北京理工大学《数学分析》

2011-2012 学年第二学期期中试题及参考答案

班级______________　　学号________________　　姓名_________________

(本试卷共 6 页，十一个大题. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸，试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

一. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=5 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ $(z\geq 0)$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程为______________.

2. 设 $F(x,y,z)=0$，F 有连续偏导数，且 $F'_x\cdot F'_y\cdot F'_z\neq 0$，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________________.

3. 设数量场 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$，$\vec{r}$ 是点 $M(x,y,z)$ 的向径，则 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{r}}=$______________________.

4. 设 $I=\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$，则交换积分次序后 $I=$______________________________.

5. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{y^2+z}{x}$，则 $\mathrm{grad}\, f(1,1,0)$ 与 $\mathrm{grad}\, f(1,0,1)$ 之间的夹角 $\theta=$_________________.

二. (8 分) 证明直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ 与 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{2}$ 不相交.

三. (8 分) 设$|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=5$, $\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$，且以$k\vec{a}+2\vec{b}$和$4\vec{a}-5\vec{b}$为邻边的三角形的面积等于$115\sqrt{3}$，求$k$的值.

四. (9 分) 求曲面$z=2x^2+y^2+1$, $(x-1)^2+y^2=1$及xOy面所围成立体的体积.

五. (9 分) 设 $f(x,y)=x^2+y^2-y$, D 是由曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成的平面有界闭区域, 求 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值和最小值.

六. (9 分) 设 $u=f(x,y,z)$, $z=g(x^2,e^y,u)$, 其中 f,g 有连续偏导数, 且 $f_z'\cdot g_u'\neq 1$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 及 du.

七. (11 分) 设曲面 $S_1: x^2+y^2+z^2=9,\ S_2: z=xy$. (1) 求曲面 S_1 在点 $M(1,2,2)$ 处的切平面方程; (2) 求曲面 S_2 在点 M 处的法线方程; (3) 求 S_1, S_2 的交线 L 在点 M 处的切向量.

八. (9 分) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}$, 其中 V 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ 所围成且位于 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上方的空间有界闭区域.

九. (9 分) 一个用同一种薄板做成的长方体无盖水盆, 其体积为定值 a, 当水盆的长, 宽, 高分别为多少时, 所用材料最少.

十. (9 分) 设 S 是由 yOz 面上曲线 $y^2 = 2z$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面, V 是由曲面 S, 平面 $z = 2$ 和 $z = 8$ 所围成的均匀空间立体, 其密度为 μ, 求 V 关于 z 轴的转动惯量.

十一. (9 分) 设 $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, f 二阶可导，试将方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 变换成以 r 为自变量的常微分方程.

2011-2012-第二学期　　**工科数学分析期中试题解答（2012.4）**

一．1. $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

2. -1

3. $\dfrac{2u}{|\vec{r}|}$

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

5. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

二.　　设　$\vec{s}_1=\{1,3,1\}$　　$\vec{s}_2=\{1,4,2\}$　　$M(2,2,3)$　$N(1,3,4)$

$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{MN})=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2-1 & 2-3 & 3-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{………………..(4 分)}$$

$$=2\neq 0$$

两直线异面，故不相交　　　　　　　　…………………(8 分)

三.

$$115\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left|(k\vec{a}+2\vec{b})\times(4\vec{a}-5\vec{b})\right| \quad \text{…………………………(2 分)}$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-5k-8)(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\frac{1}{2}|5k+8|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| \quad \text{…………………………(4 分)}$$

$$=\frac{1}{2}|5k+8||\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{3}=5\sqrt{3}|5k+8| \quad \text{…………………………(6 分)}$$

$$|5k+8|=23$$

$$k=3 \quad 或 \quad k=-\frac{31}{5} \quad \text{…………………………(8 分)}$$

四. 设 $D:(x-1)^2+y^2\le 1$ ……………………(1 分)

$$V=\iint_D(2x^2+y^2+1)dxdy$$ ……………………(3 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2+1)d\theta$$ ………………(6 分)

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^6\theta+4\cos^4\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\pi$$ ………………(9 分)

五. $f'_x=2x=0\qquad f'_y=2y-1=0$

解得 $x=0\quad y=\frac{1}{2}$ 得驻点 $(0,\frac{1}{2})$ ……………………(3 分)

将边界 $y=0$ 代入目标函数得 $f(x,y)=x^2\quad(-1\le x\le 1)$

在此边界上 f 的最大值为 1，最小值为 0 ……………………….(5 分)

将边界 $y=1-x^2$ 代入目标函数得 $f(x,y)=(y-1)^2\quad(0\le y\le 1)$

在此边界上 f 的最大值为 1，最小值为 ……………………….(7 分)

又 $f(0,\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$

故 $M=1\qquad m=-\frac{1}{4}$ …………………….(9 分)

六. $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=2xg'_1+g'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$$ ………………………….(3 分)

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'_x+2xf'_z\cdot g'_1}{1-f'_z\cdot g'_u}$$ ………………………….(4 分)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^yg'_2+g'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$ ………………………….(7 分)

解得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f'_y+e^yf'_z\cdot g'_2}{1-f'_z\cdot g'_u}$$ ………………………….(8 分)

$$du=\frac{f'_x+2xf'_z\cdot g'_1}{1-f'_z\cdot g'_u}dx+\frac{f'_y+e^yf'_z\cdot g'_2}{1-f'_z\cdot g'_u}dy$$ ………………………….(9 分)

七.　(1)　S_1 在点 M 处的法向量 $\vec{n}_1=\{2x,2y,2z\}\big|_M=\{2,4,4\}$　…………..(2 分)

切平面为　$(x-1)+2(y-2)+2(z-2)=0$

即　$x+2y+2z-9=0$　……………..(4 分)

(2)　S_2 在点 M 处的法向量 $\vec{n}_2=\{y,x-1\}\big|_M=\{2,1,-1\}$　……………(6 分)

切线为　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$　……………….(8 分)

(3) L 在点 M 处的切向量 $\vec{s}=\dfrac{1}{2}\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,5,-3\}$　……………..(11 分)

八.

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}\frac{r^2\sin\varphi}{1+r^2}dr \qquad \text{……………………(4 分)}$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi(\cos\varphi-\arctan\cos\varphi)d\varphi \qquad \text{……………………(7 分)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}+\ln\frac{4}{3}\right)\pi \qquad \text{……………………(9 分)}$$

九.　设长，宽，高分别为 x,y,z，则表面积

$S=xy+2xz+2yz$　　$xyz=a$　………………….(3 分)

设　$F=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-a)$　………………….(4 分)

令
$$\begin{cases}F_x'=y+2z+\lambda yz=0\\F_y'=x+2z+\lambda xz=0\\F_z'=2x+2y+\lambda xy=0\\xyz=a\end{cases} \qquad \text{………………….(7 分)}$$

解得　$x=y=\sqrt[3]{2a}$　$z=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$

由问题……，故当长，宽，高分别为 $\sqrt[3]{2a},\sqrt[3]{2a},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$ 所用材料最少

………………..(9 分)

十.　$S: x^2+y^2=2z$ ……………………….(1 分)

$$I_z=\iiint\limits_V \mu(x^2+y^2)dxdydz$$ ………………………..(3 分)

$$=\mu\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^3 d\rho$$ ……………………….(6 分)

$$=2\pi\mu\int_2^8 z^2 dz$$

$$=336\pi\mu$$ …………………….(9 分)

十一.　$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r)$$ …………………….(3 分)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$$ …………………….(6 分)

同理　$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r)$$ …………………….(7 分)

代入方程得　$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0$$ ……………………..(9 分)