Tarjan

强连通分量、点/边双连通分量、割点/边

Epsilon

北京理工大学

2023 年 8 月 14 日

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- 强连通：在**有向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果从 u 到 v 可以互相到达，那么称在该图中 u 和 v 强连通的。
- 强连通图：在**有向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都强连通，则称该图为强连通图。
- 强连通分量：**有向图**的极大强连通子图称为强连通分量（Strongly Connected Components，SCC）。

强连通分量

- 强连通：在**有向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果从 u 到 v 可以互相到达，那么称在该图中 u 和 v 强连通的。
- 强连通图：在**有向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都强连通，则称该图为强连通图。
- 强连通分量：**有向图**的极大强连通子图称为强连通分量（Strongly Connected Components，SCC）。

- 强连通：在**有向图** $G=(V,E)$ 中，对于两个结点 $u,v\in V$，如果从 u 到 v 可以互相到达，那么称在该图中 u 和 v 强连通的。
- 强连通图：在**有向图** $G=(V,E)$ 中，任意两个结点都强连通，则称该图为强连通图。
- 强连通分量：**有向图**的极大强连通子图称为强连通分量（Strongly Connected Components，SCC）。

割点/边

- 割点：对于一个**无向图**，如果把一个点删除后这个图的极大连通分量数增加了，那么这个点就是这个图的割点。
- 割边（桥）：对于一个**无向图**，如果删掉一条边后图中的连通分量数增加了，则称这条边为桥或者割边。

割点/边

- 割点：对于一个**无向图**，如果把一个点删除后这个图的极大连通分量数增加了，那么这个点就是这个图的割点。
- 割边（桥）：对于一个**无向图**，如果删掉一条边后图中的连通分量数增加了，则称这条边为桥或者割边。

点双连通分量

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- 连通：在**无向图** $G=(V,E)$ 中，对于两个结点 $u,v\in V$，如果存在一条路径 $v_0,v_1,...,v_k$，其中 $v_0=u,v_k=v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G=(V,E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

点双连通分量

- 连通：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果存在一条路径 $v_0, v_1, ..., v_k$，其中 $v_0 = u, v_k = v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

点双连通分量

- 连通：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果存在一条路径 $v_0, v_1, \ldots, v_k$，其中 $v_0 = u, v_k = v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

点双连通分量

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- 连通：在**无向图** $G=(V,E)$ 中，对于两个结点 $u,v \in V$，如果存在一条路径 $v_0,v_1,...,v_k$，其中 $v_0=u,v_k=v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G=(V,E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

点双连通分量

- 连通：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果存在一条路径 $v_0, v_1, ..., v_k$，其中 $v_0 = u, v_k = v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

点双连通分量

- 连通：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，对于两个结点 $u, v \in V$，如果存在一条路径 $v_0, v_1, ..., v_k$，其中 $v_0 = u, v_k = v$，那么称在该图中 u 和 v 是连通的。
- 连通图：在**无向图** $G = (V, E)$ 中，任意两个结点都连通，则称该图是连通图。
- 连通分量：**无向图**的极大连通子图称为连通分量。
- 点双联通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪一个点（只能删去一条，且不能删 u 和 v 自己）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 点双连通。
- 点双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一个点都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 点双联通分量：**无向图**中的极大点双联通子图称为点双联通分量。

边双连通分量

- 边双连通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪条边（只能删去一条）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 边双连通。
- 边双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一条边都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 边双联通分量：**无向图**中的极大边双联通子图称为边双联通分量。

边双连通分量

- 边双连通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪条边（只能删去一条）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 边双连通。
- 边双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一条边都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 边双联通分量：**无向图**中的极大边双联通子图称为边双联通分量。

边双连通分量

- 边双连通：在一个连通的**无向图**中，对于两个点 u 和 v，如果无论删去哪条边（只能删去一条）都不能使它们不连通，我们就说 u 和 v 边双连通。
- 边双联通图：在一个连通的**无向图**中，如果删除任意一条边都不改变图的连通性，那么称该图为点双连通图。
- 边双联通分量：**无向图**中的极大边双联通子图称为边双联通分量。

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

首先我们先来一段基本的 DFS 代码。

```
bool flag[MAXN];
void dfs(int x) {
    flag[x] = true;
    for(int y : son[x]) {
        if(!flag[y]) dfs(y);
    }
}
```

在基础的 DFS 代码上，为了方便，我们添加一个 dfn 数组用来记录每一个节点第一次被访问的时间（时间戳）。

```
int cnt, dfn[MAXN];
void dfs(int x) {
    dfn[x] = ++cnt;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) dfs(y);
    }
}
```

dfn 数组单调递增，范围为 1 到 n。

在基础的 DFS 代码上，为了方便，我们添加一个 dfn 数组用来记录每一个节点第一次被访问的时间（时间戳）。

```
int cnt, dfn[MAXN];
void dfs(int x) {
    dfn[x] = ++cnt;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) dfs(y);
    }
}
```

dfn 数组单调递增，范围为 1 到 n。

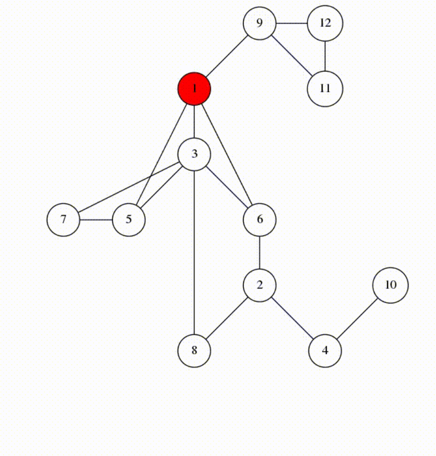
在基础的 DFS 代码上，为了方便，我们添加一个 dfn 数组用来记录每一个节点第一次被访问的时间（时间戳）。

```
int cnt, dfn[MAXN];
void dfs(int x) {
    dfn[x] = ++cnt;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) dfs(y);
    }
}
```

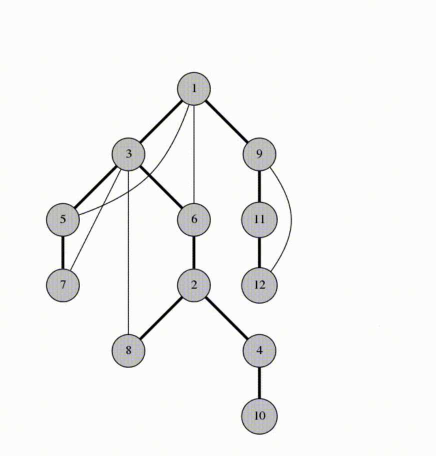
dfn 数组单调递增，范围为 1 到 n。

DFS 树

对一个图运行上面的 DFS 算法，得到了的一棵树，这棵树叫做 DFS 树，举一个例子（以 1 号节点为起点；在与 u 相邻的点中，先枚举编号小的点）：



$\longrightarrow$



概览

边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

边的分类

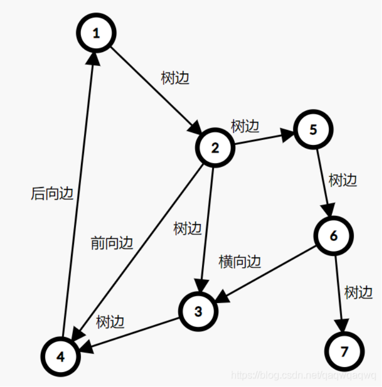
在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

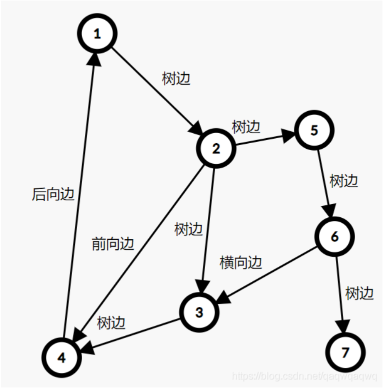


边的分类

在介绍 Tarjan 之前，我们首先要利用 DFS 对所有的边分类。这些边可以分成四类：

1. 树边：在 DFS 树上的边称为树边。
2. 后向边（返祖边）：指结点 u 连向其在 DFS 树上的祖先结点 v 的边，其中，u 的自环也属于后向边。
3. 前向边：指结点 u 连向其在 DFS 树上的后代结点 v 的非树边。
4. 横向边：所有的其他边叫做横向边，即边 (u, v) 中 u 和 v 没有祖先关系。

如果该图是无向图，可以无向边拆成两条有向边，也适用这种分法。



性质

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

性质 1

无向图没有横向边。

对于每一对有边相连的点对 (u, v)：

- 设 u 先于 v 被访问。
- 在枚举到 u 时，设与 u 相连的边按照顺序为 $[t_0, t_1, ..., t_k]$，$t_i = v$。
  - 若在访问完 t_0 到 t_{i-1} 之后，v 还未被访问，之后就会访问 v，(u, v) 为树边。
  - 若在访问完 t_0 到 t_{i-1} 之后，v 已经被访问，那么 v 必然是被 u 的子树上的点访问的，所以 u 是 v 的祖先。
- 综上，(u, v) 不是横向边。

在无向图中，只存在树边和非树边（也就是有向图中的前/后向边）。

性质 1

无向图没有横向边。

对于每一对有边相连的点对 (u, v)：

- 设 u 先于 v 被访问。
- 在枚举到 u 时，设与 u 相连的边按照顺序为 $[t_0, t_1, ..., t_k]$，$t_i = v$。
  - 若在访问完 t_0 到 t_{i-1} 之后，v 还未被访问，之后就会访问 v，(u, v) 为树边。
  - 若在访问完 t_0 到 t_{i-1} 之后，v 已经被访问，那么 v 必然是被 u 的子树上的点访问的，所以 u 是 v 的祖先。
- 综上，(u, v) 不是横向边。

在无向图中，只存在树边和非树边（也就是有向图中的前/后向边）。

性质

性质 2

在有向图中，如果 (u, v) 是后向边或横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

后向边指向祖先，祖先肯定先访问，没问题。看横向边：

- 如果 u 和 v 同时被访问，则为后向边（因为我们认为自环也属于后向边）。
- 如果 u 先被访问，那么类似性质 1，我们发现 (u, v) 不会是横向边。

综上，如果 (u, v) 是横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

性质 3

在有向图中，如果 (u, v) 是树边或前向边，那么 u 必然先于 v 被访问。

根据 DFS 的性质可得，在 DFS 树中，如果 v 在 u 的子树中，那么访问 v 之前必然先访问 u。

性质

性质 2

在有向图中，如果 (u, v) 是后向边或横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

后向边指向祖先，祖先肯定先访问，没问题。看横向边：

- 如果 u 和 v 同时被访问，则为后向边（因为我们认为自环也属于后向边）。
- 如果 u 先被访问，那么类似性质 1，我们发现 (u, v) 不会是横向边。

综上，如果 (u, v) 是横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

性质 3

在有向图中，如果 (u, v) 是树边或前向边，那么 u 必然先于 v 被访问。

根据 DFS 的性质可得，在 DFS 树中，如果 v 在 u 的子树中，那么访问 v 之前必然先访问 u。

性质 2

在有向图中，如果 (u, v) 是后向边或横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

后向边指向祖先，祖先肯定先访问，没问题。看横向边：

- 如果 u 和 v 同时被访问，则为后向边（因为我们认为自环也属于后向边）。
- 如果 u 先被访问，那么类似性质 1，我们发现 (u, v) 不会是横向边。

综上，如果 (u, v) 是横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

性质 3

在有向图中，如果 (u, v) 是树边或前向边，那么 u 必然先于 v 被访问。

根据 DFS 的性质可得，在 DFS 树中，如果 v 在 u 的子树中，那么访问 v 之前必然先访问 u。

性质

性质 2

在有向图中，如果 (u,v) 是后向边或横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

后向边指向祖先，祖先肯定先访问，没问题。看横向边：

- 如果 u 和 v 同时被访问，则为后向边（因为我们认为自环也属于后向边）。
- 如果 u 先被访问，那么类似性质 1，我们发现 (u,v) 不会是横向边。

综上，如果 (u,v) 是横向边，那么 v 必然先于 u 被访问。

性质 3

在有向图中，如果 (u,v) 是树边或前向边，那么 u 必然先于 v 被访问。

根据 DFS 的性质可得，在 DFS 树中，如果 v 在 u 的子树中，那么访问 v 之前必然先访问 u。

树边

在 DFS 树上的边称为树边。在之前的 DFS 中，我们有这样的一句话：

```
if(!dfn[y]) dfs(y);
```

如果满足这个条件，那么 (x, y) 这条边就在 DFS 树上，就是树边。

后向边

连向祖先结点（包括连向自己）的边称为后向边。

- 首先，我们应该如何知道这个结点的祖先有哪些呢？用栈！
- 在 DFS 搜索到结点 x 时，我们将 x 入栈，在访问 x 完成回溯时，将 x 出栈。这样在栈里的结点就是 x 的祖先（包括自己）。

我们用一个数组 $instk_x$ 来表示 x 是否在栈中。

后向边

在枚举与 x 相邻的点 y 时，如果 y 已经被访问过，且在栈中，那么 (x, y) 就是一条后向边。

```
if(!dfn[y]) {
    // x->y是树边
    dfs(y);
} else if(instk[y]) { // y被访问过
    // x->y是后向边
}
```

前向边/横向边

- 连向后代结点的非树边称为前向边。
- 如果边 (u,v) 的两个节点 u 和 v 没有祖先关系，则称为该边为横向边。

在枚举与 x 相邻的点 y 时，如果 y 已经被访问过，且不在栈中，那么边 (x,y) 要么是前向边，要么是横向边。

- 由性质 2，如果 $dfn_y > dfn_x$，说明 x 先于 y 被访问，这样的边不是横向边，那么它就是前向边。
- 由性质 3，如果 $dfn_y < dfn_x$，说明 y 先于 x 被访问，这样的边不是前向边，那么它就是横向边。
- 不会出现 $dfn_y = dfn_x$，两个节点 x 和 y 的 dfn 值相等，那么肯定 $x = y$，这是后向边，在前面已经被考虑过了。

根据前面的讨论，我们可以更进一步完善 DFS 的代码：

```
int cnt, top, dfn[MAXN], stk[MAXN];
bool instk[MAXN];
void dfs(int x) {
    dfn[x] = ++cnt;
    stk[++top] = x, instk[x] = true;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) {
            // x->y是树边
            dfs(y);
        } else if(instk[y]) { // y被访问过
            // x->y是后向边
        } else if(dfn[y] > dfn[x]) { // x先于y被访问
            // x->y是前向边
        } else { // y先于x被访问
            // x->y是横向边
        }
    }
    --top, instk[x] = false;
}
```

强连通分量

强连通图是指任意两个结点都能相互到达的图，而强连通分量指的是有向图的极大强连通子图，英文缩写叫 SCC。

定义 1

设有向图 $G=(V,E)$，对于 $\forall u,v\in V$，都存在一条路径从 u 出发到 v，那么称 G 是强连通图。

概览

推论 1（SCC 判定）

设有向图 $G=(V,E)$，如果 $\exists u \in V$，u 可以到达其他所有结点，且其他所有结点都可以到达 u，那么 G 是强连通图。

对于 $\forall v_1, v_2 \in V, v_1, v_2 \neq u$，存在一条路径从 v_1 到 u，也存在一条路径从 u 到 v_2，所以 v_1 可以到达 v_2。根据定义可得推论 1 正确。

推论 2

设有向图 $G=(V,E)$，$u, v \in V$，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集。如果 u 可以到 v，且 v 可以到 u，那么 $v \in SCC_u$。

加入点 v 之后显然仍满足推论 1 的条件。

前置推论

推论 1（SCC 判定）

设有向图 $G=(V,E)$，如果 $\exists u \in V$，u 可以到达其他所有结点，且其他所有结点都可以到达 u，那么 G 是强连通图。

对于 $\forall v_1, v_2 \in V, v_1, v_2 \neq u$，存在一条路径从 v_1 到 u，也存在一条路径从 u 到 v_2，所以 v_1 可以到达 v_2。根据定义可得推论 1 正确。

推论 2

设有向图 $G=(V,E)$，$u, v \in V$，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集。如果 u 可以到 v，且 v 可以到 u，那么 $v \in SCC_u$。

加入点 v 之后显然仍满足推论 1 的条件。

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

推论 1（SCC 判定）

设有向图 $G=(V,E)$，如果 $\exists u \in V$，u 可以到达其他所有结点，且其他所有结点都可以到达 u，那么 G 是强连通图。

对于 $\forall v_1, v_2 \in V, v_1, v_2 \neq u$，存在一条路径从 v_1 到 u，也存在一条路径从 u 到 v_2，所以 v_1 可以到达 v_2。根据定义可得推论 1 正确。

推论 2

设有向图 $G=(V,E)$，$u, v \in V$，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集。如果 u 可以到 v，且 v 可以到 u，那么 $v \in SCC_u$。

加入点 v 之后显然仍满足推论 1 的条件。

前置推论

推论 1（SCC 判定）

设有向图 $G=(V,E)$，如果 $\exists u \in V$，u 可以到达其他所有结点，且其他所有结点都可以到达 u，那么 G 是强连通图。

对于 $\forall v_1, v_2 \in V, v_1, v_2 \neq u$，存在一条路径从 v_1 到 u，也存在一条路径从 u 到 v_2，所以 v_1 可以到达 v_2。根据定义可得推论 1 正确。

推论 2

设有向图 $G=(V,E)$，$u, v \in V$，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集。如果 u 可以到 v，且 v 可以到 u，那么 $v \in SCC_u$。

加入点 v 之后显然仍满足推论 1 的条件。

设有向图 $G=(V,E)$，它的 DFS 树为 T，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集，$PATH_{u,v}$ 表示 T 中 u 到 v 路径上的点集。

推论 3（SCC 的连续性）

对于 $u,v\in V$，如果 u 可以到达 v，且 $v\in SCC_u$，那么对于 $\forall v'\in PATH_{u,v}$，$v'\in SCC_u$。

- $v\in SCC_u$，那么 v 可以到达 u。
- $PATH_{u,v}$ 中的所有点都可以到达 v，v 可以到达 u，那么 $PATH_{u,v}$ 中的所有点都可以到达 u。
- u 可以到达 $PATH_{u,v}$ 中的所有点。
- 根据推论 2 可得该推论正确。

进一步可得 SCC 的在树上的连续性。

前置推论

设有向图 $G=(V,E)$，它的 DFS 树为 T，SCC_u 表示包含 u 的强联通分量的点集，$PATH_{u,v}$ 表示 T 中 u 到 v 路径上的点集。

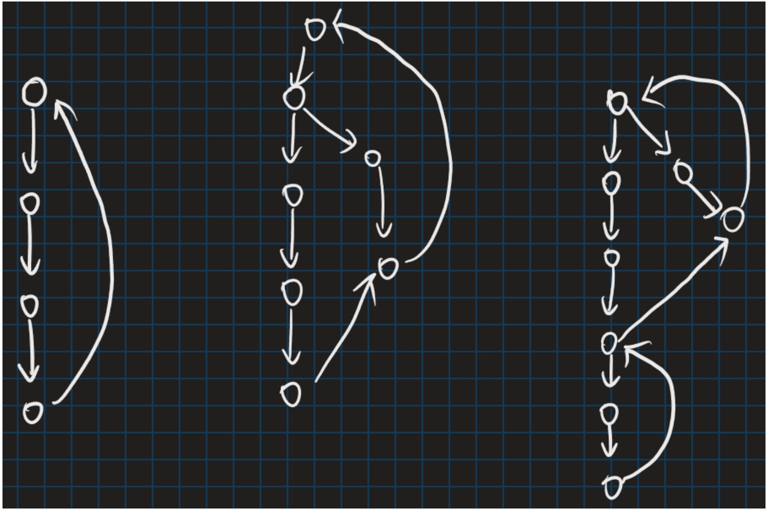
推论 3（SCC 的连续性）

对于 $u,v\in V$，如果 u 可以到达 v，且 $v\in SCC_u$，那么对于 $\forall v'\in PATH_{u,v}$，$v'\in SCC_u$。

- $v\in SCC_u$，那么 v 可以到达 u。
- $PATH_{u,v}$ 中的所有点都可以到达 v，v 可以到达 u，那么 $PATH_{u,v}$ 中的所有点都可以到达 u。
- u 可以到达 $PATH_{u,v}$ 中的所有点。
- 根据推论 2 可得该推论正确。

进一步可得 SCC 的在树上的连续性。

前置推论



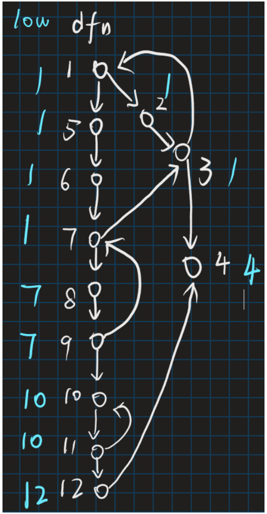
回溯值

在 Tarjan 算法中，引入了一个概念，叫做“回溯值”，一般用 low 数组来表示。

定义 2

low_x 定义为以下结点的时间戳的最小值：

- 在 x 的子树中的点。
- 从 x 的子树中的任意点经过一条非树边所能到达的，且从该点也可以回到 x 的点。



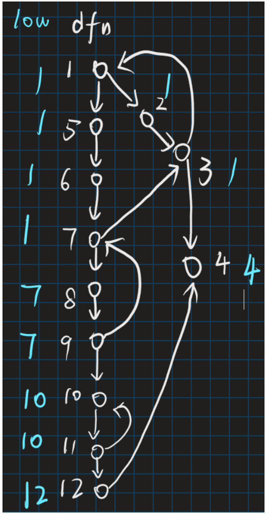
回溯值

在 Tarjan 算法中，引入了一个概念，叫做 “回溯值”，一般用 low 数组来表示。

定义 2

low_x 定义为以下结点的时间戳的最小值：

- 在 x 的子树中的点。
- 从 x 的子树中的任意点经过一条非树边所能到达的，且从该点也可以回到 x 的点。



定义 3

定义强联通分量的根节点为该强联通分量中时间戳最小的点。

在 Tarjan 中，单独的 low 没有意义，low 与 dfn 的比较才有意义：

推论 4

- $low_x < dfn_x$ 等价于 SCC_x 的根节点的时间戳小于 x。
- $low_x = dfn_x$ 等价于 x 为 SCC_x 的根节点。
- 不存在 $low_x > dfn_x$ 的情况。

定义 3

定义强联通分量的根节点为该强联通分量中时间戳最小的点。

在 Tarjan 中，单独的 low 没有意义，low 与 dfn 的比较才有意义：

推论 4

- $low_x < dfn_x$ 等价于 SCC_x 的根节点的时间戳小于 x。
- $low_x = dfn_x$ 等价于 x 为 SCC_x 的根节点。
- 不存在 $low_x > dfn_x$ 的情况。

推论 5

在 DFS 树上，设 v 为 u 子树中的一点，那么：

$$low_u = dfn_u, \text{且对于} \forall x \in PATH_{u,v}, x \neq u, \text{都有} low_x < dfn_x$$

等价于

$$\text{对于} \forall x \in PATH_{u,v}, \text{都有} x \in SCC_u, \text{且} u \text{为} SCC_u \text{的根节点}$$

- 右推左：u 是根节点，所以 $low_u = dfn_u$，根据推论 4，可得成立。
- 左推右：$low_u = dfn_u$，所以 u 是根节点，根据推论 4 利用反证法，可得成立。

通俗来讲，就是在树的一条链上，两个 $low = dfn$ 的节点之间的所有 $low < dfn$ 的点都在深度较浅的那个 $low = dfn$ 的点的强联通分量中。

推论 5

在 DFS 树上，设 v 为 u 子树中的一点，那么：

$$low_u = dfn_u, \text{且对于} \forall x \in PATH_{u,v}, x \neq u, \text{都有} low_x < dfn_x$$

等价于

$$\text{对于} \forall x \in PATH_{u,v}, \text{都有} x \in SCC_u, \text{且} u \text{为} SCC_u \text{的根节点}$$

- 右推左：u 是根节点，所以 $low_u = dfn_u$，根据推论 4，可得成立。
- 左推右：$low_u = dfn_u$，所以 u 是根节点，根据推论 4 利用反证法，可得成立。

通俗来讲，就是在树的一条链上，两个 $low = dfn$ 的节点之间的所有 $low < dfn$ 的点都在深度较浅的那个 $low = dfn$ 的点的强联通分量中。

强连通分量

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

接下来就是如何正确求出 low 数组了。重点在横向边：

其实“从 x 的子树中的任意点经过一条非树边所能到达的，且从该点也可以回到 x 的点。”这句话就说明 x 和该点在一个强联通分量中。

推论 6

对于横向边 (u,v)，如果 $\exists x \in PATH_{v,lca(u,v)},, x \neq lca(u,v)$, 使得$low_x = dfn_x$，那么 u 和 v 就不在一个强联通分量中。

根据推论 5 可得。

接下来就是如何正确求出 low 数组了。重点在横向边：
其实“从 x 的子树中的任意点经过一条非树边所能到达的，且从该点也可以回到 x 的点。”这句话就说明 x 和该点在一个强联通分量中。

推论 6

对于横向边 (u,v)，如果 $\exists x \in PATH_{v,lca(u,v)},, x \neq lca(u,v)$, 使得$low_x = dfn_x$，那么 u 和 v 就不在一个强联通分量中。

根据推论 5 可得。

接下来就是如何正确求出 low 数组了。重点在横向边：
其实“从 x 的子树中的任意点经过一条非树边所能到达的，且从该点也可以回到 x 的点。”这句话就说明 x 和该点在一个强联通分量中。

推论 6

对于横向边 (u, v)，如果 $\exists x \in PATH_{v,lca(u,v)},, x \neq lca(u, v)$, 使得$low_x = dfn_x$，那么 u 和 v 就不在一个强联通分量中。

根据推论 5 可得。

根据上面的推论，我们就能求出强联通分量了！我们先写一个朴素的代码：

```cpp
int cnt, top, scnt, dfn[MAXN], low[MAXN], stk[MAXN];
vector<int> scc[MAXN];
bool instk[MAXN], inscc[MAXN];
void findscc(int x, const vector<int> &vec) {
    if(inscc[x]) return ;
    vec.push_back(x), inscc[x] = true;
    for(int y : son[x]) findscc(y);
}
void faketarjan(int x) {
    dfn[x] = low[x] = ++cnt, stk[++top] = x, instk[x] = true;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) faketarjan(y), low[x] = min(low[x], low[y]);
        else if(instk[y]) low[x] = min(low[x], dfn[y]);
        else if(dfn[y] < dfn[x] && !inscc[y]) low[x] = min(low[x], dfn[y]);
    }
    instk[x] = false, --top;
    if(low[x] == dfn[x]) findscc(x, scc[++scnt]);
}
```

在 Tarjan 中，维护了一个栈，与前面用到的栈不同，这个栈是这样维护的：

- 遍历到 x 时将 x 入栈。
- 在遍历完与 x 相连的所有点之后，如果 $dfn_x = low_x$，那么不断弹栈，直到将 x 弹出。
- 弹出的所有点就在一个强联通分量中，搜索到 x 时在栈中的点就都能回到 x。

在 Tarjan 中，维护了一个栈，与前面用到的栈不同，这个栈是这样维护的：

- 遍历到 x 时将 x 入栈。
- 在遍历完与 x 相连的所有点之后，如果 $dfn_x = low_x$，那么不断弹栈，直到将 x 弹出。
- 弹出的所有点就在一个强联通分量中，搜索到 x 时在栈中的点就都能回到 x。

在 Tarjan 中，维护了一个栈，与前面用到的栈不同，这个栈是这样维护的：

- 遍历到 x 时将 x 入栈。
- 在遍历完与 x 相连的所有点之后，如果 $dfn_x = low_x$，那么不断弹栈，直到将 x 弹出。
- 弹出的所有点就在一个强联通分量中，搜索到 x 时在栈中的点就都能回到 x。

在 Tarjan 中，维护了一个栈，与前面用到的栈不同，这个栈是这样维护的：

- 遍历到 x 时将 x 入栈。
- 在遍历完与 x 相连的所有点之后，如果 $dfn_x = low_x$，那么不断弹栈，直到将 x 弹出。
- 弹出的所有点就在一个强联通分量中，搜索到 x 时在栈中的点就都能回到 x。

强连通分量

在 Tarjan 中，维护了一个栈，与前面用到的栈不同，这个栈是这样维护的：

- 遍历到 x 时将 x 入栈。
- 在遍历完与 x 相连的所有点之后，如果 $dfn_x = low_x$，那么不断弹栈，直到将 x 弹出。
- 弹出的所有点就在一个强联通分量中，搜索到 x 时在栈中的点就都能回到 x。

除 Tarjan 以外，还有一些其他的算法可以求强联通分量，如 Kosaraju 算法和 Garbow 算法，详情见OIWiKi 强联通分量板块

强连通分量示例代码


```cpp
int cnt, top, scnt, dfn[MAXN], low[MAXN], stk[MAXN];
vector<int> scc[MAXN];
bool instk[MAXN];
void tarjan(int x) {
    dfn[x] = low[x] = ++cnt, stk[++top] = x, instk[x] = true;
    for(int y : son[x]) {
        if(!dfn[y]) tarjan(y), low[x] = min(low[x], low[y]);
        else if(instk[y]) low[x] = min(low[x], dfn[y]);
    }
    if(dfn[x] == low[x]) { // 弹栈
        ++scnt;
        while(stk[top] != x) scc[scnt].push_back(stk[top]), instk[stk[top--]] =
            false;
        scc[scnt].push_back(x), instk[x] = false, --top;
    }
}
```

概览

缩点

在某些题中，一个强联通分量可以看做一个超级点，将一个强联通分量缩成一个点后，整张图就变成了一张 DAG，在这张 DAG 上可以再跑一些其他东西。

例题（洛谷 P3387）

给定一个 n 个点 m 条边有向图，每个点有一个权值，求一条路径，使路径经过的点权值之和最大。你只需要求出这个权值和。

强联通分量缩点

缩点

在某些题中，一个强联通分量可以看做一个超级点，将一个强联通分量缩成一个点后，整张图就变成了一张 DAG，在这张 DAG 上可以再跑一些其他东西。

例题（洛谷 P3387）

给定一个 n 个点 m 条边有向图，每个点有一个权值，求一条路径，使路径经过的点权值之和最大。你只需要求出这个权值和。

强联通分量缩点示例代码

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fu(i, l, r) for(int i = (l); i <= (r); ++i)
#define fd(i, r, l) for(int i = (r); i >= (l); --i)
#define fv(i, vec) for(auto i : vec)
using namespace std;
const int MAXN = 1e5 + 50;
int n, m, a[MAXN], b[MAXN];
int cnt, top, scnt, dfn[MAXN], low[MAXN], stk[MAXN];
int bel[MAXN], d[MAXN], f[MAXN];
vector<int> son[MAXN], son2[MAXN];
bool instk[MAXN], flag[MAXN];

void tarjan(int x) {
    dfn[x] = low[x] = ++cnt, stk[++top] = x, instk[x] = true;
    fv(y, son[x]) {
        if(!dfn[y]) tarjan(y), low[x] = min(low[x], low[y]);
        else if(instk[y]) low[x] = min(low[x], dfn[y]);
    }
    if(dfn[x] == low[x]) { // 弹栈
        ++scnt;
        while(stk[top] != x) {
            bel[stk[top]] = scnt, instk[stk[top]] = false;
            b[scnt] += a[stk[top--]];
        }
        bel[x] = scnt, instk[x] = false, b[scnt] += a[x], --top;
    }
}
```

```cpp
int topsort() {
    queue<int> q; int ans = 0;
    fu(i, 1, scnt) if(!d[i]) q.push(i), f[i] = b[i];
    while(!q.empty()) {
        int x = q.front(); q.pop();
        ans = max(ans, f[x]);
        fv(y, son2[x]) {
            --d[y], f[y] = max(f[y], f[x] + b[y]);
            if(!d[y]) q.push(y);
        }
    }
    return ans;
}
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false), cin.tie(nullptr),
        cout.tie(nullptr);
    cin >> n >> m;
    fu(i, 1, n) cin >> a[i];
    int u, v; fu(i, 1, m) cin >> u >> v, son[u].push_back(v);
    fu(i, 1, n) if(!dfn[i]) tarjan(i);
    fu(i, 1, n) fv(j, son[i]) if(bel[i] != bel[j])
        son2[bel[i]].push_back(bel[j]), ++d[bel[j]];
    cout << topsort() << '\n';
    return 0;
}
```

割点的定义

首先明确，强连通分量是有向图中的概念，割点和割边是无向图中的概念。
对于一个无向图，如果把一个点删除后这个图的极大连通分量数增加了，那么这个点就是这个图的割点。

割点的判定

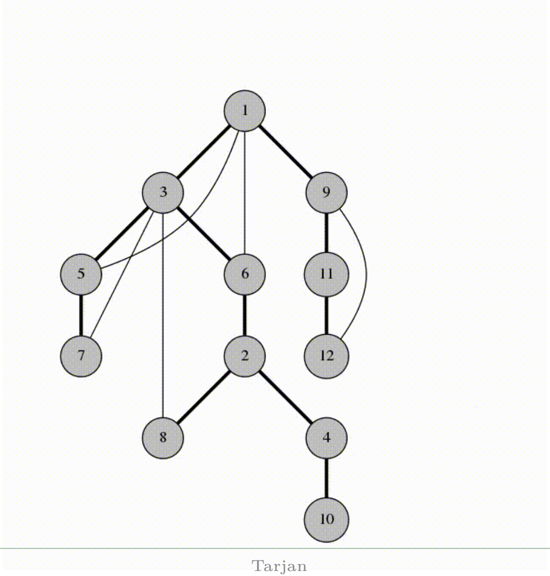
对于一个点 u，如果 u 是整个搜索树的根节点，且他不止一个儿子节点，那么他是一个割点。如果 u 不是搜索树的根节点，那么当 $low[v] \geq dfn[u]$ 时，这是一个割点

割点的判定


```cpp
int son[N], low[N], dfn[N], tot, cut[N];
vector<int> G[N];
void dfs(int u, int rt){
    dfn[u] = low[u] = ++tot;
    for(auto v: G[u]) {
        if(!dfn[v]){
            dfs(v, rt), low[u] = min(low[u], low[v]);
            if(u == rt)++son[u];
            if(low[v] >= dfn[u] && u != rt) cut[u] = 1;
        } else low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
    if(u == rt && son[u] > 1) cut[u] = 1;
}
```

点双联通分量的定义与求解

点双联通分量的定义：没有割点的极大联通子图为点双连通分量。
注意，一个割点一定属于多个点双连通分量
点双联通分量的求解: 当我们发现节点 u 为割点时，将所有在 u 子树内，并且在栈中的点弹栈，注意 u 不弹栈。



1
3
9
5
6
11
7
2
12
8
4
10

点双的求解


```
const int N = 5e5 + 5, M = 4e6 + 5;
int low[N], dfn[N], tot, top, vcc_cnt, e[M << 1], stk[N], deg[N];
vector<int> vcc[N], G[N];
void get_vcc(int u, int pre){
    dfn[u] = low[u] = ++tot, stk[++top] = u;
    for(auto i: G[u]){ int v = e[i];
        if(!dfn[v]){
            get_vcc(v, i ^ 1), low[u] = min(low[u], low[v]);
            if(low[v] >= dfn[u]){
                ++vcc_cnt;
                do vcc[vcc_cnt].push_back(stk[top]);
                while(stk[top--] != v);
                vcc[vcc_cnt].push_back(u);
            }
        }
        else if(i != pre) low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
}
```

概览

割边的定义

对于一个无向图，如果把一个边删除后这个图的极大连通分量数增加了，那么这个点就是这个图的割边。
割边也被称作桥

割边的判定

对于一条边，在搜索树上的顺序是从 u 走到 v, 如果 $low[v] > dfn[u]$, 那么这条边是割边。

割边的判定


```cpp
int low[N], dfn[N], tot, top, ecc_cnt, e[M << 1], stk[N], deg[N];
vector<int> ecc[N], G[N];
void get_ecc(int u, int pre){
    dfn[u] = low[u] = ++tot, stk[++top] = u;
    for(auto i: G[u]) {
        int v = e[i];
        if(!dfn[v]) get_ecc(v, i ^ 1), low[u] = min(low[u], low[v]);
        else if(i != pre) low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
    if(dfn[u] == low[u]) {
        ++ecc_cnt;
        do ecc[ecc_cnt].push_back(stk[top]); while(stk[top--] != u);
    }
}
```

边双连通分量的定义与求解

边双联通分量的定义：没有割边的极大联通子图为边双连通分量。有两种求解方案

边双连通分量的求解 I

先将图中所有的桥求出。
对于某个点开始深搜。
深搜时不能走桥，所能搜到的所有点就是一个边双。

边双连通分量的求解 II

与求强连通分量完全一样。
当 $low[u] = dfn[u]$ 时开始弹栈，直到弹出 u 为止。

边双连通分量的求解 II

```
int low[N], dfn[N], tot, top, ecc_cnt, e[M << 1], stk[N], deg[N];
vector<int> ecc[N], G[N];
void get_ecc(int u, int pre){
    dfn[u] = low[u] = ++tot, stk[++top] = u;
    for(auto i: G[u]) {
        int v = e[i];
        if(!dfn[v]) get_ecc(v, i ^ 1), low[u] = min(low[u], low[v]);
        else if(i != pre) low[u] = min(low[u], dfn[v]);
    }
    if(dfn[u] == low[u]) {
        ++ecc_cnt;
        do ecc[ecc_cnt].push_back(stk[top]); while(stk[top--] != u);
    }
}
```