

§ 9.8 传输线的长线理论

传输线问题主要包括两方面内容，一是电磁波在传输线横截面内电场和磁场的分布规律，称为横向问题；二是研究电磁波沿传输线轴向的传播特性和场分布规律，称为纵向问题。前面关于矩形波导、圆形波导、同轴线的几节内容重点讨论了横向问题，本节将应用长线理论对纵向问题进行分析。

一、长线理论和分布参数的概念

传输线理论中的纵向问题最初是从研究很长的双导线传输线开始的，故称为“长线理论”。严格来讲，当传输线的长度远大于所传输的电磁波的波长时，或者可与波长相比拟时，传输线可称为长线，否则称为短线。因此，长线或短线是一个相对概念，而不是依据传输线的几何尺寸划分的。利用长线理论进行分析时，传输线本身的电容、电感、串联电阻和并联电导效应不能被忽略，这些效应不是集中于传输线上某一位置，而是沿着整个传输线的长度分布的，构成了一个分布参数电路。通常以 R_0 、 L_0 、 C_0 、 G_0 来表示这些分布参数，即

R_0 : 单位长度的分布电阻 (Ω/m) ;

L_0 : 单位长度的分布电感 (H/m) ;

C_0 : 单位长度的分布电容 (F/m) ;

G_0 : 单位长度的分布电导 (S/m) 。

二、传输线方程及其解

利用长线理论分析时，通常将传输线等效为平行双线，如图9-15(a)所示，选取负载处为坐标原点，由信号源至负载方向定义为 z 轴正方向。根据分布参数的概念，平行双线上的任一段线元 Δz 可以等效为图9-15(b)的电路。

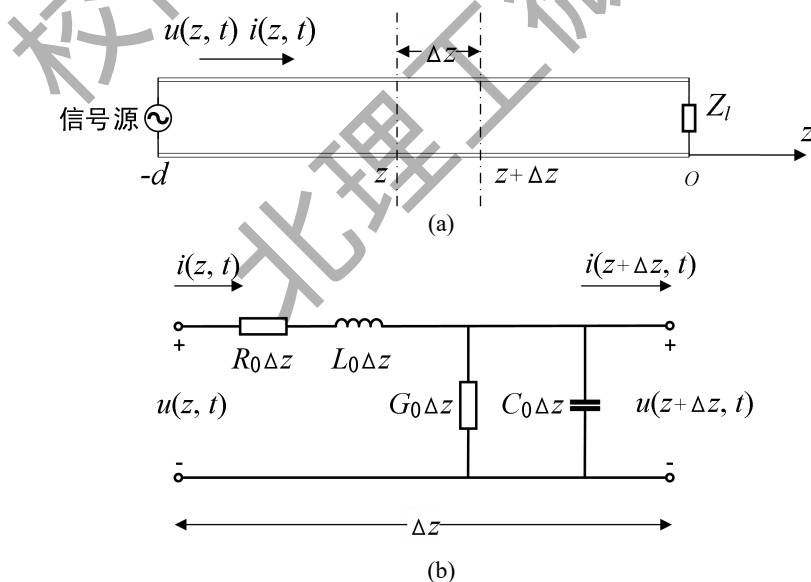


图9-15 传输线长线理论和分布参数示意图

(a) 平行双线等效图 (b) 线元 Δz 的分布参数等效电路

根据基尔霍夫电压定律可得

$$u(z,t) - R_0 \Delta z i(z,t) - L_0 \Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - u(z + \Delta z, t) = 0 \quad (9-116a)$$

再根据基尔霍夫电流定律导出

$$i(z,t) - G_0 \Delta z u(z + \Delta z, t) - C_0 \Delta z \frac{\partial u(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0 \quad (9-116b)$$

以上两式同时除以 Δz , 并取 $\Delta z \rightarrow 0$ 时的极限, 可得传输线方程

$$-\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = R_0 i(z,t) + L_0 \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (9-117a)$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G_0 u(z,t) + C_0 \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \quad (9-117b)$$

若传输线上信号为正弦变化, 可令

$$u(z,t) = \text{Re} [U(z) e^{j\omega t}] \quad i(z,t) = \text{Re} [I(z) e^{j\omega t}]$$

则式 (9-117a) 和 (9-117b) 表示为复数形式

$$-\frac{dU(z)}{dz} = (R_0 + j\omega L_0) I(z) \quad (9-118a)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G_0 + j\omega C_0) U(z) \quad (9-118b)$$

两式同时对 z 求导, 可得

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} = \gamma^2 U(z) \quad (9-119a)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \quad (9-119b)$$

其中 $\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$ 称为传播常数。

两个微分方程 (9-119a) (9-119b) 可以独立求解, 其通解分别是

$$U(z) = U_l^+ e^{-\gamma z} + U_l^- e^{\gamma z} \quad (9-120a)$$

$$I(z) = I_l^+ e^{-\gamma z} + I_l^- e^{\gamma z} \quad (9-120b)$$

其中, U_l^+ , I_l^+ 为待定系数, 下标 l 表示该通解是坐标原点定义在负载处时的解。

$$\text{若记} \quad U^+(z) = U_l^+ e^{-\gamma z} \quad (9-121a)$$

$$U^-(z) = U_l^- e^{\gamma z} \quad (9-121b)$$

则 $U^+(z)$ 表示沿 $+\hat{z}$ 方向, 向负载方向传输的电磁波, 称为入射波; 相应的, $U^-(z)$ 表示向信号源方向传播的反射波。

另一方面, 两个微分方程又存在着式 (9-118a) 和 (9-118b) 确定的约束关系, 相应的待定系数之间也必然存在着互换关系。将 $U(z)$ 的通解带入频域微分方程 (9-118a) 中, 得

$$I(z) = \frac{\gamma}{R_0 + j\omega L_0} (U_l^+ e^{-\gamma z} - U_l^- e^{\gamma z})$$

若令 $Z_c = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)/(G_0 + j\omega C_0)}$, 则传输线上电流解为

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} (U_l^+ e^{-\gamma z} - U_l^- e^{\gamma z}) \quad (9-120c)$$

式 (9-120a) 和 (9-120c) 构成了长线理论下传输线问题的通解。 Z_c 称为传输线的特性阻抗。

$$\text{若记} \quad I^+(z) = I_l^+ e^{-\gamma z} = \frac{U_l^+}{Z_c} e^{-\gamma z} \quad (9-122a)$$

$$I^-(z) = I_l^- e^{\gamma z} = -\frac{U_l^-}{Z_c} e^{\gamma z} \quad (9-122b)$$

则 $I^+(z)$ 和 $I^-(z)$ 分别反映着传输线上入射波和反射波的电流分布。

传输线方程通解的待定系数 U_l^+ 和 U_l^- 需要由传输线的边界条件来确定。下面分别讨论两种工程上常用的定解边界条件。

(1) 已知终端电压、电流

设传输线终端 $z=0$ 处的电压和电流分别为 $U(0)=U_l$, $I(0)=I_l$, 将其带入式 (9-120a) 和 (9-120c) 中, 可知

$$U_l = U_l^+ + U_l^- \quad I_l = \frac{1}{Z_c} (U_l^+ - U_l^-)$$

由此可得待定系数 U_l^+ 和 U_l^-

$$U_l^+ = \frac{U_l + I_l Z_c}{2} \quad U_l^- = \frac{U_l - I_l Z_c}{2}$$

将 U_l^+ 和 U_l^- 带入式 (9-120a) 和 (9-120c) 中, 得传输线上的电压电流分布

$$U(z) = \frac{U_l + I_l Z_c}{2} e^{-\gamma z} + \frac{U_l - I_l Z_c}{2} e^{\gamma z} \quad (9-123a)$$

$$I(z) = \frac{U_l + I_l Z_c}{2Z_c} e^{-\gamma z} - \frac{U_l - I_l Z_c}{2Z_c} e^{\gamma z} \quad (9-123b)$$

表示为双曲函数形式为

$$U(z) = U_l \operatorname{ch}(\gamma z) - I_l Z_c \operatorname{sh}(\gamma z) \quad (9-124a)$$

$$I(z) = I_l \operatorname{ch}(\gamma z) - \frac{U_l}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma z) \quad (9-124b)$$

(2) 已知始端 (信号源) 电压、电流

设传输线始端 $z=-d$ 处的电压和电流分别为 $U(-d)=U_0$, $I(-d)=I_0$, 将其带入式 (9-120a) 和 (9-120c) 中, 可知

$$U_0 = U_l^+ e^{\gamma d} + U_l^- e^{-\gamma d} \quad I_0 = \frac{1}{Z_c} (U_l^+ e^{\gamma d} - U_l^- e^{-\gamma d})$$

由此可以确定待定系数 U_l^+ 和 U_l^-

$$U_l^+ = \frac{U_0 + I_0 Z_c}{2} e^{-\gamma d} \quad U_l^- = \frac{U_0 - I_0 Z_c}{2} e^{\gamma d}$$

将 U_l^+ 和 U_l^- 带入式 (9-120a) 和 (9-120c) 中, 得传输线上的电压电流分布

$$U(z) = \frac{U_0 + I_0 Z_c}{2} e^{-\gamma(z+d)} + \frac{U_0 - I_0 Z_c}{2} e^{\gamma(z+d)} \quad (9-125a)$$

$$I(z) = \frac{U_0 + I_0 Z_c}{2Z_c} e^{-\gamma(z+d)} - \frac{U_0 - I_0 Z_c}{2Z_c} e^{\gamma(z+d)} \quad (9-125b)$$

表示为双曲函数形式为

$$U(z) = U_0 \operatorname{ch}[\gamma(z+d)] - I_0 Z_c \operatorname{sh}[\gamma(z+d)] \quad (9-126a)$$

$$I(z) = I_0 \operatorname{ch}[\gamma(z+d)] - \frac{U_0}{Z_0} \operatorname{sh}[\gamma(z+d)] \quad (9-126b)$$

从以上分析可以看出，利用两种边值条件都可以表示传输线上电压和电流的分布情况，工程上通常应用已知负载处电压和电流的双曲函数表达式（9-124a）和（9-124b）进行讨论。

三、传输线上波的传输特性参数

1. 特性阻抗

在求解传输线上波的通解时，引入了特性阻抗的概念，通常将其定义为入射波的电压与电流之比，即

$$Z_c = \frac{U^+}{I^+} = \sqrt{\frac{(R_0 + j\omega L_0)}{(G_0 + j\omega C_0)}} \quad (9-127a)$$

也可以利用反射波的电压和电流比来定义特性阻抗，即

$$Z_c = -\frac{U^-}{I^-} = \sqrt{\frac{(R_0 + j\omega L_0)}{(G_0 + j\omega C_0)}} \quad (9-127b)$$

可见，特性阻抗由传输线的分布参数和工作频率决定，而与其他参数无关。当传输线是无损传输线时， $R_0 = 0$ ， $G_0 = 0$ ，特性阻抗为 $Z_c = \sqrt{L_0/C_0}$ 。

2. 传播常数

传播常数 γ 是在求解传输线上的波的通解时引入的另一个特征量，通常 γ 是复数，即

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta \quad (9-128)$$

由此可得

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} - (\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0) \right]} \quad (9-129a)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} + (\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0) \right]} \quad (9-129b)$$

其中，实部 α 为衰减常数，表示传输线上单位长度入射波或反射波的电压电流幅度衰减程度，虚部 β 为相位常数，反映电压、电流等参量的相位变化情况。

相应的，传输线上波的相速度表示为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

当传输线为无损传输线时， $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ ，相速度

$$v_p = 1/\sqrt{L_0 C_0}$$

于是，传输线上电磁波的波长可以表示为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f}$$

3. 输入阻抗

传输线上任一点的电压和电流的比值定义为该点朝负载端看去的输入阻抗，记为 Z_{in} ，根据式 (9-124a) 和 (9-124b) 得

$$Z_{in}(z) = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_l \operatorname{ch}(\gamma z) - I_l Z_c \operatorname{sh}(\gamma z)}{I_l \operatorname{ch}(\gamma z) - \frac{U_l}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma z)} = Z_c \frac{Z_l - Z_c \operatorname{th}(\gamma z)}{Z_c - Z_l \operatorname{th}(\gamma z)} \quad (9-130)$$

其中， $Z_l = U_l/I_l$ ，表示终端负载阻抗。对于无损耗传输线衰减常数 $\alpha = 0$ ， $\gamma = j\beta$ ，故

$$Z_{in}(z) = Z_c \frac{Z_l - jZ_c \tan(\beta z)}{Z_c - jZ_l \tan(\beta z)} \quad (9-131)$$

工程上常采用观察点与负载的距离变量 l 来表示输入阻抗，该点处坐标可记为 $z = -l$ ，带入式 (9-131) 中，可得

$$Z_{in} = Z_c \frac{Z_l + jZ_c \tan(\beta l)}{Z_c + jZ_l \tan(\beta l)} \quad (9-132)$$

4. 反射系数

传输线上任一点处反射波电压与入射波电压之比，定义为该点处的电压反射系数，简称反射系数，即

$$\Gamma(z) = \frac{U^-(z)}{U^+(z)}$$

根据入射波和反射波电压表达式 (9-121a) 和 (9-121b)，进一步可得

$$\Gamma(z) = \frac{U^-(z)}{U^+(z)} = \frac{U_l^- e^{\gamma z}}{U_l^+ e^{-\gamma z}} = \Gamma_l e^{2\gamma z} \quad (9-133)$$

其中， Γ_l 称为终端反射系数，并且

$$\Gamma_l = \frac{U_l^-}{U_l^+} = \frac{U_l - I_l Z_c}{U_l + I_l Z_c} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \quad (9-134)$$

利用式 (9-133)，可以将传输线上的电压表示为

$$\begin{aligned} U(z) &= U^+(z) + U^-(z) = U^+(z)[1 + \Gamma(z)] = U^+(z)[1 + \Gamma_l e^{2\gamma z}] \\ &= U_l^+ [e^{-\gamma z} + \Gamma_l e^{\gamma z}] \end{aligned} \quad (9-135a)$$

同理，传输线上的电流表示为

$$I(z) = \frac{U_l^+}{Z_c} [e^{-\gamma z} - \Gamma_l e^{\gamma z}] \quad (9-135b)$$

四、传输线的工作状态

当传输线终端接不同负载时，反射系数取不同值，传输线也将相应工作在不同状态上。

1. 行波状态

行波状态定义为传输线上无反射波的工作状态，此时只有入射波，反射系数 $\Gamma_l = 0$ 。根据反射系数表达式 (9-134) 可以看出，当 $Z_l = Z_c$ ，即传输线终端负载阻抗等于传输线的特性阻抗时， $\Gamma_l = 0$ ，传输线工作在行波状态。此时

$$U(z) = U_l^+ [e^{-\gamma z} + \Gamma_l e^{\gamma z}] = U_l^+ e^{-\gamma z} \quad (9-136a)$$

$$I(z) = \frac{U_l^+}{Z_c} [e^{-\gamma z} - \Gamma_l e^{\gamma z}] = \frac{U_l^+}{Z_c} e^{-\gamma z} \quad (9-136b)$$

对于无耗传输线 $\gamma = j\beta$ ，若将 U_l^+ 记为 $|U_l^+| e^{j\varphi_l}$ ，其中 φ_l 为 U_l^+ 的初相角，则有

$$U(z) = |U_l^+| e^{j\varphi_l} e^{-j\beta z} \quad I(z) = \frac{|U_l^+|}{Z_c} e^{j\varphi_l} e^{-j\beta z}$$

由此可以得传输线上电压和电流的瞬时表达式

$$u(z, t) = \text{Re}[U(z) e^{j\omega t}] = |U_l^+| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_l) \quad (9-137a)$$

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z) e^{j\omega t}] = \frac{|U_l^+|}{Z_c} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_l) \quad (9-137b)$$

根据式 (9-137a) 和 (9-137b) 可以画出行波状态下，沿传输线的电压和电流分布情况。

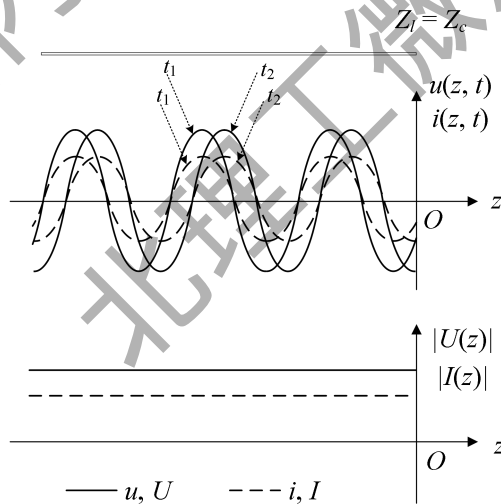


图9-16 行波状态传输线电流和电压分布图

从图9-16中可以看出，向负载方向传输的入射波电压和电流相位随 z 的增加而滞后，这是波动形式由信号源向负载方向传播的必然结果。由于没有能量反射，源区域的能量将全部传输至负载，这是一种理想的工作状态。根据任意位置的输入阻抗表达式 (9-131) 或 (9-132) 可知，行波状态下，任意位置的输入阻抗都等于特性阻抗，即

$$Z_{in}(z) = Z_c$$

因此，行波状态也称为负载匹配状态。传输线上行波有如下特点：

- i. 沿传输线电压和电流振幅不变；
- ii. 电压和电流同相位；
- iii. 沿线各点的输入阻抗都等于特性阻抗。

2. 纯驻波状态

纯驻波状态与行波状态正好相反，当所有的入射波能量都被反射时，传输线的工作状态称为纯驻波状态。根据这样的定义，对于无耗传输线，纯驻波状态时反射系数的模值为1，即

$$|\Gamma_l| = 1$$

根据反射系数计算式 (9-134)，可分几种情况进行讨论。

(1) 短路状态

若 $\Gamma_l = -1$ ，则 $Z_l = 0$ ，此时终端接零负载，称为短路状态。于是传输线上的电压为

$$U(z) = U_l^+ [e^{-\gamma z} + \Gamma_l e^{\gamma z}] = U_l^+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -j2|U_l^+| e^{j\varphi_l} \sin(\beta z) \quad (9-138a)$$

同理可得

$$I(z) = \frac{U_l^+}{Z_c} [e^{-\gamma z} - \Gamma_l e^{\gamma z}] = \frac{U_l^+}{Z_c} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = \frac{2|U_l^+|}{Z_c} e^{j\varphi_l} \cos(\beta z) \quad (9-138b)$$

表示成瞬时值

$$u(z, t) = \text{Re}[U(z)e^{j\omega t}] = 2|U_l^+| \sin(\beta z) \cos\left(\omega t + \varphi_l - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9-139a)$$

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] = \frac{2|U_l^+|}{Z_c} \cos(\beta z) \cos(\omega t + \varphi_l) \quad (9-139b)$$

根据以上分析可将将短路状态下，传输线上电压和电流的瞬时分布情况画在图9-17(a)中

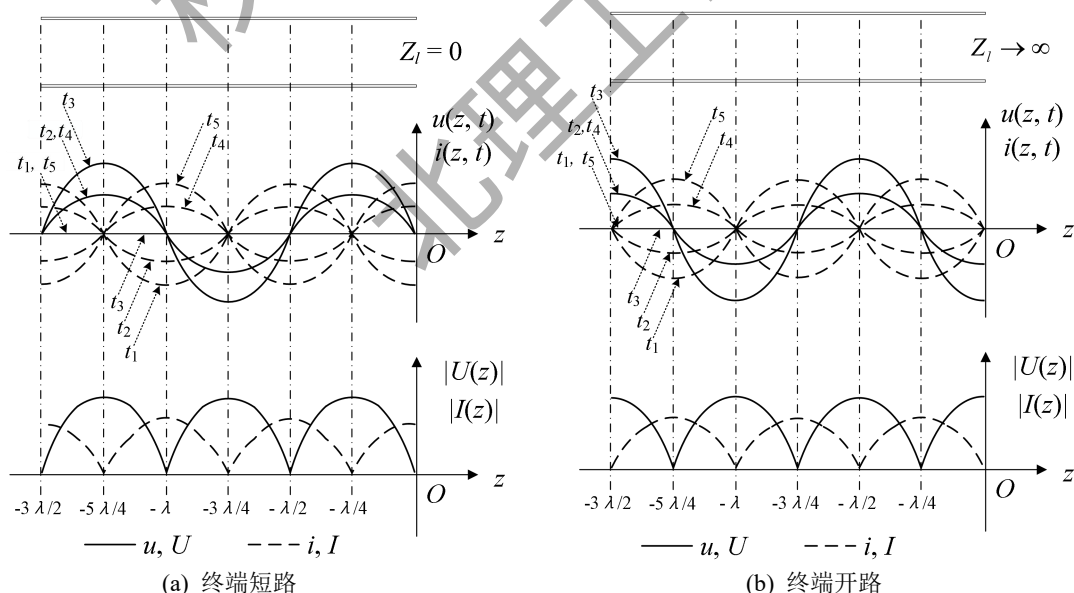


图9-17 纯驻波状态传输线电流和电压分布图

根据 $\Gamma_l = -1$ 条件下电压的表达式 (9-138a)，可以看出纯驻波是在全反射条件下，由两个相向传输的行波叠加而成的。由于所有能量全部反射，纯驻波状态不能形成能量传输，它不再具有行波的传输特性，而是在传输线上作简谐振荡。从图9-17(a)中还可以进一步看出，终端接零负载时，无损耗传输线工作状态有如下特点：

i. 传输线上电压和电流的振幅是位置 z 的函数，出现最大值（波腹点）和零值（波节点）。

具体而言， $z = -\frac{n\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处是电压振幅的零值点，同时是电流振幅的最大值点；

$z = -\frac{(2n+1)\lambda}{4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处是电流振幅的零值点，也是电压振幅的最大值点。

ii. 相邻两波节之间的电压（或电流）随时间作同向振动，波节点两侧的电压（或电流）作反向振动。

iii. 在时间上传输线各点的电压和电流有 $1/4$ 周期的相位差；空间上电压与电流的最大值（或最小值）点交替出现，位置有 $\lambda/4$ 的相移。

(2) 开路状态

若 $\Gamma_l = 1$ ，则 $Z_l \rightarrow \infty$ ，此时终端接无限大负载，称为开路状态。传输线上电压和电流为

$$U(z) = U_l^+ [e^{-\gamma z} + \Gamma_l e^{\gamma z}] = U_l^+ (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = 2|U_l^+| e^{j\varphi_l} \cos(\beta z) \quad (9-140a)$$

同理可得

$$I(z) = \frac{U_l^+}{Z_c} [e^{-\gamma z} - \Gamma_l e^{\gamma z}] = \frac{U_l^+}{Z_c} (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -\frac{j2|U_l^+|}{Z_c} e^{j\varphi_l} \sin(\beta z) \quad (9-140b)$$

表示成瞬时值

$$u(z, t) = \text{Re}[U(z)e^{j\omega t}] = 2|U_l^+| \cos(\beta z) \cos(\alpha + \varphi_l) \quad (9-141a)$$

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}] = \frac{2|U_l^+|}{Z_c} \sin(\beta z) \cos\left(\alpha + \varphi_l - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9-141b)$$

根据以上分析，可将开路状态下传输线上电压和电流的瞬时分布情况画在图9-17(b)中。从图中可以看出，终端接无限大负载时，无损耗传输线工作状态与接零负载时情况类似，只是电

压或电流的最大值和最小值点出现的位置正好相反，即 $z = -\frac{n\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处是电流振

幅的零值点，同时是电压振幅的最大值点； $z = -\frac{(2n+1)\lambda}{4}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 处是电压振幅的

零值点，也是电流振幅的最大值点。

(3) 终端接纯电抗性负载状态

若 Γ_l 为纯虚数其模值也为1，这需要负载阻抗值为纯虚数 $Z_l = jX_l$ ，此时终端接纯电抗性负载。传输线上电压和电流表达式也可以用相似的方法求得，由于纯电抗性负载引入了相移，电压和电流分布情况介于终端接零负载和无限大负载之间。

3. 行驻波（混合波）状态

当传输线终端所接的负载不等于特性阻抗，也不是短路、开路或接纯电抗性负载，而是接任意阻抗负载时，线上将同时存在入射波和反射波，并且两者振幅不等，叠加后形成行驻波（混合波）状态。对于无损耗传输线，线上的电压、电流表示为

$$\begin{aligned}
 U(z) &= U_l^+ e^{-j\beta z} + U_l^- e^{j\beta z} = U_l^+ e^{-j\beta z} + \Gamma_l U_l^+ e^{j\beta z} \\
 &= U_l^+ (1 - \Gamma_l) e^{j\beta z} + 2\Gamma_l U_l^+ \cos(\beta z) \\
 &= |U_l^+| e^{j\varphi_l} [(1 - \Gamma_l) e^{j\beta z} + 2\Gamma_l \cos(\beta z)]
 \end{aligned} \quad (9-142a)$$

$$\begin{aligned}
 I(z) &= \frac{U_l^+}{Z_c} (e^{-j\beta z} - \Gamma_l e^{j\beta z}) = \frac{U_l^+}{Z_c} [(1 - \Gamma_l) e^{-j\beta z} - j2\Gamma_l \sin(\beta z)] \\
 &= \frac{|U_l^+| e^{j\varphi_l}}{Z_c} [(1 - \Gamma_l) e^{-j\beta z} - j2\Gamma_l \sin(\beta z)]
 \end{aligned} \quad (9-142b)$$

表示成瞬时值

$$u(z, t) = |U_l^+| (1 - \Gamma_l) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_l) + 2\Gamma_l |U_l^+| \cos(\beta z) \cos(\omega t + \varphi_l) \quad (9-143a)$$

$$i(z, t) = \frac{|U_l^+|}{Z_c} (1 - \Gamma_l) \cos(\omega t - \beta z + \varphi_l) + \frac{2|U_l^+|}{Z_c} \Gamma_l \sin(\beta z) \cos\left(\omega t + \varphi_l - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9-143b)$$

可见，传输线上的电压、电流由两部分组成：第一部分代表由电源向负载传输的单向行波；第二部分代表纯驻波。图9-18给出了行驻波状态下，电压和电流的振幅分布。

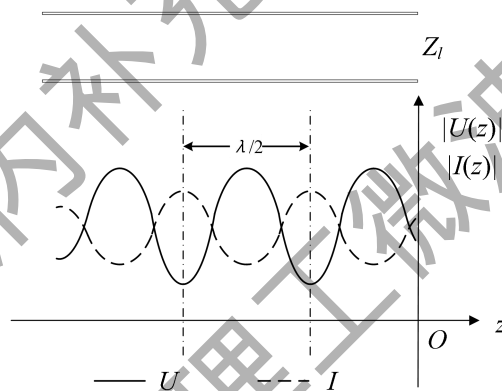


图9-18 行驻波状态传输线电流和电压分布图

从图9-18可以看出，在传输线上各点处的电压振幅是不断变化的，因此引入电压驻波比（VSWR）对其进行表征。电压驻波比定义为电压最大值与最小值之比，简称驻波比（SWR），记为 ρ ，

$$\rho = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \quad (9-144)$$

行驻波状态下，传输线上电压也可以表示为

$$\begin{aligned}
 U(z) &= U_l^+ e^{-j\beta z} + U_l^- e^{j\beta z} = U_l^+ e^{-j\beta z} + \Gamma_l U_l^+ e^{j\beta z} \\
 &= |U_l^+| e^{j\varphi_l} (1 + \Gamma_l e^{j2\beta z}) e^{-j\beta z}
 \end{aligned} \quad (9-145)$$

这可以看做是一个向着 z 方向传播的行波，只是其振幅随着 z 周期性变化，任意两个相邻的电压振幅节点之间的距离是 $\lambda/2$ 。

根据式(9-145)可进一步得到驻波比与反射系数的关系

$$\rho = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_l|}{1 - |\Gamma_l|}$$

可见，无损耗传输线上的驻波比 ρ 与位置无关，是一个常数。当传输线工作在行波状态时， $\rho = 1$ ；当传输线工作在驻波状态时， $\rho \rightarrow \infty$ ；当工作在行驻波（混合波）状态时， $1 < \rho < \infty$ 。

习题：

9.24 无损耗传输线上某点处，终端短路时的输入阻抗为 Z_{in}^S ，终端开路时输入阻抗为 Z_{in}^O ，试证明传输线特性阻抗

$$Z_c = \sqrt{Z_{in}^S Z_{in}^O}$$

9.25 一无损耗传输线，长度为2米，特性阻抗 50Ω ，工作频率200MHz，其终端负载阻抗为 $Z_l = 40 + j30 \Omega$ ，求输入阻抗。

9.26 特性阻抗为 300Ω 的无损耗传输线，终端接未知负载 Z_l ，传输线上驻波比为2，距离负载 0.3λ 处为第一个电压最小点，求：

(1) 负载端反射系数 Γ_l ；

(2) 负载阻抗 Z_l 。