

习题一

1.下列句子中,哪些是命题?在是命题的句子中,哪些是简单命题?哪些是真命题?哪些命题的真值现在还不知道?

(1) 中国有四大发明.

答:此命题是简单命题,其真值为 1.

(2) $\sqrt{5}$ 是无理数.

答:此命题是简单命题,其真值为 1.

(3) 3 是素数或 4 是素数.

答:是命题,但不是简单命题,其真值为 1.

(4) $2x+ <3$ 5 答:不是命题.

(5) 你去图书馆吗? 答:不是命题.

(6) 2 与 3 是偶数.

答:是命题,但不是简单命题,其真值为 0.

(7) 刘红与魏新是同学.

答:此命题是简单命题,其真值还不知道.

(8) 这朵玫瑰花多美丽呀! 答:不是命题.

(9) 吸烟请到吸烟室去! 答:不是命题.

(10) 圆的面积等于半径的平方乘以 π .

答:此命题是简单命题,其真值为 1.

(11) 只有 6 是偶数, 3 才能是 2 的倍数.

答:是命题,但不是简单命题,其真值为 0.

(12) 8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除.

答:是命题,但不是简单命题,其真值为 0.

(13) 2008 年元旦下大雪.

答:此命题是简单命题,其真值还不知道.

2.将上题中是简单命题的命题符号化.

解: (1) p : 中国有四大发明.

(2) p : $\sqrt{5}$ 是无理数.

(7) p : 刘红与魏新是同学.

(10) p : 圆的面积等于半径的平方乘以 π .

(13) p : 2008 年元旦下大雪.

3.写出下列各命题的否定式,并将原命题及其否定式都符号化,最后指出各否定式的真值.

(1) $\sqrt{5}$ 是有理数.

答: 否定式: $\sqrt{5}$ 是无理数. p : $\sqrt{5}$ 是有理数. q : $\sqrt{5}$ 是无理数. 其否定式 q 的真值为 1.

(2) $\sqrt{5}$ 不是无理数.

答: 否定式: $\sqrt{25}$ 是有理数. p : $25\sqrt{\quad}$ 不是无理数. q : 25 是 $\sqrt{\quad}$ 有理数. 其否定式 q 的真值为 1.

(3) 2.5 是自然数.

答: 否定式: 2.5 不是自然数. p : 2.5 是自然数. q : 2.5 不是自然数. 其否定式 q 的真值为 1.

(4) $\ln 1$ 是整数.

答: 否定式: $\ln 1$ 不是整数. p : $\ln 1$ 是整数. q : $\ln 1$ 不是整数. 其否定式 q 的真值为 1.

4. 将下列命题符号化, 并指出真值.

(1) 2 与 5 都是素数

答: p : 2 是素数, q : 5 是素数, 符号化为 $p \wedge q$, 其真值为 1.

(2) 不但 π 是无理数, 而且自然对数的底 e 也是无理数.

答: p : π 是无理数, q : 自然对数的底 e 是无理数, 符号化为 $p \wedge q$, 其真值为 1.

(3) 虽然 2 是最小的素数, 但 2 不是最小的自然数.

答: p : 2 是最小的素数, q : 2 是最小的自然数, 符号化为 $p \wedge \neg q$, 其真值为 1.

(4) 3 是偶素数.

答: p : 3 是素数, q : 3 是偶数, 符号化为 $p \wedge q$, 其真值为 0.

(5) 4 既不是素数, 也不是偶数.

答: p : 4 是素数, q : 4 是偶数, 符号化为 $\neg p \wedge \neg q$, 其真值为 0.

5. 将下列命题符号化, 并指出真值.

(1) 2 或 3 是偶数.

(2) 2 或 4 是偶数.

(3) 3 或 5 是偶数.

(4) 3 不是偶数或 4 不是偶数.

(5) 3 不是素数或 4 不是偶数.

答: p : 2 是偶数, q : 3 是偶数, r : 3 是素数, s : 4 是偶数, t : 5 是偶数

(1) 符号化: $p \vee q$, 其真值为 1.

(2) 符号化: $p \vee r$, 其真值为 1.

(3) 符号化: $r \vee t$, 其真值为 0.

(4) 符号化: $\neg q \vee \neg s$, 其真值为 1.

(5) 符号化: $\neg r \vee \neg s$, 其真值为 0.

6. 将下列命题符号化.

(1) 小丽只能从筐里拿一个苹果或一个梨.

答: p : 小丽从筐里拿一个苹果, q : 小丽从筐里拿一个梨, 符号化为: $p \vee q$.

(2) 这学期, 刘晓月只能选学英语或日语中的一门外语课.

答: p : 刘晓月选学英语, q : 刘晓月选学日语, 符号化为: $(\neg \wedge \vee \wedge \neg p q)(p q)$.

7. 设 p : 王冬生于 1971 年, q : 王冬生于 1972 年, 说明命题“王冬生于 1971 年或 1972 年”既可以化答: 列出两种符号化的真值表:

p	q	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1

根据真值表, 可以判断出, 只有当 p 与 q 同时为真时两种符号化的表示才会有不同的真值, 但结合命题可以发现, p 与 q 不可能同时为真, 故上述命题有两种符号化方式.

8. 将下列命题符号化, 并指出真值.

(1) 只要 $2 < 1$, 就有 $3 < 2$;

(2) 如果 $2 < 1$, 则 $3 \geq 2$;

(3) 只有 $2 < 1$, 才有 $3 \geq 2$;

(4) 除非 $2 < 1$, 才有 $3 \geq 2$;

(5) 除非 $2 < 1$, 否则 $3 < 2$;

(6) $2 < 1$ 仅当 $3 < 2$.

答: 设 p : $2 < 1$, 则 $\neg p$: $2 \geq 1$; 设 q : $3 > 2$, 则 $\neg q$: $3 \geq 2$.

	符号化	真值
(1)	$p \rightarrow q$	1
(2)	$p \rightarrow \neg q$	1
(3)	$\neg q \rightarrow p$	0
(4)	$\neg q \rightarrow p$	0
(5)	$\neg q \rightarrow p$	0

(6)	$p \rightarrow q$	1
-----	-------------------	---

9. 设 p : 俄罗斯位于南半球, q : 亚洲人口最多, 将下面命题用自然语言表述, 并指出其真值:

(1) $p \rightarrow q$;

(2) $q \rightarrow p$;;

(3) $\neg p \rightarrow q$;

(4) $p \rightarrow \neg q$;

(5) $\neg q \rightarrow p$;

(6) $\neg p \rightarrow \neg q$;

(7) $\neg q \rightarrow \neg p$.

答: 根据题意, p 为假命题, q 为真命题.

	自然语言	真值
(1)	只要俄罗斯位于南半球, 亚洲人口就最多	1
(2)	只要亚洲人口最多, 俄罗斯就位于南半球	0
(3)	只要俄罗斯不位于南半球, 亚洲人口就最多	1
(4)	只要俄罗斯位于南半球, 亚洲人口就不是最多	1
(5)	只要亚洲人口不是最多, 俄罗斯就位于南半球	1
(6)	只要俄罗斯不位于南半球, 亚洲人口就不是最多	0
(7)	只要亚洲人口不是最多, 俄罗斯就不位于南半球	1

10. 设 p : 9 是 3 的倍数, q : 英国与土耳其相邻, 将下面命题用自然语言表述, 并指出真值:

(1) $p \leftrightarrow q$;

(2) $p \leftrightarrow \neg q$;

(3) $\neg p \leftrightarrow q$;

(4) $\neg p \leftrightarrow \neg q$.

答: 根据题意, p 为真命题, q 为假命题.

	自然语言	真值
(1)	9 是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其相邻	0
(2)	9 是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其不相邻	1
(3)	9 不是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其相邻	1

(4)	9 不是 3 的倍数当且仅当英语与土耳其不相邻	0
-----	-------------------------	---

11. 将下列命题符号化,并给出各命题的真值:

- (1) 若 $2+2=4$,则地球是静止不动的;
- (2) 若 $2+2=4$,则地球是运动不止的;
- (3) 若地球上没有树木,则人类不能生存;

- (4) 若地球上没有水,则 $\sqrt{3}$ 是无理数.

答:

	命题 1	命题 2	符号化	真值
(1)	$p:2+2=4$	q :地球是静止不动的	$p \rightarrow q$	0
(2)	$p:2+2=4$	q :地球是静止不动的	$p \rightarrow \neg q$	1
(3)	p :地球上有树木	q :人类能生存	$\neg p \rightarrow \neg q$	1
(4)	p :地球上有树木	q :人类能生存	$\neg p \rightarrow q$	1

12.将下列命题符号化,并给出各命题的真值:

- (1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$;
- (2) $2+2=4$ 的充要条件是 $3+3 \neq 6$;
- (3) $2+2 \neq 4$ 与 $3+3=6$ 互为充要条件;
- (4) 若 $2+2 \neq 4$,则 $3+3 \neq 6$,反之亦然.

答:设 $p:2+2=4, q:3+3=6$.

	符号化	真值
(1)	$p \leftrightarrow q$	1
(2)	$p \leftrightarrow \neg q$	0
(3)	$\neg p \leftrightarrow q$	0
(4)	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	1

13.将下列命题符号化,并讨论各命题的真值:

- (1) 若今天是星期一,则明天是星期二;
- (2) 只有今天是星期一,明天才是星期二;

(3) 今天是星期一当且仅当明天是星期二；

(4) 若今天是星期一,则明天是星期三.

答:设 p:今天是星期一,q:明天是星期二,r:明天是星期三.

	符号化	真值讨论
(1)	$p \rightarrow q$	不会出现前句为真,后句为假的情况
(2)	$q \rightarrow p$	不会出现前句为真,后句为假的情况
(3)	$p \leftrightarrow q$	必然为 1
(4)	$p \rightarrow r$	若 p 为真,则真值为 0;若 p 为假,则真值为 1

14.将下列命题符号化:

- (1) 刘晓月跑得快,跳得高;
- (2) 老王是山东人或者河北人;
- (3) 因为天气冷,所以我穿了羽绒服;
- (4) 王欢与李乐组成一个小组;
- (5) 李欣与李末是兄弟;
- (6) 王强与刘威都学过法语;
- (7) 他一面吃饭,一面听音乐;
- (8) 如果天下大雨,他就乘班车上班;
- (9) 只有天下大雨,他才乘班车上班;
- (10) 除非天下大雨,否则他不乘班车上班;
- (11) 下雪路滑,他迟到了;
- (12) 2 与 4 都是素数,这是不对的;
- (13) “2 或 4 是素数,这是不对的”是不对的.

答:

	命题 1	命题 2	命题 3	符号化
(1)	p:刘晓月跑得快	q:刘晓月跳得高	-	$p \wedge q$
(2)	p:老王是山东人	q:老王是河北人	-	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
(3)	p:天气冷	q:我穿羽绒服	-	$p \rightarrow q$
(4)	p:王欢与李乐组成一个小组	-	-	p:王欢与李乐组成一个小组
(5)	p:李辛与李末是兄弟	-	-	p:李辛与李末是兄弟

(6)	p:王强学过法语	q:刘威学过法语	-	$p \wedge q$
(7)	p:他吃饭	q:他听音乐	-	$p \wedge q$
(8)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$p \rightarrow q$
(9)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$q \rightarrow p$
(10)	p:天下大雨	q:他乘车上班	-	$q \rightarrow p$
(11)	p:下雪	q:路滑	r:他迟到了	$(p \wedge q) \rightarrow r$
(12)	p:2 是素数	q:4 是素数	-	$\neg(p \wedge q)$
(13)	p:2 是素数	q:4 是素数	-	$\neg(\neg(p \vee q))$

15. 设 p: $2+3=5$.

q: 大熊猫产在中国.

r: 太阳从西方升起. 求下列符合命题的真值:

(1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$;

(2) $(r \rightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow \neg p$;

(3) $(\neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r))$;

(4) $(p \wedge q \wedge \neg r) \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$.

解: p 真值为 1, q 真值为 1, r 真值为 0.

(1) 0, (2) 0, (3) 0, (4) 1

16. 当 p,q 的真值为 0, r,s 的真值为 1 时, 求下列各命题公式的真值:

(1) $p \vee (q \wedge r)$;

(2) $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$;

(3) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r)$;

(4) $(\neg r \wedge s) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

解：(1) 0, (2) 0, (3) 0, (4) 1

17.判断下面一段论述是否为真：“ π 是无理数.并且,如果 3 是无理数,则 $\sqrt{2}$ 也是无理数.另外,只有 6 能被 2 整除,6 才能被 4 整除.”

解：p: π 是无理数 q: 3 是无理数 r: $\sqrt{2}$ 是无理数 s: 6 能被 2 整除 t: 6 能被 4 整除

符号化为: $p \wedge (q \rightarrow r) \vee (s \rightarrow t)$, 该式为重言式, 所以论述为真。

18.在什么情况下,下面一段论述是真的:“说小王不会唱歌或小李不会跳舞是正确的,而说如果小王会唱歌,小李就会跳舞是不正确的.”解：p:小王会唱歌。q:小李会跳舞。

$\neg p \vee \neg q$ 真值为 1. $p \rightarrow q$ 真值为 0.可得, p 真值为 1, q 真值为 0.

所以, 小王会唱歌, 小李不会跳舞。

19.用真值表判断下列公式的类型:

(1) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$;

(2) $(\neg \neg p) \rightarrow \neg q$;

(3) $\neg(q \rightarrow r) \wedge r$;

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;

(5) $(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

(6) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

(7) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$.

解：(1)

p	q	r	$p \rightarrow (p \vee q \vee r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1

1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

此式为重言式

(2)

p	q	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

此式为可满足式

(3)

q	r	$\neg(q \rightarrow r) \wedge r$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

此式为矛盾式

(4)

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

此式为重言式

(5)

p	q	r	$(p \wedge r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1

1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

此式为可满足式

(6)

p	q	r	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

此式为重言式

(7)

p	q	r	s	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

此式为可满足式

20.求下列公式的成真赋值：

(1) $\neg p \rightarrow q$;

(2) $p \vee \neg q$;

(3) $(p \wedge q) \rightarrow \neg p$;

(4) $\neg(p \vee q) \rightarrow q$ 解：

p	q	$\neg p \rightarrow q$	$p \vee \neg q$	$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$	$\neg(p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1

由真值表得：(1) 的成真赋值是 01, 10,11 (2) 的成真赋值是 00, 10,11

(3) 的成真赋值是 00, 01,10 (4) 的成真赋值是 01, 10,11

21.求下列各公式的成假赋值：

(1) $\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$;

(2) $(\neg q \vee r) \wedge (p \rightarrow q)$;

(3) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$ ·解：

p	q	r	$\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$	$(\neg q \vee r) \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

由真值表得：(1) 的成假赋值是 011 (2) 的成假赋值是 010,110

(3) 的成假赋值是 100,101

22. 已知公式 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 是矛盾式, 求公式 $\neg(q \rightarrow p) \wedge p \wedge \neg r$ 成真和成假赋值.

解: $\because \neg(q \rightarrow p) \wedge p$ 是矛盾式 $\therefore \neg(q \rightarrow p) \wedge p \wedge \neg r$ 也是矛盾式.

由此可得: 该式无成真赋值. 而成假赋值为: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

23. 已知公式 $(p \wedge q) \rightarrow p$ 是重言式, 求公式 $((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ 的成真和成假赋值.

解: $\because (p \wedge q) \rightarrow p$ 是重言式, $\therefore ((p \wedge q) \rightarrow p) \vee r$ 也是重言式.

由此可得: 该式无成假赋值. 而成真赋值为: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

24. 已知 $(p \rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow p)$ 是重言式, 试判断公式 $p \rightarrow (p \vee q)$ 及 $(p \wedge q) \rightarrow p$ 的类型.

解: $\because (p \rightarrow (p \vee q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow p)$ 是重言式, 而要使该式为重言式, 其成真赋值只有

11, $\therefore (p \rightarrow (p \vee q))$ 和 $((p \wedge q) \rightarrow p)$ 都是重言式.

25. 已知 $(\neg(p \rightarrow q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$ 是矛盾式, 试判断公式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 及 $\neg(\neg q \vee p) \wedge q$ 的类型.

解: $\because (\neg(p \rightarrow q) \wedge q) \vee (\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$ 是矛盾式, 而要使该式为矛盾式, 其成假赋值

只有 00, $\therefore (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 和 $(\neg(\neg q \vee p) \wedge q)$ 都是重言式.

26. 已知 $p \rightarrow (p \vee q)$ 是重言式, $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 是矛盾式, 试判断 $(p \rightarrow (p \vee q)) \wedge (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 及 $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 的类型.

解: $(p \rightarrow (p \vee q)) \wedge (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 是矛盾式.

$(p \rightarrow (p \vee q)) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 是重言式.

27. 设 A、B 都是含命题变量项 p_1, p_2, \dots, p_n 的公式, 证明: $A \wedge B$ 是重言式当且仅当 A 和 B 都是重言式.

解:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由真值表可得, 当且仅当 A 和 B 都是重言式时, $A \wedge B$ 是重言式。

28. 设 A、B 都是含命题变量项 p_1, p_2, \dots, p_n 的公式, 已知 $A \wedge B$ 是矛盾式, 能得出 A 和 B 都是矛盾式的结论吗? 为什么?

解:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

同样由真值表可得, $A \wedge B$ 的成假赋值有 00, 01, 10, 所以无法得到 A 和 B 都是矛盾式。

29. 设 A、B 都是含命题变量项 p_1, p_2, \dots, p_n 的公式, 证明: $A \vee B$ 是矛盾式当且仅当 A 和 B 都是矛盾式。

解:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由真值表可得, 当且仅当 A 和 B 都是矛盾式时, $A \wedge B$ 是矛盾式。

30. 设 A、B 都是含命题变量项 p_1, p_2, \dots, p_n 的公式, 已知 $A \wedge B$ 是重言式, 能得出 A 和 B 都是重言式的结论吗?

解:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由真值表可得 $A \wedge B$ 的成真赋值有 01, 10, 11. 所以无法得到 A 和 B 都是重言式。

习 题 二

1. 设公式 $A, B, C = \neg(A \wedge B) \rightarrow A \vee B$, 用真值表验证公式 A 和 B 适合德摩根律:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad A \vee B$$

p	q	A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

2. 公式 A 和 B 同题 (1), 用真值表验证公式 A 和 B 适合蕴涵等值式.

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

p	q	A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

3. 用等值演算法判断下列公式的类型, 对不是重言式的可满足式, 再用真值表法求出成真赋值.

(1) $\neg(A \wedge \neg(B \vee C))$

答: 原式 $= \neg(\neg A \wedge \neg(B \vee C))$

$$= \neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

$= 0$ 是矛盾式.

4. 用等值演算法证明下面等值式.

(1) $p \Leftrightarrow \wedge \vee \wedge \neg (p \vee q) (p \vee q)$ () 答:

右式= $p \vee q \wedge \vee \neg () = p \wedge 1 = p$

(2) $((p \vee q \rightarrow \wedge \rightarrow \Leftrightarrow \rightarrow \wedge) (p \vee r)) (p \vee (q \vee r))$

答: 右式= $\neg \vee \wedge p \vee q \vee r () = (\neg \vee \wedge \neg \vee p \vee q) (p$

$\vee r) = (p \vee q \vee p \vee r \rightarrow \wedge \rightarrow) () =$ 左式

(3) $\neg \leftrightarrow \Leftrightarrow \vee \wedge \neg \wedge (p \vee q) (p \vee q) (p \vee q)$ 答:

左式= $\neg \neg \vee \vee \neg \vee \neg (p \vee q) (p \vee q)$

$= (p \vee \neg \wedge \wedge \neg \vee \neg \wedge (p \vee q)) (q \vee (p \vee q))$

$= (p \vee q \vee \wedge \neg \wedge) (p \vee q)$

(4) $(p \vee q \wedge \neg \vee \neg \wedge \Leftrightarrow \vee \wedge \neg \wedge) (p \vee q) (p$

$\vee q) (p \vee q)$ 答: 左式= $(p \vee \neg \wedge \wedge \neg \vee \neg \wedge (p \vee q))$

$(q \vee (p \vee q))$

$= (p \vee q \vee \wedge \neg \wedge) (p \vee q)$

5.求下列公式的主析取范式，并求成真赋值:

(1) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$

答:

$$\begin{aligned} & (\neg \rightarrow \rightarrow \neg \vee = \vee \rightarrow \neg \vee = \neg \vee \vee \neg \vee p \vee q) \quad (q \vee p) \quad (p \vee q) \quad (q \vee p) \quad (p \vee q) \quad (q \vee p) \\ & = (\neg \wedge \neg \vee \neg \wedge \vee \neg \vee \wedge \vee \neg p \vee q) \quad (q \vee p \vee ()) \quad (p \vee q \vee ()) \\ & = (p \vee q \wedge \vee \vee \neg \vee \neg \wedge \neg = \vee \vee) \quad (p \vee p) \quad (p \vee q \vee m \vee m)_{0 \quad 2 \quad 3} \end{aligned}$$

成真赋值为 00,10,11.

(2) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$ 答: $\neg \rightarrow \wedge \wedge = \neg \neg \vee \wedge \wedge = \wedge \neg \wedge \wedge = (p \vee q \vee r) (p \vee q \vee r \vee p \vee q \vee r)$

$q) = 0$

所以为矛盾式。

(3) $(p \vee q \vee r \vee \wedge \rightarrow \vee \vee ()) \quad (p \vee q \vee r)$

[illegible]

(1) $\neg(q \rightarrow \neg p) \wedge \neg p$ 答: $\neg \rightarrow \neg \wedge \neg = \neg \neg \vee \neg \wedge \neg = \wedge \wedge \neg = (q p) p (q p) p q$

(2) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$ 答: $(p \wedge q \wedge \vee \neg \vee = \vee \neg \vee \wedge \vee \neg \vee = \neg \vee \vee =)$ $(p$

(3) $(p \rightarrow (p \vee q)) \vee r$ 答: $(p \rightarrow \vee \vee = \neg \vee \vee \vee = \neg \vee \vee \vee = (p \vee q) \vee r) (p \vee q)$

有赋值均为成真赋值。

(1) $(p \wedge q) \vee r$ 答: $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ($\vee = \wedge \wedge \vee \neg \vee$) ()

$$\begin{aligned}
& ((p \, p \, q \, q \, r \vee \neg \wedge \vee \neg \wedge) \quad (\quad) \quad) \\
& = (p \, q \, r \, r \wedge \wedge \vee \neg \vee (\quad))((p \, p \, q \, q \, r \vee \neg \wedge \vee \neg \wedge) \quad (\quad) \quad) \\
& \quad = (p \, q \, r \wedge \wedge \vee \wedge \wedge \neg \vee \wedge \neg \wedge \vee \neg \wedge \wedge \vee \neg \wedge \neg \wedge)(p \, q \, r) \quad (p \, q \, r) \quad (p \, q \, r) \quad (p \, q \, r) \\
& \quad = m \, m \, m \, m \, m \, M \, M \, M_1 \vee \vee \vee \vee_3 \quad_5 \quad_6 \quad_7 =_0 \wedge_2 \wedge_4
\end{aligned}$$

答：

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q \vee r \rightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \quad (p \vee q \vee r) \quad (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \\
 & = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \\
 & = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \\
 & = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7
 \end{aligned}$$

8.求下列公式的主合取范式，再用主合取范式求主析取范式：

(1) $(p \wedge q) \rightarrow q$ 答： $(p \wedge q) \rightarrow q = \neg(p \wedge q) \vee q = (\neg p \vee \neg q) \vee q = \neg p \vee q$

$$(p \vee q) \vee (\neg p \vee q) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$$

为重言式。

(2) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ 答： $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r = \neg(p \leftrightarrow q) \vee r = (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \vee r$

$$\begin{aligned}
 & = (\neg p \vee q \vee r) \vee (p \vee q \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (p \vee \neg q \vee r) \\
 & = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7
 \end{aligned}$$

(3) $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r$ 答： $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r = \neg(\neg p) \vee (\neg q \wedge r) = p \vee (\neg q \wedge r)$

$$\begin{aligned}
 & = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

因此为矛盾式。

9.用真值表求下面的公式的主析取范式。

(1) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r)$

答：公式的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg r \wedge p$	$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

其成真赋值为 001,010,011,100,101,110,111, 所以其主析取范式为

$$m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$ 答: 公式的真值表如下:

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee q) &= (\neg p \vee q) \wedge \neg(p \vee q) \\ &= (\neg p \wedge \neg(p \vee q)) \vee (q \wedge \neg(p \vee q)) \end{aligned}$$

故其成真赋值为 001, 010. 所以其主析取范式为 $m_1 \vee m_2$.

10. 用真值表求下面公式的主合取范式.

(1) $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee p)$ 答: $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee p)$

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \vee p) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$$

$$= m_0 \wedge m_2 \wedge m_4$$

(2) $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$ 答:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge \neg q) = (\neg p \vee q) \wedge \neg(r \wedge \neg q)$$

$$= (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$$

$$= m_2 \wedge m_4 \wedge m_5 \wedge m_6$$

11. 用真值表求下面公式的主析取范式和主合取范式. (1) $(p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p)$

$$(2) p \rightarrow \neg(p \vee q) \quad (3) \neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

p	q	r	$(p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p)$	$p \rightarrow \neg(p \vee q)$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$
0	0	0	0	1	0

0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

答：(1) 由真值表可得成真赋值为 011,101,111，故主析取范式为 $m_3 \vee m_5 \vee m_7$ ，主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$

(2) 由真值表可得无成假赋值，故主析取范式为

$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ ，主合取范式为 1.

(3) 由真值表可得无成真赋值，故主析取范式为 0，主合取范式为 M_0

$M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$.

12. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p, q, r ，并且它的成真赋值为 000, 011, 110，求 A 的主合取范式和主析取范式.

答：由题意得， A 的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$ ，主析取范式

$m_0 \vee m_3 \vee m_5$.

13. 已知公式 A 含 3 个命题变项 p, q, r ，并且它的成真赋值为 000, 011, 110，求 A 的主合取范式和主析取范式. 答：由题意得， A 的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$ ，主析取范式

$m_0 \vee m_3 \vee m_5$.

14. 已知公式 A 含 n 个命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n ，并且无成假赋值，求 A 的主合取范式.

答： A 的主合取范式为 1. 15. 用主析取范式判断下列公式是否等值：

(1) $(p \vee q) \rightarrow r$ 与 $q \rightarrow$

$\rightarrow(p \vee r)$ 答： $(p \vee q) \rightarrow r = \neg(p \vee q) \vee r$

$r \vee \neg p \vee \neg q$

$$=m m m m m_1 \vee \vee \vee \vee_{3 \ 4}$$

$$_5 \quad \neg q \rightarrow \rightarrow = \neg \vee \neg \vee (p \ r) \quad p \ q \ r$$

$$=m m m m m m m_0 \vee \vee \vee \vee \vee \vee_{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}$$

所以上述公式不等值.

(2) $\neg \wedge (p \ q)$ 与 $\neg \vee (p \ q)$ 答:

$$\neg \wedge = \neg \vee \neg (p \ q) \quad p \ q$$

$$=m m m_0 \vee \vee_{1 \ 2}$$

$$\neg \vee = \neg \wedge \neg (p \ q) \quad p \ q$$

$$=m_0$$

16.用主合取范式判断下列公式是否等值.

(1) $p \rightarrow \neg (q \ r)$ 与 $\neg \wedge \vee (p \ q \ r)$ 答: $p \rightarrow$

$$\rightarrow = (q \ r \ M) \quad 6$$

$$\neg \wedge \vee (p \ q \ r \ M) = \quad 6$$

(2) $p \rightarrow \neg (q \ r)$ 与 $(p \ q \rightarrow \rightarrow) \ r$

$$\text{答: } p \rightarrow \neg = (q \ r \ M) \quad 6$$

$$(p \ q \rightarrow \rightarrow) \ r \ M \ M \ M =_0 \wedge_2 \wedge_6$$

17.将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg \wedge \vee ' '\}$ 中联结词的公式:

(1) $\neg \rightarrow \leftrightarrow \wedge (p \ q \ (q \ r))$ 答: $\neg \rightarrow \leftrightarrow \wedge (p \ (q$

$$(q \ r))) = \neg \neg \vee \leftrightarrow \wedge (p \ q \ (q \ r)))$$

$$= p \wedge \neg \leftrightarrow \wedge ((q \ r))$$

$$= p \wedge \neg \neg \vee \wedge \wedge \vee \neg \wedge ((q \ q \ r \ (\)) \quad (q \ (q \ r)))$$

(2) $(p \vee q \wedge \neg r)$ 答: $(p \vee q) \wedge \neg r$, 原式已满足

题目要求.

(3) $p \leftrightarrow (q \vee r)$ 答: $p \leftrightarrow (q \vee r) = (p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \rightarrow p)$

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \rightarrow p)$$

$$= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg(q \vee r) \vee p) = (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r \vee p)$$

18.将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 中联结词的公式:

(1) $p \vee q \wedge \neg r \vee \neg p$ 答: 此公式已经符合题目要求.

(2) $(p \vee r \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \rightarrow r)$ 答: $(p \vee r \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \rightarrow r)$

$$(p \vee r \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \rightarrow r)$$

$$= ((\neg p \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (p \vee r)) \wedge (p \rightarrow r) \\ = ((\neg p \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg p \vee r)$$

(3) $(p \vee q \vee r \rightarrow \neg p \vee \neg q) \vee (p \rightarrow \neg q)$ 答: $(p \vee q \vee r \rightarrow \neg p \vee \neg q) \vee (p \rightarrow \neg q)$

$$= (\neg(p \vee q \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \vee \neg q)$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee \neg q)$$

$$= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)$$

19.将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \vee\}$ 中联结词的公式.

(1) $(\neg p \vee \neg q \wedge \neg r) \vee p$ 答: $(\neg p \vee \neg q \wedge \neg r) \vee p$

$$= (\neg p \vee \neg q \wedge \neg r) \vee p = (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$$

(2) $(p \rightarrow \neg q \wedge \neg r) \vee (q \vee r)$ 答: $(p \rightarrow \neg q \wedge \neg r) \vee (q \vee r)$

$$= (\neg p \vee \neg q \wedge \neg r) \vee (q \vee r) = (\neg p \vee \neg q \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee r \vee q \vee r)$$

$$= (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee r)$$

(3) $p \vee q \wedge r \wedge \neg$ 答: $p \vee q \wedge r \wedge \neg$

$$= \neg \neg \vee \neg \vee (p \vee q \wedge r)$$

20. 将下列公式化成与之等值且仅含 $\{\neg, \rightarrow\}$ 中联结词的公式:

(1) $(p \wedge q) \vee r$ (2) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$ (3) $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ 答: $(p \vee q \wedge r \wedge \neg \neg \vee \neg$

$$\vee \neg \neg \rightarrow \neg \vee \neg \rightarrow \neg \rightarrow) (p \vee q \wedge r) (p \vee q \wedge r) (p \vee q \wedge r)$$

(2) $(p \rightarrow \neg \wedge q \wedge r)$ 答: $(p \rightarrow \neg \wedge \neg \neg \rightarrow \neg \vee \neg \neg \rightarrow \neg \rightarrow \neg \rightarrow \neg q \wedge r) ((p$

$$q) \wedge r) ((p \vee q) \wedge r)$$

(3) $(p \vee q \wedge \leftrightarrow) r$ 答: $(p \vee q \wedge \leftrightarrow \neg \neg \vee \neg \rightarrow \wedge \rightarrow \neg \neg \vee \neg) r$

$$((p \vee q) \wedge r) ((p \vee q) \wedge r)$$

$$\neg \neg \neg \neg \neg \vee \neg \rightarrow \vee \neg \rightarrow \neg \neg \vee \neg ((p \vee q) \wedge r) ((p \vee q) \wedge r)$$

$$\neg \neg \neg \rightarrow \neg \rightarrow \rightarrow \neg \rightarrow \neg \rightarrow \neg ((p \vee q) \wedge r) ((p \vee q) \wedge r)$$

21. 证明:

(1) $(p \uparrow q) \leftrightarrow (q \uparrow p)$, $(p \downarrow q) \leftrightarrow (q \downarrow p)$.

(2) $(p \uparrow (q \uparrow r)) \leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow r)$, $(p \downarrow (q \downarrow r)) \leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow r)$.

证明: (1) $p \uparrow q \leftrightarrow \neg \wedge \neg \wedge \leftrightarrow \uparrow(p \vee q) ((q \vee p) \vee p); p \downarrow q \leftrightarrow \neg \vee \neg \vee \leftrightarrow$

$$\downarrow(p \vee q) ((q \vee p) \vee p) (2) \text{ 令 } p=0, q=0, r=1 \text{ 则 } p \uparrow q \uparrow r \uparrow = () \quad 1, (p \uparrow q \uparrow r \uparrow$$

$$=) \quad 0, p \downarrow q \downarrow r \downarrow = () \quad 1, (p \downarrow q \downarrow r \downarrow =) \quad 0., \text{ 可知}$$

$$(p \uparrow q \uparrow r \uparrow \leftrightarrow ((p \uparrow q) \uparrow r)) ((p \uparrow q \uparrow r \uparrow) ((p \uparrow q) \uparrow r)) ((p \downarrow q \downarrow r \downarrow) ((p \downarrow q) \downarrow r)).$$

22. 从表 2.6 中, 找出与下列公式等值的真值函数:

(1) $p \uparrow q$

(2) $p \downarrow q$

(3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (4) $\neg(p \rightarrow q)$

答: (1) $F_{14(2)}$; (2) $F_{8(2)}$; (3) $F_{6(2)}$; (4) $F_{2(2)}$

23. 设 A、B、C 为任意的命题公式, 证明:

(1) 等值关系有自反性: $A \leftrightarrow A$

(2) 等值关系有对称性: 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$

(3) 等值关系有传递性: 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$ 答: (1) $A \leftrightarrow \Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow \Leftrightarrow \rightarrow$

$$\Leftrightarrow \neg \vee \Leftrightarrow (A A A A) \quad () A A \quad A A 1$$

$$(2) B A \leftrightarrow \Leftrightarrow \neg \vee \wedge \neg \vee \Leftrightarrow \neg \vee \wedge \neg \vee \Leftrightarrow \leftrightarrow (B A)(A B) (A B) \quad (B A) A B$$

(3)

$$\text{若 } A B B C \Leftrightarrow \text{ 且 } \Leftrightarrow \Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow (A B B A B C C B) () \quad () \quad ()$$

$$\Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow \Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow (A B B C C B B A)() \quad () \quad () \quad (A C C A)$$

()

$$\Leftrightarrow \leftrightarrow A C \text{ 即 } A$$

$$C \Leftrightarrow$$

24. 设 A、B 为任意的命题公式, 证明: $\neg \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 当且仅当 $A \vee B \Leftrightarrow$ 答: \neg

$$\leftrightarrow \neg \Leftrightarrow \vee \neg \wedge \vee \neg \Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow \Leftrightarrow \leftrightarrow A \vee B (A B B A) () \quad (A B B A)$$

() $A \vee B$. 因此 $\neg \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 当且仅当 $A \vee B \Leftrightarrow$ 。

25. 设 A、B、C 为任意的命题公式, (1) 若 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$, 举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立。(2) 若 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$, 举例说明 $A \Leftrightarrow B$ 不一定成立。由 (1)、(2) 可知, 联结词 \vee 与 \wedge 不满足消去率。

答: (1) 设 $A \vee B \vee C = \vee 1, = \wedge 0, C \vee = \vee 1$, 则 $A \vee C \vee = \Leftrightarrow \vee = 1 \vee C \vee 1$, 但 $A \vee B = 1, = 0$, 二者不等价。

(2) 设 $A \vee B \vee C = \vee 1, = \wedge 0, C \wedge = \vee 0$, 则 $A \vee C \wedge = \Leftrightarrow \wedge = 0 \vee C \vee 0$, 但 $A \vee B = 1, = 0$, 二者不等价。

26. 在上题 (25) 中, 若已知 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$, 在什么条件下, $A \Leftrightarrow B$ 一定成立? 又若已知 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$, 在什么条件下, $A \Leftrightarrow B$ 一定成立? 解: 若 $C = 0$; 则 $A \vee C \vee B \vee C \Leftrightarrow \vee$, $A \vee B \Leftrightarrow$ 一定成立。若 $C = 1$; 则 $A \vee C \vee B \vee C \Leftrightarrow \wedge$, $A \vee B \Leftrightarrow$ 一定成立。

27. 某电路中有一个灯泡和三个开关 A、B、C。已知在且仅在下述四种情况下灯亮:

(1) C 的扳键向上, A、B 的扳键向下。(2) A 的扳键向上, B、C 的扳键向下。(3) B、C 的扳键向上, A 的扳键向下。(4) A、B 的扳键向上, C 的扳键向下。设 F 为 1 表示灯亮, p、q、r 分别表示 A、B、C 的扳键向上。

(a) 求 F 的主析取范式。

(b) 在联结词完备集 $\{\neg, \wedge\}$ 上构造 F。(c) 在联结词完备集 $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 上构造 F。

答: (a) 由题意知, 灯亮的情况如下:

$$F \Leftrightarrow \wedge \neg \wedge \neg \vee \neg \wedge \neg \wedge \vee \neg \wedge \wedge \vee \wedge \wedge \neg (p q r) (p q r) (p q r) (p q r)$$

$$\Leftrightarrow m m m m_1 \vee \vee \vee_3 \quad 4 \quad 6$$

$$(b) F \Leftrightarrow \wedge \neg \wedge \neg \vee \neg \wedge \neg \wedge \vee \neg \wedge \wedge \vee \wedge \wedge \neg (p q r) (p q r) (p q r) (p q r)$$

$$\Leftrightarrow \neg \neg \neg \wedge \wedge \neg \wedge \neg ((p r) (p r))$$

$$(c) F \Leftrightarrow \neg \wedge \neg \wedge p q r$$

28. 一个排队线路, 输入为 A、B、C, 其输出分别为 F_A 、 F_B 、 F_C . 本线路中, 在同一

时间只能有一个信号通过, 若同时有两个或两个以上信号申请输出时, 则按 A、B、C 的顺序

输出, 写出 F_A 、 F_B 、 F_C 在联结词完备集 $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 中的表达式. 答: p: A 输入, q: B 输入,

r: C 输入. 有题意可得:

$$F_A \Leftrightarrow \wedge \neg \wedge \neg \vee \wedge \neg \wedge \vee \wedge \wedge \neg \vee \wedge \wedge (p q r) (p q r) (p q r) (p q r)$$

$$\Leftrightarrow \wedge \neg \vee \wedge \Leftrightarrow (p q) (p q) p$$

$$F_B \Leftrightarrow \neg \wedge \wedge \neg \vee \neg \wedge \wedge \Leftrightarrow \neg \wedge (p q r) (p q r) p q$$

$$F_C \Leftrightarrow \neg \wedge \wedge p q r$$

29. 在某班班委成员的选举中, 已知王小红、李强、丁金生 3 位同学被选进了班委会. 该班的甲、乙、丙三名学生预言: 甲说: 王小红为班长, 李强为生活委员.

乙说: 丁金生为班长, 王小红为生活委员.

丙说: 李强为班长, 王小红为学习委员.

班委会分工名单公布后发现，甲、乙、丙三人都恰好猜对了一半.问王小红、李强、丁金生各任何职（用等值等演求解）？

答：设 p ：王小红为班长， q ：李强为生活委员 r ：丁金生为班长， s ：王小红为生活委员 t ：李强为班长， w ：王小红为学习委员

由题意得， p 、 q 有且只有一个为真， r 、 s 有且只有一个为真， t 、 w 有且只有一个为真.

若 p 为真，则 q 为假，那么 r 为假，则 s 为真，这样 p 与 s 矛盾，因此这种假设行不通.

若 p 为假，则 q 为真，那么 t 为假，则 w 为真，则 s 为假，所以 r 为真，因此王小红、李强、丁金生的职位分别是：学习委员、生活委员、班长.

30.某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习.选派必须满足以下条件：

- (1) 若赵去，钱也去.
- (2) 李、周两人中必有一人去.
- (3) 钱、孙两人中去且仅去一人.
- (4) 孙、李两人同去或同不去.
- (5) 若周去，则赵、钱也同去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？答：设 p ：派赵去， q ：派钱去， r ：派李去， s ：派孙去， t ：派周去首先以条件（2）为基础，有三种情况：

- ①若周去，李不去，由条件（5）得则赵、钱同去，由条件（3）得那么孙不去，符合5个条件，即 $pqrst \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge t$.
- ②若李去，周不去，由条件（4）得则孙去，从而由条件（3）得钱不去，而由条件（1）得赵也不去，即 $\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg t$.
- ③若周、李都去，那么由条件（4）得则孙去，由条件（5）得赵、钱都去，这样孙和钱都去，与条件（3）矛盾，因此这种情况不存在.

习题三

1.从日常生活或数学中的各种推理中，构造两个满足附加律的推理定律，并将它们符号化。例如：“若2是偶数，则2是偶数或3是奇数”。令 p :2是偶数， q :3是奇数，则该附加律符号化为 $p \Rightarrow p \vee q$ 。

解：（1）“若3是素数，则3是素数或5是奇数”。令 p : 3是素数， q : 5是奇数，则该附加律符号化为 $p \Rightarrow p \vee q$

（2）“若明天不下雨，则明天不下雨或明天下雪”。令 p : 明天下雨， q : 明天下雪，则该附加律符号化为 $\neg p \Rightarrow \neg p \vee q$ 。

2.从日常生活或数学的各种推理中，构造两个满足化简律的推理定律，并将它们符号化。例如：“我去过海南岛和新疆，所以我去过海南岛”。令 p : 我去过海南岛， q : 我去过新疆，则该化简律符号化为 $p \wedge q \Rightarrow p$ 。

解：(1) “6 能被 2 和 3 整除，所以 6 能被 2 整除”。令 p : 6 能被 2 整除， p : 6 能被 2 整除， q : 6 能被 3 整除，则该化简律符号化为 $p \wedge q \Rightarrow p$ 。

(2) “小明会弹琴和跳舞，所以小明会弹琴”。令 p : 小明会弹琴， q : 小明会跳舞，则该化简律符号化为 $p \wedge q \Rightarrow p$ 。

3. 随意构造三个满足假言推理定律的推理，并将它们符号化。例如：“如果 2 是素数，则雪是黑色的，2 是素数，所以雪是黑色的”。令 p : 2 是素数， q : 雪是黑色的，该假言推理定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ 。

解：(1) “如果小明会跳舞，则他会弹琴，小明会跳舞，所以他会弹琴”。令 p : 小明会弹琴， q : 小明会跳舞，该假言推理定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ 。

(2) “如果 3 是奇数，则明天下雨，3 是奇数，所以明天下雨”。令 p : 3 是奇数， q : 明天下雨，该假言推理定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ 。

(3) “如果明天晴天，则小明去游泳，明天晴天，所以小明去游泳”。令 p : 明天晴天， q : 小明去游泳，该假言推理定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ 。

4. 参照 1,2,3 题，请构造满足拒取式、析取三段论、假言三段论、等价三段论、构造性二难等推理定律的实例各一个，并将它们符号化。

解：(1) 拒取式：“明天是周末，小明就休息，小明没有休息，所以明天不是周末”。令 p : 明天周末， q : 小明休息。该拒取式定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ 。

(2) 析取三段论：“小明会弹琴或跳舞，小明不会跳舞，所以小明会弹琴”。令 p : 小明会弹琴， q : 小明会跳舞，该析取三段式定律符号化为 $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$ 。

(3) 假言三段论：“明天要是周末，小明明天休息，小明要是明天休息，他就会去游泳，所以，明天要是周末，小明就去游泳”。令 p : 明天是周末， q : 小明明天休息， t : 小明去游泳，该假言三段论定律符号化为 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow t) \Rightarrow p \rightarrow t$ 。

(4) 等价三段论：“2 是素数当且仅当 3 是奇数，3 是奇数当且仅当 4 是偶数，所以 2 是素数当且仅当 4 是偶数”。令 p : 2 是素数， q : 3 是奇数， t : 4 是偶数，该等价三段论定律符号化为 $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow t) \Rightarrow p \leftrightarrow t$ 。

(5) 构造性二难：“明天是周一，小明就要上学，明天是周末，小明就要去游泳，明天是周末或者周一，所以小明去上学或者去游泳”。令 p : 明天是周一， q : 小明要上学， s : 明天是周末， t : 小明要去游泳，该构造性二难定律符号化为

$$(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow t) \wedge (p \vee s) \Rightarrow (q \vee t)。$$

(6) 破坏性二难：“明天是周一，小明就要上学，明天是周末，小明就要去游泳，小明没有去上学或者小明没有去游泳，所以明天不是周一或者明天不是周末”。令 p : 明天是周一， q 小明要上学， s : 明天是周末， t : 小明要去游泳，该构造性二难定律符号化为

$$(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow t) \wedge (\neg q \vee \neg t) \Rightarrow (\neg p \vee \neg s)。$$

5.分别写出德摩定律、吸收律所产生的推理定律（每个等值式产生两条推理定律）。解：的摩

定律 1: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

产生的推理定律：(1) $\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$ (2) $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$ 的摩定

律 2: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ 产生的推理定律：(1) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ (2)

$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$ 吸收律 1: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ 产生的推理定律：(1)

$A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A$ (2) $A \Rightarrow A \vee (A \wedge B)$ 吸收律 2: $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

产生的推理定律：(1) $A \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$ (2) $A \Rightarrow A \wedge (A \vee B)$

6.判断下列推理是否正确。先将简单命题符号化，再写出前提、结论、推理的形式结构（以蕴涵式的形式给出）和判断过程（至少给出两种判断方法）：

- (1) 若今天是星期一，则明天是星期三。今天是星期一，所以明天是星期三。
- (2) 若今天是星期一，则明天是星期二。明天是星期二，所以今天是星期一。
- (3) 若今天是星期一，则明天是星期三。明天不是星期三，所以今天不是星期一。
- (4) 若今天是星期一，则明天是星期二。今天不是星期一，所以明天不是星期二。
- (5) 若今天是星期一，则明天是星期二或星期三。
- (6) 今天是星期一当且仅当明天是星期三。今天不是星期一，所以明天不是星期三。

解：(1) 设 p : 今天是星期一， q : 明天是星期三，推理的形式结构为 $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$,

判断该推理是否正确，即判断 $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ 是否为重言式，不难看出，该式满足假言推理

定律，所以推理正确。

(2) 设 p: 今天是星期一, q: 明天是星期二, 推理的形式结构为 $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$ 。

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p \Leftrightarrow$$

$$(\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

等值演算法:

, 可见该式不是重言式, 所以推理不正确。

$$\Leftrightarrow q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow p \vee \neg q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

主析取范式法: $\Leftrightarrow q \rightarrow p$

, 从而可知不是重言式, 故推理不正确。

$$\Leftrightarrow p \vee \neg q$$

$$\Leftrightarrow M_1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

(3) 设 p: 今天是星期一, q: 明天是星期三, 推理的形式结构为

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p, \text{ 判断该推理是否正确, 即判断 } (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p \text{ 是否为重言式,}$$

不难看出, 该式满足拒取式定律, 所以推理正确。

(4) 设 p: 今天是星期一, q: 明天是星期二, 推理的形式结构为

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q.$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q \text{ 等值演算法: } \Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow \neg q,$$

可见该式不是重言式, 所以推理不

$$\Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow p \vee \neg q$$

正确。

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q \Leftrightarrow$$

$$((\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow \neg q$$

主析取范式法:

, 从而可知不是重言式, 故推理不正确。

$$\Leftrightarrow \neg p \rightarrow \neg q$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow p \vee \neg q \\ &\Leftrightarrow M_1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3 \end{aligned}$$

(5) 设 p: 今天是星期一, q: 明天是星期二, r: 明天是星期三。推理的形式结构为

$$p \rightarrow q \vee r, p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$$

$\Leftrightarrow M_4 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$, 由此可知 $p \rightarrow (q \vee r)$ 不为重言式, 故推理不正确。显然该式不是重言式, 所以推理不正确。

(6) 设 p: 今天是星期一, r: 明天是星期三, 推理的形式结构为 $(p \leftrightarrow r) \wedge \neg p \rightarrow \neg r$ 。

$$\begin{aligned} &(p \leftrightarrow r) \wedge \neg p \rightarrow \neg r \\ &\Leftrightarrow \neg((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \wedge \neg p) \vee \neg r \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee r) \vee \neg(\neg r \vee p) \vee p \vee \neg r \end{aligned}$$

, 由此可知不为重言式, 故推理不正确。

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee p \vee \neg r \\ &\Leftrightarrow p \vee (\neg p \wedge r) \vee \neg r \Leftrightarrow p \\ &\Leftrightarrow m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \end{aligned}$$

7. 在下面各推理中没给出结论。请对于每个推理前提给出两个结论, 使其中之一是有效的, 而另一个不是有效的:

(1) 前提: $p \rightarrow q, q \rightarrow r$

(2) 前提: $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r, q$

(3) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q$

解: (1) 结论 1: $p \rightarrow r$ 为有效的 (假言三段论) 结论 2: p 为无效的。

(2) 结论 1: $\neg(p \wedge q)$ 是有效的 (拒取式) 结论 2: p 是无效的

(3) 结论 1: $(q \rightarrow r)$ 是有效的 (假言三段论) 结论 2: r 是无效的

8. 在下面各推理中没给出结论, 请对于每个推理前提给出两个结论, 使其中之一是有效的, 而另一个不是有效的。

(1) 只有天气热, 我才去游泳。我正在游泳, 所以.....

(2) 只有天气热, 我就去游泳。我没去游泳, 所以.....

(3) 除非天气热并且我有时间，我才去游泳。天气不热或我没时间，所以..... 解：

(1) 设 p: 天气热, q: 我去游泳前提: $q \rightarrow p, q$

结论 1: p , 有效结论 (假言推理) 结论 2: $\neg p$, 无效结论

(2) 设 p: 天气热, q: 我去游泳。

前提: $p \rightarrow q, \neg q$

结论 1: $\neg p$, 有效结论 (拒取式) 结论 2: p , 无效结论

(3) 设 p: 天气热, q: 我有时间, r: 我去游泳。

前提: $r \rightarrow (p \wedge q), \neg p \vee \neg q$

结论 1: $\neg r$, 有效结论 (拒取式) 结论 2: r , 无效结论。

9. 用三种方法 (真值表法, 等值演算法, 主析取范式法) 证明下面推理是正确的: 若 a 是奇数, 则 a 不能被 2 整除。若 a 是偶数, 则 a 能被 2 整除。因此, 如果 a 是偶数, 则 a 不是奇数。

解: 设 p: a 是奇数, q: a 能被 2 整除, r: a 是偶数。

推理的形式结构为 $(p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$ (*). 下面用三种方法证明该式为重言式:

(1) 真值表法:

p q r	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q)$	$(r \rightarrow \neg p)$	*
0 0 0	0	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	1	1
1 0 0	0	1	1
1 0 1	1	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	1

由真值表可知 (*) 为重言式, 故推理是正确的。

(2) 等值演算法:

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg p) \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee q) \rightarrow (\neg r \vee \neg p) \\
 \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg r \\
 \Leftrightarrow & ((p \wedge q) \vee \neg p) \vee ((\neg q \wedge r) \vee \neg r) \text{ (交换律, 结合律)} \\
 \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r) \\
 \Leftrightarrow & \neg p \vee (q \vee \neg q) \vee \neg r
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1$$

(3) 构造证明法:

前提: $(p \rightarrow \neg q), (r \rightarrow q)$

结论: $(r \rightarrow \neg p)$

证明:

① $p \rightarrow \neg q$

前提引入

② $q \rightarrow \neg p$

①置换

③ $r \rightarrow q$

前提引入

④ $r \rightarrow \neg p$

③② 假言三段论

主析取范式法

由方法 2 可以得知推理的形式结构 (*) 的主析取范式为

$(*) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$, 则 (*) 为重言式, 推理正确。

10. 用两种方法 (真值表法, 主析取范式法) 证明下面推理不正确:

如果 a,b 两数之积是负数, 则 a,b 之中恰有一个是负数。a,b 两数之积不是负数, 所以 a,b 中无负数。真值表法:

p q r	$(q r \wedge \neg \vee \neg \wedge)(q r)$	$p \rightarrow \wedge \neg \vee \neg \wedge (q r)(q r)$	$\neg \wedge \neg q r$	A
0 0 0	0	1	1	1
0 0 1	1	1	0	0
0 1 0	1	1	0	0
0 1 1	0	1	0	0
1 0 0	0	0	1	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	1	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

推理不正确

主析取范式法:

$$(p \rightarrow \wedge \neg \vee \neg \wedge \neg \rightarrow \neg \wedge \neg ((q r)(q r)) (q r)) p \quad (q r)$$

$$\Leftrightarrow \neg \vee \wedge \neg \vee \neg \wedge \wedge \rightarrow \neg \wedge \neg (p q r)(q r) \quad p (q r))$$

$$\Leftrightarrow \neg \rightarrow \neg \wedge \neg p (q r)$$

$$\Leftrightarrow \vee \neg \wedge \neg p (q r)$$

$$\Leftrightarrow \vee \vee \vee \vee m m m m m_0 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

由于主析取范式只含有 5 个极小项, 所以 (3.8) 不是重言式, 推理不正确。

11. 填充下面推理证明中没有写出的推理规则。

前提: $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \rightarrow s, p$

结论：s 证明：

- ①p 前提引入
- ② $\neg p \vee q$ 前提引入
- ③q 析取三段论
- ④ $\neg q \vee r$ 前提引入
- ⑤r 析取三段论
- ⑥ $r \rightarrow s$ 前提引入
- ⑦s 假言推理

12. 填充下面推理证明中没有写出的推理规则。

前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ 结论：

$(p \wedge q) \rightarrow s$

证明：

- ① $p \wedge q$ 附加前提引入
- ②p 化简规则
- ③q 化简规则
- ④ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 前提引入
- ⑤ $q \rightarrow r$ 前提引入
- ⑥r ③⑤假言推理
- ⑦ $q \rightarrow (r \rightarrow s)$ 前提引入
- ⑧ $r \rightarrow s$ ③⑦假言推理
- ⑨s ⑥⑧假言推理

13. 前提： $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$, $p \vee q$, $r \rightarrow s$

结论 1: r 结论 2:

s 结论 3: $r \vee s$

- (1) 证明从此前提出发，推出结论 1，结论 2，结论 3 的推理都是正确的。
- (2) 证明从此前提出发，推任何结论的推理都是正确的。

(1) 证明：结论 1:

$$\begin{aligned}
 & ((\neg \rightarrow \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg p q q) \quad) \quad (p q r s) (\quad) r \\
 \Leftrightarrow & \wedge \neg \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \rightarrow (p q q) (p q r s) (\quad) r \\
 \Leftrightarrow & \wedge \vee \wedge \rightarrow \rightarrow 0 (p q r s) (\quad) r \\
 \Leftrightarrow & \rightarrow 0 r \Leftrightarrow 1
 \end{aligned}$$

结论 2:

$$((\neg \rightarrow \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg p q q) \quad) \quad (p q r s) (\quad) s$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg(p \vee q) (p \vee r \vee s) () s$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg 0 (p \vee r \vee s) () s$$

$$\Leftrightarrow \neg 0 s \Leftrightarrow 1$$

结论 3:

$$((\neg \rightarrow \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg \vee p \vee q) (p \vee r \vee s) () r \vee s$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg \vee (p \vee q) (p \vee r \vee s) () r \vee s$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg \vee 0 (p \vee r \vee s) () r \vee s$$

$$\Leftrightarrow \neg \vee 0 r \vee s$$

$$\Leftrightarrow 1$$

(2) 证明: 设任何可能的结论为*,

则:

$$((\neg \rightarrow \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg p \vee q) (p \vee r \vee s) () *)$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg (p \vee q) (p \vee r \vee s) () *$$

$$\Leftrightarrow \neg \wedge \vee \wedge \rightarrow \neg 0 (p \vee r \vee s) () *$$

$$\Leftrightarrow \neg 0 *$$

$$\Leftrightarrow 1$$

14.在自然系统 p 中构造下面推理的证明:

(1) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, p , q 结论: $r \vee s$

(2) 前提: $p \rightarrow q$, $\neg(q \wedge r)$, r 结论: $\neg p$

(3) 前提: $p \rightarrow q$ 结论: $p \rightarrow (p \wedge q)$

(4) 前提: $p \rightarrow q$, $q \rightarrow s$, $s \rightarrow t$, $t \wedge r$ 结论:

$$p \wedge q$$

(5) 前提: $p \rightarrow r$, $q \rightarrow s$, $s \rightarrow t$, $t \wedge r$ 结论: $r \wedge s$

(6) 前提: $\neg p \vee r$, $\neg q \vee s$, $p \wedge q$ 结论: $t \rightarrow$

$$(r \vee s)$$

(1) 证明

- | | |
|------------------------------------|-------------|
| (1) $p \rightarrow \neg(q \vee r)$ | 前提引入 |
| (2) p | 前提引入 |
| (3) $q \vee r$ | (1)(2) 假言推理 |
| (4) q | 前提引入 |
| (5) r | (3)(4) 假言推理 |
| (6) $r \vee s$ | (5) 附加 |

(2) 证明

- | | |
|--------------------------|---------------|
| (1) $\neg \wedge(q r)$ | 前提引入 |
| (2) $\neg \vee \neg q r$ | (1) 置换 |
| (3) r | 前提引入 |
| (4) $\neg q$ | (2) (3) 析取三段论 |
| (5) $p q \rightarrow$ | 前提引入 |
| (6) $\neg p$ | (4) (5) 拒取式 |

(3) 证明

- | | |
|--|------------|
| (1) $p q \rightarrow$ | 前提引入 |
| (2) $\neg \vee p q$ | (1) 置换 |
| (3) $(\neg \vee \wedge \neg \vee p q)$ | (1) (2) 置换 |
| (4) $\neg \vee \wedge p q p()$ | (3) 置换 |
| (5) $p \rightarrow \wedge(p q)$ | (4) 置换 |

(4) 证明

- | | |
|--|----------------|
| (1) $(s t t s \rightarrow \wedge \rightarrow)$ | () 前提引入 |
| (2) $t s \rightarrow$ | (1) 置换 |
| (3) $t r \rightarrow$ | (2) 换件 |
| (4) $t r \wedge$ | 前提引入 |
| (5) t | (4) 化简 |
| (6) s | (3) (5) 假言推理 |
| (7) $q s \leftrightarrow$ | 前提引入 |
| (8) $(q s s q \rightarrow \wedge \rightarrow)$ | () (7) 置换 |
| (9) $s q \rightarrow$ | (8) 化简 |
| (10) q | (6) (9) 假言推理 |
| (11) $q p \rightarrow$ | 前提引入 |
| (12) p | (10) (11) 假言推理 |
| (13) $p q \wedge$ | (10) (12) 合取 |

(5) 证明

- | | |
|-----------------------|--------------|
| (1) $p q \wedge$ | 前提引入 |
| (2) p | (1) 化简 |
| (3) q | (1) 化简 |
| (4) $p r \rightarrow$ | 前提引入 |
| (5) r | (2) (4) 假言推理 |
| (6) $q s \rightarrow$ | 前提引入 |
| (7) s | (3) (6) 假言推理 |
| (8) $r s \wedge$ | (5) (7) 合取 |

(6) 证明

- | | |
|------------------|--------|
| (1) $p q \wedge$ | 前提引入 |
| (2) p | (1) 化简 |
| (3) q | (1) 化简 |

- | | |
|----------------------------------|---------------|
| (4) $\neg \vee p r$ | 前提引入 |
| (5) r | (2) (4) 析取三段论 |
| (6) $\neg \vee q s$ | 前提引入 |
| (7) s | (3) (6) 析取三段论 |
| (8) $r s \wedge$ | (5) (7) 合取 |
| (9) $\neg \vee \wedge t r s()$ | (8) 附加 |
| (10) $t \rightarrow \wedge(r s)$ | (9) 置换 |

15. 在自然推理系统 p 中用附加前提法证明下面各推理:

(1) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $s \rightarrow p$, q 结论: $s \rightarrow r$

(2) 前提: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$, $(s \vee t) \rightarrow u$ 结论:

$p \rightarrow u$

(1) 证明

- | | |
|-------------------------------|--------------|
| (1) s | 附加前提引入 |
| (2) $s p \rightarrow$ | 前提引入 |
| (3) p | (1) (2) 假言推理 |
| (4) $p \rightarrow \neg(q r)$ | 前提引入 |
| (5) $q r \rightarrow$ | (3) (4) 假言推理 |
| (6) q | 前提引入 |
| (7) r | (5) (6) 假言推理 |

(2) 证明

- | | |
|----------------|--------|
| (1) p | 附加前提引入 |
| (2) $p q \vee$ | (1) 附加 |

(3) $(p q \vee \rightarrow \wedge) (r s)$ 前提引入

- | | |
|--------------------------------|--------------|
| (4) $r s \wedge$ | (2) (3) 假言推理 |
| (5) s | (4) 化简 |
| (6) $s t \vee$ | (5) 附加 |
| (7) $(s t \vee \rightarrow) u$ | 前提引入 |
| (8) u | (6) (7) 假言推理 |

16. 在自然推理系统 p 中用归谬法证明下面推理:

(1) 前提: $p \rightarrow \neg q$, $\neg r \vee q r \wedge \neg s$ 结论: $\neg p$

(2) 前提: $p \vee q$, $p \rightarrow r$, $q \rightarrow s$

结论: $r \vee s$

(1) 证明

- | | |
|----------------------------|--------------|
| (1) p | 结论否定引入 |
| (2) $p \rightarrow \neg q$ | 前提引入 |
| (3) $\neg q$ | (2) (1) 假言推理 |
| (4) $\neg \vee r q$ | 前提引入 |

(5) $\neg r$	(3) (4) 析取三段论
(6) $r \wedge \neg s$	前提引入
(7) r	(6) 化简
(8) $\neg \wedge r r$	(5) (7) 合取
(2) 证明	
(1) $\neg \vee (r s)$	结论否定引入
(2) $\neg \wedge \neg r s$	(1) 置换
(3) $\neg r$	(2) 化简
(4) $\neg s$	(2) 化简
(5) $p r \rightarrow$	前提引入
(6) $\neg p$	(3) (5) 拒取式
(7) $q s \rightarrow$	前提引入
(8) $\neg q$	(4) (7) 拒取式
(9) $\neg \wedge \neg p q$	(9) 置换
(10) $q p \vee$	前提引入
(11) $\neg \vee \wedge \vee (p q) (p q)$	(10) (11) 合取

17. 在自然系统 p 中构造下面推理的证明：只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点前没离开，A 就犯了谋杀罪。A 曾到过受害者房间，如果 A 在 11 点以前离开，看门人会看见他。看门人没有看见他，所以 A 犯了谋杀罪。

设 p : A 到过受害者房

间 q : A 在 11 点前离开

r : A 是谋杀嫌疑犯

s : 看门人看见 A

前提: $(p q \wedge \neg \rightarrow) r p q s s, , \rightarrow \neg$, 结论:

r

证明

(1) $q s \rightarrow$	前提引入
(2) $\neg s$	前提引入
(3) $\neg q$	(2) (1) 拒取式
(4) p	前提引入
(5) $p q \wedge \neg$	(3) (4) 合取
(6) $(p q \wedge \neg \rightarrow) r$	前提引入
(7) r	(5) (6) 假言推理

18. 在自然系统 p 中构造下面各推理的证明：

(1) 如果今天是星期六，我们就要去颐和园或圆明园玩。如果颐和园游人太多，我们就不去颐和园玩。今天是星期六，颐和园游人太多，所以我们去圆明园玩。

(2) 如果小王是理科学生，则他的数学成绩一定很好。如果小王不是文科生，则他一定是理科生。小王的数学成绩不好，所以小王是文科学生。

(1) 设

p:今天是星期六 q:我们到颐和园玩

r:我们到圆明园玩 s:颐和园游人太多

前提: $p \rightarrow \vee(q \wedge r \wedge s), \neg \neg q \wedge p s, ,$

结论: r 证

明:

- | | | |
|-----|----------------------------------|--------------|
| (1) | $s \rightarrow \neg q$ | 前提引入 |
| (2) | s | 前提引入 |
| (3) | $\neg q$ | (1)(2) 假言推理 |
| (4) | p | 前提引入 |
| (5) | $p \rightarrow \vee(q \wedge r)$ | 前提引入 |
| (6) | $q \wedge r \vee$ | (4)(5) 假言推理 |
| (7) | r | (3)(6) 析取三段论 |

(2) 设

p:小王是理科学生 q:小王数学成绩好

r:小王是文科学生

前提: $p \wedge q \wedge r \wedge p \wedge q \rightarrow \neg \neg \neg , ,$

结论: r

证明:

- | | | |
|-----|------------------------------------|------------|
| (1) | $p \wedge q \rightarrow$ | 前提引入 |
| (2) | $\neg q$ | 前提引入 |
| (3) | $\neg p$ | (1)(2) 拒取式 |
| (4) | $\neg \neg \rightarrow r \wedge p$ | 前提引入 |
| (5) | r | (3)(4) 拒取式 |

习题四

1. 将下列命题 0 元谓词符号化:

- (1) 小王学习过英语和法语。
- (2) 除非李建是东北人, 否则他一定怕冷。
- (3) 2 大于 3 仅当 2 大于 4.
- (4) 3 不是偶数。
- (5) 2 或 3 是素数。

解 (1) 设一元谓词 $Fx()$: 小王学习过 x 。 a : 英语, b : 法语。(1) 中命题符号化为 0 元谓

词的蕴含式: $Fa \wedge Fb() \wedge ()$ 。

(2) 设一元谓词 $Fx()$: x 是东北人。 $Gx()$: x 怕冷。 a : 李建。符号化为

$\neg Fa() \rightarrow Ga()$ 。

(3) 设二元谓词 $Gxy(,): x$ 大于 y ; $a b c:2, :3, :4$.符号化为:

$Gab Gac(,) \rightarrow (,)$.

(4) 设一元谓词 $Fx(): x$ 不是偶数。 $a: 3$ 。命题符号化为 0 元谓词的蕴含式:

$Fa()$ 。

(5) 设一元谓词 $Fx(): x$ 是素数。 $a: 2, b: 3$.符号化为

$Fa Fb() \vee ()$ 。

2.在一阶逻辑中将下面命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a),(b)条件时命题的真值:

(1) 凡有理数都能被 2 整除。

(2) 有的有理数都能被 2 整除。其中(a)个体域为有理数集合。

(b)个体域为实数集合。

解: $Fx x():$ 能被 2 整除; $Gx x():$ 是整数。

(a)(1) $\forall x Fx()$,真值为 0, (2) $\exists x Fx()$ 真值为 1.

(b) (1) $\forall x Gx Fx(()) \rightarrow (())$ 真值为 0, (2) $\exists x Gx Fx(()) \wedge (())$, 真值为 1.

3.在一阶逻辑中将下列命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a)(b)条件时的命题的真值:

(1)对任意的 x , 均有 $x^2 - = +2(x\sqrt{2})(x+ 2\sqrt{2})$ 。

(2)存在 x , 使得 $x+ =5 \ 9$ 。

(a)个体域为自然数集合。

(b)个体域为实数集合。

解: 设 $Fx x():^2 - = +2(x\sqrt{2})(x+ 2\sqrt{2})$, $Gx x(): + =5 \ 9$

(a)(1) $\forall x Fx()$,真值为 0, (2) $\exists x Gx()$ 真值为 1.

(b)(1) $\forall x Fx()$,真值为 1, (2) $\exists x Gx()$ 真值为 1.

4.在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 没有不能表示成分数的有理数。

(2) 在北京卖菜的人不全是外地人。

(3) 乌鸦都是黑色的。(4) 有的人天天锻炼身体。解:

(1) $\neg \exists x Fx() \wedge \neg Gx()$ 或者 $\forall x Fx Gx() \rightarrow ()$, 其中 $Fx x()$: 是有理数, $Gx x()$: 能表示成分数

(2) $\neg \forall x Fx Gx() \rightarrow ()$ 或 $\exists x Fx() \wedge \neg Gx()$, 其中 $Fx x()$: 在北京卖菜, $Gx x()$: 是外地人

(3) $\forall x Fx Gx() \rightarrow ()$, 其中 $Fx x()$: 是乌鸦, $Gx x()$: 是黑色的;

(4) $\exists x Fx Gx() \wedge ()$, 其中 $Fx x()$: 是人, $Gx x()$: 天天锻炼身体。

5. 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 所有的火车都比轮船跑得快。

(2) 有的火车比有的汽车快。

(3) 不存在比所有火车都快汽车。

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的。

解:

(1) $\forall x \forall y Fx Gy Hxy() \wedge () \rightarrow (,)$, 其中 $Fx x()$: 是火车, $Gy y()$: 是轮船, $Hxy x(,)$: 比 y 快;

(2) $\exists x \exists y Fx Gy Hxy() \wedge () \wedge (,)$, 其中 $Fx x()$: 是火车, $Gy y()$: 是汽车, $Hxy x(,)$: 比 y 快;

(3) $\neg \exists x Gx() \wedge \forall y Fy() \rightarrow Hxy(,)$, 其中 $Fx x()$: 是火车, $Gy y()$: 是汽车, $Hxy x(,)$: 比 y 快;

(4) $\neg \forall x Gx() \rightarrow \forall y Fy() \rightarrow Hxy(,)$, 其中 $Fx x()$: 是火车, $Gy y()$: 是汽车,

$Hxy x(,)$: 比 y 慢;

6. 在下列命题符号化, 个体域为实数集合 \mathbf{R} , 并指出各命题的真值: (1) 对所有的 x , 都存在 y , 使得 $xy^* = 0$ 。

(2) 存在着 x , 对所有 y 都有 $xy^* = 0$ 。

(3) 对所有的 x , 都存在 y , 使得 $yx = +1$ 。

(4) 对所有的 x 和 y , 都有 $yxxy^* = *$ 。

(5) 对任意的 x 和 y , 都有 $yxxy^* = +$ 。

(6) 对任意的 x , 存在 y , 使得 $xy^2 + <^2 = 0$ 。

解: 各命题符号化如下:

$$(1) \forall \exists xyx y(* = 0) ,$$

$$(2) \exists \forall x yx y(* = 0) ,$$

$$(3) \forall \exists = +xyy x(1),$$

$$(4) \forall \forall x yy x x y(* = *) ,$$

$$(5) \forall \forall x yy x x y(* = +) , (6) \forall \exists xyx y(^2 + <^2 \quad 0)。$$

7.将下列各公式翻译成自然语言，个体域为整数集 \mathbf{Z} , 并判断各命题的真假：

$$(1) \forall \forall \exists - =x yzxy$$

$$z() (2) \forall \exists xyx y(*$$

$$=1) (3) \exists \forall \forall + =x$$

$$y zxy z()$$

解：

(1) 对所有整数 x 和 y ，存在整数 z ，使得 $x y z - =$ ，为真命题。(2) 对任意整数 x ，存在整数 y ，使得 $x y^* = 1$ ，为假命题。

(3), 存在整数 x ，使得对任意整数 y 与 z ，均有 $x y z + =$ ，为假命题。

8.指出下列公式中的指导变元，量词的辖域，各个体变项的自由出现和约束出现：

$$(1) \forall x Fx Gxy(() \rightarrow (,))$$

$$(2) \forall x Fxy(,) \rightarrow \exists y Gxy(,)$$

$$(3) \forall \exists xy Fxy Gyz((,) \wedge (,)) \vee \exists x Hxyz(, ,)$$

解：

(1) 指导变元为 x ，全称量词 \forall 的辖域为 $Fx Gxy() \rightarrow (,)$ 。其中 x 是约束出现的， y 是自由出现的。

(2) 蕴含式前件 $\forall x Fxy(,)$ 中，指导变元为 x ，全称量词 \forall 的辖域为 $Fxy(,)$ ，其中 x 是约束出现的， y 是自由出现的。

(3) 在 $\forall x \exists y Fxy \wedge Gyz(,)$, 指导变元为 x 和 y , 辖域为 $(Fxy \wedge Gyz(,))$, 其中 x

和 y 约束出现的, 而 z 是自由出现的。在 $\exists z Hxyz(, ,)$ 中, 指导变元为 z , 辖域为 $Hxyz(, ,)$, 其中 z 约束出现的, 而 xy 是自由出现的。

9. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D_I 为实数集合 \mathbf{R} .

(b) D_I 中特定元素 $a = 0$

(c) 特定函数 $f_{xy} x y D(,) = - , , \in I$

(d) 特定谓词 $\overline{F}xy x y \overline{G}xy x y D(,) : = , (,) : < , , \in I$.

说明下列公式在 I 下的含义, 并指出各公式的真值:

(1) $\forall x \forall y Gxy(,) \rightarrow \neg Fxy(,)$

(2) $\forall x \forall y Ffxy a Gxy((,),) \rightarrow (,)$

(3) $\forall x \forall y Gxy((,) \rightarrow \neg Ffxy a((,),))$

(4) $\forall x \forall y Gfxy a Fxy((,),) \rightarrow (,)$

解:

(1) $\forall x \forall y xy((<) \rightarrow \neg(xy))$, 即对任意的实数 x 和 y , 若 $xy < 0$, 则 $xy \neq 0$ 。

(2) $\forall x \forall y xy((- = 0) \rightarrow (xy <))$, 即对任意的实数 x 和 y , 若 $xy - a = 0$, 则 $xy < 0$ 。(3) $\forall x \forall y xy((<) \rightarrow \neg(xy 0))$, 即对任意的实数 x 和 y , 若 $xy < 0$, 则 $xy - a \neq 0$ 。

(4) $\forall x \forall y xy((- < 0) \rightarrow (xy =))$, 即对任意的实数 x 和 y , 若 $xy - a < 0$, 则 $xy = 0$ 。

其中 (1) (3) 真值为 1, (2) (4) 真值为 0。 10. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D = \mathbf{N}$ (\mathbf{N} 为自然数集合)

(b) D 中特定元素 $a = 2$.

(c) D 上函数 $f_{xy} x y gxy x y(,) = + , (,) = *$.

(d) D 上谓词 $\overline{F}xy x y(,) : =$.

说明下列各式在 I 的含义，并讨论其真值：

$$(1). \forall x Fgxa x((,),)$$

$$(2) \forall \forall x y Ff xa y(((,),) \rightarrow Ff ya x((,),)) .$$

$$(3) \forall \forall \exists x yz Ff xy z((,),).$$

$$(4) \exists x Ff xx gxx((,), (,)).$$

解：各式在 I 下的解释为：

$$(1) \forall =xx x(=2), \text{ 即对任意的自然数 } x, \text{ 有 } x x=2 ;$$

$$(2) \forall \forall x y x((+ =2 y) \rightarrow (y+ =2 x)), \text{ 即对任意的自然数 } x \text{ 和 } y, \text{ 如果有 } x+ =2 y, \text{ 则} \\ \text{有 } y+ =2 x。$$

$$(3) \forall \forall \exists + =x yzx y z(=), \text{ 即对任意的自然数 } x \text{ 和 } y, \text{ 存在 } z, \text{ 使 } x y z+ = ;$$

$$(4) \exists x x x(2 =^2), \text{ 即存在的自然数 } x, \text{ 使 } 2x x=^2。$$

其中 (1) (2) 真值为 0, (3) (4) 真值为 1。

11. 判断下列各式的类型：

$$(1). Fxy(,) \rightarrow ((Gxy Fxy,) \rightarrow (,))$$

$$(2) \forall x Fx(() \rightarrow Fx()) \rightarrow \exists y Gy(() \wedge \neg Gy()).$$

$$(3) \forall \exists xy Fxy(,) \rightarrow \exists \forall x y Fxy(,).$$

$$(4) \exists \forall x y Fxy(,) \rightarrow \forall$$

$$\exists xy Fxy(,).$$

$$(5) \forall \forall x y Fxy((,) \rightarrow Fyz(,)).$$

$$(6) \neg \forall (xFx() \rightarrow \exists y Gy()) \wedge \exists y Gy().$$

解：其中 (1) (4) 为永真式，(2) (6) 为矛盾式，(3) (5) 为可满足式，但不是永真式。

12. 设 I 为一个任意的解释，在解释 I 下，下面哪些公式一定是命题？

$$(1). \forall x Fxy(,) \rightarrow \exists y Gxy(,).$$

(2) $\forall x Fx Gx(() \rightarrow ()) \wedge \exists y Fy Hy(() \wedge ())$..

(3) $\forall \forall x y Fxy((,) \rightarrow \exists y Gxy(,))$.

(4) $\forall x Fx Gx Hy(() \wedge () \wedge ())$

(2)(3)一定是命题，因为他们是闭式。

13.给出下列各公式一个成真的解释，一个成假的解释。

(1). $\forall x Fx Gx(() \vee ())$

(2) $\exists x Fx Gx Hx(() \wedge () \wedge ())$ (3)

$\exists x Fx(() \wedge \forall y Gy Hxy(() \wedge (,)))$

解：(1).令 x 是全体正整数。

成真的情况是： $Fx()$: x 是偶数， $Gx x()$: 是奇数。成假的情况是： $Fx()$:

x 是偶数， $Gx x()$: 是素数。

(2).令 x 是全体正整数，。成真的情况是： $Fx()$: x 能被 2 整除， $Gx x()$: 能被 3 整除， $Hx x()$: 能被 5 整除。则存在 30 能被，2，3，5 整除。成假的情况是： $Fx()$: x 是偶数， $Gx x()$: 是素数， $Hx x()$: 能被 5 整除。不存在一个数

既是偶数又是素数同时还能被 5 整除。

(1).令 x 是全体正整数， y 是全体偶数。成真的情况是： $Fx()$: x 是奇数， $Gy y()$: 能被 2 整除， $Hxy x y(,)$: 比 大。则对任意偶数 y ，都存在一个大于 y 的奇数。成假的情况是：

$Fx()$: x 是偶数， $Gy y()$: 能被 2 整除， $Hxy x y(,)$: 比 小。则对偶数 2，

不存在一个小于 2 的偶数。 14.证明下面的公式既不是永真式也不是矛盾式：

(1). $\forall x Fx(() \rightarrow \exists y Gy Hxy(() \wedge (,)))$

(2) $\forall \forall x y Fx Gy(() \wedge () \rightarrow Hxy(,))$

解：(1).成真的情况是： $Fx()$: x 是正偶数， $Gy y()$: 是非 1 的正整数， $Hxy x(,)$: 能被 y 整除且 $x y \neq$ 。则对任意一个正偶数 x ，都存在 2，整除 x 。

矛盾的情况： $Fx()$: x 是偶数, $Gy y()$: 是非 1 的正整数, $Hxy x(,)$: 能被 y 整除且 $x \neq y$ 。则对任意一个正数 x (比如 3), 不一定存在不等于 x 的整数, 整除 x 。

(2).成真的情况： $Fx()$: x 能被 2 整除, $Gy y()$: 能被 3 整除, $Hxy xy(,)$: * 能被 6 整除. 成

假的情况是： $Fx()$: x 能被 2 整除, $Gy y()$: 能被 4 整除, $Hxy xy(,)$: * 能被 6 整除.

15. (1) 给出一个非闭式的永真式。

(2) 给出一个非闭式的永假式。(3) 给出一个非闭式的可满足式, 但不是永真式。解:

(1) $(Fx Gx Fx Gx() \rightarrow ()) \wedge () \rightarrow ()$, 它是重言式 $(A B A B \rightarrow \wedge \rightarrow)$ 的代换实例。

(2) $\neg(Fx() \rightarrow Fx())$, 它是矛盾式 $\neg \rightarrow(A A)$ 的代换实例。

(3) $\forall x Fxy((,) \rightarrow Fyx(,))$

习题五

1. 设个体域 $D=\{a, b, c\}$, 在 D 中消去公式 $\forall x Fx() \wedge \exists y Gy()$ 的量词。甲、乙用了不同的演算过程: 甲的演算过程如下:

$$\begin{aligned} & \forall x Fx() \wedge \exists y Gy() \\ & \Leftrightarrow \forall x Fx Ga Gb Gc(() \wedge (() \vee () \vee ())) \\ & \Leftrightarrow (Fa Ga Gb Gc() \wedge (() \vee () \vee ())) \wedge (Fb Ga Gb Gc() \wedge (() \vee () \vee ())) \wedge (Fc Ga Gb Gc() \wedge (() \vee () \vee ())) \\ & \Leftrightarrow (Fa Fb Fc() \wedge () \wedge ()) \wedge (Ga Gb Gc() \vee () \vee ()) \end{aligned}$$

乙的演算过程如下:

$$\begin{aligned} & \forall x Fx() \wedge \exists y Gy() \\ & \Leftrightarrow \forall x Fx() \wedge \exists y Gy() \\ & \Leftrightarrow (Fa Fb Fc() \wedge () \wedge ()) \wedge (Ga Gb Gc() \vee () \vee ()) \end{aligned}$$

显然, 乙的演算过程简单, 试指出乙在推演过程中的关键步骤。

答: 乙在演算中的关键步骤是, 开始利用量词辖域收缩与扩张等值式, 将量词的辖域缩小, 从而简化了演算。

2. 设个体域 $D=\{a, b, c\}$, 消去下列各式的量词:

$$(1) \forall \exists xy Fx Gy(() \wedge ())$$

$$(2) \forall x \forall y Fx Gy(() \vee ()) \quad (3)$$

$$\forall x Fx() \rightarrow \forall y Gy()$$

$$(4) \forall x Fxy((,) \rightarrow \exists y Gy()) \quad \text{答: } 1) (() Fa Fb$$

$$Fc \wedge () \wedge () \wedge (() Ga Gb Gc \vee () \vee ())$$

$$2) (Fa Fb Fc() \wedge () \wedge ()) \wedge (Ga Gb Gc() \wedge () \wedge ())$$

$$3) (() Fa Fb Fc \wedge () \wedge ()) \rightarrow (() Ga Gb Gc \wedge () \wedge ())$$

$$4) (Fay Fby Fcy(,) \vee (,) \vee (,)) \rightarrow (Ga Gb Gc() \vee () \vee ())$$

3. 设个体域 $D=\{1,2\}$, 请给出两种不同的解释 I_1 和 I_2 , 使得下面公式在 I_1 下都是真命题, 而在 I_2 下都是假命题。

$$(1) \forall x Fx() \rightarrow Gx()$$

$$(2) \exists x Fx Gx() \wedge ()$$

答: 解释为 I_1 : $F(x)$, x 是偶数, $G(x)$ x 是素数 解释为 I_2 : $F(x)$, x 是奇数, $G(x)$ x 是素数

4. 给定公式 $A \quad xFx = \exists () \rightarrow \forall x Fx()$

a) 在解释 I_1 中, 个体域 $D_1=\{a\}$, 证明公式 A 在 I_1 下的真值为 1。

b) 在解释 I_2 中, 个体域 $D_2=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$, A 在 I_2 下的真值还一定是 1 吗? 为什么?

答: 1. 在 I_1 下, $\exists x Fx() \rightarrow \forall x Fx() \Leftrightarrow Fa Fa() \rightarrow () \Leftrightarrow \neg Fa Fa() \vee () \Leftrightarrow 1$

在 I_2 下, $\exists x Fx() \rightarrow \forall x Fx() \Leftrightarrow (Fa Fa(1) \vee (2) \dots \vee Fan()) \rightarrow (Fa Fa(1) \wedge (2) \dots \wedge Fan())$ 为可满足式, 但不是永真式。设 $F(x)$: x 为奇数, 此时蕴含式前件为真, 后件为假, 故蕴含式真值为 0。若将 $F(x)$ 改为令 $F(x)$, x 为整数, 则蕴含式的前件后件均为真, 则真值为 1。问题的关键是 $n \geq 2$, n 项的析取为真, 只需要其中的一项为真, 而不能保证所有的项为真。

5. 给定解释 I 如下: (a) 个体域 $D=\{3, 4\}$;

$$(b) \quad \bar{f}x() \text{ 为 } \bar{f}(3) = 4, \bar{f}x() = 3;$$

$$(c) \quad \bar{F}xy(,) \text{ 为 } \bar{F}(3,3) = \bar{F}(4,4) = 0, \bar{F}(3,4) = \bar{F}(4,3) = 1$$

试求下列公式在 I 下的真值。

$$(1) \forall \exists xy Fxy(,) \quad (2)$$

$$\exists \forall x y Fxy(,)$$

$$(3) \forall \forall x y Fxy Ffx fxy((,) \rightarrow ((), ()))$$

答: (1)

$$\forall \exists xy Fxy(,) \Leftrightarrow \forall x Fx((, 3) \vee Fx(, 4)) \Leftrightarrow (F(3,3) \vee F(3,4)) \wedge (F(4,3) \vee F(4,4)) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

(2).

$$\exists \forall x y Fxy(,) \Leftrightarrow \exists x Fx((, 3) \wedge Fx(, 4)) \Leftrightarrow (F(3,3) \wedge F(3,4)) \vee (F(4,3) \wedge F(4,4)) \Leftrightarrow \wedge \Leftrightarrow 0 \quad 0 \quad 0$$

(3).

$$\begin{aligned} \forall \forall x y Fxy((,) \rightarrow F f x f y((, ())) &\Leftrightarrow \forall x Fx(((, 3) \rightarrow F f x f((, (3))) \wedge (Fx(, 4) \rightarrow F f x f((, (4)))) \\ &\Leftrightarrow (F(3,3) \rightarrow F f(3), f(3))) \wedge (F(3,4) \rightarrow F f(3), f(4))) \\ &\wedge (F(4,3) \rightarrow F f(4), f(3))) \wedge (F(4,4) \rightarrow F f(4), f(4))) \\ &\Leftrightarrow \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow \wedge \rightarrow \Leftrightarrow \wedge \wedge \wedge \Leftrightarrow (00) \quad (1 \ 1) \ (1 \ 1) \quad (0 \ 0) \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{aligned}$$

6. 甲使用量词辖域收缩与扩张等值式进行如下演算：

$$\forall x Fx(() \rightarrow Gxy(,)) \Leftrightarrow \exists x Fx() \rightarrow Gxy(,)$$

乙说甲错了，乙说的对吗？为什么？

答：乙说的对，甲错了。本题中，全称量词 \forall 的指导变元为 x ，辖域为 $Fx Gxy() \rightarrow (,)$ ，其中 $F(x)$ 与 $G(x, y)$ 中的 x 都是约束变元，因而不能将量词的辖域缩小。

7. 请指出下面等值演算中的两处错误。

$$\begin{aligned} &\neg \exists \forall x y Fx Gy(() \wedge (() \rightarrow Hxy(,))) \\ &\Leftrightarrow \forall \exists xy Fx Gy(() \wedge (() \rightarrow Hxy(,))) \\ &\Leftrightarrow \forall \exists xy Fx((() \rightarrow Gy()) \rightarrow Hxy(,)) \end{aligned}$$

答：演算的第一步，应用量词否定等值式时丢掉了否定连接词“ \neg ”，演算的第二步，在原

$$(Fx Gy() \wedge (() \rightarrow Hxy(,)))$$

错的基础上又用错了等值式即，

$$\Leftrightarrow ((Fx() \rightarrow Gy()) \rightarrow Hxy(,))$$

8. 在一阶逻辑中将下面命题符号化，要求用两种不同的等值形式。

(1) 没有小于负数的正数 (2) 相等的

两个角未必都是对顶角答：

$$(1). \neg \exists x Fx Gx(() \wedge ()) \Leftrightarrow \forall x Gx(() \rightarrow \neg Fx()),$$

(1)

其中 $Fx(x)$: 小于负数， $Gx(x)$: 是正数。

(2).

$$\neg \forall x Fx Gx(() \rightarrow () \Leftrightarrow \exists x Fx(() \wedge \neg Gx()),$$

其中 $Fx(x)$: 两个角相等， $Gx(x)$: 两个角是对顶角

9. 设个体域 D 为实数集合，命题“有的实数既是有理数，又是无理数”。这显然是个假命题。

可是某人却说这是真命题，其理由如下：设 $F(x)$: x 是有理数， $G(x)$: x 是无理

数。 $\exists x Fx()$ 与 $\exists x Gx()$ 都是真命题，于是， $\exists x Fx() \wedge \exists x Gx() \Leftrightarrow \exists x Fx Gx(()) \wedge (())$ ，由于

$\exists x Fx x Gx() \wedge \exists (())$ 是真命题，故 $\exists x Fx Gx(()) \wedge (())$ 也是真命题，即有的实数是有理数，也

是

无理数，问此人的结论对吗？为什么？

答：不对，因为存在量词对于 \wedge 无分配率。

10. 在求前束范式时，有人说 $\neg \exists x Fx Gxy(()) \wedge ((),)$ 已是前束范式，理由是量词已在公式的前面。他说的对吗？为什么？

答：前束范式中，否定联接词不能在量词前面出现。

11. 有人说无法求公式

$\forall x Fx Gx(()) \rightarrow (()) \rightarrow \exists x Gxy((),)$ 的前束范式，因为公式中的两个量词的指导变元相同。他的理由正确吗？为什么？答：用换名规则可使两个指导规则不同。

12. 求下列各式的前束范式：

$$(1) \forall x Fx(()) \rightarrow \forall y Gxy((),)$$

$$(2) \forall x Fxy((),) \rightarrow \exists y Gxyz((), ,)$$

$$(3) \forall x Fxy((),) \leftrightarrow \exists x Gxy((),)$$

$$(4) \forall x Fx Gxx_1((1) \rightarrow (1, 2)) \rightarrow \exists (x Hx_2(2) \rightarrow \exists x Lx x_3(2,$$

$$3)) (5) \exists x Fxx_1(1, 2) \rightarrow (Fx(1) \rightarrow \neg \exists x Gxx_2(1, 2)) \text{ 答: } (1) \exists$$

$$\forall x y Fx Gzy(()) \rightarrow ((),)$$

$$(2) \forall \exists x t Fxy Gxtz((),) \rightarrow ((), ,)$$

$$(3) \exists \exists \forall \forall x x x x Fx y Gx y Gx y Fx y_1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 ((1,) \rightarrow (2,)) \wedge (3,) \rightarrow (4,))$$

$$(4) \exists \forall \exists y y y Fy Gyx_1 \quad 23 ((1) \rightarrow (1, 2)) \rightarrow (Hy Lx y(2) \rightarrow (2, 3)))$$

$$(5) \forall \forall y y Fyx_1 \quad 2 ((1, 2) \rightarrow (Fx(1) \rightarrow \neg Gx y(1, 2)))$$

13. 将下列命题符号化，要求符号化的公式全为前束范式：

(1) 有的汽车比有的火车跑得快

(2) 有的火车比所有汽车跑得快

(3) 说所有的火车比所有的汽车跑得快是不对的

(4) 说有的飞机比有的汽车慢也是不对的

答：(1) $F(x):x$ 是汽车， $G(y):y$ 是火车， $H(x,y):x$ 比 y 跑得快

$$\exists \exists xy Fx Gy Hxy(() \wedge () \wedge (,))$$

(2) $F(x):x$ 是火车， $G(y):y$ 是汽车， $H(x,y):x$ 比 y 跑得快 $\exists \forall x$

$$y Fx Gy(() \wedge (() \rightarrow Hxy(,)))$$

(3) $F(x):x$ 是火车， $G(y):y$ 是汽车， $H(x,y):x$ 比 y 跑得快

$$\exists \exists xy Fx Gy(() \wedge () \wedge \neg Hxy(,))$$

(4) $F(x):x$ 是飞机， $G(y):y$ 是汽车， $H(x,y):x$ 比 y 慢

$$\forall \forall x y Fx Gy(() \wedge () \rightarrow \neg Hxy(,)) 、$$

14. 在自然推理系统 F 中，指出下面各证明序列中的错误：

(1) $\circ_1 Fx() \rightarrow \exists x Gx()$ 前提引入 $\circ_2 Fc Gc() \rightarrow ()$ $\circ_1 EI$ 规则

(2) $\circ_1 \exists x Fx() \rightarrow \exists y Gy()$ 前提引入 $\circ_2 Fa() \rightarrow Fb()$ $\circ_1 EI$ 规则

(3) $\circ_1 Fy Gy() \rightarrow ()$ 前提引入

$\circ_2 \exists x Fx Gx(() \rightarrow ())$ $\circ_1 EG$ 规则

(4) $\circ_1 Fa Gb() \wedge ()$ 前提引入

$\circ_2 \exists x Fx Gx(() \wedge ())$ $\circ_1 EG$ 规则

(5) $\circ_1 Fc Gc() \rightarrow ()$ 前提引入

$\circ_2 \forall x Fx Gx(() \rightarrow ())$ $\circ_1 UG$ 规则

答：(1) 对 $Fx() \rightarrow \exists x Gx()$ 不能使用 EI 规则。它不是前束范式，化为前束范式得

$Fx() \rightarrow \exists x Gx() \Leftrightarrow \exists x Fy Gx(() \rightarrow ())$ ，因为量词辖域 $(Fy Gx() \rightarrow ())$ 中，除了 x 外还有自由出现的 y ，所以不能使用 EI 规则。

(2) 对 $Fc Gc() \rightarrow ()$ 也应先化成前束范式才能消去量词，其前束范式为

$\forall \exists xy Fx Gy(() \rightarrow ())$ ，要消去量词，既要使用 UI 规则又要使用 EI 规则。

(3) 在自然推理系统 F 中，EG 规则为 $\frac{Ac()}{\therefore \exists x Ax()}$ ，其中 c 为特定的个体常项，这里

$Ay Fy Gy() = () \rightarrow ()$ 不满足要求。

(4) 这里使 F(a) 为真的 a 不一定使 G(a) 为真，同样地使 G(b) 为真的 b 不一定使 F(b) 为真，如

$F(x):x$ 为奇数， $G(x):x$ 为偶数，显然 $F(3) \wedge G(4)$ 为真，但不存在使 $Fx Gx() \wedge ()$ 为真的个体。

(5) 这里 c 为个体常项，不能对 $\forall x Hx(() \rightarrow \neg Fx())$ 引入全称量词。

15. 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：

(1) 前提： $\exists x Fx() \rightarrow \forall y Fy Gy(() \vee ()) \rightarrow Ry xFx()$ ， $\exists ()$ 结论：

$\exists x Rx()$

(2) 前提： $\forall x Fx(() \rightarrow (() Ga Rx \wedge ()))$ ， $\exists x Fx()$ 结论： $\exists x Fx$

$Rx(() \wedge ())$

(3) 前提： $\forall x Fx Gx(() \vee ())$ ， $\neg \exists x Gx()$ 结论：

$\exists x Fx()$

(4) 前提： $\forall x Fx Gx x Gx(() \vee ())$ ， $\forall \neg(() \vee \neg Rx xRx())$ ， $\forall ()$ 结论：

$\exists x Fx()$

证明：(1) $\circ_1 \exists x Fx()$ 前提引入

$\circ_2 \exists x Fx() \rightarrow \forall y Fy Gy((() \vee ()) \rightarrow Ry($ 前提引入

$\circ_3 \forall y Fy Gy((() \vee ()) \rightarrow Ry()$ $\circ_1 \circ_2$ 假言推理

$\circ_4 F(c)$ $\circ_1 EI$

$\circ_5 (Fc \ Gc() \vee ()) \rightarrow Rc()$ \circ_3 UI

$\circ_6 Fc \ Gc() \vee ()$ \circ_4 附加

$\circ_7 R(c)$ $\circ_5 \circ_6$ 假言推理

$\circ_8 \exists xRx()$ \circ_7 EG

(2) $\circ_1 \exists xFx()$ 前提引入

$\circ_2 \forall xFx(() \rightarrow (Ga \ Rx() \wedge ()))$ 前提引入

$\circ_3 F(c)$ \circ_1 EI

$\circ_4 Fc() \rightarrow (Ga \ Rc() \wedge ())$ \circ_2 UI

$\circ_5 Ga \ Rc() \wedge ()$ $\circ_3 \circ_4$ 假言推理

$\circ_6 R(c)$ \circ_5 化简

$\circ_7 Fc \ Rc() \wedge ()$ $\circ_3 \circ_6$ 合取

$\circ_8 \exists xFx \ Rx(() \wedge ())$ \circ_7 EG

(3) $\circ_1 \neg \exists xFx()$ 前提引入

$\circ_2 \forall \neg x \ Fx()$ \circ_1 置换

$\circ_3 \neg Fc()$ \circ_2 UI

$\circ_4 \forall xFx \ Gx(() \vee ())$ 前提引入

$\circ_5 Fc \ Gc() \vee ()$ \circ_4 UI

$\circ_6 F(c)$ $\circ_3 \circ_5$ 析取三段论

$\circ_7 \exists xFx()$ \circ_6 EG

(4) $\circ_1 \forall xFx \ Gx(() \vee ())$ 前提引入

$\circ_2 Fy \ Gy() \vee ()$ \circ_1 UI

$\circ_3 \forall \neg x \ Gx(() \vee \neg Rx())$ 前提引入

$\circ_4 \neg Gy() \vee \neg Ry()$ \circ_3 UI

○5 $\forall xRx()$

前提引入

○6 $R(y)$

○5 UI

○7 $\neg Gy()$

○4 ○6 析取三段论

○8 $F(y)$

○2 ○7 析取三段论

○9 $\forall xFx()$

○8 UG

16. 找一个解释 I, 在 I 下, 使得 $\forall xFx() \rightarrow \forall xGx()$ 为真, 而使得 $\forall xFx Gx(() \rightarrow ())$

为假, 从而说明 $\forall xFx() \rightarrow \forall xGx() \neq \forall xFx Gx(() \rightarrow ())$ 。答: 取个体域为自然数集

合 N, $F(x):x$ 为奇数, $G(x):x$ 为偶数, 则在以上解释下, $\forall xFx() \rightarrow \forall xGx()$ 为真而

$\forall xFx Gx(() \rightarrow ())$ 为假。

17. 给定推理如下: 前提: $\forall xFx(() \rightarrow \neg Gx xHx Gx()), \forall (() \rightarrow ())$; 结论:

$\forall x Hx(() \rightarrow \neg Fx())$ 。有些人证明如下：

$\circ_1 \forall x Hx()$	附加前提引入
$\circ_2 H(y)$	\circ_1 UI
$\circ_3 \forall x Hx Gx(() \rightarrow ())$	前提引入
$\circ_4 Hy Gy() \rightarrow ()$	\circ_3 UI
$\circ_5 G(y)$	$\circ_2 \circ_5$ 假言推理
$\circ_6 \forall x Fx(() \rightarrow \neg Gx())$	前提引入
$\circ_7 Fy() \rightarrow \neg Gy()$	\circ_6 UI
$\circ_8 \neg Fy()$	$\circ_5 \circ_7$ 拒取式
$\circ_9 \forall \neg x Fx()$	\circ_8 UG

并且说由附加前提证明法可知，推理正确，请指出以上证明的错误。

答：由第 16 题可知，本题不能用附加前提证明法。

18.给出上题的正确推理证明。

证明： $\circ_1 \forall x Fx(() \rightarrow \neg Gx())$	前提引入
$\circ_2 \forall x Hx Gx(() \rightarrow ())$	前提引入
$\circ_3 Fy() \rightarrow \neg Gy()$	\circ_1 UI
$\circ_4 Hy Gy() \rightarrow ()$	\circ_2 UI
$\circ_5 Gy() \rightarrow \neg Fy()$	\circ_3 置换
$\circ_6 Hy() \rightarrow \neg Fy()$	$\circ_4 \circ_5$ 假言三段论
$\circ_7 \forall x Hx(() \rightarrow \neg Fx())()$	\circ_6 UG

19 在自然推理系统 F 中，构造下面的推理证明；

前提： $\exists x Fx() \rightarrow \forall x Gx()$ 结论： $\forall x Fx Gx(()$

$\rightarrow ())$ 证明： 1 $\exists x Fx() \rightarrow \forall x Gx()$

()

$$2 \quad Fc \rightarrow \forall y Gy()$$

$$3 \quad \forall x Fx \quad Gx(()) \rightarrow (())$$

20 在自然推理系统 F 中，构造下面的推理证明；

(1) 前提： $\forall x Fx \quad Gx(()) \rightarrow$

$(())$ 结 论： $\forall x Fx(())$

$\rightarrow \forall x Gx(())$ 证明： 1 $\forall x Fx$

$Gx(()) \rightarrow (())$

$$2 \quad Fx \quad Gx() \rightarrow (())$$

$$3 \quad \forall x Fx() \text{ 附加前提}$$

$$4 \quad \forall x Gx()$$

(2) 前提： $\forall x Fx \quad Gx(()) \vee (())$

结论： $\neg \forall x Fx(()) \rightarrow \exists x Gx(())$ 证明：

$$1 \quad \forall x Fx \quad Gx(()) \vee (())$$

$$2 \quad Fx \quad Gx() \vee (())$$

$$3 \quad \neg \forall x Fx() \text{ 附加前提}$$

$$4 \quad \exists \neg x Fx()$$

$$5 \quad \neg Fc()$$

$$6 \quad Gc()$$

$$7 \quad \exists x Gx()$$

21 在自然推理系统 F 中，构造下面推理的证明：没有白色的乌鸦，北京鸭都是白色的，因此北京鸭不是乌鸦。

答：设 $Fx()$ ：x 是白色的

$(())$

$Gx()$: x 是乌鸦

$Hx()$: x 是北京鸭前提: $\forall xGx()$

$\rightarrow \neg Fx()$

$\forall xHx(\rightarrow Fx())$

结论: $\forall xHx(()) \rightarrow \neg Gx())$ 证

明: 1 $\forall xGx((\rightarrow \neg Fx()))$

2 $Gx() \rightarrow \neg Fx()$

3 $Fx() \rightarrow \neg Gx()$

4 $\forall xHx(()) \rightarrow Fx())$

5 $Hx() \rightarrow Fx()$

6 $Hx() \rightarrow \neg Gx()$

7 $\forall xHx(()) \rightarrow \neg Gx())$

22 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明: (1)偶数都能被 2 整除。6 是偶数, 所以 6 能被 2 整除。答:
设 $Fx()$: x 是偶数

$Gx()$: x 能被 2 整除前提: $\forall xFx()$

$\rightarrow Gx()$

$F(6)$

结论: $G(6)$ 证明: 1 $\forall xFx()$

$(\rightarrow Gx())$

2 $F(6) \rightarrow G(6)$

$(\rightarrow G(6))$

3 $F(6)$

4 $G(6)$

(2) 凡大学生都是勤奋的。王晓山不勤奋。所以王晓山不是大学生。

答：设 $Fx()$: x 是大学生

$Gx()$: x 是勤奋的

C: 王晓山前提: $\forall xFx$

$Gx(\rightarrow ())$

()

$$\neg Gc()$$

结论: $\neg Fc()$ 证明: 1 $\forall xFx$

$$Gx(()) \rightarrow (())$$

$$2 \quad Fc \rightarrow Gc(()) \rightarrow (())$$

$$3 \quad \neg Gc(()) \rightarrow \neg Fc(())$$

$$4 \quad \neg Gc(())$$

$$5 \quad \neg Fc(())$$

23 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明:

(1) 每个有理数都是实数。有的有理数是整数。因此有的实数是整数。

答: 设 $Fx()$: x 是有理数

$Gx()$: x 是实数

$Hx()$: x 是整数前提: $\forall xFx$

$$Gx(()) \rightarrow (())$$

$\exists xFx \wedge Hx(())$ 结论:

$\exists xGx \wedge Hx(())$ 证明: 1

$$\exists xFx \wedge Hx(())$$

$$2 \quad Fc \wedge Hc(())$$

$$3 \quad \forall xFx \rightarrow Gx(())$$

$$4 \quad Fc \rightarrow Gc(())$$

$$5 \quad Gc(())$$

$$6 \quad Gc \wedge Hc(())$$

$$7 \exists x Gx Hx(\quad) \wedge (\quad)$$

(2) 有理数, 无理数都是实数。虚数不是实数, 因此虚数既不是有理数也不是无理数。

答: 设 $Fx()$: x 是有理数

$Gx()$: x 是实数

$Hx()$: x 是无理数

$Px()$: x 是虚数前提:

$$\forall x Fx Gx(\quad) \rightarrow (\quad)$$

$$\forall x Hx(\quad) \rightarrow Gx(\quad)$$

$$\forall x Px(\quad) \rightarrow \neg Gx(\quad) \text{ 结论:}$$

$$\forall x Px(\quad) \rightarrow \neg(Fx(\quad) \wedge \neg Hx(\quad)) \text{ 证}$$

$$\text{明: } 1 \forall x Fx(\quad) \rightarrow Gx(\quad)$$

$$2 Fx Gx(\quad) \rightarrow (\quad)$$

$$3 \neg Gx(\quad) \rightarrow \neg Fx(\quad)$$

$$4 \forall x Hx(\quad) \rightarrow Gx(\quad)$$

$$5 Hx Gx(\quad) \rightarrow (\quad)$$

$$6 \neg Gx(\quad) \rightarrow \neg Hx(\quad)$$

$$7 Px(\quad) \rightarrow \neg(Fx(\quad) \wedge \neg Hx(\quad))$$

$$8 \forall x Px(\quad) \rightarrow \neg(Fx(\quad) \wedge \neg Hx(\quad))$$

24 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明: 每个喜欢步行的人都不喜欢骑自行车。每个人或者喜欢骑自行车或者喜欢乘自行车。有的人不喜欢乘汽车, 所以有的人不喜欢步行。

答: 设 $Gx()$: x 喜欢步行

$Hx()$: x 喜欢骑自行车

$Px()$: x 喜欢乘汽车 前提:

$\forall x Gx(() \rightarrow \neg Hx()) \quad \forall x Hx Px(() \vee ())$

$\exists \neg x Px()$

结论: $\exists \neg x Gx()$ 证明:

1 $\exists \neg x Px()$

2 $\neg Pc()$

3 $\forall x Hx Px(() \vee ())$

4 $Hc Pc() \vee ()$

5 $Hc()$

6 $\forall x Gx(() \rightarrow \neg Hx())$

7 $Gc() \rightarrow \neg Hc()$

8 $Hc() \rightarrow \neg Gc()$

9 $\neg Gc()$

25 在自然推理系统 F 中, 构造下面推理的证明 (个体域为人类集合) 每个科学工作者都是刻苦钻研的, 每个刻苦钻研而又聪明的人在他的事业中都将获得成功。王大海是科学工作者, 并且是聪明的, 所以王大海在他的事业中将获得成功。

答: 设 $Fx()$: x 是科学工作者

$Gx()$: x 是刻苦学习的

$Hx()$: x 是聪明的

$Px()$: x 将在他的事业中获得成功

C: 王大海

前提: $\forall x Fx Gx(() \rightarrow ())$, $Fc Hc() \wedge ()$

$$\forall x Gx Hx(() \wedge ())$$

$\rightarrow Px()$ 结论: $Pc()$ 证明: 1

$\forall x Fx Gx(() \rightarrow ())$ 前提 2 Fc

$$Gc() \rightarrow ()$$

3 $Fc()$ 前提

$$4 Gc()$$

5 $Hc()$ 前
提

$$6 Hc Gc() \wedge ()$$

$$7 \forall x Gx Hx(() \wedge () \rightarrow Px())$$

$$8 Gc Hc() \wedge () \rightarrow Pc()$$

$$9 Pc()$$