第一次作业　王子[illegible]　1120210446

1. 求解一维空间亥姆霍兹方程格林函数.

解：$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(|x-x'|)$

先仅考虑右边信号形式.

由于是一维空间 $\Rightarrow \nabla^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + k^2 G = -\delta(x-x')$　$(x-x'>0)$

两边做拉氏变换得　$s^2 G(s) + k^2 G(s) = -e^{-sx'}$

$\Rightarrow G(s) = \frac{-e^{-sx'}}{s^2+k^2} = \frac{1}{k}\frac{k}{s^2+k^2}\cdot(-e^{-sx'})$

$\Rightarrow G_1 = -\frac{1}{k}\sin k(x-x')\,u(x-x')$　($u(x)$为阶跃函数)

由理，若 $x-x'<0$ 即是一个左边信号

$\Rightarrow G_2 = \frac{1}{k}\sin k(x-x')\,u(x'-x)$

$\Rightarrow G = G_1 + G_2 = \frac{1}{k}\sin k(x-x')\,[-u(x-x') + u(x'-x)]$

$= \frac{1}{2jk}e^{-jk|x-x'|}$

故 $G = \frac{1}{2jk}e^{-jk|x-x'|}$　在一维自由空间.

2. 求解二维空间亥姆霍兹方程的格林函数.

解：$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\rho-\rho')$　①

由数理方程，其解为　$G = CH_0^{(2)}(\rho-\rho')$

其中 $H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - jN_0(x)$

J_0、N_0 为 0阶第一类，第二类贝塞尔函数.

下面只需确定 C 的值即可。

对式① 两边积分

$\int_S(\nabla^2 G + k^2 G)\,ds = -\int_S \delta(\rho-\rho')\,dS = -1$

而 $\int_S k^2 G\,ds = Ck^2\int_S H_0^{(2)}(\rho)\,ds = Ck^2\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho H_0^{(2)}(\rho)\,d\rho\,d\theta$

$= 2\pi Ck^2\int_0^{r}\rho\,[J_0(\rho) - jN_0(\rho)]\,d\rho$

当 $r\to 0$ 时. $J_0(\rho)\to 1$，$N_0(\rho)\to\frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma\rho}{2}$

$$\Rightarrow \int_S k^2 G\,ds = 2\pi C k^2 \int_0^{r} \rho\left[1-\frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma\rho}{2}\right]d\rho = 0 \quad (r\to 0)$$

$$\int_S \nabla^2 G\,ds = \oint_l \nabla G\cdot\hat{n}\,dl$$

$$= C\oint_l \nabla H_0^{(2)}(\rho)\,\hat{n}\,dl = -C\oint_l H_1^{(2)}(\rho)\,dl$$

$$= -C\int_0^{2\pi}\left[J_1(\rho) - jN_1(\rho)\right]\rho\cdot d\theta$$

当 $\rho\to 0$ 时, $J_1(\rho)\to\frac{\rho}{2}$ $\quad N_1(\rho)\to\frac{2}{\rho}\cdot\frac{1}{\pi}$

$$\Rightarrow \int_S \nabla^2 G\,ds = -C\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho}{2} - \frac{2}{\rho}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot j\right)\cdot\rho\,d\varphi$$

$$= -2\pi C\left(\frac{\rho^2}{2} - 2\cdot\frac{1}{\pi}j\right)$$

$$= -4jC \quad (\rho\to 0)$$

$$\Rightarrow \int_S(\nabla^2 G + k^2 G)\,dS = -4jC = -1 \Rightarrow C = \frac{1}{4j}$$

故 $G = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(\rho-\rho')$ 在二维自由空间中

解 3.1

证明: $\vec{H} = K(\vec{J})$

$$= -\int \vec{J}\times\nabla G\,dv$$

其中 $G = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$

在球坐标系下: $\nabla G = \frac{\partial G}{\partial R}\cdot\hat{R} = \frac{1}{4\pi R^2}\left(-jk e^{-jkR}\cdot R - e^{-jkR}\right)$

$$= \frac{1}{4\pi R^2}e^{-jkR}(-jkR-1)\cdot\hat{R}$$

$$= G\left(-jk-\frac{1}{R}\right)\cdot\hat{R}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\int_V \vec{J}\times\nabla G\,dv = \int_V \vec{J}\times\left[\left[G\left(jk+\frac{1}{R}\right)\right]\cdot\hat{R}\right]dv$$

$$\Rightarrow \hat{n}\times\vec{H} = \hat{n}\times\int_V \vec{J}\times\hat{R}\;G\left(jk+\frac{1}{R}\right)dv$$

$$= \int_V G\left(jk+\frac{1}{R}\right)\cdot\hat{n}\times(\vec{J}\times\hat{R})\,dv$$

$$= \int_V G\left(jk+\frac{1}{R}\right)\cdot\left[(\vec{n}\cdot\hat{R})\vec{J} - (\vec{n}\cdot\vec{J})\hat{R}\right]dv$$

$\hat{n}, \hat{R}, \vec{J}$ 的方向在上图中标出, 可知在 S_t 上, $\vec{n}\cdot\hat{R}=0$ $\quad \vec{n}\cdot\vec{J}=0$

$$\Rightarrow \vec{n}\times\vec{H} = 0$$

故 S_a 上的切向电流源 $\vec{J}$ 在 S_t 上不能产生切向磁场, 证毕

JI