

复习:二分, 双指针

冯宇鹏

北京理工大学 ACM俱乐部

2023 年 7 月 19 日

二分

二分查找也称折半查找（Binary Search），它是一种效率较高的查找方法。但是，折半查找要求线性表必须采用顺序存储结构，而且表中元素按关键字有序排列。

首先，假设表中元素是按升序排列，将表中间位置记录的关键字与查找关键字比较，如果两者相等，则查找成功；否则利用中间位置记录将表分成前、后两个子表，如果中间位置记录的关键字大于查找关键字，则进一步查找前一子表，否则进一步查找后一子表。重复以上过程，直到找到满足条件的记录，使查找成功，或直到子表不存在为止，此时查找不成功。

双指针

双指针的关键在于，对于两个指针 l, r ，当 l 指针单调递增的时候， r 指针也是单调递增或递减的。因此暴力枚举时，指针移动次数是 $O(n^2)$ 的，利用单调性指针总移动次数是 $O(n)$ 级别的。

CF1805C Place for a Selfie

给定 n 条过原点的直线 $y = kx$, 以及 m 条抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 对于每条抛物线, 询问是否有一条直线使得与抛物线不相交?

数据范围

$$1 \leq n, m \leq 10^5$$
$$a, |b|, |c|, |k| < 10^8, a > 0$$

CF1805C Place for a Selfie

初中数学题。

联立一下直线和抛物线算 Δ ，解不等式发现与抛物线不相交的直线斜率 k 的范围是 $(b - 2\sqrt{ac}, b + 2\sqrt{ac})$ ，对所有 k 排序二分一下就好。

CF1324D Pair of Topics

给定长度为 n 的数组 a, b , 找到满足 $a_i + a_j > b_i + b_j$ 的数对 (i, j) 的个数 ($i < j$)

数据范围

$$2 \leq n \leq 10^5$$

$$1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$$

CF1324D Pair of Topics

简单的二分或双指针

- 1 二分。整理为 $a_i - b_i > b_j - a_j$, 令 $c_j = a_j - b_j$
枚举 i , 在有序的 c 数组上二分即可。
- 2 双指针。整理为 $(a_i - b_i) + (a_j - b_j) > 0$
经典的询问 $c_i + c_j > 0$ 的数量, 双指针板题。

时间复杂度 $O(n \log n)$

三数之和

给定长度为 n 的数组 a , 找到所有三元组 (i, j, k) 使得满足 $a_i + a_j + a_k = 0$ 且 $i < j < k$ 。

数据范围

$$\begin{aligned} 3 \leq n \leq 3000 \\ -10^5 \leq a_i \leq 10^5 \end{aligned}$$

三数之和

双指针板题。

将 a 升序排序。枚举 i ，对于双指针 j, k ，初始时 $j = i + 1, k = n$ 。

- ① $a_i + a_j + a_k = 0$, 统计答案
- ② $a_i + a_j + a_k > 0$, a_k 过大, 左移 k
- ③ $a_i + a_j + a_k < 0$, a_j 过小, 右移 j

CF1916D New Year's Problem

Vlad 有 n 个朋友，他想给每个朋友买一个礼物。有 m 个商店，如果第 j 个朋友收到来自第 i 个商店的礼物那么就会获得 p_{ij} 的欢乐值，所有朋友的总欢乐值是每人欢乐值的最小值。

Vlad 只有时间光顾至多 $n - 1$ 个商店，问总欢乐值最大能是多少？

数据范围

$$n \geq 2$$

$$2 \leq n \cdot m \leq 10^5$$

$$p_{ij} < 10^9$$

CF1619D New Year's Problem

二分答案。

转化为判定总欢乐值为 c 是不是可能的。

要满足这些条件，只需要满足两个条件。

- 满足 $p_{ij} \geq c$ 的个数多于 n 个。
- 存在一个 i 使得至少有两个 j 满足 $p_{ij} \geq c$ （鸽巢原理）

时间复杂度 $O(nm \log 10^9)$

LuoguP2868 Sightseeing Cows G

给定有 n 个点 m 条边的有向图，每个点有点权 a_i 与每条边有边权 w_i ，要求在图中找到一个环，使得环上的点权和与环上的边权和比值最大。

数据范围

$$2 \leq n \leq 1000, 2 \leq m \leq 5000$$

$$1 \leq \text{权值} \leq 1000$$

LuoguP2868 Sightseeing Cows G

二分答案。将问题转化为比值大于 c 是不是可能的。设环上的边的集合为 E , 点的集合为 V 。

即说明 $\frac{\sum_{u \in V} a_u}{\sum_{e \in E} w_e} > c$

整理一下就是, $\sum a_u - c \sum w_e > 0$ 。

对于环上的一条边 $e = (u, v)$, 将这条边新的边权视为 $w'_e = c * w_e - a_u$

原式化为 $\sum w'_e < 0$, 转化为了判负环的问题。

二分答案 + SPFA 判负环即可。

ABC294F Sugar Water 2

A 和 B 分别有 N 和 M 杯糖水。

已知 N 杯糖水中第 i 杯包含 A_i 克糖与 B_i 克水，M 杯糖水中第 i 杯有 C_i 克与 D_i 克水。

显然有 NM 种方式从 A 与 B 的糖水中各选一杯进行混合，将 NM 杯糖水按甜度从高到低排列，问第 K 大的糖水的甜度是多少？

设糖水中有 x 克糖， y 克水，糖水甜度为 $\frac{100x}{x+y}\%$ 。糖水混合时，不考虑溶液的饱和现象。

与标准答案的误差小于 10^{-9} 时认为答案正确。

数据范围

- $1 \leq N, M \leq 5 \times 10^4$
- $1 \leq K \leq N \times M$
- $1 \leq A_i, B_i, C_i, D_i \leq 10^5$
- 输入均为整数

ABC294F SugarWater 2

二分答案。

经典的询问集合第 K 大是多少，考虑一个简单的转化，第 K 大意味着在集合中比它大的有 $K - 1$ 个。因此问题转化为，寻找最大的浓度 c 使得浓度高于 c 的糖水不少于 K 个。显然是可以二分浓度 c 的。

接下来考虑给定浓度 c ，如何求得浓度高于 c 的糖水有多少杯。

ABC294F SugarWater 2

接下来考虑给定浓度 c ，如何求得浓度高于 c 的糖水有多少杯。

遍历 N 杯糖水，考虑对于第 i 杯糖水， M 杯糖水有多少杯与第 i 杯糖水混合后浓度高于 c 。

对于 N 中第 i 杯， M 中第 j 杯糖水。

$$\begin{aligned}\frac{A_i + C_j}{A_i + B_i + C_j + D_j} &\geq c \\ A_i + C_j &\geq c(A_i + B_i + C_j + D_j) \\ (1 - c)C_j + cD_j &\leq (1 - c)A_i - cB_i\end{aligned}$$

记 $p_j = (1 - c)C_j + cD_j$ ，就是询问数组 p 中小于 $(1 - c)A_i - cB_i$ 有多少个，排序二分即可。

时间复杂度 $O(kN \log M)$ ， k 为浓度 c 的二分次数。

题目

题目链接: <https://vjudge.net/contest/570111>
密码: BITACM2023