课程编号：A073122　　　　北京理工大学 2010-2011 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

一、（10 分）已知矩阵 X 满足 $AX + A^*X = 9A^{-1}X + 3I$，其中 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 X 。

二、（10 分）讨论 p, q 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + qx_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

有非零解，并求其基础解系。

三、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明：$1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1 + x, 1$ 为 $F[x]_4$ 的一个基；

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1 + x, 1$ 的过渡矩阵，以及 $h(x) = 1 - x - x^2 + x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\mathbf{1,0,1,1})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(\mathbf{1,1,1,1})$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(\mathbf{0,1,0,1})$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(\mathbf{2,1,2,2})$。

(1) 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

五、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & \\ & \mathbf{2} & & & \\ & & \mathbf{-1} & & \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子；(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在 $\mathbf{R}^3$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,-\mathbf{2}\boldsymbol{x}_3)$。

求$\boldsymbol{\sigma}$在 $\mathbf{R}^3$ 的自然基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵。

七、（10 分）已知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{k_1}(\mathbf{1,0,1})^{T}+\boldsymbol{k_2}(\mathbf{0,1,2})^{T}$，求此方程组的解空间的一个标准正交基。

八、（10 分）已知实二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})=\mathbf{2}\boldsymbol{x_1x_2}+\mathbf{2}\boldsymbol{x_1x_3}+\mathbf{2}\boldsymbol{x_2x_3}$。

(1) 求一正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，将二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{x_3})$ 是否正定。

九、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & a & 3 \end{bmatrix}$。

(1) 问 a 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化？

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$。

十、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$。