DOI:10.16804/j.cnki.issn1006-3242.1983.01.005

四元数及其在导弹控制系统中的应用

王 永 平

1843年B·P·哈密顿首先在数学中引入四元数，直到廿世纪六、七十年代才在控制工程中得到实际应用。由于四元数建立的坐标转换矩阵省去了欧拉角三角函数的繁琐运算，减轻了计算机的负担，从而使速率积分陀螺型的捷联式制导系统在导弹与宇航中得到了广泛的应用。四元数法也解决了潜地导弹出水、多头分导、宇航飞行器的大姿态所引起的欧拉角退化。此外，四元数对于最佳空间转换的研究也是极为方便的。

本文旨在于从大量的研究四元数的文献中提炼出一份简明、实用的资料来用于飞行器控制的实际问题。

顺便指出我的同事中朱文轩、王美芝、张光媚等同志对四元数法都有卓越的研究，本文也是与他们共同切磋、商讨的结果，并引用了他们的技术报告。

一、四元数及其性质

1. 定义

四元数是指由一个实数单位1和三个虚数单位i、j、k组成并具有下列形式实元的数：

$$q=q_0+q_1\vec{i}+q_2\vec{j}+q_3\vec{k} \tag{1}$$

也可看成是一个标量和一个向量的和：

$$q=q_0+\bar{q} \tag{2}$$

我们来研究四元数的几何意义。设

$$\|q\|=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2 \tag{3}$$

这称为四元数的范数。令 $|q|=(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}$，

则
$$q=|q|\left(\frac{q_0}{|q|}+\frac{\bar{q}}{|q|}\right) \tag{4}$$

设
$$\bar{\mathrm{E}}=\bar{q}/(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}$$

代入(4)得

$$q=|q|\left[\frac{q_0}{|q|}+\bar{\mathrm{E}}\,\frac{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}}{|q|}\right]$$

再设 $\cos\dfrac{\vartheta}{2}=\dfrac{q_0}{|q|}$，则 $\sin\dfrac{\vartheta}{2}=\dfrac{(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}}{|q|}$

如此 $$q=|q|\left(\cos\frac{\vartheta}{2}+\bar{E}\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{5}$$

当 $|q|=1$ 时，称 q 为规范化的四元数（我们以后研究的四元数都为规范化四元数）。

$$q=\cos\frac{\vartheta}{2}+\bar{E}\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{6}$$

这样我们可以用大圆的圆弧$\overset{\frown}{AB}$(图1)来表示四元数q。弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 取决于 角 $\vartheta/2$，而弧所在的平面取决于 $\bar{E}$。

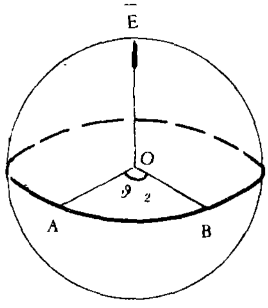

图1　四元数的几何意义

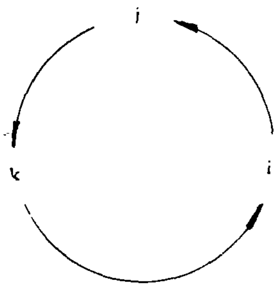

图2　四元数的乘法规则

此外，我们还做出如下定义：

“零四元数”即　$0=0+0\bar{i}+0\bar{j}+0\bar{k}$

“单位四元数”即　$1=1+0\bar{i}+0\bar{j}+0\bar{k}$

“共轭四元数”即　$q^*=q_0-\bar{q}=q_0-q_1\bar{i}-q_2\bar{j}-q_3\bar{k}$

2．四元数的乘法

为了求出四元数的乘积，必须给出乘法规则(图2)

$$\begin{aligned}&\bar{i}\circ\bar{j}=-\bar{j}\circ\bar{i}=\bar{k} \qquad \bar{j}\circ\bar{k}=-\bar{k}\circ\bar{j}=\bar{i}\\&\bar{k}\circ\bar{i}=-\bar{i}\circ\bar{k}=\bar{j} \qquad \bar{i}\circ\bar{i}=\bar{j}\circ\bar{j}=\bar{k}\circ\bar{k}=-1\end{aligned} \tag{7}$$

注意四元数的乘法规则不同于矢量代数中矢量的点积和 矢 积，$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$，$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$ 这是必须予以区别的，否则就会出错。

两个四元数相乘

$$q\circ p=(q_0+q_1\bar{i}+q_2\bar{j}+q_3\bar{k})\circ(p_0+p_1\bar{i}+p_2\bar{j}+p_3\bar{k})$$

展开并整理得

$$\begin{aligned}q\circ p=&(q_0p_0-q_1p_1-q_2p_2-q_3p_3)+\bar{i}(q_0p_1+p_0q_1+q_2p_3-q_3p_2)\\&+\bar{j}(q_0p_2+p_0q_2+q_3p_1-q_1p_3)+\bar{k}(q_0p_3+p_0q_3+q_1p_2-q_2p_1)\end{aligned} \tag{8}$$

四元数的乘法很有用，为便于记忆我们写成矩阵的形式：

$$q\circ p=\begin{pmatrix}q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2\\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1\\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix} \tag{9}$$

或

$$=\begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

注意 $p\circ q\neq q\circ p$（在矢量代数中 $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$） (11)

四元数相乘写成矩阵形式给人以明确、简单的感觉，并且连乘时可直接写出矩阵的形式。如

$$q\circ p\circ M=\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

四元数乘法的几个特例：

（1）四元数和它的共轭四元数的乘积

$$q\circ q^*=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=\|q\| \tag{13}$$

对于规范化四元数 $\|q\|=1$，则 $q\circ q^*=1$ (14)

（2）具有零标量的四元数的乘积

$$q\circ p=\begin{pmatrix} 0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & 0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & 0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$=-(q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)+(q_2p_3-p_2q_3)\bar{i}+(p_1q_3-q_1p_3)\bar{j}+(p_2q_1-q_2p_1)\bar{k}$$

$$=-\bar{q}\cdot\bar{p}+\bar{q}\times\bar{p} \tag{15}$$

（3）$(q\circ p)^*=?$

设

$$M=q\circ p=\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3 \\ q_1p_0+q_0p_1-q_3p_2+q_2p_3 \\ q_2p_0+q_3p_1+q_0p_2-q_1p_3 \\ q_3p_0-q_2p_1+q_1p_2+q_0p_3 \end{pmatrix}$$

而

$$M^*=\begin{pmatrix} p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3 \\ -q_1p_0-q_0p_1+q_3p_2-q_2p_3 \\ -q_2p_0-q_3p_1-q_0p_2+q_1p_3 \\ -q_3p_0+q_2p_1-q_1p_2-q_0p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ -p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ -p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ -p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}=p^*\circ q^*$$

即

$$(q\circ p)^*=p^*\circ q^* \tag{16}$$

3. 四元数的除法

令

$$q^{-1}=q^*/|q| \tag{17}$$

对规范化四元数 $|q|=1$，则 $q^{-1}=q^*$ (18)

又

$$q\circ q^{-1}=q\circ q^*=1 \tag{19}$$

4. 四元数的微积分

设（$\bar{i}$、$\bar{j}$、$\bar{k}$）为惯性坐标系，则

$$\dot{q}=\dot{q}_0+\dot{q}_1\bar{i}+\dot{q}_2\bar{j}+\dot{q}_3\bar{k} \tag{20}$$

又 $M=p\circ q$，则 $\dot{M}=\dot{p}\circ q+p\circ\dot{q}$ （21）

5． 用四元数表示向量的旋转

如图3，设有一向量 $\bar{r}$ 绕轴 $\bar{N}$ 旋转 ϑ 角，得向量 $\bar{r}'$。研究用 $\bar{N}$、ϑ、$\bar{r}$ 来表示 $\bar{r}'$。

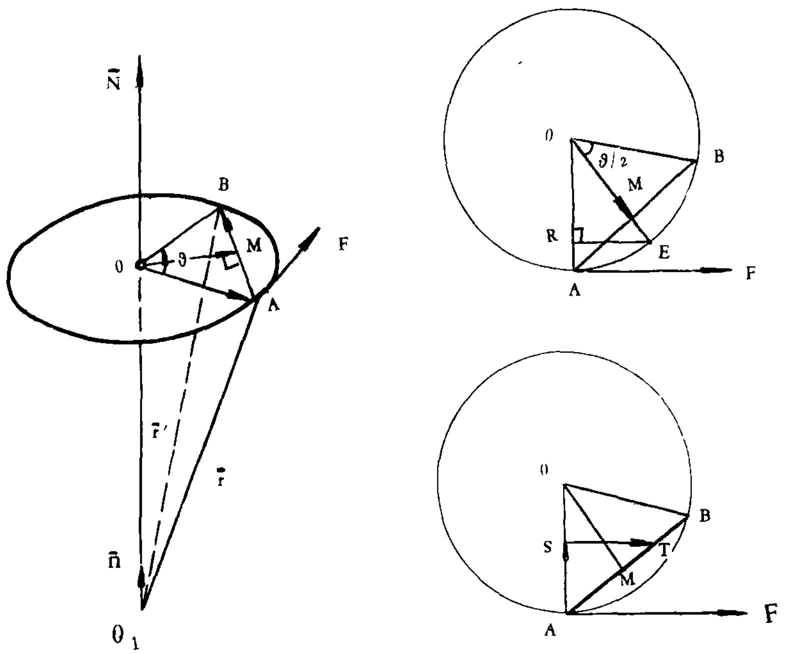

图3 用四元数表示向量的旋转

记 $\bar{n}$ 为 $\bar{N}$ 轴上的单位向量，根据矢量法则有：$\overline{AF}=\bar{n}\times\bar{r}$，$\overline{OA}=(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}$，

$$\bar{r}'=\overline{O_1O}+\overline{OM}+\overline{MB},\quad \overline{O_1O}=(\bar{n}\cdot\bar{r})\cdot\bar{n},$$

$$\overline{OM}=\overline{OE}\cos\frac{\vartheta}{2}=(\overline{OR}+\overline{RE})\cos\frac{\vartheta}{2}=\left(\overline{OA}\cos\frac{\vartheta}{2}+\overline{AF}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$=\left[(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}\cos\frac{\vartheta}{2}+(\bar{n}\times\bar{r})\sin\frac{\vartheta}{2}\right]\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\overline{MB}=\overline{AT}\sin\frac{\vartheta}{2}=(\overline{AS}+\overline{ST})\sin\frac{\vartheta}{2}=\left(-\overline{OA}\sin\frac{\vartheta}{2}+\overline{AF}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\frac{\vartheta}{2}$$

$$=\left[-(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}\sin\frac{\vartheta}{2}+(\bar{n}\times\bar{r})\cos\frac{\vartheta}{2}\right]\sin\frac{\vartheta}{2}$$

根据 $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})=(\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B}-(\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$

得

$$(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}=-\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{r})=-(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+\bar{r}$$

$$\bar{r}'=\overline{O_1O}+\overline{OM}+\overline{MB}$$

$$=(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}\cos^2\frac{\vartheta}{2}+(\bar{n}\times\bar{r})\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}-(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$+(\bar{n}\times\bar{r})\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$=(1-\cos\vartheta)(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+\cos\vartheta\cdot\bar{r}+\sin\vartheta(\bar{n}\times\bar{r}) \tag{22}$$

另一方面，令四元数$q=\cos\frac{\vartheta}{2}+\bar{n}\sin\frac{\vartheta}{2}$

$$q\circ\bar{r}\circ q^{*}=\left(\cos\frac{\vartheta}{2}+\bar{n}\ \sin\frac{\vartheta}{2}\right)\circ\bar{r}\circ\left(\cos\frac{\vartheta}{2}-\bar{n}\ \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$=\left[\cos\frac{\vartheta}{2}\bar{r}-\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\cdot\bar{r})+\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\times\bar{r})\right]\circ\left(\cos\frac{\vartheta}{2}-\bar{n}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$=-\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\cdot\bar{r})+\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+\cos\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\frac{\vartheta}{2}\bar{r}+\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\times\bar{r})\right]$$

$$+\sin\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\cdot\bar{r})+\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\times\bar{r})\cdot\bar{n}\right]-\sin\frac{\vartheta}{2}\left[\cos\frac{\vartheta}{2}(\bar{r}\times\bar{n})\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\times\bar{r})\times\bar{n}\right]$$

$$=2\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+\sin\vartheta(\bar{n}\times\bar{r})+\left(\cos^{2}\frac{\vartheta}{2}-\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}\right)\bar{r}$$

$$=(1-\cos\vartheta)(\bar{n}\cdot\bar{r})\bar{n}+\cos\vartheta\cdot\bar{r}+\sin\vartheta(\bar{n}\times\bar{r}) \tag{23}$$

比较（22)、(23）知，

$$\bar{r}'=q\circ\bar{r}\circ q^{*} \tag{24}$$

（24）式表示向量$\bar{r}$绕$\bar{N}$轴转ϑ角所得向量$\bar{r}'$的四元数表达式。反之，向量$\bar{r}'$绕负$\bar{N}$轴旋转ϑ角得$\bar{r}$。如令$p=\cos\frac{\vartheta}{2}-\bar{n}\sin\frac{\vartheta}{2}$，则$\bar{r}=p\circ\bar{r}'\circ p^{*}$。因为$p=q^{*}$，故

$$\bar{r}=q^{*}\circ\bar{r}'\circ q^{*} \tag{25}$$

我们现在来求坐标系转换的四元数表达式。如图 4，设坐标系（x、y、z）上的固定向量OA_0，当（x、y、z）转到（x_1、y_1、z）时，OA_0转到OA的位置。

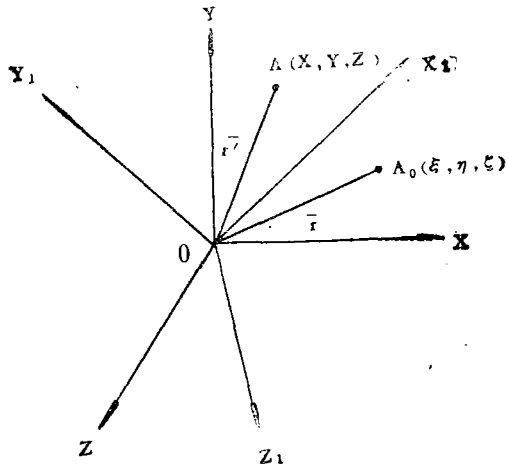

图 4　坐标系转换的四元数表达式

$$\bar{r}'=q\circ\bar{r}\circ q^*$$

根据四元数的乘法公式，

$$\begin{pmatrix}0\\r_1'\\r_2'\\r_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0&-q_1&-q_2&-q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&q_3&q_0&-q_1\\q_3&-q_2&q_1&q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-r_1&-r_2&-r_3\\r_1&0&-r_3&r_2\\r_2&r_3&0&-r_1\\r_3&-r_2&r_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\-q_1\\-q_2\\-q_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}r_1'\\r_2'\\r_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2&2(q_1q_2-q_0q_3)&2(q_1q_3+q_0q_2)\\2(q_1q_2+q_0q_3)&q_0^2+q_2^2-q_1^2-q_3^2&2(q_2q_3-q_0q_1)\\2(q_1q_3-q_0q_2)&2(q_2q_3+q_0q_1)&q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}$$

已知

$$\bar{r}'(r_1',r_2',r_3')=\overline{OA}(x,y,z)$$

$$\bar{r}(r_1,r_2,r_3)=\overline{OA}_0(\xi,\eta,\zeta)=\overline{OA}_0(x_1,y_1,z_1)$$

故

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2&2(q_1q_2-q_0q_3)&2(q_1q_3+q_0q_2)\\2(q_1q_2+q_0q_3)&q_0^2+q_2^2-q_1^2-q_3^2&2(q_2q_3-q_0q_1)\\2(q_1q_3-q_0q_2)&2(q_2q_3+q_0q_1)&q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\tag{26}$$

对于连续旋转

$$\bar{r}_1=q\circ\bar{r}\circ q^*$$

$$\bar{r}_2=p\circ\bar{r}_1\circ p^*$$

则

$$\bar{r}_2=p\circ q\circ\bar{r}\circ q^*\circ p^*$$

$$=M\circ\bar{r}\circ M^*$$

式中

$$M=p\circ q\tag{27}$$

注意：先转 q 再转 p，而 $M=p\circ q$，所以在欧拉转角中，$Q_\varphi\to Q_\psi\to Q_\gamma$，而

$$Q=Q_\gamma\circ Q_\psi\circ Q_\varphi\tag{28}$$

我们再看看四元数与欧拉角的关系。比较用四元数和用欧拉角表示的坐标转换公式可得：

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sin\varphi\cos\psi}{\cos\varphi\cos\psi}=\dfrac{2(q_1q_2+q_0q_3)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}\\\sin\psi=-2(q_1q_3-q_0q_2)\\\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\cos\psi\sin\gamma}{\cos\psi\cos\gamma}=\dfrac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2}\end{cases}\tag{29}$$

二、四元数的微分方程

1. 四元数的微分方程

已知

$$\bar{r}=\boldsymbol{A}\bar{r}_1\tag{30}$$

其中$\boldsymbol{A}$为坐标转换矩阵，即

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\tag{31}$$

微分，

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{z}_1\end{pmatrix}+\dot{A}\begin{pmatrix}x\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} \tag{32}$$

又根据刚体的运动学理论

$$\left.\frac{d\bar{r}}{dt}\right|_{\mathrm{I}}=\left.\frac{d\bar{r}_1}{dt}\right|_{\mathrm{T}}+\bar{\omega}\times\bar{r}_1\Big|_{\mathrm{T}} \tag{33}$$

其中，I 表示惯性坐标系，T 表示体坐标系，$\bar{\omega}$ 表示体坐标系相对惯性坐标系的旋转角速度向量。

$$\begin{aligned}\bar{\omega}\times\bar{r}_1&=(\omega_{x1}\bar{i}_1+\omega_{y1}\bar{j}_1+\omega_{z1}\bar{k}_1)\times(x_1\bar{i}_1+y_1\bar{j}_1+z_1\bar{k}_1)\\&=\begin{pmatrix}0&-\omega_{z1}&\omega_{y1}\\ \omega_{z1}&0&-\omega_{x1}\\ -\omega_{y1}&\omega_{x1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\Omega\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{34}$$

式中，

$$\Omega=\begin{pmatrix}0&-\omega_{z1}&\omega_{y1}\\ \omega_{z1}&0&-\omega_{x1}\\ -\omega_{y1}&\omega_{x1}&0\end{pmatrix} \tag{35}$$

将（33）式投影到体坐标系上去

$$A^{-1}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{z}_1\end{pmatrix}+\Omega\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{y}_1\\ \dot{z}_1\end{pmatrix}+A\Omega\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} \tag{36}$$

比较（32）和（36）得

$$A=A\Omega \tag{37}$$

即

$$\begin{pmatrix}\dot{a}_{11}&\dot{a}_{12}&\dot{a}_{13}\\ \dot{a}_{21}&\dot{a}_{22}&\dot{a}_{23}\\ \dot{a}_{31}&\dot{a}_{32}&\dot{a}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\omega_{z1}&\omega_{y1}\\ \omega_{z1}&0&-\omega_{x1}\\ -\omega_{y1}&\omega_{x1}&0\end{pmatrix}$$

将（26）代入（37）取 $\dot{a}_{11},\dot{a}_{22},\dot{a}_{33}$ 得

$$\begin{cases}q_0\dot{q}_0+q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_2-q_3\dot{q}_3=(q_1q_2-q_0q_3)\omega_{z1}-(q_1q_3+q_0q_2)\omega_{y1}\\ q_0\dot{q}_0+q_2\dot{q}_2-q_1\dot{q}_1-q_3\dot{q}_3=-(q_1q_2+q_0q_3)\omega_{z1}+(q_2q_3-q_0q_1)\omega_{x1}\\ q_0\dot{q}_0+q_3\dot{q}_3-q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_2=(q_1q_3-q_0q_2)\omega_{y1}-(q_2q_3+q_0q_1)\omega_{x1}\end{cases} \tag{38}$$

又因为 $q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$，故得

$$q_0\dot{q}_0+q_1\dot{q}_1+q_2\dot{q}_2+q_3\dot{q}_3=0 \tag{39}$$

（38）与（39）联立解得

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_0\\ \dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\omega_{x1}&-\omega_{y1}&-\omega_{z1}\\ \omega_{x1}&0&\omega_{z1}&-\omega_{y1}\\ \omega_{y1}&-\omega_{z1}&0&\omega_{x1}\\ \omega_{z1}&\omega_{y1}&-\omega_{x1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix} \tag{40}$$

即

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q\circ\Omega \tag{41}$$

2. 四元数微分方程的解

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q\circ\Omega$$

的解为

$$q(t_0+h)=q(t_0)\circ e^{\int_{t_0}^{t_0+h}\frac{1}{2}\Omega dt}$$

设

$$\Delta\theta=\int_{t_0}^{t_0+h}\Omega dt \tag{42}$$

则

$$q(t_0+h)=q(t_0)\circ e^{\frac{1}{2}\Delta\theta} \tag{43}$$

将$e^{\frac{1}{2}\Delta\theta}$展成级数形式

$$e^{\frac{1}{2}\Delta\theta}=1+\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^4+\cdots \tag{44}$$

设

$$\Delta\theta=\Delta\theta_{x1}\bar{i}+\Delta\theta_{y1}\bar{j}+\Delta\theta_{z1}\bar{k}$$

则

$$\begin{aligned}\Delta\theta\circ\Delta\theta&=(\Delta\theta_{x1}\bar{i}+\Delta\theta_{y1}\bar{j}+\Delta\theta_{z1}\bar{k})\circ(\Delta\theta_{x1}\bar{i}+\Delta\theta_{y1}\bar{j}+\Delta\theta_{z1}\bar{k})\\&=-\Delta\bar{\theta}\cdot\Delta\bar{\theta}+\Delta\bar{\theta}\times\Delta\bar{\theta}\\&=-(\Delta\theta_{x1}^2+\Delta\theta_{y1}^2+\Delta\theta_{z1}^2)\end{aligned}$$

设

$$\Delta\theta_0^2=\Delta\theta_{x1}^2+\Delta\theta_{y1}^2+\Delta\theta_{z1}^2$$

故

$$\Delta\theta\circ\Delta\theta=-\Delta\theta_0^2$$

同理

$$\Delta\theta\circ\Delta\theta\circ\Delta\theta=-\Delta\theta_0^2(\Delta\theta_{x1}\bar{i}+\Delta\theta_{y1}\bar{j}+\Delta\theta_{z1}\bar{k})$$

…………………………………………………

代入（44）式

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}\Delta\theta}=&1-\frac{1}{2!}\Delta\theta_0^2\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4!}\Delta\theta_0^4\frac{1}{2^4}-\frac{\Delta\theta_0^6}{6!}\frac{1}{2^6}+\cdots\\&+\Delta\theta_{x1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\Delta\theta_0^2\frac{1}{8}+\frac{1}{5!}\Delta\theta^4\frac{1}{2^5}-\cdots\right)\bar{i}\\&+\Delta\theta_{y1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\Delta\theta_0^2\frac{1}{8}+\frac{1}{5!}\Delta\theta^4\frac{1}{2^5}-\cdots\right)\bar{j}\\&+\Delta\theta_{z1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}\Delta\theta_0^2\frac{1}{8}+\frac{1}{5!}\Delta\theta^4\frac{1}{2^5}-\cdots\right)\bar{k}\end{aligned} \tag{45}$$

将（45）代入（43）并写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}_{t_0+h}=\begin{pmatrix}q_0&-q_1&-q_2&-q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&q_3&q_0&-q_1\\q_3&-q_2&q_1&q_0\end{pmatrix}_{t_0}\begin{pmatrix}1-\frac{\Delta\theta_0^2}{8}\\\Delta\theta_{x1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\theta_0^2}{48}\right)\\\Delta\theta_{y1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\theta_0^2}{48}\right)\\\Delta\theta_{z1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\theta_0^2}{48}\right)\end{pmatrix}_h \tag{46}$$

3. 四元数微分方程组解的初值

四元数微分方程组解的初值 $q(t_0)$ 要根据具体情况确定。假如 $t=0$ 时导弹是竖立在发射台上的（如图 5 所示），则

$$q(90^\circ+\Delta\varphi_0)=q(\varphi_0)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\varphi}{2}\\ 0\\ 0\\ \sin\dfrac{\varphi_0}{2}\end{pmatrix},\quad q(\psi_0)\doteq\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\psi_0}{2}\\ -\sin\dfrac{\psi_0}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$q(\gamma_0)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\gamma_0}{2}\\ 0\\ \sin\dfrac{\gamma_0}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

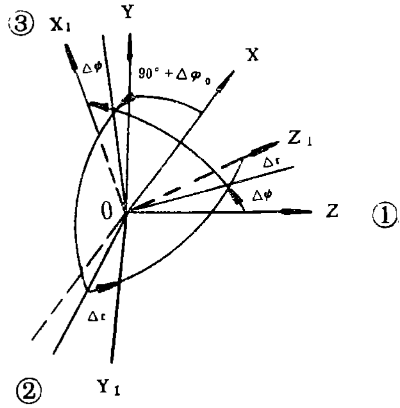

图 5　导弹初始位置时的四元数

$$q(t_0)=q(\gamma_0)\circ q(\psi_0)\circ q(\varphi_0)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\gamma_0}{2}\cos\dfrac{\psi_0}{2}\cos\dfrac{\varphi_0}{2}-\sin\dfrac{\gamma_0}{2}\sin\dfrac{\psi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_0}{2}\\ -\cos\dfrac{\gamma_0}{2}\sin\dfrac{\psi_0}{2}\cos\dfrac{\varphi_0}{2}+\sin\dfrac{\gamma_0}{2}\cos\dfrac{\psi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_0}{2}\\ \sin\dfrac{\gamma_0}{2}\cos\dfrac{\psi_0}{2}\cos\dfrac{\varphi_0}{2}+\cos\dfrac{\gamma_0}{2}\sin\dfrac{\psi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_0}{2}\\ \sin\dfrac{\gamma_0}{2}\sin\dfrac{\psi_0}{2}\cos\dfrac{\varphi_0}{2}+\cos\dfrac{\gamma_0}{2}\cos\dfrac{\psi_0}{2}\sin\dfrac{\varphi_0}{2}\end{pmatrix}\qquad(47)$$

三、四元数在导弹控制系统中的应用

欧拉定理表明从一个坐标系转到另一个坐标系，可以通过绕空间某一瞬时轴转一个角度来实现。我们的控制问题就是要将飞行器的实际位置控制到指令位置上去。设飞行器绕空间瞬时轴 $\bar{E}$ 转动 ϕ 角实现控制，我们称 E 轴为最佳旋转轴。以 $\phi\bar{E}$ 为误差信号，分解到弹体坐标系的 ox_1，oy_1，oz_1 上去，即

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x1}&=E_{x1}\phi\\ \varepsilon_{y1}&=E_{y1}\phi\\ \varepsilon_{z1}&=E_{z1}\phi\end{aligned}\qquad(48)$$

形成沿弹体坐标系各轴的误差信号，通过姿态控制系统的控制实现。

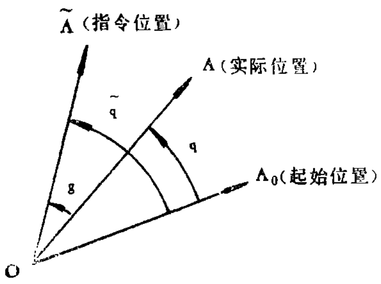

图 6　求取最佳旋转的四元数

我们来求取最佳旋转的四元数，如图 6 所示：

$$\overline{OA}=\tilde{q}\circ\overline{OA_0}\circ\tilde{q}^*$$

$$\tilde{q}=\cos\frac{\vartheta}{2}+\bar{n}\sin\frac{\vartheta}{2}$$

对于某种导弹，指令位置的四元数可写成如下形式：

$$\tilde{q}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2}\\0\\0\\-\sin\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}$$

其中 $\vartheta=\frac{\pi}{2}-\bar{\varphi}_{cx}(t)$，$\varphi_{cx}(t)$ 为导弹的飞行俯仰程序

导弹纵轴的实际位置为 OA

$$\overline{OA}=q\circ\overline{OA}\circ q^*$$

q 通过实时解四元数微分方程式算出。

现在我们要求将 OA 转到指令位置所需的四元数 g，已知 $\tilde{q}=g\circ q$

故 $$g=\tilde{q}\circ q^*$$

$$=\begin{pmatrix}q_0&q_1&q_2&q_3\\-q_1&q_0&q_3&-q_2\\-q_2&-q_3&q_0&q_1\\-q_3&q_2&-q_1&q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{q}_0\\\tilde{q}_1\\\tilde{q}_2\\\tilde{q}_3\end{pmatrix}\tag{49}$$

$$\begin{pmatrix}g_0\\g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_0\tilde{q}_0+q_1\tilde{q}_1+q_2\tilde{q}_2+q_3\tilde{q}_3\\-q_1\tilde{q}_0+q_0\tilde{q}_1+q_3\tilde{q}_2-q_2\tilde{q}_3\\-q_2\tilde{q}_0-q_3\tilde{q}_1+q_0\tilde{q}_2+q_1\tilde{q}_3\\-q_3\tilde{q}_0+q_2\tilde{q}_1-q_1\tilde{q}_2+q_0\tilde{q}_3\end{pmatrix}\tag{50}$$

对于主动段只有俯仰程序指令的情况

$$\begin{aligned}g_0&=\quad q_0\cos\frac{\vartheta}{2}-q_3\sin\frac{\vartheta}{2}\\g_1&=-q_1\cos\frac{\vartheta}{2}+q_2\sin\frac{\vartheta}{2}\\g_2&=-q_2\cos\frac{\vartheta}{2}-q_1\sin\frac{\vartheta}{2}\\g_3&=-q_3\cos\frac{\vartheta}{2}-q_0\sin\frac{\vartheta}{2}\end{aligned}\tag{51}$$

误差控制信号

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=E_x\phi\\\varepsilon_y&=E_y\phi\\\varepsilon_z&=E_z\phi\end{aligned}$$

又

$$g=g_0+g_1\bar{i}+g_2\bar{j}+g_3\bar{k}=\cos\frac{\phi}{2}+\bar{E}\sin\frac{\phi}{2}$$

$$=\cos\frac{\phi}{2}+E_x\sin\frac{\phi}{2}\bar{i}+E_y\sin\frac{\phi}{2}\bar{j}+E_z\sin\frac{\phi}{2}\bar{k}$$

即

$$\begin{aligned} g_0 &= \cos\frac{\phi}{2} \\ g_1 &= E_x \sin\frac{\phi}{2} \doteq E_x\frac{\phi}{2} \\ g_2 &= E_y \sin\frac{\phi}{2} \doteq E_y\frac{\phi}{2} \\ g_3 &= E_z \sin\frac{\phi}{2} \doteq E_z\frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{52}$$

比较（48）与（52）得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 2g_1 \\ \varepsilon_y &= 2g_2 \\ \varepsilon_z &= 2g_3 \end{aligned} \tag{53}$$

但实际控制力矩只能施加在弹体轴 $x_1y_1z_1$ 上，因此需将 ε_x、ε_y、ε_z 转换为 ε_{x1}、ε_{y1}、ε_{z1}。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y_1} \\ \varepsilon_{z1} \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{54}$$

〔例〕对子弹头加一偏航程序，我们来分析一下控制信号的形成

如图7所示，指令位置 x_cz_c

$$\tilde{q} = (\cos\alpha \quad 0 \quad \sin\alpha \quad 0)$$

实际位置

$$q = (\cos\beta \quad 0 \quad \sin\beta \quad 0)$$

根据（50）式

$g_0 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) \cong 1$

$g_2 = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta) \cong \alpha-\beta$

$g_1 = g_3 = 0$

即

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\alpha-\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

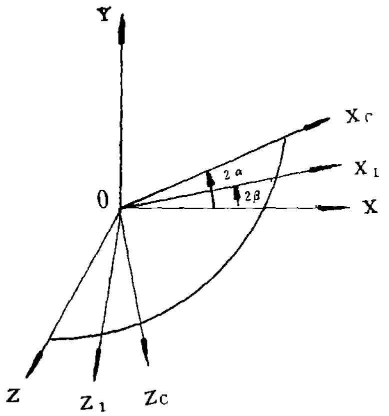

图7　子弹头加偏航程序的控制信号

由图也可知

$$\varepsilon_{y_1} = \varepsilon_y = 2(\alpha-\beta)$$

参　考　文　献

[1] Bortz, J. A New Concept in Strapdown Inertial Navigation , NASA TRR-329, March 1970.

[2] Andrew Edwards, Jr. The State of Strapdown Inertial Guidance and Navigation, Navigation, Winter 1971, Vol.18, No.4.