

## 第三章 恒定电场和电流

电荷有规则的宏观运动称为**电流**，这种规则运动一般是在电场作用下形成的。若电荷流动不随时间变化，则称之为**恒定电流**或**直流**，对应的电场称为**恒定电场**。本章讨论恒定电流和恒定电场的基本性质以及恒定电流场问题的分析方法。

### § 3.1 电流与电流密度

按运动电荷所在媒质的不同，电荷的规则运动一般可分为两类：一类是电荷在固态或液态导电媒质中的运动，如金属中自由电子的运动、电解液体中正负离子的运动以及半导体材料中电子和带正电的“空穴”的运动等，这类导电媒质中的电荷规则运动称为**传导电流**；另一类是电子或离子甚至宏观带电体在真空或气体中作规则机械运动而形成的电流，如电子管和显象管中的电子束电流等，这类电流叫做**运流电流**。本章重点讨论传导电流及其电场的性质。

最常见的电流是沿着一根导线流动的电流，其强弱用单位时间内通过导线某一截面的电荷量来表示，称为该导线上的**电流强度**，简称**电流**，记作 $I$ 。将这一定义推广到电流区域的任意一个给定的曲面上：如果在 $\Delta t$ 时间内通过空间某一曲面 $S$ 的电荷量为 $\Delta Q$ ，则通过曲面 $S$ 的电流强度 $I$ 为

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3-1)$$

其数值依然等于单位时间内通过曲面 $S$ 的电荷量。

电流强度的单位是安培（A）。安培是国际单位制（SI）的基本单位之一，它的定义为：若在真空中相距1米的两根无限长平行细导线内流有等值的恒定电流，当两导线每米长度之间的作用力为 $2 \times 10^{-7}$  N时，每根导线上的电流为1安培。在表示微弱电流时，常常使用毫安（mA）或微安（ $\mu A$ ）单位

$$1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$$

$$1 \mu A = 10^{-6} \text{ A}$$

电流强度虽然不是矢量，但常常以正电荷穿过曲面的方向作为电流的正方向，当曲面（或电路导线）的参考方向与电流正方向一致时，电流强度取正值。在金属导体中，电流是由带负电的自由电子运动形成的，所以电流的方向恰与电荷的运动方向相反。

电流强度只能反映某面积上的整体电流特征，为了描述电流空间任意一点上的电荷运动情况，我们引入**电流密度**的概念。电流密度是一个矢量点函数，一般用 $\vec{J}$ 表示。它的方向是该点处正电荷的运动方向（或负电荷运动的相反方向），大小等于垂直于 $\vec{J}$ 的单位面积上通过的电流。若与 $\vec{J}$ 垂直的面积元 $\Delta S_n$ 上通过的电流为 $\Delta I$ ，则 $\vec{J}$ 的模值为

$$J = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S_n} \quad (3-2)$$

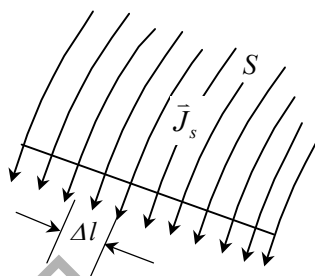
电流密度的单位是安培 / 米<sup>2</sup>（A/m<sup>2</sup>）。很明显，穿过任意曲面 $S$ 的电流等于电流密度矢量在此曲面上的通量，即

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S J \cos \theta ds \quad (3-3)$$

其中的  $\theta$  是矢量面元  $d\vec{s}$  与  $\vec{J}$  的夹角。

上述电流密度  $\vec{J}$  用来描述电流在某体积内流动的情况，所以又称为**体电流密度**。如果电流只是在一个表面上流动，则此面上的电荷运动情况可以用**面电流密度**  $\vec{J}_s$  表示。 $\vec{J}_s$  的方向仍定义为某点处正电荷的运动方向，而数值等于过该点且与  $\vec{J}_s$  垂直的单位横截线上所流过的电流。如果与  $\vec{J}_s$  垂直的线元  $\Delta l$  上通过的电流为  $\Delta I$ ，如图3-1所示，则该点  $\vec{J}_s$  的模值为

$$J_s = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad (3-4)$$



3-1 面电流密度定义

面电流密度的单位是安培/米 (A/m)。电流面上的某曲线  $l$  所通过的面电流为

$$I_s = \int_l J_s \sin \theta dl \quad (3-5)$$

其中  $\theta$  为  $\vec{J}_s$  与  $l$  上的矢量线元  $d\vec{l}$  的夹角。

如果电流只沿某一条曲线  $l$  流动，我们称其为**线电流**或**电流丝**，可以用  $\vec{J}_l$  或  $\vec{I}$  表示，单位是安培 (A)。

应该明确，表面电流和线电流只是特殊的体电流，是体电流的一种极限近似。与静电场中所介绍的面电荷和线电荷的情况相似，当载流体的横截面的厚度或面积可忽略时，将该截面的总电流压缩到一条横截线或一个横截点上，然后用表面电流或线电流来表示这个总电流。不要认为某体积内有体电流时其内部和表面上就一定有线电流和面电流，如果不进行上述极限处理，实际电流区域的线电流和面电流密度都应为零，否则会导致体电流密度是无穷大的结果。

当空间存在着不同性质的电流时（如“传导电流”、“运流电流”等），为了区别起见通常将传导电流记为  $\vec{J}_c$ ，本书中如无特殊声明，提及的电流都是指传导电流，在一般情况下简记为  $\vec{J}$ 。

由于电流密度等于单位时间内穿过单位面积的电荷量，因此必然与运动电荷的密度和速度有关。为了求出三者的联系，作一个截面积为  $ds$ ，长为  $dl$  的柱状体积元，体积元的轴线与电荷运动方向一致，如图3-2所示。设  $\rho_m$  为运动电荷体密度，则此体积元内部的总运动电荷是  $\rho_m ds dl$ 。假设这些电荷在  $dt$  时间内全部通过柱底面  $ds$  流出，则通过  $ds$  的电流为

$$I = \frac{\rho_m ds dl}{dt} = \rho_m v ds \quad (3-6)$$

其中  $v = dl/dt$  为电荷的平均运动速度。另一方面，由式(3-3)可得

$$I = J ds$$

与式(3-6)比较，可得到

$$J = \rho_m v$$

即电流密度等于运动电荷的密度与速度乘积。考虑到电流密度矢量与正电荷运动速度矢量  $\vec{v}$  的方向相同，

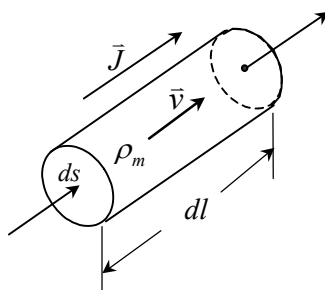


图3-2 电流中的柱状体元

于是有

$$\vec{J} = \rho_m \vec{v} \quad (3-7)$$

对于表面电流和线电流的情况，可用相同方法推出

$$\vec{J}_s = \rho_{sm} \vec{v} \quad (3-8)$$

$$\vec{I}_l = \rho_{lm} \vec{v} \quad (3-9)$$

其中  $\rho_{sm}$  和  $\rho_{lm}$  分别为表面运动电荷面密度和线运动电荷的线密度， $\vec{v}$  是相应的电荷运动速度矢量。

上面三式对运流电流和传导电流均成立。但对于传导电流应注意式中的  $\rho_m$  只代表运动电荷的密度，而不包括导电媒质中那些平均速度为零的电子和离子。另外，考虑到运动电荷在媒质中会不断地与固定离子或中性分子发生不规则碰撞，所以式中的  $\vec{v}$  应该是大量运动电荷的定向平均速度。

由于传导电流是在电场作用下产生的，因此我们可以得到其电流密度与电场强度之间的关系。例如在金属导体中，运动电荷是分布于离子晶格点阵之间的自由电子。在媒质内电场的作用下，电子在作热运动的基础上又附加了一个与电场指向相反的定向加速运动，其加速度为

$$a = \frac{f}{m_0} = \frac{eE}{m_0} \quad (3-10)$$

其中的  $e$  和  $m_0$  分别是电子的电量和质量， $E$  为导体中的电场强度。当运动电子与晶格点阵碰撞时，电子的加速运动被打断，而碰撞之后，其定向加速运动又重新开始。考虑到电子在碰撞后向各方向射出的机会相等，可以设碰撞后瞬时的定向运动速度的平均值为零，若两次相邻碰撞的时间间隔平均值为  $\tau$ ，则电子的平均定向运动速度可以写成

$$v_d = \frac{0 + v_\tau}{2} = \frac{1}{2} a \tau = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_0} \tau \quad (3-11)$$

$v_d$  也称为电子的**定向漂移速度**。

如果导体单位体积内的自由电子数为  $N$ ，则运动电荷密度  $\rho_m = Ne$ ，将  $v_d$  和  $\rho_m$  代入式(3-7)，可得

$$J = \rho_m v_d = \frac{1}{2} \frac{Ne^2 \tau}{m_0} E \quad (3-12)$$

由于电流密度的方向与电场方向一致，故上式可用矢量表示为

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \frac{Ne^2 \tau}{m_0} \vec{E} \quad (3-13)$$

上式又可记为

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3-14)$$

其中

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ne^2 \tau}{m_0} \quad (3-15)$$

称为金属的**电导率**，单位是西门子/米 (S/m)。由于电场所引起的电子定向漂移速度  $v_d$  要远远小于电子作热运动的自由平均速度（例如，银电子的自由平均速度约为  $1.4 \times 10^6$  米/秒，而常规电场下的  $v_d$  一般只有毫米/秒量级），所以电子在晶格内的碰撞时间间隔  $\tau$  主要决定于其热运动速度。也就是说， $\sigma$  实际上是一个只与材料种类及温度相关而与电场无关的常量。

对于非金属类的导电媒质，我们也可采用式(3-14)来表达电流密度与电场的关系。虽然此时电导率 $\sigma$ 的数值与金属导体有很大的差别，但电流密度与电场强度成正比的关系依然成立，这一点已被大量的实验测试所证明。因此式(3-14)是描述传导电流的一个重要公式，一般称其为**欧姆定律的微分形式**。表3-1列出了几种常见导电媒质在常温下的电导率值。

表3-1 几种导电媒质在常温下的电导率

材料	$\sigma$ (s/m)	材料	$\sigma$ (s/m)
铜	$5.8 \times 10^7$	石墨	$1.25 \times 10^5$
银	$6.25 \times 10^7$	海水	3~5
铝	$3.95 \times 10^7$	湿土	$10^{-2} \sim 10^{-3}$

对前面的讨论有两点需要说明：首先，虽然由电场所引起的电荷漂移速度 $v_d$ 一般只是毫米/秒量级，但由于媒质中的电场是以光速传播的，在电场作用下电荷同步移动，所以电流所携带的能量和信息也是以光速传输的。其次，前面的欧姆定律微分形式推导是建立在经典力学（即牛顿力学）和经典统计学之上的，而近代的物理理论和实验都表明，像电子这类微观粒子的行为并不服从经典力学，而是服从于量子力学。因此，正确的金属导电理论只有在量子力学的基础上才能建立，前面做的分析只是一个近似的形象化解释。尽管所得到的电流密度与电场成正比的结论是正确的，但在理论上并不严格，有些现象无法用这个理论进行定量分析。例如，电导率 $\sigma$ 是一个与温度有关的量，大多数的金属材料随温度升高 $\sigma$ 下降。用经典理论只能粗略地解释为，当温度升高时热运动速度增大，碰撞增多而导致碰撞时间间隔缩短。但这个解释只是定性的，定量的分析必须利用量子理论。

## § 3.2 恒定电流场的基本定律

根据物质不灭定律，一个闭合系统内的任何物质都不能凭空产生和彻底消失，只能从一个区域转移到另一个区域，或从一种形态变为另一种形态。电荷这种物质当然也服从这一公理，不论发生任何的物理变化、化学反应甚至基本粒子的转化，一个闭合系统的总电荷量都是保持不变的。电荷可以被分离、中和或转移，但无法凭空产生或彻底消灭一个电荷，这个基本性质称为**电荷守恒定律**。电荷守恒定律在数学上用电流连续方程表示，对于一个以闭合面 $S$ 为边界的给定区域 $\tau$ ，可能有电荷进入或者流出该区域。但因电荷不可能产生和消灭，如果有电荷从该区域流出，则区域 $\tau$ 内的总电荷量必然减少，通过 $S$ 面流出的总电流应该等于 $\tau$ 内的电荷减少率，即

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (3-16)$$

上式称为**电流连续方程的积分形式**。应用散度定理可将上式左边变成体积分

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} d\tau = \int_{\tau} - \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

该式对任意体积 $\tau$ 都成立，必然是等式两边的被积函数相等，即

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-17)$$

式(3-17)反映了空间一点上电流密度与电荷密度之间的关系，称为**电流连续方程的微分形式**。

电流连续方程对任意变化的电流都成立。在恒定电流情况下，一切物理量均与时间无关，因而 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，式(3-16)和式(3-17)变为

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3-18)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3-19)$$

以上两式分别称为**恒定电流场第一基本定律**的积分形式和微分形式，它们说明恒定电流密度是一个无散源场。若用电流线(与电力线的作法相同)表示 $\vec{J}$ ，则电流线是闭合曲线，没有发源点和终止点。

从恒定电流场的第一基本定律可以得出，当一根导线中流有恒定电流时，通过导线各个截面的电流强度都相等。这是因为对如图3-3所示的包围任意一段导线的闭合曲面 $S$ ，只有流进的电流1和流出的电流2相等，才能使通过此闭合面的总电流等于零。此外，对于电路中 $N$ 根导线汇合的节点，任取一包围该节点的闭合曲面，由式(3-18)给出

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (3-20)$$

其中流出节点的电流为正，流入节点的电流为负。如图3-4所示的4条导线汇合点，上式写成

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

式(3-20)是恒定电流场第一基本定律在电路节点上的表达形式，称为**节点电流方程**，也叫做**基尔霍夫第一方程**。

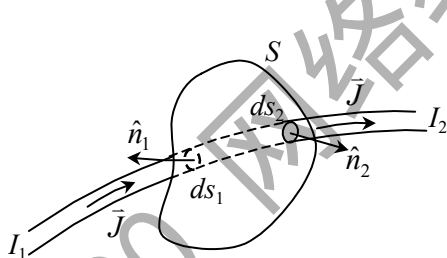


图3-3 一根导线上的电流

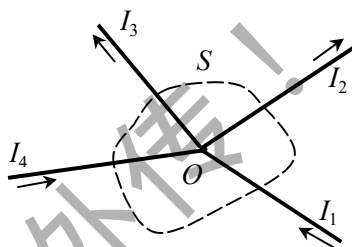


图3-4 汇合在节点上的

从恒定电流场的第一基本定律还可以看到，在场空间的任意区域和任意点上，流入的电荷都正好等于流出的电荷，因此整个空间的电荷密度分布将不随时间改变，即恒定电流场具有恒定的电荷密度分布。应该明确，恒定的电荷密度并不是指电荷都静止不动，那样就没有电流存在了。实际上，在电流区域的内部和表面上都有电荷向前移动，但它们所空出来的位置马上又被后续的其它电荷所占据，从而使得电荷密度的分布始终保持一个动态平衡的状态。因电场强度只决定于电荷密度的分布，故恒定电场与静电场一样也是一个保守场，它的任意闭合环路积分为零

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3-21)$$

利用斯托克斯定理可推导出上式的微分形式

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3-22)$$

以上两式反映了恒定电场的保守性，分别称为**恒定电流场第二基本定律**的积分形式和微分形式。

在一般的导电媒质中，既存在着可自由移动的自由电荷，也同时存在着受原子核牵制的束缚电荷。因此，导电媒质中的恒定电场不但要激发电流，同时也会引起媒质的极化。极化

的机理与静电场中的电介质极化相同。在这里我们仍然用电容率  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  做为描述媒质极化特征的参量，其数值一般通过实验测定。同时，定义电通量密度与电场强度的关系依然为

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (3-23)$$

并且高斯定律

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3-24)$$

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_\tau \rho d\tau = Q_{in} \quad (3-25)$$

在恒定电场中仍然成立。

在均匀线性导电媒质中，电容率  $\varepsilon$  和电导率  $\sigma$  都是与坐标无关的常量，将  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  代入  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，得

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

故有

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3-26)$$

与高斯定律

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

比较可得

$$\rho = 0 \quad (3-27)$$

这表明，当均匀媒质中存在恒定电流时，其内部的体电荷密度处处等于零。

应该明确，上面的结论与媒质内有电荷流动并不矛盾。因为这里的  $\rho$  是指媒质中的净电荷密度，即单位体积内所有运动电荷与静止电荷的代数和，与电流密度公式  $\vec{J} = \rho_m \vec{v}$  中的运动电荷密度  $\rho_m$  的意义是不同的。这个结果表明，在均匀媒质的恒定电流场中，每一点上的运动电荷（即  $\rho_m$ ）恰好与静止电荷（如晶格离子）等值异号，故使得媒质内部的净电荷密度  $\rho$  处处为零。因此，均匀导电媒质的净电荷只能存在于媒质的表面上，实际也正是这些表面电荷激发了媒质内外的恒定电场。

由矢量分析知道，一个无旋场一定可以被表示成某个标量场的梯度。仿照静电场中的作法，引入一个标量电位  $U$  作为研究恒定电场的辅助函数，即

$$\vec{E} = -\nabla U \quad (3-28)$$

和

$$U = \int_p^{p_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3-29)$$

电位  $U$  的单位依然是伏特（V）。

对于均匀导电媒质，将  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  和  $\vec{E} = -\nabla U$  代入高斯定律，得到

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla U = 0$$

因此有

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3-30)$$

可见，均匀导电媒质中的恒定电位与无电荷区域的静电位一样，也满足拉普拉斯方程。在给定的边界条件时，可通过求解方程得到电位的分布。

应该特别注意，在恒定电流场中，由于  $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla U$ ，所以导体内的电场不为零，导体内部的各点和表面的电位也不是常量，这与静电场中的导体概念是不同的。实质上，恒定电流场中的导体（或称导电媒质）只相当于静电场中的电介质，只有  $\sigma \rightarrow \infty$  的导电媒质

才具有与静电场中导体相似的性质。

### § 3.3 电源和电动势

导电媒质中的恒定电流由媒质中的恒定电场所激发,该恒定电场产生于媒质表面和内部的分布电荷。与静电场一样,恒定电场与电荷之间的关系也与时间无关,同时也满足库仑定律。所以习惯上将静电场和恒定电场都称为**库仑电场**,电场对电荷的作用力都叫做**库仑力**或**静电力**。

不难发现,对于一个导电媒质构成的闭合回路,仅依靠静电力是不可能维持恒定电流的。正如前面所指出,导电媒质中的分布电荷也是运动电荷,为保证恒定的电荷密度分布而激发恒定电场,这些运动电荷流失所形成的“空位”必须即刻有新的电荷来填补。对于一个闭合回路而言,只有当电荷在回路中循环流动时才有可能满足上述要求。但另一方面,由恒定电场的基本关系式  $\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla U$  又可以看出,沿电流的流动方向电位是不断下降的,即运动电荷是从高位能处向低位能处流动。如果回路中只存在静电力,那么从高电位处流走的正电荷将不可能由低电位处再次返回到原来的高电位点(如果是运动负电荷,则不可能依靠静电力从高电位返回到原来的低电位出发点),这正象流水不可能依靠重力从低处向高处流动一样。因此,要实现电荷的循环流动,必须在回路中串接一个能利用某种非静电力来改变运动电荷位能的“泵站”,通过非静电力对电荷的作用,将流到低电位能端的电荷重新提升到它们的高电位能出发点。这种“泵站”就是电源,产生恒定电流的电源又叫做**直流电源**。

直流电源中的非静电力可以有多种形式,如电池中的化学力和直流发电机中的电磁感应力等。但它们在电路中的作用却是相同的,都是将非静电能转化为运动电荷的电位能,把运动电荷从电源的低位能端推到高位能端,以维持电荷的循环运动。

电源转化能量的本领用电动势表示。我们将电源的非静电力把单位正电荷从电源的负极推到正极所作的功称为该电源的**电动势**,用  $\mathcal{E}$  表示。如果用  $A_s$  表示电源的非静电力把电荷  $Q$  从电源的负极推到正极所作的功,则该电源的电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{A_s}{Q} \quad (3-31)$$

如果不考虑电源内部的能量损耗,非静电力所作的功将全部转化为电流对回路负载的做功。 $\mathcal{E}$  值越大,表示电源可以向负载提供越大的功率,因此电源电动势是一个表征电源做功能力的物理量。从量纲上看,电源电动势的单位与电位相同,也是伏特(V)。但应明确,电动势与电位是两个不同的物理量。电动势总是与电源的非静电力做功联系在一起,它决定于电源本身的性质,与电源外部的电路无关;而电位则与静电力做功相联系,电位的分布与外电路是密切相关的。

仿照库仑力与电场强度的定义,我们把电荷在电源内部所受到的非静电力看作是一种非静电电场的作用,单位电荷受到的非静电力定义为该场的电场强度,用  $\vec{E}_s$  表示。电荷  $Q$  在电源内部所受的非静电力为

$$\vec{F}_s = Q\vec{E}_s$$

非静电力将电荷  $Q$  从电源负极移到正极所做的功为

$$A_s = \int_{(-)}^{(+)} Q\vec{E}_s \cdot d\vec{l}$$

将上式代入式(3-31),得到

$$\mathcal{E} = \int_{(-)}^{(+)} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} \quad (3-32)$$

由于非静电力是把正电荷从电源的负极推向正极, 所以  $\vec{E}_s$  的方向应是从负极指向正极。这样, 在电源的内部存在着两个电场: 一个是非静电力的等效电场  $\vec{E}_s$ , 另一个是电源两极上的分布电荷在电源内部产生的库仑电场  $\vec{E}$ , 两者的指向正好相反。在电源外部的媒质或空间中, 只存在由分布电荷所产生的库仑电场  $\vec{E}$ 。电源内及导体回路上的电场如图3-5所示。

在电源内部, 欧姆定律微分形式仍然成立, 但应将表达式  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  中的  $\vec{E}$  换成电源内的总电场  $\vec{E} + \vec{E}_s$ , 即

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_s) \quad (3-33)$$

其中  $\sigma$  是电源内部的电导率。

如果将电源与外电路断开, 则电源内的电流为零, 由上式得到

$$\vec{E}_s = -\vec{E} \quad (3-34)$$

将上式代入式 (3-32), 得

$$\mathcal{E} = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_0 \quad (3-35)$$

其中的  $V_0$  为电源两极上的分布电荷所产生的电位差, 一般也称为**开路电压**。该式表明, 一个电源的电动势可以通过测量其两极间的开路电压得到。但在实际测量时应该注意, 为了保证电源开路的条件近似成立, 测量所用的电压表必须具有足够高的内阻。

## § 3.4 欧姆定律和焦耳定律

### 一. 欧姆定律

导体内部一点的电流密度与电场强度满足欧姆定律的微分形式  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , 由此式可推导出一段均匀柱状导体上的电流与两端电压间的关系。图3-6表示一段横截面均匀的柱状导体, 它的横截面面积为  $S$  而长度为  $l$ , 电流沿轴线流动, 材料的电导率  $\sigma$  为常数。在这种情况下, 导体内部的电流密度和电场强度都是均匀分布的, 导体端面与电场垂直且为等电位面。此时两端面之间的电压为  $V = El$ , 而导体上通过的电流为  $I = JS = \sigma ES$ , 电压与电流相除得

$$\frac{V}{I} = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S} \quad (3-36)$$

$$\text{令} \quad \frac{l}{\sigma S} = R \quad (3-37)$$

$R$  称为该段导体的**电阻**, 单位是欧姆 ( $\Omega$ )。  $R$  仅是材料的参数和几何尺寸的函数。有时也将上式中的  $1/\sigma$  记作  $\rho$ , 称为该导体材料的**电阻率**,  $\rho$  的单位是欧·米 ( $\Omega \cdot \text{m}$ )。因此式 (3-37) 又可以写成

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3-38)$$

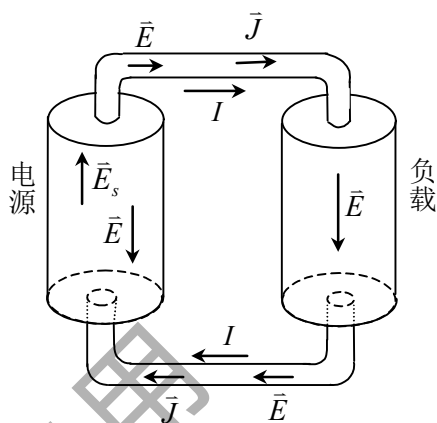


图3-5 恒定电流回路中的电场



将式(3-37)代入式(3-36),得到

$$V = RI \quad (3-39)$$

上式称为**欧姆定律**,它表明了流经一段导体的电流与导体两端电压的正比关系,是电路学的基本定律之一。

由式(3-39)可知,当导体两端的电压一定时,导体电阻 $R$ 越大则通过它的电流就越小,所以电阻反映了导体对电流的阻碍程度。为了表示导体对电流的导通程度,我们引入电阻的倒数——**电导**,用 $G$ 来表示,即

$$G = \frac{1}{R} \quad (3-40)$$

电导的单位是西门子(S)。

电阻表达式(3-37)或(3-38)只适用于电导率和横截面都是均匀的柱状导体,对电导率或横截面非均匀的情况,只有当导体两端面分别为等电位面时欧姆定律(3-39)才有意义。对于良好的金属导体,端面为等电位面的条件一般是成立的。如图3-7所示的横截面非均匀而电导率为常量或仅沿电流方向变化的良好导体柱,其总电阻可以通过对各段微分电阻求积分得到,即

$$R = \int_l dR = \int_l \frac{dl}{\sigma S} \quad (3-41)$$

应当注意,欧姆定律所描述的电压与电流成正比的关系,对一般的金属或非金属导电媒质以及这些材料所构成的元件都是成立的,但对一些电离的气体或半导体结元件则并不成立,这些特殊情况下的电流与电压关系一般要用非线性的伏安特性曲线表示。如图3-8所示的就是典型晶体二极管P-N结的伏安特性曲线。

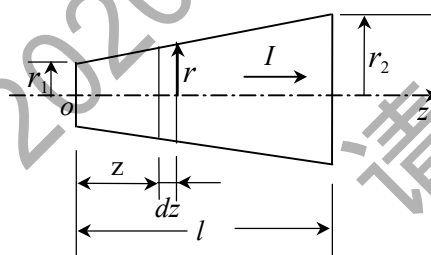


图3-7 非均匀截面导体的电阻

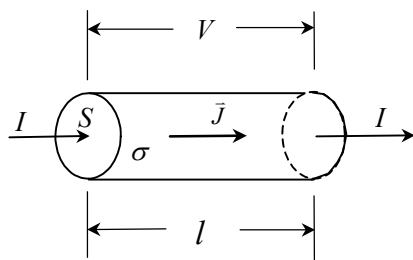


图3-6 均匀柱状导体的电流电压

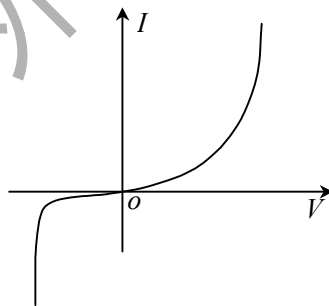


图3-8 P-N结的伏安特性曲线

**例3.1** 在一块厚度为 $h$ 的导电板上,由两个半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 的圆弧面与两个夹角为 $\alpha$ 的平面割出一块扇形体,如图3-9所示,导体材料的电导率 $\sigma$ 为常数。求:(a)上下平面之间的电阻;(b)两圆柱弧面之间的电阻;(c)两侧平面之间的电阻。

解:(a)上、下两平面之间的电压为

$$V = Eh = \frac{J}{\sigma} h = \frac{I}{\sigma S} h$$

其中

$$S = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi} \alpha$$

是扇形带的面积，代入上式得

$$V = \frac{Ih}{\sigma \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi} \alpha} = \frac{2hI}{\sigma \alpha (r_2^2 - r_1^2)}$$

故上下平面方向的电阻为

$$R = \frac{V}{I} = \frac{2h}{\sigma \alpha (r_2^2 - r_1^2)}$$

实际上，上下两面之间的柱体是一个均匀截面柱体，若直接利用公式（3-37）计算电阻，其步骤将会更为简单。

(b) 此时电流方向的横截面随 $r$ 变化，可采用式(3-41)计算。其中，截面积 $S = h\alpha r$ ， $dl = dr$ 。因此有

$$R = \int_l \frac{dl}{\sigma S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sigma h \alpha r} = \frac{1}{\sigma h \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(c) 设右侧面( $\varphi = 0$ )的电位为0，左侧面( $\varphi = \alpha$ )的电位为 $U_0$ ，即

$$U_{\varphi=0} = 0 \quad (1)$$

$$U_{\varphi=\alpha} = U_0 \quad (2)$$

由于导体内的电位 $U$ 满足Laplace方程且只是坐标 $\varphi$ 的函数，在圆柱坐标系中，有

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = 0$$

对 $\varphi$ 两次积分，得

$$U = C_1 \varphi + C_2$$

将边界条件（1）、（2）代入上式，得到两个积分常数为

$$C_1 = \frac{V_0}{\alpha}, \quad C_2 = 0$$

因此有

$$U = \frac{V_0}{\alpha} \varphi$$

导体内的电场和电流密度分别为

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{1}{r} \frac{dU}{d\varphi} \hat{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{V_0}{\alpha} \hat{\varphi}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\frac{\sigma V_0}{\alpha r} \hat{\varphi}$$

任意截面所通过的总电流为

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma V_0}{\alpha r} h dr = \frac{\sigma h V_0}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

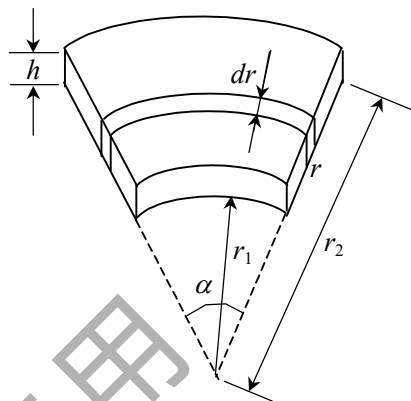


图3-9 扇形导体的电阻

两侧面之间的电阻为

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\alpha}{\sigma h \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

在电路学中，将两端电压与通过电流成正比的电路元件称为**电阻器**，简称**电阻**，比例系数  $R = V/I$  称为该电阻器的电阻值。很明显，电阻器一定满足欧姆定律。在一个实际电路中，为了满足电路的性能要求，常常要将几个电阻连接起来使用。当几个电阻以图3-10的形式连接时，称为**电阻的串联**。此时流过每个电阻的电流  $I$  都相同，而电路两端  $AB$  点之间的总电压  $V$  等于每个电阻的电压之和，即

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N \quad (3-42)$$

$$V_1 = R_1 I$$

$$V_2 = R_2 I$$

$$\vdots$$

$$V_N = R_N I$$

代入式 (3-42)，得

$$V = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N) I \quad (3-43)$$

令

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \quad (3-44)$$

$R$  称为串联电路的总电阻或等效**串联电阻**，它恰为  $N$  个电阻的电阻值之和。代回 (3-43) 式，得到

$$V = RI$$

说明串联电阻电路的电流、总电压和总电阻之间仍然符合欧姆定律。

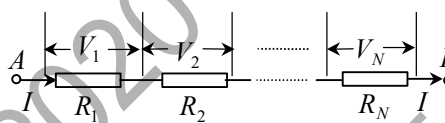


图3-10 电阻器的串联

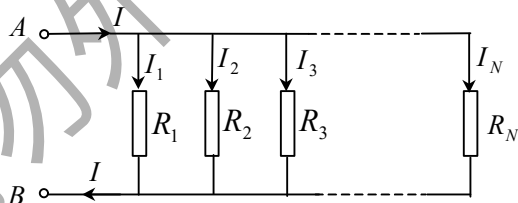


图3-11 电阻器的并联

当几个电阻以图3-11的形式连接时，称为**电阻的并联**。此时每个电阻两端的电压都与并联电路两端  $AB$  点之间的总电压  $V$  相等，而通过  $A$  端（或  $B$  端）的电路总电流等于每个电阻上流过的分电流之和，即

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_N \quad (3-45)$$

将欧姆定律分别用在每个电阻上，有

$$I_1 = \frac{V}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2}$$

∴

$$I_N = \frac{V}{R_N}$$

代入式(3-45)，得

$$I = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \right) V \quad (3-46)$$

令

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad (3-47)$$

$R$ 称为并联电路的总电阻或等效**并联电阻**，它的倒数恰为 $N$ 个电阻的电阻值的倒数之和，并且有

$$I = \frac{V}{R}$$

说明并联电阻电路的总电流、电压和总电阻之间也依然符合欧姆定律。

当一个电阻器 $R$ （或串、并联等效电阻）与一个电源相串接时，如图3-12所示，两端点 $AB$ 间的总电压降 $U$ 应分为三部分：1）电阻 $R$ 上的电压降 $RI$ ；2）电源内阻上的电压降 $rI$ ；3）电源电动势的贡献。当电源顺接（即电源从负极到正极的方向与电流 $I$ 的参考方向一致）时，电动势 $\mathcal{E}$ 起升压作用，与 $AB$ 之间的电压降定义方向相反，应取负值；反之则取正值。因此有

$$V = RI + rI \mp \mathcal{E} \quad (3-48)$$

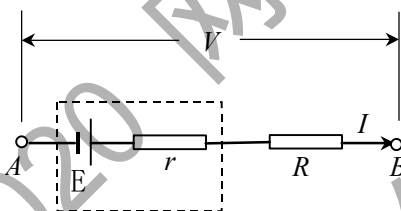


图3-12 一段含源电路

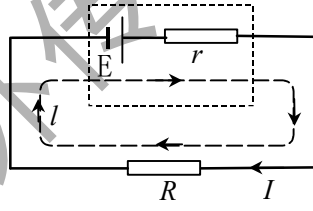


图3-13 简单含源电流回路

上式表达了一段含源电路的总电压、电流、电阻和电动势之间的关系。

如果将图3-12中的 $A$ 点和 $B$ 点连接，就构成了一个最简单的含源电流回路，如图3-13所示。此时因 $A$ 、 $B$ 两点重合，故式(3-48)中的电压降 $V$ 等于0，可得

$$\mathcal{E} = \pm(R+r)I \quad (3-49)$$

其中，当电流 $I$ 的参考方向与电源电动势的方向相同时，取“+”号，反之取“-”号。上式称为**全电路欧姆定律**，表达了一个简单含源电路的电源电动势、电源内电阻、电阻和电流间的联系。

对于有多个回路的复杂电路，我们可以对回路逐个进行分析。如图3-14所示，一个回路可能有几个电源，而且各部分电流也可以不相同。首先对该回路 $I$ 给定一个参考方向，仿照式(3-49)的分析方法，可得到

$$\sum(\mp \mathcal{E}_i) + \sum(\pm R_i I_i) = 0 \quad (3-50)$$

式中每一项前面的正负号按照下述规则选取：电动势的方向与回路 $I$ 的参考方向相同时 $\mathcal{E}_i$ 的

前面取“-”号,相反时取“+”号;电流方向与回路 $l$ 的参考方向相同时 $I$ 取“+”号,相反时取“-”号。式(3-50)是全电路欧姆定律在任意回路上的推广,其 $\mathcal{E}$ 有更为普遍的使用范围,一般也称作**基尔霍夫第二方程式**。将式(3-50)与基尔霍夫第一方程式(3-20)联合使用,可以求解任何复杂的电阻含源网络。

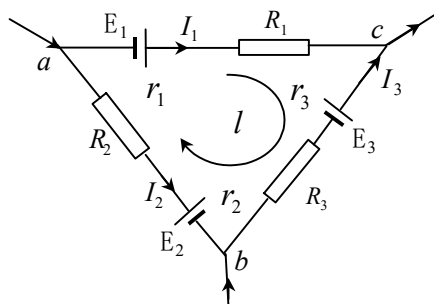


图3-14 复杂电路中的一个回路

例3.2 如图3-15所示的电路,  $\mathcal{E}_1=12\text{V}$ ,  $r_1=1\Omega$ ,  $\mathcal{E}_2=8\text{V}$ ,  $r_2=0.5\Omega$ ,  $R_1=3\Omega$ ,  $R_2=1.5\Omega$ ,  $R_3=4\Omega$ 。试求通过每个电阻的电流。

解: 设通过各电阻的电流  $I_1, I_2, I_3$  如图所示。对节点 $a$  列出基尔霍夫第一方程

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

如果再对节点 $b$ 应用基尔霍夫第一方程,将得到与上式相同的结果,并不能得到另一个独立方程。

针对回路 I 和回路 II 分别列出基尔霍夫第二方程,得

$$-\mathcal{E}_1 + r_1 I_1 + R_1 I_1 + R_3 I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 + r_2 I_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

如果对整个外面的大回路列基尔霍夫第二方程,会发现其结果是上面两个方程的叠加,也不是一个独立的方程。

将已知数据代入上面的两个回路方程并与前面的电流节点方程联立求解,得到

$$I_1 = 1.25\text{ A}, \quad I_2 = -0.5\text{ A}, \quad I_3 = 1.75\text{ A}$$

$I_1$  和  $I_3$  为正值,表明实际电流方向与图中所设相同。 $I_2$  为负值,说明它的实际方向与图中所设方向相反。

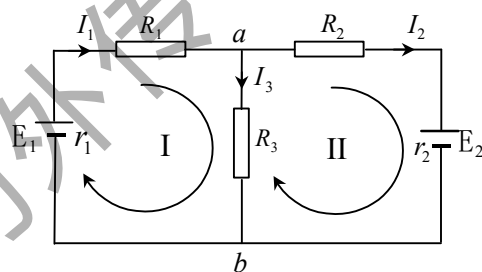


图3-15 例3.2 图

## 二. 焦耳定律

导电媒质中的电荷是在电场作用下产生定向运动的,此时电场要对电荷运动做功。电场所做的功首先被转化为运动电荷的动能。然后在电荷的碰撞过程中变为热能而散发掉,这就是载流导体发热的原因。因恒定电流场中电荷作定向运动的总动能并不随时间变化,所以导体的热损耗功率就应等于单位时间内电场对该导体运动电荷所做的功。以前面的图3-6所示的柱状导体为例,如果电荷从柱体的左端面运动到右端面所用的时间为  $dt$ , 则电场对  $dt$  内通过截面的电荷  $dQ$  所作的功为  $dQEl$ , 对应的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} El = IEl = JE\tau \quad (3-51)$$

其中  $\tau = Sl$  是该柱体的体积。此功率将全部转化为导体的热损耗功率,因此导体内单位体积

所发散的热损耗功率为

$$p = JE = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (3-52)$$

上式称为**焦耳定律的微分形式**， $p$  称为**热功率密度**。一段导电媒质柱体的焦耳损耗功率是上式的体积分

$$P = \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = \int_s J ds \int E dl = IV \quad (3-53)$$

上式称为焦耳定律的积分形式，或简称**焦耳定律**，反映了电阻性元件上的热损耗功率与电流、电压的关系。如果将欧姆定律  $V = RI$  代入上式，可得到焦耳定律的另一表达形式

$$P = I^2 R \quad , \quad \text{或} \quad P = V^2 / R \quad (3-54)$$

### § 3.5 恒定电流场的边界条件

在两种导电媒质的分界面上，两侧电导率和电容率的不同会使界面上出现面电荷。这些电荷是在接通电源的瞬间所积累起来的。界面电荷使分界面两侧的电场强度和电流密度发生突变，如图3-16所示。

将恒定电流场两个基本方程的积分形式  $\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$  和  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  分别应用在跨越分界面的闭合小柱面和矩形小回路上，仿照静电场电介质边界条件的推导过程，可得到两种导电媒质分界面上的边界条件

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{1n} = J_{2n} \quad (3-55)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (3-56)$$

以上两式分别称为导电媒质电流密度的**法向边界条件**和电场强度的**切向边界条件**。它们说明在不同导电媒质的分界面上，电流密度的法线分量连续而电场强度的切线分量连续。但由于  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ，则有

$$J_{1t} = \sigma_1 E_{1t} \neq \sigma_2 E_{2t} = J_{2t}$$

$$E_{1n} = \frac{J_{1n}}{\sigma_1} \neq \frac{J_{2n}}{\sigma_2} = E_{2n}$$

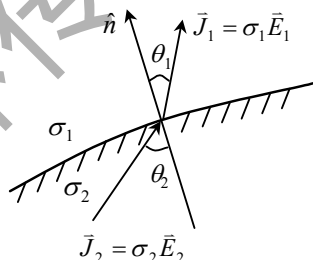


图3-16 分界面两侧电场与电流

即两侧的电流密度切线分量不等，电场强度的法线分量不等。所以分界面两侧的总电流密度矢量和总电场强度矢量都是不连续的。

由图3-16给出的角度关系，可以将式(3-55)和 (3-56) 分别写成

$$\sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

两式相除可得到总场矢量在分界面上的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3-57)$$

如果媒质1为电导率很低的不良导电媒质，而媒质2为高电导率的良好导体，即  $\sigma_1 \ll \sigma_2$ ，由上式可得  $\theta_1 \ll \theta_2$ 。此时只要良好导体一侧的电流不平行于分界面，不良绝缘材料一侧的电

流和电场就几乎与分界面垂直,因而分界面可以近似为等电位面。在具有良好导体和不良绝缘体界面的边值问题计算中,这个结论是有用的。

媒质的边界条件也可以用电位表示。仿照静电位边界条件式(2-98)和式(2-99)的推导方法,可得到恒定电流场中的电位边界条件

$$\sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad (3-58)$$

$$U_1 = U_2 \quad (3-59)$$

此外,将高斯定律的积分形式

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_{in}$$

用在跨越边界的扁柱状闭合面上,由同样的方法可推导出反映媒质两侧的电通量密度与界面上分布面电荷关系

$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \quad \text{或} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (3-60)$$

**例3.3** 一个由两层媒质构成的平行板电容器如图3-17所示。两层媒质的电容率和电导率分别为 $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1$ 和 $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_2$ ,厚度分别为 $d_1$ 和 $d_2$ ,极板面积为 $S$ 。当外加电压 $V_0$ 时,求通过电容器的漏电流和两媒质分界面上的自由电荷密度和极化电荷密度。

**解:** 设通过电容器的电流为 $I$ ,略去边缘效应,则两媒质中的电流密度为

$$J_1 = J_2 = \frac{I}{S} = J$$

两媒质中的电场分别为

$$E_1 = \frac{J}{\sigma_1}, \quad E_2 = \frac{J}{\sigma_2}$$

所以

$$V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left( \frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right) J = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{I}{S}$$

通过电容器的电流和电流密度分别为

$$I = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} S V_0, \quad J = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} V_0$$

两种媒质中的电通量密度分别为

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} J, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} J$$

故分界面上的自由电荷面密度为

$$\rho_s = -(D_1 - D_2) = -\left( \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \right) J = -\frac{\sigma_2 \varepsilon_1 - \sigma_1 \varepsilon_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} V_0$$

媒质分界面上的极化面电荷密度可由界面两侧的极化强度得到

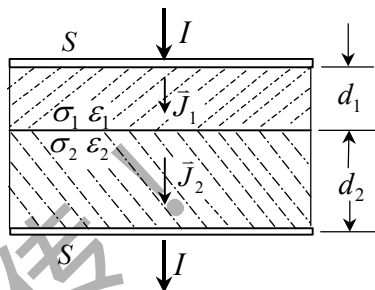


图3-17 两层媒质的平板电容

$$\rho_{ps1} = -\hat{n} \cdot \vec{P}_1 = -\hat{n} \cdot [\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1)\vec{E}_1] = \varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - 1) \frac{J}{\sigma_1}$$

$$\rho_{ps2} = \hat{n} \cdot \vec{P}_2 = \hat{n} \cdot [\varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1)\vec{E}_2] = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r2} - 1) \frac{J}{\sigma_2}$$

分界面上的总极化电荷面密度是上面两式的代数和，即

$$\rho_{ps} = \rho_{ps1} + \rho_{ps2} = \varepsilon_0 J \left( \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\sigma_2} \right) = \frac{\sigma_2(\varepsilon_{r1} - 1) - \sigma_1(\varepsilon_{r2} - 1)}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \varepsilon_0 V_0$$

### § 3.6 恒定电流场与静电场的类比

由前面的讨论已经看到，导电媒质中的恒定电流场与无电荷区域的静电场有许多相似之处。下面将两种场的基本方程、主要导出方程和边界条件分别列出，以便分析类比。

	无外源区域恒定电流场	无电荷区域静电场
基本方程:	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$
主要导出方程:	$\begin{cases} \vec{J} = \sigma \vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla U \\ \nabla^2 U = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} = -\nabla U \\ \nabla^2 U = 0 \end{cases}$
边界条件方程:	$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \\ U_1 = U_2 \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \\ U_1 = U_2 \end{cases}$

从上面所列方程可以看出，如果把静电场方程组中的  $\vec{D}$  换成  $\vec{J}$ ， $\varepsilon$  换成  $\sigma$ ，就可以得到恒定电流场的方程组，反之亦然。我们称  $\vec{J}_{\text{恒}}$  与  $\vec{D}_{\text{静}}$ ， $\vec{E}_{\text{恒}}$  与  $\vec{E}_{\text{静}}$ ， $U_{\text{恒}}$  与  $U_{\text{静}}$  及  $\sigma$  与  $\varepsilon$  有对偶关系，或称之为**对偶量**。此外考虑到  $Q = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$  和  $I = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$ ，在某些情况下，产生静电场

的总电荷与流入无外源区域的总电流也有对偶关系。由唯一性定理可以证明，当两种场的基本方程和边界条件相同时，应有相同的解表达式。因此我们可以利用上述对偶关系，由一种场中某类问题的已知解，通过对偶量的替换来得到另一种场同类问题的解。也就是说，若两种场问题的对偶边界条件相同，则只需将静电场问题解  $\vec{D}$ 、 $\vec{E}$ 、 $U$  的表达式中所出现的  $\varepsilon$  换成  $\sigma$ 、 $Q$  换成  $I$ ，便可分别得到恒定电流场中  $\vec{J}$ 、 $\vec{E}$ 、 $U$  的解表达式，反之亦然。这种方法称为**类比法**。

**例3.4** 一球形理想导体电极深埋在电导率为  $\sigma$ 、电容率为  $\varepsilon'$  的地下土壤中，已知流入此电极的总电流为  $I$ ，如图3-17所示。求土壤中的  $\vec{J}$ 、 $\vec{E}$ 、 $U$  和  $\vec{D}$ 。

**解：**此恒定电流场问题可以与无限均匀电介质  $\varepsilon$  中带电荷  $Q$  的导体球的静电场问题相类比。设坐标系原点位于球心处，该静电场问题的  $\vec{D}_0$ 、 $\vec{E}_0$ 、 $U_0$  解表达式已在前面的习题中得到，为



$$\bar{D}_0 = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \bar{E}_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}, \quad U_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$$

利用对偶关系，将上面各式中的 $Q$ 换成 $I$ ， $\epsilon$ 换成 $\sigma$ ，得到恒定电流场中的对偶量 $\bar{J}$ 、 $\bar{E}$ 、 $U$ ，即

$$\bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad \bar{E} = \frac{I}{4\pi \sigma r^2} \hat{r}, \quad U = \frac{I}{4\pi \sigma r}$$

恒定电场中的 $\bar{D}$ 没有静电场的量与之对偶，需通过恒定场中的电场强度 $\bar{E}$ 和电容率 $\epsilon'$ 计算，即

$$\bar{D} = \epsilon' \bar{E} = \frac{\epsilon' I}{4\pi \sigma r^2} \hat{r}$$

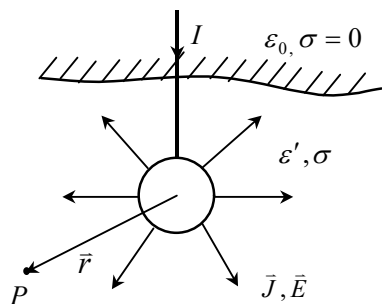


图3-18 球形电极的恒定电流场

恒定电流场的一个重要内容是计算电极之间的电阻，这类问题有时可通过与静电场电容问题解的类比来解决。图3-19(a)表示均匀导电媒质中的两个电极，而图3-19(b)表示均匀电介质中的两个电极。假设两组电极的形状和相对位置相同，同时电极均为理想导体。

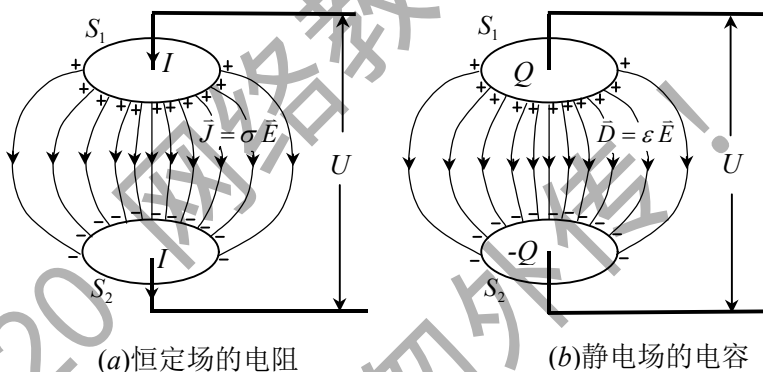


图3-19 电阻与电容的类比

对图3-19(b)，两电极之间的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_s \epsilon \bar{E}_b \cdot d\bar{s}}{\int_l \bar{E}_b \cdot d\bar{l}} = \frac{\epsilon \oint_s \bar{E}_b \cdot d\bar{s}}{\int_l \bar{E}_b \cdot d\bar{l}} \quad (3-61)$$

对图3-19(a)，两电极之间的电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_l \bar{E}_a \cdot d\bar{l}}{\oint_s \sigma \bar{E}_a \cdot d\bar{s}} = \frac{\int_l \bar{E}_a \cdot d\bar{l}}{\sigma \oint_s \bar{E}_a \cdot d\bar{s}} \quad (3-62)$$

将上面两式相乘，得

$$RC = \frac{\int_l \bar{E}_a \cdot d\bar{l}}{\sigma \oint_s \bar{E}_a \cdot d\bar{s}} \cdot \frac{\epsilon \oint_s \bar{E}_b \cdot d\bar{s}}{\int_l \bar{E}_b \cdot d\bar{l}}$$

设两种情况下外加电压相同，则必有 $E_a = E_b$ ，上式简化为

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (3-63)$$

可见，两电极之间的电阻与电容的乘积恰等于媒质参数电容率与电导率之比。利用电阻 $R$ 与电导 $G$ 的倒数关系，上式还可以写成

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (3-64)$$

从前面的推导过程可以看出，上两式中的电容和电容率也不见得一定是取自于相同的静电场问题。因为恒定电场也有电容和电容率的概念，并且其定义与静电场中的定义完全相同，所以上面两式所给出的关系对同一个恒定场问题中的电阻和电容也成立。

**例3.5** 求例3.4球形导体电极的对地电阻。已知导体球的半径为  $a=1\text{ m}$ ，土壤的电导率为  $\sigma=10^{-3}\text{ (S/m)}$ 。

**解：**此电极深埋地下时，可以近似为无限均匀媒质中的孤立导体球，在静电场中我们已经得到了孤立导体的电容为

$$C = 4\pi\varepsilon a$$

由式（3-63）的关系可得

$$R = \frac{\varepsilon}{\sigma C} = \frac{1}{4\pi\sigma a} \approx 80\text{ (}\Omega\text{)}$$

如果以此电极做为地线使用， $80\Omega$ 的阻值是明显偏高的，典型地线的工程指标一般要求在几欧姆以下。为了降低接地电阻，应将电极做成金属板，以增大接地面积。同时，在电极附近渗入盐水等导电液，增大土壤的电导率。

由前面的讨论我们已经发现，恒定电流场在基本性质和基本公式等许多方面都与静电场有非常相似之处，那么这两种场在本质上究竟有何异同呢？从表面上看，在恒定电场中有电荷的运动，并且引入了电流、电动势和电阻等一些新的概念，但是电场的性质只取决于净电荷密度的分布，而与电荷是否运动无关。对恒定电场和静电场，它们的场源电荷的密度都是保持不变的，所以这两种电场都具有相同的性质，都满足相同的场——源关系。如库仑定律、高斯定律和电场环路定理等，满足相同的边界条件，并且在相同的电位函数定义下，具有相同的电位方程。如果恒定电场的已知条件也是分布电荷密度  $\rho$  或  $\rho_s$ ，那么静电场中的所有公式对恒定电场都是成立的，并且公式中出现的  $\varepsilon$  就是该导电媒质中的电容率。当获得恒定电场的场强表达式后，只要利用欧姆定律的微分形式  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  就可以得到相应的电流和功耗等其它量。从上述角度讲，恒定电场的基本性质和计算与静电场是没有什么区别的。因此，人们也经常把这两种场统称为**静态电场**。

但另一方面，由于恒定电流场中存在着电荷的运动，并且维持电荷的运动需要有外源提供能量，从而引入了电流、电动势、电阻和功耗等一些新的概念。特别是对大多数恒定电场的计算问题，已知条件和待求量一般是电流、电压、电导率、电阻和功率等，而分布电荷密度往往是未知的，所以在计算方法上一般也与静电场的方法不同，如采用上面介绍的类比法或求解电路方程组的方法等。

此外，在讨论恒定电流场问题时，应特别注意“导体”的概念。恒定电流场中通常所说的“导体”是指电导率为有限值的导电媒质，它相当于静电场问题中的电介质。这种“导体”内部的电场不为零，在它的内部或表面上有电流，并且也不是等电位体。只有电导率为无穷大的导体（也就是所谓的超导体）才与静电场中的导体相当，这种导体一般都特别注明为“理想导体”。

### 习 题 三

3.1 北京正负电子对撞机的储存环是周长为20 m的近似圆形轨道。求当环中电子流强度为8 mA时,在整个环中有多少电子在运行。已知电子的速率接近光速。

3.2 假设电荷均匀分布在半径为 $a$ 的球内部,球所带的总电量为 $Q$ ,球连同电荷一起以角速度 $\omega$ 旋转,试推出电流密度的表达式并且计算分布电流总和 $I$ 。

3.3 设无界导电媒质的电导率 $\sigma$ 和电容率 $\varepsilon$ 都是坐标的函数,证明媒质内部通过恒定电流时任意点的自由电荷密度为

$$\rho = \bar{E}[\nabla \varepsilon - (\varepsilon/\sigma)\nabla \sigma]$$

3.4 一铁制水管,内、外直径分别为2.0 cm和2.5 cm,这水管常用来使电器设备接地。如果从电器设备流入到水管中的电流是20 A,那么电流在管壁和水中各占多少?假设水的电阻率是 $0.01 \Omega \cdot \text{m}$ ,铁的电阻率为 $8.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 。

3.5 大气中由于存在少量的自由电子和正离子而具有微弱的导电性。

(1) 地表附近,晴天大气平均电场强度为120 V/m,大气平均电流密度约为 $4 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2$ 。问大气电阻率是多大?

(2) 电离层和地球表面之间的电位差为 $4 \times 10^5 \text{ V}$ ,大气的总电阻是多大?

3.6 一铜棒的横截面积为 $20 \times 80 \text{ mm}^2$ ,长为2 m,两端的电位差为50 mV。已知铜的电导率为 $\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ 1}/\Omega \cdot \text{m}$ ,铜内自由电子的电荷密度为 $1.36 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$ 。求:

- (1) 它的电阻; (2) 电流; (3) 电流密度; (4) 棒内的电场强度;  
(5) 所消耗的功率; (6) 棒内电子的漂移速度。

3.7 电缆的芯线是半径为 $a = 0.5 \text{ cm}$ 的铜线,在铜线外面包一层同轴的绝缘层,绝缘层的外半径为 $b = 2 \text{ cm}$ ,电阻率 $\rho = 1 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$ 。在绝缘层外面又用铅层保护起来。

(1) 求长度 $L = 1000 \text{ m}$ 的这种电缆沿径向电阻;

(2) 当芯线与铅层的电位差为100 V时,径向电流有多大?

3.8 两层媒质的同轴线内外导体半径分别为 $a$ 和 $b$ ,两媒质分界面为半径等于 $r_0$ 的同轴圆柱面,内外两层媒质的电容率和电导率分别为 $\varepsilon_2$ 、 $\sigma_2$ 和 $\varepsilon_1$ 、 $\sigma_1$ ,当外加电压 $U_0$ 时,求媒质中的电场及分界面上的自由电荷密度。

3.9 试推导不同导电媒质的分界面上存在自由面电荷的条件。

3.10 直径为10 mm,电导率 $\sigma_1 = 10^7 \text{ S/m}$ 的导线外覆盖另一种电导率为 $\sigma_2$ 的导体层,其外径为20 mm。欲使复合线的单位长电阻为原导线的二分之一,求 $\sigma_2$ 。如果复合线中有100 A的电流,求两种导体中的电流密度并计算1000 m复合线的功率损耗。

3.11 求半径为 $r_1$ 和 $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) 的两个同心球面之间的电阻,假设它们之间的空间填充电导率 $\sigma = \sigma_0(1 + k/r)$ 的材料,其中 $k$ 为常数。

3.12 设有同心球电容器,内球半径为 $a$ ,外球内半径为 $c$ ,中间充有两层媒质,其分界面为 $r = b$ ,内外层媒质的电容率和电导率分别为 $\varepsilon_1$ 、 $\sigma_1$ 、 $\varepsilon_2$ 、 $\sigma_2$ 。

- (1) 若内外球间加电压  $U_0$ ，求两层媒质中的  $\vec{J}$  及  $r = a$ 、 $b$ 、 $c$  处的自由电荷密度；  
 (2) 求此电容器的漏电阻。

3.13 如上题的电容器中  $a = 2\text{cm}$ ,  $b = 2.5\text{cm}$ ,  $c = 3\text{cm}$ ,  $\sigma_2 = 10^{-11} \text{ s/m}$ ，欲使两层媒质中的热损耗功率相等，求  $\sigma_1$ 。

3.14 在电导率为  $\sigma$  的均匀导电媒质中有半径为  $a_1$  和  $a_2$  的两个理想导体小球，两球心之间的距离为  $d$ ，有  $d \gg a_1$  和  $d \gg a_2$ ，计算两导体球之间的电阻。

3.15 在导体中有恒定电流而其周围媒质的电导率为零时，试证明导体表面电通量密度的法线分量  $D_n = \rho_s$ ，但矢量关系  $\vec{D} = \hat{n}\rho_s$  不成立，式中  $\hat{n}$  是导体表面向外的法线单位矢量。

3.16 无限大均匀导电媒质中有分布在有限区域的  $N$  个理想导体电极，设各电极的电位分别是  $U_1$ 、 $U_2$ 、 $\dots$ 、 $U_N$ ，各电极流出的电流是  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $\dots$ 、 $I_N$ ，证明导电媒质中总的热损耗功率是

$$W = \sum_{i=1}^N U_i I_i$$

3.17 设有一无限大的导电媒质薄板，其中插入一对针状的理想导体电极，两极相距为  $d$ ，当电极与电池相接时，证明电流自一极沿圆弧向另一极(提示：证明  $\vec{J}$  线方程为圆方程)。