莫反、迪利克雷卷积、杜教筛

Epsilon

北京理工大学

2023 年 8 月 4 日

概览

唯一分解定理

任意正整数 n 皆能被表示成 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}$ 的形式，而且表示方法是唯一的。其中，$p_1,p_2,...,p_k$ 都是质数。

例如：

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

唯一分解定理

唯一分解定理

任意正整数 n 皆能被表示成 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_k^{e_k}$ 的形式，而且表示方法是唯一的。其中，$p_1, p_2, ..., p_k$ 都是质数。

例如：

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

莫比乌斯函数

莫比乌斯函数

设 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$，定义莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 的值为：

1. 若 $\max(e_i) > 1$，则 $\mu(n) = 0$；
2. 否则，$\mu(n) = (-1)^k$。

例如：

$$\mu(2) = -1$$
$$\mu(3) = -1$$
$$\mu(4) = 0$$
$$\mu(6) = 1$$
$$\mu(1) = 1$$

莫比乌斯函数

莫比乌斯函数

设 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$，定义莫比乌斯函数 $\mu(n)$ 的值为：

1. 若 $\max(e_i) > 1$，则 $\mu(n) = 0$；
2. 否则，$\mu(n) = (-1)^k$。

例如：

$$\mu(2) = -1$$
$$\mu(3) = -1$$
$$\mu(4) = 0$$
$$\mu(6) = 1$$
$$\mu(1) = 1$$

代码实现

用线性筛求出 1 到 n 中所有数的莫比乌斯函数值:

```
int pri[maxn], cnt, mu[maxn], isnp[maxn];
void init(int n) {
    mu[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= n; ++i) {
        if(!isnp[i])pri[++cnt] = i, mu[i] = -1;
        for(int j = 1; j <= cnt && pri[j]*i <= n; ++j) {
            isnp[i*pri[j]] = 1;
            if(i%pri[j] == 0)break;
            mu[i*pri[j]] = -mu[i];
        }
    }
}
```

莫比乌斯反演~~（莫比乌斯魔术）~~

若两个函数满足：

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

则有：

$$f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}F(\frac{n}{d})\mu(d)$$

如果我们知道 F 的值以及 $F(n)=\sum_{d|n}f(d)$，要求 f 的值，此时就可以使用莫比乌斯反演。
这是为什么呢？

莫比乌斯反演~~（莫比乌斯魔术）~~

若两个函数满足：

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

则有：

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} F(\frac{n}{d})\mu(d)$$

如果我们知道 F 的值以及 $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$，要求 f 的值，此时就可以使用莫比乌斯反演。

这是为什么呢？

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演 ~~(莫比乌斯魔术)~~

若两个函数满足:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

则有:

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} F(\frac{n}{d})\mu(d)$$

如果我们知道 F 的值以及 $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$,要求 f 的值,此时就可以使用莫比乌斯反演。这是为什么呢?

概览

变换求和号

- 求和号：$\sum$
- 本质上是若干个值做加法。
- 由于加法具有交换律、结合律，以及乘法的分配律，求和号之间可以进行各种各样的变换。

本篇中求和号的约定

- $\sum_{i=l}^{r} f(i)$ 表示 $f(l)+f(l+1)+\ldots+f(r)$
- $\sum_{i=s} f(i)$ 表示 $f(s)+f(s+1)+\ldots$
- $\sum_{\mathrm{condition}(x)} f(x)$ 表示枚举所有满足条件 condition 的数 x，并对 $f(x)$ 求和
- $\sum a+b=b+\sum a, \sum(a+b)=\sum a+\sum b$

变换求和号

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i,i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(id,d)$

变换求和号

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i,i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(id,d)$

变换求和号

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i, i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(id,d)$

变换求和号

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i,i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor} f(id,d)$

变换求和号

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i, i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(id,d)$

变换求和号

例子

1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(i,j)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} f(i,j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} f(i,j)$
3. $\sum_{i=1}^{n} k \times f(i) = k\sum_{i=1}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n}(f(i)+g(i)) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i)$
5. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$
6. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i,i\in[1,n]} f(i,d) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(id,d)$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**互质正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为积性函数。

完全积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为完全积性函数。

完全积性函数一定是积性函数。

积性函数

积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**互质正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为积性函数。

完全积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为完全积性函数。

完全积性函数一定是积性函数。

积性函数

积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**互质正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为积性函数。

完全积性函数

如果函数 f 满足对于任意的一对**正整数** a, b 都满足：

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

则称 f 为完全积性函数。

完全积性函数一定是积性函数。

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

常见的积性函数

- $\epsilon(n) = [n = 1]$：元函数，只有当 $n = 1$ 时为 1，其余时候为 0。完全积性函数
- $I(n) = 1$：恒等函数，值永远是 1。完全积性函数
- $id(n) = n$：单位函数，值与自变量相等。完全积性函数
- $\mu(n)$：莫比乌斯函数。积性函数
- $\varphi(n)$：欧拉函数，$[1, n]$ 内与 n 互质的数的个数。积性函数
- $d(n)$：约数个数，$d(n) = \sum_{d|n} 1$。积性函数
- $\sigma(n)$：约数和函数，$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$。积性函数

求解积性函数

- 打表发现，n 以内质数的个数大约在 $O(\frac{n}{\log n})$ 的级别。
- 同时可以证明，n 以内形为 p^k 的数的个数与质数个数是同一个数量级的。
- 任意积性函数 f，只要对于任意质数 p 的任意次方，都可以在 $O(\log n)$ 的复杂度内计算出 $f(p^k)$ 的值，就可以用线性筛 $O(n)$ 求出 $1 \sim n$ 所有位置的值。

n	10^5	10^6	10^7	10^8
p 的个数	9592	78498	664579	5761455
p^k 的个数	9700	78734	665134	5762859

求解积性函数


```
void solve() {
    f[1] = calc(1);
    for(int i = 2; i <= n; ++i) {
        if(!isnp[i])pri[++cnt] = i, mnp[i] = i, f[i] = calc(i);
        for(int j = 1; j <= cnt && pri[j]*i <= n; ++j) {
            isnp[i*pri[j]] = 1;
            if(i%pri[j] == 0) {
                mnp[i*pri[j]] = mnp[i]*pri[j];
                if(i == mnp[i])f[i*pri[j]] = calc(i*pri[j]);
                else f[i*pri[j]] = f[i/mnp[i]] * f[mnp[i]*pri[j]];
                break;
            }else {
                mnp[i*pri[j]] = pri[j];
                f[i*pri[j]] = f[i] * f[pri[j]];
            }
        }
    }
}
```

概览

迪利克雷卷积

迪利克雷卷积是一种运算，定义其运算符为 $*$。参与运算的是两个函数，运算结果还是个函数：

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

若将卷积之后得到的函数记为 h，则迪利克雷卷积也可以写成：

$$h = f * g$$

运算律

交换律

迪利克雷卷积满足交换律，即：$f*g=g*f$。

证明：

$$\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})=\sum_{d|n} f(\frac{n}{d})g(d)$$

运算律

交换律

迪利克雷卷积满足交换律，即：$f * g = g * f$。

证明：

$$\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})g(d)$$

结合律

迪利克雷卷积满足结合律，即：$f*g*h=f*(g*h)$。

证明：

$$\sum_{d|n}(\sum_{t|d}f(t)g(\frac{d}{t}))h(\frac{n}{d})=\sum_{t|n}\sum_{t|d,d\le n}f(t)g(\frac{d}{t})h(\frac{n}{d})=\sum_{t|n}f(t)\sum_{t|d,d\le n}g(\frac{d}{t})h(\frac{n/t}{d/t})$$

令 $d'=\frac{d}{t}$，则有：

$$\text{上式}=\sum_{t|n}f(t)\sum_{d'|\frac{n}{t}}g(d')h(\frac{n/t}{d'})$$

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

结合律

迪利克雷卷积满足结合律，即：$f*g*h=f*(g*h)$。

证明：

$$\sum_{d|n}(\sum_{t|d}f(t)g(\frac{d}{t}))h(\frac{n}{d})=\sum_{t|n}\sum_{t|d,d\leq n}f(t)g(\frac{d}{t})h(\frac{n}{d})=\sum_{t|n}f(t)\sum_{t|d,d\leq n}g(\frac{d}{t})h(\frac{n/t}{d/t})$$

令 $d'=\frac{d}{t}$，则有：

$$\text{上式}=\sum_{t|n}f(t)\sum_{d'|\frac{n}{t}}g(d')h(\frac{n/t}{d'})$$

分配律

迪利克雷卷积满足分配律，即：$f*(g+h)=f*g+f*h$。

证明：

$$\sum_{d|n} f(d)(g(\frac{n}{d})+h(\frac{n}{d}))=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})+\sum_{d|n} f(d)h(\frac{n}{d})$$

分配律

迪利克雷卷积满足分配律，即：$f*(g+h)=f*g+f*h$。

证明：

$$\sum_{d|n} f(d)(g(\frac{n}{d})+h(\frac{n}{d}))=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})+\sum_{d|n} f(d)h(\frac{n}{d})$$

例子

1. $f * \epsilon = f$
2. $I * I = d$
3. $I * id = \sigma$

迪利克雷卷积

例子

1. $f * \epsilon = f$
2. $I * I = d$
3. $I * id = \sigma$

迪利克雷卷积

例子

1. $f * \epsilon = f$
2. $I * I = d$
3. $I * id = \sigma$

迪利克雷卷积

例子

4. $\varphi * I = id$

证明：

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}[gcd(i,\frac{n}{d})=1]$$

$$=\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=d]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|n}[gcd(i,n)=d]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}1=n$$

例子

4. $\varphi * I = id$

证明：

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}}[gcd(i,\frac{n}{d})=1]$$

$$=\sum_{d|n}\sum_{i=1}^{n}[gcd(i,n)=d]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|n}[gcd(i,n)=d]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}1=n$$

迪利克雷卷积

例子

5. $\mu * I = \epsilon$

证明：

$$\mu * I = \sum_{d|n} \mu(d)$$

设 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$，枚举因子的本质是枚举所有质因子的次数的排列组合，即：

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i_1=0}^{e_1} \sum_{i_2=0}^{e_2} ... \sum_{i_k=0}^{e_k} \mu(p_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_k^{i_k})$$

根据 μ 的定义，当某一个 $i > 1$ 时 μ 的值就是 0，因此上式可以简化为：

$$\sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} ... \sum_{i_k=0}^{1} \mu(p_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_k^{i_k})$$

例子

5. $\mu * I = \epsilon$

证明：

$$\mu * I = \sum_{d|n} \mu(d)$$

设 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k}$，枚举因子的本质是枚举所有质因子的次数的排列组合，即：

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i_1=0}^{e_1} \sum_{i_2=0}^{e_2} ... \sum_{i_k=0}^{e_k} \mu(p_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_k^{i_k})$$

根据 μ 的定义，当某一个 $i > 1$ 时 μ 的值就是 0，因此上式可以简化为：

$$\sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} ... \sum_{i_k=0}^{1} \mu(p_1^{i_1} p_2^{i_2} ... p_k^{i_k})$$

例子

5. $\mu * I = \epsilon$

假设有 x 个 i 等于 1，那么 $\mu = (-1)^x$ 所以上式等于：

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = 0^k$$

因此只有当 $n = 1$ 时，$k = 0$，式子的值才为 1，否则为 0。

概览

莫比乌斯反演

回顾一下反演的内容：

莫比乌斯反演

若 $F(n)=\sum_{d|n}f(d)$，则 $f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}F(\frac{n}{d})\mu(d)$

证明：$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$ 可以写成：

$$F=f*I$$

两边同时卷一个 μ，得：

$$F*\mu=f*I*\mu$$

由 $\mu*I=\epsilon$、$f*\epsilon=f$，得：

$$f=F*\mu$$

即：

$$f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu(\frac{n}{d})$$

莫比乌斯反演

回顾一下反演的内容：

莫比乌斯反演

若 $F(n)=\sum_{d|n}f(d)$，则 $f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}F(\frac{n}{d})\mu(d)$

证明：$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$ 可以写成：

$$F=f*I$$

两边同时卷一个 μ，得：

$$F*\mu=f*I*\mu$$

由 $\mu*I=\epsilon$、$f*\epsilon=f$，得：

$$f=F*\mu$$

即：

$$f(n)=\sum_{d|n}F(d)\mu(\frac{n}{d})$$

另一种形式：

莫比乌斯反演

若 $F(n)=\sum_{n|d}f(d)$，则 $f(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)$

证明：

$$\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)=\sum_{k=1}\mu(k)F(kn)=\sum_{k=1}\mu(k)\sum_{kn|d}f(d)$$

发现 d 的取值范围是 n 的所有倍数，因此：

$$\text{上式}=\sum_{n|d}f(d)\sum_{k|\frac{d}{n}}\mu(k)$$

第二个求和号实际上就是 $(\mu*I)(\frac{d}{n})=\epsilon(\frac{d}{n})$，当 $d=n$ 时才等于 1，否则等于 0，因此上式等于 $f(n)$。

另一种形式：

莫比乌斯反演

若 $F(n)=\sum_{n|d}f(d)$，则 $f(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)$

证明：

$$\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)=\sum_{k=1}\mu(k)F(kn)=\sum_{k=1}\mu(k)\sum_{kn|d}f(d)$$

发现 d 的取值范围是 n 的所有倍数，因此：

$$\text{上式}=\sum_{n|d}f(d)\sum_{k|\frac{d}{n}}\mu(k)$$

第二个求和号实际上就是 $(\mu*I)(\frac{d}{n})=\epsilon(\frac{d}{n})$，当 $d=n$ 时才等于 1，否则等于 0，因此上式等于 $f(n)$。

例题：P2522 [HAOI2011] Problem b

n 次询问，每次询问给定 5 个数 a、b、c、d、k，问有多少对 (x,y) 满足 $a \le x \le b, c \le y \le d$，并且 $\gcd(x,y)=k$。$n,k,a,b,c,d \le 50000$。

首先有一个观察，设：

$$\mathrm{Ans}(n,m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=k]$$

那么答案为：

$$\mathrm{Ans}(b,d)-\mathrm{Ans}(a-1,d)-\mathrm{Ans}(b,c-1)+\mathrm{Ans}(a-1,c-1)$$

现在问题就是怎么快速求出 $\mathrm{Ans}(n,m)$。

例题：P2522 [HAOI2011] Problem b

n 次询问，每次询问给定 5 个数 a、b、c、d、k，问有多少对 (x,y) 满足 $a \le x \le b, c \le y \le d$，并且 $\gcd(x,y)=k$。$n,k,a,b,c,d \le 50000$。

首先有一个观察，设：

$$\mathrm{Ans}(n,m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=k]$$

那么答案为：

$$\mathrm{Ans}(b,d)-\mathrm{Ans}(a-1,d)-\mathrm{Ans}(b,c-1)+\mathrm{Ans}(a-1,c-1)$$

现在问题就是怎么快速求出 $\mathrm{Ans}(n,m)$。

设:

$$f(k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j) = k]$$

$$F(k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[k|\gcd(i,j)]$$

那么有:

$$F(k) = \sum_{k|d} f(d)$$

根据莫反第二种形式，有:

$$f(k) = \sum_{k|d} \mu(\frac{d}{k}) f(d)$$

而 $F(k)$ 的值也可以直接算出：

$$F(k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[k|i][k|j]=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor$$

因此：

$$f(k)=\sum_{k|d}\mu(\frac{d}{k})\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor=\sum_{t=1}\mu(t)\left\lfloor\frac{n}{tk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{tk}\right\rfloor=\sum_{t=1}^{\min(n,m)/k}\mu(t)\left\lfloor\frac{n}{tk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{tk}\right\rfloor$$

利用整除分块，可以在 $O(\sqrt{\min(n,m)})$ 的复杂度内求出一个 $\mathrm{Ans}(n,m)$。

关键

构造 $F(n)=\sum_{d|n}f(d)$ 或 $F(n)=\sum_{n|d}f(d)$，并且 F 可以快速计算。

方法二

直接推式子，还是设：

$$f(k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=k]$$

变换一下：

$$f(k)=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor}[\gcd(ik,jk)=k]=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor}[\gcd(i,j)=1]$$

$[\gcd(i,j)=1]$ 其实就是 $\epsilon(\gcd(i,j))$，而：

$$\epsilon(\gcd(i,j))=(\mu*I)(\gcd(i,j))$$

所以：

$$\text{上式}=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor}\sum_{d\mid\gcd(i,j)}\mu(d)$$

方法二

枚举 d 是 $\gcd(i,j)$ 的因子，等价于枚举 d 是 i 和 j 的公因子，所以：

$$上式 = \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{k}\rfloor}\sum_{d|i,d|j}\mu(d)$$

再做一次变换：

$$上式 = \sum_{d=1}^{\min(n,m)/k}\mu(d)\sum_{d|i,i\in[1,n]}\sum_{d|j,j\in[1,m]}1 = \sum_{d=1}^{\min(n,m)/k}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{dk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{dk}\right\rfloor$$

和方法一得到的式子相同，用相同的方法做即可。

整除分块

定理 1

当 d 取遍 $[1,n]$ 所有值时，$\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 种取值。$\lceil \frac{n}{d} \rceil$ 同理。

定理 2

设 l 是满足 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor = x$ 中 d 最小的那个，r 是最大的那个，那么有：

$$r = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor n/l \rfloor} \right\rfloor$$

整除分块

定理 1

当 d 取遍 $[1,n]$ 所有值时，$\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 种取值。$\lceil \frac{n}{d} \rceil$ 同理。

定理 2

设 l 是满足 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor = x$ 中 d 最小的那个，r 是最大的那个，那么有：

$$r = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor n/l \rfloor} \right\rfloor$$

回到答案的式子：

$$f(k)=\sum_{t=1}^{\min(n,m)/k}\mu(t)\left\lfloor\frac{n}{tk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{tk}\right\rfloor$$

假设当前求出来一个区间 $[l,r]$，在 $t\in[l,r]$ 内 $\lfloor\frac{n}{tk}\rfloor$ 和 $\lfloor\frac{m}{tk}\rfloor$ 的值都不变化，都等于 x。再假设已经求出了 sum 数组：

$$\mathrm{sum}_n=\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$$

那么此时只需要给答案加上

$$(\mathrm{sum}_r-\mathrm{sum}_{l-1})\times\left\lfloor\frac{n}{tk}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{tk}\right\rfloor$$

即可。

代码实现

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn = 50010;
int pri[maxn], cnt, mu[maxn], isnp[maxn], sum[
    maxn];
void init(int n){
    mu[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= n; ++i){
        if(!isnp[i])pri[++cnt] = i, mu[i] = -1;
        for(int j = 1; j <= cnt && pri[j]*i <=
            n; ++j){
            isnp[i*pri[j]] = 1;
            if(i%pri[j] == 0)break;
            mu[i*pri[j]] = -mu[i];
        }
    }
    for(int i = 1; i <= n; ++i)sum[i] = sum[i
        -1]+mu[i];
}
int calc(int n, int m){
    int ans = 0;
    for(int l = 1, r; l <= min(n, m); l = r+1){
        r = min(n/(n/l), m/(m/l));
        ans += (n/l)*(m/l)*(sum[r]-sum[l-1]);
    }
    return ans;
}
int main(){
    init(50000);
    int n, a, b, c, d, k;
    scanf("%d", &n);
    while(n--){
        scanf("%d %d %d %d %d", &a, &b, &c, &d,
            &k);
        printf("%d\n", calc(b/k, d/k)-calc((a
            -1)/k, d/k)-calc(b/k, (c-1)/k)+
            calc((a-1)/k, (c-1)/k));
    }
    return 0;
}
```

概览

问题引入

$$求\sum_{i=1}^{n}\mu(i) 和 \sum_{i=1}^{n}\varphi(i)，其中 n \le 10^9$$

线性筛已经跑不过这个数据范围了，怎么办呢?

现在以 μ 为例，想办法怎么求出前缀和。设：

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$$

那么有：

$$\sum_{i=1}^{n}\epsilon(i)=\sum_{i=1}^{n}(\mu*I)(i)$$

等式左边显然等于 1，对等式右边进行变换：

$$\sum_{i=1}^{n}(\mu*I)(i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}\mu(\frac{i}{d})=\sum_{d=1}^{n}\sum_{d|i,i\in[1,n]}\mu(\frac{i}{d})$$

令 $t=\frac{i}{d}$，那么：

$$上式=\sum_{d=1}^{n}\sum_{t=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(t)=\sum_{d=1}^{n}S(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor)$$

因此我们列出了这样一个等式：

$$\sum_{d=1}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor) = 1$$

将 $d = 1$ 这一项留着，其他项移到右边，即：

$$S(n) = 1 - \sum_{d=2}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor)$$

整除分块，并且递归求解 $S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ 就可以求出 $S(n)$ 了。

回想一下我们干了啥：设待求函数为 f，我们找了一个函数 g 和 f 进行迪利克雷卷积，设得到的函数为 h，然后对 h 进行求和，比较等式两边，得出了 $S(n)$ 的递推式。
现在来重复一次：

$$\sum_{i=1}^{n} h(i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(\frac{i}{d})g(d) = \sum_{d=1}^{n} g(d)\sum_{d|i} f(\frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d=1}^{n} g(d)\sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(t) = \sum_{d=1}^{n} g(d)S(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor)$$

类似地，此时进行移项：

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^{n} h(i) - \sum_{d=2}^{n} g(d)S(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor)$$

因此，我们需要使得 h 的前缀和十分好求（如刚才的 ϵ）。
同时，第二个求和号我们需要进行整除分块，在计算一个区间的时候需要求出这个区间内的 g 函数的和。因此我们还需要使得 g 的区间和很好算（如刚才的 I）。

北京理工大学 BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

试求 φ 的前缀和。
容易想到还是用 I 去和 φ 卷积，因为 $\varphi * I = id$，id 的前缀和是非常好求的，并且 I 的区间和也很好求。
因此套用刚才推的式子，有：

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{d=2}^{n} S(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor)$$

时间复杂度：用线性筛预处理出 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 级别的前缀和，并且给杜教筛加上记忆化，可以做到时间复杂度为 $O(n^{\frac{2}{3}})$。
证明：https://oi-wiki.org/math/number-theory/du/

杜教筛代码实现


```
int pri[maxn], cnt, mu[maxn], sum[maxn];
map<int, int> mp;
void init() {
    int n = 1000000;
    mu[1] = 1;
    for(int i = 2; i <= n; ++i) {
        if(!isnp[i])pri[++cnt] = i, mu[i] = -1;
        for(int j = 1; j <= cnt && pri[j]*i <= n; ++j) {
            isnp[i*pri[j]] = 1;
            if(i%pri[j] == 0)break;
            mu[i*pri[j]] = -mu[i];
        }
    }
    for(int i = 1; i <= n; ++i) sum[i] = sum[i-1]+mu[i];
}
int djs_mu(int n) {
    if(i <= 1000000)return sum[n];
    if(mp.count(n))return mp[n];
    int ans = 1;
    for(int l = 2, r; l <= n; l = r+1) r = n/(n/l), ans -= (r-l+1)*djs(n/l);
    return mp[n] = ans;
}
```

北京理工大学
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY

题单

- P1447 [NOI2010] 能量采集
- P1829 [国家集训队] Crash 的数字表格 / JZPTAB
- P2257 YY 的 GCD
- P2522 [HAOI2011] Problem b
- P3172 [CQOI2015] 选数
- P3312 [SDOI2014] 数表
- P3327 [SDOI2015] 约数个数和
- P3455 [POI2007] ZAP-Queries
- P3704 [SDOI2017] 数字表格
- P3911 最小公倍数之和
- P4450 双亲数
- P6156 简单题
- P6222 「P6156 简单题」加强版
- P4213 【模板】杜教筛（Sum）
- P3768 简单的数学题

谢谢！