四元数法在战术导弹飞行弹道仿真中的应用*

郑晓玉　钱杏芳
（北京理工大学）

摘要　本文论述了四元数法在垂直发射战术导弹和火箭抛撒子导弹的仿真中的应用．并对反坦克导弹和舰空导弹飞行弹道仿真中的具体应用进行了方程推导、计算和分析。

关键词　四元数　垂直发射导弹　飞行力学　弹道

1　引言

70年代以来，美、英、法、苏等国都在研究战术导弹武器系统采用垂直发射技术。这种发射方式有很多优点，可简化发射设备，减轻武器系统重量，增大发射率，缩短反应时间，实现全方位攻击等。这一技术国外首先在舰载导弹系统中采用，纵观现有舰载垂直发射系统，可以认为垂直发射方式是舰载导弹武器的一个发展方向。最近，在反坦克导弹武器系统中，为了隐蔽发射阵地和实现越过山头攻击敌坦克的顶装甲，也出现了垂直发射方式。配有末制导子导弹的远程多管火箭，抛撒后的子导弹俯仰角 ϑ 也很大，有的甚至接近90°，相当于垂直地面飞行。

当研究导弹的飞行特性和制导系统时，需要建立其空间运动方程组。惯用的方程组中旋转运动学方程是用欧拉角参数建立的[1]，当采用垂直发射方式或接近垂直飞行弹道时，导弹姿态角 ϑ 接近90°，旋转运动学方程由于出现奇异点而发生退化。用四元数法建立的导弹运动学方程可解决此问题，同时还可减少三角函数计算，提高仿真计算速度和计算精度。

2　四元数性质及其坐标转换简述[2]

2.1　定义

四元数由一个实数单位 1 和三个虚数单位 i_1、i_2、i_3 组成：

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1 i_1+\lambda_2 i_2+\lambda_3 i_3 \tag{2.1}$$

λ 也可看成一标量与一向量之和

$$\lambda=\lambda_0+\bar{\lambda} \tag{2.2}$$

* 1988年6月收到，1989年3月定稿。

当$\bar{\lambda}=0$时，四元数变成实数；当$\lambda_2=\lambda_3=0$时，四元数成为复数。

四元数是由于要将三维矢量代数运算推广到乘法和除法运算而产生的。

四元数的共轭元为$\lambda^*=\lambda_0-\lambda_1 i_1-\lambda_2 i_2-\lambda_3 i_3$

四元数的逆元为 $\lambda^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{\lambda^*}{\lambda\circ\lambda^*}=\dfrac{\lambda^*}{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$

2.2 规范化四元数

设 $N=\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}=\sqrt{\|\lambda\|}$，$N$称为四元数的范数。

$$\lambda=\lambda_0+\bar{\lambda}=N\left(\frac{\lambda_0}{N}+\frac{\bar{\lambda}}{N}\right)=N\left(\frac{\lambda_0}{N}+\frac{\bar{\lambda}}{|\bar{\lambda}|}\cdot\frac{|\bar{\lambda}|}{N}\right)$$

式中$|\bar{\lambda}|=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$ 为向量的模。引入按向量$\bar{\lambda}$定向的单位向量$\bar{\xi}$

$$\bar{\xi}=\bar{\lambda}/|\bar{\lambda}|$$

因为$(\lambda_0/N)^2+(|\bar{\lambda}|^2/N)^2=1$，所以可令$\lambda_0/N=\cos\theta$，$|\bar{\lambda}|/N=\sin\theta$。四元数可写为

$$\lambda=N(\cos\theta+\bar{\xi}\sin\theta) \tag{2.3}$$

当$N=1$时，$\lambda=\cos\theta+\bar{\xi}\sin\theta$。这种形式的四元数称为规范化四元数。

2.3 四元数乘法

四元数相乘仍为四元数。

$$\begin{aligned}p\circ q&=(p_0+p_1 i_1+p_2 i_2+p_3 i_3)\circ(q_0+q_1 i_1+q_2 i_2+q_3 i_3)\\&=p_0 q_0-(\bar{p}\circ\bar{q})+p_0\bar{q}+q_0\bar{p}+(\bar{p}\times\bar{q})=\lambda\end{aligned} \tag{2.4}$$

用矩阵形式表示

$$\begin{bmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0&-p_1&-p_2&-p_3\\p_1&p_0&-p_3&p_2\\p_2&p_3&p_0&-p_1\\p_3&-p_2&p_1&p_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

2.4 四元数除法

四元数相除仍为四元数。四元数与其逆元之间满足 $\lambda\circ\lambda^{-1}=\lambda^{-1}\circ\lambda=1$。

设四元素$q\circ\lambda=p$，则$\lambda=q^{-1}\circ p$称为左除；设$\lambda\circ q=p$，则$\lambda=p\circ q^{-1}$称为右除

2.5 四元数的几何意义

规范化四元数$q=\cos\theta+\bar{\xi}\sin\theta$的几何意义是等价于一个圆心角或球面（其半径为任意值）上的一段大圆弧，其扇形平面垂直于单位向量$\bar{\xi}$，且按右手系统来看，θ角对$\bar{\xi}$具有正值，如图2.1。由理论力学可知：球面上的一段大圆弧表示刚体的某一位置。因此，刚体的每一位置都可用一规范化四元数来表示。

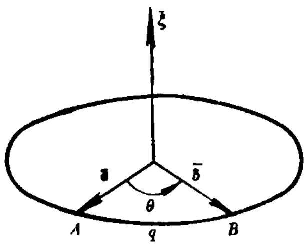

图2.1 矢量$\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{\xi}$构成轴的右旋坐标系

Fig. 2.1 Right handed coordinate system consisting of vectors $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\xi}$

2.6 四元数的坐标转换

定点运动刚体的位置可用规范化四元数来确定，所以定点运动刚体由某一位置到另一位置的任意有限转动也可用四元数的变换来表示。

四元数坐标转换以下述定理为依据：

定理 设Λ和R为非标量四元数，在此情况下$R'=\Lambda\circ R\circ\Lambda^{-1}$也为四元数，其范数和标量部分等于四元数$R$的范数

和标量部分。R的矢量$\bar{R}$绕Λ的矢量$\bar{\Lambda}$沿锥面旋转二倍角Λ，便得到R'的矢量部分$\bar{R}'$。即若 $\Lambda=\sqrt{\|\Lambda\|}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\xi\sin\frac{\theta}{2}\right)$，则使$\bar{R}$绕轴$\xi$旋转一角度$\theta$，便得到$\bar{R}'$[2]，见图2.2。

坐标转换是要确定向量在两坐标系中表达式的关系，或已知向量在一个坐标系中的分量，求其在另一坐标系中的分量。设有两个坐标系，i系为定系，e系为动系，其原点相同。根据理论力学中的定理，动系总可看成是定系绕某轴$\bar{\xi}$转动θ角而得。

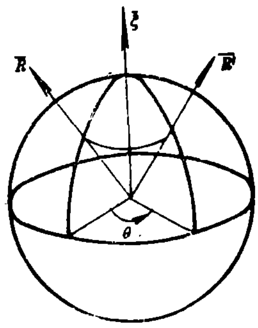

图2.2 四元数的转动
Fig. 2.2 Rotation of quaternion

设i系中矢量$\bar{R}_i$连坐标系一起绕空间某轴ξ旋转θ角，则得新e系和新矢量r_i。根据矢量$\bar{\xi}$和θ角定义一个四元数q，$q=N\left(\cos\frac{\theta}{2}+\bar{\xi}\sin\frac{\theta}{2}\right)$，则新矢量在原$i$系中的表达式为

$$\bar{r}_i=q\circ\bar{R}_i\circ q^{-1}$$

而新矢量在新e系中的表达式$\bar{r}_e$等于原矢量在原i系中的表达式$\bar{R}_i$，即$\bar{r}_e=R_i$，所以

$$\bar{r}_i=q\circ\bar{r}_e\circ q^{-1}$$

利用四元数除法

$$\bar{r}_e=q^{-1}\circ r_i\circ q$$

当四元数q的范数$N=1$时，则由逆元公式可得

$$\bar{r}_e=q^{*}\circ\bar{r}_i\circ q \tag{2.6}$$

(2.6) 式即四元数坐标转换公式，它表示出同一向量在两坐标系上的投影之间的相互关系。

$\bar{r}_e$，r_i为矢量，由前面四元数与矢量之间的关系可找到对应的标量为0的四元数。

$$\bar{r}_e=r_{e1}i_1+r_{e2}i_2+r_{e3}i_3 \tag{2.7}$$

$$\bar{r}_i=r_{i1}i_1+r_{i2}i_2+r_{i3}i_3 \tag{2.8}$$

将四元数q展开

$$q=q_0+q_1i_1+q_2i_2+q_3i_3 \tag{2.9}$$

并满足$\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=1$。将 (2.7) ～(2.9) 式代入 (2.6) 式，经四元数乘法运算得

$$\begin{bmatrix}r_{e1}\\ r_{e2}\\ r_{e3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_3q_0+q_1q_2) & 2(q_1q_3-q_0q_2)\\ 2(q_1q_2-q_3q_0) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_0+q_3q_2)\\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{i1}\\ r_{i2}\\ r_{i3}\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

此式即为利用四元数进行坐标转换的结果。

3 用四元数法建立刚体转动运动学方程[2]

描述刚体的转动要选择几个参数。有方向余弦、欧拉角、四元数等几种可以用的参数。

用方向余弦时在任何情况下都不退化，但它有9个参数、6个联系方程，计算较

复杂。

用欧拉角描述时，有 3 个参数，刚体旋转运动学方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt}&=\omega_y\sin\gamma+\omega_z\cos\gamma\\ \frac{d\psi}{dt}&=\frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)\\ \frac{d\gamma}{dt}&=\omega_x-\mathrm{tg}\vartheta(\omega_y\cos\gamma-\omega_z\sin\gamma)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

式中 ϑ、ψ、γ 为刚体姿态角，是一组欧拉角；ω_x、ω_y、ω_z为转动角速度在固连坐标系的投影。

通常战术导弹的旋转运动方程就采用这组方程[1]。但当大姿态角时，如 $\vartheta\to\pi/2$，方程会引起较大的误差；当 $\vartheta=\pi/2$时，方程是奇异的，导弹垂直飞行时就属这种情况。

四元数法比较方便，它有 4 个参数，只有一个联系方程，且不退化。比欧拉角参数法计算精度高。经推导可得四元数表示的刚体转动运动学方程为[2]

$$\left.\begin{aligned}\dot q_0&=\frac{1}{2}(-\omega_x q_1-\omega_y q_2-\omega_z q_3)\\ \dot q_1&=\frac{1}{2}(\omega_x q_0+\omega_z q_2-\omega_y q_3)\\ \dot q_2&=\frac{1}{2}(\omega_y q_0+\omega_x q_3-\omega_z q_1)\\ \dot q_3&=\frac{1}{2}(\omega_z q_0+\omega_y q_1-\omega_x q_2)\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

其中ω_x、ω_y、ω_z为刚体转动角速度在固连坐标系中的投影。

4　四元数在反坦克导弹飞行仿真中的应用

某倾斜发射反坦克导弹，用四元数描述的导弹转动运动学方程同（3.2）式，式中导弹角速度分量为在弹体坐标系中的投影。导弹的姿态角可由弹体坐标系与地面坐标系之间转换矩阵来确定。用欧拉角参数表示的转换矩阵为[1]

$$A=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\vartheta & \sin\vartheta & -\sin\psi\cos\vartheta\\ \sin\psi\sin\gamma-\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma & \cos\psi\sin\gamma+\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma\\ \sin\psi\cos\gamma+\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma-\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma\end{bmatrix}\tag{4.1}$$

（4.1）式应与（2.10）式中用四元数表示的转换矩阵相等，比较对应项可得

$$\left.\begin{aligned}\sin\vartheta&=2(q_1q_2+q_0q_3)\\ \mathrm{tg}\psi&=-\frac{2(q_1q_3-q_0q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}\\ \mathrm{tg}\gamma&=\frac{-2(q_2q_3-q_0q_1)}{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

把方程（3.2）和（4.2）取代原导弹运动方程组中用欧拉角参数描述的旋转运动方程和角度关系，即得用四元数表示的导弹运动方程组。

通过（4.1）式与（2.10）式中转换矩阵对应项相等关系，求出四元数的积分初值，就可进行飞行弹道仿真。

对某反坦克导弹预加指令弹道进行仿真计算，图4.1为飞行弹道的仿真结果，图中“×”点是用欧拉角参数计算的结果。由图可见，两者几乎是重合的，说明四元数法是可行的，且四元数法的导弹转动运动学方程组中不出现三角函数，这将有利于提高精度，加快计算速度。

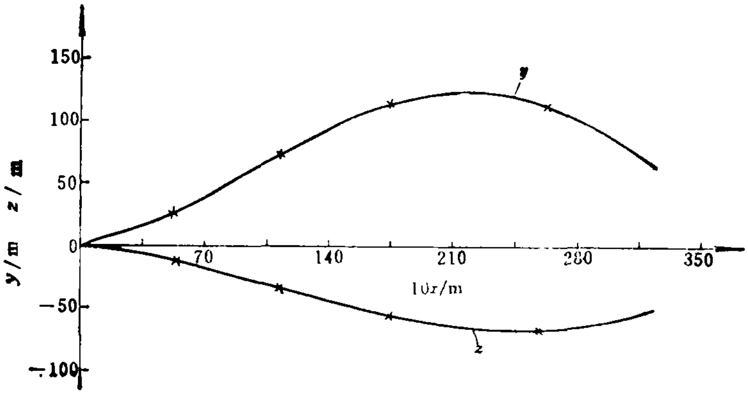

图4.1 弹道高度 y 与侧偏 z

Fig. 4.1 Trajectory height y and lateral distance z

5 四元数在垂直发射舰空导弹飞行弹道仿真中的应用[2][3]

下面讨论用四元数法计算舰空导弹垂直转弯段的飞行弹道。

用四元数建立导弹旋转运动学方程和表示与导弹姿态角的关系（方法如前所述），然后确定四元数的积分初值。

设 q 为地面坐标系转到弹体执行坐标系的转动四元数，则 q 由3个转动四元数组成，见图5.1。

$$q=q_\psi\cdot q_\vartheta\cdot q_{\gamma 1}$$

取三个转动轴 y、z'、x_1' 为四元数的三个虚数单位，则

$$\left.\begin{aligned} q_\psi &= \cos\frac{\psi}{2}+i_2\sin\frac{\psi}{2} \\ q_\vartheta &= \cos\frac{\vartheta}{2}+i_3\sin\frac{\vartheta}{2} \\ q_{\gamma 1} &= \cos\frac{\gamma_1}{2}+i_1\sin\frac{\gamma_1}{2} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

用四元数乘法展开，当 $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ 时，写成矩阵形式

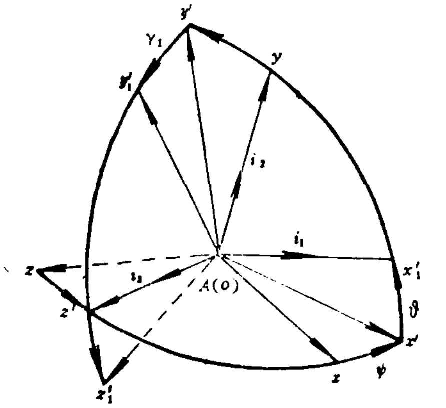

图5.1 地面坐标系 $Axyz$ 与弹体坐标系 $ox_1'y_1'z_1'$ 的相对关系

Fig. 5.1 Relations between earth-coordinate axes Axyz with respect to body-coordinate axes ox′y′z′

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\psi+\gamma_1}{2} \\ \sin\dfrac{\psi+\gamma_1}{2} \\ \sin\dfrac{\psi+\gamma_1}{2} \\ \cos\dfrac{\psi+\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

当 $t=0$ 时，俯仰角 $\vartheta_0=\dfrac{\pi}{2}$，取偏航角 $\psi_0=\psi_{RD}$，滚转角 $\gamma_1=\pi/4$。ψ_{RD} 为目标初始航向角。

对于垂直发射的舰空导弹，首先要求垂直段弹道具有一定的高度，以免转弯时碰撞舰上装置；然后，采用合理的控制方案，使导弹在规定的短时间内转弯飞行到预定空间位置和姿态。文中采用姿控方案，用四元数建立导弹运动方程组，并计算垂直转弯段弹道。计算结果见图 5.2 和图 5.3。图5.2为弹道高度和侧偏与飞行距离的关系，由图可见，垂直段弹道具有一定的高度，导弹在转弯段满足预控要求。由图5.3可见，俯仰角、弹道倾角由90°逐渐变小，由于在很短时间内实现转弯，因此导弹是以大负攻角飞行，最后达到要求的稳定值，转弯段亦告结束。

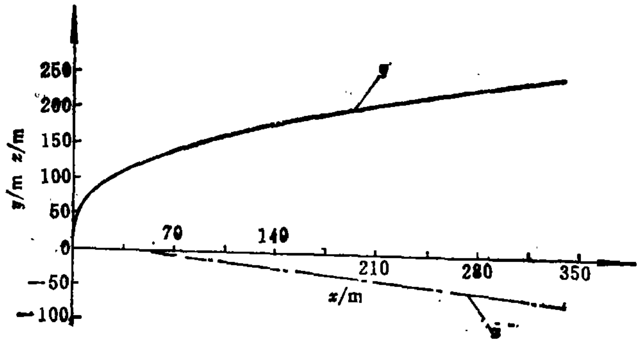

图5.2　弹道曲线

Fig. 5.2　Trajectory curves

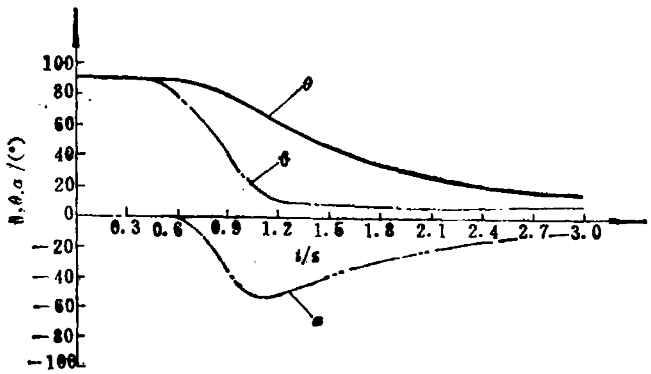

图5.3　俯仰角 ϑ、弹道倾角 θ、攻角 α 随时间的变化

Fig. 5.3　The changes of pitch angle ϑ, trajectory inclination angle θ and attack angle α with time

6 结论

（1）用四元数参数代替欧拉角参数进行战术导弹飞行弹道仿真是可行的；

（2）在垂直发射的战术导弹的弹道计算时，用欧拉角参数描述的转动运动学方程发生退化，用四元数参数建立的方程可解决此问题；

（3）用四元数参数描述的导弹转动运动学方程是一组线性微分方程，避开了三角函数的运算，这将有利于提高运算精度和速度。

参考文献

〔1〕钱杏芳、张鸿端、林瑞雄．导弹飞行力学．北京工业学院出版社，1987。

〔2〕〔苏〕B．H．勃拉涅茨，И．П．什梅格列夫斯基，四元数在刚体定位问题中的应用，国防工业出版社，1977。

〔3〕R. Solis, An Analysis of the Vertical Launch Phase of a Missile Concept, AIAA-83-0569.

APPLICATION OF THE QUATERNION METHOD IN FLIGHT TRAJECTORY SIMULATION OF TACTICAL MISSILES

Zheng Xiaoyu　　Qian Xingfang

(Beijing Institute of Technology)

Abstract　This paper discusses the application of quaternion method in the simulation of vertically launched tactical missiles and rocket-throwing submissiles. Equation derivation, computations and analysis for in-flight trajectory simulation of an anti-tank missile and a ship-to-air missile are also given

Key words　quaternion, vertically launched, flight mechanics, trajectory