

1. 已知  $\sqrt{1021} \approx 31.953$  有 5 位有效数字, 求方程  $x^2 - 32x + \frac{3}{4} = 0$  的两个根, 要求至少有 4 位有效数字.

2. 考虑线性方程组  $Ax = b$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

- (1) 将  $A$  分解为  $A = LL^T$ , 其中  $L$  为下三角矩阵且主对角线上的元素为正;
- (2) 用 Cholesky 分解法求解  $x$ : 即先求  $Ly = b$  得到  $y$ , 再求  $L^T x = y$  得到  $x$ ;
- (3) 求向量  $b$  的 1 范数,  $\infty$  范数和 2 范数;
- (4) 求矩阵  $A$  的 1 范数,  $\infty$  范数, 2 范数和 Frobenius 范数.

3. 考虑线性方程组  $Ax = b$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -4 & 20 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

- (1) 写出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式;
- (2) 对任意初值, Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛? 说明理由;
- (3) 如果对本题的  $A$  和  $b$  施行  $\omega = \frac{1}{2}$  的松弛法, 那么该松弛法是否收敛? 说明理由.
4. 考虑特征值问题  $Ax = \lambda x$ , 其中  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

- (1) 运用幂法 (Power Method) 求按模最大的特征值, 取  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 迭代两步;
- (2) 运用带移位的反幂法 (Shifted Inverse Power Method), 即对  $A - \lambda^* I$  ( $\lambda^*$  取为 3) 施行反幂法, 求  $A$  的按模最大的特征值, 取  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 迭代两步.

5. 已知  $y = f(x)$  的函数表如下:

$x_i$	-2	0	2
$y_i$	24	0	8

用 Lagrange 二次插值多项式近似计算  $f(1)$  的值, 用 Newton 二次插值多项式近似计算  $f(-1)$  的值.

6. 已知数据组  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 请对如下形式的最小二乘拟合函数分别写出对应

的正则方程组:

$$(1) \quad y = a + bx^2; \quad (2) \quad y = axe^{bx}.$$

7. 根据  $f(x)$  的如下数据表, 计算  $I = \int_0^2 f(x)dx$ . 这里我们假定  $f(x) \in C^4[0, 2]$ .

$x_i$	0	1	2
$y_i$	1	2	5

- (1) 用复化梯形公式近似计算  $I$  得到  $I_T$ , 并给出截断误差的估计式;
- (2) 用 Simpson 公式近似计算  $I$  得到  $I_s$ , 并给出截断误差的估计式;
- (3) 先对数据表求 Lagrange 二次插值多项式  $L_2(x)$ , 再比较  $I_L = \int_0^2 L_2(x)dx$  与  $I_s$  之间的关系, 这种关系是否必然?
8. 写出代数精确度为 4 的 Gauss 型求积公式  $\int_{-1}^1 xf(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ , 其中  $x_1 < x_2$ , 需满足的非线性方程组, 求出一组解, 再用它求  $I_4 = \int_{-1}^1 x^5 dx$  和  $I_5 = \int_{-1}^1 (7x^6 + p_5(x))dx$  的近似值, 其中  $p_5(x)$  是至多 5 次多项式.
9. 已知非线性方程  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ .

- (1) 对初始有根区间  $[0, 3]$  采用对分区间法 (bisection method) 求  $f(x)$  在  $\frac{3}{2}$  附近的根, 要求迭代 2 次;
- (2) 对初值  $x_0 = 2$  的定点迭代  $x_{n+1} = g_1(x_n)$ ,  $g_1(x) = -x^3 + x^2 + 1$ , 计算迭代 2 次所得的  $x_1, x_2$ , 判断该迭代法的敛散性;
- (3) 对初值  $x_0 = 2$  的定点迭代  $x_{n+1} = g_2(x_n)$ ,  $g_2(x) = \frac{1+x+x^2-x^3}{2}$ , 求出  $x_n$  关于  $n$  的表达式, 判断该迭代法的敛散性;
- (4) 写出 Newton 法的迭代格式, 对初值  $x_0 = \frac{3}{2}$  计算迭代 1 次所得的  $x_1$ , 并证明存在  $\delta > 0$  使得对于任意初值  $x_0 \in (1-\delta, 1+\delta)$ , Newton 迭代法都是收敛的.

10. 考虑初值问题  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2y}, & 0 \leq x \leq 1. \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- (1) 取步长  $h = 0.1$ ,  $y_0 = 1$ , 计算用 Euler 法步进一次得到的  $y_1$ ;  
(注意: 只有本小题的  $h$  取具体的值, 下面的其它小题中的  $h$  假定为足够小但不取具体的数值.)
- (2) 先写出梯形法 (Trapezoidal Method) 的格式, 后手动消除该格式中需要的“非线性方程求根”的迭代法, 即把  $y_{n+1}$  用  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  和  $y_n$  表示出来;
- (3) 写出改进 Euler 法的格式.