2-SAT 差分约束 欧拉回路

StudyingFather

Beijing Institute of Technology

2023 年 8 月 15 日

Contents

Contents

SAT 问题简述

SAT（Satisfiability）是这样的一类问题：给出若干个布尔变量和若干个约束条件，每个约束条件是若干变量（及其否定）作析取运算（逻辑或）构成的布尔表达式。要求给每个变量赋值，使得所有约束条件均为真，或者判定不存在这样的赋值。
下面是一个 SAT 问题的示例：

$$(x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4)$$

如果一个 SAT 问题中，任意一个约束条件中变量的数量均为 k，称其为 k-SAT 问题。比如上面的例子是一个 3-SAT 问题。

一般的 SAT 问题是 NP-Complete 的

Cook–Levin theorem[1] 指出，当 $k \geq 3$ 时，k-SAT 问题是 NP-Complete 的。

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cook-Levin_theorem

2-SAT 问题简述

2-SAT 中，每个约束条件涉及恰好两个变量，下面是一个例子：

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_4)$$

此时存在利用图论建模后求解的多项式时间复杂度算法。

2-SAT 问题的求解

观察 - 析取式中的变量求值推断规则

设 a, b 代表 2-SAT 中一个约束条件的两个组成元素（变量或变量的否定），容易发现有如下两条推断规则：

1. $a \vee b \implies \neg a \implies b$
2. $a \vee b \implies \neg b \implies a$

设存在 n 个变量，将每个变量拆分为两个点（分别代表该变量取真值或假值）。对于每一个约束条件 $a \vee b$，连边 $\neg a \to b$ 和 $\neg b \to a$，连边对应了前面描述的推断规则。

2-SAT 问题的求解（续）

如果发现存在变量 x，使得 x 和 $\neg x$ 在同一个强连通分量中，代表变量 x 取真值等价于变量 x 要取假值，这时候就出现了矛盾，代表对应的 2-SAT 问题无解。

有解的情况下，构造赋值的方案如下：对于变量 x，若 x 在缩点后的拓扑序位于 $\neg x$ 之后，则取 x 为真，反之同理。

2-SAT 问题的求解（续）

如果发现存在变量 x，使得 x 和 $\neg x$ 在同一个强连通分量中，代表变量 x 取真值等价于变量 x 要取假值，这时候就出现了矛盾，代表对应的 2-SAT 问题无解。
有解的情况下，构造赋值的方案如下：对于变量 x，若 x 在缩点后的拓扑序位于 $\neg x$ 之后，则取 x 为真，反之同理。

上述取值方案的正确性

如果此时取 x 为假，根据拓扑序，图上可能存在 $\neg x \to x$ 的路径，即代表 $\neg x \implies x$，这是不符合要求的。
取拓扑序排在后面的点作为变量的取值，可以避免遇到此类矛盾。

2-SAT 问题的求解（续）

如果发现存在变量 x，使得 x 和 $\neg x$ 在同一个强连通分量中，代表变量 x 取真值等价于变量 x 要取假值，这时候就出现了矛盾，代表对应的 2-SAT 问题无解。
有解的情况下，构造赋值的方案如下：对于变量 x，若 x 在缩点后的拓扑序位于 $\neg x$ 之后，则取 x 为真，反之同理。

上述取值方案的正确性

如果此时取 x 为假，根据拓扑序，图上可能存在 $\neg x \to x$ 的路径，即代表 $\neg x \implies x$，这是不符合要求的。
取拓扑序排在后面的点作为变量的取值，可以避免遇到此类矛盾。

使用 Tarjan 算法求解时的注意事项

Tarjan 算法标记强连通分量时，编号顺序是**反拓扑序**。

洛谷 P4171 [JSOI2010] 满汉全席[2]

有 n 种食材，每种食材有两种制作方法。另外有 m 位评审，每位评审有两道偏好的菜。
现在需要对每种食材选择**恰好一种**制作方法。试求是否存在一种菜品制作方案，使得对每位评审，都有至少一道偏好的菜被制作出来。

[2] https://www.luogu.com.cn/problem/P4171

洛谷 P4171 [JSOI2010] 满汉全席 - 解答

每种食材恰好两种做法，而每位评审的偏好可以看成逻辑或表达式。这一切都恰好对应基础的 2-SAT 模型。

洛谷 P3825 [NOI2017] 游戏[3]

有三种赛车和四种地图。四种地图中，前三种地图各有恰好一种赛车不能使用，最后一种地图所有赛车均能使用。
现在有 n 轮游戏，已知每轮游戏要使用的地图（所有赛车均能使用的地图出现恰好 d 轮），另外有若干条约束条件：若第 i 轮使用赛车 h_i，则第 j 轮需要使用赛车 h_j。
构造一种满足地图限制和约束条件的方案来玩 n 轮游戏，或说明不存在满足条件的方案。
$d \leq 8$

[3] https://www.luogu.com.cn/problem/P3825

洛谷 P3825 [NOI2017] 游戏 - 解答

先考虑 $d=0$ 的情况，此时每场游戏都有恰好两种车可用，符合 2-SAT 的模型。
对于第 i 场游戏，我们建两个点 i 和 i'，其中 i 表示第 i 场游戏使用第一种车（此处第一种指该场游戏中，可用的两种车中的第一种车），i' 表示第 i 场游戏使用第二种车。
我们接下来根据已有信息建立图论模型求解。

洛谷 P3825 [NOI2017] 游戏 - 解答

先考虑 $d=0$ 的情况，此时每场游戏都有恰好两种车可用，符合 2-SAT 的模型。

对于第 i 场游戏，我们建两个点 i 和 i'，其中 i 表示第 i 场游戏使用第一种车（此处第一种指该场游戏中，可用的两种车中的第一种车），i' 表示第 i 场游戏使用第二种车。

我们接下来根据已有信息建立图论模型求解。

1. 若第 i 场游戏本来就不能用 h_i 型车，则这条信息无用，不执行任何操作。
2. 否则，若第 j 场游戏不能用 h_j 型车，则第 i 场游戏也不能使用 h_i 型车，否则无法满足该约束条件。
3. 否则，这意味着：
    1. 若在第 i 场游戏使用了 h_i 型车，则第 j 场游戏必须使用 h_j 型车；
    2. 若在第 j 场游戏没有使用 h_j 型车，则第 i 场游戏也不能使用 h_i 型车。

根据上面的讨论连边即可。

洛谷 P3825 [NOI2017] 游戏 - 解答（续）

考虑有通用地图的情况，简单的思路是枚举该地图不用某一种车，从而将该地图转成三种一般地图求解。
状态总数达到 3^d，难以接受。
事实上只需要枚举两种一般地图。因为任意两种一般地图已经覆盖了三种车型。
从而总时间复杂度为 $O(2^d \times (n+m))$。

Contents

问题概述

差分约束系统包含若干变量 $\{x_i\}$ 和若干个不等式，每个不等式都是两个变量作差的形式，形如 $x_i - x_j \leq c_k$，其中 c_k 为常数。
目标是求出所有变量的一个赋值，使得所有不等式均被满足，或者说明不存在这样的赋值。

转化为最短路模型

这里先讨论所有不等式都是 $x_i - x_j \le c_k$ 形式的情况，其他形式的不等式可以通过变形转为此类形式。
对上述不等式移项，得到 $x_i \le x_j + c_k$，这正好对应了最短路中的**三角不等式**！

三角不等式

设 $dis(u)$ 为 s 到 u 的最短路径，对于图 G 上任意的边 (u, v)，都满足：

$$dis(v) \le dis(u) + w(u, v)$$

因此，对每个不等式 $x_i - x_j \le c_k$，从 j 点向 i 点连边权 c_k 的边。
另外创建一个源点 0，从该源点向其他点连一条边权为零的边。
以 0 为起点跑单源最短路径，如果出现负环，差分约束系统无解，否则 $x_i = dis(i)$ 即为差分约束系统的一组可行解。

转化为最短路模型（续）

对非 $x_i - x_j \leq c_k$ 形式的不等式，可以通过变形转为此类形式。

- $x_i - x_j \geq c_k$，不等式两边取反，转为 $x_j - x_i \leq -c_k$；
- $x_i - x_j = c_k$，拆成 $x_i - x_j \geq c_k$ 和 $x_i - x_j \leq c_k$。

洛谷 P4926 [1007] 倍杀测量者[4]

给出一系列不等式，形如 $x_{a_i} \geq (k_i - T)x_{b_i}$ 和 $(k_i + T)x_{a_i} > x_{b_i}$，以及一部分 x 的值，求出一个最大的 T 使得不等式组无解。

[4] https://www.luogu.com.cn/problem/P4926

洛谷 P4926 [1007] 倍杀测量者 - 解答

答案具有单调性，因此考虑二分 T 的值。
原来的不等式是乘积的形式，考虑两边同时取对数化为相加的形式：

$$
\begin{aligned}
x_{a_i} &\geq (k_i - T)x_{b_i} \\
\implies \log x_{a_i} &\geq \log(k_i - T) + \log x_{b_i}
\end{aligned}
$$

这样就可以构建差分约束系统来求解了。
当 $T = 0$ 时差分约束系统仍然有解时，说明不存在满足要求的 T 值。

洛谷 P5590 赛车游戏[5]

给出一张有向图，现在需要给每条边赋边权，要求边权是 $[1,9]$ 范围内的整数。求一种赋边权方案，使得从 1 号点到 n 号点所有可能路径的长度均相等，或判断不存在这样的赋值方案/不存在 1 号点到 n 号点的路径。$n \le 1000$，$m \le 2000$

[5] https://www.luogu.com.cn/problem/P5590

洛谷 P5590 赛车游戏 - 解答

只有在 1 到 n 路径上的边对问题的求解有影响，其他边的边权赋值是任意的。为了得到正确的赋值，需要先删除那些可以任意赋值的边。
容易发现对于图上的边 (u, v)，有如下不等式成立：

$$1 \leq dis(v) - dis(u) \leq 9$$

因此可以建立差分约束模型来求解。

Contents

概念

称无向图 G 上的一条路径是**欧拉路**，当且仅当该路径经过了图上所有边恰好一次。
称无向图 G 上的一条欧拉路是**欧拉回路**，当且仅当该路径的起点和终点重合。
如果无向图 G 存在欧拉路但没有欧拉回路，称其为**半欧拉图**。
如果无向图 G 存在欧拉回路，称其为**欧拉图**。

欧拉图判定定理

一个无向连通图 G 是欧拉图，当且仅当图上所有点的度数均为偶数。
一个无向连通图 G 是半欧拉图，当且仅当图上恰好有两个点的度数为奇数。

寻找欧拉路径/欧拉回路

基本思路是维护一个部分路径，通过对该部分路径上不断插入环，从而构造一条完整的欧拉路径/欧拉回路。
首先考虑有向图上的欧拉回路。任取一个点出发开始 DFS 遍历过程，设当前所在的点为 u。遍历每一条出边 (u, v)，如果该边未被访问，则访问 v 点，遍历完所有出边后，再将 u 插入路径。
算法结束后得到了一条反着的欧拉路径。时间复杂度为 $O(n+m)$。
对于无向图，虽然边变成了双向，但是仍然只能走一次，遍历时需要判断这一点。
对于欧拉路径，需要从奇度数点开始遍历。