参考答案

- **习题 8.4** 设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 如下所示，假设采样间隔为 T，试用冲激响应不变法将其转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

(1) $H_a(s) = \dfrac{1}{(s+a)^2}$

解： 模拟滤波器的冲激响应为 $h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\} = te^{-at}u(t)$，采样后得到数字滤波器的单位脉冲响应为 $h[n] = h_a(nT) = nTe^{-anT}u[n]$。已知 $\mathcal{Z}\{n\alpha^n u[n]\} = \dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$，令 $\alpha = e^{-aT}$，则数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2} = \frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$$

- **习题 8.4** 设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 如下所示，假设采样间隔为 T，试用冲激响应不变法将其转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

(2) $H_a(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

解： 模拟滤波器的冲激响应为 $h_a(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right\}=e^{-at}\cos(bt)\,u(t)$，采样后得到数字滤波器的单位脉冲响应为 $h[n]=e^{-anT}\cos(bnT)\,u[n]$。利用 Z 变换公式 $\mathcal{Z}\{e^{-\alpha n}\cos(\omega_0 n)u[n]\}=\dfrac{1-e^{-\alpha}\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2e^{-\alpha}\cos(\omega_0)z^{-1}+e^{-2\alpha}z^{-2}}$，令 $\alpha=aT$，$\omega_0=bT$，则数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1-e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

- **习题 8.4** 设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 如下所示，假设采样间隔为 T，试用冲激响应不变法将其转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

(3) $H_a(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 17}$

解： 模拟滤波器的冲激响应为 $h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+16}\right\} = \frac{1}{4}e^{-t}\sin(4t)\,u(t)$，采样后得到数字滤波器的单位脉冲响应为

$$h[n] = \frac{1}{4}e^{-nT}\sin(4nT)\,u[n].$$

利用 Z 变换公式 $\mathcal{Z}\{e^{-\alpha n}\sin(\omega_0 n)u[n]\} = \dfrac{e^{-\alpha}\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2e^{-\alpha}\cos(\omega_0)z^{-1}+e^{-2\alpha}z^{-2}}$，令 $\alpha = T$，$\omega_0 = 4T$，则数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{-T}\sin(4T)z^{-1}}{1-2e^{-T}\cos(4T)z^{-1}+e^{-2T}z^{-2}}$$

- **习题 8.4** 设模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 如下所示，假设采样间隔为 T，试用冲激响应不变法将其转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

(4) $H_a(s) = \dfrac{1}{s^2 + 5s + 4}$

解： 对系统函数进行分式展开，得到

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{1/3}{s+1} - \frac{1/3}{s+4}$$

可知系统的极点为 $p_1 = -1, p_2 = -4$, 对应的 Z 平面的极点为 $z_1 = e^{-T}$,$z_2 = e^{-4T}$, 则数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-4T}z^{-1}}\right]$$

- **习题 8.5** 假设采样率为 10 kHz, 试以巴特沃斯滤波器为原型，分别用冲激响应不变法、双线性变换法设计一个 3 dB 截止频率为 2 kHz 的 2 阶数字巴特沃斯低通滤波器，给出其系统函数。

解： 1. 冲激响应不变法

数字滤波器参数：采样率 $f_s = 10\,\mathrm{kHz}$，$T_s = 10^{-4}\,\mathrm{s}$；截止频率 $f_c = 2\,\mathrm{kHz}$，对应模拟角频率 $\omega_c = 2\pi f_c = 4000\pi\,\mathrm{rad/s}$，数字角频率 $\Omega_c = \omega_c T_s = 0.4\pi\,\mathrm{rad}$；

2 阶巴特沃斯低通滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{(4000\pi)^2}{s^2 + 4000\pi\sqrt{2}\,s + (4000\pi)^2}$$

相应的极点为 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$，其中 $\alpha = \beta = 2000\pi\sqrt{2}$。

参考答案

- **习题 8.5** 假设采样率为 10 kHz, 试以巴特沃斯滤波器为原型，分别用冲激响应不变法、双线性变换法设计一个 3 dB 截止频率为 2 kHz 的 2 阶数字巴特沃斯低通滤波器，给出其系统函数。

解： 对系统函数进行分式展开，得到

$$H_a(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{A^*}{s - s_2}, \quad A = \frac{\omega_c^2}{s_1 - s_2} = -j\frac{4000\pi}{\sqrt{2}}$$

则数字滤波器的系统函数为

$$H_{\mathrm{IR}}(z) = T_s\left[\frac{A}{1 - e^{s_1 T_s} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - e^{s_2 T_s} z^{-1}}\right]$$

代入具体数值，化简得到

$$H_{\mathrm{IR}}(z) \approx \frac{0.5663z^{-1}}{1 - 0.5198z^{-1} + 0.1691z^{-2}}$$

- **习题 8.5** 假设采样率为 10 kHz, 试以巴特沃斯滤波器为原型，分别用冲激响应不变法、双线性变换法设计一个 3 dB 截止频率为 2 kHz 的 2 阶数字巴特沃斯低通滤波器，给出其系统函数。

解： 2. 双线性变换法

数字滤波器参数：采样率 $f_s = 10\,\text{kHz}$，$T_s = 10^{-4}\,\text{s}$；截止频率 $f_c = 2\,\text{kHz}$，对应模拟角频率 $\omega_c = 2\pi f_c = 4000\pi\,\text{rad/s}$，数字角频率 $\Omega_c = \omega_c T_s = 0.4\pi\,\text{rad}$；根据双线性变换法的频率映射关系，得到模拟滤波器的截止频率为

$$\omega_c' = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) = 20000 \times \tan(0.2\pi)$$

模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{\omega_c'^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c' s + \omega_c'^2}$$

参考答案

- **习题 8.5** 假设采样率为 10 kHz, 试以巴特沃斯滤波器为原型，分别用冲激响应不变法、双线性变换法设计一个 3 dB 截止频率为 2 kHz 的 2 阶数字巴特沃斯低通滤波器，给出其系统函数。

解： 将 $s=\frac{2}{T_s}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入到 $H_a(s)$, 得到数字滤波器的系统函数为

$$H_{\mathrm{BL}}(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{\lambda^2(1-z^{-1})^2+\sqrt{2}\lambda(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2}$$

其中 $\lambda=1/\tan(\Omega_c/2)$。代入具体数值，化简得到

$$H_{\mathrm{BL}}(z)\approx\frac{0.20657+0.41314z^{-1}+0.20657z^{-2}}{1-0.36956z^{-1}+0.19578z^{-2}}$$