

四元数法在空空导弹六自由度数学模型建立中的应用

张 焱 王锡泉

(航空工业总公司第〇一四中心 洛阳, 471009)

摘 要: 四元数法是研究空间几何问题的一种简便方法, 本文以空空导弹的六自由度数学模型为基础, 讨论了四元数法在建立其运动学方程中的应用, 通过仿真计算比较了四元数方程相对于通常定义的欧拉运动学方程的优越性, 说明了四元数法将使导弹数学模型的研究进一步趋于完善。

关键词: 四元数 导弹 六自由度数学模型

四元数法是类似于解决平面问题的复数形式的一种研究空间几何问题的简便方法。将四元数用于定位, 就既代表一个实际转动, 又是一个变换算子, 因此它为解决刚体运动学、导航姿态、空间机构等问题, 提供了一种方便的工具。本文在常用的导弹六自由度数学模型的基础上, 以四元数微分方程代替其欧拉运动学方程, 研究了四元数法在导弹六自由度数学模型建立中的应用。

1 弹体坐标系与地面坐标系间转换的四元数微分方程

由地面坐标系向弹体坐标系转换的四元数为

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 \quad (1.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \cos(\psi/2) \cos(\nu/2) \cos(\gamma/2) \\ &\quad + \sin(\psi/2) \sin(\nu/2) \sin(\gamma/2) \\ \lambda_1 &= \cos(\psi/2) \cos(\nu/2) \sin(\gamma/2) \\ &\quad + \sin(\psi/2) \sin(\nu/2) \cos(\gamma/2) \\ \lambda_2 &= \sin(\psi/2) \cos(\nu/2) \cos(\gamma/2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \cos(\psi/2) \sin(\nu/2) \sin(\gamma/2) \\ \lambda_3 &= -\sin(\psi/2) \cos(\nu/2) \sin(\gamma/2) \\ &+ \cos(\psi/2) \sin(\nu/2) \cos(\gamma/2) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

这里, ψ —— 导弹偏航角;

ν —— 导弹俯仰角;

γ —— 导弹滚动角。

弹体相对于地面坐标系的旋转角速度矢量 $\vec{\omega}_m$ 在弹体坐标系三轴上的投影分别为 $\omega_{mX}, \omega_{mY}, \omega_{mZ}$ 即

$$\omega_m = 0 + \omega_{mX} i_1 + \omega_{mY} i_2 + \omega_{mZ} i_3 \quad (1.3)$$

根据四元数微分方程的形式, 应有

$$2 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{mX} \\ \omega_{mY} \\ \omega_{mZ} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= (-\omega_{mX} \lambda_1 - \omega_{mY} \lambda_2 - \omega_{mZ} \lambda_3) / 2 \\ \dot{\lambda}_1 &= (\omega_{mX} \lambda_0 - \omega_{mY} \lambda_3 + \omega_{mZ} \lambda_2) / 2 \\ \dot{\lambda}_2 &= (\omega_{mX} \lambda_3 + \omega_{mY} \lambda_0 - \omega_{mZ} \lambda_1) / 2 \\ \dot{\lambda}_3 &= (-\omega_{mX} \lambda_2 + \omega_{mY} \lambda_1 - \omega_{mZ} \lambda_0) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

收稿日期: 1994-01-03

2 速度坐标系和准地面坐标系间转换的四元数微分方程

由准地面坐标系向速度坐标系转换的四元数为

$$M = \mu_0 + \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3 \quad (2.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \cos(\psi_m/2) \cos(\theta_m/2) \cos(\gamma_m/2) \\ &\quad - \sin(\psi_m/2) \sin(\theta_m/2) \sin(\gamma_m/2) \\ \mu_1 &= \cos(\psi_m/2) \cos(\theta_m/2) \sin(\gamma_m/2) \\ &\quad + \sin(\psi_m/2) \sin(\theta_m/2) \cos(\gamma_m/2) \\ \mu_2 &= \sin(\psi_m/2) \cos(\theta_m/2) \cos(\gamma_m/2) \\ &\quad + \cos(\psi_m/2) \sin(\theta_m/2) \sin(\gamma_m/2) \\ \mu_3 &= -\sin(\psi_m/2) \cos(\theta_m/2) \sin(\gamma_m/2) \\ &\quad + \cos(\psi_m/2) \sin(\theta_m/2) \cos(\gamma_m/2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里, ψ_m ——弹道偏角;

θ_m ——弹道倾角;

γ_m ——弹道倾斜角。

与弹体坐标系类似, 设 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 为速度坐标系相对于地面坐标系的旋转角速度矢量 $\vec{\omega}$ 在速度坐标系三轴上的分量, 即

$$\omega = 0 + \omega_x i_1 + \omega_y i_2 + \omega_z i_3 \quad (2.3)$$

则速度坐标系与地面坐标系间转换的四元数微分方程为

$$2 \begin{bmatrix} \dot{\mu}_0 \\ \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\mu}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_0 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 & -\mu_1 \\ \mu_3 & -\mu_2 & \mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu}_0 &= (-\omega_x \mu_1 - \omega_y \mu_2 - \omega_z \mu_3)/2 \\ \dot{\mu}_1 &= (\omega_x \mu_0 - \omega_y \mu_3 + \omega_z \mu_2)/2 \\ \dot{\mu}_2 &= (\omega_x \mu_3 + \omega_y \mu_0 - \omega_z \mu_1)/2 \\ \dot{\mu}_3 &= (-\omega_x \mu_2 + \omega_y \mu_1 + \omega_z \mu_0)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

3 用四元数法描述导弹的运动学方程

用四元数法可以通过解四元数微分方程组的方法计算出转换矩阵, 从而方便地求出

导弹姿态角 ψ, θ, γ 和速度方位角 $\psi_m, \theta_m, \gamma_m$ 。再通过弹体坐标系与速度坐标系的相对位置关系, 求出攻角 α 和侧滑角 β 。

3.1 求弹体坐标系向地面坐标系的转换矩阵 C_m^*

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= (-\omega_{mx} \lambda_1 - \omega_{my} \lambda_2 - \omega_{mz} \lambda_3)/2 \\ \dot{\lambda}_1 &= (\omega_{mx} \lambda_0 - \omega_{my} \lambda_3 - \omega_{mz} \lambda_2)/2 \\ \dot{\lambda}_2 &= (\omega_{mx} \lambda_3 + \omega_{my} \lambda_0 - \omega_{mz} \lambda_1)/2 \\ \dot{\lambda}_3 &= (-\omega_{mx} \lambda_2 + \omega_{my} \lambda_1 - \omega_{mz} \lambda_0)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$C_m^* = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ A_2 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) \\ A_3 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ B_1 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) \\ B_2 &= \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ B_3 &= 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ C_1 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) \\ C_2 &= 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ C_3 &= (\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

3.2 求导弹姿态角 ψ, θ, γ

$$\psi = -\text{tg}^{-1}(C_1/A_1) \quad (3.4)$$

$$\text{若 } A_1 = 0, \quad \psi = \begin{cases} -90^\circ & C_1 \geq 0 \\ 90^\circ & C_1 < 0 \end{cases}$$

$$\theta = \sin^{-1}(B_1) \quad (3.5)$$

$$\gamma = -\text{tg}^{-1}(B_3/B_2) \quad (3.6)$$

$$\text{若 } B_2 = 0, \quad \gamma = \begin{cases} -90^\circ & B_3 \geq 0 \\ 90^\circ & B_3 < 0 \end{cases}$$

3.3 求速度坐标系向地面坐标系的转换矩阵 D_m^*

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu}_0 &= (-\omega_x \mu_1 - \omega_y \mu_2 - \omega_z \mu_3)/2 \\ \dot{\mu}_1 &= (\omega_x \mu_0 - \omega_y \mu_3 + \omega_z \mu_2)/2 \\ \dot{\mu}_2 &= (\omega_x \mu_3 + \omega_y \mu_0 - \omega_z \mu_1)/2 \\ \dot{\mu}_3 &= (-\omega_x \mu_2 + \omega_y \mu_1 + \omega_z \mu_0)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$D_m^a = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \\ C'_1 & C'_2 & C'_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} A'_1 &= \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 \\ A'_2 &= 2(\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_3) \\ A'_3 &= 2(\mu_1\mu_3 + \mu_0\mu_2) \\ B'_1 &= 2(\mu_1\mu_2 + \mu_0\mu_3) \\ B'_2 &= \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2 \\ B'_3 &= 2(\mu_2\mu_3 - \mu_0\mu_1) \\ C'_1 &= 2(\mu_1\mu_3 - \mu_0\mu_2) \\ C'_2 &= 2(\mu_2\mu_3 + \mu_0\mu_1) \\ C'_3 &= \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.4 求速度方位角 $\psi_m, \theta_m, \gamma_m$

$$\psi_m = -\text{tg}^{-1}(C'_1/A'_1) \quad (3.10)$$

$$\text{若 } A'_1=0, \quad \psi_m = \begin{cases} -90^\circ & C'_1 \geq 0 \\ 90^\circ & C'_1 < 0 \end{cases}$$

$$\theta_m = \sin^{-1}(B'_1) \quad (3.11)$$

$$\gamma_m = -\text{tg}^{-1}(B'_3/B'_2) \quad (3.12)$$

$$\text{若 } B'_2=0, \quad \gamma_m = \begin{cases} -90^\circ & B'_3 \geq 0 \\ 90^\circ & B'_3 < 0 \end{cases}$$

3.5 求攻角 α 和侧滑角 β

利用导弹速度 \vec{V}_m 在地面坐标系、弹体坐标系和速度坐标系上投影之间的关系,可得到 α 和 β 。

设导弹速度 \vec{V}_m 在地面坐标系三轴上的分量为 X_m, Y_m, Z_m ; 在弹体坐标系三轴上的分量为 V_{x1}, V_{y1}, V_{z1} , 应有

$$\begin{aligned} X_m &= V_m \cos \theta_m \cos \psi_m \\ Y_m &= V_m \sin \theta_m \\ Z_m &= -V_m \cos \theta_m \sin \psi_m \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{bmatrix} &= [C_m^a]^{-1} \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 X_m + B_1 Y_m + C_1 Z_m \\ A_2 X_m + B_2 Y_m + C_2 Z_m \\ A_3 X_m + B_3 Y_m + C_3 Z_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

因此

$$\alpha = -\text{tg}^{-1}(V_{y1}/V_{x1}) \quad (3.15)$$

$$\text{若 } V_{x1}=0, \quad \alpha = \begin{cases} -90^\circ & V_{y1} \geq 0 \\ 90^\circ & V_{y1} < 0 \end{cases}$$

$$\beta = \text{tg}^{-1}(V_{x1} \cos \alpha / V_{z1}) \quad (3.16)$$

$$\text{若 } V_{z1}=0, \quad \beta = \begin{cases} -90^\circ & V_{x1} \geq 0 \\ 90^\circ & V_{x1} < 0 \end{cases}$$

式(3.1)~式(3.16)即为我们所求的四元数微分方程组。数字仿真时,用该方程组代替六自由度数学模型中的导弹运动学方程,其它各部分(包括位标器部分,舵机部分,相对运动学部分)都与原模型相同。

4 四元数法的优越性

a. 将四元数法用于定位,它既代表一个实际转动,又是一个变换算子,是解决空间刚体运动问题的一种方便工具。

b. 与欧拉运动学方程不同,四元数法建立的运动学方程是一组非奇异的线性微分方程,没有奇点,原则上总是可解的;而欧拉运动学方程有奇点。

c. 与方向余弦矩阵微分方程相比,四元数微分方程数目少,运用四元数进行运算,可以单值地给出正交变换矩阵。同时,由于微分方程数目减少,相应地减小了由于积分带来的累积误差,同时减少了计算时间。

d. 四元数法在计算时,存贮信息量少,这是因为确定运动系相对于参考系的方位变化时,或确定两个坐标系的相对方位时,四元数微分方程只需解四个一阶微分方程即可。

e. 导弹从一个初始位置到达所要求位置的转动,可以通过一系列的有限转动达到,而总的转动四元数等于各次转动四元数的乘积。这些乘积用四元数矩阵表示时具有简明的形式,利用四元数相乘形式的可易性,可使变化快的分转动隔离出来。

5 结 论

用四元数法描述的导弹运动学方程组解

决了原数学模型中超越方程组的问题。与我们通常建立导弹运动学方程的方法不同,用四元数法建立方程组分别是速度坐标系和弹体坐标系出发,建立它们与准地面坐标系之间的四元数微分方程,通过对四元数微分

方程的求解,求出导弹的姿态角 ψ, ν, γ 和速度方位角 $\psi_m, \theta_m, \gamma_m$,然后再根据这两个坐标系之间的转换关系,利用速度矢量 \vec{V}_m 在各坐标系上投影的不同表示形式求出攻角 α 和侧滑角 β 。这一计算过程由图 1 给出。

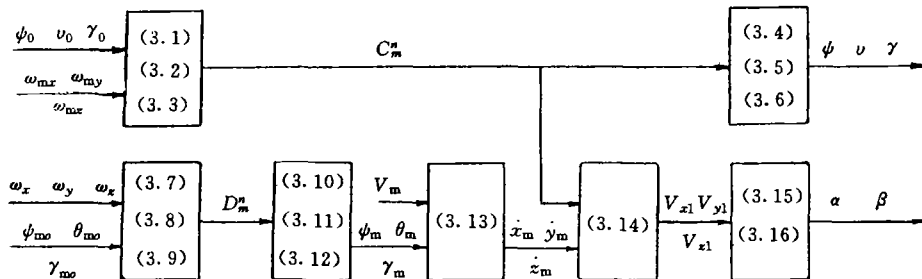


图 1 四元数法建立导弹运动学方程的框图

可见,由四元数法建立导弹运动学方程组,是通过两条独立的路线分别计算出 ψ, ν, γ 和 $\psi_m, \theta_m, \gamma_m$,再经过一组代数运算求出 α 和 β 。这样,它的计算层次清晰,很好地体现了三个坐标系间的转换关系。

通过仿真计算,比较其计算结果(包括参数曲线)可知,用四元数微分方程组可以很好地代替原模型中对应的欧拉运动学方程,证明了四元数法在导弹六自由度数学模型建模中应用的可行性。同时,四元数法具有欧拉运动学方程所没有的优越性,它的应用将使对导弹六自由度模型的研究进一步趋于完善。

参 考 文 献

- [1] B. H. 勃拉涅茨等,四元数在刚体定位中的应用,国防工业出版社,1977. 8.
- [2] 以光衢,陀螺理论与应用,北京航空航天大学出版社,1990. 11.
- [3] C. Hecht, Homing Guidance Using Angular Acceleration of the Line of Sight, AIAA Guidance Navigation and Control Conference, Vol. 2, 1991, pp. 856—869.
- [4] G. Malagoli, Mathematical Model of Aspidic Missiles, 1989. 4.

简 短 消 息

●以色列的箭式(Arrow)反弹道导弹,在上次试验失败后再次遭到严重挫折。这次是第六次试验,由于作为靶弹的箭式导弹发射后空然出现故障,而停止了拦截导弹的发射。7月14日的这次试验是在一艘作为发射平台的舰艇上进行的,原计划的发射是用来拦截携带模拟化学战斗部的另一枚箭式导弹的。这种箭式反弹道导弹由以色列飞机工业公司(IAI)研制,美国为此项计划提70%的资金。上次试验是在2月进行的,箭式导弹在距目标50米处飞过,IAI官员将此次试验称为“一次成功的拦截”。上

次试验和以后的十次试验是整个计划第二阶段的一部分。这一阶段预计为45个月,目的在于减小尺寸使洛克希德的C-130飞机可以携带。

●美国空军的F-16战斗机,由于挂载AIM-120A进行飞行试验时出现严重振动,而停止挂载这种导弹。试验人员查明,4~5Hz的振动是由挂在翼尖上的导弹引起的,并被飞行控制系统所加剧,后者对来自飞机速率陀螺的输入反应过强。振动问题影响了F-16战斗机的第40批改型。要通过改进飞行控制系统来克服振动问题,减小该系统的滚动增益将是一种较好的方案。

(成 之根据《国外战术导弹动态》

1994年第3、4期选编)