参考答案

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

(1) $x[n]=nu[n]$;

解： 利用微分性质

$$nx[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}-z\tfrac{d}{dz}X(z)$$

由基本变换对

$$u[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}\tfrac{1}{1-z^{-1}},\quad \text{ROC: } |z|>1$$

可得

$$nu[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}-z\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=-z\cdot\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{z}{(z-1)^2},\quad \text{ROC: } |z|>1$$

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

(2) $x[n] = n^2u[n]$；

解： 利用微分性质

$$\text{已知 } nu[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2}\text{，则 } n^2u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)$$

计算导数

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{(z-1)^2 - z\cdot 2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{-z-1}{(z-1)^3}$$

可得

$$n^2u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\cdot\frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3},\quad \text{ROC: } |z| > 1$$

参考答案

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

（3） $x[n]=(-1)^n u[n]+0.5^{-n}u[-n]$；

解： 利用基本变换对和反褶性质

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}},\ \text{ROC：}\ |z|>|a|$$

$$a^{-n} u[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az},\ \text{ROC：}\ |z|<1/|a|$$

可得

$$(-1)^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z+1},\ \text{ROC：}\ |z|>1 \quad 0.5^{-n}u[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-0.5z},\ \text{ROC：}\ |z|<2$$

可得

$$(-1)^n u[n]+0.5^{-n}u[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z+1}+\frac{1}{1-0.5z},\quad \text{ROC：}\ 1<|z|<2$$

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

(4) $x[n] = (-1)^n(u[n+1] - u[n-2])$

解： 由于 $u[n+1] - u[n-2] = [1, \underset{\uparrow}{1}, 1]$，则

$$x[n] = [-1, \underset{\uparrow}{1}, -1]$$

根据 Z 变换的定义，得到

$$(-1)^n(u[n+1] - u[n-2]) \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z + 1 - z^{-1}, \quad \text{ROC：} 0 < |z| < \infty$$

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

(5) $x[n]=0.5^n\cos(n\pi/3)u[n]$

解：利用欧拉公式 $\cos(n\pi/3)=\frac{1}{2}\left(e^{jn\pi/3}+e^{-jn\pi/3}\right)$，有

$$x[n]=\frac{1}{2}\left[(0.5e^{j\pi/3})^n+(0.5e^{-j\pi/3})^n\right]u[n]$$

由基本变换对 $a^n u[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}\frac{z}{z-a}$, ROC：$|z|>|a|$，可得

$$X(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-0.5e^{j\pi/3}}+\frac{z}{z-0.5e^{-j\pi/3}}\right]$$

化简得到

$$X(z)=\frac{z(z-0.25)}{z^2-0.5z+0.25},\quad \text{ROC：} |z|>0.5 \quad (\text{因为 } |0.5e^{\pm j\pi/3}|=0.5)$$

- **习题 5.17** 求下列序列的 z 变换以及收敛域。

(6) $x[n]=|n-3|u[n]$

解： 根据 Z 变换的定义，有

$$X(z)=\sum_{n=0}^{3}(3-n)z^{-n}+\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)z^{-n}$$

第二项计算为

$$\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{-(n+3)}=z^{-3}\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^{-2}}{(z-1)^2}$$

可得

$$|n-3|u[n]\overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow}3+2z^{-1}+z^{-2}+\frac{z^{-2}}{(z-1)^2},\quad \text{ROC：}\ |z|>1$$

- **习题 5.20** 已知因果序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$，零点为 $z_1=0$，极点为：$p_1=-3/4, p_2=(1+j)/2, p_3=(1-j)/2$。求 $y[n]=x[-n+3]$ 的 z 变换（用 $X(z)$ 表示）、零极点分布以及收敛域。

解： 注意到

$$y[n]=x[-n+3]=x[-(n-3)]$$

利用反褶性质和移位性质

$$x[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(\frac{1}{z}) \quad x[n-k] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z)$$

得到

$$Y(z)=z^{-3}X\left(\frac{1}{z}\right)$$

- **习题 5.20** 已知因果序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$，零点为 $z_1=0$，极点为：$p_1=-3/4, p_2=(1+j)/2, p_3=(1-j)/2$。求 $y[n]=x[-n+3]$ 的 z 变换（用 $X(z)$ 表示)、零极点分布以及收敛域。

解： 由于 $Y(z)=z^{-3}X\left(\frac{1}{z}\right)$，根据 $X(z)$ 的零极点分布，可得

$$Y(z)=z^{-3}X\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z(1-p_1z)(1-p_2z)(1-p_3z)}$$

- $Y(z)$ 的零点：为 $X(z)$ 的零点的倒数，而 $\frac{1}{0}$ 不存在，故无有限零点；
- $Y(z)$ 的极点：$z=0$（一重极点）以及 $X(z)$ 的极点的倒数，即

$$\frac{1}{p_1}=-\frac{4}{3},\quad \frac{1}{p_2}=\frac{2}{1+j}=1-j,\quad \frac{1}{p_3}=\frac{2}{1-j}=1+j$$

参考答案

- **习题 5.20** 已知因果序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z)$，零点为 $z_1=0$，极点为：$p_1=-3/4, p_2=(1+j)/2, p_3=(1-j)/2$。求 $y[n]=x[-n+3]$ 的 z 变换（用 $X(z)$ 表示)、零极点分布以及收敛域。

解： 由于 $x[n]$ 是因果序列，其收敛域为

$$|z| > \max\{|p_1|,|p_2|,|p_3|\} = \max\left\{\frac{3}{4},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \frac{3}{4}$$

对于 $y[n]=x[-n+3]$，其时域反转导致收敛域也反转，即

$$\text{ROC：}\ |z| < \frac{4}{3}$$

- **习题 5.21** 应用卷积定理计算下列序列 $y[n]$ 的表达式。

1. $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$，其中 $x_1[n] = a^n u[n]$，$x_2[n] = u[n]$；

解： 首先计算 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \qquad X_2(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

可得

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = \frac{\frac{-a}{1-a}}{1 - az^{-1}} + \frac{\frac{1}{1-a}}{1 - z^{-1}}, \quad \mathrm{ROC} : |z| > \max(|a|, 1)$$

$$\Rightarrow y[n] = (\frac{1}{a-1} a^{n+1} + \frac{1}{1-a}) u[n]$$

- **习题 5.21** 应用卷积定理计算下列序列 $y[n]$ 的表达式。

2.$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n]$，其中 $x_1[n] = (0.5)^n u[n]$，$x_2[n] = (0.3)^n u[n]$

解： 利用 Z 变换的性质，有

$$\mathcal{Z}\{x_1[n+3]\} = z^3 X_1(z) = z^3 \cdot \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, \qquad |z| > 0.5$$

$$\mathcal{Z}\{x_2[-n]\} = X_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-0.3z}, \qquad |z| < \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$

可得

$$Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = z^3 \frac{1}{0.85} \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + z^4 \frac{0.3}{0.85} \frac{1}{1-0.3z}, \qquad \mathrm{ROC}: 0.5 < |z| < \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{20}{17} 0.5^{n+3} u[n+3] + \frac{6}{17} 0.3^{-(n+4)} u[-(n+4)]$$

- **习题 5.23** 利用 z 变换的 z 域微分性质计算下列各式对应的 $x[n]$。

(1) $X(z) = \ln(1-2z), \quad |z| < 0.5;$

解： 利用微分性质

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}[\ln(1-2z)] = \frac{2z}{1-2z}$$

根据 z 变换定义以及收敛域范围，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = \frac{2z}{1-2z} = 2z\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^k = \sum_{m=1}^{\infty}2^m z^m = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n}z^{-n}$$

因此得到

$$x[n] = \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

- **习题 5.23** 利用 z 变换的 z 域微分性质计算下列各式对应的 $x[n]$。

(2) $X(z) = \ln(1-2z^{-1}), \quad |z| > 2$.

解：利用 z 域微分性质，有

$$\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}[\ln(1-2z^{-1})] = -\frac{2}{z(1-2z^{-1})}$$

根据 z 变换定义以及收敛域范围，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -\frac{2}{z(1-2z^{-1})} = -\frac{2}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(2z^{-1})^k = -\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

因此得到

$$x[n] = -\frac{2^n}{n}u[n-1]$$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(1) $X(z)=\dfrac{z+z^{-2}-z^{-3}}{z^2-2z-3},\quad 1<|z|<3$；

解： 部分分式法:

$$X(z)=\frac{z^4+z-1}{z^3(z^2-2z-3)}=\frac{z^4+z-1}{z^3(z-3)(z+1)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^4+z-1}{z^4(z-3)(z+1)}=\frac{-\frac{41}{81}}{z}+\frac{\frac{13}{27}}{z^2}+\frac{-\frac{5}{9}}{z^3}+\frac{\frac{1}{3}}{z^4}+\frac{\frac{83}{324}}{z-3}+\frac{\frac{1}{4}}{z+1}$$

$$X(z)=-\frac{41}{81}+\frac{13}{27}z^{-1}-\frac{5}{9}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}+\frac{83}{324}\cdot\frac{z}{z-3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{z+1}$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=-\frac{41}{81}\delta[n]+\frac{13}{27}\delta[n-1]-\frac{5}{9}\delta[n-2]+\frac{1}{3}\delta[n-3]-\frac{83}{324}\cdot 3^n u[-n-1]+\frac{1}{4}(-1)^n u[n]$$

参考答案

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(1) $X(z) = \dfrac{z + z^{-2} - z^{-3}}{z^2 - 2z - 3}, \quad 1 < |z| < 3$；

解： 留数法:

$$F(z) = X(z)z^{n-1} = \frac{(z^4 + z - 1)z^{n-1}}{z^3(z-3)(z+1)} = \frac{(z^4 + z - 1)z^{n-4}}{(z-3)(z+1)}$$

根据收敛域 $1 < |z| < 3$，选择积分路径 $C: |z| = 2$。极点 $z = -1$ 为一阶极点；极点 $z = 0$ 当 $n \le 3$ 时存在，阶数取决于 n；极点 $z = 3$ 在路径外，不计算留数。

当 $n \ge 4$，$z = 0$ 不是极点，只需计算 $z = -1$ 处留数

$$[F(z), -1] = \lim_{z \to -1} (z+1)F(z) = \frac{1}{4}(-1)^n$$

可得 $x[n] = \frac{1}{4}(-1)^n, \quad n \ge 4$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(1) $X(z)=\dfrac{z+z^{-2}-z^{-3}}{z^2-2z-3},\quad 1<|z|<3$；

解： 当 $n=3$，$z=0$ 为一阶极点，有

$$[F(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot F(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^4+z-1}{(z-3)(z+1)}=\frac{1}{3}$$

$$[F(z),-1]=\frac{-1}{(-1)\cdot(-4)}=-\frac{1}{4}\qquad\Rightarrow x[3]=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

当 $n=2$，$z=0$ 为二阶极点。令 $G(z)=\dfrac{z^4+z-1}{(z-3)(z+1)}$，则 $F(z)=G(z)z^{-2}$

$$[F(z),0]=G'(0)=-\frac{5}{9},\quad [F(z),-1]=\frac{1}{4}\qquad\Rightarrow x[2]=-\frac{5}{9}+\frac{1}{4}=-\frac{11}{36}$$

参考答案

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

（1） $X(z) = \dfrac{z + z^{-2} - z^{-3}}{z^2 - 2z - 3}, \quad 1 < |z| < 3$；

解： 当 $n = 1$，$z = 0$ 为三阶极点，有

$$[F(z), 0] = \frac{1}{2} G''(0) = \frac{13}{27}, \quad [F(z), -1] = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow x[1] = \frac{13}{27} - \frac{1}{4} = \frac{25}{108}$$

当 $n = 0$，$z = 0$ 为四阶极点，有

$$[F(z), 0] = \frac{1}{6} G'''(0) = -\frac{41}{81}, \quad [F(z), -1] = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow x[0] = -\frac{41}{81} + \frac{1}{4} = -\frac{83}{324}$$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(1) $X(z)=\dfrac{z+z^{-2}-z^{-3}}{z^2-2z-3},\quad 1<|z|<3$；

解： 当 $n<0$ 时，以 $n=-1$ 为例，有

$$F(z)=\frac{(z^4+z-1)z^{-5}}{(z-3)(z+1)}=\frac{z^4+z-1}{z^5(z-3)(z+1)}$$

$$[F(z),-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)F(z)=\frac{(-1)^4+(-1)-1}{(-1)^5(-1-3)}=-\frac{1}{4}$$

$$[F(z),0]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to0}\frac{d^4}{dz^4}\left[z^5F(z)\right]=\frac{1}{24}\lim_{z\to0}\frac{d^4}{dz^4}\left[\frac{z^4+z-1}{(z-3)(z+1)}\right]=\frac{1}{24}\cdot\left(-\frac{166}{27}\right)=-\frac{83}{324}$$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换:

(1) $X(z)=\dfrac{z+z^{-2}-z^{-3}}{z^2-2z-3},\quad 1<|z|<3$;

解: 可得 $x[-1]=-\frac{1}{4}-\frac{83}{324}=-\frac{83}{324}\cdot 3^{-1}$，类似地，对于任意 $n<0$，计算可得

$$x[n]=-\frac{83}{324}\cdot 3^n,\quad n<0$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=-\frac{83}{324}\cdot 3^n u[-n]+\frac{25}{108}\delta[n-1]-\frac{11}{36}\delta[n-2]+\frac{1}{12}\delta[n-3]+\frac{1}{4}(-1)^n u[n-4]$$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(3) $X(z) = \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}, \quad |z| > a$;

解： 部分分式法:

$$X(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - az}{z - a}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1 - az}{z(z - a)} = \frac{-\frac{1}{a}}{z} + \frac{\frac{1-a^2}{a}}{z - a}$$

$$X(z) = -\frac{1}{a} + \frac{1 - a^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n] = -\frac{1}{a}\delta[n] + (a^{n-1} - a^{n+1})u[n]$$

- **习题** **5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(3) $X(z)=\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}$， $|z|>a$；

解： 留数法：

$$F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{1-az}{z-a}z^{n-1}$$

根据收敛域 $|z|>a$，选择积分路径 $C:|z|=R>a$。极点 $z=a$ 在路径内，极点 $z=0$ 当 $n\leq 0$ 时在路径内。

当 $n\geq 1$ 时，只有极点 $z=a$ 在路径内，有

$$[F(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)F(z)=\lim_{z\to a}(1-az)z^{n-1}=(1-a^2)a^{n-1}$$

$$\Rightarrow x[n]=(1-a^2)a^{n-1},\quad n\geq 1$$

- **习题 5.24** 任选部分分式法和留数法计算下列各式的逆 z 变换：

(3) $X(z)=\frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}},\quad |z|>a$；

解： 当 $n=0$ 时，极点 $z=a$ 和 $z=0$ 都在路径内，有

$$[F(z),a]=(1-a\cdot a)a^{-1}=\frac{1-a^2}{a},\qquad [F(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot F(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-az}{z-a}=-\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x[0]=\frac{1-a^2}{a}-\frac{1}{a}=\frac{-a^2}{a}=-a$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ -a, & n=0\\ (1-a^2)a^{n-1}, & n\geq 1\end{cases}$$

参考答案

- **习题 5.25** 假设 $x[n]$ 为因果序列，计算下列各式的逆 z 变换；

(1) $X(z)=\frac{z^k-1}{z^k-z^{k-1}},\ k\geq 1$

解： 对 $X(z)$ 进行化简，有

$$X(z)=\frac{z^k-1}{z^{k-1}(z-1)}=\frac{(z-1)(z^{k-1}+z^{k-2}+\cdots+z+1)}{z^{k-1}(z-1)}=\frac{z^{k-1}+z^{k-2}+\cdots+z+1}{z^{k-1}}$$

即：

$$X(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-(k-1)}$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\cdots+\delta[n-(k-1)]=\sum_{m=0}^{k-1}\delta[n-m]$$

参考答案

- **习题 5.25** 假设 $x[n]$ 为因果序列，计算下列各式的逆 z 变换；

(3) $X(z) = \frac{z^3+1}{z^3-z^2-z-2}$

解： 方法 1：对分母进行因式分解，可得

$$X(z) = \frac{z^3+1}{(z-2)(z^2+z+1)}$$

再进行部分分式分解，有

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^3+1}{z(z-2)(z^2+z+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{z} + \frac{\frac{9}{14}}{z-2} + \frac{\frac{6}{7}z+\frac{4}{7}}{z^2+z+1}$$

$$X(z) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{14}\cdot\frac{z}{z-2} + \frac{6}{7}\cdot\frac{z^2}{z^2+z+1} + \frac{4}{7}\cdot\frac{z}{z^2+z+1}$$

- **习题 5.25** 假设 $x[n]$ 为因果序列，计算下列各式的逆 z 变换；

(3) $X(z)=\frac{z^3+1}{z^3-z^2-z-2}$

解： 对各项进行逆 z 变换：

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\right\}=-\frac{1}{2}\delta[n]\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{9}{14}\cdot\frac{z}{z-2}\right\}=\frac{9}{14}\cdot 2^n u[n]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{6}{7}\cdot\frac{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}z}{z^2+z+1}\right\}=\frac{6}{7}\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)u[n]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{4}{7}\cdot\frac{z}{z^2+z+1}\right\}=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)u[n]$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=-\frac{1}{2}\delta[n]+\left(\frac{9}{14}\cdot 2^n+\frac{6}{7}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{2}{7\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)u[n]$$

- **习题 5.25** 假设 $x[n]$ 为因果序列，计算下列各式的逆 z 变换：

(3) $X(z)=\frac{z^3+1}{z^3-z^2-z-2}$

解： 方法 2：对 $X(z)$ 进行部分分式分解，可得

$$X(z)=1+\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{2z+6}{7(z^2+z+1)}$$

对各项进行逆 z 变换：

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{1\right\}=\delta[n]\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{z-2}\right\}=\frac{9}{7}\cdot 2^{n-1}u[n-1]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{7}\cdot\frac{2z+6}{z^2+z+1}\right\}=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)u[n]+\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{3}\right)u[n-1]$$

$$\Rightarrow x[n]=\delta[n]-\frac{4}{7\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)u[n]+\left(\frac{9}{7}\cdot 2^{n-1}-\frac{12}{7\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{3}\right)\right)u[n-1]$$

- **习题 5.25** 假设 $x[n]$ 为因果序列，计算下列各式的逆 z 变换；

(5) $X(z)=\frac{z^2+2z}{(z^2-1)(z+0.5)}$

解：对分母进行因式分解，可得

$$X(z)=\frac{z(z+2)}{(z-1)(z+1)(z+0.5)}$$

再进行部分分式分解，有

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z+2}{(z-1)(z+1)(z+0.5)}=\frac{1}{z-1}+\frac{-1}{z+1}+\frac{-2}{z+0.5}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z+1}-2\cdot\frac{z}{z+0.5}$$

因此，逆 z 变换为

$$x[n]=\left[1-(-1)^n-2(-0.5)^n\right]u[n]$$