T₁ 解：(1) 质点A落入方格的信源空间为：

$$\begin{bmatrix} X_A \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (8,5) & (8,6) \\ \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} \end{bmatrix}$$

A落入任一格的平均自信息量为

$$H_A(X) = \sum_{i=1}^{48} p_i \log \frac{1}{p_i} = \log 48 \text{ bit} = 5.585 \text{ bit}$$

(2) A已落入，B只能落入其它47格中的一格，其信源空间：

$$\begin{bmatrix} X_B \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{47} \\ \frac{1}{47} & \frac{1}{47} & \cdots & \frac{1}{47} \end{bmatrix}$$

B落入的平均自信息量

$$H_B(X) = \sum_{j=1}^{47} p_j \log \frac{1}{p_j} = \log 47 = 5.554 \text{ bit}.$$

(3) A、B同时落入，一共有48×47中可能，每种可能都是等概率的。

故信源空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{48\times47} \\ \frac{1}{48\times47} & \frac{1}{48\times47} & \cdots & \frac{1}{48\times47} \end{bmatrix}$$

A、B同时落入的平均自信息量：

$$H(X) = \sum_{k=1}^{48\times47} p_k \log \frac{1}{p_k} = \log 48 + \log 47 = 11.14 \text{ bit}.$$

T₂ 证明：熵函数 $H(\vec{P})$ 是概率矢量 $\vec{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 的严格上凸函数。

即 ∀概率矢量 $\vec{P_1}$、$\vec{P_2}$ 及 $\theta\in(0,1)$，有 $H(\theta\vec{P_1}+(1-\theta)\vec{P_2}) \ge \theta H(\vec{P_1}) + (1-\theta)H(\vec{P_2})$

$$\Leftrightarrow \theta\sum_{i=1}^{n} p_{1i}\log\frac{1}{p_{1i}} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} p_{2i}\log\frac{1}{p_{2i}} \le \sum_{i=1}^{n}(\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i})\log\frac{1}{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}$$

$$\Leftrightarrow \theta\sum_{i=1}^{n} p_{1i}\log\frac{1}{p_{1i}} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} p_{2i}\log\frac{1}{p_{2i}} - \sum_{i=1}^{n}(\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i})\log\frac{1}{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}} \le 0.$$

$$\text{左式} = \theta\sum_{i=1}^{n}\left(p_{1i}\log\frac{1}{p_{1i}} - p_{1i}\log\frac{1}{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}\right) + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n}\left(p_{2i}\log\frac{1}{p_{2i}} - p_{2i}\log\frac{1}{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}\right)$$

$$= \theta\sum_{i=1}^{n} p_{1i}\log\frac{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}{p_{1i}} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} p_{2i}\log\frac{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}{p_{2i}} \overset{\text{(Jensen不等式)}}{\le} \theta\sum_{i=1}^{n}\log p_{1i}\frac{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}{p_{1i}} + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n}\log p_{2i}\frac{\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}}{p_{2i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\log(\theta p_{1i}+(1-\theta)p_{2i}) \le \sum_{i=1}^{n}\log(\theta+1-\theta) \le 0.$$ 证毕.

T3 解：一个像素包含的信息量：

$H_0(X) = 128 \cdot \frac{1}{128}\log 128 = 7bit$

每帧图像含有的信息量（由于所有像素都是独立变化）为：

$H(X) = 3\times10^5\ H_0(X) = 2.1\times10^6 bit$.

T4 解：(1) 由"汉字字汇是等概率分布的"，可知广播员描述此图像所广播的信息量

$H'(X) = 1000 \cdot H_0'(X)$. 其中 $H_0(X)$ 为一个字含有的信息量，

$H_0'(X) = 10000 \cdot \frac{1}{10000}\log 10000 = 13.28\ bit$.

则广播的信息量 $H'(X) = 1.328\times10^5 bit$.

若要完整描述此图像，需要 $\frac{H(X)}{H_0(X)} = \frac{2.1\times10^6}{13.28} \approx 1.58\times10^5$ 个汉字.

T5 解：(1) 若不同字母等概率出现，则信源空间：

$$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

输出一个字母含有的信息量

$H(X) = 4\times\frac{1}{4}\log 4 = 2bit$.

每个字母有两个二元码脉，则传输的平均信息率为

$$V = \frac{H(X)}{2\sigma t} = \frac{2bit}{10ms} = 200bit/s$$

(2) 由题得信源空间：

$$\begin{bmatrix} Y \\ p(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ 1/5 & 1/4 & 1/4 & 3/10 \end{bmatrix}$$

输出一个字母含有的信息量：

$H(Y) = \frac{1}{5}\log 5 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{10}\log\frac{10}{3} = 1.985\ bit$.

传输的平均信息率为

$$V' = \frac{H(Y)}{2\sigma t} = \frac{1.985bit}{10ms} = 198.5bit/s$$

T6.解：设两个色子点数之和为随机变量X，则信源空间：

$$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

(1) 点数之和的不确定性：

$$H(X) = \sum_{i=1}^{11} p_i \log \frac{1}{p_i} = 3.274\text{bit}.$$

(2). 若得知色子点数之和为8，此时信源空间：

$$\begin{bmatrix} Y \\ p(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,6) & (3,5) & (4,4) & (5,3) & (6,2) \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

不确定性为

$$H(Y) = 5 \times \frac{1}{5} \log 5 = 2.322\text{bit}.$$

仍需要2.322bit的信息量.

T7解：

X \ Y	0	1
0	1/3	1/3
1	0	1/3

(X, Y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
$Z = X \oplus Y$	0	1	1	0.
P	1/3	1/3	0	1/3.

(1) X的信源空间：

$$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$ 故 $H(X) = \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\log 3 = 0.918\text{bit}.$

Y的信源空间

$$\begin{bmatrix} Y \\ p(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$ 故 $H(Y) = \frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} = 0.918\text{bit}.$

(2) $H(X|Y) = \sum p(x,y) \log \frac{1}{p(x|y)} = \frac{1}{3}\log 1 + \frac{1}{3}\log\frac{2}{1} + \frac{1}{3}\log 2 = \frac{2}{3}\text{bit}$

$H(Y|X) = \sum p(x,y) \log \frac{1}{p(y|x)} = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\log 1 = \frac{2}{3}\text{bit}.$

X和Z的联合分布：

(X,Z)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
P	1/3	1/3	1/3	0

$H(X|Z) = \sum p(x,z) \log \frac{1}{p(x|z)} = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\log 1 + \frac{1}{3}\log 2 = \frac{2}{3}$ bit.

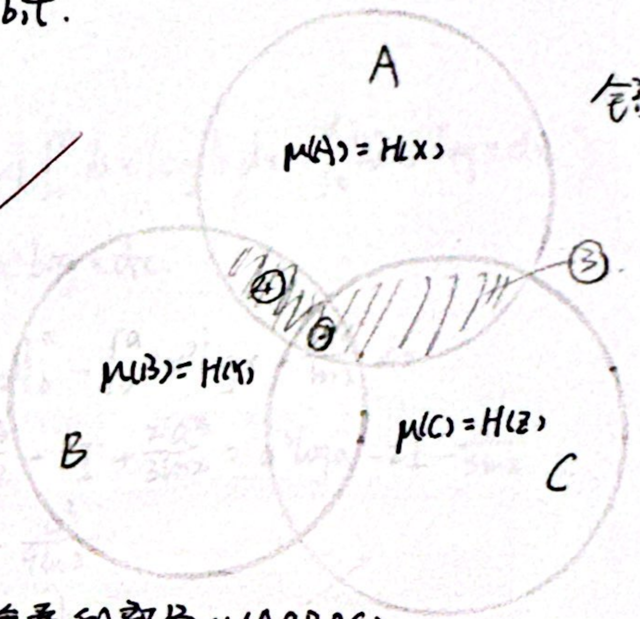
(3) X, Y的互信息 $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = (0.918 - 0.667)$ bit $= 0.251$ bit.

X, Y, Z的联合分布：

(X,Y,Z)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
P	1/3	0	0	1/3	0	0	1/3	0

故 $H(XYZ) = \sum p_i \log \frac{1}{p_i} = \log 3 = 1.585$ bit.

T8 解.
① $\mu(A\cup B\cup C)$　　$I(X;YZ)$
② $\mu(A\cap B\cap C)$　　$I(X;Y;Z)$
③ $\mu(A\cap(B\cup C))$　　$H(XYZ)$
④ $\mu((A\cap B)-C)$　　$I(X;Y|Z)$



a. $I(X;YZ) = H(X) + H(YZ) - H(XYZ)$
对应 $\mu(A\cap(B\cup C))$ 的部分

b. $I(X;Y;Z)$ 表示三变量的互信息. 即三变量重叠的部分 $\mu(A\cap B\cap C)$

c. $H(XYZ) = H(X) + H(YZ) - I(X;YZ) = H(X) + H(Y) + H(Z) - I(Y;Z)$
$- (I(X;Y) + I(X;Z) - I(X;Y;Z)) = H(X) + H(Y) + H(Z)$
$- I(Y;Z) - I(X;Y) - I(X;Z) + I(X;Y;Z)$. 对应 $\mu(A\cup B\cup C)$ 部分.

d. $I(X;Y|Z) = \cancel{H(X)+H(Y|Z)}\ H(X|Z) + H(Y|Z) - H(XY|Z)$

联系方式：对应 $\mu((A\cap B)-C)$ 的部分.

T9 证明：$H(XYZ) = H(XZ) + H(Y|ZX) = H(XZ) + H(Y|X) - H(Y|X) + H(Y|ZX)$

$= H(XZ) + H(Y|X) - [H(Y|X) - H(Y|ZX)]$

$= H(XZ) + H(Y|X) - [\sum_X\sum_Y p(xy)\log\frac{1}{p(y|x)} - \sum_X\sum_Y\sum_Z p(xyz)\log\frac{1}{p(y|zx)}]$

$= H(XZ) + H(Y|X) - [\sum_X\sum_Y\sum_Z p(xyz)\log\frac{1}{p(y|x)} - \sum_X\sum_Y\sum_Z p(xyz)\log\frac{1}{p(y|zx)}]$

$= H(XZ) + H(Y|X) - \sum_{XYZ} p(xyz)\log\frac{p(y|zx)}{p(y|x)}$

$= H(XZ) + H(YX) - I(Y;Z|X)$. 证毕.

T10 解：$p(x) = \begin{cases} bx^2. & 0 \le x \le a \\ 0. & \text{else}. \end{cases}$

微分熵 $h(X) = -\int_0^a p(x)\log p(x)dx$

$= -\int_0^a bx^2\log bx^2 dx = -(\int_0^a bx^2\log b\,dx + \int_0^a 2bx^2\log x\,dx)$.

$= -\frac{1}{3}ba^3\log b - \int_0^a 2bx^2\log x\,dx$.

令 $I = \int_0^a x^2\log x\,dx$. 则 $I = x^2(x\log x - \frac{x}{\ln 2})\Big|_0^a - \int_0^a 2x^2\log x - \frac{2x^2}{\ln 2}dx$

$= a^3\log a - \frac{a^3}{\ln 2} - 2I + \frac{2a^3}{3\ln 2} = a^3\log a - 2I - \frac{a^3}{3\ln 2}$

$\Rightarrow 3I = a^3\log a \Rightarrow I = \frac{1}{3}a^3\log a. - \frac{a^3}{9\ln 2}$

故 $h(X) = -\frac{1}{3}a^3b\log b - \frac{2}{3}ba^3\log a. - \frac{2a^3b}{9\ln 2}$

由归一性. $\int_0^a bx^2dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}ba^3 = 1$.

则 $h(X) = -2\log a - \log b. - \frac{2}{3\ln 2}. = \log\frac{e^{\frac{2}{3}}}{a^2b}$

思考题：不正确. 联合熵 $H(XY)$ 表示平均每两个信源符号所携带的信息量
它是指随机变量 X、Y 作为整体时输出的不确定度

联系方式：__________