一、考察DFT计算公式，及其线性、对称特性：

① 记 $x_1(n) = \{a, a, a, a, a, a, a, a\}$

$x_2(n) = \{b, 0, b, 0, b, 0, b, 0\}$

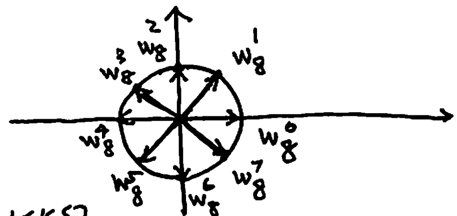
则 $x(n) = \{a+b, a, a+b, a, a+b, a, a+b, a\}$

$= x_1(n) + x_2(n) \quad , \quad 0 \le n \le 7$

再记 $x(n)$，$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 8点DFT 分别为 $X(k)$，$X_1(k)$，$X_2(k)$，

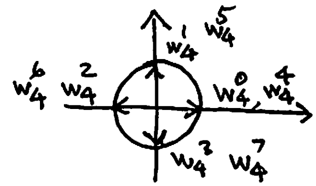
则 $X(k) = X_1(k) + X_2(k) \quad , \quad 0 \le k \le 7$

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{7} a W_8^{nk} = a\left(\sum_{n=0}^{7} W_8^{nk}\right)$$



$$= a\left(\frac{1 - W_8^{8k}}{1 - W_8^{k}}\right) = \begin{cases} 8a, & k=0 \\ 0, & k \ne 0, 1<k\le 7 \end{cases}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{3} b W_8^{2nk} = b\left(\sum_{n=0}^{3} W_4^{nk}\right)$$



$$= b\left(\frac{1 - W_4^{4k}}{1 - W_4^{k}}\right) = \begin{cases} 4b, & k=0,\ 4 \\ 0, & k \ne 0, 4 \quad 0<k\le 7 \end{cases}$$

$\therefore \quad X(k) = X_1(k) + X_2(k)$

$= \{8a+4b, 0, 0, 0, 4b, 0, 0, 0\}$

② 也可从时、频域插零入手，也即时间和频率抽取偶数点FFT：

i) $X_1(2k) = 2\{a, a, a, a\}$ 的4点DFT，其中 $0 \le k \le 3$：

$$= 2a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 2a = \begin{bmatrix} 8a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$X_1(2k+1) = \{0, 0, 0, 0\}$ 的4点DFT

所以 $X_1(k)=\{8a,0,0,0,0,0,0,0\}$

ii) 注意到 $x_2(n)$ 偶、奇序号子列的 4 点 DFT 分别为 $\{4b,0,0,0\}$ 和 $\{0,0,0,0\}$

所以 $X_2(k)=\{4b,0,0,0,4b,0,0,0\}$

二、 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

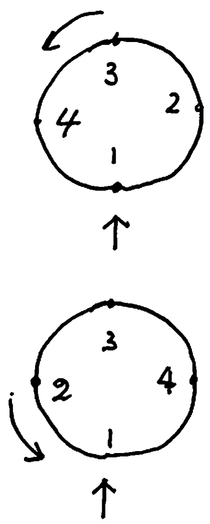
令 $n_0=N-n$，也即 $n=N-n_0$

则 $X(k)=\sum_{n_0=N}^{1} x(N-n_0)W_N^{(N-n_0)k}=\sum_{n_0=1}^{N} x(N-n_0)W_N^{-n_0k}$

由于 $x(n)=x^*(N-n)$ ， $0\le n\le N-1$

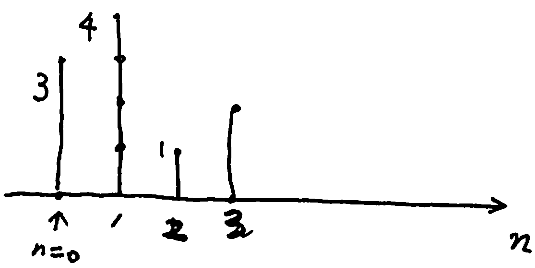
所以 $X(k)=\sum_{n_0=0}^{N-1} x^*(n_0)W_N^{-n_0k}=\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}\right)^*=X^*(k)$

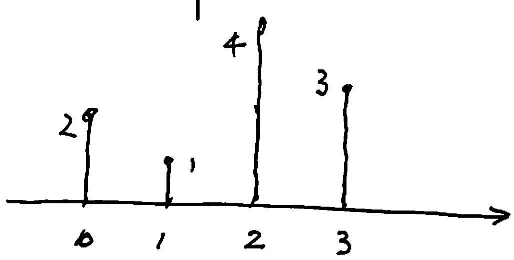
三 $x(n)=\{1,2,3,4\}$

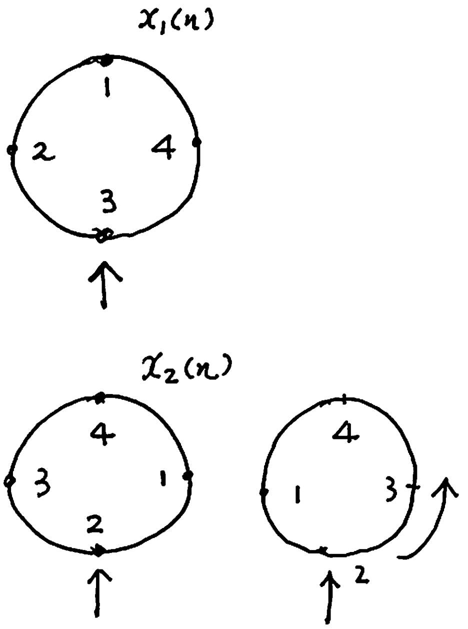


$x((n-2))_4R_4(n)=\{3,4,1,2\}=x_1(n)$

$x((-n+1))_4R_4(n)=\{2,1,4,3\}=x_2(n)$







3	4	1	2	$x_1(n)$ ④ $x_2(n)$
2	3	4	1	$6+12+4+2=24$
1	2	3	4	$3+8+3+8=22$
4	1	2	3	$12+4+2+6=24$
3	4	1	2	$9+16+1+4=30$

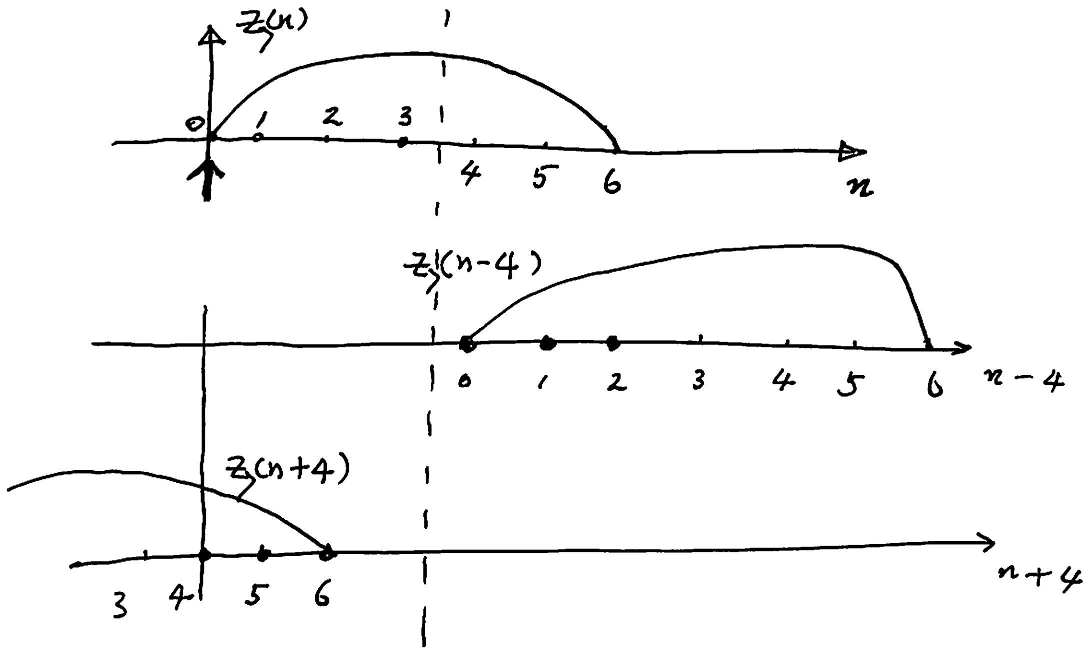
$$x_1(n) ④ x_2(n) = \{24, 22, 24, 30\}$$

四.

$$x(n) ④ y(n) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(n+4m)\right) R_4(n) = z_4(n)$$

其中 $z_7(n) = x(n) * y(n)$

$z_7(n) = x(n) * y(n)$ 的点数为 $4+4+1=7$



所以 $z_4(3) = z_7(3)$

当 $z_7(0)+z_7(4)=0$ 时，$z_4(0)=z_7(0)$，否则 $z_4(0) \neq z_7(0)$

$z_7(1)+z_7(5)=0$ 时，$z_4(1)=z_7(1)$，否则 $z_4(1) \neq z_7(1)$

$z_7(2)+z_7(6)=0$ 时，$z_4(2)=z_7(2)$，否则 $z_4(2) \neq z_7(2)$

五、 $X(z) = \sum_{n=0}^{4} x(n) z^{-n}$

$X(z)\Big|_{z=0.2e^{j\frac{2\pi k}{3}},\ k=1,2,3} = 0.2e^{j\frac{2\pi}{3}(k+1)},\ k=0,1,2$

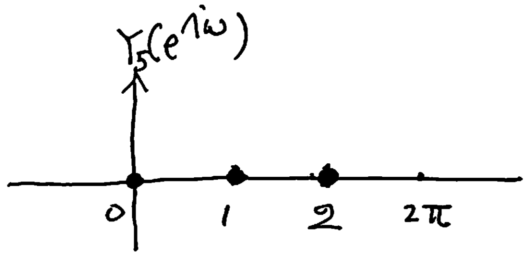
$$= \sum_{n=0}^{4} x(n)\left(0.2\, e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)(k+1)}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{4} x(n)\left(0.2\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}\cdot e^{j\frac{2\pi k}{3}}\right)^{-n}$$

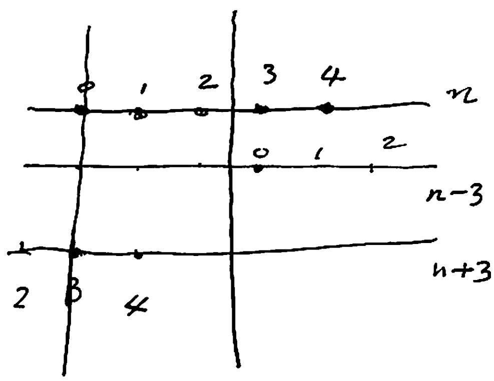
$$= \sum_{n=0}^{4} x(n)\cdot 0.2^{-n}\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{4} \underbrace{\left(x(n)\cdot 0.2^{-n}\cdot W_3^{n}\right)}_{=y_5(n)}\cdot W_3^{nk}, \quad k=0,1,2.$$

$$= Y_3(k)$$



很显然，$Y_3(k)$ 是5点序列 $y_5(n)$ 的离散时间傅里叶变换(DTFT) $Y_5(e^{j\omega})$ 在 0~2π 上的3点采样，根据频域采样定理：$Y_3(k)$ 的逆DFT应是 $y_5(n)$ 以3为周期延拓后的主值序列，亦即



$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} y_5(n+3m)\right)R_3(n)$$

$$= \left(x(n)\cdot 0.2^{-n}W_3^{n} + x(n+3)\,0.2^{-(n+3)}W_3^{n+3}\right)R_3(n)$$

$$= y_3(n)$$

∴ $y_3(n)$ 的3点DFT即为所求，此处M的最小值为3