1.（20 分）

（1） 简述什么是栅栏效应和频谱泄露，并指出其产生的原因，以及克服的办法。

（2） $x(n)$ 是列长为 N 的复数序列，$x_{ep}(n)$，$x_{op}(n)$ 分别为其周期性共轭对称分量和周期性共轭反对称分量，$X(k)$ 为其 DFT，证明：$DFT\left(x_{ep}(n)\right)=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$，$DFT\left(x_{op}(n)\right)=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$。

2. （15 分）已知 $u(n)=\left[1\quad -4\quad 4\quad -4\right]$ 和 $v(n)=\left[3\quad -1\quad 0\quad -2\right]$，

（1） 求序列 $x(n)=u\left(\left(3-n\right)\right)_5 R_5(n)$ 和 $y(n)=v\left(\left(2+n\right)\right)_5 R_5(n)$；

（2） 求序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 5 点圆周卷积，结果中哪些值与两者的线性卷积结果相同，解释其原因；

（3） 写出利用 FFT 计算 $w(n)=u(n)+jv(n)$ 和 $z(n)=x(n)+jy(n)$ 线性卷积的主要步骤，要求尽量减少乘法运算次数，并估计运算量。

3. （15 分）

（1） $x(n)=4\delta(n)+3\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)$

求 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]$

（2） 已知 $X(k)==\begin{cases}\dfrac{N}{2}e^{j\theta} & k=m\\ \dfrac{N}{2}e^{-j\theta} & k=N-m, m\text{为正整数，且}0<m<\dfrac{N}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

N 为列长，且为偶数。求 $x(n)=IDFT\left[X(k)\right]$。

（3） 判断下列 FIR 数字滤波器是否具有线性相位特性，若有，说明理由；若没有，如何做才能使其具有线性相位特性，并给出相应的系统函数 $H(z)$

$$H(z)=(1+0.25z^{-1})(1-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)z^{-1})(1-(0.5-0.5j)z^{-1})$$

4. （15 分）

（1） 推导按频率抽取基-2FFT 算法的蝶形运算公式，并画出蝶形运算结构；

（2） 画出相应的 N=16 时的算法流程图（要求输入正序，输出反序，原位运算）；

（3） 给出复乘、复加的运算量公式，并与直接计算的 DFT 运算量比较；

（4） 结合算法流图，解释改善 DFT 运算量的基本途径。

5. （20 分）用双线性变换法设计数字巴特沃斯低通滤波器，要求在 $0 \le f \le 100Hz$ 的通带范围内幅度变化不大于 $2dB$，在 $f \ge 200Hz$ 的阻带范围内衰减不小于 $15dB$，采样频率为 $1KHz$。

（1） 确定数字滤波器的阶数 N；

（2） 确定数字滤波器的系统函数 $H(z)$

（3） 画出数字滤波器的任意一种结构实现形式。

6. （15 分）设理想数字带通滤波器的幅频响应为

$$\left|H_d(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & 0.3\pi \le |\omega| \le 0.6\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

要求用 I 型频率取样设计法，设计采样点数为 15 的线性相位 FIR 数字滤波器

（1） 确定滤波器的频域取样序列 $H(k)$；

（2） 确定滤波器的系统函数 $H(z)$ 和频率响应 $H(e^{j\omega})$；

（3） 画出数字滤波器的一种结构实现形式。

参考答案及评分标准

1. <u>（20 分）</u>

（1）<u>（10 分）</u>

栅栏效应： $X(k) \approx X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ ，好像通过一个“栅栏”观察，可以通过补零改善。频谱泄露：信号截断，频谱分量从正常频谱扩散出来，可以通过窗函数加权改善。

（2）<u>（10 分）</u>

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]$$

$$DFT\left[x_{ep}(n)\right]=\frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right]+DFT\left[x^*(N-n)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$$

$$DFT\left[x_{op}(n)\right]=\frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right]-DFT\left[x^*(N-n)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$$

或：

$$\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$$

$$j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right]$$

$$IDFT\left\{\mathrm{Re}\left[X(k)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{IDFT\left[X(k)\right]+IDFT\left[X^*(k)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]=x_{ep}(n)$$

$$IDFT\left\{j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{IDFT\left[X(k)\right]-IDFT\left[X^*(k)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]=x_{op}(n)$$

2. <u>（15 分）</u>

（1）<u>（4 分）</u> $x(n)=\left[-4\quad 4\quad -4\quad 1\quad 0\right], y(n)=\left[0\quad -2\quad 0\quad 3\quad -1\right]$

（2）<u>（6 分）</u> $x(n)*y(n)=\left[0\quad 8\quad -8\quad -4\quad 14\quad -16\quad 7\quad -1\quad 0\right]$（这一步结果可以不给出）

$x(n)⑤y(n)=\left[-16\quad 15\quad -9\quad -4\quad 14\right]$（4 分，第 1 步算错了，最多得一半）

（解释原因 2 分）5 点圆周卷积是线性卷积以 5 为周期延拓所得周期序列的主值序列，由于混叠，只有最后一个点（第 5 点，或 n=4）与线性卷积结果一样。（如果答 n=3,4 也算正确）

（3）<u>（5 分）</u>主要步骤<u>（4 分）：</u>

① $w(n) \sim M=4$，$z(n) \sim N=5$，将w(n)和z(n)分别补零到L点，$L \geq M+N-1$，$L=2^{v}$，（$L=8$），得$w'(n)$和$z'(n)$；

② 对$w'(n)$和$z'(n)$分别作 FFT，得到$W(k)$和$Z(k)$；

③ w(n)和z(n)的线性卷积结果为$[W(k)Z(k)]$的 IFFT。

运算量（1 分）

2 个L点 FFT，复乘法$2*\left(\frac{L}{2}\right)*log_2 L$，复加法：$2*L*log_2 L$

$W(k)Z(k)$，L次复乘法

1 个L点 IFFT，复乘法：$\left(\frac{L}{2}\right)*log_2 L$，复加法：$L*log_2 L$

总运算量，复乘法：$3*\left(\frac{L}{2}\right)*log_2 L+L$，复加法：$3*L*log_2 L$

3.（15 分）

（1）（5 分）

$x(n)=[4\ 3\ 3\ 4]$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}=[14\ 1+j\ 0\ 1-j]$$

（2）（5 分）

$$x(n)=\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{N}}\left[\frac{N}{2} e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+\frac{N}{2} e^{-j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}\right]$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)$$

（3）（5 分）

没有（2 分）

$z_1=-0.25$，$z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$，$z_3=0.5-0.5j$

$$\mathrm{H(z)}=(1-\mathrm{z}_1\mathrm{z}^{-1})\left(1-\frac{1}{z_1}\mathrm{z}^{-1}\right)(1-\mathrm{z}_2\mathrm{z}^{-1})(1-\mathrm{z}_2^*\mathrm{z}^{-1})(1-\mathrm{z}_3\mathrm{z}^{-1})\left(1-\frac{1}{z_3}\mathrm{z}^{-1}\right)(1-\mathrm{z}_3^*\mathrm{z}^{-1})\left(1-\frac{1}{z_3^*}\mathrm{z}^{-1}\right)$$

4.（15 分）

（1）（5 分）推导

$x(n) \sim N = 2^v$，将$x(n)$分为前后两半：$x(n)$和$x\left(n+\frac{N}{2}\right)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{\left(n+\frac{N}{2}\right)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+W_N^{\frac{N}{2}k} x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+(-1)^k x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{nk}，\ 0 \leq k \leq N-1$$

令$k=2r$及$k=2r+1$，$r=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{2rn}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{(2r+1)n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{n} W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$

令

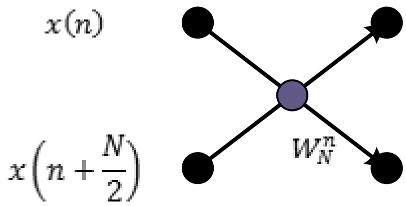
$$x_1(n)= x(n)+x\left(n+\frac{N}{2}\right)$$

$$x_2(n)=\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^{n}$$

则

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$

$$X(2r+1)\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$



$$x_1(n) \overset{\Delta}{=} x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right)$$

$$x_2(n) \overset{\Delta}{=} \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] W_N^n \qquad n = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

（2）（5 分）输入输出顺序 2 分，系数 2 分，蝶形图是否规范 1 分

（3）（3 分）

FFT，复乘法：$\left(\frac{N}{2}\right) * log_2 N$，复加法：$N * log_2 N$

直接计算 DFT：复乘法：N^2,复加法：$N(N-1)$

（4）（2 分）

利用W_N^{nk}的对称性和周期性使长序列的 DFT 分解为更小点数的 DFT，分解一次运算量减少差不多一半，$N = 2^v$时经过v次分解后分解为 *N/2* 个两点 DFT，极大减少了计算量。（重点是要答出分解为跟小点数的 DFT）

（5）（20 分）

（1）（8 分）

$\omega_p = 2\pi f_p T = 0.2\pi$，$\omega_s = 2\pi f_s T = 0.4\pi$，$\alpha_\mathrm{p} = 2dB$，$\alpha_\mathrm{s} = 15dB$（2 分）

$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$，$\Omega_s = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega_s}{2})$（2 分）

$$\begin{cases} -20\log_{10}\left|H_a(j\Omega_p)\right| \le \alpha_p \\ -20\log_{10}\left|H_a(j\Omega_s)\right| \ge \alpha_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\log_{10}\left|H_a(j\Omega_p)\right|^2 \le \alpha_p \\ -10\log_{10}\left|H_a(j\Omega_s)\right|^2 \ge \alpha_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\log_{10}\left[1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -\alpha_p \\ -10\log_{10}\left[1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -\alpha_s \end{cases}$$

取等号求解方程组

$$N = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}}-1}\right)}{2\log_{10}\left(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)} \approx 2.46$$

（4 分，方法正确，结果计算错误 2 分）

（2）（8 分）

取$N=3$，

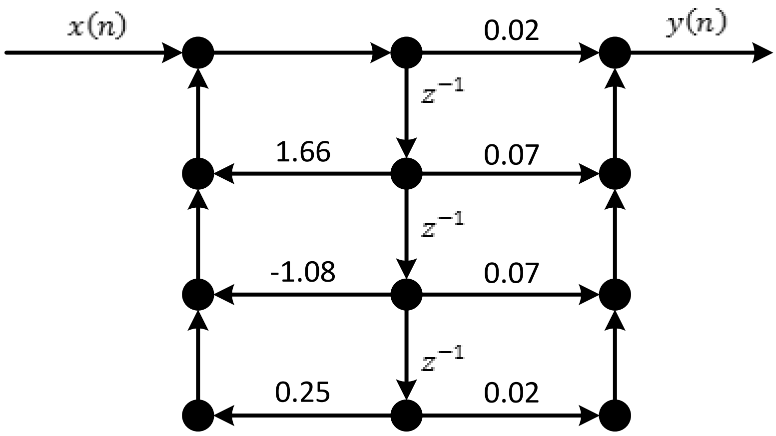
$$\Omega_c=\frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1}}\approx 710.6$$

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^3}{s^3+2\Omega_c s^2+2\Omega_c^2 s+\Omega_c^3}=\frac{358819147.02}{s^3+1421.2s^2+1009904.72s+358819147.02}$$

（4 分，极点正确或公式正确，结果计算错误 2 分）

$$H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.02+0.07z^{-1}+0.07z^{-2}+0.02z^{-3}}{1-1.66z^{-1}+1.08z^{-2}-0.25z^{-3}}$$

（4 分，映射关系正确，结果计算错误 2 分）



（3）（4 分，结构正确，系数错误 2 分）

6.（15 分）

（1）（15 分）

$H_k=[0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$（要有判断过程）

$\theta(k)=-\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)$，$k=0,\cdots,N-1$　　或

$$\theta(k)=\begin{cases}-\dfrac{2\pi}{N}k\left(\dfrac{N-1}{2}\right), & k=0,\cdots,\dfrac{N-1}{2}\\ \dfrac{2\pi}{N}(N-k)\left(\dfrac{N-1}{2}\right), & k=\dfrac{N+1}{2},\cdots,N-1\end{cases}$$

$H(k)=H_k e^{j\theta(k)}$（6 分）

（以下 2 分）

$H(3)=e^{-j\frac{14}{15}3\pi}=e^{-j\frac{12}{15}\pi}=e^{-j\frac{4}{5}\pi}=-0.81-0.59j$

$H(4)=e^{-j\frac{14}{15}4\pi}=e^{-j\frac{26}{15}\pi}=e^{j\frac{4}{15}\pi}=0.67+0.74j$

$H(11)=e^{j\frac{14}{15}4\pi}=e^{j\frac{26}{15}\pi}=e^{-j\frac{4}{15}\pi}=0.67-0.74j$

$H(12)=e^{j\frac{14}{15}3\pi}=e^{j\frac{12}{15}\pi}=e^{j\frac{4}{5}\pi}=-0.81+0.59j$

$$H(0)=H(1)=H(2)=H(5)=H(6)=H(7)=H(8)=H(9)=H(10)=H(13)=H(14)=0$$

（2）（4 分$H(z)$2 分，$H(e^{j\omega})$2 分）

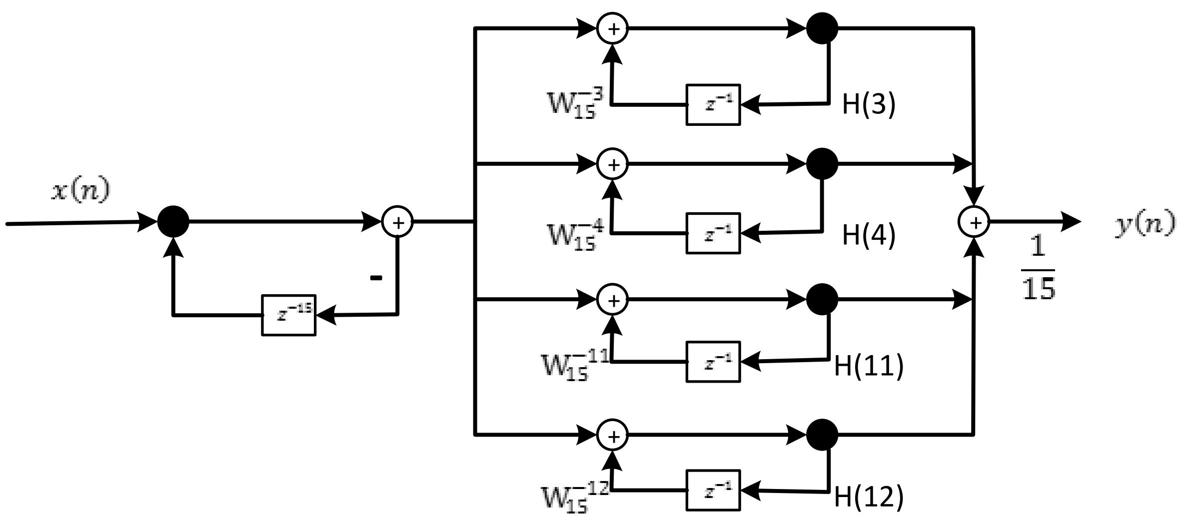
$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$　　或

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\left[\frac{H_0}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{2(-1)^k H_k\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)(1-z^{-1})}{1-2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

$$\Rightarrow\ H(z)=\frac{1-z^{-15}}{15}\left[\frac{-1.62+1.62z^{-1}}{1-0.62z^{-1}+z^{-2}}+\frac{1.34-1.34z^{-1}}{1+0.21z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

$H(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{-j\frac{\pi k}{N}}\frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N})}$　　或

$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$



（3）（3 分）