课程编号：A071001　　　　北京理工大学 2007-2008 学年第一学期

2007 级数学分析 B 期末试题(B)

一. 填空题（每小题 3 分, 共 30 分）

1. 设 $y=\ln\left|f(\frac{1}{x})\right|$, 其中 f 是可导函数, 则 $dy=$______________________.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(2+x)-\ln x]=$_________.

3. 曲线 $y=x^2\ln x$ 上横坐标为 $x=e$ 的点处的切线方程为____________________.

4. 已知 $f'(1)=8$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x^2)-f(1)}{1-\cos x}=$________.

5. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\dfrac{4}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}dx=$______________.

6. 设 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ 是某二阶常系数线性齐次微分方程的通解(其中 C_1,C_2 为任意常数), 则此微分方程为_______________________.

7. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=$_____________.

8. 已知 $x\to0$ 时 $\dfrac{1}{1+2x}=a+bx+cx^2+o(x^2)$, 则 $a=$_______, $b=$______, $c=$_______.

9. 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=4$ 及 x 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积等于_________.

10. 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+4xy=2x$ 的通解为________________________.

二. (8 分)计算定积分 $\int_0^{\pi}\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|\sin x dx$.

三. (8 分)求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值和最小值.

四. (8 分)已知 $f(x)$ 有二阶导函数, 又曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 处切线的斜率为 ax^2-4x, 且 $(-1,\dfrac{8}{3})$ 是此曲线的拐点, 求 a 的值及 $f(x)$ 的表达式.

五. (8 分)设室温为 20^0C 恒温, 一个表面温度为 100^0C 的热物体经过 20 分钟冷却到 60^0C, 假定任意时刻热物体表面温度的下降速度与物体表面温度和室温的差值成正比, 问 t 分钟后该物体的表面温度为多少?

六. (14 分)设函数 $f(x)$ 连续, 且满足方程 $\int_0^x(x-t)f(t)dt=xe^x-f(x)$, 求 $f(x)$.

七. (8 分)设对 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点 x_1,x_2，函数 $f(x)$ 都满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

八. (8 分) 已知 $x\to 0$ 时 $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt$ 与 $g(x)=a(\cos x-1)(1-\sqrt{1-x^2})$ 是等价无穷小, (其中 a,k 是非零常数, 且 $k>0$), 求 a 与 k 的值.

九. (8 分)已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续的导函数, 且 $|f'(x)|\le M$，证明

$$\left|\int_0^a f(x)dx-af(a)\right|\le\frac{Ma^2}{2}.$$

数学分析 B 第一学期期末试题(B)解答(2008.1)

一. 1. $-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2 f(\frac{1}{x})}dx$ (没有 dx 扣 1 分)

2. 2

3. $y = 3ex - 2e^2$

4. -16

5. 4

6. $y'' + 2y' + y = 0$

7. $\dfrac{3\pi}{8}$

8. $1,\ -2, 4$ (1 分, 1 分, 1 分)

9. $\dfrac{128}{5}\pi$

10. $y = Ce^{-2x^2} + \dfrac{1}{2}$ (没写 y 扣 1 分) (只写出通解公式没算出积分给 1 分)

二. $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\sin x dx$ ……….(2 分)

$\displaystyle = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)d\cos x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})d\cos x$ ………….(3 分)

$\displaystyle = -(\frac{\pi}{2}-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - (x-\frac{\pi}{2})\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx$ ………..(6 分)

$= \dfrac{\pi}{2} - 1 + \dfrac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2$ ……..……………(8 分)

三. $f'(x) = \dfrac{2(2x-2)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{4(x-1)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}}$ …………………………(2 分)

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$

当 $x = 0$, $x = 2$ 时, $f'(x)$ 不存在 ……………………………(5 分)

$f(0) = 0$ $f(2) = 0$ $f(1) = 1$

$f(3) = \sqrt[3]{9}$ $f(-2) = 4$

$M = 4$ $m = 0$ ……………………………(8 分)

四. $f'(x)=ax^2-4x$ .. …………………………(1 分)

$f''(x)=2ax-4$ …………………………..(2 分)

$f''(-1)=-2a-4=0 \quad a=-2$ …………………………..(.4 分)

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-4x)dx=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$ ……………(6 分)

由 $f(-1)=\frac{2}{3}-2+C=\frac{8}{3}$ 得 $C=4$

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+4$ ……………………………(8 分)

五. 设 t 时刻物体表面温度为 $T=T(t)$，则

$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$ ……………………………(2 分)

$\frac{dT}{T-20}=-kdt$ ……………………………(3 分)

$\ln|T-20|=-kt+C_1$

$T=20+Ce^{-kt}$ ……………………………(4 分)

由 $T(0)=100$ 得 $C=80$

$T=20+80e^{-kt}$ ……………………………(6 分)

由 $T(20)=60$ 得 $e^{-k}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{20}}$

$T=20+\frac{80}{2^{\frac{t}{20}}}$ …..…………………………(8 分)

六. $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=xe^x-f(x)$ ……………………….(1 分)

$\int_0^x f(t)dt=e^x+xe^x-f'(x)$ ……………………….(2 分)

$f(x)=e^x+e^x+xe^x-f''(x)$

$f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$ ……………………….(3 分)

$f(0)=0\quad f'(0)=1$ ……………………….(5 分)

$r^2+1=0\quad r=\pm i$ ……………………….(7 分)

$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ……………………….(8 分)

设 $f^*(x)=(Ax+B)e^x$ ……………………….(9 分)

代入微分方程得 $A=\frac{1}{2}\quad B=\frac{1}{2}$

$f^*(x)=\frac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………….(11 分)

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………….(12 分)

由初始条件得 $C_1=-\frac{1}{2}\quad C_2=0$

$f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………….(14 分)

七. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)$ ……………………….(2 分)

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$ ……………………….(4 分)

$=f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(x)+f(0)$ ……………………….(6 分)

$=f(x+0)=f(x)$ ……………………….(7 分)

故 $f(x)$ 在 x 处连续，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 ……………………….(8 分)

八.　由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ ……………………….(1 分)

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{a(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{-\frac{a}{4}x^4}$$ ………………..(3 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^{4k})}{x^2}2x}{-ax^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^{4k})}{-ax^4}$$ ……………………(5 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{4k}}{-ax^4}$$ ……………………(6 分)

故　$2=-a$　$4k=4$

得　$a=-2$　$k=1$ ……………………(8 分)

九.　$\left|\int_0^a f(x)dx-af(a)\right|$

$$=\left|\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(a)dx\right|=\left|\int_0^a (f(x)-f(a))dx\right|$$ ………………(2 分)

$$=\left|\int_0^a f'(\xi)(x-a)dx\right| \quad (\xi\in(0,a))$$ ……………………(4 分)

$$\le\int_0^a\left|f'(\xi)(x-a)\right|dx$$ ……………………….(5 分)

$$\le M\int_0^a|x-a|dx$$ ……………………...(6 分)

$$=M\int_0^a(a-x)dx$$ ……………………(7 分)

$$=\frac{Ma^2}{2}$$ ……………………….(8 分)