BITACM 俱乐部 2023 年暑假集训 Rating#3 Solution

2023 年 8 月 5 日

A 气球

当然是容斥, 所有的方案 - 至少有一个点坏掉的正方形 + 至少有两个点坏掉的正方形 - 至少有三个点坏掉的正方形 + 至少有四个点坏掉的正方形。至少有一个点坏掉的怎么统计, 我们考虑这个点在底边, 左边有 l 个坐标右边有 r 个坐标, 上面有 h 个坐标设 z=min(l+r,h) 如果高度大于左右两边, 那么总共的是 z(z+1)2+z 如果有超出的部分, 即 z>l, 或 z>r 设差值为 n，则多出去的就是 n(n+1)2 然后两两枚举点对，最后统计出来的 3 个点要除 3，统计出来 4 个点的要除 6

B 排列

本题相当于从 n 个数选 m 个数放到相应位置，剩下的数全部不在自己该在的位置上（错排问题）

错排公式为：D[n] = (n - 1) * (D[n - 1] + D[n - 2])。

预处理出错排公式即可，注意取模与读入量。

C memset

此题出锅了 qwq

D Brotato 不会出题

不妨设 $a \le b$，假设已经固定了 a，那么最优的 b 应该是 $\lceil \frac{m}{a} \rceil$，如果这个值不超出 n 就直接取，否则不存在对应的 b。注意到要满足 $a \le b$，所以 $a \le \lceil \sqrt{m} \rceil$。因此可以枚举所有 $a \le \lceil \sqrt{m} \rceil$ 且 $a \le n$。时间复杂度 $O(min(\sqrt{m}, n))$。

E 项链

首先容易想到拆位。现在的问题是我们怎么快速计算可能的 n 种情况的答案。注意到如果我们要求的是 $max(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \& b_{(i+j)\%n})$，可以很容易发现在位运算里的 & 和乘法是拥有相同性质的，因此对于每一位来说问题就变成了类似求 $max(\sum_{i=0}^{n-1} a_i * b_{(i+j)\%n})$ 了，这

是很典的问题，只需要倍长其中一个数组（有点倍长环成链的意思）再翻转另一个数组，二者做卷积即可，这样卷出来得到的第 $n-1$ 位到第 $2n-2$ 位即为平移 $i-(n-1)$ 次的结果。但现在我们求的是 | 的最大值。由 $\overline{a|b}=\bar{a}\&\bar{b}$，因此我们只需拆位后将每一位下的 a、b 取反，然后做卷积即可，得到的项是 0 的数量，拿 n 减去即可，得到对于该位来说，每种旋转情况下 1 的数量后，乘上这一位的大小加到每种旋转方式的和里即可。

时间复杂度 $O(n\log n\log a_i)$。

F 初等魔（莫）法（反）II

先去看 H 的题解。

首先，在 H 的基础上化简得到：

$$\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}...\sum_{i_n=1}^{m}\gcd(i_1,i_2,...,i_n)=\sum_{T=1}^{m}\left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor^n\sum_{d|T}d\mu(\frac{T}{d})$$

注意到：

$$\sum_{d|T}d\mu(\frac{T}{d})=(id*\mu)(T)=\varphi(T)$$

在预处理前 $n^{2/3}$ 的 $S(n)$ 时可以用线性筛 $O(n)$ 筛出来，整体复杂度为 $O(n^{2/3})$，可过 10^{11}

实际上，两个积性函数的卷积依然是积性函数，H 和 F 都可以线性筛出来，

G gcd 和不想为 1 的 k

首先有一个结论，当 i 为素数 p 的幂时 $gcd_{j=1}^{i-1}\{C_i^j\}=p$, 否则、$gcd_{j=1}^{i-1}\{C_i^j\}=1$

这个东西可以用勒让德定理或者打表证明，因此只需要判断 k 是不是素数，如果 k 是素数，那么答案为 $\lfloor log_k n\rfloor$, 否则为 0.

下面是使用勒让德定理的粗略证明（既粗糙又简略）:

首先，

$$V_p(gcd_{j=1}^{i-1}\{C_i^j\})=min_{j=1}^{i-1}V_p(C_i^j)$$

$V_p(x)$ 为 x 唯一分解后质数 p 的幂次

使用勒让德定理，分情况讨论

$$V_p(C_n^i)=\frac{n!}{(n-i)!i!}=\sum_k\lfloor\frac{n}{p^k}\rfloor-\lfloor\frac{i}{p^k}\rfloor-\lfloor\frac{n-i}{p^k}\rfloor$$

先考虑 $n=pq,p,q$ 为两互质的素数，通过计算发现，$V_p(C_n^p)=0,V_q(C_n^q)=0$, 那么此时对于所有素数，幂次都为 0.

在 $n=p^j$ 只需证明 $V_p(C_n^i)$ 对于所有的 i 大于等于 1，且有 i 为 1，而对于其他所有质数全部为零即可

通过计算，发现 $i=p^{j-1}$ 时，$V_p(C_n^i)=1$，其余情况下，显然 $k=j$ 时，求和号里面的值为 1，$V_p(C_n^i)\geq 1$

所以此时结果中 p 的项的次数为 1，而其他素数的幂次都为 0.

由于出题人只会打表，所以不太保证上述证明的正确性。

H 初等魔（莫）法（反）

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)^2 &= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{d|i,i\le n}^{n}\sum_{d|j,j\le n}^{n}[\gcd(i,j)=d] \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor n/d\rfloor}[\gcd(i,j)=1] \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{t|\gcd(i,j)}\mu(t) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{t|i,t|j}\mu(t) \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{t=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\mu(t)\sum_{i=1}^{\lfloor n/dt\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor n/dt\rfloor} \\
&= \sum_{d=1}^{n} d^2 \sum_{t=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\mu(t)\left\lfloor\frac{n}{dt}\right\rfloor^2 \\
&= \sum_{T=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor^2\sum_{d|T}d^2\mu(\frac{T}{d})
\end{aligned}$$

第二个求和号是 $id_2*\mu$ 的形式，设 $g=id_2*\mu$，再卷上 I 可以得到 $g*I=id_2$，这样可以做杜教筛：

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} g(\frac{i}{d}) = \sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor n/d\rfloor} g(i) = \sum_{d=1}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor)$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{d=2}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \sum_{d=2}^{n} S(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor)$$

前面的求和号直接整除分块。

整体复杂度为 $O(n^{2/3}\ln n^{2/3})$。注意除 6 的分类讨论。

I 如来

如果 x 和 y 存在倍数关系，显然答案是 $|x-y|$。如果不存在倍数关系，就需要找到一个公因子 g 来完成 $x\to g\to y$ 的转移，路径长是 $x-g+y-g$，显然 g 取 gcd 的时候是最短路径，于是答案就是 $x+y-2gcd(x,y)$。

另外还有一种转移是取 x 和 y 的一个公倍数 l，路径长是 $2l-(x+y)$，取 lcm 时是最短的，这种情况的答案是 $2\frac{xy}{gcd(x,y)}-(x+y)$，作差就可以发现是比取 gcd 时大的，所以不选。

由于倍数关系时的 $|x-y|$ 也可以写成 $x+y-2gcd(x,y)$，所以答案可以统一为 $x+y-2gcd(x,y)$。时间复杂度 $O(qlogn)$。

J 鱼鱼爱小数

简单数学题。考虑怎么求小数点后的数,我们会发现小数点后 i 位的数实际上是 $x*10^i/y$(向下取整),直接用快速幂计算即可。时间复杂度 $O(logn)$