=0$的非零解X_0为其特征向量。

……………………5

$$A\alpha=(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)+\beta\left(\beta^T\alpha\right)=\alpha$$

$$A\beta=(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\alpha\left(\alpha^T\beta\right)+\beta\left(\beta^T\beta\right)=\beta$$

α,β为A的属于1特征向量且线性无关 …………7

十、（10 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$都是 3 元向量，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta_1,\beta_2$线性无关。

(1) 证明：存在非零向量γ，使得γ既可由α_1,α_2线性表出，又可由β_1,β_2线性表出；

(2) 当 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,5,3)^T$，$\beta_1=(2,3,-1)^T,\beta_2=(-1,0,3)^T$ 时，求出所有既可由α_1,α_2线性表出，又可由β_1,β_2线性表出的向量。

解 (1) 4个3元向量必线性相关，故存在不全为零的数

l_1,l_2,k_1,k_2使得 $$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$$

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=-k_1\beta_1-k_2\beta_2$$

其中 k_1,k_2不全为零　l_1,l_2不全为零

令 $$\gamma=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=-k_1\beta_1-k_2\beta_2$$

$\gamma\neq 0$ 既可由α_1,α_2线性表出，又可由β_1,β_2线性表出

……………5

设 $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = -y_1\beta_1 - y_2\beta_2$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 = 0$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解得

$$(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = k(1, -1, 1, 1)^T$$

于是 $\gamma = k\alpha_1 - k\alpha_2 = k(-1, -3, -2)^T$

……………10