

第五章 静态场的边值问题

静态场是指与时间无关的电场和磁场。除少数静态场问题可由场的基本方程式直接计算外,对大多数问题,一般要结合给定的边界条件求解辅助位的泊松方程和拉普拉斯方程或采用一些特殊的求解方法,这称之为解边值问题。本章将介绍静态场边值问题的几种常用求解方法——分离变量法、镜像法、复变函数法和有限差分法。

§ 5.1 唯一性定理和解的叠加原理

一. 唯一性定理

唯一性定理阐明了泊松方程和拉普拉斯方程在给定边值时解的唯一性。该定理可以简述为:在给定的区域内,泊松方程(或拉普拉斯方程)满足所给定的全部边界条件的解是唯一的。

给定边值的形式可分为三类:第一类边界条件是给定全部边界上的函数值,若 Φ 表示区域内的位函数,此类边界条件可记作 $\Phi|_s = C_1$,第一类边界条件又称作“狄利赫利”边界条件;第二类边界条件是给出全部边界上函数的法向导数值,记作 $\partial\Phi/\partial n|_s = C_2$,又称作“聂曼”边界条件;第三类边界条件是给定一部分边界 s_1 上的函数值,而其余边界 s_2 上给出函数的法向导数值,记作 $\Phi|_{s_1} = C_1, \partial\Phi/\partial n|_{s_2} = C_2$,称为混合边界条件。

下面利用反证法证明唯一性定理。因为拉普拉斯方程只是泊松方程的特例,故仅证明泊松方程的情况。假设在区域 τ 内存在两个不同的函数 Φ_1 和 Φ_2 都满足相同的泊松方程 $\nabla^2\Phi = f$,并且在区域边界 s 上满足同样的边界条件。令 $\Phi' = \Phi_1 - \Phi_2$,对其做拉普拉斯运算可得

$$\nabla^2\Phi' = \nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2\Phi_1 - \nabla^2\Phi_2 = f - f = 0 \quad (5-1)$$

在矢量恒等式 $\nabla \cdot (u\vec{F}) = u\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F}\nabla u$ 中,令 $u = \Phi', \vec{F} = \nabla\Phi'$ 可得

$$\nabla \cdot (\Phi' \nabla \Phi') = \Phi' \nabla^2 \Phi' + \nabla \Phi' \cdot \nabla \Phi'$$

将式(5-1)代入上式,得

$$\nabla \cdot (\Phi' \nabla \Phi') = (\nabla \Phi')^2$$

对上式两边在区域 τ 内作体积分,然后对左边运用散度定理,得

$$\oint_s (\Phi' \nabla \Phi') \cdot d\vec{s} = \int_\tau (\nabla \Phi')^2 d\tau$$

将 $\nabla \Phi' \cdot d\vec{s} = (\partial\Phi'/\partial n) ds$ 代入上式得

$$\oint_s \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial n} ds = \int_\tau (\nabla \Phi')^2 d\tau \quad (5-2)$$

如果所给边界条件是第一类边界条件 $\Phi|_s = C_1$,由 Φ_1 和 Φ_2 满足相同边界条件的假设可得

$$\Phi'|_s = (\Phi_1 - \Phi_2)|_s = \Phi_1|_s - \Phi_2|_s = C_1 - C_1 = 0$$

若是第二类边界条件 $\partial\Phi/\partial n|_s = C_2$,则有

$$\left. \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right|_s = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_1 - \Phi_2) \Big|_s = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right|_s - \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right|_s = C_2 - C_2 = 0$$

对第三类边界条件，同理可证

$$\Phi' \Big|_{s_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \right|_{s_2} = 0$$

从以上结果可见，不论对哪类边界条件，式（5-2）的左边都等于零。因此有

$$\int_{\tau} (\nabla \Phi')^2 d\tau = 0$$

由于 $(\nabla \Phi')^2$ 恒不小于零，故上式成立的条件是 $\nabla \Phi' \equiv 0$ ，解之可得

$$\Phi' = C \quad (5-3)$$

上式表明区域 τ 内的 Φ' 只能是一个常量。对于第一类边界条件的情况，因为 s 上 $\Phi' = 0$ ，所以式(5-3)中的 C 只能是零，此时 $\Phi_1 = \Phi_2$ ，区域 τ 内只存在唯一解。对第二类和第三类边界条件的情况，有 $\Phi_1 - \Phi_2 = C$ ，两个假设解只相差一个任意常数。这对于由位函数求场函数并不产生影响，并且我们还可以通过对 Φ_1 和 Φ_2 的参考点选择将 C 消去，因此 τ 内的解也是唯一的。

应当明确，只有在区域的所有边界上给出唯一的边界条件时，边值问题的解才是唯一确定的。如果所给边界条件不完整，即某部分边界上的边界值不确定，则满足方程和所给边界条件的解不确定。反之，如果在同一边界上既给出 $\Phi|_s$ ，同时又任意地给定 $\partial \Phi / \partial n|_s$ ，边值问题的解也可能不存在，因这两个边界条件将各确定一个解，而两个解未必一致。

唯一性定理在电磁场边值问题中具有重要的理论意义和实际价值。它不仅指出了解的唯一性条件，而且为我们采用多种方法求解边值问题提供了理论依据。根据这个定理，不论我们采用什么方法，哪怕是拼凑或试探，只要得到的解能够在区域内满足方程而在边界上满足边界条件，那么这个解就是该边值问题的唯一正确解。后面所介绍的镜像法和复变函数法均以该定理为理论依据。

二. 解的叠加原理

解的可叠加性是方程线性的必然结果。当不限定边界条件时，拉普拉斯方程和泊松方程都有无穷多个解。对于拉普拉斯方程，若 Φ_1 、 Φ_2 、…… Φ_n 都是满足方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 的解，则

$$\Phi_{\Sigma} = a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \cdots + a_n \Phi_n \quad (5-4)$$

也是方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 的解，其中 a_i 为任意常数。对于泊松方程，若 Φ_p 是方程 $\nabla^2 \Phi = f$ 的任意一个解，而 Φ_1 、 Φ_2 、…… Φ_n 都是拉普拉斯方程 $\nabla^2 \Phi = 0$ 的解，则

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_p + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \cdots + a_n \Phi_n \quad (5-5)$$

仍是方程 $\nabla^2 \Phi = f$ 的解，其中 a_i 为任意常数。

下面来证明泊松方程的情况。对式（5-5）两边做 ∇^2 运算，得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_{\Sigma} &= \nabla^2 (\Phi_p + a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + \cdots + a_n \Phi_n) \\ &= \nabla^2 \Phi_p + a_1 \nabla^2 \Phi_1 + a_2 \nabla^2 \Phi_2 + \cdots + a_n \nabla^2 \Phi_n \end{aligned}$$

$$= f + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = f \quad (5-6)$$

因此 Φ_Σ 是方程 $\nabla^2 \Phi = f$ 的解。

利用解的叠加原理，可以把拉普拉斯方程或泊松方程的通解写成式 (5-4) 或式 (5-5) 的形式，其中的 Φ_i 是无边界条件或在部分边界上是齐次边界条件方程的已知解。然后再利用边界条件确定出通解表达式中的 a_i ，从而得到所求边值问题的唯一解。这是我们在后面的解题过程中经常采用的一种方法。

边值问题应用叠加原理时，必须注意边界条件亦应满足叠加关系。合理地运用这两种叠加关系，可以使复杂的边值问题得到简化。例如对下面的边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \Phi|_{s_1} = C_1 \\ \Phi|_{s_2} = C_2 \\ \Phi|_{s_3} = C_3 \end{cases} \quad (5-7)$$

可以将其分解成如下形式的三个边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_1 = 0 \\ \Phi_1|_{s_1} = C_1 \\ \Phi_1|_{s_2} = 0 \\ \Phi_1|_{s_3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \Phi_2 = 0 \\ \Phi_2|_{s_1} = 0 \\ \Phi_2|_{s_2} = C_2 \\ \Phi_2|_{s_3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \Phi_3 = 0 \\ \Phi_3|_{s_1} = 0 \\ \Phi_3|_{s_2} = 0 \\ \Phi_3|_{s_3} = C_3 \end{cases} \quad (5-8)$$

可见，分解后的每个边值问题都只有一个非齐次边界值，求解变得容易进行。由于三个问题的边界条件之和恰好等于原问题的边界条件，因此它们的解之和

$$\Phi_\Sigma = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \quad (5-9)$$

必然满足 $\nabla^2 \Phi = 0$ 和原问题的全部边界条件，所以 Φ_Σ 就是原问题的解。

§ 5.2 拉普拉斯方程的分离变量法

分离变量法是求解偏微分方程的一种最常用方法。利用该方法求解边值问题时，要求所给区域的边界面能与一个适当坐标系的坐标面相重合，或者至少分段地与坐标面重合。下面分别介绍三种常用坐标系中拉普拉斯方程的分离变量法。

一. 直角坐标系中的分离变量法

直角坐标系中拉普拉斯方程的表达式为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5-10)$$

假设函数 $\Phi(x, y, z)$ 可分解成三个单变量函数的乘积

$$\Phi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \quad (5-11)$$

把上式代入式 (5-10)，然后两边除以 $f(x)g(y)h(z)$ ，得

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{h(z)} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (5-12)$$

上式中三项分别是三个独立变量的函数，其成立的条件是各项均为常数。令三个常数为 $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$ ，则上式分解成三个独立的全微分方程，即

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k_x^2 f(x) = 0 \quad (5-13)$$

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} + k_y^2 g(y) = 0 \quad (5-14)$$

$$\frac{d^2 h(z)}{dz^2} + k_z^2 h(z) = 0 \quad (5-15)$$

式中的 k_x, k_y, k_z 称为**分离常数**，它们要由具体问题的边界条件确定。由分离过程可知，分离常数之间满足如下关系

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (5-16)$$

这表明三个分离常数中只有两个是独立的。

方程 (5-13) ~ (5-15) 解的形式与分离常数有关，根据分离常数 $k_i^2 (i = x, y, z)$ 的值等于零、大于零或者小于零，取相应的解为一次式、三角函数式或者双曲函数式及指数函数式。例如，方程 (5-13) 解的可取形式有

$$f(x) = A_1 x + A_2, \quad (k_x^2 = 0 \text{ 时}) \quad (5-17)$$

$$f(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x, \quad (k_x^2 > 0 \text{ 时}) \quad (5-18)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 \operatorname{sh} k'_x x + A_2 \operatorname{ch} k'_x x \\ &= A'_1 e^{k'_x x} + A'_2 e^{-k'_x x}, \quad (-k_x'^2 = k_x^2 < 0 \text{ 时}) \end{aligned} \quad (5-19)$$

同样，对 $g(y)$ 和 $h(z)$ 也都有与上述相同形式的解。在 $f(x), g(y), h(z)$ 的三组可取解中各取其一并相乘，即可得到一个 $\Phi(x, y, z)$ 的解表达式。

由式 (5-16) 看到， k_x^2, k_y^2, k_z^2 不能同时为正或同时为负，故 $f(x), g(y), h(z)$ 不应都取相同的形式。如果取 $k_x^2 > 0, k_y^2 > 0$ ，则必须取 $k_z^2 < 0$ ，此时 $f(x)$ 和 $g(y)$ 的解为三角函数，而 $h(z)$ 的解为双曲函数或指数函数， $\Phi(x, y, z)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= f(x) \cdot g(y) \cdot h(z) \\ &= (A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x)(B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(C_1 \operatorname{sh} k'_z z + C_2 \operatorname{ch} k'_z z) \end{aligned} \quad (5-20)$$

式中常数 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 和 k_x, k_y, k_z 要由具体问题的边界条件确定。

在具体问题中，通常是根据边界条件来选择函数 $f(x), g(y), h(z)$ 的表达式形式。对于有两个零值边界的方向，其对应的函数一般可以取三角函数形式；对于单零值边界方向，对应的函数一般取双曲函数形式；而有无限远边界的方向，一般取指数函数形式。若位函数与某一坐标变量无关，则该变量对应的函数应取成常数，考虑到其它变量对应解中均含有待定系数，故该常数一般取作 1。

满足齐次边界条件的分离常数可以取一系列特殊值

$$k_{xi}, k_{yi}, k_{zi} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

这些特殊值称为**本征值**，本征值对应的函数称为**本征函数**或**本征解**。根据解的叠加原理，所有本征解的线性叠加构成满足拉普拉斯方程的通解

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x, y, z) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(y) h_i(z) \quad (5-21)$$

在许多问题中，单一本征函数不能满足所给的边界条件，而级数形式的通解则可以满足单个解函数所无法满足的边界条件。

例 5.1 图 5-1 表示一长方形截面的导体长槽，上面有一块与槽壁相绝缘的导体盖板，槽截面的内尺寸为 $a \times b$ ，槽体电位为零，盖板的电位等于 U_0 。求槽内任意点的电位。

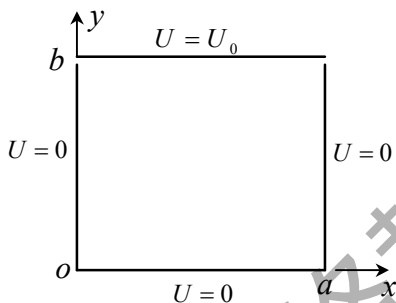


图5-1 长方形截面的导体长槽

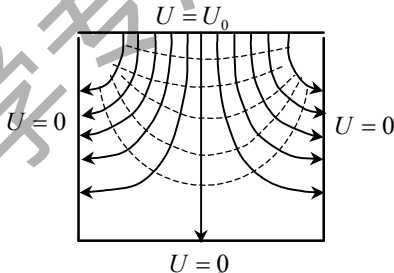


图5-2 槽截面内的等电位线和电力线

解：因槽沿 z 方向无限长，内部电位与 z 无关，截面内的电位满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

根据图 5-1，所给边界条件为

$$U|_{x=0} = 0 \quad (0 \leq y < b) \quad (a)$$

$$U|_{x=a} = 0 \quad (0 \leq y < b) \quad (b)$$

$$U|_{y=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (c)$$

$$U|_{y=b} = U_0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (d)$$

因沿 x 方向电位有两个零值边界， $f(x)$ 应取三角函数形式； y 方向电位为单零值边界， $g(y)$ 应取双曲函数形式。由式 (5-16)，两个分离常数可以写成 $k_x^2 = -k_y^2 = k^2$ ，槽内电位的通解表达式写成

$$U(x, y) = \sum_i [A_{1i} \sin k_i x + A_{2i} \cos k_i x] [B_{1i} \operatorname{sh} k_i y + B_{2i} \operatorname{ch} k_i y]$$

将边界条件(a)代入上式，得

$$0 = \sum_i A_{2i} [B_{1i} \operatorname{sh} k_i y + B_{2i} \operatorname{ch} k_i y] \quad (0 < y < b)$$

上式对任意 y 成立的条件是 $A_{2i} = 0$ （否则得不到非零解）。再利用边界条件(b)，得到

$$0 = \sum_i A_{1i} \sin k_i a [B_{1i} \operatorname{sh} k_i y + B_{2i} \operatorname{ch} k_i y]$$

上式对任意 y 成立的条件是

$$k_i = \frac{i\pi}{a} \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

再利用边界条件(c), 可得

$$0 = \sum_i A_{1i} \sin k_i x B_{2i}$$

上式对任意 x 成立的条件是 $B_{2i} = 0$ 。从而得到满足边界条件(a)、(b)、(c)的解为

$$U(x, y) = \sum_i A_{1i} \sin k_i x B_{1i} \operatorname{sh} k_i y = \sum_i C_i \sin k_i x \operatorname{sh} k_i y$$

其中 $C_i = A_{1i} B_{1i}$, 归为一个待定常数。用整数 n 代替 i , 上式表示为

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \quad (e)$$

将边界条件(d)代入上式, 得

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b \quad (0 < x < a) \quad (f)$$

上式右边可以看作是区间 $(0, a)$ 上关于 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{a} x \right\}$ 的傅立叶级数, 所以为了确定 C_n , 将 U_0

在区间 $(0, a)$ 上展开成 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{a} x \right\}$ 的傅立叶级数, 然后比较相应的系数即可。

$$\text{令} \quad U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (0 < x < a) \quad (g)$$

则利用确定傅立叶系数的过程可得

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a U_0 \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi} & (n=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

将 f_n 代回至 (g), 比较 (f) 和 (g) 关于 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{a} x \right\}$ 的系数, 可得

$$C_n = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} & (n=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

把 C_n 值代回式(e), 最后得到

$$U(x, y) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

上式就是本边值问题的唯一解。给出 a 、 b 和 U_0 的具体数值, 利用上式可计算出槽内任意点

的电位值。把电位相同的点连起来,就得到等电位线,而电力线处处与等电位线相正交。图5-2略示了若干条等电位线(虚线)和电力线(实线)。

例 5.2 有两块一端弯成直角的导体板相对放置,中间留有一小缝,如图5-3所示。设导体板在 x 轴和 z 轴方向的长度远远大于两导体板间的距离 b , 上导体的电位为 U_0 , 下导体接地。求两板间的电位分布。

解: 电位分布与 z 无关, 这是一个二维拉普拉斯问题。所给边界条件可以写成

$$U|_{y=0} = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (a)$$

$$U|_{y=b} = U_0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (b)$$

$$U|_{x=0} = \begin{cases} U_0 & (\frac{b}{2} < y \leq b) \\ 0 & (0 \leq y < \frac{b}{2}) \end{cases} \quad (c)$$

$$U|_{x \rightarrow \infty} = \frac{U_0}{b} y \quad (0 \leq y \leq b) \quad (d)$$

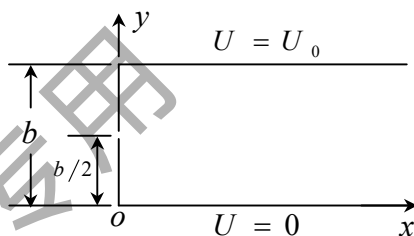


图5-3 缝隙导体板间的电位

其中边界条件(d)的确定是因为: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x=0$ 处的边界情况不再影响 $x \rightarrow \infty$ 处的场分布, 无穷远处的电位只由上下极板边界条件决定, 因此是一个均匀电场所对应的电位。

利用叠加原理将所给问题分解成两个边值问题之和, 分解后的边界情况如图5-4a和b所示。很明显, 分解后两问题的电位仍满足二维拉普拉斯方程, 并且两者边界条件的叠加恰等于原问题的边界条件, 因此原问题的电位解等于 U_a 与 U_b 之和。

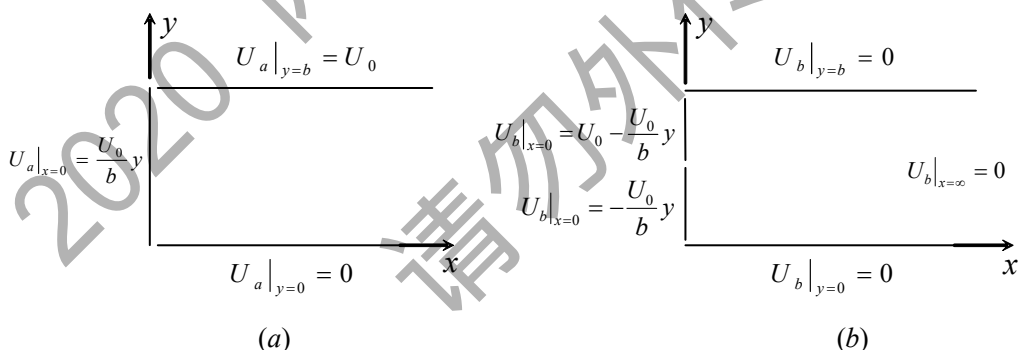


图5-4 例5.2边界条件的分解

图(a)所示的情况与一个略去边缘效应的平板电容器相同, 两极板之间为均匀电场, 其电位为

$$U_a(x, y) = \frac{U_0}{b} y$$

在图(b)中, 沿 y 轴方向存在两个零电位边界, 取 $g_n(y) = B_n \sin(n\pi y/b)$ 必然可以满足这两个零边界条件; 沿 x 轴正方向边界无界且电位趋于零, 故本征函数应取负指数形式 $f_n(x) = A_n \exp[-n\pi x/b]$ 。因此图(b)情况的电位通解应为

$$U_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

将 $x=0$ 的边界条件代入上式, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{b} y = \begin{cases} -\frac{U_0}{b} y & (0 \leq y < \frac{b}{2}) \\ U_0 - \frac{U_0}{b} y & (\frac{b}{2} < y \leq b) \end{cases}$$

将上式右边在区间 $(0, b)$ 上按照 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{b} y \right\}$ 展开为傅立叶级数, 并比较两边的系数可得

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{b} \left[\int_0^{b/2} \left(-\frac{U_0}{b} y\right) \sin \frac{n\pi}{b} y dy + \int_{b/2}^b \left(U_0 - \frac{U_0}{b} y\right) \sin \frac{n\pi}{b} y dy \right] \\ &= \frac{2U_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2U_0}{n\pi} & (n=2, 4, 6, \dots) \\ 0 & (n=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

因此有

$$U_b(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{U_0}{n\pi} e^{-\frac{2n\pi}{b}x} \sin \frac{2n\pi}{b} y$$

原问题的电位表达式为

$$U(x, y) = \frac{U_0}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{U_0}{n\pi} e^{-\frac{2n\pi}{b}x} \sin \frac{2n\pi}{b} y$$

二. 圆柱坐标系中的分离变量法

圆柱坐标系中拉普拉斯方程的表达式为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5-22)$$

将位函数 $\Phi(r, \varphi, z)$ 设为三个独立变量函数之积

$$\Phi(r, \varphi, z) = f(r) g(\varphi) h(z) \quad (5-23)$$

代入到式 (5-22), 并在两边同乘以 $r^2/(fgh)$, 得

$$\frac{r}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5-24)$$

上式第二项只与 φ 有关, 可以先分离出来, 令其等于常数 $-n^2$, 得

$$\frac{d^2 g}{d\varphi^2} + n^2 g = 0 \quad (5-25)$$

将上式代回到式 (5-24), 各项同除以 r^2 , 得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5-26)$$

令上式左边最后一项等于常数 k_z^2 ，则上式分离成为两个方程

$$\frac{d^2 h}{dz^2} - k_z^2 h = 0 \quad (5-27)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(k_z^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (5-28)$$

下面分别讨论式(5-25)、(5-27)、(5-28)三个常微分方程的解。方程(5-25)的解有两种情况：

$$n^2 = 0 \text{ 时, } g(\varphi) = A_1 + A_2 \varphi \quad (5-29)$$

$$n^2 > 0 \text{ 时, } g(\varphi) = A_1 \sin n\varphi + A_2 \cos n\varphi \quad (5-30)$$

从纯数学角度看，式中的 n 可以是任意常数。但电磁场问题中，在场区域中周向不被隔断时，为保证位函数的单值性，必须有 $g(\varphi) = g(\varphi + 2n\pi)$ ，因此 n 一般只取整数。又因为 A_1 和 A_2 是待定常数， n 取负数时式(5-30)的形式不变，故 n 只取正整数和零。

方程(5-27)的解有三种情况：

$$k_z^2 = 0 \text{ 时, } h(z) = B_1 + B_2 z \quad (5-31)$$

$$k_z^2 = -k_z'^2 < 0 \text{ 时, } h(z) = B_1 \sin k_z' z + B_2 \cos k_z' z \quad (5-32)$$

$$\begin{aligned} k_z^2 > 0 \text{ 时, } h(z) &= B_1 \operatorname{sh} k_z z + B_2 \operatorname{ch} k_z z \\ &= B_1' e^{k_z z} + B_2' e^{-k_z z} \end{aligned} \quad (5-33)$$

方程(5-28)可以改写成

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + [(k_z r)^2 - n^2] f = 0 \quad (5-34)$$

上式是一个 n 阶贝塞尔方程，它的解有以下几种情况：

$$n^2 = k_z^2 = 0 \text{ 时, } f(r) = C_1 + C_2 \ln r \quad (5-35)$$

$$n^2 > 0, k_z^2 = 0 \text{ 时, } f(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \quad (5-36)$$

$$n^2 \geq 0, k_z^2 > 0 \text{ 时, } f(r) = C_1 J_n(k_z r) + C_2 N_n(k_z r) \quad (5-37)$$

$$n^2 \geq 0, -k_z'^2 = k_z^2 < 0 \text{ 时, } f(r) = C_1 I_n(k_z' r) + C_2 K_n(k_z' r) \quad (5-38)$$

式(5-37)中的 $J_n(k_z r)$ 称为 n 阶第一类贝塞尔函数。若记 $k_z r = x$ ，其表达式为

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!} \quad (5-39)$$

x 取任意实数时， $J_n(x)$ 均为有限值。当 x 足够大时， $J_n(x)$ 类似于一个幅度逐渐衰减的余弦函数，并且有 $J_n(\infty) = 0$ 。贝塞尔函数是正交函数系，它的正交关系为

$$\int_0^a r J_n\left(\frac{p_{ni}}{a} r\right) J_n\left(\frac{p_{nj}}{a} r\right) dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(p_{ni}) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (5-40)$$

其中的 p_{ni} 和 p_{nj} 是 $J_n(x) = 0$ 的第 i 个根和第 j 个根。

$N_n(k_z r)$ 称为 n 阶第二类贝塞尔函数, 也叫聂曼函数。若记 $k_z r = x$, 其表达式为

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2m} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m} \left(\sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \right) \quad (5-41)$$

其中 $\gamma = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} - \ln \nu \right) = 0.5772 \cdots$, 称为欧拉常数。当 $n=0$ 时, 第一个求和项应当取零。 x 足够大时, $N_n(x)$ 也类似于一个幅度逐渐衰减的正弦函数, 但 $N_n(0) \rightarrow -\infty$ 。所以当被求区域包含 $r=0$ 点时, 应该令表达式 (5-37) 中的系数 $C_2 = 0$ 。

式 (5-38) 中的 $I_n(k'_z r)$ 与 $K_n(k'_z r)$ 分别称为第一类和第二类变形贝塞尔函数。它们的表达式也类似于式 (5-39) 和式 (5-41), 但求和式每项的符号与前者不同, 结果使它们都不再呈振荡形式, 而是单调函数。其中 $I_n(x)$ 随 x 增大而单调增大, 且 $I_n(\infty) \rightarrow \infty$; $K_n(x)$ 随 x 增大而单调衰减, 有 $K_n(0) \rightarrow \infty$ 和 $K_n(\infty) = 0$ 。在 $f(r)$ 取解时, 应注意这两个函数的上述特点。

在 $f(r)$ 、 $g(\varphi)$ 、 $h(z)$ 的可取解中各选其一并相乘, 即得到位函数的一个本征解 $\Phi_i(r, \varphi, z)$ 。具体选择哪种组合形式应根据问题所给边界条件判断。将所有本征解相加, 得到位函数的通解形式为

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_i \Phi_i(r, \varphi, z) = \sum_i f_i(r) g_i(\varphi) h_i(z) \quad (5-42)$$

例 5.3 假设在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀静电场中放入一半径为 a 的电介质长圆棒, 棒的轴线与电场相垂直, 棒的电容率为 ϵ_1 , 外部电容率为 ϵ_2 , 求任意点的电位。

解: 设电介质棒的轴线与圆柱坐标系的 z 轴重合, 电场 \vec{E}_0 为 \hat{x} 方向, 如图 5-5 所示。因介质棒无限长, 故电位与坐标 z 无关, 是一个关于 r 和 φ 的二维拉普拉斯问题。考虑到电位对 φ 的 2π 周期要求和偶对称性, 取分离常数 n 为正整数, 并且 $g(\varphi)$ 只取 $\cos n\varphi$ 项。 $f(r)$ 应取式 (5-36) 形式。电位函数的通解应为

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi (C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n})$$

在 $r < a$ 的区域内, 为满足 $r=0$ 处的电位为有限值, 令 $C_{2n} = 0$, 此区域的电位通解为

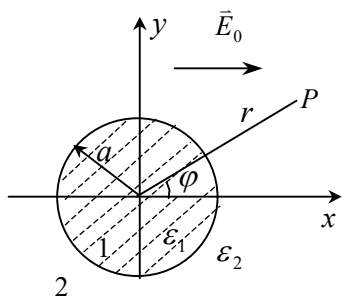


图5-5 均匀电场中的电介质棒

$$U_1(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} r^n \cos n\varphi$$

在 $r > a$ 的区域里, 可以将总电位分成外电场 \bar{E}_0 产生的电位和介质棒极化产生的附加电位两部分。因后者不随 r 无限增加, 所以不应有 r^n 项, 而外电场所产生的电位是 $-E_0 x = -E_0 r \cos \varphi$, 故此区域的电位通解应为

$$U_2(r, \varphi) = -E_0 r \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} r^{-n} \cos n\varphi \quad (r \geq a)$$

其中等式右边的第一项为外电场电位, 求和项为极化介质产生的电位。

上面两式中的系数 C_{1n} 和 C_{2n} 可由以下边界条件确定

$$U_1(a, \varphi) = U_2(a, \varphi) \quad , \quad \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

将 $U_1(r, \varphi)$ 和 $U_2(r, \varphi)$ 的通解表达式代入上面两个边界条件, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} a^n \cos n\varphi &= -E_0 a \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} a^{-n} \cos n\varphi \\ \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} n C_{1n} a^{n-1} \cos n\varphi &= -\varepsilon_2 E_0 \cos \varphi - \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} n C_{2n} a^{-n-1} \cos n\varphi \end{aligned}$$

比较上面两式两边 $\cos \varphi$ 的系数, 得

$$\begin{aligned} C_{11} a &= -E_0 a + C_{21} a^{-1} \\ \varepsilon_1 C_{11} &= -\varepsilon_2 E_0 - \varepsilon_2 C_{21} a^{-2} \end{aligned}$$

以上两式联立求解, 得

$$C_{11} = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \quad ; \quad C_{21} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^2 E_0$$

当 $n > 1$ 时, 比较 $\cos n\varphi$ 的系数, 得

$$\begin{aligned} C_{1n} a^n &= C_{2n} a^{-n} \\ \varepsilon_1 n C_{1n} a^{n-1} &= -\varepsilon_2 n C_{2n} a^{-n-1} \end{aligned}$$

联立解上面两式求解, 得

$$C_{1n} = 0 \quad , \quad C_{2n} = 0 \quad (n \neq 1)$$

将 C_{11} 、 C_{21} 和 C_{1n} 、 C_{2n} 分别代入到 $U_1(r, \varphi)$ 和 $U_2(r, \varphi)$ 的通解表达式中, 得到

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi) &= -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 r \cos \varphi = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 x \quad (r \leq a) \\ U_2(r, \varphi) &= -E_0 r \cos \varphi + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \frac{a^2}{r} \cos \varphi \\ &= E_0 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \varphi \quad (r \geq a) \end{aligned}$$

介质棒内、外的电场强度分别为

$$\vec{E}_1 = -\nabla U_1 = \hat{r} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \cos \varphi - \hat{\varphi} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \sin \varphi = \hat{x} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \quad (r < a)$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla U_2 = \hat{r} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) E_0 \cos \varphi + \hat{\varphi} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) E_0 \sin \varphi \quad (r > a)$$

从 \vec{E}_1 的表达式看到, 电介质棒内的电场是与外场 \vec{E}_0 同方向的均匀场。当 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ 时, $E_1 < E_2$; 当 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 时, $E_1 > E_2$ 。

在均匀外磁场 \vec{H}_0 中放置一磁导率为 μ_1 的无限长圆柱体是和上面例子完全类似的磁场边值问题。用 U_{m1} 和 U_{m2} 分别表示圆柱体内外的磁标位, 则它们的边界条件也和电位的形式相同, 即

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } U_{m2} = -H_0 r \cos \varphi$$

$$r = a \text{ 时, } U_{m1} = U_{m2}; \quad \mu_1 \frac{\partial U_{m1}}{\partial r} = \mu_2 \frac{\partial U_{m2}}{\partial r}$$

此时, U_{m1} 和 U_{m2} 的解也与静电场 U_1 和 U_2 的解有相同的形式, 只需把 U_1 和 U_2 解中的 ε_1 和 ε_2 分别用 μ_1 和 μ_2 代替, E_0 用 H_0 代替, 便得到 U_{m1} 和 U_{m2} 的解。同样可以得知圆柱体内的磁场强度 \vec{H}_1 是均匀的。

例 5.4 一导体圆筒的高度为 b , 半径为 a , 所给边界条件为

$$\begin{aligned} U|_{z=0} &= 0 \\ U|_{z=b} &= U_0 \\ U|_{r=a} &= 0 \end{aligned}$$

求圆筒内的电位分布函数。

解: 由问题的对称性可知, 电位与变量 φ 无关, 因此应取 $n=0$ 和 $g(\varphi)=1$; 由 $U(z=0)=0$ 可知, $h(z)$ 应该取成在零点处为零值的双曲正弦函数 $\text{sh}(k_z z)$; 因为 $n=0$ 、 $k_z^2 > 0$, 并考虑到电位在 $r=0$ 处为有限值, 故 $f(r)$ 的形式为 $J_0(k_z r)$ 。因此电位函数的本征解为

$$U(r, z) = A \text{sh}(k_z z) J_0(k_z r)$$

将边界条件 $U_{r=a} = 0$ 代入上式, 得

$$U(a, z) = A \text{sh}(k_z z) J_0(k_z a) = 0$$

所以 $k_z a$ 应是零阶贝塞尔函数的根 p_{0i} , 由此得

$$k_{zi} = \frac{p_{0i}}{a} \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

把所有本征值 k_{zi} 所对应的本征解相加, 得到电位函数的通解

$$U(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} z\right) J_0\left(\frac{p_{0i}}{a} r\right)$$

将边界条件 $U(z=b)=U_0$ 代入上式, 得

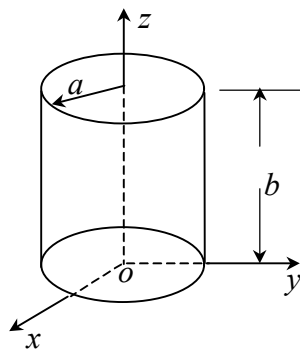


图5-6 导体圆筒内的电位

$$U_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} b\right) J_0\left(\frac{p_{0i}}{a} r\right)$$

上式两边同乘以 $rJ_0(p_{0j}r/a)$ ，从 $0 \sim a$ 对 r 积分，得

$$\int_0^a U_0 r J_0\left(\frac{p_{0j}}{a} r\right) dr = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} b\right) \int_0^a J_0\left(\frac{p_{0i}}{a} r\right) r J_0\left(\frac{p_{0j}}{a} r\right) dr$$

对上式两边分别应用贝塞尔函数积分公式

$$\int_0^a x J_0(x) dx = [x J_1(x)] \Big|_0^a$$

和正交公式 (5-40)，可以得到

$$\frac{U_0 a^2}{p_{0i}} J_1(p_{0i}) = A_i \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} b\right) \frac{a^2}{2} J_1^2(p_{0i})$$

所以

$$A_i = \frac{2U_0}{p_{0i} \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} b\right) J_1(p_{0i})}$$

将 A_i 代回到电位通解表达，得到本问题的最终解答

$$U(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2U_0 \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} z\right) J_0\left(\frac{p_{0i}}{a} r\right)}{p_{0i} \operatorname{sh}\left(\frac{p_{0i}}{a} b\right) J_1(p_{0i})}$$

例 5.5 将例题 5.4 的边界条件改成

$$U|_{z=0} = 0$$

$$U|_{z=b} = 0$$

$$U|_{r=a} = U_0$$

求圆筒内的电位分布函数。

解：由问题的对称性可知，电位与变量 φ 无关，因此应取 $n=0$ 和 $g(\varphi)=1$ ；由 $U(z=0)=0$ 和 $U(z=b)=0$ 可知， $h(z)$ 应该取成在零点处为零值的正弦函数 $\sin(m\pi z/b)$ ；因为 $n=0$ 、 $k_z^2 = -k_z'^2 = -(m\pi/b)^2 < 0$ ，并考虑到电位在 $r=0$ 处为有限值，故 $f(r)$ 的形式为 $I_0(m\pi r/b)$ 。因此电位函数的通解为

$$U(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} z\right) I_0\left(\frac{m\pi}{b} r\right)$$

将边界条件 $U_{r=a} = U_0$ 代入上式，得

$$U(a, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{b} z\right) I_0\left(\frac{m\pi}{b} a\right)$$

上式两边同乘以 $\sin(n\pi z/b)$ ，从 $0 \sim b$ 对 z 积分，由三角函数的正交性，得

$$A_m = \begin{cases} \frac{4U_0}{m\pi} \frac{1}{I_0\left(\frac{m\pi}{b}a\right)} & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

代回原式，得到

$$U(r, z) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4U_0}{m\pi} \frac{I_0\left(\frac{m\pi}{b}r\right)}{I_0\left(\frac{m\pi}{b}a\right)} \sin \frac{m\pi}{b}z$$

三. 球坐标系中的分离变量法

球坐标系中拉普拉斯方程的表达式为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5-43)$$

设位函数为三个独立变量函数之积

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = f(r) g(\theta) h(\varphi) \quad (5-44)$$

把式(5-44)代入(5-43)，并在两边同乘 $r^2 \sin^2 \theta / (fgh)$ ，得

$$\frac{\sin^2 \theta}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{g} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5-45)$$

上式的第三项只与 φ 有关，可以先分离出来。令它等于常数 $-m^2$ ，得

$$\frac{d^2 h}{d\varphi^2} + m^2 h = 0 \quad (5-46)$$

再把上式代回到式(5-45)，各项同除以 $\sin^2 \theta$ ，得

$$\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{g \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (5-47)$$

令上式的第一项等于常数 $n(n+1)$ ，则分离得到两个全微分方程

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - n(n+1)f = 0 \quad (5-48)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right] g = 0 \quad (5-49)$$

下面分别讨论式(5-46)、(5-48)、(5-49)这三个常微分方程的解。方程(5-46)的解有两种情况：

$$m^2 = 0 \text{ 时 } , \quad h(\varphi) = A_1 + A_2 \varphi \quad (5-50)$$

$$m^2 > 0 \text{ 时 } , \quad h(\varphi) = A_1 \sin m\varphi + A_2 \cos m\varphi \quad (5-51)$$

与圆柱坐标系中的 $h(\varphi)$ 相类似，为了保证位函数的 2π 周期性， m 一般只取正整数或零。

方程(5-48)的解只有一种形式

$$f(r) = B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)} \quad (5-52)$$

方程(5-49)可以改写成

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dg}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] g = 0 \quad (5-53)$$

上式称为**连带勒让德方程**。当 m 和 n 均为正整数时，它的解有以下几种情况：

$$m > 0, n = 0 \text{ 时}, \quad g(\theta) = C_1 \tan^m \frac{\theta}{2} + C_2 \cot^m \frac{\theta}{2} \quad (5-54)$$

$$m = 0, n \geq 0 \text{ 时}, \quad g(\theta) = C_1 P_n(\cos \theta) + C_2 Q_n(\cos \theta) \quad (5-55)$$

$$n \geq m > 0 \text{ 时}, \quad g(\theta) = C_1 P_n^m(\cos \theta) + C_2 Q_n^m(\cos \theta) \quad (5-56)$$

$P_n(\cos \theta)$ 称为第一类勒让德函数， n 为整数时成为勒让德多项式。它的表达式可以由罗德里格公式推出

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (5-57)$$

令 $x = \cos \theta$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1 \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ P_4(\cos \theta) &= \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (5-58)$$

在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的定义域内， $|P_n(\cos \theta)| \leq 1$ ，并且有 $P_n(1) = 1$ 和 $P_n(-1) = (-1)^n$ 。勒让德多项式也是正交函数系，它的正交关系为

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (5-59)$$

$Q_n(\cos \theta)$ 称为第二类勒让德函数，它的前几个表达式为

$$\begin{aligned} Q_0(\cos \theta) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \\ Q_1(\cos \theta) &= \frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - 1 \\ Q_2(\cos \theta) &= \left(\frac{3 \cos^2 \theta}{4} - \frac{1}{4} \right) \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{3}{2} \cos \theta \\ Q_3(\cos \theta) &= \left(\frac{5 \cos^3 \theta}{4} - \frac{3 \cos \theta}{4} \right) \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{5}{2} \cos^2 \theta + \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (5-60)$$

∴

从以上表达式看到, 若 $\cos \theta = \pm 1$, 则 Q_n 趋于无限大, 所以当待求区域包括 $\theta = 0, \pi$ 时, 应该令解 (5-55) 式中的系数 $C_2 = 0$ 。

$P_n^m(\cos \theta)$ 和 $Q_n^m(\cos \theta)$ 分别称为第一类和第二类连带勒让德函数, 它们的表达式可以由下面两式导出

$$P_n^m(\cos \theta) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [P_n(x)] \quad (5-61)$$

$$Q_n^m(\cos \theta) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [Q_n(x)] \quad (5-62)$$

在 $|x = \cos \theta| \leq 1$ 的定义域内, $P_n^m(\cos \theta)$ 为有限值, 且有 $P_n^m(\pm 1) = 0$; $x = \cos \theta = \pm 1$ 时, Q_n^m 趋于无限大, 所以当待求区域包括 $\theta = 0, \pi$ 时, 应该令解 (5-56) 式中的 $C_2 = 0$ 。

在 $f(r)$ 、 $g(\theta)$ 、 $h(\varphi)$ 的可取解中各选其一并相乘, 即得到位函数的一个本征解 $\Phi_i(r, \theta, \varphi)$ 。具体选择哪种组合形式应根据问题所给边界条件判断。将所有本征解相加, 得到位函数的通解形式

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_i \Phi_i(r, \theta, \varphi) = \sum_i f_i(r) g_i(\theta) h_i(\varphi) \quad (5-63)$$

例 5.6 在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀电场中放入一个半径为 a 的接地导体球, 求任意点的电位和电场强度。

解: 取球心位于坐标原点, 同时设 \vec{E}_0 与 z 轴平行, 如图 5-7 所示。因外电场 \vec{E}_0 是 z 方向的均匀场并且导体球接地, 故可取 xy 平面为零电位参考面。由对称性可知位函数与 φ 无关, 取 $m=0$ 和 $h(\varphi)=1$; 所求场域包括 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$, 所以令式(5-55)中的 $C_2 = 0$, 有

$$g(\theta) = C_{1n} P_n(\cos \theta)$$

$r > a$ 区域的电位通解可以写成

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) [C'_{1n} r^n + C'_{2n} r^{-(n+1)}]$$

与例 5.3 的分析方法相类似, 将总电位分成外电场 \vec{E}_0 产生的电位和导体球上感应电荷产生的电位。外场电位为 $-E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ 。而感应电荷分布在 $r = a$ 的球面上, 当 $r \rightarrow \infty$ 时感应电荷产生的电位应趋于零, 故不应有 r^n 项。因此上式可以写成

$$U(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta) r^{-(n+1)}$$

将导体球的边界条件 $U(a, \theta) = 0$ 带入上式, 得

$$-E_0 a \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) = 0$$

上式左边可以看作是在区间 $[0, \pi]$ 上关于 $\{P_n(\cos \theta)\}$ 的广义傅立叶级数展开, 可以应用求解傅立叶系数的方法求得 C_n , 用 $P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ 乘上式两边, 对 θ 从 $0 \sim \pi$ 积分, 并将上式第一项中的 $\cos \theta$ 写成 $P_1(\cos \theta)$, 得

$$-E_0 a \int_0^\pi P_m(\cos\theta) P_1(\cos\theta) \sin\theta d\theta + \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{-(n+1)} \int_0^\pi P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = 0$$

由勒让德多项式的正交公式（5-59）容易得出

$$\begin{cases} C_1 = E_0 a^3 \\ C_n = 0 \quad (n \neq 1) \end{cases}$$

由此可得

$$U(r, \theta) = -E_0 r \cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \quad (r \geq a)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}(r, \theta) &= -\nabla U = -\hat{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ &= \hat{r} E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos\theta - \hat{\theta} E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin\theta \\ &= \hat{z} E_0 + \frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{4\pi\epsilon_0 r^3} E_0 (\hat{r} 2 \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta) \end{aligned}$$

如果将上式后一项中的 $4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$ 记作 p ，该项就与电偶极子的电场表达式完全相同，而上式的前一项恰为外加电场。可见，感应电荷对场的贡献相当于一个沿 z 轴放置的电偶极子，这是由于球面感应电荷的分布恰好是上正下负之故。

例 5.7 一个半径为 a 的导体球壳沿赤道平面切割出一窄缝，下半球壳接地而上半球壳电位为 U_0 ，如图 5-8 所示。计算球内外空间的电位分布。

解：这是一个与 φ 无关的二维边值问题。考虑到球内区域包括 $r=0$ 和 $\theta=0, \pi$ ，球外区域包括 $r \rightarrow \infty$ 和 $\theta=0, \pi$ ，可将电位通解分别取如下形式

$$U_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (r \leq a) \quad (a)$$

$$U_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \quad (r \geq a) \quad (b)$$

把边界条件分别代入以上两式，得

$$U_1(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = \begin{cases} U_0 & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

$$U_2(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = \begin{cases} U_0 & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi) \end{cases}$$

用 $P_m(\cos\theta) \sin\theta$ 乘上面两式的两侧，并对 θ 从 $0 \sim \pi$ 积分，得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta &= U_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} \int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta &= U_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

利用勒让德多项式的正交性质，当 $m = n$ 时得

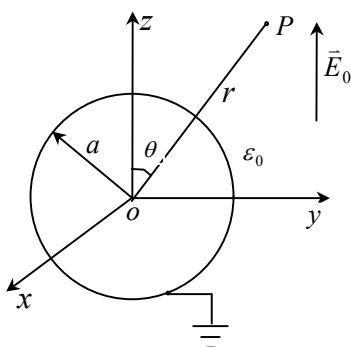


图5-7 均匀外电场中的接地导体球

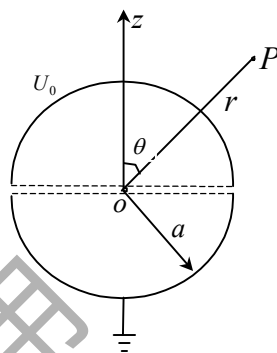


图5.8 导体球壳内的电位

$$A_n a^n \frac{2}{2n+1} = U_0 \int_0^1 P_n(x) dx \quad (c)$$

$$B_n a^{-(n+1)} \frac{2}{2n+1} = U_0 \int_0^1 P_n(x) dx \quad (d)$$

其中 $x = \cos \theta$ 。将 $P_n(x)$ 的各阶表达式代入(c)式积分，得

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{U_0}{2} \int_0^1 P_0(x) dx = \frac{U_0}{2} \int_0^1 dx = \frac{U_0}{2} \\ A_1 &= \frac{3U_0}{2a} \int_0^1 P_1(x) dx = \frac{3U_0}{2a} \int_0^1 x dx = \frac{3U_0}{4a} \\ A_2 &= \frac{5U_0}{2a^2} \int_0^1 P_2(x) dx = \frac{5U_0}{2a^2} \int_0^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1) dx = 0 \end{aligned}$$

以及 $A_3 = -\frac{7U_0}{16a^3}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = \frac{11U_0}{32a^5}, \dots$

观察(c)、(d)两式的差别，可得到

$$B_n = A_n a^{2n+1}$$

将 A_n 、 B_n 值代入(a)、(b)两式，即得到球壳内、外的电位分布表达式

$$U_1(r, \theta) = \frac{U_0}{2} + \frac{3U_0}{4a} r P_1(\cos \theta) - \frac{7U_0}{16a^3} r^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11U_0}{32a^5} r^5 P_5(\cos \theta) + \dots \quad (r \leq a)$$

$$U_2(r, \theta) = \frac{U_0 a}{2r} + \frac{3U_0 a^2}{4r^2} P_1(\cos \theta) - \frac{7U_0 a^4}{16r^4} P_3(\cos \theta) + \frac{11U_0 a^6}{32r^6} P_5(\cos \theta) + \dots \quad (r \geq a)$$

§ 5.3 镜像法

镜像法是求解静场态边值问题的一种特殊方法。它适用于导体或介质边界（主要是平面、球面和圆柱面边界）前面存在点源或线源的一些特殊问题。镜像法处理问题的特点在于不直接求解位函数的泊松方程，而是在所求区域外用简单的镜像源来代替边界面上的未知感应源（如感应电荷、极化电荷和磁化电流等）。引入镜像源后，撤去原来的边界面并将所求区域的媒质扩展到整个空间，把一个分区媒质问题变成了无限区域的同种媒质问题，此时的场位分布可由两种源的无限区域解表达式叠加确定。因为镜像源被放置在原问题的待求区域以

外,所以引入镜像源前后该区域位函数所满足的微分方程不变。如果通过恰当地选择镜像源的大小和位置,使原问题场与引入镜像后新系统的场在原边界上满足相同的边界条件,由唯一性定理可知,新系统的解就是原问题的解。下面讨论几种特殊边界的镜像法应用。

一. 平面镜像

当导体与介质或两种介质的分界面是无限大平面时,镜像源一般要放置在与已知源相对称的位置上。分界面尤如一面镜子,镜像源就是已知源在“镜”中的“像”。下面通过几个典型例题说明平面边界镜像法的具体方法。

例5.8 如图5-9所示,真空中一点电荷 q 位于一无限大接地导体平面的上方,与平面的距离为 h 。求 $z>0$ 区域的电位分布。

解:设想在 $(0,0,-h')$ 处放一个镜像点电荷 q' 来代替导体表面上感应电荷的作用,并将 $z\leq 0$ 区域换成真空。因为 $z>0$ 区域的电荷分布及媒质参数并未发生变化,故此时该区域电位函数所满足的方程与原问题相同。因此 q' 能否作为镜像来代替感应电荷,关键要看引入 q' 后 $z\geq 0$ 区域的边界条件是否与原问题所给的边界条件相同。原问题的边界条件为无限远处和导体表面上的电位等于零,即

$$U(\infty) = 0 \quad (5-64)$$

$$U(x, y, 0) = 0 \quad (5-65)$$

引入镜像电荷 q' 后,空间任意点的电位由 q 和 q' 共同产生,即

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h')^2}} \right] \quad (5-66)$$

不论 q' 和 h' 取任何有限值, $R \rightarrow \infty$ 时上式都趋于零。因此新系统对边界条件(5-64)式自然满足。要使上式满足边界条件(5-65)式,可取

$$h' = h, \quad q' = -q \quad (5-67)$$

将上式代入式(5-66),得

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (5-68)$$

在 $z\geq 0$ 的区域内,式(5-68)既满足与原问题相同的泊松方程,又与原问题有完全相同的边界条件。根据唯一性定理,它就是原问题所求的电位解。

为了更好地理解镜像电荷的物理意义,先由式(5-68)计算导体平面上的感应电荷。由导体边界条件可得导体表面的感应电荷密度为

$$\rho_s = D_n = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad (5-69)$$

导体表面上的总感应电荷为

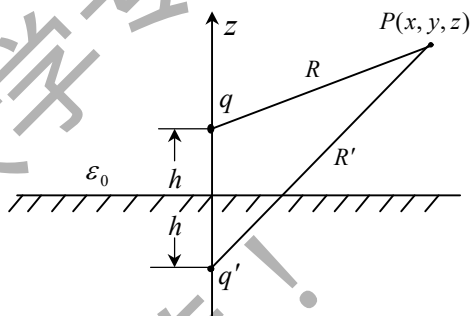


图5-9 无限大导体平面上的镜像法

$$Q_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s dx dy = -\frac{qh}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = -q \quad (5-70)$$

恰好等于镜像电荷电量。这一结果是合理的，因为点电荷 q 所发出的电力线将全部终止于无限大的接地导体平面上。

应当注意，为了使引入镜像的新系统与原问题在所求区域内处处满足同样的方程，镜像源必须放在原问题区域之外，而且新系统所求出的场或位只是在原问题的所求区域内表示所求的解，在此区域之外是无意义的。例如在本题中，原问题在 $z < 0$ 区域的电位为零，但由式 (5-68) 所计算的结果却不等于零。

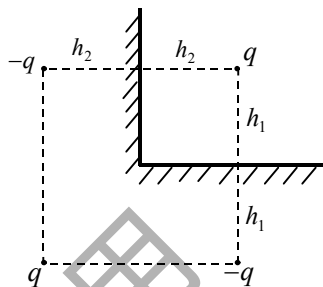


图5-10 直角导体平面内点电荷镜像

如果导体边界不是无限大平面，而是图5-10所示的相互垂直的两个半无限大接地平面，也可以使用镜像法。此时不但要设已知电荷 q 的镜像，而且还要设镜像电荷的镜像。只有取如图5-10所示的三个镜像时，才能满足全部边界条件。实际上，所有相交成 $180^\circ/n$ 的两个接地半平面内有电荷的问题，都可以用有限个镜像来满足所给的边界条件。

镜像法也可用于介质边界的情况。

例 5.9 如图 5-11(a) 所示， $x < 0$ 的半空间区域是电容率为 ϵ_2 的介质， $x > 0$ 的半空间区域是电容率为 ϵ_1 的介质，在 1 区距离界面 h 处有个点电荷 q 。求 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两个区域内的电位分布。

解：求解 $x > 0$ 区域的场时，使整个空间充满介质 ϵ_1 ，将镜像电荷 q' 放置在 $x < 0$ 区域并且与 q 的位置相对称。该区域内的场由 ϵ_1 中的 q 和 q' 共同确定，如图 5-11 (b) 所示。求解 $x < 0$ 区域的场时，使整个空间充满介质 ϵ_2 ，用镜像电荷 q'' 取代原来的 q ，该区域的场由 ϵ_2 中的 q'' 确定，如图 5-11(c) 所示。镜像电荷 q' 和 q'' 的数值可以通过下面的边界条件确定

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0} \quad (5-71)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (5-72)$$

由(b)、(c)两图容易写出两个区域的电位表达式

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+h)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (5-73)$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} \quad (5-74)$$

将以上两式代入边界条件式 (5-71) 和式 (5-72)，得

$$\frac{1}{\epsilon_1} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+h)^2 + y^2 + z^2}} \right]_{x=0} = \frac{1}{\epsilon_2} \left[\frac{q''}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} \right]_{x=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+h)^2 + y^2 + z^2}} \right] \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q''}{\sqrt{(x-h)^2 + y^2 + z^2}} \right] \Big|_{x=0}$$

计算得到

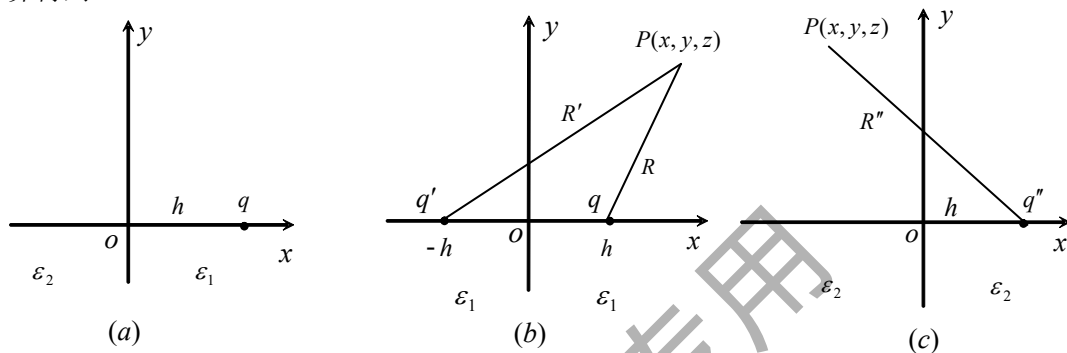


图 5—11 点电荷对两种介质平面边界的镜像

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q') = \frac{1}{\varepsilon_2}q''$$

$$q - q' = q''$$

以上两式联立求解，得

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (5-75)$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (5-76)$$

将 q' 和 q'' 的值分别代入到式 (5-73) 和式 (5-74)，即得到 $x > 0$ 和 $x < 0$ 区域的电位表达式

镜像法还可以解决类似的磁场问题。

例 5.10 将上例中的 ε_1 和 ε_2 换成 μ_1 和 μ_2 ，点电荷 q 换成与分界面平行的无限长线电流 I ，求 $x > 0$ 和 $x < 0$ 区域的磁场。

解：此题镜像电流的设置与上例镜像电荷情况基本相同。下面我们采用磁场边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$ 和 $H_{1t} = H_{2t}$ 来确定镜像电流的数值。

设分界面法线方向 $\hat{n} = \hat{x}$ ，切线方向 $\hat{t} = \hat{y}$ 。由图 5-12 (a) 所示的场量关系和安培回路定律，可得界面两侧磁场的切、法线分量为

$$H_{1t} = -\frac{I}{2\pi R_0} \sin \alpha + \frac{I'}{2\pi R_0} \sin \alpha$$

$$B_{1n} = -\frac{\mu_1 I}{2\pi R_0} \cos \alpha - \frac{\mu_1 I'}{2\pi R_0} \cos \alpha$$

$$H_{2t} = -\frac{I''}{2\pi R_0} \sin \alpha$$

$$B_{2n} = -\frac{\mu_2 I''}{2\pi R_0} \cos \alpha$$

将上面各式代入边界条件关系式 $B_{1n} = B_{2n}$ 、 $H_{1t} = H_{2t}$ ，得

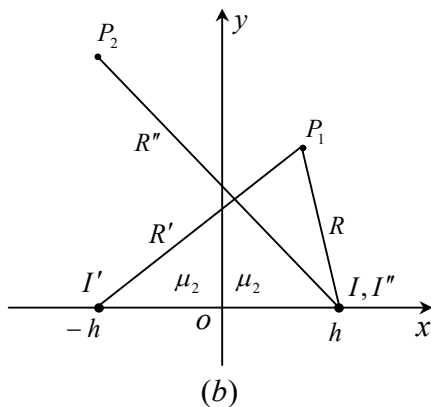
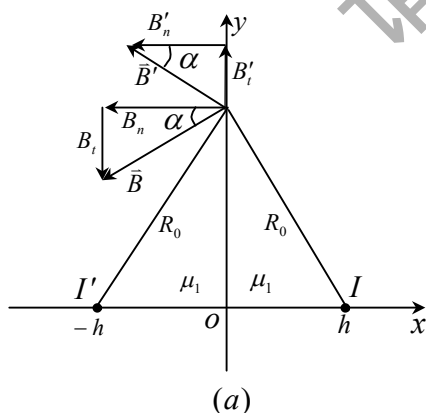


图 5-12 线电流对两种磁介质平面边界的镜像

$$\mu_1(I + I') = \mu_2 I''$$

$$-I + I' = -I''$$

联立解上面两式，得

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \quad (5-77)$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I \quad (5-78)$$

可见，镜像电流 I'' 的符号与原电流 I 相同，而 I' 的符号取决于两种介质的磁导率。

利用图 5-12(b) 所示的位置关系和安培回路定律，容易写出两个区域的磁场表达式

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_I + \bar{B}_{I'} = \frac{\mu_1 I}{2\pi R^2} (\hat{z} \times \bar{R}) + \frac{\mu_1}{2\pi R'^2} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I (\hat{z} \times \bar{R}') \quad (5-79)$$

$$\bar{B}_2 = \bar{B}_{I''} = \frac{\mu_2}{2\pi R''^2} \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I (\hat{z} \times \bar{R}'') \quad (5-80)$$

以上两式就是原问题的所求磁场分布，其中式 (5-79) 表示 $x > 0$ 区域，式 (5-80) 表示 $x < 0$ 区域。

如果 $x > 0$ 区域是 $\mu_1 = \mu_0$ 的非磁性材料， $x < 0$ 区域是 $\mu_2 \rightarrow \infty$ 的理想磁导体，则式 (5-79) 变成

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \times \left(\frac{\bar{R}}{R^2} + \frac{\bar{R}'}{R'^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ -\hat{x} \left[\frac{y}{(x-h)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+h)^2 + y^2} \right] + \hat{y} \left[\frac{x-h}{(x-h)^2 + y^2} + \frac{x+h}{(x+h)^2 + y^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5-81)$$

在 $x = 0$ 的分界面上

$$B_1|_{x=0} = -\frac{\mu_0 I y}{\pi(h^2 + y^2)} \hat{x} \quad (5-82)$$

上式表明，理想磁导体的外侧磁场只有法线分量，这与理想电导体表面只有法线电场分量的情况类似。

二. 球面镜像

对于导体及介质的分界面呈球面并且已知源为点源的一类静态场问题，一般也可以用镜像法求解。

例 5.11 在半径为 a 的接地导体球外 M 点有一个点电荷 q ，球心 O 与 M 点的距离为 d ，如图 5-13 所示。求导体球外的电位分布和球面上的感应电荷。

解：极据镜像源应放在所求区域之外和本题的场对称性可知，镜像电荷 q' 应在 OM 连线的球内部分上，设 q' 的位置点 O' 与 O 点的距离为 d' 。电荷 q 和 q' 在球外空间任意点产生的电位为

$$\begin{aligned} U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd' \cos \theta}} \end{aligned} \quad (5-83)$$

根据边界条件 $U|_{r=a}=0$ ，对球面上的任意点 P_a 应该有

$$U_{r=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_a} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'_a} = 0 \quad (5-84)$$

为了确定出 q' 和 d' 的数值，我们取球面上的两个特殊位置 A 点和 B 点，分别将两点坐标代入式 (5-84)，得

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a+d)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (a+d')} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (d-a)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 (a-d')} = 0 \quad (b)$$

由上面两式解得

$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a^2}{d} \quad (5-85)$$

将式 (5-85) 的结果代入式 (5-83) 并令 $r=a$ ，得球面上任意点的电位

$$U|_{r=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta_a}} + \frac{-a/d}{\sqrt{(a^2/d)^2 + a^2 - 2a^3 \cos \theta_a/d}} \right] = 0 \quad (5-86)$$

其中的 θ_a 表示球面上点的极角。由此可见， q 和 q' 在 $r=a$ 的球面上共同产生的电位与原题所给导体球接地的边界条件吻合。再考虑到它们在无限远处的边界条件也与原问题相同，故这两个点电荷在球外区域产生的场就是原问题的解，即

$$\begin{aligned} U &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}} - \frac{a/d}{\sqrt{(a^2/d)^2 + a^2 - 2a^3 \cos \theta/d}} \right] \end{aligned} \quad (5-87)$$

利用上式可求出导体球面上的感应电荷密度与总感应电荷

$$\rho_s = D_r|_{r=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} \quad (5-88)$$

$$Q_{in} = \oint_{s_a} \rho_s ds = -\frac{q(d - a^2)}{4\pi a} \cdot 2\pi a \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{a}{d}q \quad (5-89)$$

总感应电荷恰等于镜像电荷，正如我们所预料的一样。因为 $a < d$ ，所以感应电荷 Q_{in} 的绝对值小于施感电荷 q 。这表明 q 发出的电力线一部分终止于导体球面而另一部分则终止于无穷远处。

如果例题中的导体球不接地且表面上不带过剩电荷，则此时需要在球心处增加一个镜像电荷 q'' ，令 $q'' = -q' = aq/d$ 。新电荷系统由 q 、 q' 、 q'' 共同组成。

如果导体球不接地，并且给出它的电位为 U_0 ，则也要在球心处增加一个镜像电荷 q'' ，由 $U_0 = q''/(4\pi\epsilon_0 a)$ 确定 q'' 的值。电荷系统由 q 、 q' 、 q'' 共同组成。

如果导体内挖一个球形空腔，空腔内 O' 点有一点电荷 q' 距球心 d' 时，则它的镜像应该

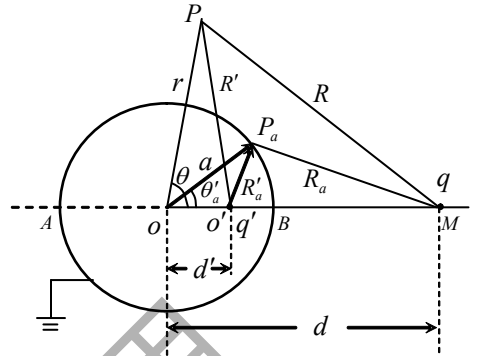


图5-13 点电荷对球形导体的镜像

放在腔外的 M 点上, 也就是式 (5-85) 的反演, 镜像电荷 $q = -q'(a/d')$ 和 $d = a^2/d'$ 。腔内的场分布由 q' 和 q 共同确定。

例 5.12 假设一个无限大接地导体平面上有一半径为 a 的半球形导体凸块, 在凸块附近有一个点电荷 q 。求此电荷的镜像。

解: 设电荷 q 和导体平面法线所在的平面为 xz 平面, 如图 5-14 所示。先作电荷 q 对导体平面 xy 面的镜像电荷 $-q$, 它的坐标为 $(x, 0, -z)$ 。其次作 q 对球面的镜像为

$$q' = -\left(a/\sqrt{x^2 + z^2}\right) q$$

它位于原点 O 与电荷 q 的连线上且与原点的距离为

$$d' = a^2/\sqrt{x^2 + z^2}$$

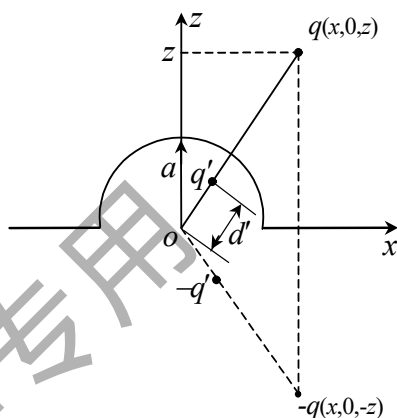


图 5-14 半球凸块的导体平面的镜像

最后作镜像电荷 q' 对 xy 平面的镜像 $-q'$ 。由电荷 q 、 $-q$ 、 q' 和 $-q'$ 组成的电荷系统可以使原问题的边界条件得到满足, 故导体外任意点的场可以由这四个点电荷共同确定。

三. 圆柱面镜像

当分界面为无限长圆柱面且已知源是与边界平行的无限长线源时, 可以利用圆柱面的镜像求解空间的场分布。

例 5.13 在半径为 a 的无限长接地导体圆柱外有一根与圆柱轴线平行的无限长线电荷, 电荷线密度为 ρ_l , 线电荷与圆柱轴线的距离为 d , 如图 5-15 所示。求柱外任意点的电位和柱面上的感应电荷。

解: 根据场的对称性, 可设镜像电荷是一条与圆柱轴平行的线电荷, 线密度为 ρ'_l , 与轴线的距离为 d' 。若设柱面上的 B 点为无限长线电荷的零电位参考点, 可写出线电荷 ρ_l 和 ρ'_l 在空间任意点产生的电位为

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{MB}{R} + \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{O'B}{R'} \\ &= -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{d-a} - \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{a-d'} \end{aligned} \quad (5-90)$$

其中的 R 和 R' 分别为

$$R = \sqrt{d^2 + r^2 - 2rd \cos \varphi} \quad (5-91)$$

$$R' = \sqrt{d'^2 + r^2 - 2rd' \cos \varphi} \quad (5-92)$$

将上面各式代入边界条件 $U|_{r=a} = 0$, 得

$$U|_{r=a} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \varphi}}{d-a} \right)$$

$$-\frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{d'^2 + a^2 - 2ad' \cos \varphi}}{a - d'}\right) = 0 \quad (5-93)$$

上式应对任意 φ 都成立，即圆柱面上的电位处处为零。因此应有

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{r=a} = 0 \quad (5-94)$$

将式 (5-93) 代入上式，整理后可得到

$$[\rho_l d(a^2 + d'^2) + \rho'_l d'(a^2 + d'^2)] - [2add'(\rho_l + \rho'_l)] \cos \varphi = 0$$

上式成立的充分条件是两个方括号部分都等于零，即

$$\rho_l d(a^2 + d'^2) + \rho'_l d'(a^2 + d'^2) = 0$$

$$2add'(\rho_l + \rho'_l) = 0$$

联立求解上面两式，得

$$\rho'_l = -\rho_l, \quad d' = d$$

和

$$\rho'_l = -\rho_l, \quad d' = \frac{a^2}{d} \quad (5-95)$$

前面的一组解不合理，应当舍去，式 (5-95) 就是所求的镜像。

将式 (5-95) 代入式 (5-90)，得到柱外任意点电位

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'd}{Ra} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{a^2 + r^2 d^2/a^2 - 2rd \cos \varphi}}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2rd \cos \varphi}} \quad (5-96)$$

柱面上的感应电荷面密度和单位长度上的感应电荷分别为

$$\rho_s = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\rho_l (d^2 - a^2)}{2\pi a (a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi)} \quad (5-97)$$

$$Q_{in} = \int_{s_a} \rho_s ds = -\frac{\rho_l (d^2 - a^2)}{2\pi a} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{ad\varphi}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi} = -\rho_l \quad (5-98)$$

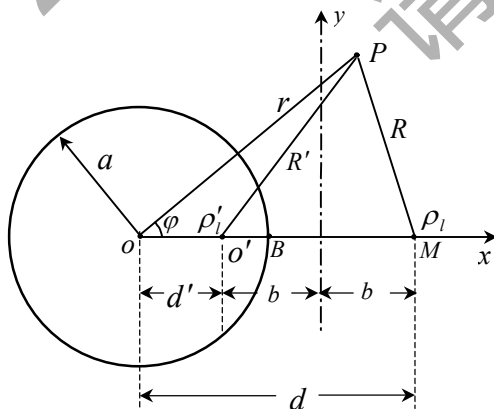


图5-15 线电荷对导体圆柱的镜像

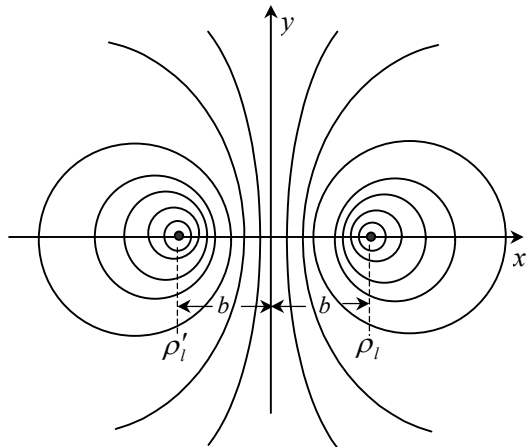


图5-16 平行线电荷的等电位线

在上面的例题中, 如果将两条线电荷连线 $O'M$ 的垂直平分线上的任意一点指定为零电位点, 并假设镜像电荷的电量和位置仍由式 (5-95) 决定, 则空间任意点的电位为

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a\sqrt{a^2 + r^2 d^2 / a^2 - 2rd \cos \varphi}}{d\sqrt{d^2 + r^2 - 2rd \cos \varphi}} \quad (5-99)$$

令上式中 $r = a$, 得到圆柱表面的电位

$$U(r=a) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \quad (5-100)$$

可见, 导体圆柱表面是等电位面的边界条件能够被满足。如果 $\rho_l > 0$, 由式 (5-100) 及 $a < d$ 可知, 导体圆柱的电位为负值, 从零电位参考点所设位置分析, 此结果是必然的。

根据平行双线的对称性可以推测, 在 $O'M$ 的垂直平分线的右侧一定还存在着一个与圆柱边界圆相对称的正值等位圆。实际上, 上述两条平行异号线电荷所产生的二维等电位线是两个圆族, 等位圆的电位值由式 (5-99) 决定, 当 $R'/R = k$ 取不同值时, 就得到不同电位的等位圆。如果将 $O'M$ 与直角坐标系的 x 轴重合, 并把它长度记为 $2b$, 将它的垂直平分线与 y 轴重合, 则 $R'/R = k$ 可以表示为

$$\frac{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = k$$

由上式整理可得

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2k}{1-k^2}b\right)^2$$

上式是一个以常数 k 为参量的圆族方程, 它表示两条平行异号线电荷在二维平面内的等电位线族。等位圆的圆心在 $[-(1+k^2)b/(1-k^2), 0]$, 半径为 $|2kb/(1-k^2)|$ 。 $k < 1$ 时, 等位圆在 y 轴的左侧, 电位为负值; $k > 1$ 时, 等位圆在 y 轴的右侧, 电位为正值。电位为正、负无穷的等位圆收缩成两条线电荷所在位置的点, 对应的 k 值分别是 ∞ 和 0 。随着电位绝对值的减小, 等位圆的圆心分别向 x 轴的正、负方向移动, 圆半径逐渐增大, 零电位圆变成 y 轴, 对应的 k 值为 1 。图 5-16 略示了它的若干条等位线。

由于平行异号线电荷产生的等电位线是两族对称圆, 因此不但上例的线——柱问题可以转化为平行双线来求解, 对于平行导体圆柱的问题也可采用这种方法。

例 5.14 两无限长平行圆柱导体的半径都等于 a , 轴线之间的距离为 $2d$, 如图 5-17 所示。求导体柱单位长度的电容。

解: 本题可利用前面讨论的结果, 用两条平行异号线电荷 ρ_l 和 $-\rho_l$ 作为平行带电圆柱的镜像。首先来确定线电荷的位置 b 。设 y 轴上的任意点为零电位参考点, 则空间任意点 $P(x, y)$ 处的电位为

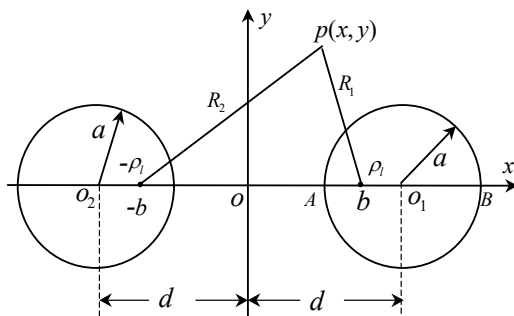


图5-17 平行双圆柱的镜像法

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} \quad (5-101)$$

在右边圆柱边界上选取两个特殊点 $A(d-a, 0)$ 和 $B(d+a, 0)$ ，把式 (5-101) 代入边界条件 $U_A = U_B$ ，得

$$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(d-a+b)^2}}{\sqrt{(d-a-b)^2}} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(d+a+b)^2}}{\sqrt{(d+a-b)^2}}$$

解上式得 $b = \sqrt{d^2 - a^2}$

将 b 值代回式 (5-101)，得

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x+\sqrt{d^2-a^2})^2 + y^2}}{\sqrt{(x-\sqrt{d^2-a^2})^2 + y^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+\sqrt{d^2-a^2})^2 + y^2}{(x-\sqrt{d^2-a^2})^2 + y^2} \quad (5-102)$$

为了验证上式能使圆柱边界上的所有点具有相同的电位值，可以将右边圆柱边界的圆方程 $y^2 = a^2 - (x-d)^2$ 代入该式，得

$$\begin{aligned} U_{1a} &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x+\sqrt{d^2-a^2})^2 + a^2 - (x-d)^2}{(x-\sqrt{d^2-a^2})^2 + a^2 - (x-d)^2} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+\sqrt{d^2-a^2}}{a} \end{aligned} \quad (5-103)$$

同理，可证明左边圆柱的电位为

$$U_{2a} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+\sqrt{d^2-a^2}}{a} \quad (5-104)$$

可见， U_{1a} 和 U_{2a} 都是只决定于 a 、 d 、 ρ_l 的量值，导体柱面等电位的边界条件能够满足，故式 (5-102) 是原问题的电位解。

由式 (5-103) 和式 (5-104) 可得两圆柱间的电位差

$$V = U_{1a} - U_{2a} = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d+\sqrt{d^2-a^2}}{a}$$

两圆柱单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{V} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d+\sqrt{d^2-a^2}}{a}}$$

当 $d \gg a$ 时，令 $D = 2d$ ，则得

$$C_0 \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{a}}$$

§ 5.4 复变函数法

复变函数法是解决复杂二维边值问题的一种有效方法。它的应用方式有两种：一种是根据问题的边界形式直接选择一合适解析函数的实部或虚部作为待求场位的解，称为**复位函数法**；另一种是利用解析函数的保角变换性质，将边界形状比较复杂的边值问题变换为新坐标平面上的简单边值问题，称之为**保角变换法**。本节将分别对两种方法作简单介绍。

一. 复位函数法

复数 $Z = x + jy$ 表示复平面 Z 上的一点，与一对实数 x 、 y 对应，如图 5-18(a) 所示。复数也可以用指数形式 $Z = re^{j\varphi}$ 表示， r 称作 Z 的**模**， φ 称作 Z 的**辐角**，它们与 x 、 y 的关系为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (5-105)$$

以复变数 $Z = x + jy$ 为自变量的函数称为**复变函数**，它可以表示成如下形式

$$W(Z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (5-106)$$

其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 分别是 $W(Z)$ 的实部和虚部，它们都是 x 、 y 的实函数。

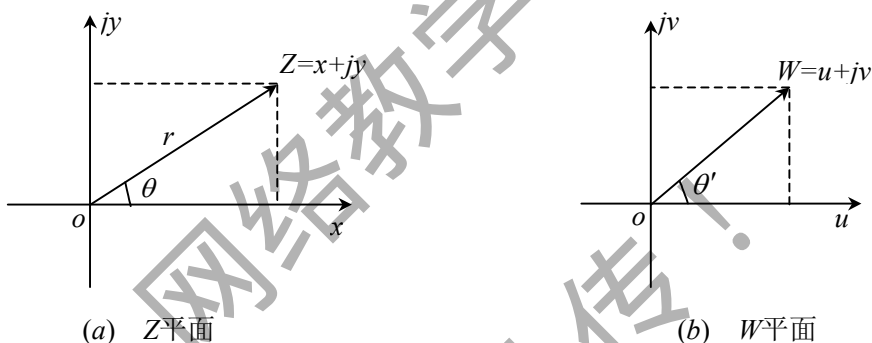


图5-18 Z 平面和 W 平面内的点

同样，复变函数 $W(Z)$ 也可表示为以 u 轴和 jv 轴所成平面内的点，如图 5-18(b) 所示，此平面称为 W 平面。

由于 W 平面内的点与 Z 平面内的点通过 $W = W(Z)$ 而对应，因此两个平面内曲线的区域也是对应的。这种对应关系称为变换或映射。 Z 平面内的图形称为原象， W 平面内的对应图形称为映象。除函数 $W(Z) = aZ + b$ 外，原象与映象有不同的形状。例如函数

$$W(Z) = Z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy = u + jv$$

其中的实部函数和虚部函数分别为

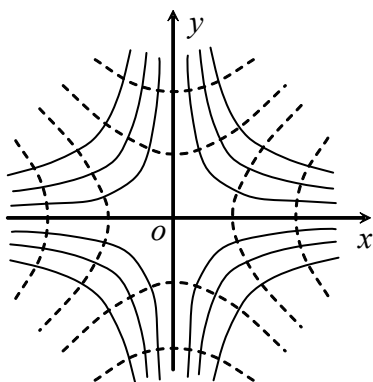
$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

这表明函数 $W(Z) = Z^2$ 可以将 Z 平面内的两族双曲线 $x^2 - y^2 = C_1$ 和 $2xy = C_2$ 映射成 W 平面内的两族平行直线 $u = C_1$ 和 $v = C_2$ ，如图 5-19 所示。复变函数的这种变换作用为下节化简区域边界提供了途径。

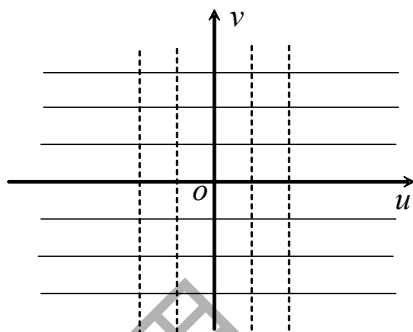
复变函数的导数与实变函数的导数有相似的定义，其定义为

$$\frac{dW}{dZ} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta Z} = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{W(Z + \Delta Z) - W(Z)}{\Delta Z} \quad (5-108)$$

如果复变函数 $W(Z)$ 在某定义域 D 内所有点上都存在唯一的导数，即在区域 D 的每一



(a)

图5-19 $W(Z) = Z^2$ 变换

(b)

上, 不论 ΔZ 以何种路径趋于零, 式 (5-108) 都有唯一确定值, 则称 $W(Z)$ 是区域 D 内的解析函数。于是解析函数的实部和虚部满足下面两个方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (5-109)$$

这两个方程称为柯西——黎曼条件, 简称 CR 条件。据此,

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5-110)$$

将式 (5-109) 的第 1 式对 x 求偏导而第 2 式对 y 求偏导, 然后将所得方程相加, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0 \quad (5-111)$$

将以上求导顺序反转, 则有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \quad (5-112)$$

上面两式表明解析函数的实部函数和虚部函数均满足二维拉普拉斯方程。因为无源区域内的静电位 U 和磁标位 U_m 也满足拉普拉斯方程, 所以可以选择合适的解析函数 W 的实部或虚部来表示二维问题的位函数, 这个解析函数 W 就称为原问题的**复位函数**。

选择复位函数的关键是要使其 u 或 v 在 Z 平面内的等值线能与原问题的等值边界线重合。根据唯一性定理, 这个函数 (u 或 v) 既满足拉普拉斯方程, 又满足原问题的边界条件, 因此它就是原问题的解。多数情况下, 如何根据问题所给边界形式来选择合适的解析函数并没有一定的规律可循, 而只能依靠我们对一些已知函数等值线形状的了解, 从而使这种方法的应用受到了限制。下面通过一个简单例子来说明这种方法的具体应用。

例 5.15 分析对数函数

$$W(Z) = A \ln Z + (B_1 + jB_2)$$

所代表的电场，其中 A 、 B_1 、 B_2 为实常数。

解：令 $Z = re^{j\varphi}$ ，则有

$$W(Z) = A \ln(re^{j\varphi}) + B_1 + jB_2 = (A \ln r + B_1) + j(A\varphi + B_2)$$

所以

$$u = A \ln r + B_1, \quad v = A\varphi + B_2$$

可以看出，在 Z 平面内， u =常数的曲线是 r 等于常数的圆，而 v =常数的曲线是径向辐射线。因为无限长带电导体圆柱或同轴线的二维等电位线是圆，所以 u 可以表示这类边值问题的电位函数。例如一无限长同轴线，已知内导体电位为 $U(r=r_1)=U_0$ ，外导体电位为 $U(r=r_2)=0$ ，如图 5-20 所示。若求内外导体之间的电位分布，则可设上面的 u 为待求电位函数解，即

$$U = u = A \ln r + B_1$$

将内、外导体的边界条件分别代入上式，得

$$U_{r=r_1} = A \ln r_1 + B_1 = U_0$$

$$U_{r=r_2} = A \ln r_2 + B_1 = 0$$

由以上两式联立解得

$$A = \frac{U_0}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \quad B_1 = -\frac{U_0 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

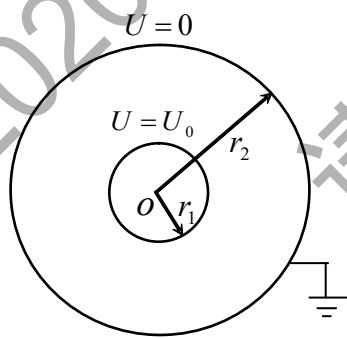


图5-20 同轴线内的电位

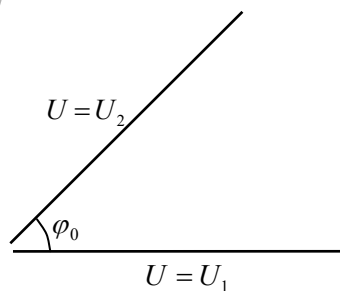


图5-21 两导体平板间的电位

所求区域的电位解为

$$U = \frac{U_0 \ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

如果取 $w(Z)$ 的虚部 v 为电位函数，那么可以表示图 5-21 所示的两个半无限导体平面

所夹扇形区域内的电位，令

$$U = u = A\varphi + B_2 \quad (a)$$

对 $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ 的区域，将边界条件 $U_{\varphi=0} = U_1$ 和 $U_{\varphi=\varphi_0} = U_2$ 分别代入上式，可解得

$$A = \frac{U_2 - U_1}{\varphi_0}, \quad B_2 = U_1$$

该区域内的电位表达式为

$$U = \frac{U_2 - U_1}{\varphi_0} \varphi + U_1$$

对 $\varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 的区域，将边界条件 $U_{\varphi=\varphi_0} = U_2$ 和 $U_{\varphi=2\pi} = U_1$ 分别代入式(a)，可得

$$A = \frac{U_1 - U_2}{2\pi - \varphi_0}, \quad B_2 = \frac{2\pi U_2 - \varphi_0 U_1}{2\pi - \varphi_0}$$

该区域内的电位表达式为

$$U = \frac{U_1 - U_2}{2\pi - \varphi_0} \varphi + \frac{2\pi U_2 - \varphi_0 U_1}{2\pi - \varphi_0}$$

在前面介绍的方法中，如果我们取 $u(x, y)$ 来表示某边值问题的电位函数，则 Z 平面上的曲线 $u(x, y) = C_1$ 表示等电位线，那么此时的 $v(x, y)$ 以及它的等值线 $v(x, y) = C_2$ 代表什么物理意义呢？为了说明这个问题，先来计算通过任意点的两条曲线 $u(x, y) = C_1$ 和 $v(x, y) = C_2$ 的斜率乘积。对 $u(x, y) = C_1$ 两边微分，得

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

该曲线的斜率为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_u = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} \quad (5-113)$$

对 $v(x, y) = C_2$ 两边微分，得该曲线斜率

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_v = -\frac{\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y} \quad (5-114)$$

将式 (5-113) 和式 (5-114) 相乘，然后代入 CR 条件，得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_u \left(\frac{dy}{dx}\right)_v = -1 \quad (5-115)$$

上式表明，两组曲线族 $u(x, y) = C_1$ 和 $v(x, y) = C_2$ 在 Z 平面内是处处正交的。由静电场的等电位线与电通量线（或电力线）处处正交的性质可知，当 $u(x, y) = C_1$ 表示等电位线时，则 $v(x, y) = C_2$ 可以作为这个电场的电通量线或电力线， $v(x, y)$ 称为电通量函数。电场强度与电位函数及电通量函数的关系由下面公式确定

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\nabla U = -\nabla u(x, y) \\
 &= -\hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} \\
 &= -\hat{x} \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{y} \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}$$

于是在 Z 平面上穿过等位线弧 AB 上的电通量为

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \varepsilon \int_A^B \vec{E} \cdot (\hat{n} \times d\vec{l}) = \varepsilon \int_A^B (-\hat{x} \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{y} \frac{\partial v}{\partial x}) \cdot (-\hat{x} dy + \hat{y} dx) \\
 &= \varepsilon \int_A^B (\frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx) = \varepsilon \int_A^B du = \varepsilon [u(B) - u(A)]
 \end{aligned}$$

它表示长为 1 米，宽为弧 AB 的矩形面积上通过的电通量。

由于解析函数的实部和虚部都具有明确的电场物理意义，因此在电磁学中常把它称为**复电位**，利用复电位求解二维场的方法称为**复位函数法**。

二. 保角变换法

对一些边界形状较复杂的二维边值问题，往往很难通过一次变换就能找到合适的复位函数。特别是对有源区域的泊松问题，复位函数法一般是不成立的，因为解析函数的 u 和 v 只满足拉普拉斯方程而不满足泊松方程。但对上述问题，我们却可以利用解析函数的变换作用，将 Z 平面的待求区域变换到 W 平面上，使原来复杂边界的问题变为 W 平面内简单边界的问题，这种方法称为**保角变换法**。由于保角变换可以保持系统总电荷量不变，由此为求解分布电容提供了一种有效方法。为了正确地使用这种方法，我们对解析函数的变换性质做进一步讨论。

对于 W 平面上的任意点， $W(Z)$ 的导数可以表示为

$$\frac{dW}{dZ} = W'(Z) = Me^{j\theta} \quad (5-117)$$

因此有

$$dW = W'(Z)dZ = Me^{j\theta} dZ \quad (5-118)$$

根据解析函数在一个点上只有唯一导数的性质，一个给定点上的 M 和 θ 都只有唯一的数值。因此不论 dZ 的取向如何， W 平面上增量 dW 的绝对值都等于 dZ 绝对值的 M 倍，同时 dW 的辐角等于 Z 的辐角加上 θ 。也就是说：从 Z 平面变换到 W 平面上时，线元 dZ 的长度被放大 M 倍，同时旋转了一个 θ 角，并且不管线元 dZ 的取向如何，其放大的倍数和旋转的角度是一定的。因此，如果 Z 平面上的两条曲线 l_1 和 l_2 相交于 Z_0 点，其夹角为 φ ，则变换到 W 平面后，其映象点 W_0 处两条曲线 l'_1 和 l'_2 的夹角也是 φ ，如图 5-22 所示。解析函数的这种性质称为保角性。

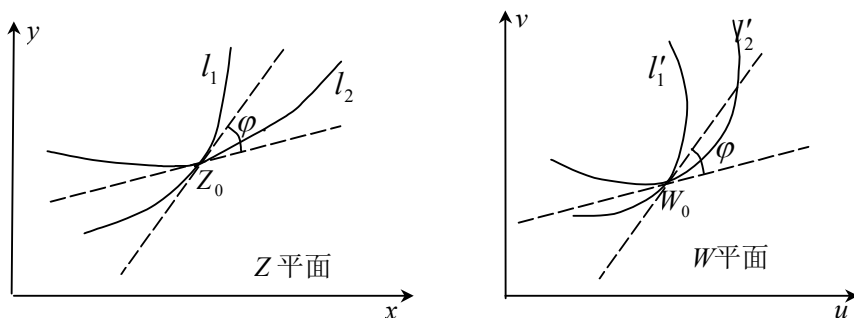


图5-22 解析变换的保角性

就一对确定点 Z_0 与 w_0 而言, 线元的放大量和旋转角度是一定的。但因为 dW/dZ 是 Z 的函数, 所以 M 和 θ 的值都将随 Z 变化, 不同点上的放大倍数和旋转角度也各不相同。因此当 Z 平面的曲线被变换到 W 平面上时, 它的映象 l' 就与原象 l 的形状不同了。同样, Z 平面上的闭合曲线所包围的区域被变换到 W 平面上时, 其形状和范围也与原象不同。

之所以选择解析函数进行变换, 是因为它可以保证 Z 平面内的泊松问题 (或拉普拉斯问题) 变换到 W 平面内仍是一个泊松问题 (或拉普拉斯问题)。下面证明这个性质。

设电位函数 U 在 Z 平面内满足泊松方程, 即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5-119)$$

经过 $W = W(Z)$ 变换后, U 所代表的实际物理量分布并未产生变化, 但坐标参考系进行了替换。这与我们把某函数从直角坐标系变换到圆柱或球面坐标系的情况是完全类似的。因此, $W(Z)$ 变换的实质就是从 (x, y) 坐标系到 (u, v) 坐标系的坐标变换。由于 u, v 是 x, y 的函数, 可利用复合函数求导法则, 将式 (5-119) 中的微分运算写成如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial v} \right] \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial u} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial v} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v}$$

两式相加, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial U}{\partial u} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \frac{\partial U}{\partial v} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} \end{aligned} \quad (5-120)$$

将式 (5-109)、(5-110)、(5-111)、(5-112) 和 CR 条件代入上式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) \\ &= |W'(Z)|^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

把上式代入式 (5-119), 得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = -|W'(Z)|^{-2} \frac{\rho(x, y)}{\varepsilon} = -\frac{\rho^*(u, v)}{\varepsilon} \quad (5-121)$$

$$\text{其中} \quad \rho^*(u, v) = |W'(Z)|^{-2} \rho(x, y) \quad (5-122)$$

右边的 $|W'(Z)|$ 正是 W 平面上线元长度对 Z 平面上线元长度的倍数。

两个区域内的总电荷量是不变的。这是因为

$$\begin{aligned} Q(Z) &= \int_{s_z} \rho(x, y) ds_z = \int_{s_W} |W'(Z)|^{-2} \rho(x, y) ds_W \\ &= \int_{s_W} \rho^*(u, v) ds_W = Q(W) \end{aligned} \quad (5-123)$$

对于拉普拉斯方程，令式(5-119)和式(5-121)中的 $\rho(x, y) = 0$ ，得到

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (5-124)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} = 0 \quad (5-125)$$

Z 平面内的拉普拉斯问题经过保角变换后，在 W 平面中仍是一个拉普拉斯问题。

例 5.16 讨论反三角函数 $W(Z) = a \operatorname{rc} \cos Z$ 所能解决电场边值问题。

解：由所给变换函数可以得到

$$\begin{aligned} Z &= \cos W = \cos(u + jv) = \cos u \cos jv - \sin u \sin jv \\ &= \cos u \operatorname{ch} v - j \sin u \operatorname{sh} v = x + jy \end{aligned}$$

所以

$$x = \cos u \operatorname{ch} v, \quad y = -\sin u \operatorname{sh} v$$

由上式可得

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 v} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad (5-126)$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} + \frac{y^2}{\sin^2 v} = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \quad (5-127)$$

式(5-126)表示 W 平面上 $v = \text{常数}$ 的曲线，在 Z 平面内的原象为共焦椭圆族；式(5-127)表示 $u = \text{常数}$ 的曲线在 Z 平面内的原象为共焦双曲线族，如图5-23(a)所示。显然，我们可以利用 $W(Z) = \arccos Z$ 把共焦椭圆导体柱面或共焦双曲导体柱面间的边值问题变换到 W 平面内解决。例如求图(a)中 $v = \pi/8$ 和 $v = \pi/4$ 的两个导体共焦椭圆柱面之间的电位时，已知边界条件为 $U(v = \pi/8) = U_0$ ， $U(v = \pi/4) = 0$ 。两条边界线变换到 W 平面是图(b)中的两条平行直线。很明显，两直线边界内的电位分布为如下形式

$$U = kv + C \quad (5-128)$$

将所给边界条件代入上式，可确定出常数 k 和 C ，即

$$U_0 = k \frac{\pi}{8} + C \quad \text{和} \quad 0 = k \frac{\pi}{4} + C$$

联立解之，得

$$k = -\frac{8U_0}{\pi}, \quad C = 2U_0$$

W 平面内的电位解为

$$U = -\frac{8U_0}{\pi} v + 2U_0 \quad (5-129)$$

由式(5-126)可得

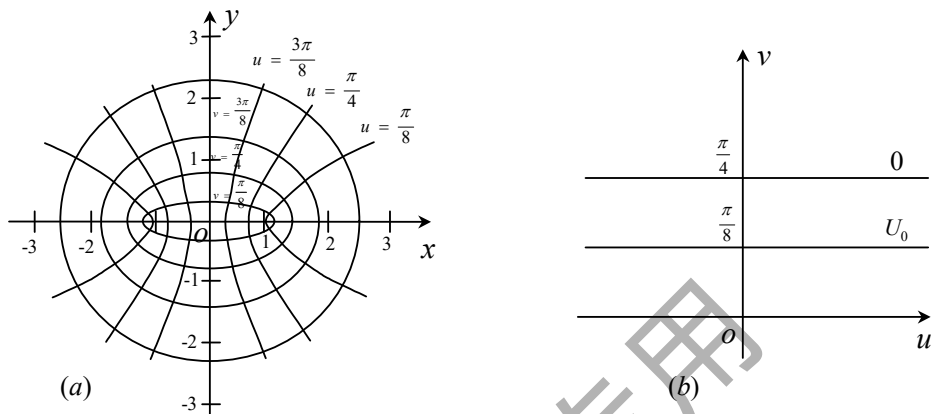


图5-23 反三角函数变换

$$\begin{aligned}
 x^2 \operatorname{sh}^2 v + y^2 \operatorname{ch} v &= \operatorname{ch}^2 v \\
 x^2 \operatorname{sh}^2 v + y^2 (1 + \operatorname{sh}^2 v) &= (1 + \operatorname{sh}^2 v) \operatorname{sh}^2 v \\
 \operatorname{sh}^4 v + (1 - x^2 - y^2) \operatorname{sh}^2 v - y^2 &= 0 \\
 \operatorname{sh}^2 v &= \frac{-(1 - x^2 - y^2) \pm \sqrt{(1 - x^2 - y^2)^2 - 4y^2}}{2} \\
 v &= \operatorname{arcsch} \left[\frac{x^2 + y^2 - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2} \right)^2 + y^2} \right]^{1/2} \quad (5-130)
 \end{aligned}$$

将式(5-130)代入式(5-129), 即得到 $U(x, y)$ 的解。

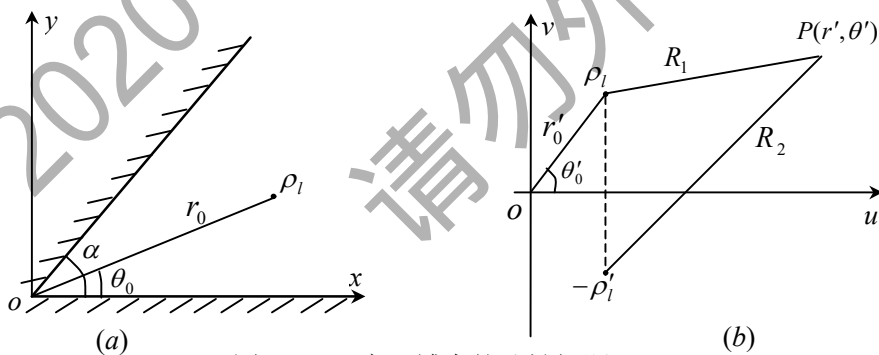


图5-24 扇形域内的泊松问题

例 5.17 在两个成任意夹角 α 的半无限大接地导体平面之间有一无限长的线电荷, 线电荷与两平面的交线平行, 电荷线密度为 ρ_l , 如图 5-24(a)所示。求 α 角内电位分布。

解: 这是一个任意角度扇形域内的泊松问题, 不能直接用镜像法或复变函数法求解。我们可以利用解析函数 $W = Z^{\pi/\alpha}$ 将所求区域变换到 W 平面。令 $Z = re^{j\theta}$, $W = Re^{j\theta}$, 得

$$W = Re^{j\theta} = (re^{j\theta})^{\pi/\alpha}$$

所以有

$$R = r^{\pi/\alpha}, \quad \theta = \frac{\pi}{\alpha} \varphi \quad (5-131)$$

从上式可看出, Z 平面内的两条边界线被变换成 W 平面内的 u 轴, 即 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$; α 角区域被变换成 W 平面的上半空间。变换后线电荷的总电量 (本题为线密度 ρ_l) 不变, 但它在 W 平面的位置变为

$$R_0 = r_0^{\pi/\alpha}, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{\alpha} \varphi_0 \quad (5-132)$$

如图 5-24(b) 所示。

W 平面上任意点 $P(R, \theta)$ 的电位可由镜像法求得

$$U_p = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (5-133)$$

其中
$$R_1 = |R e^{j\theta} - R_0 e^{j\theta_0}|, \quad R_2 = |R e^{j\theta} - R_0 e^{-j\theta_0}|$$

将式 (5-131) 和式 (5-132) 代入上两式, 得

$$R_1 = \left| r^{\pi/\alpha} e^{j\frac{\pi}{\alpha}\varphi} - r_0^{\pi/\alpha} e^{j\frac{\pi}{\alpha}\varphi_0} \right|$$

$$R_2 = \left| r^{\pi/\alpha} e^{j\frac{\pi}{\alpha}\varphi} - r_0^{\pi/\alpha} e^{-j\frac{\pi}{\alpha}\varphi_0} \right|$$

把上面两式代入式 (5-133), 即得到 Z 平面内的所求电位解。

§ 5.5 有限差分法

当边界形状比较复杂, 以至边界条件无法写成解析式而只能用一些离散数值表示时, 前面所介绍的各种解法均无法使用, 此时可以采用**数值方法**求解。数值法是近似解法, 它是通过求出区域内密集分布点上的场位值来描述场分布的。一般来讲, 要实现较高的近似精度, 区域内所求的场点必须达到一定的数量, 所以数值法的计算量通常都很大, 只有现代计算机才能胜任。

有限差分法是应用比较早的一种数值解法。它是将满足拉普拉斯方程或泊松方程的边值问题转化为一个有限差分方程组来求解。差分方程组是一个简单的线性代数方程组, 其求解方法很多, 本书仅介绍一种**叠代法**求解。

下面以二维平面场为例介绍有限差分法的基本原理与解题步骤。首先, 将待求区域划分成许多边长为 h 的小正方形网格, 如图 6-25 所示, 网格的交点称为**结点**。我们来推导任意结点 P 上位函数 $U(x, y)$ 与相邻四点 $P_1 \sim P_4$ 上位函数值的关系。将结点 P_1, P_3 上的位函数

$U_1 = U(x+h, y)$ 、 $U_3 = U(x-h, y)$ 分别展成 $U(x, y)$ 的泰勒级数

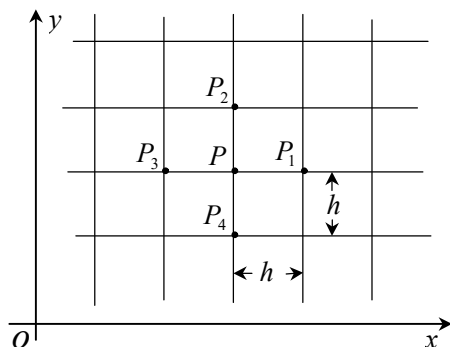


图6-25 有限差分法示意图

$$U_1 = U + \frac{1}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h^3 + \dots \quad (5-134)$$

$$U_3 = U - \frac{1}{1!} \frac{\partial U}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h^3 + \dots \quad (5-135)$$

将上面两式相加并略去 4 阶以上的高次项，得

$$U_1 + U_3 = 2U + h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5-136)$$

同理可求出

$$U_2 + U_4 = 2U + h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (5-137)$$

式 (5-136) 和式 (5-137) 相加得到

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 4U + h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (5-138)$$

如果讨论的是一个有源区域的电位问题，即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

则由式 (5-138) 可得

$$U = \frac{1}{4} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + h^2 \frac{\rho}{\varepsilon}) \quad (5-139)$$

对于拉普拉斯问题，则有

$$U = \frac{1}{4} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \quad (5-140)$$

以上两式分别反映了两类问题中空间 P 点的位函数值与相邻四点位函数值的关系，是泊松方程和拉普拉斯方程在 P 点处的近似表达式，称为 P 点上的差分方程。由于 $U_1 \sim U_4$ 也是未知的，所以仅此一个差分方程并不能得到 U 值。我们可以由区域内所有结点的差分方程构成一个方程组。如果边界上的电位值是已知的，则差分方程和未知电位的个数都等于结点数，联立求解即可得到各结点的电位值。

下面采用叠代法计算图 5-26 所示的正方形导体长槽内的电位。首先，把槽截面划分成若干个边长相等的小正方形格。假设分成 16 个，共有 9 个结点的电位待定，设它们的电位分别为 $U_1, U_2, U_3 \dots U_9$ 。

叠代法的第一步是先给出各结点的初始电位值，初值是任意的，最简单的办法是令它们均等于零（如果用估计方法给定接近实际电位的初始值，可以减少计算次数）。然后利用式 (5-140) 计算，得到

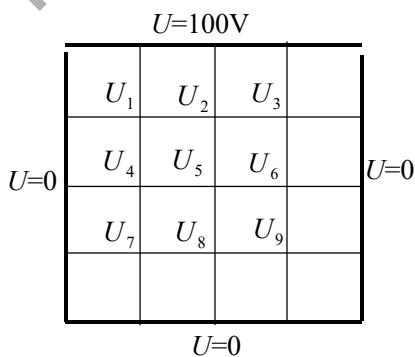


图5-26 正方形截面的导体长槽

$$U_1 = U_2 = U_3 = \frac{1}{4}(100 + 0 + 0 + 0) = 25 \text{ V}$$

$$U_4 = U_5 = \cdots = U_9 = 0 \text{ V}$$

用上面各值代替所设初始值，得到各点电位的第一次叠代值。将各点的第一次叠代值再代入式（5-142）计算，得

$$U_1 = \frac{1}{4}(100 + 25 + 0 + 0) \approx 31.3 \text{ V}$$

$$U_2 = \frac{1}{4}(100 + 25 + 0 + 25) = 37.5 \text{ V}$$

$$U_3 = \frac{1}{4}(100 + 25 + 0 + 0) \approx 31.3 \text{ V}$$

$$U_4 = U_5 = U_6 = \frac{1}{4}(25 + 0 + 0 + 0) \approx 6.3 \text{ V}$$

$$U_7 = U_8 = U_9 = 0 \text{ V}$$

上面的结果比第一次叠代值更接近了真实值。用它们代替第一次的叠代值，得到各点电位的第二次叠代值。然后再重复上面的步骤进行下一次叠代，直到每一结点上的相邻两次叠代值之差都小于事先给定的误差为止。表 5-1 列出了本题的计算结果。

表 5-1

叠代次数	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9
0 (初始值)	0.	0	0	0	0	0	0	0	0
1	25.0	25.0	25.0	0	0	0	0	0	0
2	31.3	37.5	31.3	6.3	6.3	6.3	0	0	0
3	36	42.2	36	9.4	12.5	9.4	1.6	1.6	1.6
⋮									
16	42.8	52.6	42.8	18.6	24.9	18.6	7.1	9.7	7.1
17	42.8	52.6	42.8	18.7	24.9	18.7	7.1	9.8	7.1
18	42.8	52.6	42.8	18.7	25.0	18.7	7.1	9.8	7.1
⋮									

有限差分法的解题精度主要决定于结点密度，而收敛于稳定值则决定于叠代次数，当精度要求较高时，随着节点数和叠代次数的增大，其运算量会迅速增大。为了提高运算收敛速度，可以对上面介绍的**同步叠代法**进行改进，例如在计算每一结点的差分方程值时，可以把同次叠代中刚刚计算出的邻近点新值代入计算式，如前例第二次叠代计算 U_2 时，式中的 U_1 用刚算出的 31.3 V 而不是前次结果的 25 V，即

$$U_2 = \frac{1}{4}(100 + 31.3 + 0 + 25) \approx 39.1 \text{ V}$$

由于提前使用新值，可使总的收敛速度加快近一倍，称这种方法为**异步叠代法**。此外，还可以在差分方程中引入一个加速收敛的松弛因子，这时的叠代法又称为超松弛法。有关这方面更详细的内容，可参阅数值计算方法的专门书籍。

习 题 五

5.1 如图 5—27 所示导体长槽的槽体电位为零，盖板电位为 $U_0 \sin(\pi x/a)$ 。求槽截面内的电位分布。

5.2 一导体长槽的两侧壁向 y 方向无限沿伸且电位为零，槽的底面保持电位 U_0 ，如图 5—28 所示。求槽截面内的电位分布。

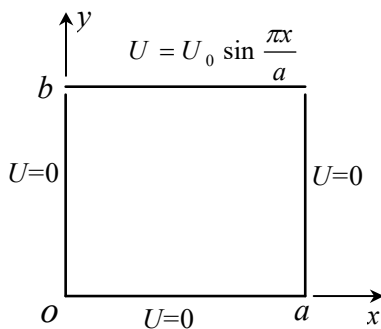


图 5—27 题 5.1 图

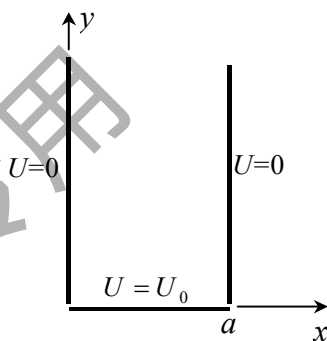


图 5—28 题 5.2 图

5.3 一矩形区域的上、下两条边界的长度为 a 且电位为零，左、右两条边界的长度为 b 而电位分别是 U_1 和 U_2 。求区域内的电位分布。

5.4 真空中有一电场强度为 $\vec{E} = \hat{x}E_0$ 的均匀静电场，把一根半径为 a 的接地导体长圆棒放在电场中，圆棒的轴线与 z 轴重合。求任意点的电位。

5.5 无限长的同心导体柱，内柱半径为 a ，外柱的内半径为 b ，若在内、外柱间加 100V 电压（外柱接地）。

(1) 证明 $U_1 = A/r + B$ 和 $U_2 = C \ln r + D$ 均可满足边界条件，其中 A 、 B 、 C 、 D 为待定常数；

(2) U_1 还是 U_2 是此问题的正确电位解？为什么？

5.6 一个半圆环区域的内、外半径分别是 a 和 b ，边界条件如图 5—29 所示。求半环域内的电位分布。

5.7 半径为 a 的无限长圆柱面上的电位

$$U(a, \varphi) = \begin{cases} -U_0 & (0 < \varphi < \pi) \\ U_0 & (\pi < \varphi < 2\pi) \end{cases}$$

求 $r < a$ 范围内的电位分布。

5.8 在电容率为 ϵ_2 的电介质中有电场强度 $\vec{E} = \hat{z}E_0$ 的均匀电场，在此电场中放入一半径为 a ，电容率为 ϵ_1 的电介质球，球心位于坐标原点，求任意点的电位。

5.9 球面 $r=a$ 上电位为 $U_1 \cos \theta$ ，与之同心的另一球面 $r=b$ 的电位为 U_2 。其中 U_1, U_2 为常量。求区域 $a \leq r \leq b$ 内的电位分布。

5.10 一磁导率为 μ 的磁介质球, 半径为 a , 放在真空均匀外磁场 $\vec{H}_0 = \hat{z}H_0$ 中。应用磁标位计算球内、外的磁场强度。证明: 球内场是均匀场, 球的磁化强度为

$$\vec{M} = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \vec{H}_0$$

球内 \vec{H} 为

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{M}}{3}$$

5.11 一点电荷 q 与无限大导体平面距离为 h , 如果把它移到无穷远处 ($h \rightarrow \infty$), 需要作多少功?

5.12 半径为 a 的导体球带有电荷 q , 距球心 $d=3a$ 处又有一同电量的点电荷, 确定球上

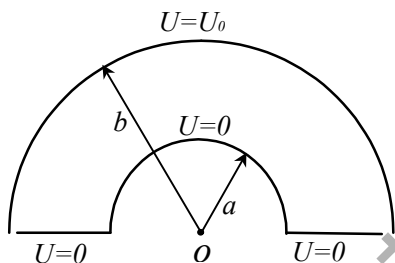


图5-29 题5.6图

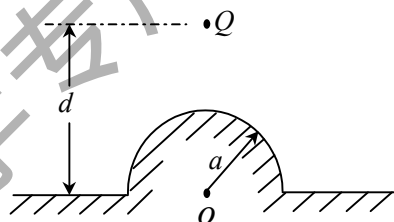


图5-30 题5.13图

离点电荷最近及最远处面电荷密度之比。

5.13 如图 5-30 所示, 在无限大接地导体平板上有一半球形突起, 其半径为 a , $(d, 0, 0)$ 处有一点电荷 Q 。求 Q 所受力及点 $(a, 0, 0)$ 处的面电荷密度。

5.14 无限大导体平面上方有一电荷线密度为 ρ_l 的长直线电荷, 电荷线与平面的距离为 b , 求此电荷线单位长度所受的力。

5.15 证明复变函数 $W = -E_0(Z - a^2/Z)$ 能够代表均匀电场中放入一轴线与电场方向垂直的长圆柱导体的静电场。

5.16 证明 $W = \sin Z$ 把 Z 平面上宽度为 π 的半无限长带形区域, 变为 W 平面的上半平面。

5.17 如图 5-31 所示, 一无限大接地导体平面与 yz 平面重合, $y=0$ 且 $x \geq a$ 的导体

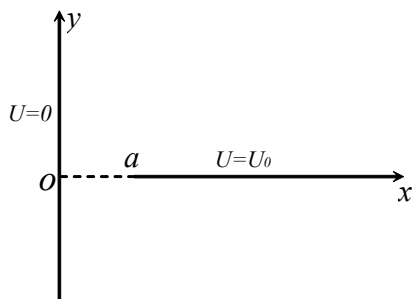


图5-31 题5.17图

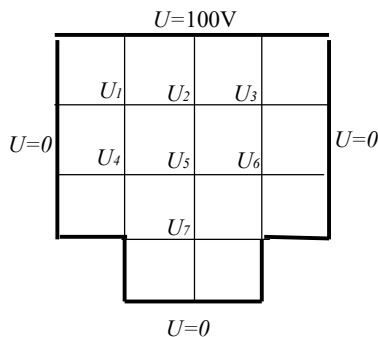


图5-32 题5.18图

平面电位为 U_0 ，试求 $x=y=2a$ 处的电位。[提示：用 $W = \arccos Z$ 变换。]

5.18 如图 5-32 所示一导体长槽，它的截面被分为十四个相同的方格。假设盖板的电位为 100V，槽体的电位为零。求七个结点的电位。

5.19 求如图 5-33 所示长方体区域内的电位分布。设除 $z=c$ 电位不为零外，其它各表面的电位都为零。

$$(1) U_{z=c} = U_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b) \quad , \quad (2) U_{z=c} = U_0$$

5.20 由导体板构成一槽形区域，在 y, z 方向无限延伸，其截面及边界上的电位如图 5-34 所示。求槽内原电位分布。

5.21 一直角扇形域的两直角边电位为零， $r=a$ 的圆弧边的电位为 U_0 ，求区域内的电位分布。

5.22 半径为 a ，高为 l 的圆筒的上、下底电位为零，侧面电位为 U_0 ，求筒内的电位分布。

5.23 导体圆锥的轴垂直于导体平面，锥顶与平面间有一无限小缝隙。圆锥母线长 r_0 ，它与轴的夹角为 α 。在忽略边缘效应及锥底电容的条件下，求圆锥与平面间的电容。

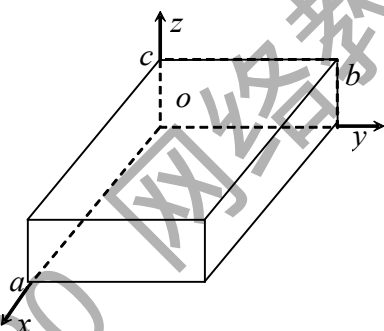


图5-33 题5.19图

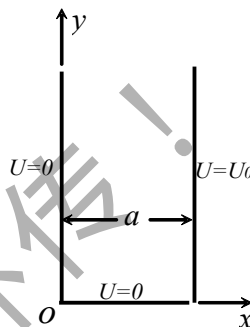


图5-34 题5.20图

5.24 半径为 a 、球心间隔为 $4a$ 的导体球阵列构成人工介质，不计球的相互影响，求等效相对电容率。

5.25 一个半径为 a 的导体球上带有总量为 Q 的电荷，在距球心 d ($d > a$) 处有一点电荷 q ，求导体球对点电荷 q 的作用力。

5.26 一半径为 a 的导体球，球心距地面为 b ($b > a$)。求此导体球与地面的电容。

5.27 一点电荷 q 放在成 60° 的导体角内的 $x=1, y=1$ 的点上，如图 5-35 所示。求出所有镜像电荷的位置和大小，并求 $x=2, y=1$ 点的电位。

5.28 假设真空中一无限长线电荷 ρ_l 与 \hat{z} 平行，它在二维复 Z 平面内的位置坐标为 $Z = re^{j\varphi}$ ，试写出它的复电位。

5.29 证明 $W = \ln(\tan Z)$ 代表的场为两无限大平行板的中间放置一根线电荷的场，线电荷与板平行。

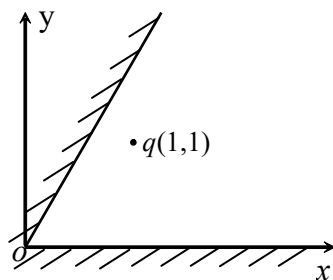


图 5-35 题 5.27 图