参考答案

- **习题 7.7** 已知序列 $x[n]=\delta[n]+3\delta[n-2]+2\delta[n-4], 0\leq n\leq 7$，其 8 点 DFT 为 $X[k]$，

(1) 若 $Y[k]=W_8^{3k}X[k]$，$0\leq k\leq 7$，求 $y[n]$；

解： 由题目可知，$x[n]=[1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]$。根据 DFT 的频域调制性质 (时域循环移位)，有

$$Y[k]=W_8^{3k}X[k]\Rightarrow y[n]=x[\langle n-3\rangle_8]$$

即循环右移 3 位, 可得 $y[n]=[0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2]$，即

$$y[n]=\delta[n-3]+3\delta[n-5]+2\delta[n-7]$$

参考答案

- **习题 7.7** 已知序列 $x[n]=\delta[n]+3\delta[n-2]+2\delta[n-4], 0\leq n\leq 7$，其 8 点 DFT 为 $X[k]$，

（2）若 $W[k]=Re[X[k]]$，$0\leq k\leq 7$，求 $w[n]$;

解： 由于 $W[k]=\mathrm{Re}[X[k]]=\frac{X[k]+X^*[k]}{2}$，利用共轭和循环反褶性质，得到

$$w[n]=\frac{x[n]+x^*\langle -n\rangle_8]}{2}=\frac{x[n]+x[8-n]}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow w[n]&=0.5*([1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0]\\&+[1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0])\\&=[1,\ 0,\ 1.5,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1.5,\ 0]\end{aligned}$$

即

$$w[n]=\delta[n]+1.5\delta[n-2]+2\delta[n-4]+1.5\delta[n-6]$$

- **习题 7.7** 已知序列 $x[n]=\delta[n]+3\delta[n-2]+2\delta[n-4], 0\le n\le 7$，其 8 点 DFT 为 $X[k]$，

(3) 若 $U[k]=X[2k]$，$0\le k\le 3$，求 $u[n]$;

解： 根据 DFT 的抽取性质，频域抽取对应时域混叠，即

$$u[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}U[k]W_4^{-kn}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X[2k]W_4^{-kn}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{m=0}^{7}x[m]W_8^{2mk}W_4^{-kn}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{7}x[m]\left(\sum_{k=0}^{3}W_4^{k(m-n)}\right)=\sum_{m=0}^{7}x[m]\delta[m-n-4r]=x[n]+x[n+4],\quad 0\le n$$

因此可得

$$u[n]=3\delta[n]+3\delta[n-2],\quad 0\le n\le 3$$

- **习题 7.8** 已知长度为 N 的实序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，求下列序列的 N 点 DFT。

(1) $y[n]=x[N-1-n]$；

解： (1) 设 $Y[k]$ 是 $y[n]$ 的 DFT, 有

$$
\begin{aligned}
Y[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n]W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{k(N-1-m)} \\
&= W_N^{k(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{-km} = W_N^{-k}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{(N-k)m} = W_N^{-k}X[N-k]
\end{aligned}
$$

注：$x[N-1-n]=x[\langle -(n+1)\rangle_N]$，也可利用循环反褶和循环移位性质得到上述结论。

- **习题 7.8** 已知长度为 N 的实序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，求下列序列的 N 点 DFT。

（2） $u[n]=(-1)^n x[n]$。

解： 设 $U[k]$ 是 $u[n]$ 的 DFT，有

$$U[k]=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x[n]W_N^{kn}$$

由于 $(-1)^n=e^{j\pi n}=W_N^{-Nn/2}$（当 N 为偶数时），可得

$$U[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{(k-N/2)n}=X\left[k-N/2\right]=X\left[\langle k-N/2\rangle_N\right]$$

注：可以直接利用循环平移性质得到结果。

- **习题 7.11** 已知长度为 $N=8$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为

$$X[0]=1,\quad X[1]=4+3j,\quad X[2]=-3-2j,\quad X[3]=2-j,\quad X[4]=4.$$

（1）求 $x[0]$，$x[4]$；（2）求 $X[5],X[6],X[7]$；

解： 因为 $x[n]$ 为实序列，DFT 满足共轭对称

$$X[8-k]=X[k]^*,\quad k=1,2,3.$$

得到

$$X[5]=2+j,\quad X[6]=-3+2j,\quad X[7]=4-3j$$

利用逆 DFT，有 $x[n]=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}kn}$, 可得

$$x[0]=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X[k]=\frac{11}{8},\qquad x[4]=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}X[k](-1)^k=-\frac{13}{8}$$

- **习题 7.11** 已知长度为 $N=8$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为

$$X[0]=1,\quad X[1]=4+3j,\quad X[2]=-3-2j,\quad X[3]=2-j,\quad X[4]=4.$$

(3) 求 $\sum_{n=0}^{7} x[n]$ 与 $\sum_{n=0}^{7} |x[n]|^2$

解： 根据 DFT 的表达式 $X[k]=\sum_{k=0}^{7} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$, 可得

$$\sum_{n=0}^{7} x[n] = X[0] = 1$$

根据帕赛瓦尔定理，有

$$\sum_{n=0}^{7} |x[n]|^2 = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} |X[k]|^2 = \frac{103}{8}$$

- **习题 7.12** 已知长度为 $N=9$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为：

$$X[0]=4,\quad X[1]=2-j3,\quad X[2]=3+j2,\quad X[3]=-4+j6,\quad X[4]=8-j7.$$

试利用 DFT 的性质求下列序列的 DFT。

(1) $x_1[n]=x[\langle n+2\rangle_9]$

解： 因 $x[n]$ 为实序列，满足共轭对称 $X[9-k]=X[k]^*,\quad k=1,\ldots,4$, 可得

$$X[5]=8+j7,\ X[6]=-4-j6,\ X[7]=3-j2,\ X[8]=2+j3$$

根据循环移位性质：$x[\langle n-n_0\rangle_N]\leftrightarrow X[k]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0}$，得到

$$X_1[k]=X[k]e^{j\frac{4\pi}{9}k}$$

- **习题 7.12** 已知长度为 $N=9$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为：

$$X[0]=4,\quad X[1]=2-j3,\quad X[2]=3+j2,\quad X[3]=-4+j6,\quad X[4]=8-j7.$$

试利用 DFT 的性质求下列序列的 DFT。

(2) $x_2[n]=2x[\langle 2-n\rangle_9]$

解： 根据循环反褶性质：

$$x[\langle -n\rangle_9]\leftrightarrow X[\langle -k\rangle_9]$$

以及循环移位性质：$x[\langle n-n_0\rangle_N]\leftrightarrow X[k]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n_0}$，得到

$$X_2[k]=2\,X[\langle -k\rangle_9]\,e^{-j\frac{4\pi}{9}k}$$

- **习题 7.12** 已知长度为 $N=9$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为：

$$X[0]=4,\quad X[1]=2-j3,\quad X[2]=3+j2,\quad X[3]=-4+j6,\quad X[4]=8-j7.$$

试利用 DFT 的性质求下列序列的 DFT。

(3)$x_3[n]=x[n] ⑨ x[\langle -n\rangle_9]$

解： 利用循环卷积、循环反褶以及实序列的共轭对称性质，得到

$$X_3[k]=X[k]\,X[\langle -k\rangle_9]=X[k]\,X[k]^*=|X[k]|^2$$

参考答案

- **习题 7.12** 已知长度为 $N=9$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为：

$$X[0]=4,\quad X[1]=2-j3,\quad X[2]=3+j2,\quad X[3]=-4+j6,\quad X[4]=8-j7.$$

试利用 DFT 的性质求下列序列的 DFT。

(4) $x_4[n]=x^2[n]$

解： 根据乘积定理，得到

$$X_4[k]=\frac{1}{N}x[n]\,Ⓝ\,x[n]=\frac{1}{9}\sum_{m=0}^{8}X[m]X[\langle k-m\rangle_9]$$

- **习题 7.12** 已知长度为 $N=9$ 的实序列 $x[n]$，其 DFT 的前 5 个值为：

$$X[0]=4,\quad X[1]=2-j3,\quad X[2]=3+j2,\quad X[3]=-4+j6,\quad X[4]=8-j7.$$

试利用 DFT 的性质求下列序列的 DFT。

(5) $x_5[n]=x[n]e^{-j\frac{4\pi n}{9}}$

解： 由于

$$e^{-j\frac{4\pi}{9}n}=e^{j\frac{2\pi}{9}(-2)n}$$

以及循环频移性质，可得

$$X_5[k]=X[\langle k+2\rangle_9]$$

即

$$X_5[k]=[3+j2,\ -4+j6,\ 8-j7,\ 8+j7,\ -4-j6,\ 3-j2,\ 2+j3,\ 4,\ 2-j3]$$

- **习题 7.15** 已知 N 点序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，证明：

(1) 若 $x[n]=-x[N-1-n]$，则 $X[0]=0$。

证明：根据 DFT 的定义

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\quad \text{其中}\quad W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

当 $k=0$ 时, 有

$$X[0]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]=\sum_{p=0}^{N-1}x[N-1-p]=-\sum_{p=0}^{N-1}x[p]=-X[0]$$

从而得到

$$X[0]=0$$

参考答案

- **习题 7.15** 已知 N 点序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，证明：

（2）当 N 为偶数时，如果 $x[n]=x[N-1-n]$，则 $X[N/2]=0$。

证明：根据 DFT 定义，当 $k=N/2$ 时，有

$$X[N/2]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}n}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\pi n}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n](-1)^n$$

由于 N 是偶数，索引从 0 到 $N-1$ 可以分成 $N/2$ 对。每对由索引 n 和 $N-1-n$ 组成，并且 $x[n]=x[N-1-n]$，可得

$$x[n](-1)^n+x[N-1-n](-1)^{N-1-n}=x[n]\left[(-1)^n+(-1)^{N-1-n}\right]$$
$$=x[n]\left[(-1)^n-(-1)^n\right]=0$$

最终得到 $X[N/2]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n](-1)^n=0$

- **习题 7.15** 已知 N 点序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，证明：

（3）当 N 为偶数且对所有的 n 有 $x[n]=-x[\langle n+N/2\rangle_N]$，则 $X[k]=0$，其中 k 为偶数。

证明：$x[n]=-x[\langle n+N/2\rangle_N]$ 表示序列具有反对称性，即

$$x[n]=-x[n+N/2] \quad \text{对于} \quad n=0,1,\ldots,N/2-1$$

令偶数 $k=2m$（m 为整数），有

$$X[2m]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{2mn}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[n]W_N^{2mn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x[n]W_N^{2mn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[n]W_N^{2mn}+\sum_{l=0}^{N/2-1}x[l+N/2]W_N^{2m(l+N/2)}$$

参考答案

- **习题 7.15** 已知 N 点序列 $x[n]$，其 N 点 DFT 为 $X[k]$，证明：

（3）当 N 为偶数且对所有的 n 有 $x[n]=-x[\langle n+N/2\rangle_N]$，则 $X[k]=0$，其中 k 为偶数。

证明：根据反对称性条件 $x[l+N/2]=-x[l]$, 同时

$$W_N^{2m(l+N/2)}=W_N^{2ml}W_N^{2m\cdot N/2}=W_N^{2ml}W_N^{mN}=W_N^{2ml}$$

代入得

$$X[2m]=\sum_{n=0}^{N/2-1}x[n]W_N^{2mn}-\sum_{l=0}^{N/2-1}x[l]W_N^{2ml}=0$$

故对于所有偶数 k，有 $X[k]=0$。

- **习题 7.17** 已知序列 $x[n], 0 \le n \le 5$ 和 $y[n], 0 \le n \le 7$，对它们各作 8 点 DFT，然后将两个 DFT 相乘，再求乘积的 IDFT，得到的结果为 $f[n]$，试问 $f[n]$ 与 $x[n] * y[n]$ 的关系?

解： 设线性卷积 $w[n] = x[n] * y[n]$，其长度为 $L = N_1 + N_2 - 1 = 13$。
根据 DFT 的卷积定理，$f[n]$ 是 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的 8 点循环卷积。8 点循环卷积是线性卷积按照周期 8 进行周期延拓后的主值序列，由于循环卷积点数 $N = 8$ 小于线性卷积长度 $L = 13$，因此，循环卷积是线性卷积的混叠形式。具体关系为

$$f[n] = \tilde{w}[n]R_8[n] = \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} w[n-8r]\right) R_8[n] = \begin{cases} w[n] + w[n+8], & n = 0,1,2,3,4 \\ w[n], & n = 5,6,7 \end{cases}$$

- **习题 7.23** 假设对连续时间信号 $x(t)$ 按采样率 $f_s = 8\,\text{kHz}$ 进行采样，并进行 $N = 512$ 点的 DFT，试确定 $X[k]$ 所对应的频率间隔。

解： 已知 $f_s = 8\,\text{kHz} = 8000\,\text{Hz}$，$N = 512$，有

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} f_s = \frac{f_s}{N} = \frac{8000}{512} = 15.625\,\text{Hz}$$

因此，$X[k]$ 对应的频率间隔为 $15.625\,\text{Hz}$。

- **习题 7.24** 已知某连续时间信号 $x(t)$ 的采样间隔为 0.1 ms，DFT 点数为 2 的整数次幂，现对其进行频谱分析，要求频谱分辨率 $\Delta f \leq 10\,\text{Hz}$，试确定时域的最小采样时间、所允许处理信号的最高频率以及最小的 DFT 点数。

解： 根据频谱分辨率 $\Delta f \leq 10\,\text{Hz}$，可得时域的最小采样时间为

$$T_0 \geq \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{10} = 0.1\,\text{s}$$

采样间隔 $T = 0.1\,\text{ms} = 10^{-4}\,\text{s}$，采样率 $f_s = \frac{1}{T} = 10000\,\text{Hz}$ 。根据奈奎斯特采样定理，所允许处理信号的最高频率为

$$f_h \leq \frac{f_s}{2} = \frac{10000}{2} = 5000\,\text{Hz}$$

最小的 DFT 点数 $N \geq \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{10000}{10} = 1000$, DFT 点数为 2 的整数次幂，即最小值为 $2^{10} = 1024$。