基于四元数法的空空导弹数学模型建模研究

张义飞 姜殿民
（中国空空导弹研究院，河南 洛阳 471000）

【摘 要】空空导弹的运动方程通常用一组基于欧拉角的微分方程来表示，但欧拉角方程有时具有奇异性，会使得微分方程不可求解，而采用四元数法则可以有效克服这一问题。本文以现有基于欧拉角的空空导弹六自由度数学模型为基础，用导弹各个坐标系之间的转换关系以及四元数来表示刚体的平移和转动，把已知的欧拉角导弹模型转换为四元数导弹模型。以样例导弹为对象，分别将欧拉角模型和四元数法模型在Matlab环境下进行了仿真，结果表明四元数法模型与欧拉角模型的仿真结果一致，并且四元数法模型具有更快的运行速度。

【关键词】空对空导弹；四元数；数学模型；建模

Study of Air-to-air Missile Modeling Based on Quaternion Method

ZHANG Yi-fei JIANG Dian-min
(CHINA AIRBORNE MISSILE ACADEMY, Luoyang Henan, 471000)

【Abstract】The equation of motion of air-to-air missile is usually represented by a set of differential equations of Euler angles. Euler angle has a singularity equations, differential equations can not be solved sometimes, while the use of quaternion can overcome this problem. In this paper, the Euler angles of the existing missile 6dof mathematical model is used to convert between various coordinate systems and missile quaternion to represent the translational and rotational rigid body, the missile model of Euler angles can be converted to quaternion missile model. To an sample missile model, the Euler angle mode and quaternion model were both simulated in matlab environment, simulation results show that the quaternion model and the Euler angle model have the same outputs and quaternion model with faster speed.

【Key words】Air-to-air missile;Quaternion;Mathematical model;Modeling

0 引言

在空空导弹的飞行动力学与运动学方程组中，会用到与欧拉角有关的方程，这种常规表示方法在大多数情况下是可行的。但在研究飞机空间机动飞行或导弹垂直发射时，有可能出现俯仰角或迎角到达九十度的情形，这时就可能出现方程组无法求解的现象，这就是欧拉角方程的奇异性[1]。为解决这种奇异性，采用四元数来代替欧拉角，可以取得良好的效果。

四元数的数学概念是1843年由哈密顿在爱尔兰提出的，可以用来表示三维物体的旋转及方位[2]。研究表明，四元数转换组合比很多矩阵转换组合在数学上更为稳定[3]。四元数是由一个标量和一个矢量构成的超复数，具有实数和复数的双重性质，综合了实数和复数的运算功能。它作为用于定位的参数，既可确定刚体的位置，又可确定刚体的姿态，还可同时确定刚体的位姿。它作为用于变换的算子，既可构成单边算子，又可构成双边算子；对于每一种变换算子，都即可用半角又能用全角，而又都可以构成可逆的矩阵算子。

四元数已经成功的用于位置和姿态的变换和计算，并被用来解决运动学和动力学的控制和分析问题；四元数可作为理想的控制信号，容易得到刚体角运动的稳定控制，并且在大多数情况下都能得到十分接近于理想情况的控制。目前，四元数的应用已经从单个刚体扩展到多个刚体的系统，并正在向柔性多体系统逐渐发展，涉及到现代科技中的许多重要领域[4-5]。

1 四元数法概述

四元数Q定义为[6]：

$$Q=q_0+q_1\bar{i}+q_2\bar{j}+q_3\bar{k} \tag{1}$$

这是包含四个元素的超复数（对于导弹来说，i,j,k 应取得与弹体坐标系相一致），其中 i,j,k 是虚单位，服从以下运算规则：

$ii=jj=kk=-1$

$ij=-ji,jk=-kj,ki=-ik$

$ij=k,jk=i,ki=j$

由此可见，对于四元数而言，乘法的分配律仍然成立：

$Q_1(Q_2+Q_3)=Q_1Q_2+Q_1Q_3$

但交换律不成立：

$Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$

式(1)用三角形式表示可写成：

$$Q=|Q|\left(\cos\frac{\theta}{2}+\bar{E}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{2}$$

其中

$$|Q|=\left(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^{1/2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^{1/2}}{|Q|}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{q_0}{|Q|}$$

当 $|Q|=1$ 时，式(2)可表示成规范化的四元数：

$$Q=\cos\frac{\theta}{2}+\bar{E}\sin\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

2 导弹四元数模型

空空导弹弹体的运动，可看成弹体质心的移动和绕质心的转动的合成运动，可以用动量矩定律和牛顿定理来研究分析。但是导弹弹体并不是一个刚体，它受到气动力作用后要产生形变，舵面的偏转也会改变导弹的外形，由于发动机开始工作，燃料开始不断消耗，导弹的质量也就随之不断减少。所以导弹的运动分析要比刚体的运动复杂许多，为了能使问题得到简化，在此略去导弹形变，质量变化等复杂因素，引入“瞬时固化原理”，把导弹当作质量恒定不变的非形变物体，转动惯量是恒定不变的，推力和重力作为外力。在空空导弹非线性模型中，与欧拉角相关的方程组为动力学三个方程和运动学三个方程。

已知飞行动力学欧拉角方程为：

$$\frac{d\theta}{dt}=w_y\sin\gamma+w_z\cos\gamma$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=w_x-\tan\theta(w_y\cos\gamma-w_z\sin\gamma)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=(w_y\cos\gamma-w_z\sin\gamma)/\cos\theta$$

式中 ϑ,γ,ψ 为导弹姿态角；$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为转动角速度。导弹的角速度是在弹体坐标系上测得的：

$$\dot{Q}=Q\bar{\omega}^E/2$$

$$\vec{w}^E=\dot{\psi}+\dot{\theta}+\dot{\gamma}$$

可得：

$$\dot{Q}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2\\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1\\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ w_x\\ w_y\\ w_z\end{bmatrix}$$

推出四元数表示导弹的运动学方程为：

$$\dot{q}_0=\frac{1}{2}(-q_1w_x-q_2w_y-q_3w_z)$$

作者简介：张义飞，32，信息处理专业。

$$\dot{q}_1=\frac{1}{2}(q_0w_x-q_3w_y+q_2w_z)$$

$$\dot{q}_2=\frac{1}{2}(q_3w_x+q_0w_y-q_1w_z)$$

$$\dot{q}_3=\frac{1}{2}(-q_2w_x+q_1w_y+q_0w_z) \qquad (4)$$

根据导弹弹体坐标系与地面坐标系之间的关系，可确定导弹的飞行姿态。弹体坐标系与地面坐标系之间的变换矩阵，可通过将地面坐标系绕坐标轴 oy 旋转 ψ 角，获得过渡坐标系 $ox'yz$，然后绕 oz 旋转 ϑ 角，获得过渡坐标系 $ox_1y'z'$，再绕 ox_1 旋转角 γ 即得到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$。三次旋转获得三个初等变换矩阵，这三个初等旋转矩阵的积，就是变换矩阵：

$$A_1=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$A=A_3A_2A_1=$$

$$\begin{bmatrix}\cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi\\ -\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi & \cos\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi+\sin\gamma\cos\psi\\ \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi+\cos\gamma\sin\psi & -\sin\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi+\cos\gamma\cos\psi\end{bmatrix} \qquad (5)$$

式(4)应与下式所用的四元数法转换矩阵相等，

$$A(q)=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2)\\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3+q_0q_1)\\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}$$

比较对应项可得：

$$\sin\theta=2(q_1q_2+q_0q_3)$$

$$tg\psi=-\frac{2(q_1q_3-q_0q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}$$

$$tg\gamma=-\frac{2(q_2q_3-q_0q_1)}{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2} \qquad (6)$$

可以把(4)式和式(6)式取代原导弹运动方程组中用欧拉角参数描述的旋转运动方程和角度关系，即得用四元数表示的导弹旋转运动方程组。

已知飞行运动学欧拉方程

$$\frac{dAlt}{dt}=V_x\sin\vartheta+V_y\cos\vartheta\cos\gamma-V_z\cos\vartheta\sin\gamma$$

$$\frac{dLon}{dt}=V_x\cos\psi\cos\vartheta+V_y(\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma)+V_z(\sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma)$$

$$\frac{dLat}{dt}=-V_x\sin\psi\cos\vartheta+V_y(\cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma)$$

$$+V_z(\cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma)$$

同样依据弹体坐标系与地面坐标系之间的变换矩阵，比较对应项可得：

$$\frac{dAlt}{dt}=2(q_1q_2+q_0q_3)V_x+(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)V_y+2(q_2q_3-q_0q_1)V_z$$

$$\frac{dLon}{dt}=(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2)V_x+2(q_1q_3+q_0q_2)V_y+2(q_1q_3+q_0q_2)V_z$$

$$\frac{dLat}{dt}=2(q_1q_3-q_0q_2)V_x+2(q_2q_3+q_0q_1)V_y+(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2)V_z$$

同时 $-mg\sin\vartheta$，$-mg\cos\vartheta\cos\gamma$，$mg\cos\vartheta\sin\gamma$ 三项可分别表示为：

$$-2(q_1q_2+q_0q_3)mg,\ -(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2)mg,\ -2(q_2q_3-q_0q_1)mg$$

至此完成了六个欧拉角微分方程向四元数模型的转换。

3　仿真结果与分析

针对样例导弹，以 Matlab S-function 为开发环境，分别采用欧拉角和四元数法建立了六自由度非线性微分方程。针对典型状态进行了开环仿真以验证四元数法模型的正确性和解算性能。Simulink 仿真结构图如图 1 所示。

图 2 给出了两种模型姿态角仿真结果。

由图 2 可见，两个模型的各三个姿态角两两重合，仿真结果完全一致。局部放大图如图 3 所示。

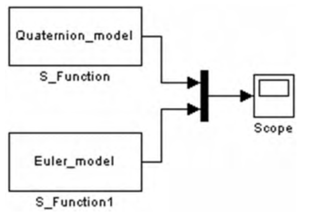

图 1　simulink 仿真结构

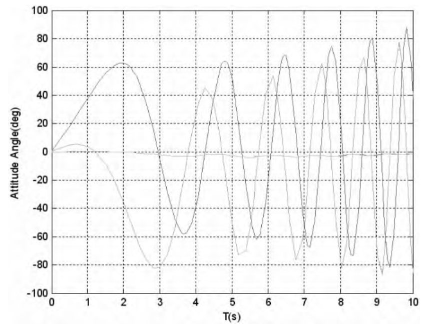

图 2　姿态角仿真对比

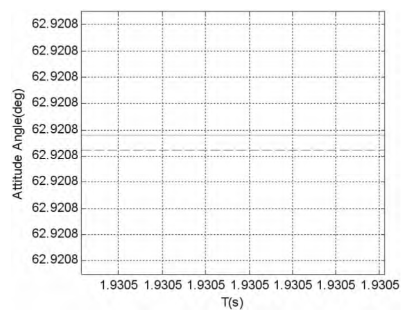

图 3　姿态角局部放大图

由图 3 可见两个模型的计算误差极小，在导弹的仿真中可以忽略不计。导弹空间位置曲线也有相同的结果，这里不再列出。由上述结果可见，两种模型的仿真结果是相同的，四元数法模型完全可以取代传统的欧拉角模型。

为了比较两种模型的运行速度，同时在 Matlab 中输入 tic;sim Quaternion_model;toc 和 tic;sim Euler_model;toc;两条语句，可在 Matlab 中显示出实际计算机所使用的仿真时间。输出结果分别为：

Quaternion_model：

Elapsed time is 0.118274 seconds.

Euler_model：

Elapsed time is 0.173183 seconds.

可见四元数模型的计算速度在相同条件下要快于欧拉角模型。

4　结论

本文以空空导弹为对象，研究了传统的欧拉角数学模型到四元数模型的转换。仿真结果表明四元数法模型与欧拉角模型的输出结果一致，误差可忽略，并且四元数模型具有更快的运行速度，因此四元数法导弹模型可以代替欧拉角模型。同时，物理量的直观性不够是四元数模型的主要不足之处。

【参考文献】

[1]赵孟.基于条件选择四元数球线性插值方程的关键帧插值算法[J].工业控制计算机，2013，26(01)：65-68.

[2]朱士青.导弹控制系统仿真中的四元数初值探讨[J].上海航天，1993(01)：22-25+41.

[3]孟秀云.导弹制导与控制系统原理[M].北京：北京理工大学出版社，2003.

[4]王永平.四元数及其在导弹控制系统中的应用[J]. 航天控制，1983(01)：11-21.

[5]张焱，王锡泉.四元数法在空空导弹六自由度数学模型建立中的应用[J]. 航空兵器，1994(03)：20-23.

[6]郑晓玉，钱杏芳.四元数法在战术导弹飞行弹道仿真中的应用[J]. 兵工学报，1991(01)：14-20.

[责任编辑：曹明明]