DOI:10.16358/j.issn.1009-1300.1992.04.008

四元数及其在导弹控制系统中的应用

西北工业大学

赵育善　谷良贤　温炳恒

摘　要　简要介绍了四元数方法及其主要性质。探讨四元数在导弹控制系统中的应用。对四元数参数计算过程中产生的比例误差、偏斜误差和交换误差进行了分析，提出用四元数的优化减小姿态计算误差的方法。

主题词　四元数　导弹控制系统　姿态计算　误差分析　优化

引言

四元数是1843年由哈密顿提出的一种数学方法，旨在解决空间矢量问题，具有许多独特的性质。但是，真正将四元数用于工程实际，只是近些年的事。随着航天事业的发展，四元数引起人们越来越大的重视。与传统的欧拉角、克雷洛夫角和方向余弦矩阵比较，四元数集中了它们的共同优点：第一，形式简单，便于分析；第二，用四元数描述飞行器姿态，参数动态范围大，不会产生奇异现象；第三，占用计算机内存小，计算速度快，误差小。以上诸优点决定了四元数用于描述导弹姿态的优越性。目前，各国在导弹、航天飞行器等控制系统中积极研究四元数的应用，并设计相应的系统程序。本文首先介绍四元数方法及其主要性质，然后讨论如何将四元数用于导弹系统中，最后讨论利用四元数的性质，消除姿态计算误差的四元数优化方法。

1　四元数方法

1.1　四元数的定义

四元数是由一个实数和三个虚数单位组成的具有实元的超复数：

$$\Lambda=\lambda_0+\lambda_1\vec{i}+\lambda_2\vec{j}+\lambda_3\vec{k} \qquad (1)$$

式中$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$具有普通单位矢量和虚数单位双重性质。满足关系式$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1$的四元数称为单位四元数。

根据具体应用需要，式(1)表示的四元数还可以表示为以下不同形式：

矢量形式　$$\Lambda=\lambda_0+\vec{\lambda} \qquad (2)$$

列阵形式　$$\{\Lambda\}=(\lambda_0\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \lambda_3)^T \qquad (3)$$

矩阵形式

收稿日期：1991年12月

$$\{\Lambda\}=\begin{bmatrix}\lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3\\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1\\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

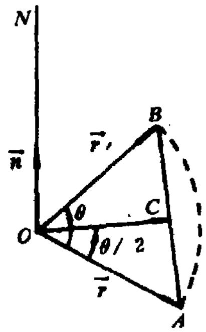
称四元数 $\tilde{\Lambda}=\lambda_0-\lambda_1\vec{i}-\lambda_2\vec{j}-\lambda_3\vec{k}$ 为式(1)表示的四元数 Λ 的共轭四元数。

1.2 四元数旋转算子

四元数作为一种数学方法，有自己特定的运算法则，具体可见参考文献。这里介绍四元数重要的旋转算子性质。

如右图所示，空间矢量 $\vec{r}$ 绕 ON 轴旋转一角度 θ 成为 $\vec{r}'$，那么，$\vec{r}'$ 和 $\vec{r}$ 之间满足关系

$$\vec{r}'=\Lambda\circ\vec{r}\circ\tilde{\Lambda} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$



利用四元数的不同表达形式，式(5)还可以写为

$$\{r'\}=[\Lambda]\,[r]\,\{\tilde{\Lambda}\}=[\Lambda]\,[\tilde{\Lambda}]^*\{r\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

式中：$\{r'\}=(0\quad r_1'\quad r_2'\quad r_3')^T$；$\{r\}=(\,0\quad r_1\quad r_2\quad r_3\,)^T$；

$$[\tilde{\Lambda}]^*=\begin{bmatrix}\lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1\\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0\end{bmatrix}\text{。}$$

称 $[\tilde{\Lambda}]^*$ 为 $[\tilde{\Lambda}]$ 的蜕变矩阵。

对于连续转动 $\vec{r}\xrightarrow{P}\vec{r}_1\xrightarrow{Q}\vec{r}_2$，总变换四元数 $\vec{r}\xrightarrow{\Lambda}\vec{r}_2$ 为 $\vec{r}_2=Q\circ P\circ\vec{r}\circ\tilde{P}\circ\tilde{Q}$，$\Lambda=Q\circ P$。特别对于用欧拉角表示的转动，有总变换四元数 $Q=Q_\gamma\circ Q_\psi\circ Q_\varphi$，并有关系：

$$\mathrm{tg}\,\varphi=2(q_1q_2+q_0q_3)/(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)$$
$$\sin\psi=2(q_0q_2-q_1q_3)$$
$$\mathrm{tg}\,\gamma=2(q_0q_1+q_2q_3)/(q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2)$$

1.3 四元数运动方程

式(5)中 $\vec{r}$ 可以理解为参考坐标系，$\vec{r}'$ 为弹体坐标系，Λ 为描述导弹姿态的四元数。根据四元数导数表达式，可得导弹相对参考系的运动方程为

$$\Lambda=\frac{1}{2}\,\vec{\omega}^I\circ\Lambda \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

式中 $\vec{\omega}^I$ 是由导弹角速度在参考系上映像组成的零标四元数。

由于通常导弹的角速度是在弹体坐标系上测得 $\vec{\omega}^E$，所以常将式(7)写成

$$\dot{\Lambda}=\Lambda\circ\vec{\omega}^E/2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

其中 $\vec{\omega}^E$ 是由导弹角速度在弹体系上映像组成的无标四元数，可由角速度陀螺测得。测知导弹的角速度 $\vec{\omega}$，可积分式(7)或(8)，求出导弹的姿态。

2 四元数在导弹控制系统中的应用

2.1 导弹姿态偏差的四元数表示

控制系统的任务之一是将导弹控制到预期姿态。设 Q_B^R 和 Q_C^R 分别是相对于给定参考系导

弹当前的实际姿态和预期理论姿态，那么，当前导弹的姿态偏差可用四元数 Q_B^C 表示。

因为 $B \xrightarrow{Q_B^C} C \xrightarrow{Q_C^R} R$，所以有 $Q_B^R=Q_B^C \circ Q_C^R$。对上式两边同乘 $\tilde{Q}_C^R$，并利用 $Q_C^R \circ \tilde{Q}_C^R=1$，可得

$$Q_B^C=Q_B^R \circ \tilde{Q}_C^R=\begin{Bmatrix} \cos(\Delta\theta/2) \\ n_1\sin(\Delta\theta/2) \\ n_2\sin(\Delta\theta/2) \\ n_3\sin(\Delta\theta/2) \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (9)$$

于是，当姿态偏差为小量时，可表示为

$$\varepsilon(i)=2\,Q_B^C(i) \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \quad \cdots\cdots (10)$$

当姿态偏差不为小量时，可表示为

$$\varepsilon(i)=\Delta\theta\, Q_B^C(i)\ /\sin(\Delta\theta/2) \qquad (i=1,2,3) \quad \cdots\cdots (11)$$

用这种方法表示姿态偏差比用欧拉角和方向余弦矩阵表示有很大的计算优势和存贮优势。

2.2 导弹姿态速率的四元数表示

通常控制系统要利用姿态速率进行反馈，所以要计算出导弹的姿态角速率。

用 Q_P^R 和 Q_L^R 分别表示导弹当前的姿态和前一测试时刻的姿态(相对于给定参考系或制导站)，那么，可以计算出导弹当前的姿态速率为

$$\dot{\varepsilon}(i)=2Q_P^L(i)/\Delta t \qquad (i=1,2,3) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$Q_P^L=Q_P^R \circ \tilde{Q}_L^R \quad \cdots\cdots (13)$$

式中 Δt 为控制周期。

2.3 导弹姿态控制中的四元数方法

导弹在发射和机动飞行中，姿态变化比较大。在大角度机动情况下，由于存在交连影响，故如何选取控制信号是一个值得研究的问题。下面利用四元数的性质，研究用四元数作为控制信号的可能性。

设 xyz 是弹体坐标系，$x^*y^*z^*$ 是导弹的目标姿态，Q 是由弹体系到目标系的四元数。与用欧拉角进行控制相似，我们可以利用四元数的矢量部分组成各种线性和非线性函数作为控制信号，只要保证控制系统的稳定性和收敛速度就可以了。四元数的性质决定了四元数容易满足以上要求。为了简化计算，希望组成的控制信号简单，便于计算。

当误差很小时

$$\left.\begin{aligned} \Delta\gamma &\approx 2q_0q_1 \\ \Delta\psi &\approx 2q_0q_2 \\ \Delta\theta &\approx 2q_0q_3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (14)$$

通常在小角度情况下，取控制信号为

$$\omega_i=k_i q_0 q_i \qquad (i=1,2,3) \quad \cdots\cdots (15)$$

然而在大角度情况下，由于存在严重的耦合，能否再利用(15)式呢?

首先研究其稳定性，即能否使四元数 Q 收敛于 $(1\quad 0\quad 0\quad 0)^T$。

当目标姿态不动时，取正定函数

$$W=1-q_0^2=\frac{1}{2}[(1-q_0^2)+q_1^2+q_2^2+q_3^2] \quad \cdots\cdots (16)$$

作为李亚普诺夫函数，那么由运动方程(7)可求得

$$\dot{W}=q_0(q_1\omega_1+q_2\omega_2+q_3\omega_3)=q_0^2(k_1q_1^2+k_2q_2^2+k_3q_3^2) \quad \cdots\cdots (17)$$

只要取 $k_i<0\ (i=1,2,3)$，则控制系统是稳定的，其收敛速度可以通过 k_i 调节。

当目标姿态有一角速度 $\vec{\omega}^*$ 时，其运动方程为

$$\dot{Q}=\frac{1}{2}(\vec{\omega}\circ Q-Q\circ\vec{\omega}^*) \qquad (18)$$

若取控制信号为

$$\left.\begin{aligned}\omega_1-\omega_1^*=k_1q_0q_1\\ \omega_2-\omega_2^*=k_2q_0q_2\\ \omega_3-\omega_3^*=k_3q_0q_3\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

仍以(16)式为李亚普诺夫函数，那么

$$\dot{W}=q_0^2(k_1q_1^2+k_2q_2^2+k_3q_3^2) \qquad (20)$$

同(17)式一样，当 $k_i<0\ (i=1,2,3)$ 时，系统是稳定的。

根据式(15)和(19)，可以通过欧拉动力学方程，确定应施于弹体的力矩以及相应的机构运动规律。

对于有定向性要求的空间飞行器，可以用绕欧拉轴的一次大角转动实现定向控制，这时按姿态四元数给出信息，求出弹体轴上的力矩分布要求。

若用 Q_I^R 和 Q_F^R 分别表示飞行器相对于参考系的初始姿态和最终目标姿态，那么，由乘积四元数

$$Q_F^I=Q_F^R\circ\tilde{Q}_I^R=\begin{Bmatrix}\cos(\theta/2)\\ \vec{n}\sin(\theta/2)\end{Bmatrix} \qquad (21)$$

可以求出欧拉轴方向 $\vec{n}$ 和转角 θ。对于由多喷咀操纵的空间飞行器，可以控制各喷咀的开关，以实现"最佳轴控制"，即使控制轴与欧拉轴最接近。

2.4 漂移误差

漂移误差是由于计算误差而使算出的姿态偏离真实姿态而形成的误差。

设漂移角速度为 $\vec{\omega}$，那么，可以构造修正四元数

$$Q_{\Delta t}=\begin{Bmatrix}\cos(\Delta\theta/2)\\ n_1\sin(\Delta\theta/2)\\ n_2\sin(\Delta\theta/2)\\ n_3\sin(\Delta\theta/2)\end{Bmatrix} \qquad (22)$$

其中 $\vec{\omega}$ 以漂移坐标系上映像形式给出，$\vec{n}=\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$，$\Delta\theta=|\vec{\omega}|\Delta t$，$\Delta t$ 为修正周期。式(22)可进一步表示为

$$Q_{\Delta t}=\begin{Bmatrix}1\\ \omega_1\Delta t/2\\ \omega_2\Delta t/2\\ \omega_3\Delta t/2\end{Bmatrix} \qquad (23)$$

若用 Q_B^R 表示漂移参考系对给定的系统参考系的姿态四元数，那么，修正后的弹体姿态为

$$Q_B^R=Q_{\Delta t}\circ Q_B^R \qquad (24)$$

比较难处理的是在进行定量研究时需要有一个基准(理想坐标系或理想四元数)，而实际上这样的基准无法得到。因而只能采取不同方法对漂移误差进行修正或补偿，以将其控制在许可

范围内。比如用地面模拟获得必要数据，然后贮存在计算机内定期进行误差补偿。对于航天飞行器，还可以利用“观测矢量”(如恒星方位)作基准进行修正。

2.5 姿态修正

为了求导弹在每一时刻的姿态四元数，必须对式(7)或(8)进行积分，对角速度陀螺定期采样，以获得角速度值。在采样周期内，总是假定角速度 $\vec{\omega}$ 不变，而实际上 $\vec{\omega}$ 是变化的。因此，总希望采样周期尽可能小，只有这样，所计算出的 Λ 才能代表导弹的真实姿态。否则，由于有限转动的不可交换性，数值积分将产生较大的误差，称这种误差为交换误差。下面讨论交换误差的修正方法。

交换误差是不可避免的，它只能减小不能消除。减小交换误差的一个重要途径是提高采样频率。这就要求增加计算速度，否则会降低计算速度，反而增加了计算结果的交换误差。为了解决这一困难， 可以采用等效转动矢量法对 $\vec{\omega}$ 加一修正信号，通过方程解出等效转动矢量 $\vec{\varphi}$ 。因为 $\vec{\varphi}$ 是定轴转动，可以直接相加，从而可以增大计算周期。

等效转动矢量 $\vec{\varphi}$ 满足微分方程

$$\dot{\vec{\varphi}}=\vec{\omega}+\frac{1}{2}\vec{\varphi}\times\vec{\omega}+A(\varphi)\vec{\varphi}\times(\vec{\varphi}\times\vec{\omega}) \quad \cdots\cdots (25)$$

$$A(\varphi)=[1-\varphi\sin\varphi/2(1-\cos\varphi)]/\varphi^2 \quad \cdots\cdots (26)$$

求得 $\vec{\varphi}$ 后，可按下式计算姿态四元数:

$$\Lambda=\{\cos(\varphi/2)I+\sin(\varphi/2)[\varphi]/\varphi\}\Lambda_0 \quad \cdots\cdots (27)$$

借助于等效转动矢量，由式(25)～(27)求得导弹姿态四元数，虽然增加了一些计算方程(25)的工作量，但由于可以增大采样周期，总的速度并没有降低，而且计算精度提高了。

3 误差分析及优化

同其它参数一样，在进行四元数参数计算过程中，会产生一定误差。常见有三种形式:比例误差，偏斜误差和交换误差。下面分别研究这三种误差。

3.1 比例误差

用于描述导弹姿态的四元数 Λ 通常是单位四元数，由于数值计算误差，求出的四元数往往不是单位四元数。假定求出的四元数为

$$\hat{\Lambda}=\hat{\lambda}_0+\hat{\lambda}_1\vec{i}+\hat{\lambda}_2\vec{j}+\hat{\lambda}_3\vec{k} \quad \cdots\cdots (28)$$

比例误差定义为

$$\varphi(\hat{\Lambda})=\sum_{s=0}^{3}(\hat{\lambda}_s)^2-1 \quad \cdots\cdots (29)$$

为了消除比例误差，可用

$$\lambda_s=\hat{\lambda}_s\Big/\Big[\sum_{s=0}^{3}(\hat{\lambda}_s)^2\Big]^{1/2} \quad \cdots\cdots (30)$$

对式(28)进行修正。可以证明:式(30)是一种使误差平方最小的最优化方法。

消除比例误差还可采用误差补偿法。考虑四元数规范化条件

$$\varphi(\Lambda)=\sum_{s=0}^{3}\lambda_s^2-1=0 \quad \cdots\cdots (31)$$

在运动方程(8)中引入乘子 K，得到修正后的运动方程:

$$\dot{\Lambda}=(\Lambda\circ\vec{\omega}+K\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\Lambda})/2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

可以证明，用式(32)迭代计算 Λ，当 $K<0$ 时，Λ 一致收敛于导弹姿态的规范化四元数，且 K 越小收敛越快。

3.2 偏斜误差

偏斜误差是由于引入变换后，将正交基变换为非正交基而产生的误差。由四元数旋转算子性质，利用四元数进行基变换，不会产生偏斜误差。这是四元数的一个重要性质。

3.3 交换误差

交换误差是由于有限转动的不可交换性，在数值积分过程中角速度近似而产生的误差。式(25)～(27)通过等效转动矢量对交换误差进行了修正。

参考文献

[1] 勃拉涅茨 B H, 什梅格列夫斯基 И П; 梁振和译．四元数在刚体定位问题中的应用．国防工业出版社，1977

[2] Gordon D Niva. The Use of Quaternions With an All－Attitude IMU. AAS 82－026

[3] Charles A Halijak. Quaternions Applied to Missile Systems. AD A052232

[4] 肖尚彬．四元数及其在惯导系统中的应用．西北工业大学学报，1982

[5] 肖尚彬．四元数矩阵的乘法及其可易性．力学学报，1984, 16(2)

[6] Brian Schletz. Use of Quaternions in Shuttle Guidance. Navigation, And Control, AIAA 82－1557

[7] 王永寿译．捷联式惯导装置的软件．飞航导弹，1989, (4)

QUATERNIONS AND ITS APPLICATION IN MISSILE CONTROL SYSTEMS

Zhao Yushan　Gu Liangxian　Wen Bingheng

Northwestern Polytechnical University

ABSTRACT Quaternions and its major character are outlined, with the emphasis on the application of quaternions in missile control systems. Error of its proportion, skewness and exchange are analyzed. Methods reducing error of attitude calculation are investigated by optimizing quaternions.

KEYWORDS Quaternion　Missile control system　Attitude calculation　Errow analysis　Optimization