

## 《信号与系统》考试试卷 (A 卷)

(时间 120 分钟)

院/系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题 (每小题 2 分, 共 20 分)

得 分	
-----	--

- 系统的激励是  $e(t)$ , 响应为  $r(t)$ , 若满足  $r(t) = \frac{de(t)}{dt}$ , 则该系统为 线性、时不变、因果。  
(是否线性、时不变、因果?)
- 求积分  $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 1)\delta(t - 2)dt$  的值为 5。
- 当信号是脉冲信号  $f(t)$  时, 其 低频分量 主要影响脉冲的顶部, 其 高频分量 主要影响脉冲的跳变沿。
- 若信号  $f(t)$  的最高频率是 2kHz, 则  $f(2t)$  的奈奎斯特抽样频率为 8kHz。
- 信号在通过线性系统不产生失真, 必须在信号的全部频带内, 要求系统幅频特性为 一常数相频特性为一过原点的直线(群时延)。
- 系统阶跃响应的上升时间和系统的 截止频率 成反比。
- 若信号的  $F(s) = \frac{3s}{(s+4)(s+2)}$ , 求该信号的  $F(j\omega) = \frac{j3\omega}{(j\omega+4)(j\omega+2)}$ 。
- 为使 LTI 连续系统是稳定的, 其系统函数  $H(s)$  的极点必须在 S 平面的 左半平面。
- 已知信号的频谱函数是  $F(j\omega) = \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)$ , 则其时间信号  $f(t)$  为  $\frac{1}{j\pi} \sin(\omega_0 t)$ 。
- 若信号  $f(t)$  的  $F(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$ , 则其初始值  $f(0_+) = \underline{1}$ 。

二、判断下列说法的正误, 正确请在括号里打“√”, 错误请打

得 分	
-----	--

“×”。(每小题 2 分, 共 10 分)

1. 单位冲激函数总是满足  $\delta(t) = \delta(-t)$  ( √ )
2. 满足绝对可积条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$  的信号一定存在傅立叶变换，不满足这一条件的信号一定不存在傅立叶变换。 ( × )
3. 非周期信号的脉冲宽度越小，其频带宽度越宽。 ( √ )
4. 连续 LTI 系统的冲激响应的形式取决于系统的特征根，于系统的零点无关。 ( √ )
5. 所有周期信号的频谱都是离散谱，并且随频率的增高，幅度谱总是渐小的。 ( × )

三、计算分析题 (1、3、4、5 题每题 10 分, 2 题 5 分,

得 分	
-----	--

6 题 15 分，共 60 分)

1. 信号  $f_1(t) = 2e^{-t}u(t)$ , 信号  $f_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 试求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。(10 分)

解法一：当  $t \leq 0$  时,  $f_1(t) * f_2(t) = 0$

$$\text{当 } 1 > t > 0 \text{ 时, } f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2 - 2e^{-t}$$

$$\text{当 } t > 1 \text{ 时, } f_1(t) * f_2(t) = \int_0^1 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 2e^{-t}(e-1)$$

解法二：

$$\begin{aligned} L[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{2}{s+2} \cdot \frac{(1-e^{-s})}{s} = \frac{2}{s(s+2)} - \frac{2e^{-s}}{s(s+2)} \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} - \left( \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} \right) e^{-s} \end{aligned}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = 2u(t) - 2e^{-t}u(t) - 2u(t-1) + 2e^{1-t}u(t-1)$$

2. 已知  $X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$ ,  $|z| > 2$ , 求  $x(n)$ 。(5 分)

解：

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10}{z-2} - \frac{10}{z-1}, \text{ 收敛域为 } |z| > 2$$

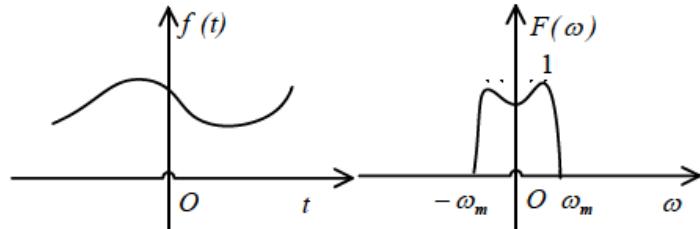
由  $X(z) = \frac{10z}{z-2} - \frac{10z}{z-1}$ , 可以得到  $x(n) = 10(2^n - 1)u(n)$

3. 若连续信号  $f(t)$  的波形和频谱如下图所示，抽样脉冲为冲激抽样  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 。

(1) 求抽样脉冲的频谱；(3分)

(2) 求连续信号  $f(t)$  经过冲激抽样后  $f_s(t)$  的频谱  $F_s(\omega)$ ；(5分)

(3) 画出  $F_s(\omega)$  的示意图，说明若从  $f_s(t)$  无失真还原  $f(t)$ ，冲激抽样的  $T_s$  应该满足什么条件？(2分)



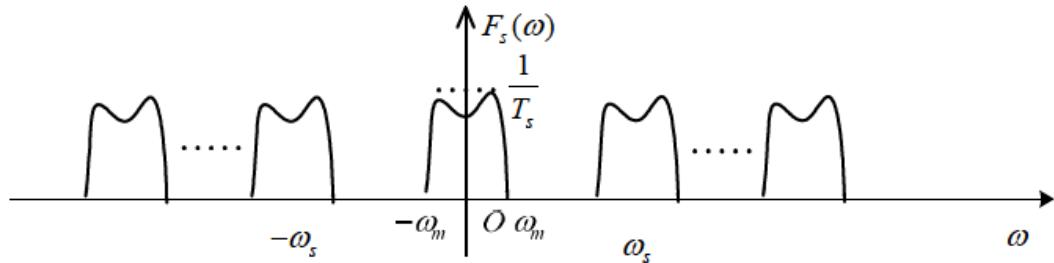
解：(1)  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ ，所以抽样脉冲的频谱

$$F[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad F_n = \frac{1}{T_s}$$

(2) 因为  $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$ ，由频域抽样定理得到：

$$\begin{aligned} F[f_s(t)] &= F[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

(3)  $F_s(\omega)$  的示意图如下



$F_s(\omega)$  的频谱是  $F(\omega)$  的频谱以  $\omega_s$  为周期重复，重复过程中被  $\frac{1}{T_s}$  所加权，若从  $f_s(t)$  无失真还原  $f(t)$ ，冲激抽样的  $T_s$  应该满足若  $\omega_s \geq 2\omega_m$ ， $T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$ 。

4. 已知三角脉冲信号  $f_1(t)$  的波形如图所示

(1) 求其傅立叶变换  $F_1(\omega)$ ；(5分)

(2) 试用有关性质求信号  $f_2(t) = f_1(t - \frac{\tau}{2}) \cos(\omega_0 t)$  的傅立叶变换  $F_2(\omega)$ 。(5分)

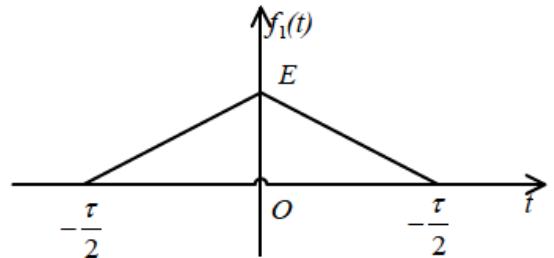
解：(1) 对三角脉冲信号求导可得： $\frac{df_1(t)}{dt} = \frac{2E}{\tau} [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t)] - \frac{2E}{\tau} [u(t) - u(t - \frac{\tau}{2})]$

$F[\frac{df_1(t)}{dt}] = \frac{1}{j\omega} [-\frac{8E}{\tau} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4})]$ ，可以得到  $F_1(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$ 。

(2) 因为  $f_2(t) = f_1(t - \frac{\tau}{2}) \cos(\omega_0 t)$

$$F[f(t - \frac{\tau}{2})] = e^{-j\omega_0 \frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} S a^2 (\frac{\omega\tau}{4})$$

$$F[f(t - \frac{\tau}{2}) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} e^{-j(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} S a^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{4} \tau + \frac{1}{2} e^{-j(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}} \frac{E\tau}{2} S a^2 \frac{(\omega + \omega_0)}{4} \tau$$



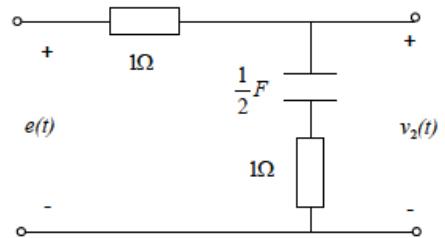
5. 电路如图所示，若激励信号  $e(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，求响应  $v_2(t)$  并指出响应中的强迫分量、自由分量、瞬态分量与稳态分量。(10 分)

解：由 S 域模型可以得到系统函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{E(s)} = \frac{1 + \frac{2}{s}}{2 + \frac{2}{s}} = \frac{s+2}{2s+2}$$

由  $e(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，可以得到

$E(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3}$ ，在此信号激励下，系统的输出为



$$V_2(s) = H(s)E(s) = \frac{s+2}{2s+2} \left( \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3} \right) = \frac{3}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

则

$$v_2(t) = (2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

强迫响应分量：  $\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$

自由响应分量：  $2e^{-t}u(t)$

瞬态响应分量：  $v_2(t) = (2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

稳态响应分量： 0

6. 若离散系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

(1) 求系统函数和单位样值响应；(4 分)

(2) 讨论此因果系统的收敛域和稳定性；(4 分)

(3) 画出系统的零、极点分布图；(3 分)

(4) 定性地画出幅频响应特性曲线；(4 分)

解：(1) 利用 Z 变换的性质可得系统函数为：

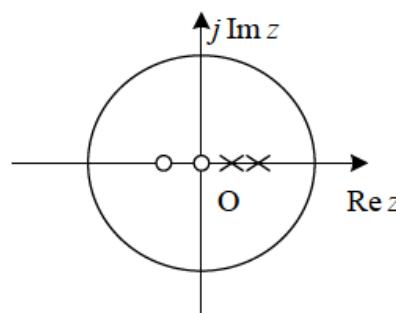
$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = \frac{\frac{10}{3}z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}z}{z - \frac{1}{4}}$$

$|z| > \frac{1}{2}$ , 则单位样值响应为

$$h(n) = [\frac{10}{3}(\frac{1}{2})^n - \frac{7}{3}(\frac{1}{4})^n]u(n)$$

(2) 因果系统  $z$  变换存在的收敛域是  $|z| > \frac{1}{2}$ , 由于  $H(z)$  的两个极点都在  $z$  平面的单位圆内, 所以该系统是稳定的。

(3) 系统的零极点分布图

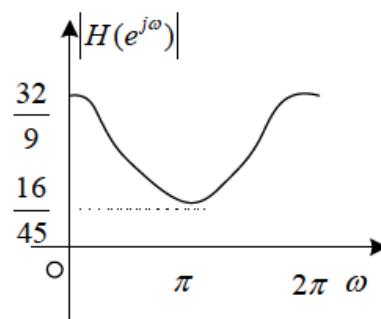


(4) 系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}(e^{j\omega} + \frac{1}{3})}{e^{j2\omega} - \frac{3}{4}e^{j\omega} + \frac{1}{8}} \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{\left| e^{j\omega} + \frac{1}{3} \right|}{\left| e^{j\omega} - \frac{1}{2} \right| \left| e^{j\omega} - \frac{1}{4} \right|}$$

$$\text{当 } \omega = 0 \text{ 时, } |H(e^{j\omega})| = \frac{32}{9}$$

$$\text{当 } \omega = \pi \text{ 时, } |H(e^{j\omega})| = \frac{16}{45}$$



四、简答题 (1、2 二题中任选一题解答, 两题都做只计第 1 题的分数, 共 10 分)

得 分

1. 利用已经具备的知识, 简述如何由周期信号的傅立叶级数出发, 推导出非周期信号的傅立叶变换。(10 分)

2. 利用已经具备的知识, 简述 LTI 连续时间系统卷积积分的物理意义。(10 分)

1. 解: 从周期信号 FS 推导非周期信号的 FT  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$

对于非周期信号,  $T_1 \rightarrow \infty$ , 则重复频率  $\omega_1 \rightarrow 0$ , 谱线间隔  $\Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$ , 离散频率变成连续频率  $\omega$ 。

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j n \omega_1 t} dt$$

在这种极限情况下  $F(n\omega_1) \rightarrow 0$ , 但  $F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1}$  可望不趋于零, 而趋于一个有限值, 且变成一个连续函数。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \lim_{T_1 \rightarrow 0} F(n\omega_1) \cdot T_1 \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j n \omega_1 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \omega t} dt \end{aligned}$$

考察函数  $F(n\omega_1) \cdot \frac{2\pi}{\omega_1}$  或  $F(n\omega_1) T_1$ , 并定义一个新的函数  $F(w)$  傅立叶变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \omega t} dt$$

$F(w)$  称为原函数  $f(t)$  的频谱密度函数(简称频谱函数).

傅立叶逆变换

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1$$

$$F(n\omega_1) \rightarrow F(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi} e^{jn\omega_1 t} \Delta(n\omega_1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$T_1 \rightarrow \infty \quad \omega_1 \rightarrow 0 \quad n\omega_1 \rightarrow \omega \quad \Delta(n\omega_1) \rightarrow d\omega$$

2. 解: 线性系统在单位冲激信号的作用下, 系统的零状态的响应为单位冲激响应:

---

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

利用线性系统的时不变特性：

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

利用线性系统的均匀性：

$$e(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow e(\tau)h(t-\tau)$$

利用信号的分解，任意信号可以分解成冲激信号的线性组合：

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

利用线性系统的叠加定理：

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$