

# 北京理工大学

## 2004 年自动控制理论考试试题

一、(20 分) 设系统 A、B 有相同的根轨迹如图 1 所示，系统 A 没有闭环零点，系统 B 有一个闭环零点 (-2)。

(1) 求系统 A、B 的开环传递函数  $G(s)H(s)$ ；

(2) 画出它们可能的结构图。

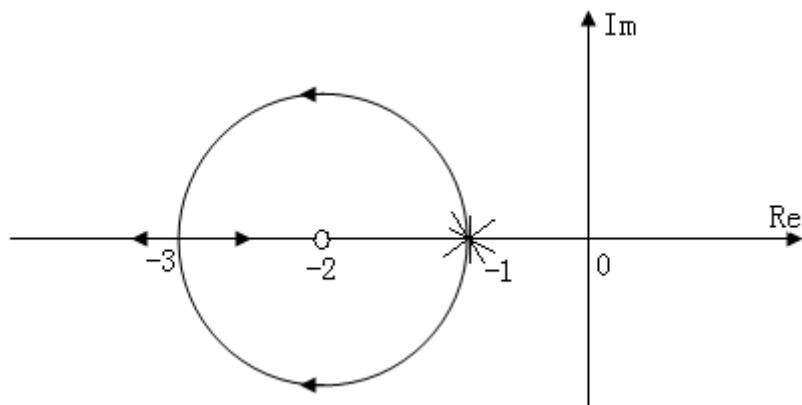


图 1

二、(20 分) 某系统由典型环节组成，是单位负反馈的二阶系统。它对单位阶跃输入的响应曲线如图 2 所示。试求该系统的开环传递函数及其参数。

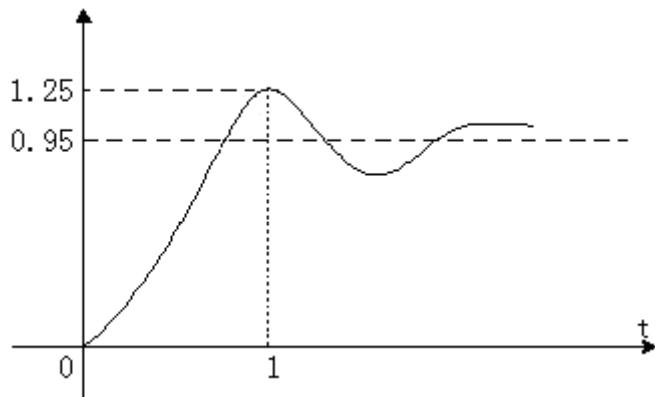


图 2

三、(20 分) 某非线性系统如图 3 所示， $h_1 = h_2 = 1, M_1 = M_2 = 2$ ，饱和特性的描述函数为

$$N_1(X) = \frac{2K}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{a}{X} + \frac{a}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X} \right)^2} \right]; \quad a = h_1; \quad K = \frac{M_1}{h_1};$$

$$\text{只有死区的继电器特性的描述函数 } N_2(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X} \right)^2}, \quad a = h_2, \quad M = M_2$$

- (1) 试分析系统的稳定性；  
 (2) 求出系统极限环的振幅和频率。

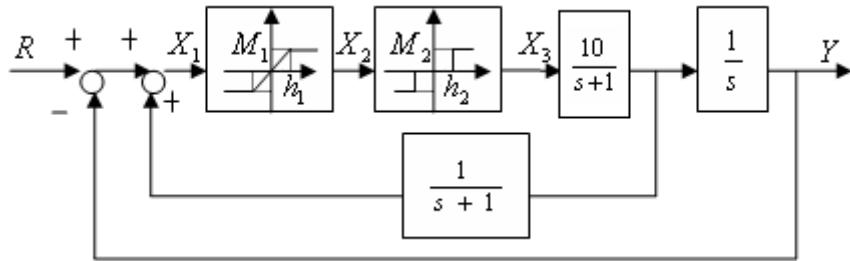


图 3

四、(20 分) 已知系统如下图 4 所示：

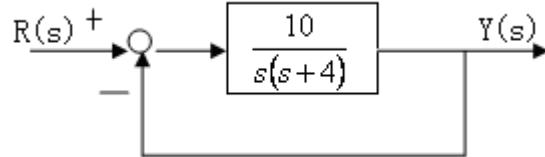


图 4

- (1) 求系统对单位阶跃输入响应的最大超调量和过渡过程时间；  
 (2) 求闭环系统的谐振频率  $\omega_p$  和谐振峰值  $M(\omega_p)$ ；  
 (3) 求开环系统对数频率特性的截止频率  $\omega_c$  和相位裕量  $\sigma$ 。

五、(20 分) 控制系统的方框图如图 5 所示。

- (1) 令系统状态  $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ , 写出系统状态空间表达式；  
 (2) 判断系统的稳定性、能控性和能观测性；  
 (3) 判断能否通过状态反馈把闭环系统的极点配置在  $-2, -3, -4$ ? 请说明理由，并在可能的情况下，求出状态反馈阵 F。

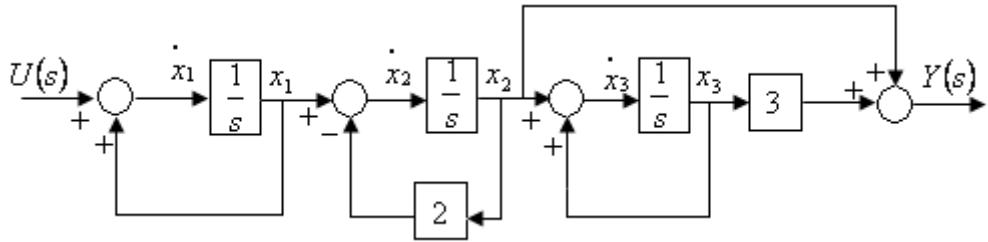


图 5

六、(20分) 设有如下非线性系统:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{x_1} = -x_1 + x_2^3 \\ \overset{\circ}{x_2} = x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

- (1) 试确定系统所有的平衡态;
  - (2) 判断各平衡态的稳定性。

七、(20 分) 离散系统如图 6 所示。已知  $K > 0, T_1 > 0, T$  为采样周期, 试证明系

系统的稳定条件是  $0 < K < \frac{2(1+e^{-T/T_1})}{1-e^{-T/T_1}}$ 。

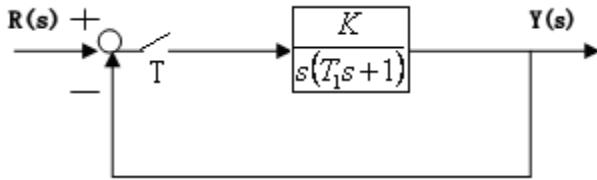


图 6

$$\text{注: } \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}; \quad \frac{1}{s+\alpha} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}; \quad \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

八、选择填空题（10分）请将答案标明题号写在答题纸上

- (1) 线性定常系统的对某输入信号的响应已知，则求该系统对输入信号的导数的响应，可通过把系统对输入信号响应的（ ）来求取；而求该系统对输入信号的积分的响应，可通过把系统对输入信号响应的（ ）来求取。（ ）

- (a) 导数, 导数; (b) 积分, 积分;  
 (c) 导数, 积分; (d) 积分, 导数;

- (2) 在频率法校正中, 利用串联超前校正网络和串联滞后校正网络的实质是: ( )

  - (a) 前者主要是利用相位超前特性, 后者利用相位滞后特性;
  - (b) 前者是利用低频衰减特性, 后者利用高频衰减特性;

- 
- (c) 前者是利用低频衰减特性，后者利用相位滞后特性；  
(d) 前者是利用相位超前特性，后者利用高频衰减特性；
- (3) 系统的根轨迹确定后，如果开环传递函数增加一个极点，则（ ）  
(a) 根轨迹由左向右移动；  
(b) 根轨迹由右向左移动；  
(c) 根轨迹的位置不变；
- (4) 某控制系统的开环传递函数为  $G(s)H(s) = \frac{10(s+0.5)}{s(0.5s+1)(s^2+2s+2)}$ ，那么该系  
统的开环增益  $K= ( )$ 。  
(a) 0.5; (b) 2.5; (c) 5.0; (d) 10;
- (5) 闭环控制系统能有效地抑制（ ）中的扰动的影响。  
(a) 给定通道; (b) 前向通道; (c) 反馈通道; (d) 测量通道;

# 北京理工大学

## 2005 年自动控制理论考试试题

一、(25 分) 最小相位系统的开环渐近幅频特性曲线如图 (1) 所示, 其中参数  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_c$  为已知。

- (1) 求开环传递函数表达式;
- (2) 给出闭环系统相位稳定裕量表达式。当  $\omega_c/\omega_1=100$ ,  $\omega_c/\omega_2=2$ ,  $\omega_c/\omega_3=0.1$  时, 判别系统的稳定性, 并画出 Nyquist 图的大致形状;
- (3) 设参考输入  $r(t)=bt+\frac{1}{2}ct^2$ , 求系统的稳态误差。

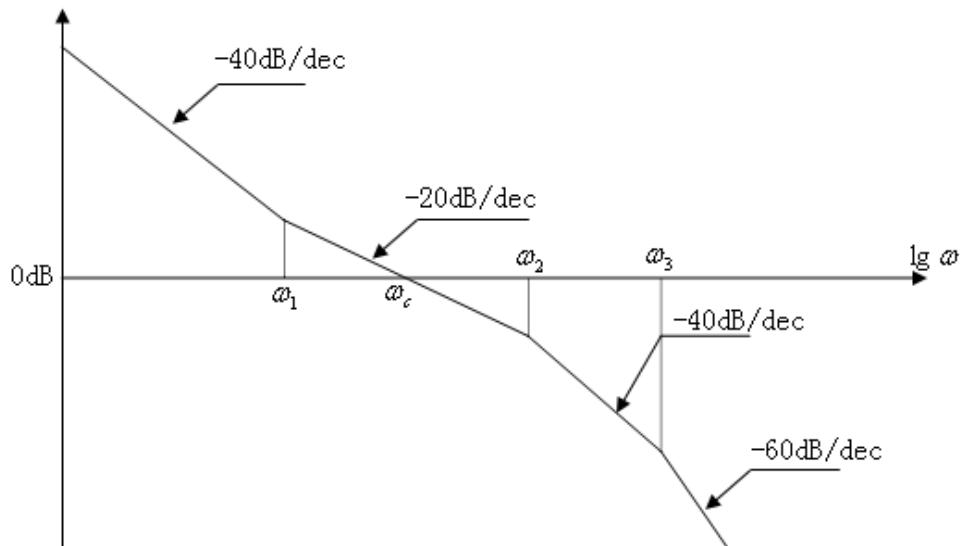


图 (1)

二、(20 分) 系统如图 (2) 所示。

- (1) 画出以  $K_t$  为参数的闭环根轨迹;
- (2) 从根轨迹上确定  $K_t$  应取的值和闭环极点, 使系统的单位阶跃响应的动态品质指标百分比超调  $\sigma\% \leq 16.3\%$ 。

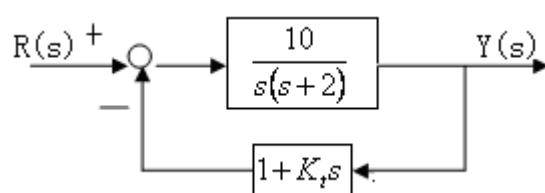


图 (2)

三、(20分) 设

$$f_1(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

$$f_2(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$

$$f(s, \lambda) = (1 - \lambda)f_1(s) + \lambda f_2(s)$$

(1) 试用 Routh 判据证明, 对所有  $\lambda \in [0,1]$ ,  $f(s, \lambda)$  均稳定。

(2) 试用根轨迹方法证明, 对所有  $\lambda \in [0,1]$ ,  $f(s, \lambda)$  均稳定。

四、(20分) 考虑如图(3)所示的离散时间控制系统,  $D(z)$  为数字控制器。

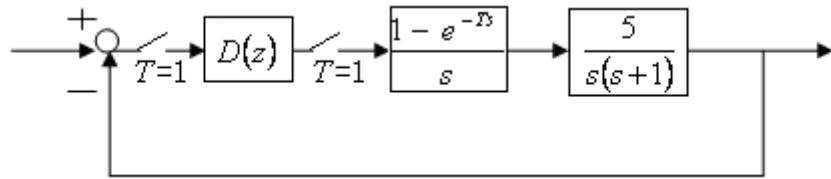


图 (3)

(1) 求被控对象的开环传递函数;

(2) 当  $D(z)=1$  时, 判断闭环系统的稳定性;

(3) 试设计系统在单位阶跃输入下的最小拍控制器  $D(z)$ , 并计算调节时间。

注:  $\frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$ ;  $\frac{1}{s+\alpha} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$ ;  $\frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$

五、(20分) 非线性系统如图(4)所示, 滞环继电器特性的描述函数为

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} - j \frac{4hM}{\pi X^2} = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} - j \frac{4h}{\pi X^2}, \quad M = 1$$

(1) 该系统是否存在自持振荡? 自持振荡是否稳定?

(2) 若存在稳定的自持振荡, 当要求自持振荡频率  $\omega \geq 20 \text{ rad/sec}$ , 振幅  $\leq 0.7$  时,

继电器参数  $h$  应如何取值?

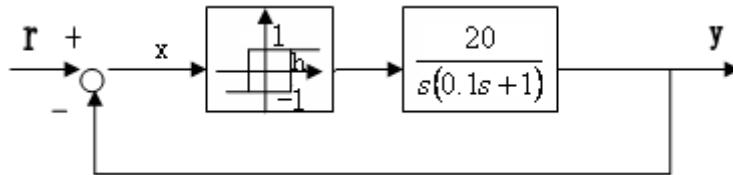
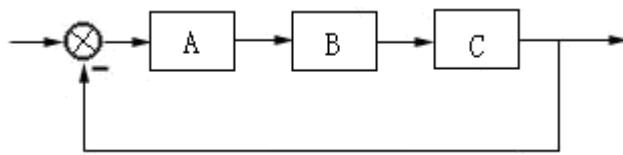


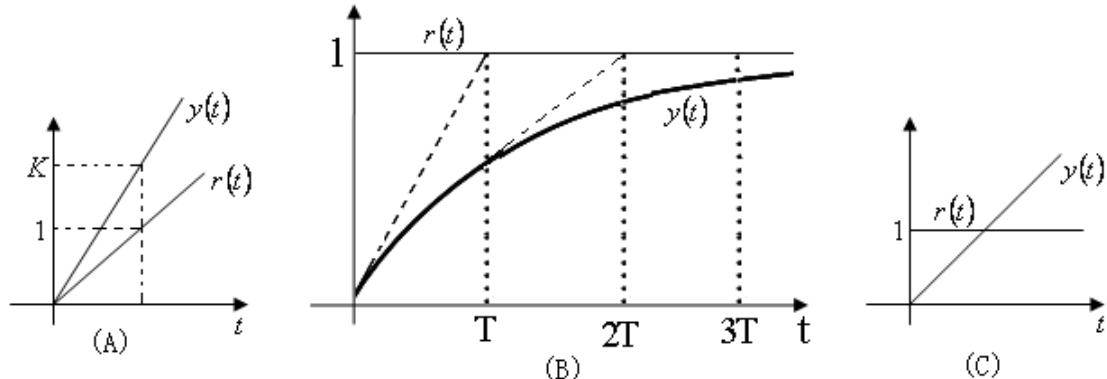
图 (4)

六、(25分) 如图(5a)所示系统由A、B、C组成，它们各自对不同输入 $r(t)$ 的响应曲线 $y(t)$ 分别如图(5b)所示。

- (1) 该系统的三个环节A、B、C的传递函数是什么？开环系统的总传递函数是什么？画出其结构图；
- (2) 从结构图上选状态变量，写出状态空间表达式；
- (3) 当 $K=10, T=0.1$ ，求单位阶跃输入时系统的稳态误差和动态响应指标百分比超调 $\sigma\%$ ，上升时间 $t_r$ ，峰值时间 $t_p$ 。

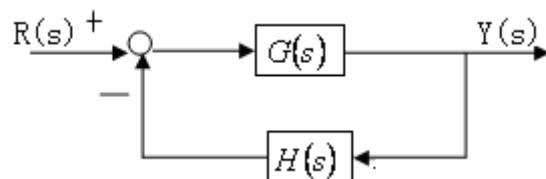


图(5a)



图(5b)

七、(20分) 系统如图(6)所示：



图(6a)

设

$$G(s) = \frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}, \quad H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

- 
- (1) 写出  $G(s)$  和  $H(s)$  的对角规范形状态空间表达式，并由此给出图 (6b) 所示系统的状态空间表达式；

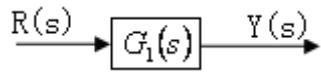


图 (6b)

- (2) 判断图 (6b) 所示系统的稳定性；  
(3) 若系统不稳定，判断是否存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；  
(4) 设

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

请重新讨论 (1)、(2) 和 (3) 中提出的问题。

# 北京理工大学

## 2006 年自动控制理论考试试题

### 一、根轨迹方法 (25 分)

单位反馈系统如图 1，其中  $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ 。为简便起见，图中用 R 表示  $r(t)$  的

Laplace 变换  $R(s)$ 。其余的符号和以后的图均采用这种简便记法。

(1) 设  $G_c(s) = K$ ，画出根轨迹图；

(2) 确定 K 的值，使闭环系统单位阶跃响应的最大超调量为  $M_p = e^{-\pi}$ 。计算相

应的上升时间  $t_r$ ；

(3) 设计控制器  $G_c(s) = \frac{K_c \alpha(Ts + 1)}{\alpha Ts + 1}$  使最大超调量  $M_p$  保持不变，上升时间为

$t_r = \frac{3\pi}{8}$ ，并使闭环系统尽可能地简单。

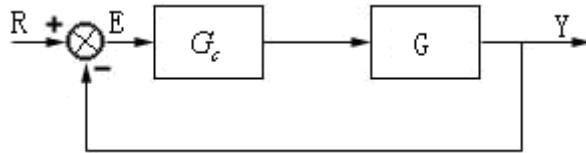


图 1：单位反馈系统

### 二、状态空间方法 (30 分)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

先设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

(i) 证明：若  $f(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)^2$ , 其中  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则可通过

状态空间中的线性变换  $\hat{x} = Tx$ ，将状态空间表达式 (1) 变为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\hat{A} = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

T 可取为  $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$

(ii) 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

求  $e^{Jt}$  和  $e^{At}$ 。

(iii) A 同 (ii),  $B = [1 \ 1 \ 0]^T, C = [0 \ 0 \ 1]$

判断系统的可控性和可观测性。若系统不可控或不可观测，确定不可控或不可观测的模态；

(iv) A, B, C 同 (iii), D=0,  $x(0) = [1 \ -1 \ 1]^T, x(t)$  是状态方程在初态  $x(0)$  下的解，证明  $x^T(0)x(t) = 3e^{-t} \forall u(t), t \geq 0$ ，并解释这个结果。

(v) 又设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

B, C, D 待定。若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  配置系统的极点，至少需要几个独立的控制变量（即 B 至少要有几个线性无关的列向量）？请说明理由。

若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  使闭环系统渐近稳定，至少需要几个独立的控制变量？请说明理由。

### 三、频率响应分析 (25 分)

考虑图 2 所示的控制系统，其中  $G_c(s), G_l(s)$  和  $G_2(s)$  均为最小相位系统，其渐近对数幅频特性曲线如图 3,  $H(s)=1$ 。

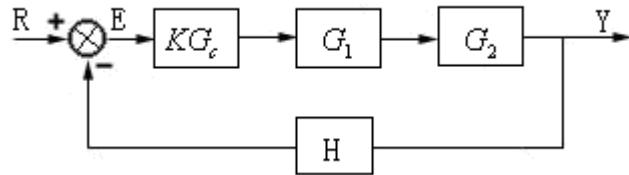


图 2：由三个最小相位环节构成的反馈控制系统

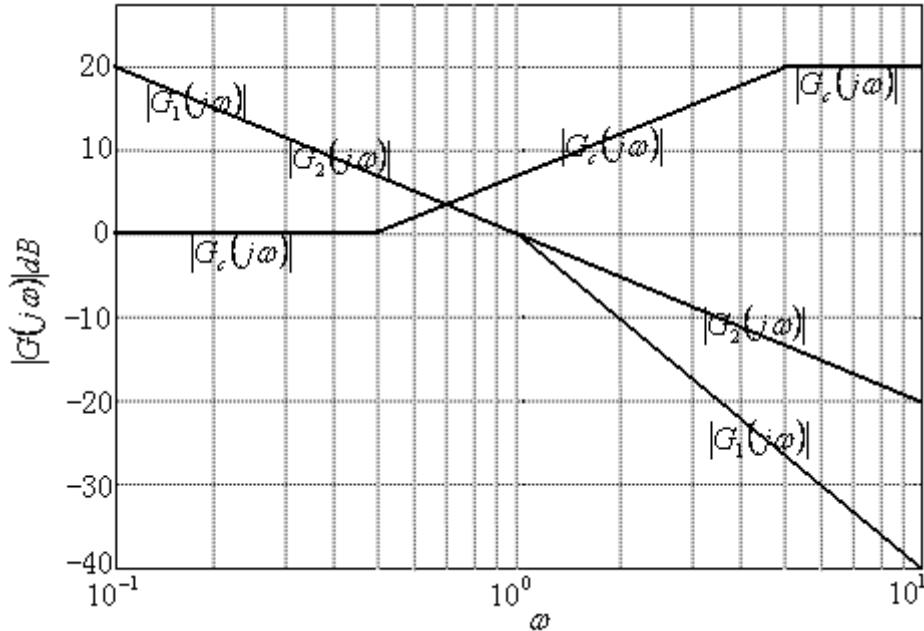


图 3：渐近对数幅频特性曲线

- (1) 确定开环传递函数  $G_0(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$  并画出其渐近对数幅频和相频特性曲线 (要求按图 3 中的尺寸自制两张对数坐标纸);
- (2) 画出 Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$ ;
- (3) 由 Nyquist 曲线确定使闭环系统稳定的 K 值，并用根轨迹方法验证;
- (4) 求  $K=1$  和  $K=2$  时的稳态误差和加速度误差。

#### 四、非线性控制系统 (25 分)

系统的方框图如图 4 所示，其中  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$ ,  $M_2 = M_3 = 1$ ,  $K_1 = 1$ ，所有的非线性特性均关于原点中心对称， $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$ 。画出负倒特性曲线和线性部分  $G(s)$  的 Nyquist 图，以此分析系统是否存在自激振荡及其稳定性；如果存

在自激振荡，请计算输出  $y(t)$  的振幅和频率。图中死区、饱和特性和继电特性等非线性环节的描述函数分别为：

$$N_1(X) = \frac{2K_1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta_1}{X} - \frac{\Delta_1}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_1}{X} \right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_1$$

$$N_2(X) = \frac{2K_2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{\Delta_2}{X} + \frac{\Delta_2}{X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_2}{X} \right)^2} \right], \quad X \geq \Delta_2$$

$$N_3(X) = \frac{4M_3}{\pi X} \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta_3}{X} \right)^2} - j \frac{4M_3 \Delta_3}{\pi X^2}, \quad X \geq \Delta_3$$

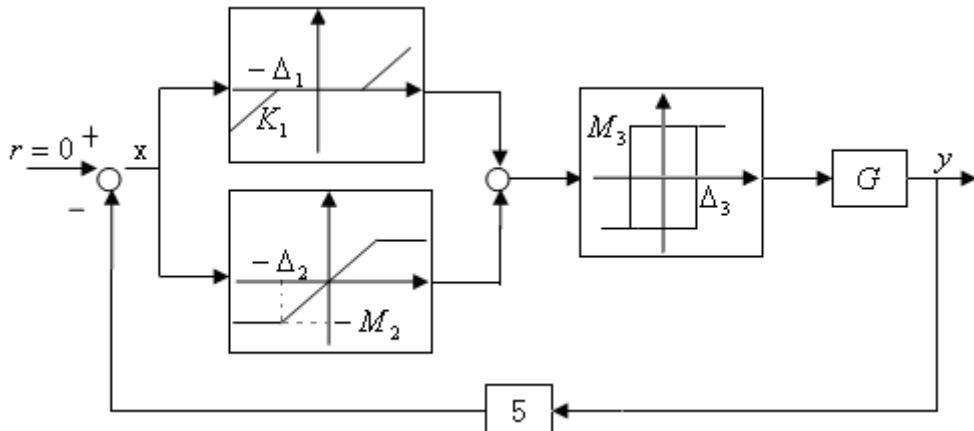


图 4：具有非线性特性的反馈控制系统

## 五、离散控制系统 (25 分)

考虑如图 5 所示的直流电机速度控制系统，ZOH 表示零阶保持器。设模拟被控对象的传递函数如下：

$$G_p(s) = \frac{261714.877}{(s + 297.456)(s + 879.844)}$$

数字控制器由微处理器实现，其脉冲传递函数为

$$D(z) = K_p + \frac{K_R T}{2} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)$$

式中， $T = 0.001s$ 、 $K_p = 1$  和  $K_R = 295.276$

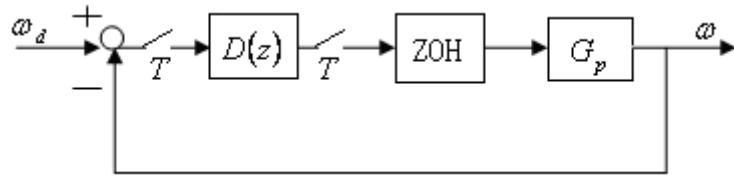


图 5：直流电机速度控制系统的框图

- (1) 求数字控制系统的开环和闭环脉冲传递函数；
- (2) 判断整个控制系统的稳定性；
- (3) 当  $\omega_d$  为单位阶跃函数时，求数字系统在采样时刻的输出响应；
- (4) 重新设计数字控制器  $D(z)$ ，使数字系统对单位阶跃输入具有最小拍输出响应。

常用函数的 z-变换表：

$$\frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}; \quad \frac{1}{s+\alpha} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}; \quad \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

## 六、Lyapunov 稳定性 (20 分)

设非线性系统的数学描述如下：

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - 1 = 0$$

- ( i ) 写出系统的状态方程；
- ( ii ) 求系统的所有平衡点；
- ( iii ) 判断每一个平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性，并阐明理由。

---

# 北京理工大学

## 2007 年自动控制理论考试试题

一、选择填空 (每小题 10 分, 共 60 分)

1 采样系统的特征方程为  $D(z) = z^2 + (2K - 1.75)z + 2.5 = 0$ , 使系统稳定的  $K$  值是 ( )

- (a)  $K \geq 2.63$
- (b)  $0 < K \leq 2.63$
- (c) 所有  $K > 0$
- (d) 不存在这样的  $K$  值。

2 采样系统的输出  $y(kT)$  的  $z$ -变换为  $Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 2}{z^3 - 25z^2 + 0.6z}$ , 则前四个采样时刻

的输出为 ( )

- (a)  $y(0) = 0, y(T) = 27, y(2T) = 47, y(3T) = 60.05$
- (b)  $y(0) = 1, y(T) = 27, y(2T) = 674.4, y(3T) = 16845.8$
- (c)  $y(0) = 1, y(T) = 27, y(2T) = 647, y(3T) = 660.05$
- (d)  $y(0) = 1, y(T) = 647, y(2T) = 47, y(3T) = 27$

3  $s$ -域的传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+6)}$ ,  $T$  为采样周期。经采样后  $z$ -域的脉

冲传递函数  $\hat{G}(z)$  是 ( )

- (a)  $\hat{G}(z) = \frac{5}{6} \frac{z}{z-1} - \frac{5}{4} \frac{z}{z-e^{-6T}} + \frac{5}{12} \frac{z}{z-e^{-T}}$
- (b)  $\hat{G}(z) = \frac{5}{6} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-6T}} + \frac{5}{12} \frac{z}{z-e^{-T}}$
- (c)  $\hat{G}(z) = \frac{5}{6} \frac{z}{z-1} - \frac{5}{4} \frac{z}{z-e^{-2T}} + \frac{5}{12} \frac{z}{z-e^{-6T}}$
- (d)  $\hat{G}(z) = \frac{1}{6} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}} + \frac{5}{6} \frac{z}{z-e^{-6T}}$

4 线性系统的单位斜坡响应为  $y(t) = t - 4 + 4e^{-t/4}$ , 则该系统的单位阶跃响应为

\_\_\_\_\_，该系统的传递函数为\_\_\_\_\_。

5 最小相位系统的开环对数幅频特性如图 1，则该系统的速度误差系数  $K_v =$  \_\_\_\_\_，加速度误差系数  $K_a =$  \_\_\_\_\_。

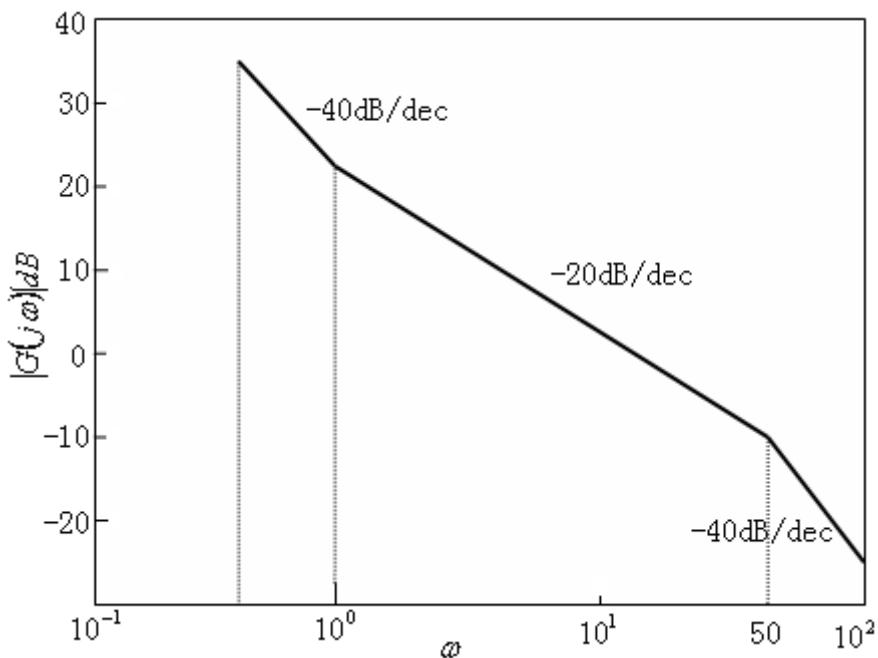


图 1：折线对数幅频特性

6 非线性系统的一个平衡态  $x_e$  位于不稳定的极限环内，该极限环内没有其它极

限环。下述说法正确的是（ ）。

- (a)  $x_e$  是不稳定平衡态。
- (b)  $x_e$  是稳定平衡态，以极限环内的点为初始状态的运动轨迹都趋于  $x_e$ 。
- (c)  $x_e$  是稳定平衡态，以极限环外的点为初始状态的运动轨迹都趋于  $x_e$ 。
- (d) 上述说法都不对，根本无法判定  $x_e$  是否稳定。

## 二、根轨迹方法 (20 分)

单位反馈系统如图 2，其中  $G(s) = \frac{s+b}{s(s-a)}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  为待定参数。为简便起见，

图中用 R 表示  $r(t)$  的 Laplace 变换  $R(s)$ 。其余的符号和均采用这种简便记法。

- (1) 设  $G_c(s) = K > 0$ , 已知根轨迹的分离点和汇合点分别是 1 和 -3。确定参数 a 和 b 并画出根轨迹图；

- 
- (2) 确定根轨迹和虚轴的交点并由此确定使闭环系统稳定的 K 值。  
 (3) 说明在稳定的前提下该反馈系统和标准二阶系统的阶跃响应在快速性和超调量两方面有何不同。

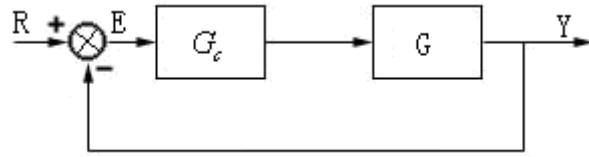


图 2: 单位反馈系统

### 三、状态空间方法 (20 分)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T x(t) + du(t) \end{cases}$$

其中  $A \in R^{3 \times 3}, b, c \in R^3, d \in R$

( i ) 设  $u(t)=0$ ，已知：若  $x_1(0)=[1 \ 0 \ 0]^T$ , 则  $x_1(t)=[e^{-t} \ 0 \ 0]^T$ ；

若  $x_2(0)=[1 \ 1 \ 0]^T$ , 则  $x_2(t)=[e^{-t} \ e^t \ 0]^T$ ；

若  $x_3(0)=[1 \ 1 \ 1]^T$ , 则  $x_3(t)=[e^{-t} \ e^t + te^t \ e^t]^T$ ，且

$$[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)] = e^{At} [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]$$

确定状态转移矩阵  $e^{At}$  和系统矩阵 A。

( ii ) 设

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad c^T = [c_1 \ c_2 \ c_3]$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，确定  $(A, b)$  的可控性和  $b_1, b_2, b_3$  的关系，以及  $(A, c^T)$  的可观测

性和  $c_1 \ c_2 \ c_3$  的关系。

### 四、频率法 (20 分)

考虑图 2 所示的控制系统，其中  $G(s) = \frac{1}{s(s-a)}$ ,  $a > 0$ 。

(1) 用 Nyquist 稳定性判据证明闭环系统对任何比例控制器  $G_c(s) = K_c$  都不稳定。

---

定。

(2) 设  $G_c(s)=K_c(1+\frac{1}{s\tau})$  为 PD 控制器。用 Nyquist 判据确定使闭环系统稳定的  $K_c$  和  $\tau$  的值。

## 五、离散控制系统 (20 分)

离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \\ y(k) = c^T x(k) \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -2.25 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad c^T = [-0.25 \ 0 \ 1]$$

( i ) 判断系统的稳定性。

( ii ) 令  $u(k) = r(k) + f^T x(k)$ , 求状态反馈阵  $f$  使闭环系统的极点为  $-0.5, 0.5, 0$ 。

## 六、Lyapunov 稳定性 (10 分)

设非线性系统的数学描述如下:

$$\ddot{y} + \dot{y} + \sin \pi y = 0$$

( i ) 写出系统的状态方程;

( ii ) 求系统的所有平衡点;

( iii ) 判断每一个平衡点在 Lyapunov 意义下的稳定性，并阐明理由。

## 自动控制原理 2004-2007 年真题答案

注：本答案仅供参考。

2004 年

一、解：(1) 由图可知，开环零点为  $z=-2$ ，开环极点为  $p_1 = p_2 = -1$ ，所以 A、B 的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+1)^2}$$

(2) 由系统 A 没有闭环零点，得其可能的结构图如图 1 (a) 所示。

由系统 B 有一个闭环零点-2，得其可能的结构图如图 1 (b) 所示。

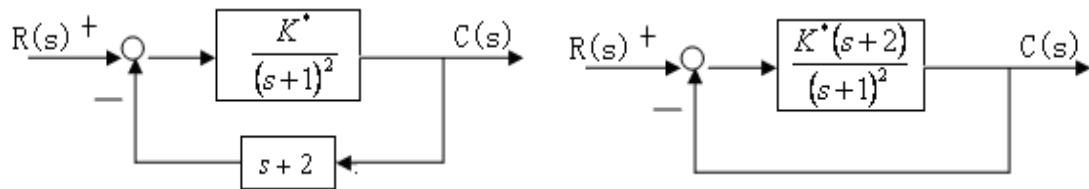


图 1 (a) 系统 A 结构图

图 1 (b) 系统 B 结构图

二、解：考虑到  $h(\infty) \neq 1$ ，结合已知条件，可设闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由

$$h(\infty) = 0.95 \Rightarrow K = 0.95$$

由图可知，

$$\sigma \% = \frac{t_p}{1.25 - 0.95} \approx 0.316 = 31.6\%$$

对照指标公式得

$$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \\ e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.316 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta = 0.344 \\ \omega_n = 3.344 \end{cases}$$

于是闭环传递函数为

$$\Phi(s) = 0.95 \cdot \frac{11.182}{s^2 + 2.301s + 11.182}$$

依题意，系统应由典型环节构成，且为单位反馈，相应的结构图可有两种形式，如图 (a)，(b) 所示：

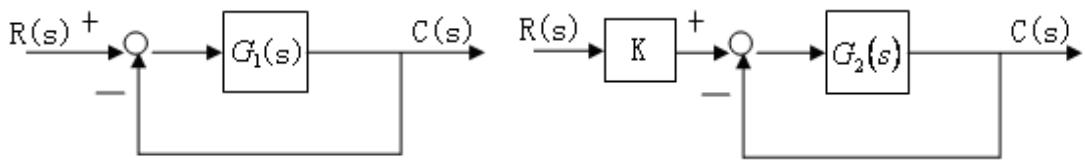


图 (a)

图 (b)

$$\text{对应图 (a), 有 } \Phi(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)} \Rightarrow G_1(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}$$

开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{10.623}{s^2 + 2.301s + 0.559} = \frac{10.623}{(s + 0.276)(s + 2.205)} \approx \frac{19.007}{(3.623s + 1)(0.494s + 1)}$$

即开环传递函数由 1 个比例环节和 2 个惯性环节构成。

$$\text{对应图 (b), 有 } \Phi(s) = K \cdot \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)}$$

$$\implies K = 0.95, \quad G_2(s) = \frac{11.182}{s^2 + 2.301s} = \frac{4.860}{s(0.435s + 1)}$$

即开环传递函数由 1 个比例环节、1 个积分环节和 1 个惯性环节构成。

三、解：由图可见，两非线性环节串联后的非线性特性仍是死区继电特性，如

图 a 所示。其中  $M = M_2 = 2, h = \frac{h_1}{M_1} \bullet h_2 = 0.5$

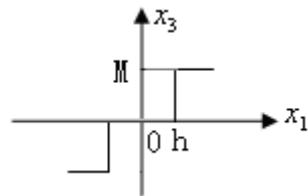


图 a 非线性环节串联后的等效特性

系统结构图可依次变换并化简为图 b、图 c、图 d：

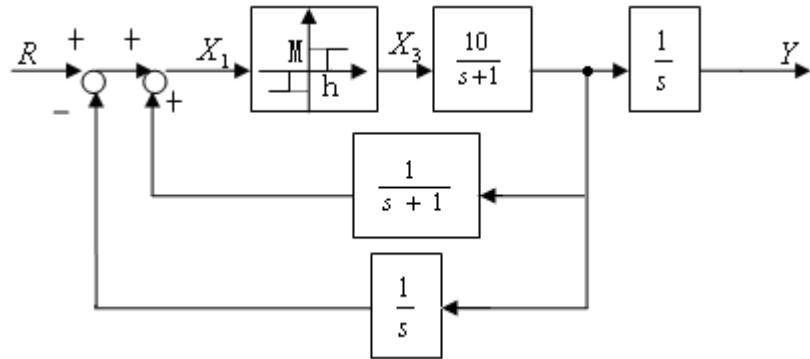


图 b 等效结构图 (1)

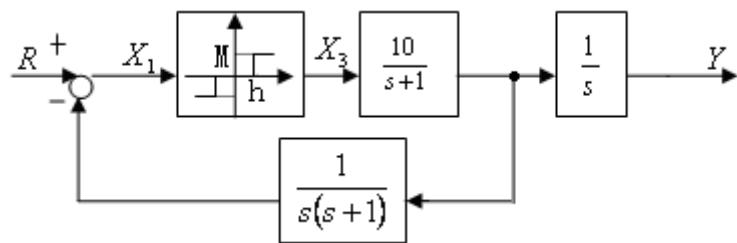


图 c 等效结构图 (2)

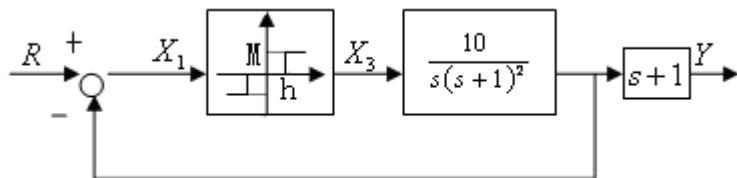


图 d 等效结构图 (3)

### (1) 分析该系统的稳定性

由图 d 可知，非线性部分为死区继电器特性 ( $M = 2, h = 0.5$ )

$$\text{线性部分传递函数为 } G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$$

①绘出  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线：死区继电特性的  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线往复分布在负实轴上，

且有一极值点，当  $X = \sqrt{2}h = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时， $N(X) = \frac{2M}{\pi h} = \frac{8}{\pi}$

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi}{8} \approx -0.4$$

绘出  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线如图 e 所示：

②绘出  $G(j\omega)$  曲线：由  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)^2}$  可推知， $G(j\omega)$  曲线如图 e 所示。

由  $\varphi(\omega_x) = -180^\circ \Rightarrow -90^\circ - 2\arctan\omega_x = -180^\circ \Rightarrow \omega_x = 1$ ，

此时  $|G(j\omega_x)| = \frac{10}{\omega_x \sqrt{1 + \omega_x^2}} = 5$

于是， $G(j\omega)$  曲线与负实轴的交点为  $(-5, j0)$ 。

③稳定性分析：

由图 e 可知，本系统会产生自激振荡，A 点为稳定的自激振荡，B 点为不稳定的自激振荡。

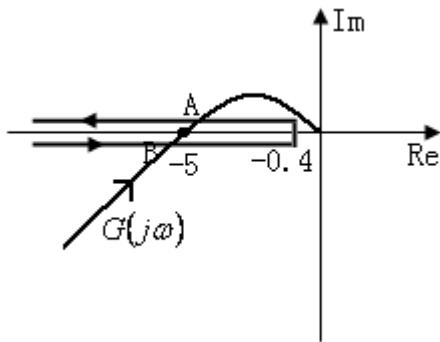


图 e 系统  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线和  $G(j\omega)$  曲线

(2) 求系统极限环对应的振幅和频率

由(1)中②可知，自振频率为  $\omega_x = 1$ ， $G(j\omega_x) = -5$

由交点处  $-\frac{1}{N(X)} = G(j\omega_x)$  得  $N(X) = -\frac{1}{G(j\omega_x)}$

即  $\frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} = \frac{1}{5}$

将  $M = 2, h = 0.5$  代入上式得  $\frac{8}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{1}{4X^2}} = \frac{1}{5}$

解得  $X_1 = 12.729, X_2 = 0.503$ ，即极限环振幅为 12.729，角频率为  $1\text{rad/s}$ 。

四、解：(1)

$$G(s) = \frac{10}{s(s+4)} \Rightarrow \Phi(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 10}$$

可得

$$\omega_n = \sqrt{10} \quad \zeta = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

超调量:

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 7.7\%$$

调节时间:

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 7s$$

(2) 谐振频率

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 1.414 rad/s$$

谐振峰值

$$M(\omega_p) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.46$$

(3)

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+4)}$$

由

$$|G(j\omega_c)| = \frac{10}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + 4}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 2.86 rad/s$$

相角裕量  $\sigma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{4} = 54.4^\circ$

五、解: (1) 由图可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_2 \\ y = 3x_3 + x_2 \end{cases}$$

整理可得系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1 \ 3]x \end{cases}$$

(2) 由于

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^2(s+2)$$

系统的特征值为 1、1、-2，有根在 s 平面的右半平面，因此系统不稳定。

由于  $\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

其秩为  $3=n$ , 所以系统状态完全可控。

由于  $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ,

其秩为  $2 < n$ , 所以系统状态不完全可观测。

### (3) 关于极点配置

由于系统状态完全可控, 因此系统可通过状态反馈任意配置闭环系统极点, 当然也可以将极点配置在-2、-3、-4了。

设状态反馈矩阵  $F = [f_1 \ f_2 \ f_3]$

$$A - BF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-f_1 & -f_2 & -f_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A - BF)| = \begin{vmatrix} s + f_1 - 1 & f_2 & f_3 \\ -1 & s + 2 & 0 \\ 0 & -1 & s - 1 \end{vmatrix} = s^3 + f_1 s^2 + (f_1 + f_2 - 3)s + (2 - 2f_1 + f_3 - f_2)$$

希望的特征多项式为  $(s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$

令  $|sI - (A - BF)| = (s+2)(s+3)(s+4)$ , 可得

$$\begin{cases} f_1 = 9 \\ f_1 + f_2 - 3 = 26 \\ 2 - 2f_1 - f_2 + f_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 9 \\ f_2 = 20 \\ f_3 = 60 \end{cases}$$

即将极点配置在-2、-3、-4的状态反馈矩阵为  $F = [9 \ 20 \ 60]$ 。

六、解: (1) 由  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} -x_1 + x_2^3 = 0 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

所以系统所有的平衡态为  $(0, 0)^T$ 、 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ 。

(2) ①在平衡态  $x_{e1} = (0, 0)^T$  处:

$$\text{将其线性化, 得 } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} -1 & 3x_2^2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ 或 } -0.5$$

两个特征值均具有负的实部,  $\therefore$  平衡态  $x_{e1}$  处是渐近稳定的。

②在平衡态  $x_{e2} = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$  处:

$$\text{做偏差置换, 令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y_2 = x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_2 \\ \dot{y}_2 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

$$\text{将其线性化, 得 } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} -1 & 3y_2^2 + 3\sqrt{2}y_2 + \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ 或 } 0.5$$

有一个特征值具有正的实部,  $\therefore$  平衡态  $x_{e2}$  处是不稳定的。

七、解: 系统开环脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{K}{s(T_1s+1)}\right] = Z\left[\frac{\frac{K}{T_1}}{s\left(s+\frac{1}{T_1}\right)}\right] = Z\left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s+\frac{1}{T_1}}\right] = K\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T/T_1}}\right] \\ &= \frac{Kz(1-e^{-T/T_1})}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})} \end{aligned}$$

系统 z 特征方程为:

$$\begin{aligned} D(z) &= (z-1)(z-e^{-T/T_1}) + Kz(1-e^{-T/T_1}) \\ &= z^2 + (K - Ke^{-T/T_1} - 1 - e^{-T/T_1})z + e^{-T/T_1} = 0 \end{aligned}$$

用 Routh 判据来判断系统的稳定性, 令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ , 可得  $\omega$  域特征方程为

$$\frac{(\omega+1)^2}{(\omega-1)^2} + (K - Ke^{-T/T_1} - 1 - e^{-T/T_1}) \frac{\omega+1}{\omega-1} + e^{-T/T_1} = 0$$

$$K(1-e^{-T/T_1})\omega^2 + 2(1-e^{-T/T_1})\omega + 2(1+e^{-T/T_1}) - K(1-e^{-T/T_1}) = 0$$

在  $\omega$  平面上应用 Routh 判据可得系统稳定的充要条件是

$$\begin{cases} K(1-e^{-T/T_1}) > 0 \\ 2(1-e^{-T/T_1}) > 0 \\ 2(1+e^{-T/T_1}) - K(1-e^{-T/T_1}) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{系统稳定条件是 } 0 < K < \frac{2(1+e^{-T/T_1})}{(1-e^{-T/T_1})}.$$

八、(1) c (2) d (3) a (4) b (5) b

## 2005 年

一、解：(1) 由图可得开环传递函数

$$G(s) = \frac{K \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right) \left( \frac{s}{\omega_3} + 1 \right)}$$

下面来求取 K。

设  $\omega = \omega_1$  时， $L = L_A$ ，结合  $\omega = 1$  时， $L = 20 \lg K$ ，得

$$\begin{cases} -40(\lg \omega_1 - \lg 1) = L_A - 20 \lg K \\ -20(\lg \omega_1 - \lg \omega_c) = L_A - 0 \end{cases} \Rightarrow 20 \lg K - 40 \lg \omega_1 = 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow K = \omega_c \omega_1$$

$$\therefore G(s) = \frac{\omega_c \omega_1 \left( \frac{s}{\omega_1} + 1 \right)}{s^2 \left( \frac{s}{\omega_2} + 1 \right) \left( \frac{s}{\omega_3} + 1 \right)}$$

(2) 闭环系统相位稳定裕量

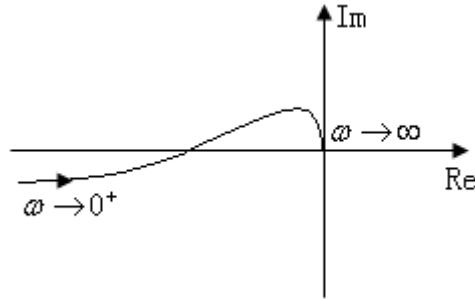
$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \arctan \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_3} - 180^\circ$$

$$= \arctan \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_2} - \arctan \frac{\omega_c}{\omega_3}$$

当  $\omega_c/\omega_1=100$ ,  $\omega_c/\omega_2=2$ ,  $\omega_c/\omega_3=0.1$  时,  $\gamma=20.28^\circ$

此时闭环系统稳定。

Nyquist 图的大致形状如下图:



(3) 由于系统是 II 型系统,  $\therefore$  对于  $r(t)=bt$ , 稳态误差为 0

$$\text{对于 } r(t)=\frac{1}{2}ct^2, \quad K_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K = \omega_1 \omega_c$$

$$\therefore e_{ss2} = \frac{c}{K_\alpha} = \frac{c}{\omega_1 \omega_c}$$

$$\text{稳态误差} \quad e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0 + \frac{c}{\omega_1 \omega_c} = \frac{c}{\omega_1 \omega_c}$$

二、解: (1) 系统特征方程为  $s(s+2)+10(K_t s+1)=0$

$$s^2 + 2s + 10 + 10K_t s = 0$$

$$1 + \frac{10K_t s}{s^2 + 2s + 10} = 0$$

$$\text{等效开环传函} \quad G'(s) = \frac{Ks}{s^2 + 2s + 10} \quad (K=10K_t)$$

绘制根轨迹步骤如下:

①开环极点  $p_1 = -1 + 3j$ ,  $p_2 = -1 - 3j$  数目  $n=2$ ;

开环零点  $z=0$ , 数目  $m=1$ 。系统有两条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为  $(-\infty, 0)$ ;

③渐近线与实轴夹角为  $\varphi_a = \pm\pi$ ;

$$\text{④由 } \frac{1}{d+1-3j} + \frac{1}{d+1+3j} = \frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow \text{分离点 } d = \pm\sqrt{10}$$

$$\because d = \sqrt{10} \text{ 时, } K = -\frac{20+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \quad \therefore \text{舍去}$$

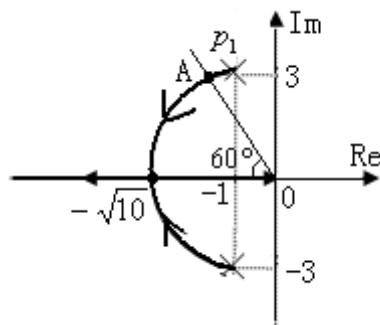
分离点  $d = -\sqrt{10}$

⑤从复极点  $-1+j3$  出发的根轨迹的出射角为

$$\theta = \arctan(-3) - 90^\circ + 180^\circ = 180^\circ - \arctan 3 + 90^\circ = 198.4^\circ$$

从复极点  $-1-j3$  出发的根轨迹的出射角为  $-198.4^\circ$ 。

由以上计算得到的参数, 得根轨迹如图所示:



(2) 欲使超调量  $\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 16.3\%$ , 应有  $\zeta \geq 0.5$

由  $\zeta = \cos \beta$ , 得  $\beta \leq 60^\circ$

过坐标原点做与负实轴夹角为  $60^\circ$  的直线, 交根轨迹于 A 点。设 A 点坐标为  $(\sigma, \omega)$ , 显然  $\omega = -\sqrt{3}\sigma$ , 将其代入特征方程  $s^2 + 2s + 10 + 10K_t s = 0$ , 可得

$$\begin{cases} \sigma^2 - \omega^2 + (2 + 10K_t)\sigma + 10 = 0 \\ (2\sigma + 2 + 10K_t)\omega = 0 \\ \omega = -\sqrt{3}\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -1.58 \\ \omega = 2.74 \\ K_t = 0.12 \end{cases}$$

即当  $K_t \geq 0.12$  时, 可使  $\sigma\% \leq 16.3\%$ , 闭环极点从  $(-1.58 \pm j2.74)$  开始,

沿根轨迹方向移动。

### 三、(1)

解: 依题意得,

$$\begin{aligned} f(s, \lambda) &= (1-\lambda)f_1(s) + \lambda f_2(s) = (1-\lambda)(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) + \lambda(s^3 + 3s^2 + 4s + 2) \\ &= s^3 + (6-3\lambda)s^2 + (12-8\lambda)s + 8-6\lambda \end{aligned}$$

列 Routh 表如下:

$$s^3 \quad 1 \quad 12-8\lambda$$

$$s^2 \quad 6-3\lambda \quad 8-6\lambda$$

$$s^1 \quad \frac{24\lambda^2 - 78\lambda + 64}{6-3\lambda}$$

$$s^0 \quad 8-6\lambda$$

对所有的  $\lambda \in [0,1]$ , 有  $6-3\lambda > 0 \quad \frac{24\lambda^2 - 78\lambda + 64}{6-3\lambda} > 0 \quad 8-6\lambda > 0$

$\therefore$  对所有  $\lambda \in [0,1]$ ,  $f(s, \lambda)$  均稳定。

(2)

解:  $f(s, \lambda) = (1-\lambda)f_1(s) + \lambda f_2(s) = (1-\lambda)(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) + \lambda(s^3 + 3s^2 + 4s + 2)$

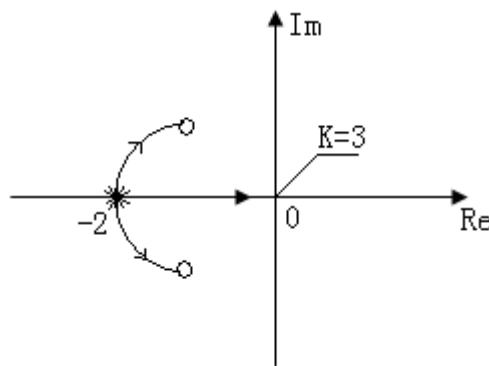
$$= s^3 + (6-3\lambda)s^2 + (12-8\lambda)s + 8-6\lambda$$

$$s^3 + (6-3\lambda)s^2 + (12-8\lambda)s + 8-6\lambda = 0 \Rightarrow s^3 + 6s^2 + 12s + 8 - (3s^2 + 8s + 6)\lambda = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{-\lambda(3s^2 + 8s + 6)}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = 0 \text{ 即等效开环传递函数为:}$$

$$G(s) = \frac{-\lambda(3s^2 + 8s + 6)}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = \frac{-3\lambda \left( s + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}j \right) \left( s + \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}j \right)}{(s+2)^3}$$

$$\text{设 } K = 3\lambda, \quad G(s) = \frac{-K \left( s + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}j \right) \left( s + \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}j \right)}{(s+2)^3}, \text{ 根轨迹图如图所示:}$$



根轨迹与虚轴的交点处  $K$  为:

$$K = \left| \frac{(s+2)^3}{s^2 + \frac{8}{3}s + 2} \right|_{s=0} = 3$$

此时， $\lambda=1$ ，当 $0 \leq \lambda \leq 1$ 时，由根轨迹可知， $f(s, \lambda)$ 均稳定。

四、解：(1) 系统开环脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \bullet \frac{5}{s(s+1)}\right] = 5(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = 5(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] \\ &= 5(1-z^{-1}) \bullet \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \frac{K[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

当 T=1s 时，

$$G(z) = \frac{5(0.368z + 0.264)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{1.825z + 1.32}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

(2) 当  $D(z)=1$  时，闭环传递函数

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{1.825z + 1.32}{z^2 + 0.457z + 1.688}$$

系统 z 特征方程为：

$$D(z) = z^2 + 0.457z + 1.688 = 0$$

用 Routh 判据来判断系统的稳定性：

$$\text{令 } z = \frac{\omega+1}{\omega-1}, \text{ 得 } D(\omega) = 2.231\omega^2 - 1.376\omega + 3.145 = 0$$

所以闭环系统不稳定。

$$(3) \text{ 可设 } G_e(z) = \frac{z-1}{z}, \quad \text{则 } \Phi(z) = \frac{1}{z} (\text{满足 } r-l \geq n-m)$$

$$\text{则 } D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)G_e(z)} = \frac{1}{G(z)(z-1)} = \frac{0.548(z-0.368)}{z+0.273}$$

$$C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} R(z) = \frac{1}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

可见调节时间为 1 拍，即 1 个采样周期。

五、解：(1) 由已知得

$$-\frac{1}{N(X)} = -\frac{\pi X}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} - j \frac{\pi h}{4}$$

负倒特性曲线如图 7.9 所示：

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(0.1j\omega+1)} = \frac{-2}{1+0.01\omega^2} - j \frac{20}{\omega(1+0.01\omega^2)}$$

$G(j\omega)$  曲线如图 7.9 所示：

由图可知，负倒特性曲线与  $G(j\omega)$  曲线有交点。所以存在自持振荡，并且是稳定的自持振荡。（由不稳定区  $\rightarrow$  稳定区）

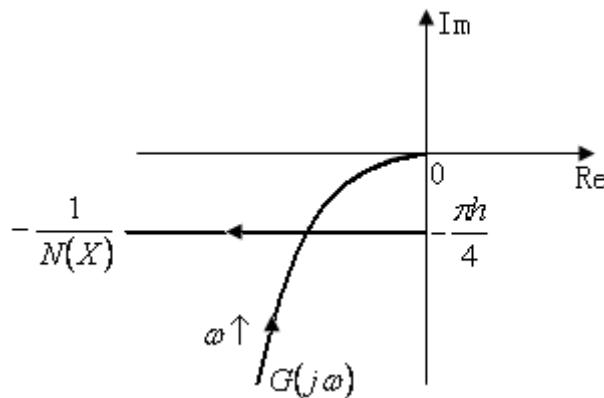


图 7.9 系统  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线和  $G(j\omega)$  曲线

(2) 由  $-\frac{1}{N(X)} = G(j\omega)$ , 得

$$\begin{cases} \frac{\pi h}{4} = \frac{20}{\omega(1+0.01\omega^2)} \\ \frac{\pi X}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} = \frac{2}{1+0.01\omega^2} \end{cases}$$

由①得,  $h = \frac{80}{\pi\omega(1+0.01\omega^2)}$  当  $\omega \geq 20$  时,  $h \leq \frac{0.8}{\pi} = 0.255$

由①、②得,  $\frac{10\sqrt{X^2 - h^2}}{\omega} = h \Rightarrow h = \sqrt{\frac{X^2}{\frac{\omega^2}{100} + 1}}$

当  $\omega \geq 20, X \leq 0.7$  时,  $h \leq 0.313$

所以  $h$  的范围是  $0 < h \leq 0.255$

六、解：(1) 由图可知，环节 A 的传递函数为:  $G_A(s) = K$  ;

环节 B 的传递函数为:  $G_B(s) = \frac{1}{Ts+1}$ ;

环节 C 的传递函数为:  $G_C(s) = \frac{1}{s}$ 。

开环系统的总传递函数为:  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ , 系统结构图如图 8.4 所示:

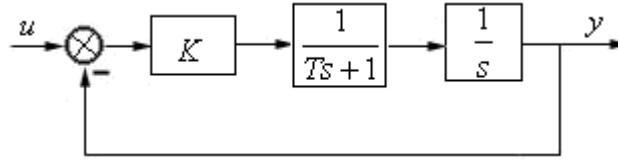


图 8.4 系统结构图

(2) 把系统结构图化为图 8.5 的形式, 在图 8.5 上选取状态变量  $x_1$ 、 $x_2$ , 可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= K(u - y) = K(u - x_2) = -Kx_2 + Ku \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{T}x_1 - \frac{1}{T}x_2 \\ y &= x_2\end{aligned}$$

即状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

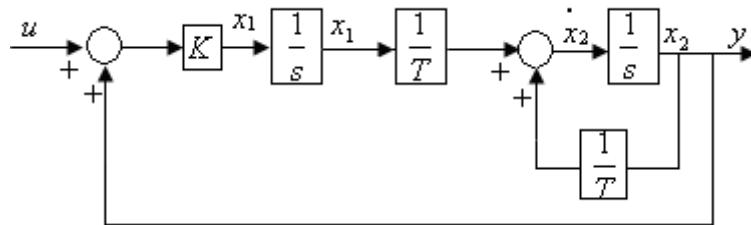


图 8.5 状态变量选取图

(3) 当  $K = 10, T = 0.1$  时, 开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{10}{s(0.1s+1)}$

可见系统是 I 型, 对于单位阶跃输入, 稳态误差为零。

闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$

对照标准二阶闭环传递函数，有  $\zeta = 0.5, \omega_n = 10$

$$\text{超调量: } \sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

$$\text{由 } \zeta = \cos \beta = 0.5 \Rightarrow \beta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{上升时间: } t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{10 \sqrt{1 - 0.5^2}} = 0.24s$$

$$\text{峰值时间: } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{10 \sqrt{1 - 0.5^2}} = 0.36s$$

$$\text{七、解: (1)} \quad G(s) = \frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

$$\text{对角规范型状态空间表达式为: } \begin{cases} \overset{\circ}{x} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$\text{对角规范型状态空间表达式为: } \begin{cases} \overset{\circ}{x} = -x + u \\ y = -2x + u \end{cases}$$

$$\text{由题意, 得 } G_1(s) = \frac{3(s+1)^2}{(s-1)(s+1)(s+5)} = \frac{3s^2 + 6s + 3}{s^3 + 5s^2 - s - 5}$$

$$\text{系统的状态空间表达式为: } \begin{cases} \overset{\circ}{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

(2) 由  $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -5$ , 有一个具有正实部的特征值,

所以系统不稳定。

(3) 由 (1) 中的状态空间表达式可知, 为可控标准型实现

$$\text{计算 } \text{rank}V_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 15 & 6 & -9 \\ -45 & 6 & -39 \end{bmatrix} = 2, \text{ 所以系统不可观;}$$

其实, 也可根据  $G_1(s)$  的表达式写出其可观标准型实现, 经计算, 不可控。

即系统的可控、可观测性有一个被破坏（因为存在零极点相消）。

所以不存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；

$$(4) \quad G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad H(s) = \frac{3(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

同理可得，

1)  $G(s)$  的对角规范型为:  $\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = -2x + u \end{cases}$

$H(s)$  的对角规范型为:  $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$

$$G_1(s) = \frac{(s-1)^2(s+2)}{(s-1)(s+1)(s+5)} = \frac{s^3 - 3s + 2}{s^3 + 5s^2 - s - 5} = 1 + \frac{-5s^2 - 2s + 7}{s^3 + 5s^2 - s - 5}$$

系统的状态空间表达式为:  $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \end{bmatrix}x + u \end{cases}$

2) 由  $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -5$ , 有一个具有正实部的特征值，

所以系统不稳定。

3) 由 1) 中的状态空间表达式可知，为可控标准型实现

计算  $\text{rank } V_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -25 & 2 & 23 \\ 115 & -2 & -113 \end{bmatrix} = 2$ , 所以系统不可观；

其实，也可根据  $G_1(s)$  的表达式写出其可观标准型实现，经计算，不可控。

即系统的可控、可观测性有一个被破坏（因为存在零极点相消）。

所以不存在带状态观测器的状态反馈，使系统稳定；

## 2006 年

一、解：(1) 系统的开环传函  $G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)}$

绘制根轨迹的步骤如下：

①开环极点  $p_1 = 0, p_2 = -2$  数目  $n=2$ ; 无零点

系统有两条根轨迹，分别起始于  $p_1, p_2$ ，终止于无穷远处。

②实轴上根轨迹段为  $(-2, 0)$ ;

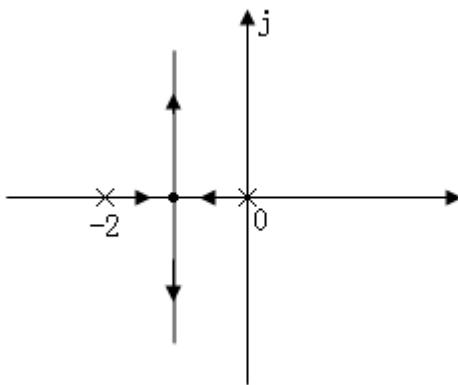
③渐近线与实轴夹角为  $\varphi_a = \pm 90^\circ$ ;

$$\text{渐近线与实轴交点为 } \sigma_a = \frac{0-2}{2} = -1;$$

$$\text{④由 } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{分离点 } d = -1$$

由以上计算得到的参数，得根轨迹如图所示：



$$(2) \text{ 由 } M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = e^{-\pi} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

由

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = 2 \\ K = \omega_n^2 \\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 2 \\ \omega_n = \sqrt{2} \end{cases}$$

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3}{4}\pi$$

$$(3) \text{ 要保持 } M_p \text{ 不变, 即 } \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 结合 } t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{3}{8}\pi, \text{ 得到 } \omega_n = 2\sqrt{2}$$

由题意得,  $G_c(s) = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T} \right)}{s + \frac{1}{T\alpha}}$

开环传递函数  $G_0'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_c \left( s + \frac{1}{T} \right)}{s + \frac{1}{T\alpha}} \cdot \frac{1}{s(s+2)}$

为使闭环系统尽可能简单, 取  $\frac{1}{T} = 2$ , 即  $T = 0.5$ , 此时  $G_0'(s) = \frac{K_c}{s \left( s + \frac{2}{\alpha} \right)}$

由  $\begin{cases} K_c = \omega_n^2 = 8 \\ \frac{2}{\varepsilon} = 2\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \alpha = 0.5 \end{cases}$ , 所以  $G_c(s) = \frac{8(s+2)}{s+4}$

二、解: ( i )  $\hat{x} = Tx$ , 则  $x = T^{-1}\hat{x}$  代入 (1) 可得

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{\hat{x}} = AT^{-1}\hat{x} + Bu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases}$$

令  $\hat{A} = TAT^{-1}$   $\hat{B} = TB$   $\hat{C} = CT^{-1}$ , 即可得到  $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$

由  $T = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$ , 计算得  $\hat{A} = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

( ii )  $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  相当于 ( i ) 中的  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$  有  $a_0 = a_1 = 0$   $a_2 = 1$

则  $f(s) = s^3 + s^2 = s^2(s+1)$ , 即  $\lambda_1 = -1$   $\lambda_2 = 0$ , 此时  $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A 可通过非奇异阵 T 化为约当阵, 即  $TAT^{-1} = J$ 。所以

$$e^{At} = T^{-1} e^{Jt} T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad \text{rank } U_c = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 < 3,$$

所以系统不完全可控；

$$\text{rank } V_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

所以系统完全可观测；

确定不可控模态是在 A 为 J 的情况下，看 B 中的某一行是否为零。

$$\text{此题中 } A \text{ 化为 } J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 时, } \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可见， $\lambda_1 = -1$  所对应的模态为不可控模态，即  $e^{-t}$ 。

$$\begin{aligned} (iv) \quad x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{At}Bu(t-\tau)d\tau \\ x^T(0)x(t) &= x^T(0)e^{At}x(0) + x^T(0)\int_0^t e^{At}Bu(t-\tau)d\tau \\ &= [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + [1 \quad -1 \quad 1] \bullet \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^{-t} + t - 1 & 1 - e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-\tau)d\tau \\ &= 3e^{-t} + [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ t+1 \\ t \end{bmatrix} \int_0^t u(t-\tau)d\tau \\ &= 3e^{-t} \end{aligned}$$

$\therefore \forall u(t), t \geq 0$  都有  $x^T(0)x(t) = 3e^{-t}$ 。

$$(v) \quad ① \text{ 将 } A \text{ 化为约当阵为 } \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ B 至少要有 2 个线性无关的列}$$

向量。原因：

若要通过状态反馈  $u(t) = Kx(t)$  配置系统的极点，即保证系统完全可控。

$A$  对应的约当阵中出现了两个约当块对应同一特征值 -1，若要保证  $\sum(\hat{A}, \hat{B})$

状态完全可控， $\hat{B}$  中对应  $\hat{A}$  中相等特征值的全部约当块末行的那些行之间是线性无关的，即  $\hat{B}$  的第一行、第二行必须是线性无关的。

$\therefore \hat{B}$  中至少要有 2 个线性无关的列向量。

由于非奇异线性变换不改变系统的可控性， $\therefore B$  中至少要有 2 个线性无关的列向量，即至少需要 2 个独立的控制变量。

② 至少需要 1 个独立的控制变量。原因：

由于特征值 -1 具有负实部，可以使系统渐近稳定。所以配置极点时只需配置特征值 0 对应的约当块。特征值 -1 对应的约当块即使不可控，也不影响系统的渐近稳定性。只配置可控部分即可， $\therefore$  至少需要 1 个独立的控制变量。

三、解：(1) 由图可知， $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$      $G_2(s) = \frac{1}{s}$      $G_c(s) = \frac{2s+1}{0.2s+1}$     又

$$\therefore H(s) = 1$$

所以开环传递函数  $G_0(s) = G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$

$$= \frac{2s+1}{s^2(s+1)(0.2s+1)}$$

(2) 首先求出  $G_0(j\omega)$  得

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{2j\omega+1}{-\omega^2(j\omega+1)(0.2j\omega+1)} \\ &= -\frac{1+2.2\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)} + \frac{0.4\omega^2-0.8}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)} j \end{aligned}$$

1) 与负实轴的交点：

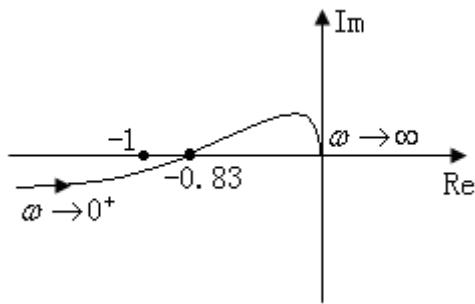
由  $\text{Im}G_0(j\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}$ ，此时  $\text{Re}G_0(j\omega) = -0.83$

即与负实轴的交点是 (-0.83, 0);

2)  $\omega \rightarrow 0^+$  时， $G_0(j\omega) \rightarrow \infty \angle -180^\circ$ ；

3)  $\omega \rightarrow +\infty$  时， $G_0(j\omega) \rightarrow 0 \angle -270^\circ$ ；

Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$  如下：



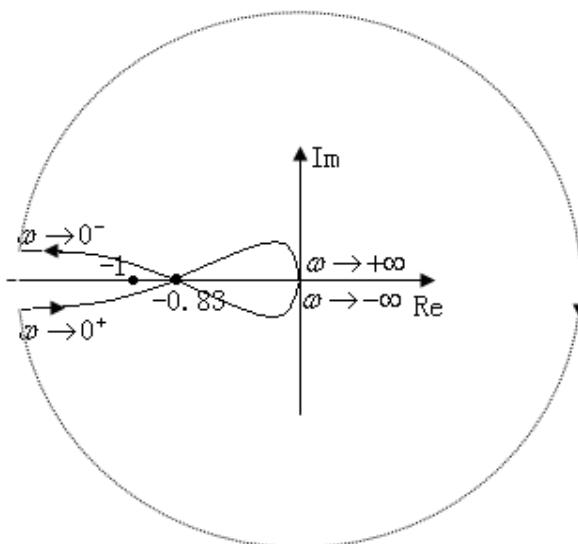
(3) 1) 由 Nyquist 曲线确定使闭环系统稳定的  $K$  值；如图所示：

当  $-0.83K > -1$  时，即  $K < 1.2$  时，Nyquist 曲线不包围  $(-1, j0)$  点，即  $N=0$ ，

由于  $P=0$ ， $\therefore Z=0$ ，所以闭环系统稳定。

使系统稳定的  $K$  值范围是：

$$0 < K < 1.2$$



2) 用根轨迹方法验证：

$$KG_0(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(s+1)(0.2s+1)} = \frac{K^*(s+0.5)}{s^2(s+1)(s+5)} \quad (K^* = 10K)$$

绘制根轨迹步骤如下：

①开环极点  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = -1$ ,  $p_4 = -5$  数目  $n=4$ ;

开环零点  $z = -0.5$ ，数目  $m=1$ 。系统有 4 条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为  $(-\infty, -5)$ ,  $(-1, -0.5)$ ;

③渐近线与实轴夹角为  $\varphi_a = \pm \frac{3}{\pi}, \pm \pi$ ；

$$\text{渐近线与实轴交点为 } \sigma_a = \frac{-1-5+0.5}{3} = -1.83;$$

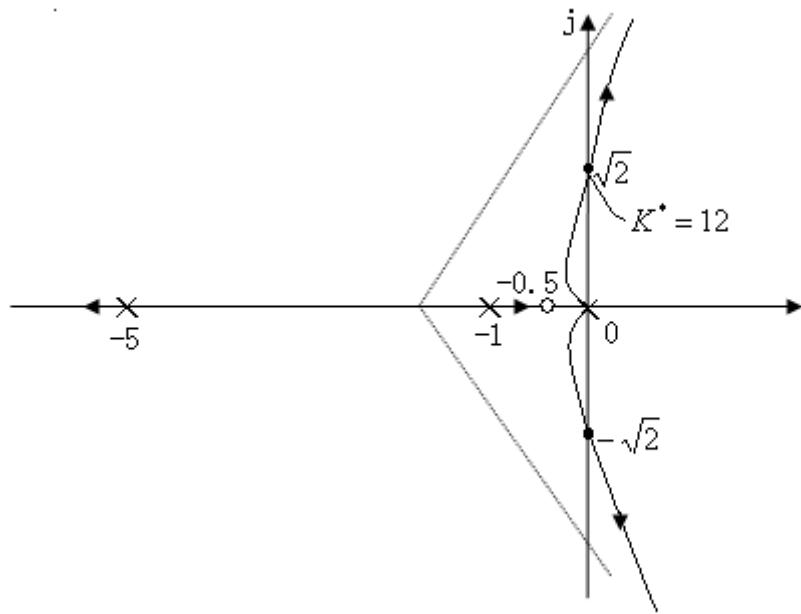
④与虚轴的交点：  $D(s) = s^4 + 6s^3 + 5s^2 + K^*s + 0.5K^*$

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 5 & 0.5K^* \\ s^3 & 6 & & K^* \\ s^2 & \frac{30-K^*}{6} & & 0.5K^* \\ s^1 & \frac{K^*(12-K^*)}{30-K^*} & & \\ s^0 & 0.5K^* & & \end{array}$$

$\therefore K^* = 12$  时，  $3s^2 + 6 = 0$  得对应的  $\omega = \pm\sqrt{2}$

与虚轴的交点是  $\pm\sqrt{2}$

根据以上参数地根轨迹图如下：



由根轨迹图可知，当  $0 < K^* < 12$ ，即  $0 < K < 1.2$  时，闭环系统稳定。

可见，与由 Nyquist 曲线得到的结论是一致的。

(4)  $K=1$  时，闭环系统是稳定的，讨论稳态误差是有意义的。

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \infty \quad K_\alpha = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = 1$$

所以稳态速度误差  $e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = 0$

稳态加速度误差  $e_{ss\alpha} = \frac{1}{K_\alpha} = 1$

$K=2$  时，闭环系统不稳定，此时讨论稳态误差是无意义的。

四、解：(1) 将原结构图化简可得到图 a

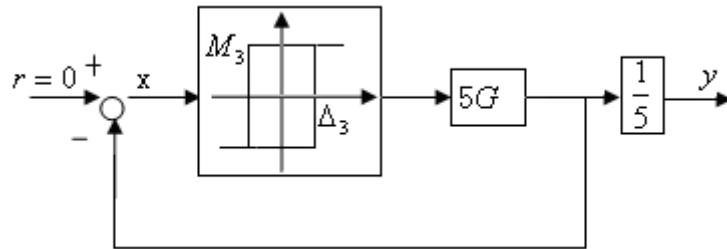


图 a 等效结构图

$$N(X) = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{X}\right)^2} - j \frac{4}{\pi X^2}$$

$$G_c(s) = 5G = \frac{5(s+1)}{s^2} \quad \text{频率特性} \quad 5G(j\omega) = \frac{5(j\omega + 1)}{-\omega^2} = -\frac{5}{\omega^2} - \frac{5}{\omega} j$$

负倒特性曲线和  $G_c(j\omega)$  曲线如图 b 所示：

由图可知，负倒特性曲线与  $G_c(j\omega)$  曲线有交点。所以存在自激振荡，并且是稳定的自激振荡。（由不稳定区  $\rightarrow$  稳定区）

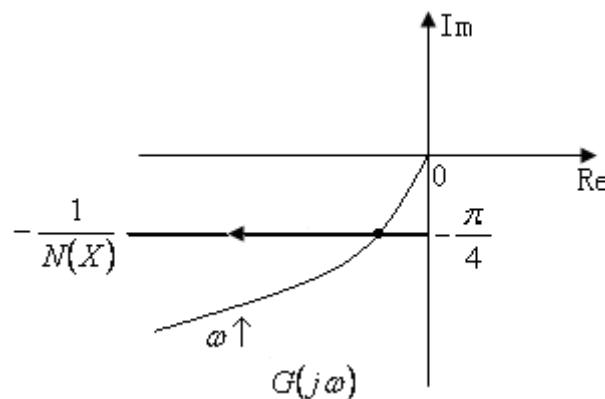


图 b 系统  $-\frac{1}{N(X)}$  曲线和  $G(j\omega)$  曲线

$$(2) \text{ 由 } -\frac{1}{N(X)} = G_c(j\omega), \text{ 得} \quad -\frac{5}{\omega^2} - \frac{5}{\omega} j = -\frac{\pi}{4} \sqrt{X^2 - 1} - \frac{\pi}{4} j$$

自激振荡的频率

$$\omega = \frac{20}{\pi} = 6.4$$

自振振幅

$$X = \sqrt{\frac{\pi^2}{400} + 1} = 1.01$$

将振幅 X 折算到输出端，考虑到  $X = -5Y$ ，所以

输出振幅为

$$Y = \frac{X}{5} = 0.2$$

输出频率为

$$\omega = 6.4$$

五、解：(1)

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(z)}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{261714.877}{s(s+297.456)(s+879.844)}\right] \\ &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1.5}{s+297.456} + \frac{0.5}{s+879.844}\right] \\ &= (1-z^{-1}) \bullet \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{1.5z}{z-e^{-297.456T}} + \frac{0.5z}{z-e^{-879.844T}} \right] \\ &= \frac{0.15z+0.03}{(z-0.7)(z-0.4)} \end{aligned}$$

开环脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= D(z)G_1(z) = \left[1 + \frac{0.295276}{2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] \bullet \frac{0.15z+0.03}{(z-0.7)(z-0.4)} \\ &= \frac{0.17(z+0.2)}{(z-1)(z-0.4)} \end{aligned}$$

闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.17(z+0.2)}{z^2 - 1.23z + 0.434}$$

(2) 由  $z^2 - 1.23z + 0.434 = 0 \Rightarrow z = 0.615 \pm 0.235j$

可见，闭环特征方程的根都在单位圆内部，所以整个控制系统稳定。

(3) 当  $\omega_d$  为单位阶跃函数时，输入  $R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} C(z) &= \Phi(z)R(z) = \frac{0.17(z+0.2)}{z^2 - 1.23z + 0.434} \bullet \frac{z}{z-1} = \frac{0.17z(z+0.2)}{(z-1)(z^2 - 1.23z + 0.434)} \\ &= \frac{0.17z^2 + 0.034z}{z^3 - 2.23z^2 + 1.664z - 0.434} = 0.17z^{-1} + 0.41z^{-2} + 0.64z^{-3} + 0.46z^{-4} + \dots \\ \therefore c(t) &= 0.17\delta(t-T) + 0.41\delta(t-2T) + 0.64\delta(t-3T) + 0.46\delta(t-4T) + \dots \end{aligned}$$

(4) 由于  $G(z) = \frac{0.17(z+0.2)}{(z-1)(z-0.4)}$ , 除有一个极点在单位圆上外, 所以零极点都在

单位圆内部, 故可取  $G_e(z) = \frac{z-1}{z}$ , 则  $\Phi(z) = \frac{1}{z}$  (满足  $r-l \geq n-m$ )

$$\text{则 } D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)G_e(z)} = \frac{1}{G(z)(z-1)} = \frac{5.88(z-0.4)}{z+0.2}$$

$$C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)} R(z) = \frac{1}{z-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

可见输出  $c(k)$  在 1 拍以后就完全跟踪输入。

六、解: ( i )  $\ddot{x} + \dot{x} + x^2 - 1 = 0$  令  $x_1 = x$   $\dot{x}_1 = \dot{x}$ , 则

状态方程为: 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 + 1 \end{cases}$$

( ii ) 由 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$
, 得 
$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1^2 - x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

所以系统所有的平衡点为  $(1, 0)^T$ 、 $(-1, 0)^T$ 。

( iii ) ①在平衡态  $x_{e1} = (1, 0)^T$  处:

做偏差置换, 令 
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1^2 - 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

将其线性化, 得  $A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{array} \right]_{y_1=0, y_2=0} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{array} \right]_{y_1=0, y_2=0} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{array} \right]$

$$|A - I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 + j\sqrt{7}}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - j\sqrt{7}}{2}$$

两个特征值均具有负的实部,  $\therefore$  平衡点  $x_{e1}$  处是渐近稳定的。

②在平衡态  $x_{e2} = (-1, 0)^T$  处:

做偏差置换，令  $\begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1^2 + 2y_1 - y_2 \end{cases}$

将其线性化，得  $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2y_1 + 2 & -1 \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A - I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

有一个特征值具有正的实部，∴平衡点  $x_{e2}$  处是不稳定的。

## 2007 年

一、1. d    2. b    3. c

4 解：单位阶跃输入  $r(t) = 1$  是单位斜坡输入  $r(t) = t$  的导数，

则单位阶跃响应是单位斜坡响应的导数，即单位阶跃响应为

$$h(t) = y'(t) = 1 - e^{-t/4}$$

对其做拉氏变换得，

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{4}} = \frac{1}{s(4s+1)}$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{R(s)} = \frac{1}{4s+1}$$

5 解：由图可得，开环传递函数  $G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.02s+1)}$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 1 \text{ 时}, L(\omega) = 20 \lg K \\ L(1) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow K = 10$$

则  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(0.02s+1)}$

速度误差系数  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \infty$

加速度误差系数  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 10$

二、解：(1) 系统的开环传递函数  $G_0(s) = \frac{K(s+b)}{s(s-a)}$

根据分离点、汇合点的计算公式

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{d+b}$$

依题意，得分离点  $d_1 = 1$ ，汇合点  $d_2 = -3$ ，代入上式

得  $a=3, b=1$

则开环传递函数  $G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-3)}$

绘制根轨迹的步骤如下：

①开环极点  $p_1 = 0, p_2 = 3$  数目  $n=2$ ；开环零点  $z = -1$ ，数目  $m=1$

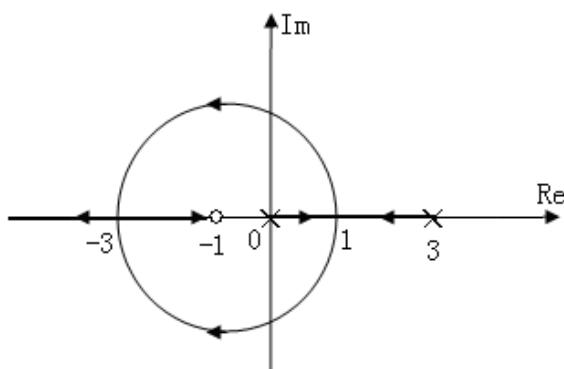
系统有两条根轨迹。

②实轴上根轨迹段为  $(-\infty, -1), (0, 3)$ ；

③渐近线与实轴夹角为  $\varphi_a = \pm\pi$ ；

④分离点  $d_1 = 1$ ，汇合点  $d_2 = -3$

由以上计算得到的参数，得根轨迹如图所示：



(2) 根轨迹与虚轴的交点

由  $1+G_0(s)=0$ ，得特征方程为

$$s^2 + (K-3)s + K = 0$$

劳斯阵：

$$\begin{matrix} s^2 & 1 & K \\ s^1 & k-3 \\ s^0 & K \end{matrix}$$

要与虚轴有交点，则有一行全零，即  $k-3=0 \Rightarrow K=3$

辅助方程： $s^2+3=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm\sqrt{3}j$

综上，与虚轴的交点是  $\pm\sqrt{3}j$ ，使闭环系统稳定的 K 值范围应是  $K>3$ 。

(3) 在稳定的前提下，该反馈系统和标准二阶系统相比，系统的阶跃响应更快，而超调量增加。

三、解：(i) 由题意，得

$$\begin{aligned} e^{At} &= [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)] [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^t & e^t + te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \\ \text{系统矩阵 } A = \dot{\Phi}(t) \Big|_{t=0} &= \begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^t + te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii) 由于 A 为约当阵，且不同特征值对应不同的约当块。

所以要使  $(A, b)$  可控，需满足  $b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$ ；

要使  $(A, c^T)$  可观测，需满足  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ ；

四、解：(1) 当  $G_c(s)=K_c$  时，开环传递函数  $G_0(s)=\frac{K_c}{s(s-a)}$ ，

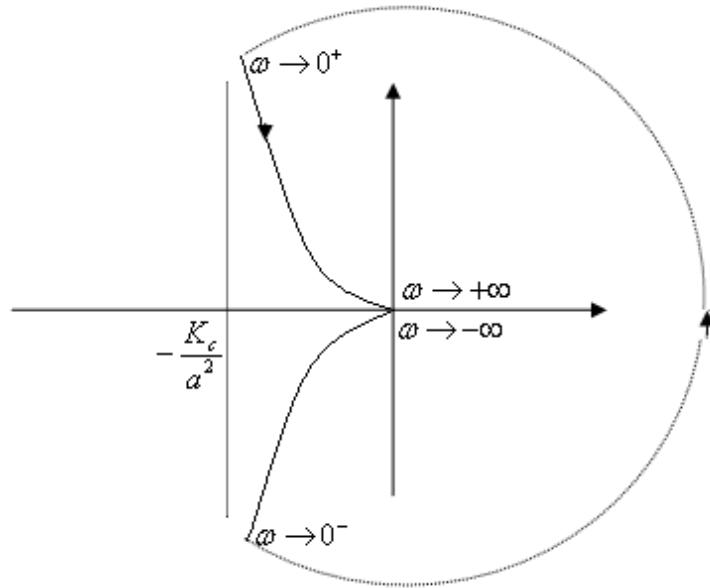
为非最小相位系统（不能按原来的规则画 Nyquist 曲线）。

首先求出  $G_0(j\omega)$  得

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{-K_c \omega + jaK_c}{\omega(\omega^2 + a^2)} \\ &= -\frac{K_c}{\omega^2 + a^2} + j \frac{aK_c}{\omega(\omega^2 + a^2)} \end{aligned}$$

- 1) 可看出与负实轴无交点;
- 2)  $\omega \rightarrow 0^+$ 时,  $G_0(j\omega) = -\frac{K_c}{a^2} + j\infty$ ;
- 3)  $\omega \rightarrow +\infty$ 时,  $G_0(j\omega) \rightarrow 0 \angle -180^\circ$ ;

Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$  如下:



从图中可看出,  $N=0$ , 又已知  $P=1$ , 所以  $Z=1$ , 即系统有右半平面的根, 所以闭环系统对任何比例控制器  $G_c(s)=K_c$  都不稳定。

(2) 当  $G_c(s)=K_c(1+\tau s)$  时, 开环传递函数  $G_0(s)=\frac{K_c(1+\tau s)}{s(s-a)}$

首先求出  $G_0(j\omega)$  得

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{K_c[-\omega(1+a\tau)+j(a-\tau\omega^2)]}{\omega(\omega^2+a^2)} \\ &= -\frac{K_c(1+a\tau)}{\omega^2+a^2} + j \frac{K_c(a-\tau\omega^2)}{\omega(\omega^2+a^2)} \end{aligned}$$

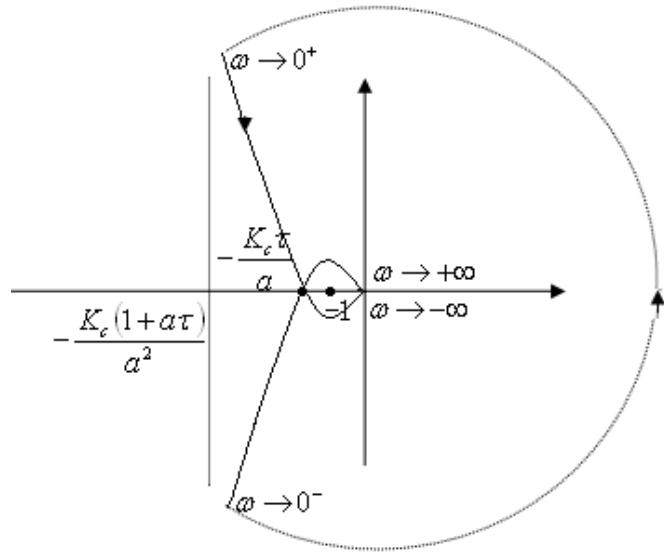
1) 与负实轴的交点: 令  $\text{Im}G_0(j\omega)=0$ , 得  $\omega=\sqrt{\frac{a}{\tau}}$

相应地  $\text{Re}G_0(j\omega)=-\frac{K_c\tau}{a}$

2)  $\omega \rightarrow 0^+$  时,  $G_0(j\omega)=-\frac{K_c(1+a\tau)}{a^2}+j\infty$ ;

3)  $\omega \rightarrow +\infty$  时,  $G_0(j\omega) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$ ;

Nyquist 曲线  $G_0(j\omega)$  如下：



从图中可看出，当  $-\frac{K_c \tau}{a} < -1$  时， $N=1$ ，又已知  $P=1$ ，所以  $Z=0$ ，即系统无右半平面的根，闭环系统稳定。

即  $K_c$  和  $\tau$  的值应满足

$$K_c \tau > a$$

五、解：（i）由题意知，系统为可控标准型。特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2.25\lambda + 0.5$$

可以求得，特征值幅值均小于 1，所以系统稳定。

（ii）由于系统可控，所以可通过状态反馈任意配置系统的极点。

设状态反馈矩阵  $f = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T$

$$A + bf^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -2.25 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2 \ f_3]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 + f_1 & -2.25 + f_2 & -3 + f_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - (A + bf^T)| = s^3 + (3 - f_3)s^2 + (2.25 - f_2)s + (0.5 - f_1)$$

希望的特征多项式为  $(s + 0.5)(s - 0.5)s = s^3 - 0.25s$

令  $|sI - (A + bf^T)| = (s+0.5)(s-0.5)s$ , 可得

$$\begin{cases} 3-f_3=0 \\ 2.25-f_2=-0.25 \\ 0.5-f_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1=0.5 \\ f_2=2.5 \\ f_3=3 \end{cases}$$

即将极点配置在-0.5, 0.5, 0 的状态反馈矩阵为  $f = [0.5 \ 2.5 \ 3]^T$ 。

六、解: ( i )  $\ddot{y} + \dot{y} + \sin \pi y = 0$  令  $x_1 = y \quad x_2 = \dot{y}$ , 则

状态方程为: 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sin \pi x_1 \end{cases}$$

( ii ) 由  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 - \sin \pi x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ x_2 = 0 \end{cases}$

所以系统所有的平衡点为  $(k, 0)^T$ 。其中  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

( iii ) ①在平衡点  $x_e = (k, 0)^T$ ,  $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  处:

做偏差置换, 令  $\begin{cases} y_1 = x_1 - k \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - \sin \pi(y_1 + k) \end{cases}$

将其线性化, 得

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi \cos \pi(y_1 + k) & -1 \end{bmatrix}_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi \cos \pi k & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 + j\sqrt{4\pi - 1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - j\sqrt{4\pi - 1}}{2}$$

两个特征值均具有负的实部,  $\therefore$  平衡点  $x_e = (k, 0)^T$ ,  $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  处是渐近稳定的。

②在平衡态  $x_e = (k, 0)^T$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$  处:

做偏差置换, 令  $\begin{cases} y_1 = x_1 - k \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_2 - \sin \pi(y_1 + k) \end{cases}$

---

将其线性化，得

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_{\begin{array}{l} y_1=0 \\ y_2=0 \end{array}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi \cos \pi(y_1 + k) & -1 \end{bmatrix}_{\begin{array}{l} y_1=0 \\ y_2=0 \end{array}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi \cos \pi k & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{4\pi + 1}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{4\pi + 1}}{2}$$

有一个特征值具有正的实部， $\therefore$  平衡点  $x_e = (k, 0)^T$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 3, \dots$  处是不稳定的。