**导弹六自由度运动建模及关键参数验证研究**

罗嘉豪1

（1.北京理工大学 航空宇航与智能飞行器技术，北京 100081）

**摘 要：**本文系统研究了导弹六自由度运动建模问题，分别在欧美坐标系和苏联坐标系下建立了完整的运动方程组。在欧美体系中，基于弹体坐标系推导了包含质心动力学方程、旋转动力学方程和运动学方程的耦合模型，给出了重力、推力及气动力在弹体坐标系下的投影形式。在苏联体系中，通过坐标转换关系重构了运动方程组，并提出了无需几何关系的弹道倾角与偏角计算方法。针对苏联体系，推导了攻角与侧滑角的导数方程，通过数值实验验证其与几何关系法的一致性。基于弱耦合假设，实现了运动方程的纵侧向解耦，并探讨了四元数法解决姿态描述奇点问题的可行性。对比分析表明：欧美体系在航空航天领域更通用，而苏联体系在传统导弹设计中具有计算优势；四元数法可有效解决俯仰角90°时的奇点问题。本文工作为导弹控制系统设计提供了理论基础。

**关键词：导弹运动建模；六自由度方程组；运动解耦；四元数法**

目　录

[1. 欧美体系下导弹6自由度运动方程组 1](#_Toc21220)

[1.1 欧美坐标系定义 1](#_Toc5653)

[1.2 欧美体系下的坐标系转换矩阵 1](#_Toc3654)

[1.3 欧美体系下动力学方程组 1](#_Toc21401)

[1.4 欧美体系下运动学方程组 4](#_Toc24667)

[2. 苏联体系下导弹6自由度运动方程组 5](#_Toc12436)

[2.1 苏联体系下坐标系定义 5](#_Toc30304)

[2.2 欧美体系与苏联体系的区别与联系 5](#_Toc29638)

[2.3 苏联体系下的坐标系转换矩阵 5](#_Toc30882)

[2.4 苏联体系下导弹动力学方程组 6](#_Toc30358)

[2.5 苏联体系下导弹6自由度运动学方程组 6](#_Toc3089)

[2.6 苏联体系下弹道倾角和弹道偏角的计算 7](#_Toc16077)

[3.苏联体系下攻角与侧滑角导数方程 8](#_Toc10628)

[3.1 攻角与侧滑角的定义 8](#_Toc2894)

[3.2 苏联体系下攻角与侧滑角导数的推导 8](#_Toc16401)

[3.3 攻角导数与侧滑角导数的实际意义 9](#_Toc5011)

[4.苏联体系下导弹6自由度运动方程组分解 9](#_Toc801)

[4.1苏联体系下导弹横侧向运动分解的合理假设 9](#_Toc30697)

[4.2苏联体系下纵向运动方程组 10](#_Toc2602)

[4.3苏联体系下侧向运动方程组 10](#_Toc4297)

[5.运动方程组对比分析 11](#_Toc22326)

[5.1教材6自由度方程组 11](#_Toc32193)

[5.2本文中运动方程组 11](#_Toc17052)

[6.四元数法在导弹姿态建模中的应用 11](#_Toc6338)

[6.1弹体坐标系与地面坐标系间转换的四元数微分方程 11](#_Toc32158)

[6.2四元数法建立导弹运动学方程 12](#_Toc22740)

[6.3四元数法解决奇异方程问题 13](#_Toc10945)

[7.结论 14](#_Toc18305)

[参考文献 15](#_Toc16921)

# 1. 欧美体系下导弹6自由度运动方程组

## 1.1 欧美坐标系定义

欧美体系下地面坐标系（静系，北东地），其中轴指向北，轴指向东，轴垂直指向下。

欧美体系下弹体坐标系（动系），其中轴指向弹头，轴指向弹体右方，轴垂直指向下。

## **1.2 欧美体系下的坐标系转换矩阵**

已知为滚转角；为俯仰角；为偏航角。可得欧美体系下地面坐标系到弹体坐标系的转换矩阵

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （1） |
|  |  | （2） |
|  |  | （3） |
|  |  | （4） |

已知为攻角；为侧滑角。可得欧美体系下速度坐标系到弹体坐标系的转换矩阵

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （5） |
|  |  | （6） |
|  |  | （7） |

## **1.3 欧美体系下动力学方程组**

由经典力学可知，任何一个自由刚体在空间的任意运动，都可以把它视为刚体质心的平移运动和绕质心转动运动的合成运动，即决定刚体质心瞬时位置的三个自由度和决定刚体瞬时姿态的三个自由度。对于刚体，可以应用牛顿第二定律来研究质心的移动，利用动量矩定理来研究刚体绕质心的转动。[1]

设表示刚体的质量，表示刚体的速度矢量，表示刚体相对于质心（点）的动量矩矢量，则描述刚体质心移动和绕质心转动运动的动力学基本方程的矢量表达式为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （8） |
|  |  | （9） |

式（8）中为作用于刚体上外力的主矢量，为外力对刚体质心的主矩。但该式子使用条件为：运动体是常质量的刚体，运动是在惯性坐标系内考察的。

针对变质量的飞行器运动，把每研究瞬时的质量取代原来的常质量。可以把式（8）（9）写为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （10） |
|  |  | （11） |

在欧美体系下，假设惯性坐标系为地面坐标系，动系为弹体坐标系。为弹体坐标系相对于地面坐标系的旋转角速度；为弹体坐标系相对于地面坐标系的平动速度。则运动学方程可写为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （12） |
|  |  | （13） |
|  |  | （14） |

将式（12）带入式（10）可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （15） |
|  |  | （16） |

欧美体系的地面坐标系下重力矢量为。

重力加速度需要投影到欧美体系下的弹体坐标系，根据式（1）可知，弹体坐标系下的重力加速度为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （17） |

欧美体系弹体坐标系下发动机推力矢量为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （18） |

欧美体系的速度坐标系下，空气动力的分量为阻力，升力，侧向力，矢量形式如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （19） |

在欧美体系下，通过速度坐标系到弹体坐标系的转换矩阵（5）,空气动力转换到弹体坐标系上

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （20） |

将方程（16）（17）（20）带入式（15）可得欧美体系下导弹质心动力学方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （21） |

依照式（11）推导欧美体系下导弹旋转动力学方程，假设发动机推力过导弹质心，则无推力力矩，式（11）可改写为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （22） |

由于，假设导弹为轴对称，则导弹无转动惯量积，转动惯量矩阵J只有主对角线元素不为0。，，，，是飞行器绕弹体坐标轴的转动惯量；，，是弹体坐标系下的气动力矩分量；分别为弹体坐标系上x,y,z轴方向上的角速度矢量。方程(16)展开为标量形式后有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （23） |
|  |  | （24） |
|  |  | （25） |

方程（24）（25）带入式（22）可得导弹的旋转动力学方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （26） |

式（26）中分别为弹体坐标系上x,y,z轴方向上的角加速度矢量。

## **1.4 欧美体系下运动学方程组**

要得到欧美体系下的质心运动学方程，根据旋转矩阵（1），将欧美体系下的弹体坐标系速度转换到地面坐标系上

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （27） |

要得到欧美体系下的旋转运动学方程，根据地面坐标系和弹体坐标系的基本转换关系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （28） |

方程（28）中，和地面坐标系的z轴重合，和弹体坐标系的x轴重合。将式（28）展开可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （29） |

则从地面坐标系到弹体坐标系的转换矩阵为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （30） |

对式（30）矩阵求逆后可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （31） |

则欧美体系下导弹的旋转运动学方程为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （32） |

# **2. 苏联体系下导弹6自由度运动方程组**

## **2.1 苏联体系下坐标系定义**

苏联体系下地面坐标系（惯性系），轴指北，轴指东，轴垂直向下。

苏联体系下弹体坐标系（动系，左手系），原点取在飞行器的质心上；轴与飞行器的纵轴重合，指向飞行器的头部为正；(立轴) 位于飞行器的纵向对称面内，垂直于轴，向上为正；轴垂直于平面，按右手坐标系确定正方向。

## **2.2 欧美体系与苏联体系的区别与联系**

欧美坐标体系与苏联坐标体系的弹体坐标系有所区别，方向相同，欧美体系下的指向与苏联体系下的指向一致，欧美体系下的与苏联体系下的指向相反。

在航空相关领域，苏联坐标系和欧美坐标系是两种经过长时间验证、非常方便实用的坐标系定义方式，其定义和表现形式满足了运动学的相关准则，并有效地满足了工程实践的要求。[2]

## **2.3 苏联体系下的坐标系转换矩阵**

已知为滚转角；为俯仰角；为偏航角。可得苏联体系下地面坐标系到弹体坐标系的转换矩阵

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （33） |
|  |  | （34） |
|  |  | （35） |
|  |  | （36） |

苏联体系下速度坐标系到弹体坐标系的转换矩阵

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （37） |
|  |  | （38） |
|  |  | （39） |

## **2.4 苏联体系下导弹动力学方程组**

苏联体系的地面坐标系下重力矢量为。

重力加速度需要投影到苏联体系下的弹体坐标系，根据式（32）可知，弹体坐标系下的重力加速度为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （40） |

苏联体系弹体坐标系下发动机推力矢量可用式（18）中，欧美体系下的发动机推力矢量表示

苏联体系的速度坐标系下，空气动力的分量为阻力，升力，侧向力，矢量形式如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （41） |

在苏联体系下，通过速度坐标系到弹体坐标系的转换矩阵（37）,空气动力转换到苏联体系下弹体坐标系上

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （42） |

将方程（18）（40）（42）带入式（15）可得欧美体系下导弹质心动力学方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （43） |

设导弹为轴对称外形，则在苏联体系下最终得到的旋转动力学方程和方程（26）相同

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （44） |

## **2.5 苏联体系下导弹6自由度运动学方程组**

要得到苏联体系下的质心运动学方程，根据旋转矩阵（33），将苏联体系下的弹体坐标系速度转换到地面坐标系上

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （45） |

要得到苏联体系下的旋转运动学方程，根据地面坐标系和弹体坐标系的基本转换关系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （46） |

角速度从苏联体系下地面坐标系转换到弹体坐标系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （47） |

则从地面坐标系到弹体坐标系的转换矩阵为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （48） |

对式（29）矩阵求逆后可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （49） |

则欧美体系下导弹的旋转运动学方程为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （50） |

## **2.6 苏联体系下弹道倾角和弹道偏角的计算**

在苏联体系下的地面坐标系中，为导弹速度矢量，为沿苏联体系地面坐标系y轴正方向的单位矢量，弹道倾角满足

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （51） |

当时有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （52） |

当时有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （53） |

在地面坐标系中，弹道偏角满足(50)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （54） |

为沿地面坐标系x轴正方向的单位矢量

当时有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （55） |

当时有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （56） |

# **3.苏联体系下攻角与侧滑角导数方程**

## **3.1 攻角与侧滑角的定义**

在苏联体系下，攻角与侧滑角的严格定义如下：

攻角为速度矢量在弹体纵向对称平面内的投影与轴的夹角，向上为正。侧滑角为速度矢量偏离弹体纵向对称平面的角度，右侧滑为正。

## **3.2 苏联体系下攻角与侧滑角导数的推导**

导弹质心速度矢量在地面坐标系（惯性系）与弹体坐标系（动系）间的转换关系为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （57） |
|  |  | （58） |

基于速度分量，攻角与侧滑角可表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （59） |

对求导，化简可得攻角导数方程表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （60） |

其中，带入质心运动学方程中的加速度分量

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （61） |

对求导，化简可得侧滑角导数方程表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （62） |

其中，质心运动学方程中的加速度分量

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （63） |

## **3.3 攻角导数与侧滑角导数的实际意义**

攻角导数反映了速度矢量在弹体纵向对称平面内的旋转速率，主要受俯仰力矩和气动力分布影响。

侧滑角导数反映了速度矢量偏离纵向对称平面的速率，主要受偏航力矩和侧向力影响。

在导弹控制系统设计中，攻角和侧滑角导数是重要的反馈参数，用于实现姿态稳定和轨迹跟踪控制。

# **4.苏联体系下导弹6自由度运动方程组分解**

## **4.1苏联体系下导弹横侧向运动分解的合理假设**

在纵向运动中，导弹质心在垂直于弹体坐标系z轴的平面上平动，同时绕弹体坐标系z轴旋转。因此，在计算纵向运动时，可以假设侧向运动参数比较小，只需要考虑以下的运动参数：；以下运动参数全部为0：

在侧向运动中，导弹质心在弹体坐标系z轴上平动，同时绕弹体坐标系x轴和y轴旋转。假设俯仰角速度，攻角，俯仰角比较小，同理只需要考虑以下的运动参数：；以下运动参数全部为0：

将六自由度运动解耦为纵向运动（铅垂平面内的运动）和侧向运动（水平面内的横向运动），忽略两者之间的弱耦合项。

## **4.2苏联体系下纵向运动方程组**

对苏联体系下质心动力学方程（43）有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （64） |

由于导弹只绕z轴旋转，因此不考虑力矩对苏联体系下旋转动力学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （65） |

对质心运动学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （66） |

对旋转运动学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （67） |

## **4.3苏联体系下侧向运动方程组**

对质心动力学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （68） |

对旋转动力学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （69） |

对质心运动学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （70） |

对旋转运动学方程有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （71） |

# **5.运动方程组对比分析**

## **5.1教材6自由度方程组**

教材中采用苏联坐标系，y轴向上。[1]

对质心动力学方程，推力矢量先从弹体坐标系转换到速度坐标系上，再转换到弹道坐标系上，需要转过3个角度。空气动力从速度坐标系转换到弹道坐标系，需要转过1个角度。重力从地面坐标系转换到弹道坐标系，需要转过2个角度。

对质心运动学方程，从弹道坐标系转换到地面坐标系，需要转过2个角度。对旋转运动学方程，从弹体坐标系转换到地面坐标系，需要转过3个角度。

总计涉及4个坐标系，转过11个角度。

## **5.2本文中运动方程组**

对质心动力学方程，推力矢量无需转换。空气动力从速度坐标系转换到弹体坐标系，需要转过2个角度。重力从地面坐标系转换到弹体坐标系，需要转过3个角度。

对质心运动学方程，从弹体坐标系转换到地面坐标系，需要转过3个角度。对旋转运动学方程，从弹体坐标系转换到地面坐标系，需要转过3个角度。

本文第1节采用欧美坐标系，y轴向下。第2节坐标系和教材相同。总计涉及3个坐标系，转过11个角度。欧美与苏联两种体系的核心差异源于弹体坐标系定义（右手系/左手系），导致力和力矩投影形式不同。

# 6.四元数法在导弹姿态建模中的应用

## **6.1弹体坐标系与地面坐标系间转换的四元数微分方程**

在苏联体系下使用四元数法进行坐标系之间的转换，从地面坐标系转换到弹体坐标系的转换四元数为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （72） |

其中，苏联体系下，定义的为滚转角；为俯仰角；为偏航角。可以得到的表达式[3]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （73） |
|  |  | （74） |

根据四元数计算的定义，假设坐标系B相对于坐标系E的姿态四元数为，同一个矢量在两个坐标系内的表示分别为和  ，那么两者存在以下转换关系

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （75） |
|  |  | （76） |

## **6.2四元数法建立导弹运动学方程**

根据刚体定点转动的力学定理，假设矢量与坐标系B固连，且坐标系B相对于坐标系E的角速度为，那么矢量的绝对导数为[4]

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （77） |

对于式（77），将其向地面坐标系中表达时有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （78） |

根据四元数的转换关系，可知

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （79） |

对其进行求导并且令，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （80） |

由于单位四元数标量部分和矢量部分相互约束，设

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （81） |

并且可知

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （82） |

带入化简式（78）有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （83） |

对比可知

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （84） |

最后得到四元数姿态运动学（旋转运动方程）为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （85） |

根据式（85）可得到弹体坐标系与地面坐标系间转换的四元数微分方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （86） |

根据式（86）推出四元数表示导弹的姿态运动学方程为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （87） |

已知导弹质心平动运动学方程，式（45）所示，展开为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （88） |

使用四元数表示导弹质心平动运动学方程为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | （89） |

## **6.3四元数法解决奇异方程问题**

在弹道坐标系中，传统方法采用欧拉角描述姿态，当俯仰角时，会出现万向锁奇异。此时偏航轴与滚转轴重合，导致姿态参数无法唯一确定，导数方程出现分母为零的情况，例如式（50）。具体表现为项发散，姿态更新无法进行，严重影响仿真计算的连续性。

此外，弹道坐标系需通过多次坐标转换（如速度坐标系→弹道坐标系→地面坐标系），累计 11 次角度转换。导致耦合关系复杂，奇异问题随转换次数增加而放大；姿态更新依赖欧拉角微分方程，无法规避万向锁本质缺陷。

传统欧拉角法在特定姿态下存在固有缺陷，而四元数法通过代数映射规避了这一问题。使用四元数法可独立于弹道坐标系应用，直接描述弹体坐标系到地面坐标系的姿态转换。无需依赖弹道坐标系的中间转换，减少奇异点引入环节；若需保留弹道坐标系，可通过四元数逆变换实现坐标映射，全程避免欧拉角参与。

四元数法求解姿态动力学方程的优势在于，与传统的欧拉角法相比，四元数法不会出现万向锁现象，可以避免在特定情况下姿态计算的不稳定性。此外，四元数法具有更简洁的数学表达形式，可以方便地进行姿态之间的插值和计算。[5]

# 7.结论

本文系统研究了欧美和苏联体系坐标下导弹六自由度运动建模问题，通过坐标转换关系建立了质心动力学、旋转动力学与运动学方程组，推导了攻角与侧滑角导数方程，并实现了纵侧向运动解耦。针对传统欧拉角法的万向锁缺陷，引入四元数法构建姿态方程。

研究表明苏联体系通过弹体坐标系直接建模，减少了弹道坐标系的中间转换环节，简化了工程计算流程；四元数法以连续代数映射替代角度微分关系，解决了姿态描述的奇异性问题，为导弹大角度机动控制提供了可靠的理论基础。未来可进一步结合惯性导航技术，优化四元数归一化算法，推动其在实时仿真与高精度制导中的工程应用。

参考文献

1. 钱杏芳,林瑞雄,赵亚男编著. 导弹飞行力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社,2006: 95-130.
2. 李继广,董彦非,屈高敏.欧美坐标系和苏联坐标系对比分析[J].飞行力学,2018,36(06):1-6.DOI:10.13645/j.cnki.f.d.20180912.014.
3. 王永平.四元数及其在导弹控制系统中的应用[J].航天控制,1983,(01):11-21.DOI:10.16804/j.cnki.issn1006-3242.1983.01.005.
4. 张义飞,姜殿民.基于四元数法的空空导弹数学模型建模研究[J].科技信息,2014,(07):51-52.
5. 郑晓玉,钱杏芳.四元数法在战术导弹飞行弹道仿真中的应用[J].兵工学报,1991,(01):14-20.