

标准答案**北京理工大学 2006—2007 学年第二学期****《 信号与系统 》 考试试卷 (A 卷)**

(时间 120 分钟)

院/系 _____ 专业 _____ 姓名 _____ 学号 _____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

得 分	
-----	--

1. 系统的激励是 $e(t)$, 响应为 $r(t)$, 若满足 $r(t) = \frac{de(t)}{dt}$, 则该系统为 线性、时不变、因果。
(是否线性、时不变、因果?)
2. 求积分 $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 1)\delta(t - 2)dt$ 的值为 5。
3. 当信号是脉冲信号 $f(t)$ 时, 其 低频分量 主要影响脉冲的顶部, 其 高频分量 主要影响脉冲的跳变沿。
4. 若信号 $f(t)$ 的最高频率是 2kHz, 则 $f(2t)$ 的乃奎斯特抽样频率为 8kHz。
5. 信号在通过线性系统不产生失真, 必须在信号的全部频带内, 要求系统幅频特性为 一常数 相频特性为 一过原点的直线 (群时延)。
6. 系统阶跃响应的上升时间和系统的 截止频率 成反比。
7. 若信号的 $F(s) = \frac{3s}{(s+4)(s+2)}$, 求该信号的 $F(j\omega) = \frac{j3\omega}{(j\omega+4)(j\omega+2)}$ 。
8. 为使 LTI 连续系统是稳定的, 其系统函数 $H(s)$ 的极点必须在 S 平面的 左半平面。
9. 已知信号的频谱函数是 $F(j\omega) = \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)$, 则其时间信号 $f(t)$ 为 $\frac{1}{j\pi} \sin(\omega_0 t)$ 。
10. 若信号 $f(t)$ 的 $F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$, 则其初始值 $f(0_+) = \underline{1}$ 。

二、判断下列说法的正误, 正确请在括号里打“√”, 错误请打“×”。(每小题 2 分, 共 10 分)

得 分	
-----	--

1. 单位冲激函数总是满足 $\delta(t) = \delta(-t)$ (√)
2. 满足绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ 的信号一定存在傅立叶变换, 不满足这一条件的信号一定不存在傅立叶变换。 (×)
3. 非周期信号的脉冲宽度越小, 其频带宽度越宽。 (√)
4. 连续 LTI 系统的冲激响应的形式取决于系统的特征根, 于系统的零点无关。 (√)
5. 所有周期信号的频谱都是离散谱, 并且随频率的增高, 幅度谱总是渐小的。 (×)

三、计算分析题 (1、3、4、5 题每题 10 分, 2 题 5 分,

得 分	
-----	--

6 题 15 分, 共 60 分)

1. 信号 $f_1(t) = 2e^{-t}u(t)$, 信号 $f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 试求 $f_1(t) * f_2(t)$ 。(10 分)

解法一: 当 $t \leq 0$ 时, $f_1(t) * f_2(t) = 0$

$$\text{当 } 1 > t > 0 \text{ 时, } f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

$$\text{当 } t > 1 \text{ 时, } f_1(t) * f_2(t) = \int_0^1 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2e^{-t}(e - 1)$$

解法二:

$$\begin{aligned} L[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{2}{s+2} \frac{(1-e^{-s})}{s} = \frac{2}{s(s+2)} - \frac{2e^{-s}}{s(s+2)} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} - \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s+2}\right)e^{-s} \end{aligned}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = 2u(t) - 2e^{-t}u(t) - 2u(t-1) + 2e^{1-t}u(t-1)$$

2. 已知 $X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$, $|z| > 2$, 求 $x(n)$ 。(5 分)

解:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10}{z-2} - \frac{10}{z-1}, \text{ 收敛域为 } |z| > 2$$

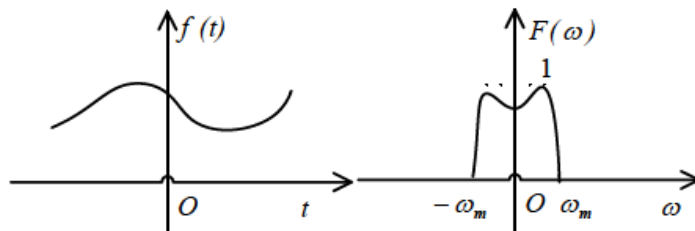
$$\text{由 } X(z) = \frac{10z}{z-2} - \frac{10z}{z-1}, \text{ 可以得到 } x(n) = 10(2^n - 1)u(n)$$

3. 若连续信号 $f(t)$ 的波形和频谱如下图所示, 抽样脉冲为冲激抽样 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 。

(1) 求抽样脉冲的频谱; (3 分)

(2) 求连续信号 $f(t)$ 经过冲激抽样后 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$; (5 分)

(3) 画出 $F_s(\omega)$ 的示意图, 说明若从 $f_s(t)$ 无失真还原 $f(t)$, 冲激抽样的 T_s 应该满足什么条件? (2 分)



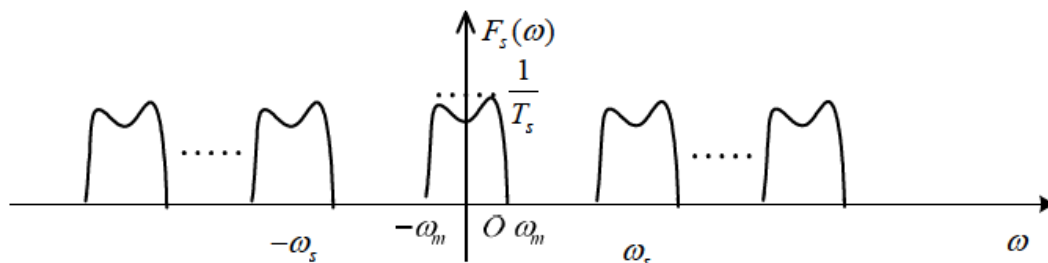
解: (1) $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$, 所以抽样脉冲的频谱

$$F[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad F_n = \frac{1}{T_s}。$$

(2) 因为 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$, 由频域抽样定理得到:

$$\begin{aligned} F[f_s(t)] &= F[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

(3) $F_s(\omega)$ 的示意图如下



$F_s(\omega)$ 的频谱是 $F(\omega)$ 的频谱以 ω_s 为周期重复, 重复过程中被 $\frac{1}{T_s}$ 所加权, 若从 $f_s(t)$ 无失真还

原 $f(t)$, 冲激抽样的 T_s 应该满足若 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$ 。

4. 已知三角脉冲信号 $f_1(t)$ 的波形如图所示

(1) 求其傅立叶变换 $F_1(\omega)$; (5 分)

(2) 试用有关性质求信号 $f_2(t) = f_1(t - \frac{\tau}{2}) \cos(\omega_0 t)$ 的傅立叶变换 $F_2(\omega)$ 。(5 分)

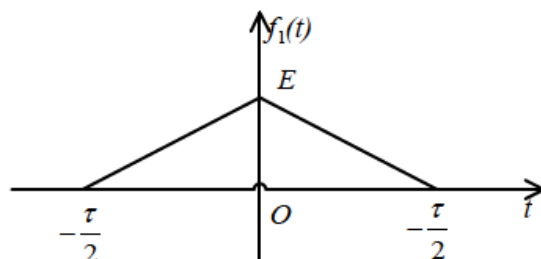
解: (1) 对三角脉冲信号求导可得: $\frac{df_1(t)}{dt} = \frac{2E}{\tau} [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t)] - \frac{2E}{\tau} [u(t) - u(t - \frac{\tau}{2})]$

$$F[\frac{df_1(t)}{dt}] = \frac{1}{j\omega} [-\frac{8E}{\tau} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4})], \text{ 可以得到 } F_1(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4}).$$

(2) 因为 $f_2(t) = f_1(t - \frac{\tau}{2})\cos(\omega_0 t)$

$$F[f(t - \frac{\tau}{2})] = e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$F[f(t - \frac{\tau}{2})\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} e^{-j(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{4}) + \frac{1}{2} e^{-j(\omega + \omega_0)\frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{4})$$



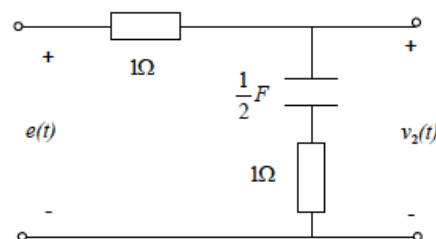
5. 电路如图所示，若激励信号 $e(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，求响应 $v_2(t)$ 并指出响应中的强迫分量、自由分量、瞬态分量与稳态分量。（10 分）

解：由 S 域模型可以得到系统函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{E(s)} = \frac{1 + \frac{2}{s}}{2 + \frac{2}{s}} = \frac{s+2}{2s+2}$$

由 $e(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，可以得到

$$E(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3} \quad , \quad \text{在此信号激励下，系统的输出为}$$



$$V_2(s) = H(s)E(s) = \frac{s+2}{2s+2} \left(\frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3} \right) = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

则
$$v_2(t) = (2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

强迫响应分量： $\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$

自由响应分量： $2e^{-t}u(t)$

瞬态响应分量： $v_2(t) = (2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

稳态响应分量： 0

6. 若离散系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

(1) 求系统函数和单位样值响应；（4 分）

(2) 讨论此因果系统的收敛域和稳定性；（4 分）

(3) 画出系统的零、极点分布图；（3 分）

(4) 定性地画出幅频响应特性曲线；（4 分）

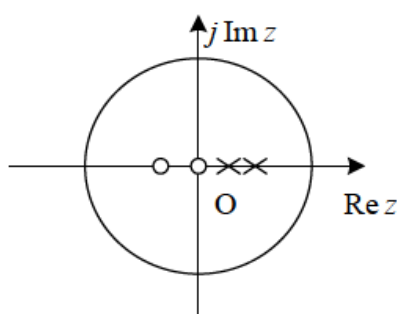
解：（1）利用 Z 变换的性质可得系统函数为：

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}} \quad |z| > \frac{1}{2}, \text{ 则单位样值响应为}$$

$$h(n) = [\frac{10}{3}(\frac{1}{2})^n - \frac{7}{3}(\frac{1}{4})^n]u(n)$$

(2) 因果系统 z 变换存在的收敛域是 $|z| > \frac{1}{2}$ ，由于 $H(z)$ 的两个极点都在 z 平面的单位圆内，所以该系统是稳定的。

(3) 系统的零极点分布图

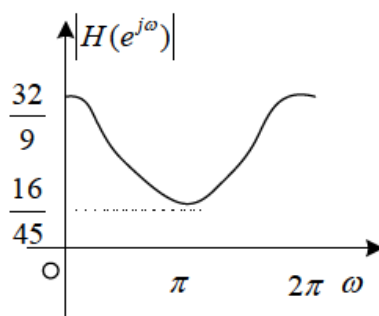


(4) 系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}(e^{j\omega} + \frac{1}{3})}{e^{j2\omega} - \frac{3}{4}e^{j\omega} + \frac{1}{8}} \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} + \frac{1}{3}|}{|e^{j\omega} - \frac{1}{2}||e^{j\omega} - \frac{1}{4}|}$$

$$\text{当 } \omega = 0 \text{ 时, } |H(e^{j\omega})| = \frac{32}{9}$$

$$\text{当 } \omega = \pi \text{ 时, } |H(e^{j\omega})| = \frac{16}{45}$$



四、简答题（1、2 二题中任选一题解答，两题都做只计第 1 题的分数，共 10 分）

得 分	
-----	--

1. 利用已经具备的知识，简述如何由周期信号的傅立叶级数出发，推导出非周期信号的傅立叶变换。（10 分）

2. 利用已经具备的知识，简述 LTI 连续时间系统卷积积分的物理意义。（10 分）

1. 解：从周期信号 FS 推导非周期信号的 FT $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$

对于非周期信号, $T_1 \rightarrow \infty$, 则重复频率 $\omega_1 \rightarrow 0$, 谱线间隔 $\Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$, 离散频率变成连续频率 ω 。

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} \cdot dt$$

在这种极限情况下 $F(n\omega_1) \rightarrow 0$, 但 $F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1}$ 可望不趋于零, 而趋于一个有限值, 且变成一个连续函数。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F(n\omega_1) \cdot T_1 \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

考察函数 $F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1}$ 或 $F(n\omega_1) \cdot T_1$, 并定义一个新的函数 $F(\omega)$ 傅立叶变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数(简称频谱函数)。

傅立叶逆变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1$$

$$F(n\omega_1) \rightarrow F(\omega) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi} \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \Delta(n\omega_1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$T_1 \rightarrow \infty \quad \omega_1 \rightarrow 0 \quad n\omega_1 \rightarrow \omega \quad \Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$$

2. 解：线性系统在单位冲激信号的作用下，系统的零状态的响应为单位冲激响应：

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

利用线性系统的时不变特性：

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

利用线性系统的均匀性：

$$e(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow e(\tau)h(t - \tau)$$

利用信号的分解，任意信号可以分解成冲激信号的线性组合：

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

利用线性系统的叠加定理：

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$$