

# 第一章 矢量分析

矢量分析是电磁场理论的重要数学基础，本章在给出矢性函数概念、基本运算法则及正交曲线坐标系的基础上，引入标量场、矢量场的概念和反映场分布空间变化规律的几种重要运算——梯度、散度和旋度，讨论有势场、管形场、调和场等几种常用矢量场基本性质，最后简单介绍电磁理论中经常用到的几个函数和数学定理。

## § 1.1 矢性函数及基本运算

### 一. 矢性函数的概念

可以用一个数的大小来表示的量，称为数量或标量。不仅有大小而且有方向的量称为矢量。若矢量的大小（也称作模）和方向都保持不变，我们称这类矢量为常矢量，简称常矢；如果矢量的模或方向是变化的，则称之为变矢量，简称变矢。例如质点 $M$ 沿曲线 $l$ 作变速运动时，如图1-1所示，它的速度矢量 $\vec{v}$ 的模值和方向将随着时间变化， $\vec{v}$ 就是一个变矢。

为了描述变矢，引入矢性函数的概念。一元矢性函数的定义如下：

**定义：**设有数性变量 $t$ 和变矢 $\vec{F}$ ，如果对于 $t$ 在某个区域 $(t_1, t_2)$ 内的每一个数值， $\vec{F}$ 都有一个确定的矢量和它对应，则称 $\vec{F}$ 为数性变量 $t$ 的矢性函数，记作

$$\vec{F} = \vec{F}(t) \quad (1-1)$$

区域 $(t_1, t_2)$ 称为函数 $\vec{F}(t)$ 的定义域。

矢性函数 $\vec{F}(t)$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的三个坐标（即 $\vec{F}(t)$ 在三个坐标轴上的投影）都是 $t$ 的数性函数，用 $F_x(t)$ 、 $F_y(t)$ 、 $F_z(t)$ 表示，于是，矢性函数 $\vec{F}(t)$ 可以写成

$$\vec{F}(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t) \quad (1-2)$$

其中， $\hat{x}$ ， $\hat{y}$ ， $\hat{z}$ 为直角坐标系的三个坐标单位矢量，模值均是1，方向分别与三个坐标轴的正方向相同，它们也可以写成：

$$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z \quad \text{或} \quad \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$$

为了用图形直观地表示一个变矢的变化状态，我们将其矢性函数 $\vec{F}(t)$ 所对应矢量的起点取在坐标系的原点，当 $t$ 变化时，矢量 $\vec{F}(t)$ 的终点 $M$ 就描绘出一条曲线 $l$ ，如图1-2所示。这条曲线叫做矢性函数 $\vec{F}(t)$ 的矢端曲线，一般我们规定沿 $t$ 增加的方向为曲线的正方向，矢端曲线亦叫做矢性函数 $\vec{F}(t)$ 的图形，同时称式(1-2)为此曲线的矢量方程。

当我们把 $\vec{F}(t)$ 的起点取在坐标系原点时， $\vec{F}(t)$ 实际上就是

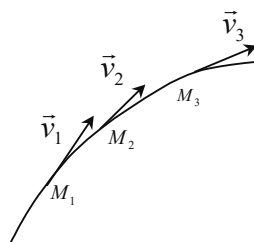


图1-1 变矢

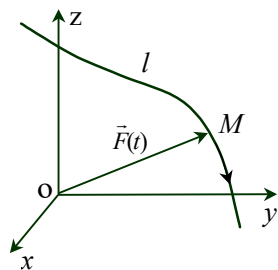


图1-2 矢端曲线

其终点 $M$ 的矢径, 矢径通常记作 $\vec{r}(t)$ 或 $\vec{r}(M)$ , 它的三个分量就是其终点 $M$ 的三个坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ , 记作

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad (1-3)$$

上式称为矢端曲线 $l$ 的参数方程, 所对应的矢量方程一般写成

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (1-4)$$

容易看出, 曲线 $l$ 的参数方程(1-3)和矢量方程(1-4)之间有着明显的一一对应关系, 只要知道其中的一个, 就可以立即写出其另一个。例如, 图1-3所示的圆柱螺旋线的参数方程为

$$x = a \cos \varphi \quad , \quad y = a \sin \varphi \quad , \quad z = b \varphi$$

则其矢量方程为

$$\vec{r}(\varphi) = a \cos \varphi \hat{x} + a \sin \varphi \hat{y} + b \varphi \hat{z}$$

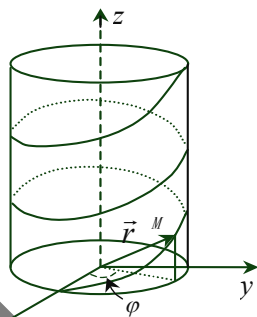


图 1-3

## 二. 矢性函数的极限与连续

**定义:** 设 $\vec{F}(t)$ 在点 $t_0$ 的某个邻域内有定义(但在 $t_0$ 点可以没有定义),  $\vec{F}_0$ 为一常矢。若对任意给定的正数 $\varepsilon$ , 都存在一个正数 $\delta$ , 使得 $t$ 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 有

$$|\vec{F}(t) - \vec{F}_0| < \varepsilon \quad (1-5)$$

成立, 则称, 当 $t \rightarrow t_0$ 时矢性函数 $\vec{F}(t)$ 有极限 $\vec{F}_0$ , 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}_0 \quad (1-6)$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似, 因此, 矢性函数也就有类似于数性函数的一些极限运算法则, 如

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t)\vec{F}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \quad (1-7a)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) \pm \vec{E}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{E}(t) \quad (1-7b)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) \cdot \vec{E}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{E}(t) \quad (1-7c)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) \times \vec{E}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{E}(t) \quad (1-7d)$$

其中 $f(t)$ 为数性函数,  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{E}(t)$ 为矢性函数, 且当 $t \rightarrow t_0$ 时,  $f(t)$ ,  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{E}(t)$ 均有极限存在。

根据上面公式, 设 $\vec{F}(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{x}F_x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{y}F_y(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{z}F_z(t)$$

因为直角坐标系的三个坐标单位矢量 $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ 都是常矢, 故上式可得

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \hat{x} \lim_{t \rightarrow t_0} F_x(t) + \hat{y} \lim_{t \rightarrow t_0} F_y(t) + \hat{z} \lim_{t \rightarrow t_0} F_z(t) \quad (1-8)$$

可见, 在直角坐标系内, 求矢性函数的极限, 可归结为求其三个分量的数性函数的极限。

**定义:** 若矢性函数 $\vec{F}(t)$ 在 $t_0$ 点的某个邻域内有定义, 而且有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0) \quad (1-9)$$

则称  $\vec{F}(t)$  在  $t = t_0$  处连续。若  $\vec{F}(t)$  在  $(t_1, t_2)$  区间的每一点上都连续, 则称  $\vec{F}(t)$  在此区间连续。不难看出, 矢性函数在某点或某区间内连续的充要条件是它的每个分量在此区间都连续。

### 三. 矢性函数的导数与微分

定义: 设矢性函数  $\vec{F}(t)$  在  $(t_1, t_2)$  上连续, 且  $t$  和  $t + \Delta t$  都在此区间内, 如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \quad (1-10)$$

存在, 则称  $\vec{F}(t)$  在  $t$  处是可导的。这个极限值称为  $\vec{F}(t)$  在  $t$  处的导数, 简称导矢, 记作  $d\vec{F}/dt$  或  $\vec{F}'(t)$ , 即

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \quad (1-11)$$

若  $\vec{F}(t)$  以直角坐标式给出

$$\vec{F}(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t)$$

代入式(1-11), 得

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{F_x(t + \Delta t) - F_x(t)}{\Delta t} \hat{x} + \frac{F_y(t + \Delta t) - F_y(t)}{\Delta t} \hat{y} + \frac{F_z(t + \Delta t) - F_z(t)}{\Delta t} \hat{z} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta F_x(t)}{\Delta t} \right] \hat{x} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta F_y(t)}{\Delta t} \right] \hat{y} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta F_z(t)}{\Delta t} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

上式的每一分量均符合数性函数的导数定义, 可写成

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \frac{dF_x(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dF_y(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dF_z(t)}{dt} \hat{z} \quad (1-12)$$

可见, 对矢性函数求导数, 在直角坐标系下可以归结为求其三个分量的数性函数导数的矢量和, 结果仍为矢量。例如图1-3所示的圆柱螺旋线的矢量方程为

$$\vec{r}(\varphi) = \hat{x}a \cos \varphi + \hat{y}a \sin \varphi + \hat{z}b\varphi$$

则其导矢为

$$\vec{r}'(\varphi) = \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = -\hat{x}a \sin \varphi + \hat{y}a \cos \varphi + \hat{z}b$$

设矢性函数  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ,  $\vec{E} = \vec{E}(t)$  及数性函数  $f = f(t)$  在  $t$  的某个范围内可导, 则下列公式在该范围内成立

$$1. \quad \frac{d}{dt} \vec{C} = 0 \quad (\vec{C} \text{ 为常矢}) \quad (1-13a)$$

$$2. \quad \frac{d}{dt} (\vec{F} \pm \vec{E}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \pm \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (1-13b)$$

$$3. \quad \frac{d}{dt} (c\vec{F}) = c \frac{d\vec{F}}{dt} \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-13c)$$

$$4. \quad \frac{d}{dt}(f\vec{F}) = \vec{F} \frac{df}{dt} + f \frac{d\vec{F}}{dt} \quad (1-13d)$$

$$5. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{E}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{E} \quad (1-13e)$$

$$6. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{E}) = \vec{F} \times \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{E} \quad (1-13f)$$

$$7. \quad \text{若 } \vec{F} = \vec{F}(u), \text{ 而 } u = u(t), \text{ 则有 } \frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{du} \frac{du}{dt} \quad (1-13g)$$

导矢的几何意义如下：设  $\vec{F}(t)$  为一起点固定的变矢， $M$  和  $N$  是矢端曲线  $l$  上的两点，如图 1-4 所示，则  $\vec{MN} = \Delta\vec{F} = \vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)$  为割线  $MN$  上的一个矢量，用  $\Delta t$  除上式所得的矢量

$$\frac{\vec{MN}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \quad (1-14)$$

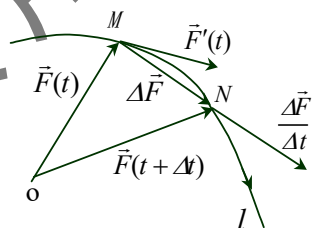


图1-4 矢量的导数

仍位于割线  $MN$  上。当  $\Delta t > 0$  时，该矢量的方向与  $\Delta\vec{F}$  一致，指向  $l$  的正方向（即  $t$  值增大的方向）；当  $\Delta t < 0$  时，其方向与  $\Delta\vec{F}$  相反，但因此时  $\Delta\vec{F}$  指向  $l$  的负方向，从而上式所表示的矢量仍是指向  $l$  的正方向。当  $\Delta t \rightarrow 0$  时，由于割线  $MN$  绕点  $M$  转动，且以点  $M$  处的切线为其极限位置。此时，在割线上的矢量  $\Delta\vec{F}/\Delta t$  的极限位置自然也就在此切线上。此时式 (1-14) 就变成了导矢的定义式 (1-11)。由此可知，导矢  $d\vec{F}/dt$  在几何意义上表示  $\vec{F}(t)$  的矢端曲线  $l$  上  $M$  点处的切线上的一个矢量，其方向指向  $t$  增大的一方。

定义：设有矢性函数  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ，我们把

$$d\vec{F} = \vec{F}'(t)dt \quad (1-15)$$

称为矢性函数  $\vec{F}(t)$  在  $t$  处的微分。

由于微分  $d\vec{F}$  是导矢  $\vec{F}'(t)$  与增量  $dt$  的乘积，所以它是一个矢量。它和导矢一样，在点  $M$  处与曲线  $l$  相切，但其指向：当  $dt > 0$  时，与  $\vec{F}'(t)$  的方向一致；而当  $dt < 0$  时，则与  $\vec{F}'(t)$  的方向相反，如图 1-5 所示。 $d\vec{F}$  的直角坐标表示式可由式 (1-15) 求得

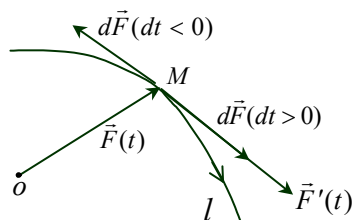


图1-5 矢量的微分

$$d\vec{F} = \vec{F}'(t)dt = F'_x(t)dt\hat{x} + F'_y(t)dt\hat{y} + F'_z(t)dt\hat{z}$$

$$= dF_x\hat{x} + dF_y\hat{y} + dF_z\hat{z}$$

模值为

$$|d\vec{F}| = \sqrt{(dF_x)^2 + (dF_y)^2 + (dF_z)^2}$$

特别指出, 矢径函数  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$  的微分为

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

其模值为

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

另一方面, 由数学分析的曲线微分知识可知, 对于曲线  $l$  的弧长微分  $dl$  有

$$dl = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

比较上面两式, 有

$$|d\vec{r}| = |dl|$$

和

$$\frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{|d\vec{r}|}{|dl|} \vec{e}_l = \vec{e}_l \quad (1-16)$$

其中  $\vec{e}_l$  是曲线  $l$  上指向正方向的单位矢量。上式说明, 矢径函数对其矢端曲线弧长的导数为曲线上的单位矢量。

#### 四. 矢性函数的积分

矢性函数的积分与数性函数的积分类似, 也分为不定积分和定积分两种。

**定义:** 若  $\vec{A}'(t) = \vec{F}(t)$ , 则称  $\vec{A}(t)$  为  $\vec{F}(t)$  的一个原函数,  $\vec{F}(t)$  的原函数的集合叫做  $\vec{F}(t)$  的不定积分, 记作

$$\int \vec{F}(t) dt \quad (1-17)$$

和数性函数一样, 若已知  $\vec{A}(t)$  是  $\vec{F}(t)$  的一个原函数, 则有

$$\int \vec{F}(t) dt = \vec{A}(t) + \vec{C} \quad (\vec{C} \text{ 为任意常矢}) \quad (1-18)$$

由于矢性函数的不定积分和数性函数的不定积分在定义上完全类似, 由此, 数性函数不定积分的基本性质和运算法则对矢性函数仍然成立, 如

$$1. \quad \int c\vec{F}(t) dt = c \int \vec{F}(t) dt \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-19a)$$

$$2. \quad \int \vec{C} \cdot \vec{F}(t) dt = \vec{C} \cdot \int \vec{F}(t) dt \quad (\vec{C} \text{ 为常矢}) \quad (1-19b)$$

$$3. \quad \int \vec{C} \times \vec{F}(t) dt = \vec{C} \times \int \vec{F}(t) dt \quad (\vec{C} \text{ 为常矢}) \quad (1-19c)$$

$$4. \quad \int [\vec{F}(t) \pm \vec{E}(t)] dt = \int \vec{F}(t) dt \pm \int \vec{E}(t) dt \quad (1-19d)$$

$$5. \quad \text{若 } \vec{F}(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t) \text{ 则有}$$

$$\int \vec{F}(t) dt = \hat{x} \int F_x(t) dt + \hat{y} \int F_y(t) dt + \hat{z} \int F_z(t) dt \quad (1-19e)$$

**定义:** 设矢性函数  $\vec{F}(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上连续, 则  $\vec{F}(t)$  在  $[T_1, T_2]$  上的**定积分**是指下面形式的极限

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{F}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\xi_i) \Delta t_i \quad (1-20)$$

其中  $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T_2$ ,  $\xi_i$  为区间  $[t_{i-1}, t_i]$  内的一点,

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}; \quad \lambda = \max \Delta t_i \quad [i = 1, 2, \cdots n]$$

可以看出, 矢性函数定积分的定义也和数性函数的完全类似。由此, 也相应地具有数性函数定积分的基本性质和运算法则。例如

若  $\vec{A}(t)$  是连续函数  $\vec{F}(t)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的一个原函数, 则

$$\int_{T_1}^{T_2} \vec{F}(t) dt = \vec{A}(T_2) - \vec{A}(T_1) \quad (1-21)$$

此外, 将矢性函数不定积分性质(1-19)各式中的不定积分符号改为定积分符号, 就可以用于定积分运算。

在本节中, 我们仅讨论了一元矢性函数(即单自变量函数)的概念和运算方法。对于多元矢性函数的情况, 读者可根据上述方法自行推证, 其结果与多元数性函数是完全对应的。例如, 在直角坐标系内, 若  $x, y, z$  是三个相互独立的坐标变量, 对于三元矢性函数

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ , 有

偏导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x + \Delta x, y, z) - \vec{F}(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x + \Delta x, y, z) - F_x(x, y, z)}{\Delta x} \hat{x} \\ &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_y(x + \Delta x, y, z) - F_y(x, y, z)}{\Delta x} \hat{y} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_z(x + \Delta x, y, z) - F_z(x, y, z)}{\Delta x} \hat{z} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{z} \end{aligned}$$

全微分:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz = \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{z} \right] dx \\ &\quad + \left[ \frac{\partial F_x}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \hat{z} \right] dy + \left[ \frac{\partial F_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \hat{z} \right] dz \end{aligned}$$

## § 1.2 正交曲线坐标系

### 一、正交曲线坐标系的概念

在直角坐标系中, 空间任意一点  $M$  可以用一组有序坐标数  $(x, y, z)$  唯一确定, 并记作

$$M(x, y, z)$$

如果我们将点  $M$  的位置用另外三个有序数  $u_1, u_2, u_3$  来表示, 记作

$$M(u_1, u_2, u_3)$$

若这三个有序数与  $M$  点在直角坐标系中的坐标  $x, y, z$  有单值函数关系:

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x, y, z) \\u_2 &= u_2(x, y, z) \\u_3 &= u_3(x, y, z)\end{aligned}\quad (1-22)$$

反过来,  $x, y, z$  与  $u_1, u_2, u_3$  也是单值函数关系:

$$\begin{aligned}x &= x(u_1, u_2, u_3) \\y &= y(u_1, u_2, u_3) \\z &= z(u_1, u_2, u_3)\end{aligned}\quad (1-23)$$

则称  $u_1, u_2, u_3$  为广义坐标系下  $M$  点的 **曲线坐标**。

容易看出, 当  $c_1, c_2, c_3$  为任意常数时, 下面三个方程

$$\begin{aligned}u_1(x, y, z) &= c_1 \\u_2(x, y, z) &= c_2 \\u_3(x, y, z) &= c_3\end{aligned}\quad (1-24)$$

表示三族等值曲面, 称为**广义坐标曲面**。由于  $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)$  均为单值函数, 所以对空间的每一点, 每族等值面中都只能各有一个等值面经过。可见, 空间任意一点都对应三个等值曲面, 该点是三曲面的交点。

两坐标曲面相交所成的曲线称为**坐标曲线**。如曲面  $u_2 = c_2$  和  $u_3 = c_3$  相交的交线方程为

$$\begin{cases} u_2(x, y, z) = c_2 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}$$

在此交线上,  $u_2$  和  $u_3$  值固定不变, 而  $u_1$  的值是沿曲线单值变化的, 因此, 称它为  $u_1$  坐标曲线, 或简称  $u_1$  线。同理

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

分别为  $u_2$  坐标曲线和  $u_3$  坐标曲线, 如图1-6所示。

若过任意点  $M$  的三条坐标曲线都相互正交 (即三条坐标曲线在该点的切线两两相互垂直), 此时, 相应的各坐标曲面也相互正交 (即各坐标曲面在相交点处的法线相互垂直)。在选定原点后, 就组成了一个广义的正交曲线坐标系。当给定式(1-22)和(1-23)的具体关系后, 坐标面的形式被确定, 广义坐标系变成一种具体的坐标系。其中, 直角坐标系是三个坐标曲面都是平面的最简单情况。其它具体的坐标系, 如圆柱坐标系、球面坐标系等, 一般是按其某一个坐标面的形状来命名。

## 二. 单位矢量

为了在广义正交曲线坐标系中表示矢量, 定义  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  为点  $M$  处的切线单位矢量, 也称为  $M$  点处的**坐标单位矢量**。这三个单位矢量的模值均为1, 在  $M$  点分别与  $u_1, u_2, u_3$  线相切, 正方向指向  $u_1, u_2, u_3$  增加的方向。由坐标线正交的定义可知, 这三个单位坐标矢量是相互垂直的, 有

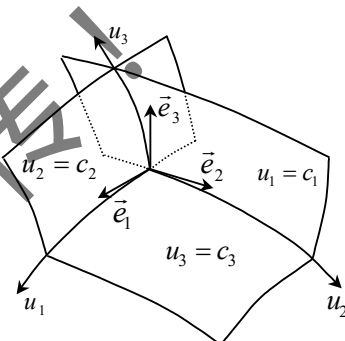


图1-6 广义坐标系

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \quad (1-25)$$

$$\text{和} \quad \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \quad (1-26)$$

一般说来, 坐标单位矢量  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  的方向随  $M$  点的位置而变化, 因此, 它们是  $M$  点坐标  $u_1, u_2, u_3$  的函数。但在直角坐标系中, 三个坐标单位矢量  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  却是模值和方向都不变的常矢。

坐标单位矢量也可以由点的矢径函数定义。设空间任意点  $M(u_1, u_2, u_3)$  的矢径函数为

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$$

在过  $M$  点的  $u_1$  坐标线上,  $u_2, u_3$  都是常数, 而  $u_1$  是变量, 所以  $u_1$  坐标线是  $\vec{r}(u_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3)$  的一条矢端曲线。若取偏导数  $\partial \vec{r} / \partial u_1$ , 由前面所讨论的矢量导数几何意义可知, 这表示一个与  $M$  点  $u_1$  坐标线相切的矢量, 且指向  $u_1$  增加的方向。将  $\partial \vec{r} / \partial u_1$  除以它的模  $|\partial \vec{r} / \partial u_1|$ , 得到一个单位矢量, 这恰恰是前面所定义的  $\hat{e}_1$ , 即

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{r} / \partial u_1}{|\partial \vec{r} / \partial u_1|} \quad (1-27)$$

记

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \quad (1-28)$$

则有

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \vec{r} / \partial u_1}{h_1} \quad (\text{或记} \quad \partial \vec{r} / \partial u_1 = h_1 \hat{e}_1) \quad (1-29)$$

同理,  $\hat{e}_2, \hat{e}_3$  分别是与  $u_2, u_3$  线相切的坐标单位矢量, 有

$$h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right| \quad (1-30)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\partial \vec{r} / \partial u_2}{h_2}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\partial \vec{r} / \partial u_3}{h_3} \quad (1-31)$$

$h_1, h_2, h_3$  称为**拉梅系数** (Lame') 或**度量因子**, 一般情况下, 它们是  $M$  点坐标  $(u_1, u_2, u_3)$  的函数。上面的六个式子也可以统一记作

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|, \quad \hat{e}_i = \frac{\partial \vec{r} / \partial u_i}{h_i} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1-32)$$

在直角坐标系中, 矢径函数记作:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1-33)$$

在正交曲线坐标系中, 此矢径函数的  $x, y, z$  均是曲线坐标  $u_1, u_2, u_3$  的函数, 即

$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$



$$y = y(u_1, u_2, u_3) \quad (1-34)$$

$$z = z(u_1, u_2, u_3)$$

将式(1-33)和(1-34)代入式(1-32), 并注意在  $u_i$  坐标线上,  $u_i$  是变量而另外两个坐标量是常数,  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  是常矢, 则有

$$\begin{aligned} h_i &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u_i} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \hat{z} \right| \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1-35)$$

上式表明, 拉梅系数可以通过矢径函数计算。

我们知道, 空间曲线的弧微分有如下公式

$$dl = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (1-36)$$

如果我们讨论  $u_i$  坐标线上的弧微分, 因另外两个坐标保持不变, 则有

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u_i} du_i, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u_i} du_i$$

代入式(1-36), 可得到  $u_i$  坐标线上的弧微分  $dl_i$  为

$$\begin{aligned} dl_i &= \pm \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u_i} du_i \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u_i} du_i \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} du_i \end{aligned} \quad (1-37)$$

与式(1-35)比较, 有

$$dl_i = h_i du_i \quad (1-38)$$

上式表明了拉梅系数的几何意义: 拉梅系数  $h_i$  是  $M$  点处曲线坐标  $u_i$  的微分  $du_i$  与该坐标线  $u_i$  上弧微分  $dl_i$  的比例系数。

### 三. 线元、面元和体元

在数性函数的微积分中, 我们经常用到线元  $dl$ 、面元  $ds$  和体元  $d\tau$  这几个微分量, 下面介绍正交曲线坐标系下上述微分量的定义。

#### 1. 矢量线元

设  $M(u_1, u_2, u_3)$  和  $M'(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$  是正交曲线系空间的邻近两点, 从  $M$  点向  $M'$  点作一小矢量  $d\vec{l}$ , 如图1-7所示。当  $du_1, du_2, du_3$  为无穷小量时,  $d\vec{l}$  称为  $M$  点处的 **矢量线元**。因  $M$  点和  $M'$  点的矢径为  $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$  和  $\vec{r}(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ , 所以  $d\vec{l}$  就是矢径函数  $\vec{r}$  的全微分增量  $d\vec{r}$ , 按全微分计算法则, 有

$$d\vec{l} = d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \quad (1-39)$$

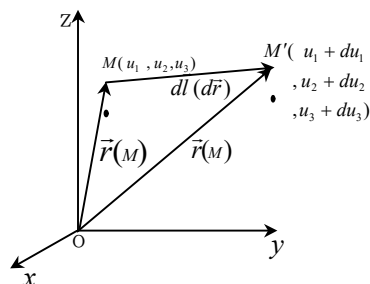


图1-7 矢量线元

将  $\partial \vec{r} / \partial u_i = h_i \hat{e}_i$  代入上式, 得

$$d\vec{l} = h_1 du_1 \hat{e}_1 + h_2 du_2 \hat{e}_2 + h_3 du_3 \hat{e}_3 = dl_1 \hat{e}_1 + dl_2 \hat{e}_2 + dl_3 \hat{e}_3 \quad (1-40)$$

$d\vec{l}$  的模值为

$$dl = |d\vec{l}| = \sqrt{(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2} \quad (1-41)$$

其中  $dl_i = h_i du_i = \hat{e}_i \cdot d\vec{l}$  是矢量线元  $d\vec{l}$  在  $M$  点  $u_i$  坐标线上的投影。

## 2. 矢量面元

设  $\hat{n}$  是有向曲面  $s$  上点  $M$  处的法向单位矢量,  $ds$  是该点处的小面积元, 如图1-8 所示, 则

$$d\vec{s} = \hat{n} ds \quad (1-42)$$

称为  $M$  点的**矢量面元**。

面元的法矢  $\hat{n}$  可以由其方向余弦和坐标单位矢量表示为

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{e}_1 + \cos \beta \hat{e}_2 + \cos \gamma \hat{e}_3$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $\hat{n}$  与  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  正方向的夹角。式(1-42)可以写成

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \cos \alpha ds \hat{e}_1 + \cos \beta ds \hat{e}_2 + \cos \gamma ds \hat{e}_3 \\ &= ds_1 \hat{e}_1 + ds_2 \hat{e}_2 + ds_3 \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (1-43)$$

$ds_i$  是矢量面元  $d\vec{s}$  在以  $\hat{e}_i$  为法线的坐标面上的投影, 我们可以将  $ds_i$  取成该坐标面上的两对坐标线元所成的矩形面元, 即

$$ds_1 = dl_2 dl_3 = h_2 du_2 h_3 du_3$$

$$ds_2 = dl_3 dl_1 = h_3 du_3 h_1 du_1$$

$$ds_3 = dl_1 dl_2 = h_1 du_1 h_2 du_2$$

代入式(1-43), 有

$$d\vec{s} = (h_2 h_3 du_2 du_3) \hat{e}_1 + (h_1 h_3 du_1 du_3) \hat{e}_2 + (h_1 h_2 du_1 du_2) \hat{e}_3 \quad (1-44)$$

## 3. 体元

在正交曲线坐标系中, 以  $M$  点处三条坐标线上的线元  $dl_1, dl_2, dl_3$  为棱做一个六面体, 称为  $M$  点处的**体积元**  $d\tau$ , 如图1-9所示。  $d\tau$  的体积为

$$d\tau = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 du_1 h_2 du_2 h_3 du_3 \quad (1-45)$$

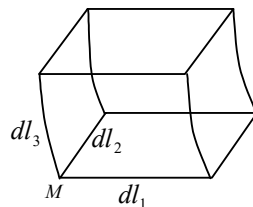


图1-9 体元

## 四、三种常用坐标系

直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系是三种最基本和最常用的正交坐标系, 下面结合广义正交曲线坐标系的概念, 对上述三种坐标系作简单的介绍。

### 1. 直角坐标系

直角坐标系是一种最基本的正交曲线坐标系，并经常被做为其它坐标系的基础或参照。直角坐标系的三个坐标面都是平面，三条坐标线都是直线，空间任意点的三个坐标单位矢量的方向也都保持恒定。直角坐标系与广义正交曲线系的参量关系归纳如下：

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z \quad (1-45a)$$

$$\hat{e}_1 = \hat{x}, \quad \hat{e}_2 = \hat{y}, \quad \hat{e}_3 = \hat{z} \quad (1-45b)$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 \quad (1-45c)$$

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz \quad (1-45d)$$

$$ds_1 = dydz, \quad ds_2 = dx dz, \quad ds_3 = dx dy \quad (1-45e)$$

$$d\tau = dx dy dz \quad (1-45f)$$

## 2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系中，空间点 $M$ 由三个有序数 $(\rho, \varphi, z)$ 决定，它们与广义坐标的对应关系为

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \varphi, \quad u_3 = z \quad (1-46)$$

如图1-10所示： $\rho$ 是 $M$ 点到 $oz$ 轴的距离， $\varphi$ 是过 $M$ 点且以 $oz$ 轴为界的半平面与 $xoz$ 正半平面的夹角； $z$ 是点 $M$ 到 $xoy$ 平面的距离，与直角坐标系中的 $z$ 坐标相同。坐标量 $\rho, \varphi, z$ 的定义域分别为：

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < +\infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \\ -\infty &< z < +\infty \end{aligned} \quad (1-47)$$

过点 $M(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ 的三个圆柱坐标曲面分别为：

$\rho = \rho_0$ ——以 $oz$ 为轴， $\rho_0$ 为半径的圆柱面；

$\varphi = \varphi_0$ ——过 $M$ 点且以 $oz$ 为界的半平面；

$z = z_0$ ——过 $M$ 点且平行于 $xoy$ 的平面。

三条坐标曲线分别为：

$\rho$ 线：方程是  $\begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ z = z_0 \end{cases}$  垂直 $oz$ 轴且过 $M$ 点的径向射线；

$\varphi$ 线：方程是  $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ z = z_0 \end{cases}$  过 $M$ 点且半径为 $\rho_0$ 的圆；

$z$ 线：方程是  $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}$  过 $M$ 点且与 $oz$ 轴平行的直线。

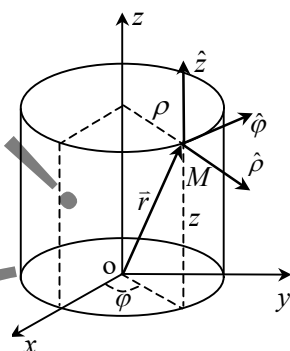


图1-10 圆柱坐标系

若空间一点同时用直角坐标和圆柱坐标来表示，即

$$M(x, y, z) = M(\rho, \varphi, z)$$

则两种坐标的变换关系为

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (1-48a)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z \quad (1-48b)$$

点M的矢径  $\vec{r}$  为

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \\ &= \hat{x}\rho \cos \varphi + \hat{y}\rho \sin \varphi + \hat{z}z \end{aligned} \quad (1-49)$$

由上式和式(1-35)，可以计算出圆柱坐标系的拉梅系数为

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \left| \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \right| = 1 \quad (1-50a)$$

$$h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \left| -\hat{x}\rho \sin \varphi + \hat{y}\rho \cos \varphi \right| = \rho \quad (1-50b)$$

$$h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = \left| \hat{z} \right| = 1 \quad (1-50c)$$

圆柱坐标系的坐标单位矢量可以简记成  $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ ，它们的始点在M点，分别在三条坐标线的切线方向上，指向  $\rho, \varphi, z$  增加的方向。具体地讲： $\hat{\rho}$  为径向向外方向， $\hat{\varphi}$  为俯视逆时针方向， $\hat{z}$  指向  $z$  轴正方向。

$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  与直角坐标系单位矢量  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  的变换式为

$$\hat{e}_1 = \hat{\rho} = \frac{\partial \vec{r} / \partial \rho}{h_1} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \quad (1-51a)$$

$$\hat{e}_2 = \hat{\varphi} = \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{h_2} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \quad (1-51b)$$

$$\hat{e}_3 = \hat{z} = \frac{\partial \vec{r} / \partial z}{h_3} = \hat{z} \quad (1-51c)$$

对上式反演，得到

$$\hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi \quad (1-52a)$$

$$\hat{y} = \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi \quad (1-52b)$$

$$\hat{z} = \hat{z} \quad (1-52c)$$

圆柱坐标系的坐标单位矢量之间彼此正交且成右旋关系,即

$$\hat{\rho} \cdot \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cdot \hat{z} = \hat{\rho} \cdot \hat{z} = 0 \quad (1-53a)$$

$$\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}, \quad \hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho}, \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi} \quad (1-53b)$$

式(1-49)是用直角坐标系的坐标单位矢量来表示M点的位置矢量（即矢径） $\vec{r}$ ，如果用圆柱坐标系中的坐标单位矢量表示，不难看出

$$\vec{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z \quad (1-54)$$

圆柱坐标系中的线元  $d\vec{l}$ 、弧微分  $dl_i$ 、面元  $d\vec{s}$  和体元  $d\tau$  分别为

$$dl_1 = d\rho, \quad dl_2 = \rho d\varphi, \quad dl_3 = dz \quad (1-55a)$$

$$d\vec{l} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\varphi}\rho d\varphi + \hat{z}dz \quad (1-55b)$$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \hat{\rho}ds_1 + \hat{\varphi}ds_2 + \hat{z}ds_3 \\ &= \hat{\rho}\rho d\varphi dz + \hat{\varphi}d\rho dz + \hat{z}\rho d\varphi d\rho \end{aligned} \quad (1-55c)$$

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1-55d)$$

注：圆柱坐标系中，坐标  $\rho$  和坐标单位矢量  $\hat{\rho}$  有时也用  $r$  和  $\hat{r}$  表示。

### 3. 球坐标系.

球坐标系中空间点  $M$  由三个有序数  $(r, \theta, \varphi)$  决定，它们与广义坐标的对应关系为

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \varphi \quad (1-56)$$

如图1-11所示： $r$  是坐标原点到  $M$  点距离， $\theta$  是矢径  $\vec{r}$  与  $z$  轴正方向的夹角， $\varphi$  是过  $M$  点且以  $oz$  轴为界的半平面与  $xoz$  正半平面的夹角，与圆柱坐标系中的  $\varphi$  坐标相同。坐标量  $r, \theta, \varphi$  的定义域分别为：

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < +\infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (1-57)$$

过点  $M(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  的三个坐标曲面分别为：

$r = r_0$  —— 以  $OM$  (即  $r_0$ ) 为半径的球面，

$\theta = \theta_0$  —— 母线与  $oz$  轴夹角为  $\theta_0$  的锥面；

$\varphi = \varphi_0$  —— 过  $M$  点且与  $oz$  轴为界的半平面。

三条坐标曲线分别为

$r$  线：方程是  $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}$  由坐标原点指向  $M$  点的径向射线；

$\theta$  线：方程是  $\begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}$   $r = r_0$  球面上过  $M$  点的经线弧；

$\varphi$  线：方程是  $\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$   $r = r_0$  球面上过  $M$  点的纬线圆。

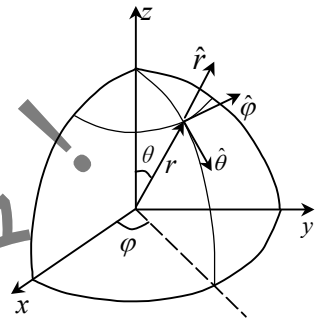


图1-11 球坐标系

若空间一点同时用直角坐标和球坐标来表示，即

$$M(x, y, z) = M(r, \theta, \varphi)$$

则两种坐标的变换关系为

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1-58a)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (1-58b)$$

点 $M$ 的矢径 $\vec{r}$ 为

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \\ &= \hat{x}r\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}r\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}r\cos\theta \end{aligned} \quad (1-59)$$

由上式和式(1-35)可以计算出球坐标系的拉梅系数为

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \left| \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta \right| = 1 \quad (1-60a)$$

$$h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \left| \hat{x}r\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}r\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}r\sin\theta \right| = r \quad (1-60b)$$

$$h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \left| -\hat{x}r\sin\theta\sin\varphi + \hat{y}r\sin\theta\cos\varphi \right| = r\sin\theta \quad (1-60c)$$

球坐标系的坐标单位矢量可以简记成 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ ，它们的始点在 $M$ 点，分别在三条坐标线的切线方向上，指向 $r, \theta, \varphi$ 增加的方向。具体地讲： $\hat{r}$ 为径向向外方向， $\hat{\theta}$ 为过 $M$ 点经线的切线向下方向， $\hat{\varphi}$ 为俯视逆时针方向。

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ 与直角坐标系单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 的变换式为

$$\vec{e}_1 = \hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta \quad (1-61a)$$

$$\vec{e}_2 = \hat{\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta \quad (1-61b)$$

$$\vec{e}_3 = \hat{\varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\hat{x}\sin\theta\sin\varphi + \hat{y}\sin\theta\cos\varphi \quad (1-61c)$$

对上式反演，得到

$$\hat{x} = \hat{r}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \hat{\varphi}\sin\varphi \quad (1-62a)$$

$$\hat{y} = \hat{r}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi \quad (1-62b)$$

$$\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta \quad (1-62c)$$

结合式(1-51)、(1-52)两式，还可以得到球坐标系与圆柱坐标系的坐标单位矢量互换关系

$$\hat{r} = \hat{\rho}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta \quad (1-63a)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\rho}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta \quad (1-63b)$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\phi} \quad (1-63c)$$

和

$$\hat{\rho} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta \quad (1-64a)$$

$$\hat{\phi} = \hat{\phi} \quad (1-64b)$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \quad (1-64c)$$

球坐标系的坐标单位矢量之间彼此正交且成右旋关系，即

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = \hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0 \quad (1-65a)$$

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}, \quad \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta} \quad (1-65b)$$

式(1-59)是用直角坐标系的坐标单位矢量来表示 $M$ 点的位置矢量（即矢径） $\vec{r}$ ，如果用球坐标系中的坐标单位矢量表示，不难看出

$$\vec{r} = \hat{r}r \quad (1-66)$$

球坐标系中的线元 $d\vec{l}$ 、弧微分 $dl_i$ 、面元 $d\vec{s}$ 和体元 $d\tau$ 分别为

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\theta, \quad dl_3 = r \sin \theta d\phi \quad (1-67a)$$

$$d\vec{l} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\phi \quad (1-67b)$$

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \hat{r} ds_1 + \hat{\theta} ds_2 + \hat{\phi} ds_3 \\ &= \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi + \hat{\theta} r \sin \theta dr d\phi + \hat{\phi} r dr d\theta \end{aligned} \quad (1-67c)$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1-67d)$$

## 五、矢量的变换

在描述一个物理过程时，常常需要将物理量从一种坐标系转换到另一坐标系中，或者同时用两种坐标系来表述。因此，必须清楚矢量在不同坐标系间的相互转换。

假设空间某点有一矢量 $\vec{F}$ ，它在直角坐标系中表示为

$$\vec{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z \quad (1-68)$$

该矢量在另外一个正交曲线坐标系中表示为

$$\vec{F} = \hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3 \quad (1-69)$$

用 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 分别与 $\vec{F}$ 的表达式(1-68)进行点积运算，即将 $\vec{F}$ 向 $M$ 点处的三个坐标单位矢量 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 上投影，就得到该曲线坐标系中矢量 $\vec{F}$ 的各分量

$$\begin{aligned} F_1 &= \hat{e}_1 \cdot \vec{F} = \hat{e}_1 \cdot \hat{x}F_x + \hat{e}_1 \cdot \hat{y}F_y + \hat{e}_1 \cdot \hat{z}F_z \\ F_2 &= \hat{e}_2 \cdot \vec{F} = \hat{e}_2 \cdot \hat{x}F_x + \hat{e}_2 \cdot \hat{y}F_y + \hat{e}_2 \cdot \hat{z}F_z \\ F_3 &= \hat{e}_3 \cdot \vec{F} = \hat{e}_3 \cdot \hat{x}F_x + \hat{e}_3 \cdot \hat{y}F_y + \hat{e}_3 \cdot \hat{z}F_z \end{aligned} \quad (1-70)$$

反之，如果已知矢量 $\vec{F}$ 在某曲线坐标中的表达式，用 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分别与 $\vec{F}$ 的表达式(1-69)进行点积运算，即将 $\vec{F}$ 向 $M$ 点处的三个坐标单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 上投影，就得到矢量 $\vec{F}$ 在直角坐标系中的各分量

$$F_x = \hat{x} \cdot \vec{F} = \hat{x} \cdot \hat{e}_1 F_1 + \hat{x} \cdot \hat{e}_2 F_2 + \hat{x} \cdot \hat{e}_3 F_3$$

$$F_y = \hat{y} \cdot \vec{F} = \hat{y} \cdot \hat{e}_1 F_1 + \hat{y} \cdot \hat{e}_2 F_2 + \hat{y} \cdot \hat{e}_3 F_3 \quad (1-71)$$

$$F_z = \hat{z} \cdot \vec{F} = \hat{z} \cdot \hat{e}_1 F_1 + \hat{z} \cdot \hat{e}_2 F_2 + \hat{z} \cdot \hat{e}_3 F_3$$

以圆柱坐标系为例，有

$$\begin{aligned} F_\rho &= \hat{\rho} \cdot \vec{F} = (\hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi) \cdot (\hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z) = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi \\ F_\varphi &= \hat{\varphi} \cdot \vec{F} = (-\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi) \cdot (\hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z) = -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi \\ F_z &= \hat{z} \cdot \vec{F} = \hat{z} \cdot (\hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z) = F_z \end{aligned} \quad (1-72)$$

所以， $\vec{F}$  在圆柱坐标系内的矢量表达式为：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{\rho} F_\rho + \hat{\varphi} F_\varphi + \hat{z} F_z \\ &= \hat{\rho} (F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi) + \hat{\varphi} (-F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi) + \hat{z} F_z \end{aligned} \quad (1-73)$$

如果  $\vec{F}$  是常矢，矢量转换到此已完成；但若  $\vec{F}$  为变矢， $F_x, F_y, F_z$  是坐标变量  $x, y, z$  的函数，往往需要用两个坐标系的坐标变量关系式(1-58)将上式的  $F_x, F_y, F_z$  中的  $x, y, z$  变换成  $\rho, \varphi, z$ 。

用相同的方法可以得到从圆柱坐标系向直角系变换的表达式：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z \\ &= \hat{x} (F_\rho \cos \varphi - F_\varphi \sin \varphi) + \hat{y} (F_\rho \sin \varphi + F_\varphi \cos \varphi) + \hat{z} F_z \end{aligned} \quad (1-74)$$

直角坐标系和球坐标系间的变换表达式：

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{r} F_r + \hat{\theta} F_\theta + \hat{\varphi} F_\varphi \\ &= \hat{r} (F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi + F_z \cos \theta) \\ &\quad + \hat{\theta} (F_x \cos \theta \cos \varphi + F_y \cos \theta \sin \varphi - F_z \sin \theta) \\ &\quad + \hat{\varphi} (-F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi) \end{aligned} \quad (1-75)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \hat{x} F_x + \hat{y} F_y + \hat{z} F_z \\ &= \hat{x} (F_r \sin \theta \cos \varphi + F_\theta \cos \theta \cos \varphi - F_\varphi \sin \varphi) \\ &\quad + \hat{y} (F_r \sin \theta \sin \varphi + F_\theta \cos \theta \sin \varphi + F_\varphi \cos \varphi) \\ &\quad + \hat{z} (F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (1-76)$$

将式(1-73)~(1-76)与式(1-51)、(1-52)、(1-61)、(1-62)比较可以发现，矢量的分量变换关系式与相应坐标系的坐标单位矢量变换式是完全相似的，只需将其中单位矢量变换式中的坐标单位矢量换成对应的分量，就得到对应的分量变换式。

例1.1 一矢量  $\vec{A}$  在直角坐标系中的表达式为

$$\vec{A}(x, y, z) = -y\hat{x} + x\hat{y} - z\hat{z}$$

求： 1).  $\vec{A}$  在球坐标系的表达式  $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$ ；

2). 在直角坐标为(3, 4, 12)的点M处的  $\vec{A}(r, \theta, \varphi)_M$  的值。



解：1). 将  $A_x = -y = -r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $A_y = x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $A_z = -z = -r \cos \theta$  代入式(1-75)并整理, 得

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = -\hat{r} r \cos^2 \theta + \hat{\theta} r \cos \theta \sin \theta + \hat{\varphi} r \sin \theta$$

2). 利用球坐标与直角坐标的变换公式, 由  $M$  点的直角坐标值计算其球坐标值

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{12}{13}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} = \frac{5}{13}$$

代入上式, 得矢量  $\vec{A}$  在  $M$  点的球坐标表达式值。

2020 网络教学专用  
请勿外传!

## § 1.3 梯度、散度和旋度

### 一. 标量场与矢量场

如果在全部空间或部分空间的每一点, 都对应着某个物理量的一个确定值, 就说在这个空间里确定了该物理量的场。如果该物理量是数量, 就称这个场为**标量场**(或**数量场**); 若是矢量, 就称这个场为**矢量场**。如温度场、密度场、电位场等为标量场; 而力场、速度场、电场、磁场等为矢量场。

由标量场的定义可知, 分布在标量场中各点上的标量  $f$  与场点的位置有关。在给定的坐标系内, 若场点记作  $M(u_1, u_2, u_3)$ , 则  $f$  就成为  $M$  点坐标  $u_1, u_2, u_3$  的函数。因此, 一个标量场可以用一个标量函数(或称数性函数)表示, 记作

$$f = f(u_1, u_2, u_3) \quad \text{或} \quad f = f(M) \quad \text{或} \quad f = f(\vec{r}) \quad (1-77)$$

其中  $\vec{r}$  为点  $M$  的位置矢量。

在标量场中, 为了直观地研究物理量  $f$  在场中的分布状况, 常常需要考察场中物理量相同的点, 也就是使  $f(u_1, u_2, u_3)$  取相同数值的各点

$$f(u_1, u_2, u_3) = c \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-78)$$

这个方程在几何上一般表示一曲面, 也就是物理量的值相等的所有点构成一个空间曲面, 称为这个标量场的**等值面**, 式(1-78)称为标量场  $f$  的等值面方程, 式中  $c$  为该物理量的任意确定值, 每一个  $c$  值对应一个曲面, 不同的  $c$  值给出一组等值面, 空间每一点只能在一个等值面上, 这族等值面充满了整个标量场所在的空间, 而且各等值面互不相交。利用等值面的形状及疏密程度, 可以对其标量场的空间分布和变化有比较直观的了解。

在矢量场中, 分布在各点处的矢量  $\vec{F}$  是场中点  $M$  的函数, 即

$$\vec{F} = \vec{F}(M) \quad (1-79)$$

若在给定的坐标系中, 场点  $M$  的空间坐标为  $(u_1, u_2, u_3)$ , 或用位置矢量  $\vec{r}$  表示, 则此矢量场可以用矢性函数表示为

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}(u_1, u_2, u_3) = \vec{F}(\vec{r}) \\ &= \hat{e}_1 F_1(u_1, u_2, u_3) + \hat{e}_2 F_2(u_1, u_2, u_3) + \hat{e}_3 F_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (1-80)$$

在前面, 我们引入了等值面来形象和直观地描述标量场。对于矢量场, 则可以用它的**矢量线**对其进行形象描述。一个矢量场的矢量线是这样的曲线, 在它上面每一点  $M$  处的切线方向与该点矢量  $\vec{F}$  的方向相重合。

由场的单值性可知, 矢量场中的每一点均只能有一条矢量线通过, 即矢量线不会交叉。所有的矢量线构成一个矢量线族, 充满了整个矢量场所在的空间, 如图1-12所示。如电场中的电力线, 磁场中的磁力线, 流速场中的流线等, 都是矢量线的例子。

下面我们来讨论已知矢量场  $\vec{F}$  的表达式, 怎样求出其矢量线的方程:

若矢量场  $\vec{F}$  是一个已知场, 其表达式为

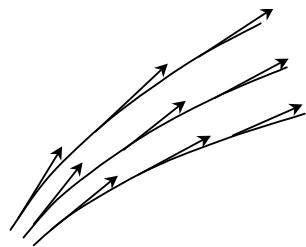


图1-12 矢量线

$$\vec{F} = \hat{e}_1 F_1(u_1, u_2, u_3) + \hat{e}_2 F_2(u_1, u_2, u_3) + \hat{e}_3 F_3(u_1, u_2, u_3) \quad (1-81)$$

设  $\vec{r}$  是场点  $M(u_1, u_2, u_3)$  的矢径函数, 曲线  $l$  是  $\vec{r}$  的矢端曲线。由矢性函数微分的几何意义可知, 矢径函数  $\vec{r}$  在  $M$  点的全微分

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \hat{e}_1 h_1 du_1 + \hat{e}_2 h_2 du_2 + \hat{e}_3 h_3 du_3 \end{aligned} \quad (1-82)$$

是一个与该点的矢端曲线  $l$  相切的矢量。如果设此矢端曲线  $l$  就是场  $\vec{F}$  过  $M$  点的矢量线, 则按矢量线的定义,  $l$  的切线方向上的矢量  $d\vec{r}$  应与该点的  $\vec{F}$  共线。两矢量共线(即平行)时, 应有式(1-81)和式(1-82)的对应分量成比例, 由此有

$$\frac{h_1 du_1}{F_1} = \frac{h_2 du_2}{F_2} = \frac{h_3 du_3}{F_2} \quad (1-83)$$

上式就是矢量线所满足的微分方程组, 解之, 可得到矢量线方程的通解。通解代表场  $\vec{F}$  的矢量线族, 如再利用过  $M$  点这个条件, 即可求出过  $M$  点的矢量线。

## 二. 标量场的方向导数和梯度

### 1. 方向导数

标量场中, 场函数  $f$  的分布情况可以借助等值面或等值线描述, 但这只是场的整体分布情况, 为了表示场在每一空间点上的变化情况, 需要引入方向导数和梯度的概念。

设  $M$  是标量场  $f$  中的一点, 从点  $M$  出发引一条射线  $\vec{l}$ , 在  $\vec{l}$  上取一邻近点  $M'$ , 记点  $M$  和点  $M'$  间的距离为  $\Delta l$ , 如图1-13所示。当  $M \rightarrow M'$  时, 若比式

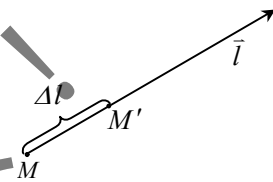


图1-13 方向导数

的极限存在, 则称它为函数  $f$  在点  $M$  处沿  $\vec{l}$  方向的**方向导数**, 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_M = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(M') - f(M)}{\Delta l} \quad (1-84)$$

可见, 方向导数是标量函数  $f$  在给定点处沿某个方向对距离的变化率。当  $\partial f / \partial l > 0$  时, 函数  $f$  的值是沿  $\vec{l}$  方向增加的;  $\partial f / \partial l < 0$  时, 函数  $f$  的值是沿  $\vec{l}$  方向减小的; 否则是不变的。

在正交曲线坐标系中, 设上述的点  $M$  和点  $M'$  的坐标分别为  $M(u_1, u_2, u_3)$  与  $M'(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, u_3 + \Delta u_3)$ , 由多元函数全增量的公式有

$$f(M') - f(M) = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} \Delta u_3 + \omega \Delta l$$

式中  $\omega$  为无穷小量, 当  $\Delta l \rightarrow 0$  时,  $\omega \rightarrow 0$ 。将上式代入式(1-84), 得

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_M = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{h_1 \Delta u_1}{\Delta l} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{h_2 \Delta u_2}{\Delta l} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \frac{h_3 \Delta u_3}{\Delta l} + \omega \right) \quad (1-85)$$

式中  $h_i \Delta u_i$  为  $\Delta l$  在坐标曲线  $u_i$  上的投影, 故  $h_i \Delta u_i / \Delta l$  等于  $\vec{l}$  对坐标单位矢量  $\hat{e}_i$  的方向余弦,

若用  $\alpha, \beta, \gamma$  分别表示  $M$  点处  $\vec{l}$  与  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  的夹角, 则

$$\frac{h_1 \Delta u_1}{\Delta l} = \cos \alpha \quad ; \quad \frac{h_2 \Delta u_2}{\Delta l} = \cos \beta \quad ; \quad \frac{h_3 \Delta u_3}{\Delta l} = \cos \gamma$$

代入式(1-85), 考虑当  $\Delta l \rightarrow 0$  时,  $\omega \rightarrow 0$ , 并略去下标  $M$ , 即可得到曲线坐标系中任意点上标量场  $f$  沿  $\vec{l}$  方向的方向导数表达式

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \cos \alpha + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \cos \beta + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \cos \gamma \quad (1-86)$$

## 2. 梯度

方向导数是标量函数在给定点沿某特定方向的变化率。从标量场中任一点出发, 都有无穷多个方向, 因此也就相对地存在着无穷多个方向导数, 如果利用点积运算法则将方向导数表达式(1-86)写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} &= \left( \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \cdot (\hat{e}_1 \cos \alpha + \hat{e}_2 \cos \beta + \hat{e}_3 \cos \gamma) \\ &= \vec{G} \cdot \hat{e}_l \end{aligned} \quad (1-87)$$

$$\text{其中} \quad \vec{G} = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \quad (1-88)$$

$$\hat{e}_l = \hat{e}_1 \cos \alpha + \hat{e}_2 \cos \beta + \hat{e}_3 \cos \gamma \quad (1-89)$$

$\hat{e}_l$  是  $\vec{l}$  方向上的单位矢量,  $\vec{G}$  在给定点上是一个方向固定的矢量。式(1-87)表明, 矢量  $\vec{G}$  在  $\vec{l}$  方向的投影正好等于函数  $f$  在该方向上的方向导数。因此,  $\vec{l}$  和  $\vec{G}$  方向一致时, 即  $\cos(\vec{G}, \vec{l}) = 1$  时, 方向导数取得最大值, 也就是

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\max} = |\vec{G}|$$

由此可见, 在场空间一点上, 矢量  $\vec{G}$  的方向就是函数  $f$  在该点变化率最大的方向, 模值  $|\vec{G}|$  正是此最大变化率的值。我们把  $\vec{G}$  称作函数  $f$  在给定点的**梯度**, 其定义可叙述如下:

若在标量场  $f$  中一点  $M$  处, 存在这样的矢量  $\vec{G}$ , 其方向为函数  $f$  在  $M$  点处变化率最大的方向, 其模值也正好是这个最大变化率的数值, 则称矢量  $\vec{G}$  为函数  $f$  在点  $M$  处的梯度, 记作  $\text{grad } f$ , 即

$$\text{grad } f = \vec{G} = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \quad (1-90)$$

由上面的定义可以得到梯度的几个主要性质:

1). 方向导数等于梯度矢量在该方向上的投影

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\text{grad } f) \cdot \hat{e}_l \quad (1-91)$$

2). 场中每一点  $M$  处的梯度, 垂直于过该点等值面, 且总指向函数  $f(\vec{r})$  增大的方向。

这是因为在等值面  $f(u_1, u_2, u_3) = c$  上, 函数  $f$  的值不变, 故在其上面任意点  $M$  处的切平

面内，任意方向  $\vec{l}_t$  上的方向导数必为零，即

$$\frac{\partial f}{\partial l_t} = (\text{grad } f) \cdot \hat{e}_{l_t} = 0$$

由上式点积为零可知， $\text{grad } f$  与该点切平面内的所有射线相垂直， $\text{grad } f$  与等值面  $f(u_1, u_2, u_3) = c$  垂直。又因函数  $f$  沿梯度方向的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l_G} = (\text{grad } f) \cdot \hat{e}_{l_G} = |\text{grad } f| > 0$$

这说明  $f$  沿梯度方向是增大的，即梯度指向函数增大的方向。

如果我们把标量场中每一点的梯度与场中之点一一对应起来，就得到一个由梯度矢量所构成的矢量场，称为此标量场  $f$  的梯度场。

### 3). 哈密顿 (Hamilton) 算子

根据梯度定义，我们将式(1-90)写成

$$\text{grad } f = \left( \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) f \quad (1-92)$$

我们定义一个矢量微分算符  $\nabla$

$$\nabla = \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \quad (1-93)$$

称为**哈密顿算子**，读作“del”或“nabla”。则式(1-92)可写成

$$\text{grad } f = \nabla f \quad (1-94)$$

上式表示，标量的梯度等于哈密顿算子对此标量函数的作用。哈密顿算子既是一个矢量，又是一个微分算符。 $\nabla$  作为矢量，它和函数的运算遵循矢量运算法则；而作为一个微分算符，它只对其后边的函数作用，实质是  $\nabla$  的各分量对其后边的函数求偏导，对其前边的函数不作用。因此， $\nabla f \neq f \nabla$ 。并且， $\nabla$  后边不得随意加写“ $\cdot$ ”或“ $\times$ ”，以免与  $\nabla$  算子的另外两种运算混淆。

梯度运算的实质是进行求导运算，所以有与求导十分类似的运算公式，如：

$$1 \quad \nabla c = 0 \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1-95a)$$

$$2 \quad \nabla(cf) = c \nabla f \quad (1-95b)$$

$$3 \quad \nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g \quad (1-95c)$$

$$4 \quad \nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g \quad (1-95d)$$

$$5 \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2} (g \nabla f - f \nabla g) \quad (1-95e)$$

$$6 \quad \nabla f(g) = f'(g) \nabla g \quad (1-95f)$$

例1.2 已知  $\vec{R}$  是点  $M'(x', y', z')$  指向点  $M(x, y, z)$  的相对位置矢量，即

$$\vec{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$$

其模值为

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

试证明

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla' \frac{1}{R}$$

证明:  $\nabla \frac{1}{R}$  表示将  $R$  中的  $x, y, z$  做为变量, 而  $x', y', z'$  做为常量进行梯度运算, 按照式(1-95f), 有

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{R} &= -\frac{1}{R^2} \nabla R = -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{x-x'}{R} \hat{x} + \frac{y-y'}{R} \hat{y} + \frac{z-z'}{R} \hat{z} \right] \\ &= -\frac{1}{R^3} [(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}] = -\frac{\vec{R}}{R^3} \end{aligned}$$

而  $\nabla' \frac{1}{R}$  表示将  $R$  中的  $x', y', z'$  做为变量,  $x, y, z$  做为常量进行梯度运算, 因此有

$$\begin{aligned} \nabla' \frac{1}{R} &= -\frac{1}{R^2} \nabla' R = -\frac{1}{R^2} \left[ -\frac{x-x'}{R} \hat{x} - \frac{y-y'}{R} \hat{y} - \frac{z-z'}{R} \hat{z} \right] \\ &= \frac{1}{R^3} [(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}] = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\nabla \frac{1}{R} \end{aligned}$$

### 三. 矢量场的通量和散度

#### 1. 通量

定义: 设  $s$  是矢量场  $\vec{F}$  空间的一个有向曲面, 在  $s$  上取一矢量面元  $d\vec{s} = \hat{n}ds$ , 如图1-14所示。令

$$d\Phi = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cos \theta ds \quad (1-96)$$

$d\Phi$  称作矢量  $\vec{F}$  在面元  $d\vec{s}$  (或  $\vec{F}$  穿过面元  $d\vec{s}$ ) 的**通量**。其中  $\theta$  为面元所在点的  $\vec{F}$  与面元法矢  $\hat{n}$  的夹角。由上面的定义式可知, 矢量  $\vec{F}$  在一个面元上的通量是一个标量值, 当  $\vec{F}$  与  $\hat{n}$  的夹角  $\theta < \pi/2$  时 (即  $\vec{F}$  和  $\hat{n}$  指向曲面同一侧时), 通量  $d\Phi > 0$  为正值, 如图1-14a 所示; 当  $\vec{F}$  与  $\hat{n}$  的夹角  $\theta > \pi/2$  时 (即  $\vec{F}$  和  $\hat{n}$  指向曲面的两侧时), 通量  $d\Phi < 0$  为负值, 如图1-14b 所示。

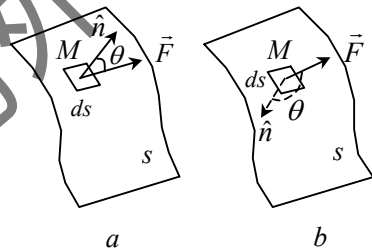


图1-14 通量

对有向曲面  $s$ , 矢量场  $\vec{F}$  穿过  $s$  的通量  $\Phi$  是  $s$  上所有面元通量的代数和, 即

$$\Phi = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1-97)$$

$\Phi$  仍为标量, 其值的正负取决于所有面元通量的叠加结果。在广义正交坐标系内, 上式可写成

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_s (F_1 ds_1 + F_2 ds_2 + F_3 ds_3) \\ &= \int_s (F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + F_2 h_1 h_3 du_1 du_3 + F_3 h_1 h_2 du_1 du_2) \end{aligned}$$

如果  $s$  是一个闭合曲面, 通量  $\Phi$  记作

$$\Phi = \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1-98)$$

由于闭合曲面的法线一般规定指向外方向, 所以,  $\Phi > 0$  表明从  $s$  上通量的流出部分大于流入部分, 称之为  $s$  内有正通量源; 反之,  $\Phi < 0$  表明从  $s$  上通量的流出部分小于流入部分, 称之为  $s$  内有负通量源。

## 2. 散度

闭合面上的通量是一个积分量, 可以用来反映闭合面内源与面上场的一种整体对应关系。但仅由通量值, 还无法确定源在场空间内的具体分布情况, 以及场点与源点的对应关系。为了研究这些问题, 我们引入散度的概念。

**定义:** 设有一矢量场  $\vec{F}$ , 在场中一点  $M$  处做一包含  $M$  点在内的任意闭合面  $s$ , 设其所围的空间区域为  $\Omega$ , 以  $\Delta\tau$  表示其体积, 以  $\Delta\Phi$  表示穿出闭合面  $s$  的通量, 当  $\Omega$  以任意方式缩向  $M$  点时, 比式

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta\tau}$$

之极限存在, 则称此极限为矢量场  $\vec{F}$  在点  $M$  处的散度, 记作  $\text{div}\vec{F}$ , 即

$$\text{div}\vec{F} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta\tau} \quad (1-99)$$

由此定义可知, 矢量  $\vec{F}$  的散度  $\text{div}\vec{F}$  为一标量, 表示  $\vec{F}$  场中一点处的通量对体积的变化率, 也就是在该点处单位体积所穿出之通量, 因此, 散度也被称为该点处的散源强度。当  $\text{div}\vec{F} > 0$  时, 表示该点有发出通量的正散源;  $\text{div}\vec{F} < 0$  时, 表示该点有吸收通量的负散源; 而  $\text{div}\vec{F} = 0$  则表示该点无散源。

$\vec{F}$  场中所有点的  $\text{div}\vec{F}$  构成了一个标量场, 称为  $\vec{F}$  的散度场。如果在  $\vec{F}$  的空间恒有  $\text{div}\vec{F} = 0$ , 则称  $\vec{F}$  为无散源场, 简称无散场, 否则称为有散场。

利用散度的定义式(1-99), 可以推导出散度运算的微分表达式。

设正交曲线坐标系中, 点  $M(u_1, u_2, u_3)$  处的场矢量  $\vec{F}$  表示为

$$\vec{F} = \hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3$$

以  $M$  点为中心, 作一个表面与坐标曲面分别平行的六面体元, 其六个侧面记为  $\Delta s_1 \cdots \Delta s_6$ , 如图1-15所示。

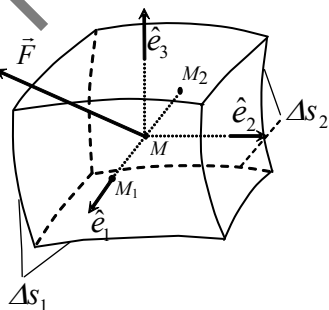


图1-15 散度

首先计算  $\vec{F}$  在此六面体表面上的通量。在侧面  $\Delta s_1$  上, 矢量面元的方向是坐标单位矢量  $\hat{e}_1$  的方向, 因此有  $d\vec{s}_1 = \hat{e}_1 ds_1$ 。取面  $\Delta s_1$  的中心点  $M_1$ , 因  $\Delta s_1$  很小, 故其上面的通量近似等于点  $M_1$  处的  $\vec{F}$  与  $\hat{e}_1 \Delta s_1$  的点积, 即

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{\Delta s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 = (\hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3) \cdot \hat{e}_1 \Delta s_1 \Big|_{M_1} = F_1 \Delta s_1 \Big|_{M_1} \\ &= F_1 dl_2 dl_3 \Big|_{M_1} = F_1 h_2 \Delta u_2 h_3 \Delta u_3 \Big|_{M_1} = F_1 h_2 h_3 \Big|_{M_1} \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1-100)$$

上式中的  $F_1 h_2 h_3 \Big|_{M_1}$  是  $M_1$  点的  $F_1$  值和度量系数。为了用  $M$  点的值来表示上式, 我们应用泰勒展

开式将其展开。由于点  $M_1(u_1 + \Delta u_1/2, u_2, u_3)$  与点  $M(u_1, u_2, u_3)$  只是第一个坐标相差  $\Delta u_1/2$ ，故取泰勒展开式

$$f(u_1 + \frac{\Delta u_1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial u_1^n} \bigg|_{u_1} (\frac{\Delta u_1}{2})^n$$

的前两项近似为

$$F_1 h_2 h_3 \big|_{M_1} \approx F_1 h_2 h_3 + \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \frac{\Delta u_1}{2}$$

将上式代入式(1-100)，得

$$\Phi_1 \approx (F_1 h_2 h_3 + \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \frac{\Delta u_1}{2}) \Delta u_2 \Delta u_3$$

同理，对于以  $-\hat{e}_1$  为法矢的  $\Delta s_2$  面，考虑到其面上中心点  $M_2(u_1 - \Delta u_1/2, u_2, u_3)$  与点  $M(u_1, u_2, u_3)$  的第一坐标相差  $-\Delta u_1/2$ ，且法矢与  $\hat{e}_1$  相反，因此其通量为

$$\Phi_2 \approx -(F_1 h_2 h_3 - \frac{\partial(F_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \frac{\Delta u_1}{2}) \Delta u_2 \Delta u_3$$

$\Delta s_1$  和  $\Delta s_2$  上的通量之和为

$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 \approx \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

用同样的方法可求得其余两对对面的通量为

$$\Phi_{34} \approx \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

和

$$\Phi_{56} \approx \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

因此，通过闭合面的总通量为以上三式之和

$$\begin{aligned} \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \Phi = \Phi_{12} + \Phi_{34} + \Phi_{56} \\ &\approx \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right] h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \\ &\approx \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \Delta \tau \end{aligned}$$

将上式代入散度的定义式(1-99)，得

$$\text{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (F_3 h_1 h_2) \right] \quad (1-101)$$

上式就是广义正交曲线坐标系中的散度表达式。

利用哈密顿算子的运算法则容易推证(证明过程从略)，散度可以写成哈密顿算子与矢量场函数点积的形式，即

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$



$$= \left[ \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right] \cdot [\hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3]$$

在除了直角坐标系以外的其它具体坐标系中，按上面的哈密顿算子展开计算都是十分繁杂的，故我们一般并不用此方法来计算散度，而是直接使用式(1-101)，但以  $\nabla \cdot \vec{F}$  的书写形式来表示散度却是经常使用的。

若  $\vec{F}, \vec{E}$  为矢量函数， $f$  为标量函数， $\vec{C}$  为常矢， $c$  为常数，则下列恒等式成立

$$1. \quad \nabla \cdot \vec{C} = 0 \quad (1-102a)$$

$$2. \quad \nabla \cdot (c\vec{F}) = c\nabla \cdot \vec{F} \quad (1-102b)$$

$$3. \quad \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{E}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{E} \quad (1-102c)$$

$$4. \quad \nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \quad (1-102d)$$

$$5. \quad \nabla \cdot (f\vec{C}) = \vec{C} \cdot \nabla f \quad (1-102e)$$

例1.3 球心在坐标原点，半径为  $a$  的球形域内均匀分布有密度为  $\rho$  的电荷，则空间任意点  $M(\vec{r})$  的电通量密度矢量可用下式表达

$$\vec{D} = \begin{cases} \hat{r} \frac{a^3 \rho}{3r^2} & (r > a) \\ \hat{r} \frac{\rho}{3} r & (r < a) \end{cases}$$

求  $\nabla \cdot \vec{D}$ 。

解：球坐标系中  $h_1=1$ ,  $h_2=r$ ,  $h_3=r \sin \theta$ ，将其代入散度表达式(1-101),得

$$\textcircled{1} r > a \text{ 时 } \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{rr \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{a^3 \rho}{3r^2} rr \sin \theta \right) \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{a^3 \rho}{3r^2}) = 0$$

$$\textcircled{2} r < a \text{ 时 } \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{rr \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho r}{3} rr \sin \theta \right) \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\rho}{3} r) = \rho$$

从本例题可以看出，电场空间任意一点处的电通量密度矢量的散度，恰好等于该点的电荷密度，反映了电场空间场与源的对应关系。

### 3. 散度定理

设  $S$  是矢量场  $\vec{F}$  空间内的一个闭合面， $\tau$  是  $S$  所包围的体积，若  $\tau$  内所有点都存在  $\nabla \cdot \vec{F}$ ，则有

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1-103)$$

成立，上式称为**散度定理**。

证明：如图1-16所示，把体积  $\tau$  分为  $N$  个小体积， $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_N$ ，小体积的表面积分别为  $s_1, s_2, \dots, s_N$ 。对其中任一小体积  $\Delta\tau_i$ ，根据散度定义式(1-99)，有

$$(\nabla \cdot \vec{F}) \Delta\tau_i \approx \oint_{s_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i$$

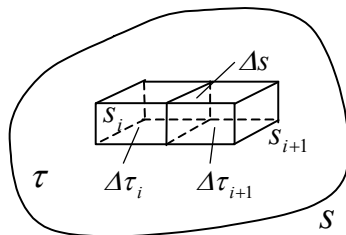


图1-16 散度定理

同理，与  $\Delta\tau_i$  相邻的体积  $\Delta\tau_{i+1}$  (外表面  $s_{i+1}$ ) 上有

$$(\nabla \cdot \vec{F})\Delta\tau_{i+1} \approx \oint_{s_{i+1}} \vec{F} \cdot d\vec{s}_{i+1}$$

上面两式相加，得到

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\nabla \cdot \vec{F})\Delta\tau_j \approx \sum_{j=i}^{i+1} \oint_{s_j} \vec{F} \cdot d\vec{s}_j$$

在这两个相邻小体积的公共面  $\Delta s$  上，由于  $\vec{F}$  是同一矢量，但公共面对两体积的外表面来说，法线方向相反，使得公共面部分的积分相互抵消，故上式右边的两个面积分的和应等于  $\vec{F}$  在包围两体积  $(\Delta\tau_i + \Delta\tau_{i+1})$  的外表面  $s_+$  上的积分，即

$$\sum_{j=i}^{i+1} (\nabla \cdot \vec{F})\Delta\tau_j \approx \sum_{j=i}^{i+1} \oint_{s_j} \vec{F} \cdot d\vec{s}_j = \oint_{s_+} \vec{F} \cdot d\vec{s}_+$$

按照上面的分析方法，若对  $\tau$  内所有的小体积做如上的求和，所有体元公共面上的积分相抵销，剩下只有包围总体积  $\tau$  的外表面  $s$  上的积分，即

$$\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \vec{F})\Delta\tau_j \approx \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

令  $N \rightarrow \infty$ ，则上式左边的  $\Delta\tau_j \rightarrow d\tau$ ，求和变成体积分，得到

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau = \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

散度定理的意义是：矢量场  $\vec{F}$  的散度在给定体积的体积分，等于此矢量场在该体积外表面上的闭合面积分。在直角坐标系中，如果将  $\vec{F}$  记成

$$\vec{F} = \hat{x}P + \hat{y}Q + \hat{z}R$$

代入散度定理公式(1-103)，得

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \oint_s (Pdydz + Qdx dz + Rdx dy)$$

这就是数学分析中所熟知的奥高公式(或高斯定理)，它是散度定理在直角坐标系中的标量形式表达式。因此，散度定理也称为高斯定理。

## 四. 矢量场的环量和旋度

### 1. 环量与环量密度

在矢量场  $\vec{F}$  中，矢量  $\vec{F}$  沿某一闭合有向曲线  $l$  的曲线积分，称为该矢量按所取方向沿曲线  $l$  的**环量**，记作

$$\Gamma = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_l F \cos \theta dl \quad (1-104)$$

式中  $\theta$  是积分路径上的线元  $d\vec{l}$  与  $\vec{F}$  的交角,如图1-17 所示。可见，环量不仅与矢量  $\vec{F}$  有关，而且与积分路径、方向有关。一般情况下，当闭合曲线所围曲面的方向取定后，曲线的方向总是按右旋原则来确定。

在正交曲线坐标系中

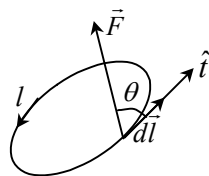


图1-17 环量

$$\vec{F} = \hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3$$

$$d\vec{l} = \hat{e}_1 h_1 du_1 + \hat{e}_2 h_2 du_2 + \hat{e}_3 h_3 du_3$$

环量可以写成

$$\Gamma = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_l (h_1 F_1 du_1 + h_2 F_2 du_2 + h_3 F_3 du_3) \quad (1-105)$$

环量是一个描述场在某回路上的旋涡性的宏观量，要研究每一场点的旋涡性，必须采用环量密度的概念。

设 $M$ 是矢量场 $\vec{F}$ 中的一点，过 $M$ 点取一矢量面元 $\Delta\vec{s}_n = \hat{n}\Delta s_n$ ， $\hat{n}$ 为面元的法矢，面元周界 $l$ 的方向与 $\hat{n}$ 成右手螺旋关系，如图1-18所示。保持 $\hat{n}$ 方向不变而使面元 $\Delta s_n$ 以任意方式向 $M$ 点收缩，则 $\vec{F}$ 在 $l$ 上的环量与 $\Delta s_n$ 的比值的极限

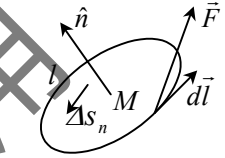


图1-18 环量密度

$$\mu_n = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_n} \quad (1-106)$$

称为矢量 $\vec{F}$ 在 $M$ 点处沿 $\hat{n}$ 方向的**环量密度**。

可见，某一场点上的环量密度的意义为：该点给定方向上的单位面积的环量。

## 2. 旋度

从上面的定义可以看出，一点上的环量密度除了与场函数 $\vec{F}$ 的空间分布有关外，还与 $\hat{n}$ 的取向有关。为了得到一个仅反映 $\vec{F}$ 场空间分布性质的量，我们来定义一个矢量，记作 $\text{rot}\vec{F}$ （或 $\text{curl}\vec{F}$ ），使 $\text{rot}\vec{F}$ 这个矢量在 $M$ 点的任意给定方向 $\hat{n}$ 上的投影，等于 $\vec{F}$ 在 $\hat{n}$ 方向的环量密度，即

$$(\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_n} \quad (1-107)$$

这个矢量 $\text{rot}\vec{F}$ 叫做矢量场 $\vec{F}$ 在点 $M$ 处的**旋度**。

由旋度的上述定义可知，矢量场 $\vec{F}$ 的旋度仍为矢量，在给定的场点上，旋度 $\text{rot}\vec{F}$ 由场函数 $\vec{F}$ 唯一确定，可以写成它的模与其方向单位矢量乘积的形式，即

$$\text{rot}\vec{F} = |\text{rot}\vec{F}| \hat{n}_0$$

按定义式(1-107)， $\text{rot}\vec{F}$ 在它自身方向 $\hat{n}_0$ 上的投影，就是 $\vec{F}$ 沿 $\hat{n}_0$ 方向的环量密度 $\mu_{n_0}$ ，即

$$(\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n}_0 = |\text{rot}\vec{F}| \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_0 = |\text{rot}\vec{F}| = \lim_{\Delta s_{n_0} \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_{n_0}} = \mu_{n_0}$$

可见，旋度的模 $|\text{rot}\vec{F}|$ 就等于 $\vec{F}$ 沿旋度方向 $\hat{n}_0$ 的环量密度 $\mu_{n_0}$ 。而在 $\hat{n}_0$ 以外的其它任意方向 $\hat{n}$ 上，其环量密度

$$\mu_n = \lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_n} = (\text{rot}\vec{F}) \cdot \hat{n} = |\text{rot}\vec{F}| \hat{n}_0 \cdot \hat{n} < |\text{rot}\vec{F}| = \mu_{n_0}$$

这表明， $\vec{F}$ 沿其旋度方向 $\hat{n}_0$ 将获得该点的最大环量密度。

简言之：在场空间一点上，旋度矢量的模等于该点的最大环量密度，其方向就是取得该最大环量密度的方向。

矢量场的旋度描述了矢量场的涡旋性，因此，旋度也被称为该点处的**涡旋源强度**。 $\vec{F}$ 场中所有点的 $\text{rot } \vec{F}$ 构成了一个新的矢量场，称为 $\vec{F}$ 的旋度场。如果在 $\vec{F}$ 的空间中恒有 $\text{rot } \vec{F} = 0$ ，则称 $\vec{F}$ 为**无旋源场**，简称**无旋场**，否则称为**有旋场**。

利用旋度的定义，可以推导出旋度运算的微分表达式。根据式(1-107)， $\text{rot } \vec{F}$ 在场点 $M$ 处三个坐标单位矢量方向上的投影为

$$(\text{rot } \vec{F})_1 = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{e}_1 = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_1}$$

$$(\text{rot } \vec{F})_2 = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{e}_2 = \lim_{\Delta s_2 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_2}$$

$$(\text{rot } \vec{F})_3 = (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{e}_3 = \lim_{\Delta s_3 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_3} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_3}$$

其中 $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ 分别是 $M$ 点处三个坐标曲面上的面元， $l_1, l_2, l_3$ 是三个面元的围线，因此有

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \hat{e}_1(\text{rot } \vec{F})_1 + \hat{e}_2(\text{rot } \vec{F})_2 + \hat{e}_3(\text{rot } \vec{F})_3 \\ &= \hat{e}_1 \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_1} + \hat{e}_2 \lim_{\Delta s_2 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_2} + \hat{e}_3 \lim_{\Delta s_3 \rightarrow 0} \frac{\int_{l_3} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_3} \end{aligned}$$

首先分析上式的第一个分量

$$\lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_1} \quad (1-109)$$

设场点 $M(u_1, u_2, u_3)$ 处的矢量 $\vec{F}$ 为

$$\vec{F} = \hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3$$

以 $M$ 点为中心，做一个垂直于 $\hat{e}_1$ 的闭合小矩形回路 $l_1$ ，其正方向与 $\hat{e}_1$ 呈右手螺旋关系，四个顶点依次为 $a, b, c, d$ 。

回路的两对边分别平行于坐标线 $u_2$ 和 $u_3$ ，长度为 $l_{ab} = l_{cd} = h_3 \Delta u_3$ 和 $l_{bc} = l_{da} = h_2 \Delta u_2$ ，如图1-19所示。

首先计算 $\oint_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 。在 $l_{ab}$ 边上，通过 $M$ 点的 $u_2$ 线与 $l_{ab}$ 边的交点为 $M_3$ ，因 $l_{ab}$ 很小，故此段上的积分近似等于 $M_3$ 点的 $\vec{F}$ 值与有向线段 $\vec{l}_{ab} = \vec{e}_3 l_{ab}$ 的点积，即

$$\int_{l_{ab}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx (\hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3) \cdot \hat{e}_3 l_{ab} \Big|_{M_3} = F_3 l_{ab} \Big|_{M_3} = F_3 h_3 \Delta u_3 \Big|_{M_3} = F_3 h_3 \Big|_{M_3} \Delta u_3$$

上式中的 $F_3 h_3 \Big|_{M_3}$ 是 $M_3$ 点的 $F_3$ 值和度量因子，为了用 $M$ 点的值来表，应用泰勒展开式将其展开。由于点 $M_3(u_1, u_2 + \Delta u_2 / 2, u_3)$ 与点 $M(u_1, u_2, u_3)$ 只是个坐标 $\Delta u_2$ 相差 $\Delta u_2 / 2$ ，故取泰

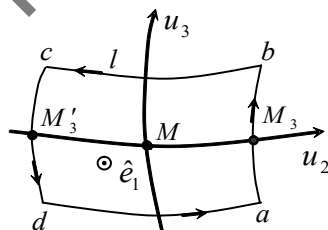


图1-19 旋度

勒展开式的前两项近似，可得

$$F_3 h_3|_{M_3} \approx F_3 h_3 + \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_2} \frac{\Delta u_2}{2}$$

因此有 
$$\int_{l_{ab}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx F_3 h_3|_{M_3} \Delta u_3 = [F_3 h_3 + \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_2} \frac{\Delta u_2}{2}] \Delta u_3$$

对于  $l_{cd}$  段上的积分，考虑其上中心点  $M'_3(u_1, u_2 - \Delta u_2/2, u_3)$  与点  $M(u_1, u_2, u_3)$  的第二坐标相差  $-\Delta u_2/2$ ，且积分线元方向与  $\hat{e}_3$  相反，因此其积分为

$$\int_{l_{cd}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx -[F_3 h_3 - \frac{\partial(F_3 h_3)}{\partial u_2} \frac{\Delta u_2}{2}] \Delta u_3$$

将上面两式相加，得

$$\int_{l_{ab}+l_{cd}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3) \Delta u_2 \Delta u_3$$

采用同样的分析方法，可以得到  $l_{bc}$  和  $l_{da}$  两段的积分之和

$$\int_{l_{bc}+l_{da}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx -\frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2) \Delta u_3 \Delta u_2$$

上式所多出的负号，是由于这两段的积分线元方向和坐标增量之间的关系，与前两段的情况正好相反。

将上面两式相加，即得到  $\vec{F}$  在闭合回路  $l_1$  上的积分

$$\oint_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \approx [\frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2)] \Delta u_2 \Delta u_3$$

代入式(1-109)，得到

$$\begin{aligned} (rot \vec{F})_1 &= \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta s_1} = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h_2 \Delta u_2 h_3 \Delta u_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2) \right] \Delta u_2 \Delta u_3 \right\} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2) \right] \end{aligned}$$

用同样的方法，可得  $rot \vec{F}$  的另外两个分量

$$\begin{aligned} (rot \vec{F})_2 &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (F_3 h_3) \right] \\ (rot \vec{F})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) \right] \end{aligned}$$

将以上三分量代入式(1-108)，就得到  $rot \vec{F}$  在广义正交曲线坐标系内的矢量表达式

$$\begin{aligned} rot \vec{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \hat{e}_1 h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (F_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (F_2 h_2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{e}_2 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (F_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (F_3 h_3) \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{e}_3 h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+\hat{e}_3 h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (F_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (F_1 h_1) \right] \} \quad (1-110)$$

为了便于记忆, 可将上式写成三阶行列式的形式

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ (F_1 h_1) & (F_2 h_2) & (F_3 h_3) \end{vmatrix} \quad (1-111)$$

按行列式求值的方法计算, 即可得到式(1-110)的结果。

利用哈密顿算子的运算法则容易推证(证明过程从略), 旋度可以写成哈密顿算子与矢量场函数叉积的形式, 即

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \left[ \hat{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right] \times [\hat{e}_1 F_1 + \hat{e}_2 F_2 + \hat{e}_3 F_3] \end{aligned}$$

若  $\vec{F}, \vec{E}$  为矢量函数,  $f$  为标量函数,  $\vec{C}$  为常矢,  $c$  为常数, 则下列恒等式成立

$$1. \quad \nabla \times \vec{C} = 0 \quad (1-112a)$$

$$2. \quad \nabla \times (c\vec{F}) = c\nabla \times \vec{F} \quad (1-112b)$$

$$3. \quad \nabla \times (\vec{F} \pm \vec{E}) = \nabla \times \vec{F} \pm \nabla \times \vec{E} \quad (1-112c)$$

$$4. \quad \nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F} \quad (1-112d)$$

$$5. \quad \nabla \times (f\vec{C}) = (\nabla f) \times \vec{C} \quad (1-112e)$$

$$6. \quad \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{E} \quad (1-112f)$$

$$7. \quad \nabla \times (\vec{F} \times \vec{E}) = \vec{F} \nabla \cdot \vec{E} - \vec{E} \nabla \cdot \vec{F} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (1-112g)$$

例 1.4 已知一矢量场函数在圆柱坐标系内的表达式为

$$\vec{H} = \begin{cases} \hat{\phi} \frac{a^2 J_0}{2\rho} & (\rho > a) \\ \hat{\phi} \frac{J_0}{2} \rho & (\rho < a) \end{cases}$$

求  $\nabla \times \vec{H}$ 。

解: 圆柱坐标系中  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = \rho$ ,  $h_3 = 1$ , 将其代入散度表达式(1-110), 得

①  $\rho > a$  时,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \frac{a^2 J_0}{2\rho} & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{a^2 J_0}{2\rho} \right) = 0$$

②  $\rho < a$  时,

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho \frac{J_0}{2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{J_0}{2} \rho \right) = J_0 \hat{z} = \vec{J}_0$$

本题的  $\vec{H}$  是一根半径为  $a$ 、电流密度为  $J_0 \hat{z}$  的无限长载流圆柱沿  $z$  轴放置时所产生的磁场强度。这表明，磁场空间任一点上的  $\nabla \times \vec{H}$  值，恰好等于该点的电流密度，电流是磁场的涡旋源。

### 3. 斯托克斯定理

设  $s$  是矢量场  $\vec{F}$  中的一个非闭合光滑有向曲面， $l$  是  $s$  的边界线， $l$  的正方向与  $s$  的法矢成右手螺旋关系。若  $\vec{F}$  在包含  $l$  在内的某一区域内有一阶连续偏导数，则有

$$\int_s (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1-113)$$

上式称为**斯托克斯定理**（证明从略）。

在直角坐标系中，若记：

$$\vec{F} = \hat{x}P + \hat{y}Q + \hat{z}R$$

代入斯托克斯定理式(1-113), 得

$$\int_s \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right] = \oint_l (Pdx + Qdy + Rdz)$$

上式就是我们在数学分析中所见到的斯托克斯定理表达形式。

## § 1.4 几种重要的矢量场

有势场、管形场及调和场是电磁学中经常使用的几种重要矢量场, 本节将介绍它们的定义和基本性质。

### 一. 有势场

定义: 对于一个矢量场  $\vec{F}(M)$ , 若在给定的区域内存在单值数性函数  $\Phi(M)$  满足

$$\vec{F} = -\nabla \Phi \quad (1-114)$$

则称此矢量场  $\vec{F}$  为**有势场**, 称  $\Phi$  为矢量场  $\vec{F}$  的**势函数**或**位函数**。

性质1. 从定义可以看出, 有势场是梯度场, 而且场的势函数实际上有无穷多个, 但它们之间仅相差一个常数。

证明: 设  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  是  $\vec{F}$  的任意两个势函数, 即

$$\vec{F} = -\nabla \Phi_1$$

$$\vec{F} = -\nabla \Phi_2$$

两式相减, 得

$$\nabla(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$$

于是有

$$\Phi_1 - \Phi_2 = c \quad (c \text{ 为常数})$$

即

$$\Phi_1 = \Phi_2 + c$$

因此, 若已知有势场  $\vec{F}(M)$  的一个势函数  $\Phi(M)$ , 则场的所有势函数的全体可以表示为

$$\Phi(M) + c \quad (c \text{ 为任意常数}) \quad (1-115)$$

性质2. 有势场在任意两点间的线积分只与两点的位置坐标有关, 而与线积分的积分路径无关。

证明: 设  $\vec{F}$  为一有势场,  $\Phi$  是它的一个势函数,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  和  $M(x, y, z)$  分别是线积分的始点和终点,  $l$  是连接此两点的一条任意路径, 已知

$$\vec{F} = -\nabla \Phi$$

上式两边与路径线元  $d\vec{l}$  点积, 并沿  $l$  积分, 得

$$\begin{aligned} \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} &= -\int_l \nabla \Phi \cdot d\vec{l} = -\int_l \left( \hat{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) \\ &= -\int_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = -\int_l d\Phi \end{aligned} \quad (1-116)$$

上式中的  $d\Phi$  是势函数  $\Phi$  的全微分, 由全微分的意义可知



$$\int_l d\Phi = \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} d\Phi = \Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0)$$

所以有

$$\int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Phi(x_0, y_0, z_0) - \Phi(x, y, z) \quad (1-117)$$

上式表明，有势场  $\vec{F}$  的线积分只决定于积分的始点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  和终点  $M(x, y, z)$  的坐标，而与积分路径  $l$  的选取无关。

推论：有势场的闭合回路线积分恒等于零。即

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1-118)$$

令式(1-117)中的  $l$  为闭合回路，始点和终点为相互重合的同一点，即可得此推论。

线积分与路径无关（或闭合线积分恒为零）的矢量场常常被称为保守场，可见，有势场必为保守场。

此外，在式(1-117)中，若取点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为固定点，而  $M(x, y, z)$  表示任意的场点，令常数项  $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$ ，即得到有势场  $\vec{F}$  与其势函数  $\Phi(x, y, z)$  的积分关系式

$$\Phi(x, y, z) = - \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1-119)$$

若  $\vec{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z$ ，则有

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned} \quad (1-120)$$

其中的  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是势函数  $\Phi(x, y, z)$  的参考点，其位置可以任意选取，对  $\Phi(x, y, z)$  的影响仅差一个常数。

由于式(1-120)的积分结果与积分路径无关，为了简化计算，我们可以取积分路径  $l$  为一条与坐标轴分段平行的折线。此折线共有三段，如图1-20所示，第一段折线与  $x$  轴平行，从始点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到点  $M_1(x, y_0, z_0)$ ，在此段上，纵坐标和立坐标保持恒定的  $y_0$  和  $z_0$  值，因此有  $dy = dz = 0$ ，式(1-120)中只有第一项不为零，记为

$$- \int_{x_0}^x F_x(x, y_0, z_0) dx$$

同理，在  $M_1(x, y_0, z_0)$  到  $M_2(x, y, z_0)$  段和  $M_2(x, y, z_0)$  到  $M(x, y, z)$  的两积分段上，式(1-120)分别只有第二、三项不为零，记为

$$- \int_{y_0}^y F_y(x, y, z_0) dy \quad \text{和} \quad - \int_{z_0}^z F_z(x, y, z) dz$$

此时，式(1-120)被化简为

$$\Phi(x, y, z) = - \int_{x_0}^x F_x(x, y_0, z_0) dx - \int_{y_0}^y F_y(x, y, z_0) dy - \int_{z_0}^z F_z(x, y, z) dz \quad (1-121)$$

在已知有势场  $\vec{F}$  的表达式时，利用上式可以比较方便的计算出其势函数。

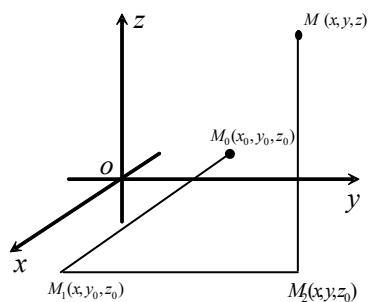


图1-20 折线积分

在广义坐标系内，与（1-121）相应的计算表达式为

$$\begin{aligned}\Phi(u_1, u_2, u_3) = & -\int_{u_{10}}^{u_1} F_1(u_1, u_{20}, u_{30}) h_1(u_1, u_{20}, u_{30}) du_1 \\ & -\int_{u_{20}}^{u_2} F_2(u_1, u_2, u_{30}) h_2(u_1, u_2, u_{30}) du_2 \\ & -\int_{u_{30}}^{u_3} F_3(u_1, u_2, u_3) h_3(u_1, u_2, u_3) du_3\end{aligned}\quad (1-122)$$

性质3. 在线单连域内，矢量场  $\vec{F}$  为有势场的充要条件是  $\vec{F}$  为无旋场。

证明：[必要性] 设  $\vec{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z$  是一有势场， $\Phi$  是其势函数，则有

$$F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

因此有

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} = & \hat{x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ = & \hat{x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

即， $\vec{F}$  是一个无旋场。

[充分性] 设矢量场  $\vec{F}$  在单连域内处处满足

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

在图1-21所示的任意闭合曲线  $l$  上作  $\vec{F}$  的线积分，应用斯托克斯公式并考虑  $\vec{F}$  的无旋性，有

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

在  $l$  上任取两点  $M_0$  和  $M$ ，将  $l$  分成  $l_1$  和  $l_2$  两部分，上式可以写成

$$\int_{M_0 l M} \vec{F} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{M l M_0} \vec{F} \cdot d\vec{l}_2 = \int_{M_0 l M} \vec{F} \cdot d\vec{l}_1 - \int_{M_0 2 M} \vec{F} \cdot d\vec{l}_2' = 0$$

其中  $d\vec{l}_2'$  是从点  $M_0$  到点  $M$  的积分路径  $l_2$  上的矢量线元。由此可得

$$\int_{M_0 l M} \vec{F} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{M_0 2 M} \vec{F} \cdot d\vec{l}_2'$$

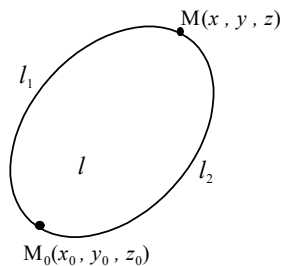


图1-21 无旋场的环路积分

由于  $l$  是一条任意的闭合曲线，所以上式表明  $\vec{F}$  的线积分与路径无关。取  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  为固定点，而  $M(x, y, z)$  为任意场点，则有

$$\int_{l_{M_0 M}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Phi(x_0, y_0, z_0) - \Phi(x, y, z)$$

两边微分，有

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -d\Phi \quad (1-123)$$

由全微分和梯度的定义，有

$$\begin{aligned}d\Phi = & \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz) \\ = & \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot d\vec{l} = \nabla \Phi \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

将上式与式(1-123)比较, 得

$$\vec{F} = -\nabla \Phi$$

所以,  $\vec{F}$  是一个有势场。

从本性质的证明过程可以看到, 由矢量场的无旋性可以得到其线积分与路径无关(或闭合回路线积分恒等于零), 因此得到如下推论

推论: 无旋场必为保守场。

从上面的有势场性质讨论中我们已经看出: 在单连域内, “场有势(梯度场)”、“场无旋”、“场保守(线积分与路径无关或闭合回路积分恒为零)”和“ $\vec{F} \cdot d\vec{l}$  等于某个数性函数的全微分”这四者是等价的, 只要满足其一, 就一定同时满足另外三条。因有势场具有标量势函数, 故在求解有势场时, 可以先计算其势函数  $\Phi$ , 然后再利用  $\vec{F} = -\nabla \Phi$  得到有势场  $\vec{F}$ , 这样将使某些问题的求解变得简单。此外, 我们也可以看出, 如果一个矢量场  $\vec{F}$  在给定的区域内存在着  $\nabla \times \vec{F} \neq 0$  的点, 则不可随便利用  $\vec{F} = -\nabla \Phi$  来定义辅助的势函数  $\Phi$ , 因为若对式  $\vec{F} = -\nabla \Phi$  两边取旋度, 并注意  $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ , 就会在这些点上出现  $0 \neq \nabla \times \vec{F} = -\nabla \times \nabla \Phi \equiv 0$  的矛盾。

例 1.5 由点  $M'(x', y', z')$  向场点  $M(x, y, z)$  做一矢量  $\vec{R}$ , 则有

$$\vec{R} = \hat{x}(x-x') + \hat{y}(y-y') + \hat{z}(z-z')$$

$$R = |\vec{R}| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

$\vec{R}$  称作从点  $M'(x', y', z')$  到点  $M(x, y, z)$  的相对位置矢量(或距离矢量)。设

$$\vec{F}(x, y, z) = k \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (k \text{ 为常数})$$

证明  $\vec{F}$  是有势场, 并求其势函数。

解: 因为无旋场与有势场等价, 故只需证明  $\vec{F}$  是无旋场即可。

将  $\vec{F}$  写成  $\vec{F} = k \frac{\hat{x}(x-x') + \hat{y}(y-y') + \hat{z}(z-z')}{R^3}$ , 代入直角坐标系相应计算式, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= k \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x-x'}{R^3} & \frac{y-y'}{R^3} & \frac{z-z'}{R^3} \end{vmatrix} = k \left\{ \hat{x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z-z'}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{y-y'}{R^3} \right) \right] \right. \\ &\quad + \hat{y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x-x'}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z-z'}{R^3} \right) \right] + \hat{z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y-y'}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x-x'}{R^3} \right) \right] \left. \right\} \\ &= k \left\{ \hat{x} \left[ -3 \frac{z-z'}{R^4} \frac{y-y'}{R} + 3 \frac{y-y'}{R^4} \frac{z-z'}{R} \right] + \hat{y} \left[ -3 \frac{x-x'}{R^4} \frac{z-z'}{R} + 3 \frac{z-z'}{R^4} \frac{x-x'}{R} \right] \right. \\ &\quad \left. + \hat{z} \left[ -3 \frac{y-y'}{R^4} \frac{x-x'}{R} + 3 \frac{x-x'}{R^4} \frac{y-y'}{R} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

因此,  $\vec{F}$  是一个有势场。

$\vec{F}$  的势函数可利用式(1-121)求得。为计算简单, 可将势函数的参考点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  选择在坐标原点  $O(0,0,0)$  处, 将  $\vec{F}$  的表达式代入上式, 得

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z) &= -k \left\{ \int_0^x \frac{x-x'}{[(x-x')^2 + (0-y')^2 + (0-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dx \right. \\
&\quad + \int_0^y \frac{y-y'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (0-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dy \\
&\quad \left. + \int_0^z \frac{z-z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} dz \right\} \\
&= -\frac{k}{[(x-x')^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{k}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad - \frac{k}{[(x-x')^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{k}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{k}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

上式中的1、4及3、6项互消，而第2项是与场点坐标  $x, y, z$  无关的常量，将其记为  $c$ ，则有

$$\Phi(x, y, z) = \frac{k}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + c = k \frac{1}{R} + c$$

## 二. 管形场

定义：对于矢量场  $\vec{F}$ ，若在其定义域内的每一点上都有  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ，则称  $\vec{F}$  为**管形场**。可见，管形场就是无散场。

性质1. 面单连域内，管形场  $\vec{F}$  在任一个矢量管的两个任意横截面上的通量都相等，即

$$\int_{s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 \quad (1-124)$$

上式中的  $s_1$  和  $s_2$  为矢量管的任意两个截面，其法矢  $\hat{n}_1$  和  $\hat{n}_2$  都朝向（或都反向） $\vec{F}$  所指的一侧，如图1-22所示。

$s$  包围的体积记作  $\tau$ ，利用散度定理和已知条件  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ ，可得

$$\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_\tau \nabla \cdot \vec{F} d\tau = 0$$

上式中的闭合面积分可以分为三部分

$$\int_{s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}'_1 + \int_{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{s_3} \vec{F} \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

其中，面元  $d\vec{s}'_1 = ds_1 \hat{n}'_1$  的法矢  $\hat{n}'_1$  是闭合面  $s_1$  部分的外法矢，与式(1-124)中面元  $d\vec{s}_1 = ds_1 \hat{n}_1$  所定的法矢  $\hat{n}_1$  方向相反；而  $d\vec{s}_2$  则与式(1-124)中的  $d\vec{s}_2$  相同。若将上式中的  $d\vec{s}'_1$  用  $d\vec{s}_1$  表示，则可写成

$$-\int_{s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{s_3} \vec{F} \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

又因  $s_3$  是矢量管壁，由矢量与矢量线相切的性质可知， $\vec{F}$  位于  $s_3$  的切平面内，因此有  $\vec{F} \perp \hat{n}_3$ ，故上式右边的第三项为零，所以上式即为

$$\int_{s_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2$$

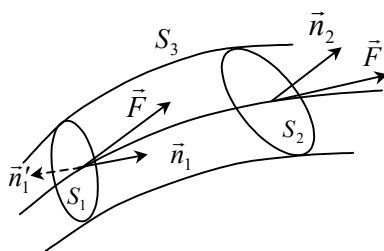


图1-22 管形场的性质

性质1 表明, 管形场中穿过同一矢量管的所有截面的通量都相等, 就象通过水管任意截面的水流量都相等一样, 这正是管形场得名的由来。

性质2. 在面单连域内, 矢量场  $\vec{F}$  为管形场的充要条件是它为另一矢量场  $\vec{A}$  的旋度场。

证明: [充分性] 设  $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ , 由矢量运算的基本公式有

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

即有

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0$$

所以矢量场  $\vec{F}$  为管形场。

[必要性] 设  $\vec{F} = \hat{x}F_x + \hat{y}F_y + \hat{z}F_z$  为管形场, 即  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , 下面来说明存在矢量场

$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$  满足

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{F} \quad (1-125)$$

满足式(1-125)的矢量  $\vec{A}$  称为矢量场  $\vec{F}$  的矢量势或矢量位。只要  $\vec{F}$  是管形场,  $\vec{A}$  的存在是肯定的, 例如以

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{z_0}^z F_y(x, y, z) dz - \int_{y_0}^y F_z(x, y, z_0) dy \\ A_y &= -\int_{z_0}^z F_x(x, y, z) dz \\ A_z &= C \end{aligned} \quad (1-126)$$

为分量的矢量  $\vec{A}$  就可以满足式(1-125)。其验证过程如下:

将式(1-126)代入

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

其  $\hat{x}$  分量为

$$\left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = 0 - \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\int_{z_0}^z F_x(x, y, z) dz \right] = F_x(x, y, z)$$

$\hat{y}$  分量为

$$\left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_0}^z F_y(x, y, z) dz - \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y F_z(x, y, z_0) dy \right] - 0 = F_y(x, y, z)$$

$\hat{z}$  分量为

$$\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z F_x(x, y, z) dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z F_y(x, y, z) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y F_z(x, y, z_0) dy$$

因上式右边前两项的偏导与积分的变量不同, 故可以交换顺序, 得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) &= -\int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) \right] dz - \int_{z_0}^z \left[ \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) \right] dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y F_z(x, y, z_0) dy \\ &= -\int_{z_0}^z \left\{ \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} \right\} dz + F_z(x, y, z_0) \end{aligned}$$

由  $\vec{F}$  为管形场的已知条件, 有

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y} = -\frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z}$$

代入前式, 得

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \int_{z_0}^z \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z} dz + F_z(x, y, z_0) = F_z(x, y, z) \Big|_{z_0}^z + F_z(x, y, z_0) = F_z(x, y, z)$$

可见

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{F}$$

应特别注意, 满足式(1-125)的矢量势函数并不是唯一的。也就是说, 对一个确定的管形场  $\vec{F}$ , 可以存在无穷多个形式不同的矢量势函数  $\vec{A}$ , 均可以满足  $\nabla \times \vec{A} = \vec{F}$ 。例如, 若  $\vec{A}_1$  是  $\vec{F}$  的一个矢势函数, 即  $\nabla \times \vec{A}_1 = \vec{F}$  成立, 令

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \nabla \Phi$$

$\Phi$  可以是任意的数性函数, 对上式两边取旋度, 有

$$\nabla \times \vec{A}_2 = \nabla \times \vec{A}_1 + \nabla \times \nabla \Phi = \nabla \times \vec{A}_1 + 0 = \vec{F}$$

可见,  $\vec{A}_2$  也满足式(1-125), 是  $\vec{F}$  的一个矢势函数, 但  $\vec{A}_2$  与  $\vec{A}_1$  是不同的。在前一节的有势场中, 一个确定的有势场也有无穷多个 (数性的) 势函数, 但这些势函数之间仅相差一个常数, 实质上可以看成是一个函数。但对于管形场则不同, 满足式(1-125)的矢势函数有无穷多, 且具有不同的函数形式。因此, 在实际物理应用时, 为了避免矢势函数的这种多值性, 往往要加以另外的限制条件, 以使其具有唯一确定的形式。

由于管形场可以由其矢势函数的旋度求出, 因此在研究管形场时, 可以先求解它的矢势函数, 然后再作旋度得到该管形场, 这样将使某些问题的求解过程得到简化。

同时我们也应该注意, 如果一个矢量场  $\vec{F}$  在给定的区域内存在着  $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$  的点, 则不可随便利用  $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$  来引入辅助的矢势函数  $\vec{A}$ , 因为若对式  $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$  两边取散度, 并注意  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0$ , 就会在这些点上出现  $0 \neq \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0$  的矛盾。

### 三. 调和场

定义: 若对于矢量场  $\vec{F}$ , 恒有  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  和  $\nabla \times \vec{F} = 0$ , 则称此矢量场  $\vec{F}$  为**调和场**。换言之, 调和场就是既无散又无旋的无源矢量场。

应当明确, 对于一个实际的物理场, 调和场只能在有限的区域内存在, 其原因是场的散度和旋度代表着产生场的两种源, 若在无限空间内既无散源又无旋源, 这个物理场也就不存在了。

若  $\vec{F}$  为调和场, 由定义  $\nabla \times \vec{F} = 0$  可知,  $\vec{F}$  一定是有势场, 故存在着标量势函数  $\Phi$  满足  $\vec{F} = -\nabla \Phi$ 。对此式两边求散度, 并考虑另一定义  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ , 则有

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad (1-127)$$

在正交曲线坐标系内, 按梯度和散度的计算公式, 得

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] = 0 \quad (1-128)$$

上式的左边可以看成是一个微分算子  $\nabla^2$  (或记作  $\Delta$ ) 与标量函数  $\Phi$  的乘积, 即

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{或记作 } \Delta \Phi = 0) \quad (1-129)$$

算子  $\nabla^2$  (或  $\Delta$ ) 叫做拉普拉斯(Laplace)算子。

在正交曲线坐标系中

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1-130)$$

式(1-129)称为拉普拉斯方程。在直角坐标系中, 拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-131)$$

拉普拉斯方程是一个二阶偏微分方程, 满足拉普拉斯方程的标量函数  $\Phi$  叫做**调和函数**,  $\nabla^2 \Phi$  称作**调和量**。

## § 1.5\* $\delta$ 函数、格林定理与亥姆霍兹定理

### 一. $\delta$ 函数

$\delta$  函数是狄拉克根据物理上的需要首先引入的, 也称为**狄拉克函数**。一维  $\delta$  函数由下式定义:

$$\delta(x-x') = 0 \quad (x \neq x') \quad (1-132)$$

$$\int_a^b \delta(x-x') dx = \begin{cases} 1 & (a < x' < b) \\ 0 & (x' < a \text{ or } x' > b) \end{cases} \quad (1-133)$$

显然, 在  $x = x'$  处  $\delta(x-x')$  必须为无穷大。因此,  $\delta$  函数不是普遍意义下的函数, 而是一种广义函数。它可以作为某些连续函数的极限来理解。

$\delta$  函数有下面两条重要的性质:

(1)  $\delta$  函数是偶函数

$$\delta(x-x') = \delta(x'-x) \quad (1-134)$$

(2)  $\delta$  函数有还原性 (筛选性)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x') dx = f(x') \quad (1-135)$$

依照一维  $\delta$  函数的形式, 可以定义三维  $\delta$  函数

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0 \quad (\vec{r} \neq \vec{r}') \quad (1-136)$$

$$\int_{\tau} \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = \begin{cases} 1 & (\vec{r}' \in \tau) \\ 0 & (\vec{r}' \notin \tau) \end{cases} \quad (1-137)$$

三维  $\delta$  函数同样有 (1) 和 (2) 的性质:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \quad (1-138)$$

$$\int_{\tau} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau = f(\vec{r}') \quad (1-139)$$

在三种常用坐标系中，三维  $\delta$  函数的表达式分别为

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z')$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

例1.6 试证明  $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R}$  是  $\delta$  函数

证明：在直角坐标系中， $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$

而

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{R} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{-(x-x')}{R^3} \right] \\ &= -\frac{1}{R^3} + \frac{3(x-x')^2}{R^5} \end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(y-y')^2}{R^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(z-z')^2}{R^5}$$

所以有

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} = -\frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{3}{R^3} + \frac{3(x-x')^2 + 3(y-y')^2 + 3(z-z')^2}{R^5} \right] = 0 \quad (\vec{r} \neq \vec{r}')$$

当  $\vec{r} = \vec{r}'$  时，上式变成不定式，但是可以计算它的广义积分。以位置  $\vec{r}'$  为中心作半径为  $R$  的球面  $s$ ，限定体积为  $\tau$ ，此时  $\vec{r}' \in \tau$ ，于是体积分

$$\int_{\tau} \nabla^2 \frac{1}{R} d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} d\tau = - \int_{\tau} \nabla \cdot \frac{\hat{R}}{R^2} d\tau = - \int_s \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot d\vec{s}$$

因为在球面上  $d\vec{s}$  的方向就是  $\hat{R}$  的方向，且  $R$  为常量，所以

$$\int_{\tau} \nabla^2 \frac{1}{R} d\tau = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_s d\vec{s} = \frac{1}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = 1$$

而当选择的区域  $\tau$  不包含  $\vec{r}'$ ，即  $\vec{r}' \notin \tau$  时， $-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} = 0$ ，所以



$$\int_{\tau} -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{R} d\tau = 0$$

因此, 此函数符合  $\delta$  函数的定义, 是  $\delta$  函数。

## 二 格林定理

格林定理由下面三个恒等式组成。

### 1 格林第一恒等式:

假设  $\Phi$  和  $\Psi$  是给定区域内的两个连续、单值并有二阶连续导数的任意函数, 在区域  $\tau$  内对矢量  $\Psi \nabla \Phi$  的散度进行体积分, 然后应用散度定理, 得

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) d\tau = \oint_s \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{s} \quad (1-140)$$

根据矢量分析公式, 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) &= \Psi \nabla \cdot \nabla \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \\ &= \Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi \end{aligned}$$

将上式代入 (1-140), 得到

$$\int_{\tau} (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) d\tau = \oint_s \Psi \nabla \Phi \cdot d\vec{s} \quad (1-141)$$

上式称为格林第一恒等式。

因为 
$$\nabla \Phi \cdot d\vec{s} = \nabla \Phi \cdot \hat{n} ds = \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

其中  $\hat{n}$  是闭合面  $s$  的外法矢, 所以格林第一恒等式也可以写成

$$\int_{\tau} (\Psi \nabla^2 \Phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi) d\tau = \oint_s \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (1-142)$$

### 2 格林第二恒等式:

将第一恒等式中的  $\Phi$  和  $\Psi$  对调, 可推出与式 (1-141) 相似的方程

$$\int_{\tau} (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) d\tau = \oint_s \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{s} \quad (1-143)$$

将式 (1-143) 和式 (1-141) 相减得到

$$\int_{\tau} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d\tau = \oint_s (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\vec{s} \quad (1-144)$$

上式称为格林第二恒等式, 或称为格林定理。上式也可以写成

$$\int_{\tau} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d\tau = \oint_s \left( \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds \quad (1-145)$$

### 3 格林第三恒等式

设  $\Phi(M)$  为  $\tau$  内的连续及连续可导函数,  $M_0$  是  $\tau$  内任意一点。令  $\Psi = -1/4\pi R$ ,  $R$  为  $M_0$  至  $M$  点的距离, 代入格林第二恒等式, 可得

$$\int_{\tau} \left[ \Phi \nabla^2 \left( \frac{-1}{4\pi R} \right) + \frac{1}{4\pi R} \nabla^2 \Phi \right] d\tau = \oint_s \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{-1}{4\pi R} \right) + \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds$$

由  $\nabla^2 \left( -\frac{1}{4\pi R} \right) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  及  $\delta$  函数的还原性可以推出

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \left( \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi \right) d\tau \quad (1-146)$$

上式称为格林第三恒等式。

若  $f$  是已知函数，满足  $\nabla^2 \Phi = -f$  的方程称为泊松(poisson)方程。将其代入格林第三恒等式，得到

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{f}{R} d\tau + \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] ds \quad (1-147)$$

上式称作泊松方程的积分解。当知道边界  $s$  上  $\Phi$  和  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  时，可利用上式求解  $\tau$  内的  $\Phi$ 。

### 三. 调和函数的性质

从已获得的三个格林恒等式，容易得到调和函数的一些基本性质。

性质1. 调和函数的法向导数的闭合曲面积分等于零。

取  $\Phi$  为调和函数，有  $\nabla^2 \Phi = 0$ 。又令  $\Psi = 1$ ，则有  $\nabla \Psi = \nabla^2 \Psi = 0$ 。代入格林第二恒等式 (1-145)，则得到本性质

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0 \quad (1-148)$$

性质2：调和函数  $\Phi$  在区域内任意点  $M(\vec{r}_0)$  处的值，都可以通过  $\Phi$  在区域边界上的值及法向导数值按下式表达

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_s \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} ds \quad (1-149)$$

因为调和函数有  $\nabla^2 \Phi = 0$ ，故格林第三恒等式的体积分项为零，本性质得证。

性质3：调和函数在球心上的值等于该函数在球面上的算术平均值，即

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \Phi ds \quad (1-150)$$

上式称为调和函数的**算术平均值公式**。它表明调和函数在一点  $M_0$  处的值，等于函数沿着以该点为球心、任意半径  $a$  的球面上的积分除以这个球面的面积。

证明：性质2式 (1-149) 可以写成

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \oint_s \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) ds \quad (1-151)$$

由性质1，上式的第一项为零，而第二项因球面上有  $\hat{n} = \hat{R}$ ， $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$ ，所以

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{a^2}$$

代入式(1-151), 本性质得证。

性质4: 假设  $\Phi(M)$  在有界区域  $\tau$  内是调和函数, 在包括边界的闭区域内连续, 若  $\Phi(M)$  不为常数, 则  $\Phi(M)$  的最大值和最小值只能在边界  $s$  上达到。换句话说, 调和函数在区域内无极值。通常将此性质叫**极值原理**或者**最大值原理**。

证明: 利用反证法证明。假设调和函数  $\Phi(M)$  在开区间  $\tau$  内的某一点  $M_0$  上达到最大值  $\Phi(M_0) = \Phi_m$ 。以  $M_0$  为球心做一半径为  $a$  的球面  $S_a$ , 使  $S_a$  完全落在  $\tau$  内,  $S_a$  包围的体积记作  $\tau_a$ , 如图1-23a所示。由假设  $\Phi_m = \Phi(M_0)$  是该区域的最大值, 所以在  $S_a$  上不存在  $\Phi$  值大于  $\Phi_m$  的点。又由前面的性质3, 有

$$\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \Phi ds = \Phi_m$$

因  $\Phi$  在  $S_a$  上连续, 且不大于  $\Phi_m$ , 所以在  $S_a$  上亦不存在  $\Phi$  值小于  $\Phi_m$  的点。可见在  $S_a$  上  $\Phi$  值恒等于  $\Phi_m$ , 即

$$\Phi(M_{S_a}) \equiv \Phi_m$$

同理, 在以  $M_0$  为球心,  $r(r < a)$  为半径的所有球面上, 均有  $\Phi(M_{S_r}) \equiv \Phi_m$ 。因此, 在整个球域  $\tau_a$  内, 恒有

$$\Phi(M_{\tau_a}) \equiv \Phi_m \quad (1-152)$$

下面证明  $\tau$  内的任意点  $M_n (M_n \notin \tau_a)$  处, 也有  $\Phi(M_n) \equiv \Phi_m$ 。在  $\tau$  内作折线 (或直线) 连接  $M_0$  和  $M_n$  两点, 沿此折线从  $M_0$  向  $M_n$  做一系列球体, 球心分别为  $M_0, M_1, M_2 \cdots M_n$ ,

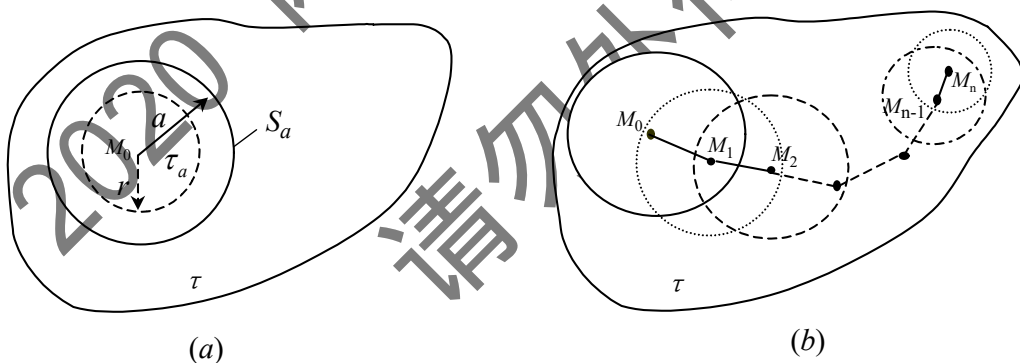


图1-23 调和函数的极值原理

并使后球的球心落在前球体之内, 如图1-23b所示。由式(1-152)的结论, 依次可推出

$$\Phi(M_n) = \Phi(M_{n-1}) = \cdots = \Phi(M_1) = \Phi(M_0) = \Phi_m$$

这样我们就证明了, 若假设区域  $\tau$  内有一点  $M_0$  使  $\Phi(M_0) = \Phi_m$  成为最大值, 则必定推得  $\tau$  内所有点的  $\Phi$  值均等于  $\Phi_m$ 。因此,  $\tau$  内  $\Phi$  有最大值的假设不成立。用同样的方法也可证明,  $\Phi$  亦没有最小值, 本性质得证。

由性质4可以得出下述重要推论:

推论1: 边界上调和函数等于常数, 那么整个区域它都等于此常数。

推论2: 边界为零的调和函数, 在区域内的值等于零。

推论3: 边界上等值的两个调和函数, 在区域内处处相等。

#### 四. 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理可以简述为: 在给定的区域  $\tau$  内, 一个散度和旋度均不恒为零的矢量场  $\vec{F}$ , 可以表示成一个无旋场 (有势场)  $\vec{F}_1$  和一个无散场 (管形场)  $\vec{F}_2$  之和的形式

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

其中, 无旋场  $\vec{F}_1$  由该区域  $\tau$  内的  $\nabla \cdot \vec{F}$  及  $\vec{F}$  在边界  $s$  上的法向分量  $\hat{n} \cdot \vec{F}$  唯一确定; 无散场  $\vec{F}_2$  由区域  $\tau$  内的  $\nabla \times \vec{F}$  及  $\vec{F}$  在边界  $s$  上的切向分量  $\hat{n} \times \vec{F}$  唯一确定。

证明: 设  $M(\vec{r})$  和  $M(\vec{r}')$  是区域  $\tau$  内的两点, 利用  $\delta$  函数的还原性, 场点  $M(\vec{r})$  处的  $\vec{F}$  可表示成

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{\tau} \vec{F}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' \quad (1-153)$$

取

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi R} \right)$$

其中  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , 将上式代入式(1-153), 得

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \int_{\tau} \vec{F}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi R} \right) d\tau'$$

因算子  $\nabla^2$  是对变量  $x, y, z$  进行运算, 上式中  $x', y', z'$  的函数  $\vec{F}(\vec{r}')$  对  $\nabla^2$  可视为常矢, 而积分是对坐标  $x', y', z'$  进行的, 故  $\nabla^2$  可以与积分交换顺序, 即

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= - \int_{\tau} \vec{F}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{4\pi R} \right) d\tau' \\ &= - \int_{\tau} \nabla^2 \left[ \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} \right] d\tau' \\ &= - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' \end{aligned}$$

利用矢量拉普拉斯算子展开式  $\nabla^2 = \nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times$ , 上式变为

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \cdot \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (1-154)$$

上式把  $\vec{F}$  表示为一个标量函数的负梯度和一个矢量函数的旋度之和, 即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\nabla \Phi + \nabla \times \vec{A}$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (1-155)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (1-156)$$

交换上面两式中运算符  $\nabla$  和积分号顺序, 对 (1-155) 式应用恒等式

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' &= \int_{\tau} \nabla \cdot \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \int_{\tau} \vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) d\tau' = \int_{\tau} -\vec{F}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{R} d\tau' \\ &= -\int_{\tau} \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau' + \int_{\tau} \frac{1}{R} \nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}') d\tau' \\ &= -\oint_s \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \cdot d\vec{s}' + \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' \end{aligned}$$

对 (1-156) 式应用恒等式

$$\nabla \times (f \vec{A}) = -\vec{A} \times \nabla f + f \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R}$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \vec{A} d\tau = -\oint_s \vec{A} \times d\vec{s} = -\oint_s \vec{A} \times \hat{n} ds$$

得到

$$\begin{aligned} \nabla \times \int_{\tau} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' &= \int_{\tau} \nabla \times \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' = \int_{\tau} \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \times \vec{F}(\vec{r}') d\tau' = -\int_{\tau} \nabla' \frac{1}{R} \times \vec{F}(\vec{r}') d\tau' \\ &= \int_{\tau} -\nabla' \times \left( \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{R} \right) d\tau' + \int_{\tau} \frac{1}{R} \nabla' \times \vec{F}(\vec{r}') d\tau' \\ &= \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{R} d\tau' + \oint_s \frac{\vec{F}(\vec{r}') \times \hat{n}}{R} ds' \end{aligned}$$

代入式 (1-154)，得

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= -\nabla \left[ \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} d\tau' - \oint_s \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{4\pi R} ds' \right] \\ &\quad + \nabla \times \left[ \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{4\pi R} d\tau' + \oint_s \frac{\vec{F}(\vec{r}') \times \hat{n}}{4\pi R} ds' \right] \end{aligned} \quad (1-157)$$

上式即为亥姆霍兹定理的数学表达式。

亥姆霍兹定理表明：

(1) 矢量场  $\vec{F}$  可以用一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和表示。此标量函数由  $\vec{F}$  的散度和  $\vec{F}$  在边界  $s$  上的法向分量完全确定；而矢量函数由  $\vec{F}$  的旋度和  $\vec{F}$  在边界上的切向分量完全确定。

(2) 散度  $\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$  是有势场部分  $\vec{F}_1$  的源，称为通量源（散源）；旋度  $\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')$  是管形场部分  $\vec{F}_2$  的源，称为涡旋源。体积分表示体积内的通量源和旋涡源与场  $\vec{F}(\vec{r})$  的联系。

(3)  $\vec{F}(\vec{r}') \cdot \hat{n}$  和  $\vec{F}(\vec{r}') \times \hat{n}$  是等效的表面源，它们的面积分表示  $\tau$  以外的源对场  $\vec{F}(\vec{r})$  的贡献。

献。

## 习 题 一

1.1 已知  $\hat{r} = (t^3 + 2t)\hat{x} - 3e^{-2t}\hat{y} + 2\sin 5t\hat{z}$ ，试求下列各式在  $t=0$  时的值：

(1)  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ，(2)  $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ ，(3)  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ，(4)  $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ 。

1.2 求曲线  $\vec{r}(t) = t\hat{x} + t^2\hat{y} + t^3\hat{z}$  上这样的点，使该点的切线平行于平面  $x + 2y + z = 4$ 。

1.3 一质点以等角速度沿曲线  $x = a\cos\theta$ ， $y = a\sin\theta$ ， $z = b\theta$  运动，求其速度和加速度。

1.4 已知  $\vec{A}(t)$  和一非零常矢  $\vec{B}$  恒满足  $\vec{A}(t) \cdot \vec{B} = t$ ，又  $\vec{A}(t)$  和  $\vec{B}$  之间的夹角  $\theta$  为常数。试证明  $\vec{A}'(t) \perp \vec{A}''(t)$ 。

1.5 设常矢  $\vec{C} = \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$ ，求在直角坐标系的点  $B(1, 2, 3)$  和点  $A(2, 2, 1)$  处

(1)  $\vec{C}$  的圆柱坐标表示式；

(2)  $\vec{C}$  的球坐标表示式。

1.6 将圆柱坐标系中的矢量  $\vec{F} = \rho \sin\varphi \hat{\rho} + \rho^2 \hat{\phi} + \cos\varphi \hat{z}$  在点  $(\rho_0, \varphi_0, z_0)$  处写成球坐标系表达式。

1.7 在圆柱坐标系中，一点的位置由  $(4, 2\pi/3, 3)$  定出，求该点在

(1) 直角坐标系中的坐标；

(2) 球坐标系中的坐标。

1.8 用球坐标表示场  $\vec{E} = \hat{r}(25/r^2)$ ，

(1) 求在点  $(-3, 4, -5)$  处的  $|\vec{E}|$  和  $E_z$ ；

(2) 求  $\vec{E}$  与矢量  $\vec{B} = 2\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$  构成的夹角。

1.9 一球面  $S$  的半径为5，球心在坐标原点，计算

$$\oint_S (\hat{r} 3 \sin\theta) \cdot d\vec{S}$$

1.10 求标量场  $f = x^2 z^3 + 2y^2 z$  在点  $M(2, 0, -1)$  处沿  $\vec{l} = 2x\hat{x} - xy^2\hat{y} + 3z^4\hat{z}$  方向导数。

1.11 求标量场  $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  在点  $O(0, 0, 0)$  与  $A(1, 1, 1)$  处梯度的大小和方向余弦。又问在哪些点上的梯度为0？

1.12 若在标量场  $u=u(M)$  中恒有  $\nabla u = 0$ ，证明  $u = \text{常数}$ 。

1.13 求下列标量场的梯度

(1)  $f(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \cos\varphi + z^2 \sin\varphi$ ；

(2)  $f(r, \theta, \varphi) = (ar^2 + \frac{1}{r^3}) \sin 2\theta \cos\varphi$

(3)  $f(r, \theta, \varphi) = 2r \sin\theta + r^2 \cos\varphi$

1.14 设 $s$ 为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ )，求矢量场  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  向上穿过 $s$ 的  
通量 $\Phi$ 。[提示：注意 $s$ 的法矢 $\vec{n}$ 与 $\vec{r}$ 同指向]。

1.15 求 $\nabla \cdot \vec{A}$ 在给定点处的值：

(1)  $\vec{A} = x^3\hat{x} + y^3\hat{y} + z^3\hat{z}$  在点 $M(1,0,-1)$ 处；

(2)  $\vec{A} = 4x\hat{x} - 2xy\hat{y} + z^2\hat{z}$  在点 $M(1,1,3)$ 处

1.16 已知  $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$ ，求 $\nabla \cdot \vec{F}$

1.17 求空间一点 $M$ 的矢径 $\vec{r} = \overline{OM}$ 在园柱坐标系和球面坐标系中的表示式；并由此证明  
 $\vec{r}$ 在这两种坐标系中的散度都等于3。

1.18 设 $\vec{a}$ 为常矢， $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ， $r = |\vec{r}|$ ，求：

(1)  $\nabla \cdot (r\vec{a})$ ；(2)  $\nabla \cdot (r^2\vec{a})$ ；(3)  $\nabla \cdot (r^n\vec{a})$ ，( $n$ 为整数)。

1.19 求使 $\nabla \cdot (r^n\vec{r}) = 0$ 的整数 $n$  ( $\vec{r}$ 与 $r$ 同上题)。

1.20 已知函数 $f$ 沿封闭曲面 $S$ 向外法线的方向导数为常数 $c$ ， $\Omega$ 为 $S$ 所围的空间区域， $s$ 为 $S$ 的面积。证明

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla f) d\tau = cs$$

1.21 求 $\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y} + cz\hat{z}$  ( $c$ 为常数)沿圆周曲线 $x^2 + y^2 = a^2$ ， $z = 0$ 的环量。

1.22 求 $\vec{F} = x(z-y)\hat{x} + y(x-z)\hat{y} + z(y-x)\hat{z}$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿 $\vec{n} = \hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$ 方向的环  
量密度。

1.23 求下列矢量场的散度和旋度：

(1)  $\vec{F} = (3x^2y + z)\hat{x} + (y^3 - xz^2)\hat{y} + 2xyz\hat{z}$ ；

(2)  $\vec{F} = \rho \cos^2 \varphi \hat{\rho} + \rho \sin \varphi \hat{\phi}$ ；

(3)  $\vec{F} = yz^2\hat{x} + zx^2\hat{y} + xy^2\hat{z}$ ；

(4)  $\vec{F} = P(x)\hat{x} + Q(y)\hat{y} + R(z)\hat{z}$ 。

1.24 已知  $A = 3y\hat{x} + 2z^2\hat{y} + xy\hat{z}$ ， $B = x^2\hat{x} - 4\hat{z}$ ，求 $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B})$ 。

1.25 设 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ， $r = |\vec{r}|$ ， $\vec{c}$ 为常矢。求

(1)  $\nabla \times \vec{r}$ ；(2)  $\nabla \times [f(r)\vec{r}]$ ；

(3)  $\nabla \times [f(r)\vec{c}]$ ；(4)  $\nabla \cdot [\vec{r} \times f(r)\vec{c}]$ 。

1.26 设函数 $u(x,y,z)$ 及矢量 $\vec{A} = P(x,y,z)\hat{x} + Q(x,y,z)\hat{y} + R(x,y,z)\hat{z}$ 的三个坐标函数都有  
二阶连续偏导数，证明：

(1)  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ ；(2)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ 。

1.27 证明下列矢量场为有势场，并求其势函数

1).  $\vec{F} = (y \cos xy)\hat{x} + (x \cos xy)\hat{y} + \sin z\hat{z}$ ；

$$2). \quad \vec{F} = (2x \cos y - y^2 \sin x)\hat{x} + (2y \cos x - x^2 \sin y)\hat{y} \quad .$$

1.28 下列矢量场  $\vec{F}$  是否保守场? 若是, 计算曲线积分  $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$ 。

$$(1). \quad \vec{F} = (6xy + z^3)\hat{x} + (3x^2 - z)\hat{y} + (3xz^2 - y)\hat{z}, \quad l \text{ 的起点为 } A(4,0,1), \text{ 终点为 } B(2,1,-1);$$

$$(2). \quad \vec{F} = 2xz\hat{x} + 2yz^2\hat{y} + (x^2 + 2y^2z - 1)\hat{z}, \quad l \text{ 的起点为 } A(3,0,1), \text{ 终点为 } B(5,-1,3)。$$

1.29 证明  $\nabla u \times \nabla v$  为管形场。

1.30 求证  $\vec{B} = xyz^2 \vec{A}$  是管型场, 而  $\vec{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\hat{x} + (3x^3y - 3xy)\hat{y} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\hat{z}$  不是管型场。

1.31 证明矢量场  $\vec{F} = (2x + y)\hat{x} + (4y + x + 2z)\hat{y} + (2y - 6z)\hat{z}$  为调和场, 并求其调和函数。

1.32 已知  $u = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ , 求  $\nabla^2 u$ 。

1.33 三个矢量  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$\vec{A} = \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi$$

$$\vec{B} = \hat{\rho} z^2 \sin \varphi + \hat{\phi} z^2 \cos \varphi + 2z \rho z \sin \varphi$$

$$\vec{C} = \hat{x}(3y^2 - 2x) + \hat{y}x^2 + \hat{z}2z$$

(1). 哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示? 哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示?

(2). 求出这些矢量的源分布。

1.34 证明  $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = 2r \sin \theta \hat{r} + r \cos \theta \hat{\theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \hat{\phi}$  为有势场, 并求其势函数。

1.35 证明  $\vec{F}(\rho, \varphi, z) = \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos \varphi \hat{\rho} - \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \sin \varphi \hat{\phi} + b^2 \hat{z}$  为调和场。