# 数字信号处理习题集

周治国

2019.5

# 考核范围：

第三章 离散傅里叶变换(DFT)

1. DFT的定义与性质
2. 频域取样
3. DFT应用中的问题与参数选择
4. DFT与Z变换的关系

# 考核范围：

第四章 快速傅里叶变换（FFT）

1. 提高DFT运算效率的基本途径
2. 基-2 FFT算法
3. N为复合数的FFT算法
4. 分裂基FFT算法
5. 实序列的FFT算法
6. FFT的应用

# 考核范围：

第五章 数字滤波器

1. 数字滤波器的基本结构
2. 无限冲激响应（IIR）数字滤波器设计
3. 有限冲激响应（FIR）数字滤波器设计

# 考核重点:

第三章 离散傅里叶变换(DFT)

1． DFT的计算及其性质（含性质的证明）；

2． 线性卷积、周期卷积、圆周卷积的定义、计算及三者关系；

3． DFT计算连续时间信号、离散时间信号频谱（逼近的原理和方法、存在的问题及解决办法）；

# 考核重点：

第四章 快速傅里叶变换（FFT）

1． 基-2 DIT/DIF FFT算法原理与蝶形运算公式推导、算法特点及16点以内算法流图；

2． 分裂基L型运算的公式及8点以内算法流图（推导过程不作为重点）；

3． 复合数FFT和基-4 FFT算法原理（推导过程不作为重点）；

4． 实序列的FFT算法

5． FFT的应用（快速卷积和快速相关）

# 考核重点：

第五章 数字滤波器

1． 数字滤波器的基本结构

2． IIR数字滤波器设计：巴特沃斯低通数字滤波器设计（含脉冲响应不变变换法和双线性变换法，及两种变换方法的特点）

3. FIR线性相位滤波器的特点（频率响应及零点位置，重点掌握情况1）

4． FIR数字滤波器设计：低通、高通、带通、带阻数字滤波器设计（含窗函数法和I型频率取样法）

# 1、圆周移位、线性卷积、周期卷积、圆周卷积

圆周移位计算，习题集：P38-4

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$

$(b)x((-n))_6 R_6(n)$

$(c)x((n))_3 R_3(n)$

$(d)x((n))_6$

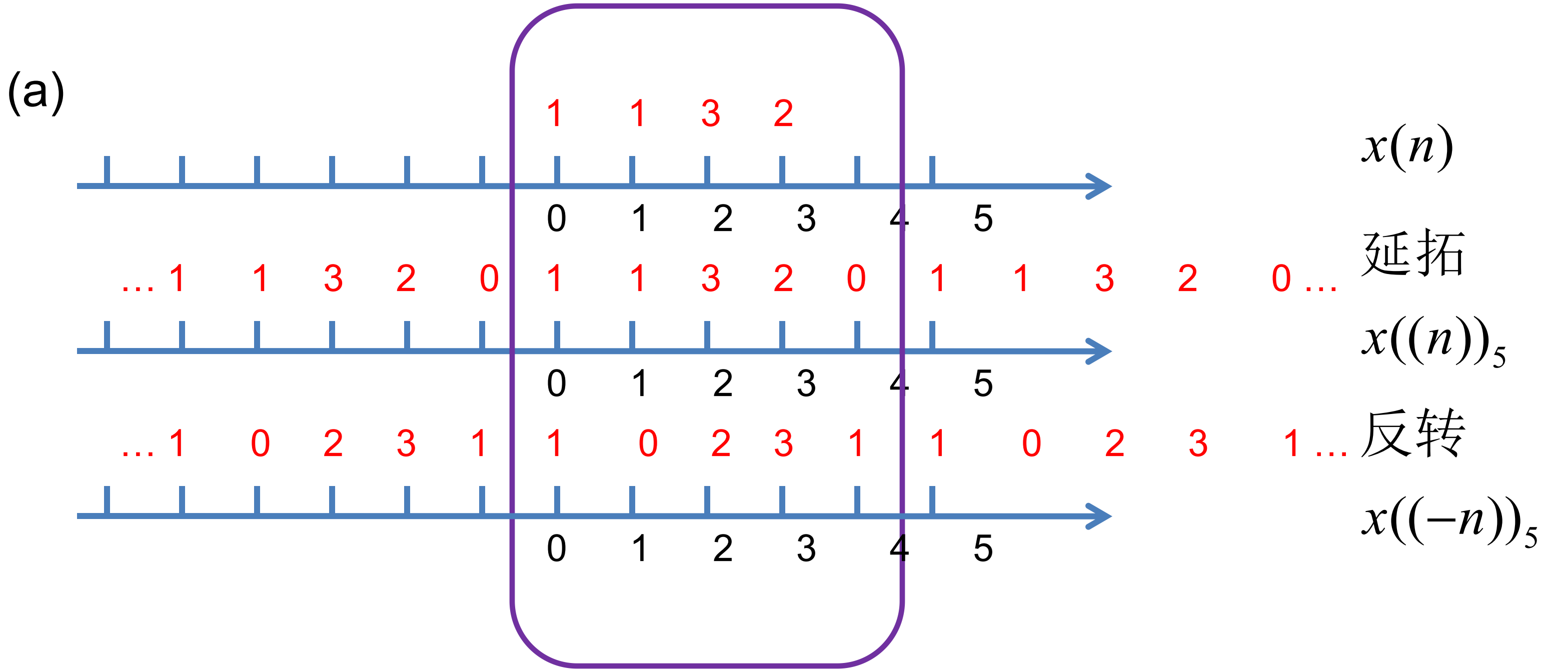
$(e)x((n-3))_5 R_5(n)$

$(f)x((n))_7 R_7(n)$

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)\,x((-n))_5$　$(b)\,x((-n))_6R_6(n)$　$(c)\,x((n))_3R_3(n)$

$(d)\,x((n))_6$　$(e)\,x((n-3))_5R_5(n)$　$(f)\,x((n))_7R_7(n)$

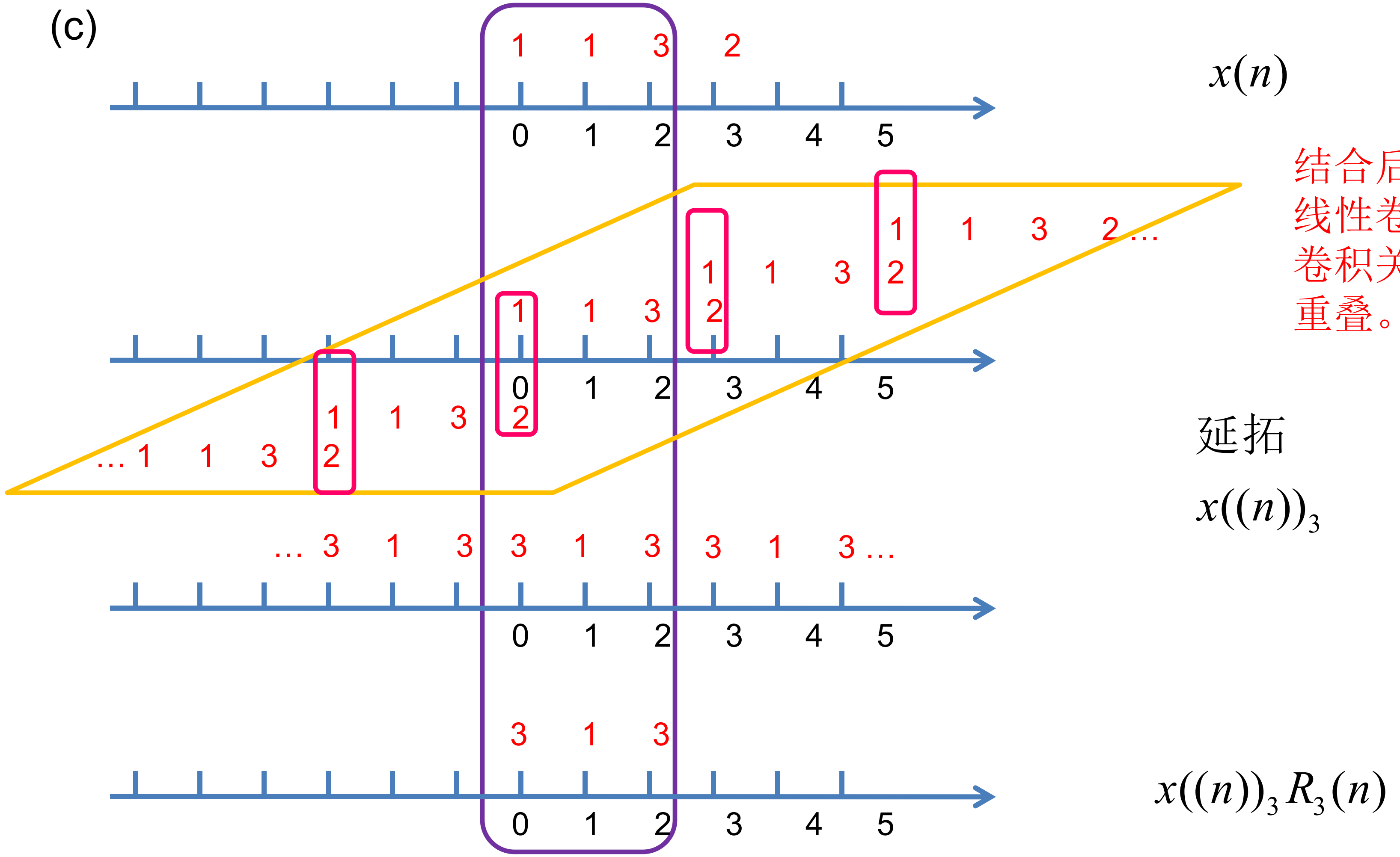


已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$　$(b)x((-n))_6R_6(n)$　$(c)x((n))_3R_3(n)$

$(d)x((n))_6$　$(e)x((n-3))_5R_5(n)$　$(f)x((n))_7R_7(n)$

(c)




结合后面讲到的线性卷积和圆周卷积关系来理解重叠。

圆周卷积计算方法小结:

1，哑元坐标

2，周期延拓

3，反转

4，周期移位，相乘相加

# 历年考试真题

已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

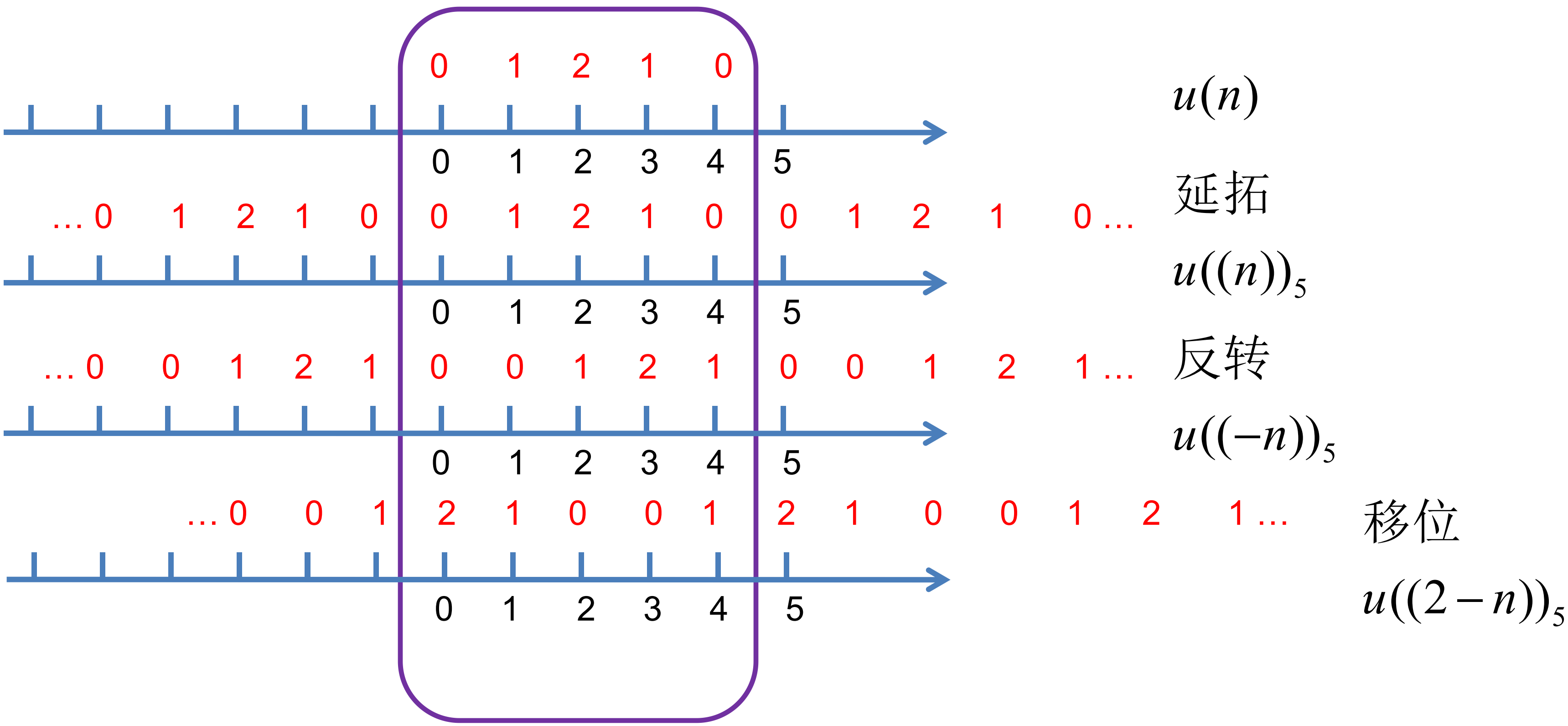
$(a)$画出$x(n)=u((2-n))_5 R_5(n)$的图形

$(b)$求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积

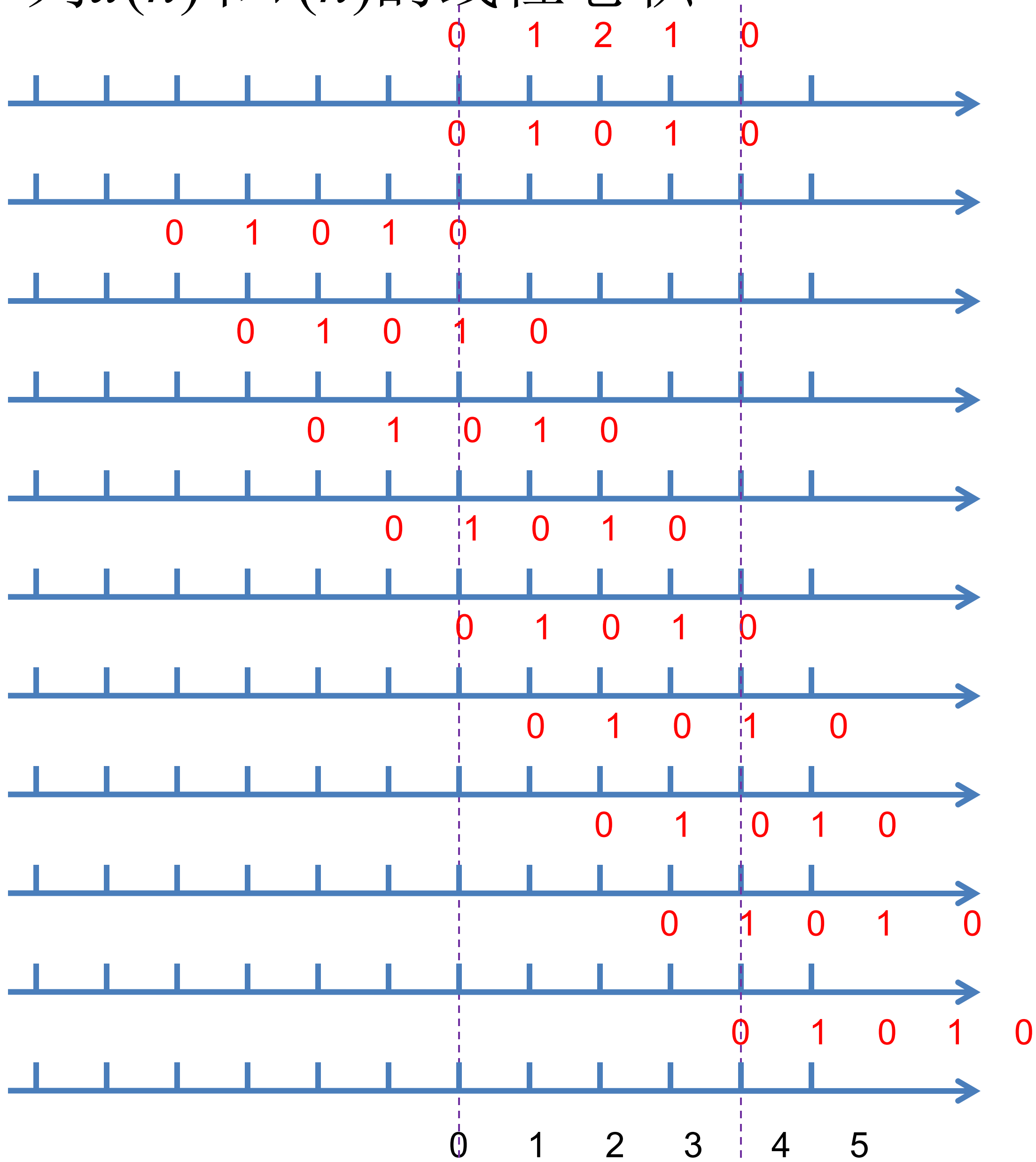
已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(a)画出$x(n)=u((2-n))_5R_5(n)$的图形



已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

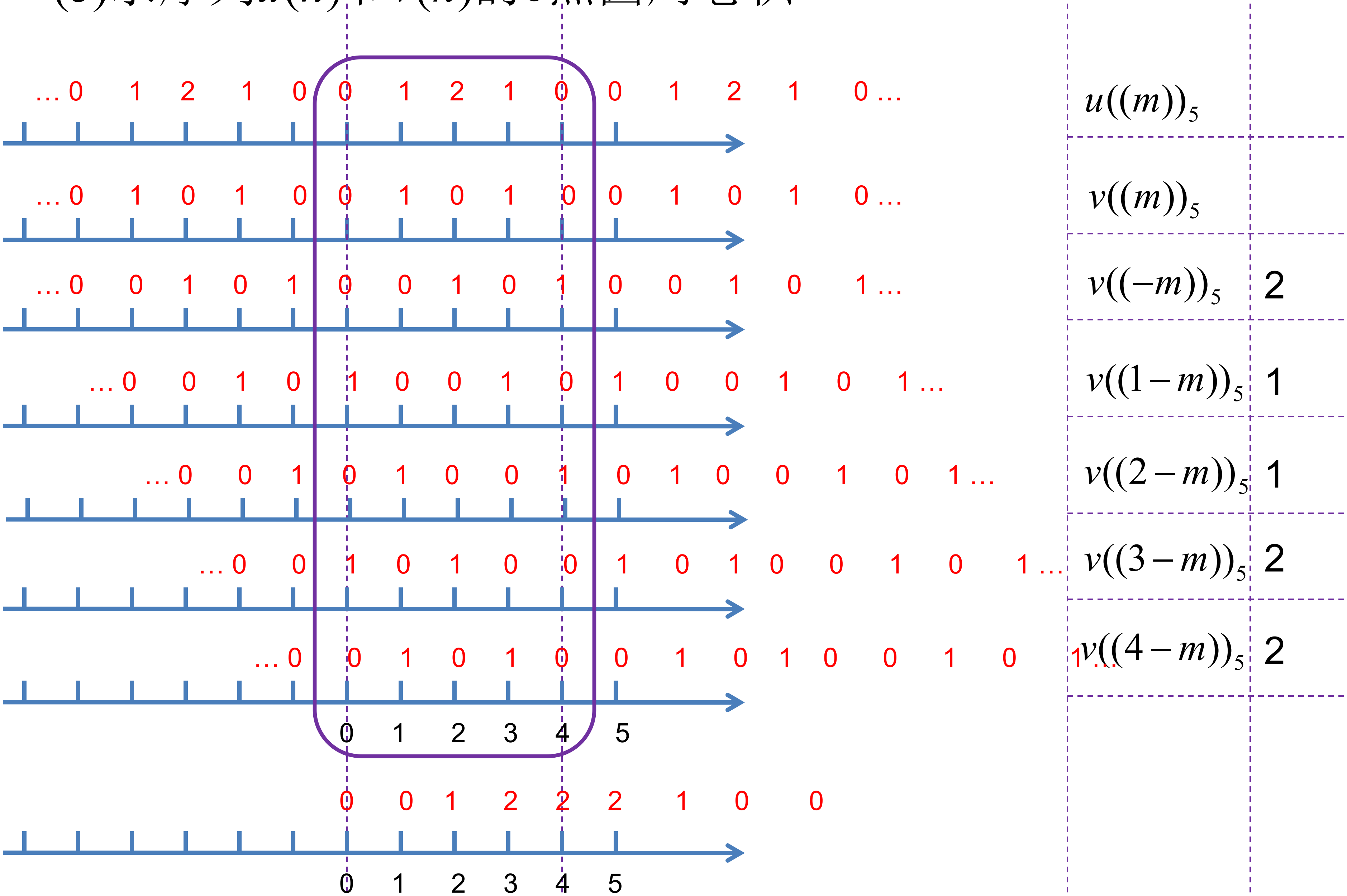
$(b)$求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积




| | |
|---|---|
| $u(m)$ | |
| $v(m)$ | |
| $v(-m)$ | 0 |
| $v(1-m)$ | 0 |
| $v(2-m)$ | 1 |
| $v(3-m)$ | 2 |
| $v(4-m)$ | 2 |
| $v(5-m)$ | 2 |
| $v(6-m)$ | 1 |
| $v(7-m)$ | 0 |
| $v(8-m)$ | 0 |

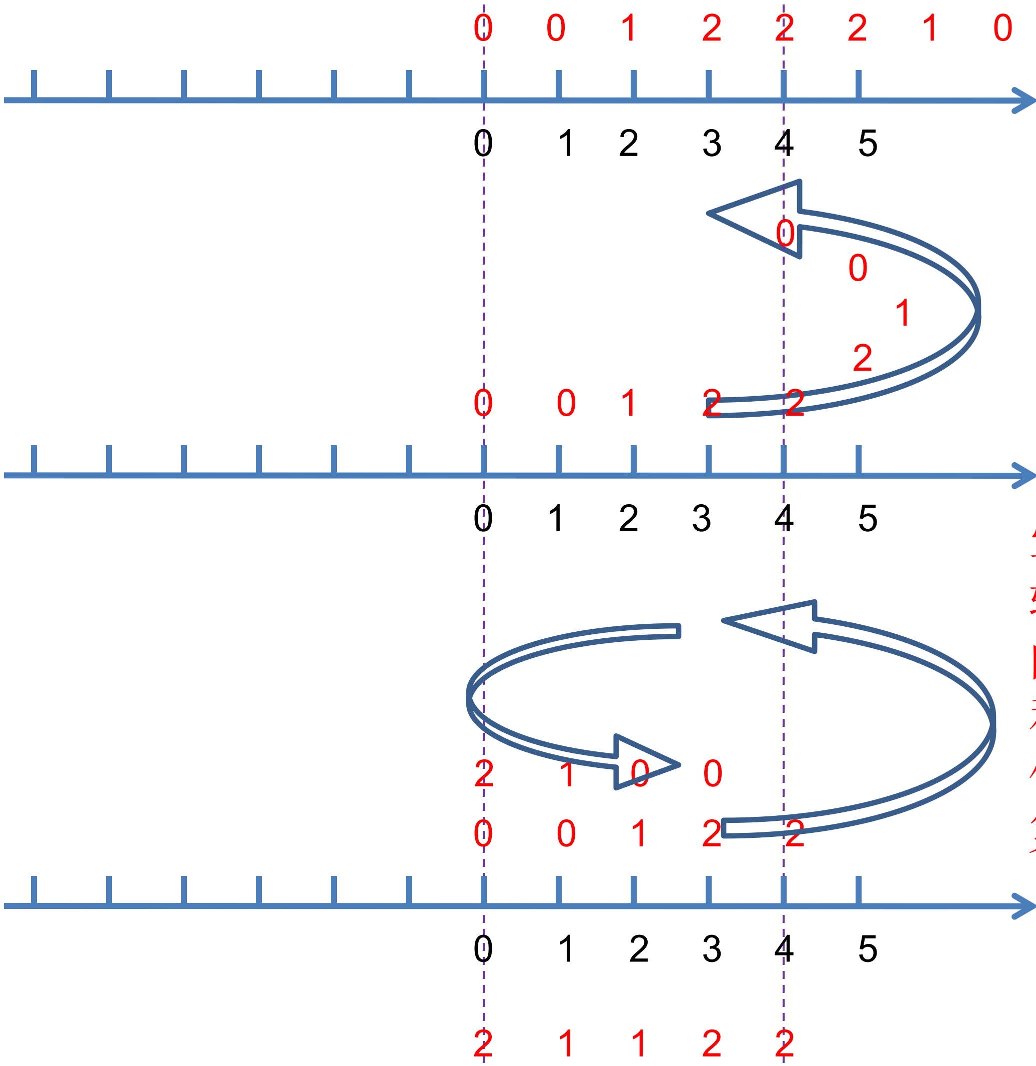
已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(c)求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积



已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积




| | |
|---|---|
| $u((m))_5$ | |
| $v((m))_5$ | |
| $v((-m))_5$ | 2 |
| $v((1-m))_5$ | 1 |
| $v((2-m))_5$ | 1 |
| $v((3-m))_5$ | 2 |
| $v((4-m))_5$ | 2 |

掌握将L点线性卷积转化为N点圆周卷积的方法。
和前面讲到的圆周移位计算(习题集P38-4第(c)问)结合理解。

已知4点复序列$c(n)=u(n)+jv(n)$的$DFT$为

$C(k)=\{10+2j,-2+2j,-2+2j,-2-2j\}$

$u(n)$和$v(n)$为两个实序列

$(a)$求序列$u(n)$和$v(n)$的4点$DFT$

$(b)$求序列$x(n)=u((2-n))R_4(n)$和$y(n)=v((n-1))R_4(n)$

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$5点圆周卷积，与线性卷积哪些值结果相同，并说明原因；

$(d)$写出利用$FFT$求序列$u(n)$和$v(n)$线性卷积的步骤；

$$(1)\,C(k)=\{10+2j,-2+2j,-2+2j,-2-2j\}$$

$$C^*(4-k)=\{10-2j,-2+2j,-2-2j,-2-2j\}$$

$$\because \mathrm{DFT}\{c^*(n)\}=C^*(N-k)$$

$$c(n)=u(n)+jv(n)$$

$$u(n)=\frac{1}{2}\left[c(n)+c^*(n)\right]$$

$$v(n)=\frac{1}{2j}\left[c(n)-c^*(n)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases} U(k)=\dfrac{1}{2}\left[C(k)+C^*(4-k)\right]=\{10,-2+2j,-2,-2-2j\} \\ V(k)=\dfrac{1}{2}\left[C(k)-C^*(4-k)\right]=\{2,0,2,0\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} u(n)=\{1,2,3,4\} \\ v(n)=\{1,0,1,0\} \end{cases}$$

$$(2)\, x(n) = u\big((2-n)\big) R_4(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = \{3, 2, 1, 4\}$$

$$y(n) = v\big((n-1)\big) R_4(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \{0, 1, 0, 1\}$$

$$(3)\, u\big((n)\big) R_5(n) = \{1, 2, 3, 4, 0\}$$

$$v\big((n)\big) R_5(n) = \{1, 0, 1, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow u\big((n)\big) R_5(n) ⑤ v\big((n)\big) R_5(n) = \{5, 2, 4, 6, 3\}$$

$$u(n) * v(n) = \{1, 2, 4, 6, 3, 4, 0\}$$

# 历年考试真题

设有长度分别为12和21的两个因果序列$x(n)$和$y(n)$，若分别作二者的线性卷积和**L**=21点的循环卷积

($a$)试问循环卷积结果中那些序列值与线性卷积的结果相同

($b$)如果要用**FFT**计算两序列的线性卷积，试给出相应的方法步骤

参考P122 15

已知4点序列x(n)的z变换X(z)在z平面上0.25，0.25j，-0.25和-0.25j四点处的值均是1

求：

1，x(n)的4点DFT值X(k)；

2，若想进一步通过DFT计算考察x(n)的DTFT谱在频率5π/16处的值，有什么可行的方法？写出该方法的具体思想和步骤。

解：

$$(1)\text{根据题意} X(z)\Big|_{z=0.25e^{j\frac{2\pi}{4}k}}(z) == \{1,1,1,1\}, k = 0,1,2,3$$

$$\sum_{n=0}^{3} x(n)\left[0.25e^{j\frac{2\pi}{4}k}\right]^{-n} = \sum_{n=0}^{3}\left[x(n)0.25^{-n}\right]e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$= \mathrm{DFT}\left\{\left[x(n)0.25^{-n}\right]\right\}$$

$$= \{1,1,1,1\} = Z(k)$$

$$\therefore x(n)0.25^{-n} = \mathrm{IDFT}\{1,1,1,1\} = \{1,0,0,0\}$$

$$\Rightarrow x(n) = \{1,0,0,0\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{DFT}\{x(n)\} = \{1,1,1,1\}$$

(2)补零至32点序列，其DFT值在k=5时对应着 $w = \frac{2\pi}{32}5 = \frac{5\pi}{16}$

## 2、DFT计算、证明、性质

### 历年考试真题

求序列$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$的$DFT$

求序列$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$的$DFT$

解：

$$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_4^{kn}=x(0)+x(1)e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+x(2)e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+x(3)e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

$$=1-e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+(-1)^k-e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

$\Rightarrow$

$$X(0)=0; X(1)=0$$

$$X(2)=4; X(3)=0$$

补充：可以用**DFT**性质五、六、十一加以校验。

# 2、DFT计算、证明、性质

## 历年考试真题

求序列$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N), 0\le n\le N-1$的$DFT$

求序列$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N), 0\le n\le N-1$的$DFT$

解：

$$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{4\pi}{N}n}+e^{-j\frac{4\pi}{N}n}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}2n}+e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(K)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(K)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\left(Y(1)e^{j\frac{2\pi}{N}n}+Y(N-1)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}+Y(2)e^{j\frac{2\pi}{N}2n}+Y(N-2)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\right)$$ 展开

$$\begin{cases}\frac{1}{N}Y(1)e^{j\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\\ \frac{1}{N}Y(N-1)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}=-\frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}\\ \frac{1}{N}Y(2)e^{j\frac{2\pi}{N}2n}=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}2n}\\ \frac{1}{N}Y(N-2)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y(1)e^{j\frac{2\pi}{N}n}=\frac{N}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\\ Y(N-1)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}=-\frac{N}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}\\ Y(2)e^{j\frac{2\pi}{N}2n}=\frac{N}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}2n}\\ Y(N-2)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}=\frac{N}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\end{cases}$$

由比较法可得：

$$\begin{cases} Y(1)e^{j\frac{2\pi}{N}n} = \frac{N}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} \\ Y(N-1)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} = -\frac{N}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} \\ Y(2)e^{j\frac{2\pi}{N}2n} = \frac{N}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}2n} \\ Y(N-2)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n} = \frac{N}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(1) = \frac{N}{2j}, k = 1 \\ Y(N-1) = -\frac{N}{2j}, k = N-1 \\ Y(2) = \frac{N}{2}, k = 2 \\ Y(N-2) = \frac{N}{2}, k = N-2 \end{cases}$$

$k$取其他值时，$Y(k)=0$

# 2、DFT计算、证明、性质

$$x(n)=1, n=0,1,\cdots,N-1;$$

求序列$x(n)$的$DFT$

求序列$x(n)=1, n=0,1,\cdots,N-1$的$DFT$

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$k=0\text{时}, X(0)=\left.\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right)'\right|_{k=0}=N$$

$$k=\text{其他时}, X(k)=0$$

等比数列

# 2、DFT计算、证明、性质

历年考试真题

$$x(n)=\begin{cases}1, n=0,2,4,\cdots,N-2;\\ 0, n=1,3,5,\cdots,N-1;\end{cases}$$

$N$为偶数

求序列$x(n)$的$DFT$

求序列$x(n)=\begin{cases}1, n=0,2,4,\cdots,N-2;\\ 0, n=1,3,5,\cdots,N-1;\end{cases}$的$DFT$

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N{}^{kn}=\sum_{m=0}^{N/2-1}W_{N/2}{}^{km}=\frac{1-W_{N/2}{}^{kN/2}}{1-W_{N/2}{}^{k}}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}$$

$$k=0\text{时}, X(0)=\left.\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}\right)'\right|_{k=0}=\frac{N}{2}$$

$$k=\frac{N}{2}\text{时}, X\left(\frac{N}{2}\right)=\left.\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}\right)'\right|_{k=\frac{N}{2}}=\frac{N}{2}$$

$$k=\text{其他时}, X(k)=0$$

# 2、DFT计算、证明、性质

## 历年考试真题—3　　　　　P90

设$x(n)$是一列长为$N$的奇对称因果序列，

即$x(n)=-x(N-n)$，

试证明：

$x(n)$的$N$点$DFT$序列$X(k)$也是一个奇对称序列，

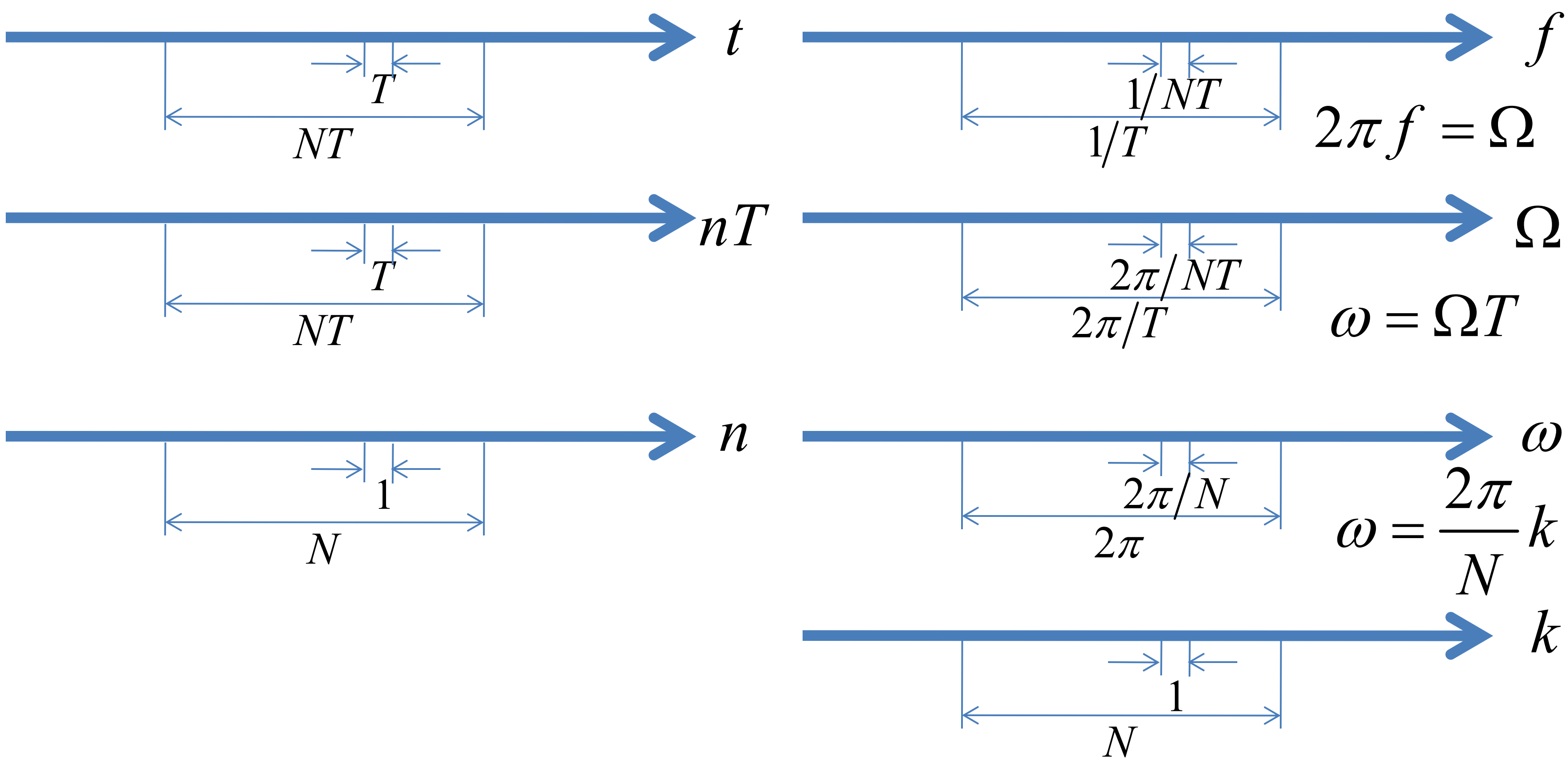
即$X(k)=-X(N-k)$

03B(05-06)

# 3、用DFT对连续时间信号逼近的问题

P71：在自变量为t和f的情况下，在一个域中对函数进行取样，必是另一个域中函数的周期。

关键字：模拟域谱间距；数字域谱间距



# 3、用DFT对连续时间信号逼近的问题

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_a(t) & \rightarrow x_a(nT) \rightarrow & x(n) & \xrightarrow{DFT} & X(k) & \approx & X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \| & & \\
\multicolumn{3}{c}{X_a(e^{j\omega}) \approx X(e^{j\omega})} & \text{——} & X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} & &
\end{array}
$$

## 一、混叠现象

消除办法：

$$f_s \geq 2f_h \qquad T \leq \frac{1}{2f_h} \qquad F = \frac{f_s}{N} \qquad t_p = \frac{1}{F} = NT$$

实际中通常：

$$f_s = (3 \sim 4) f_h$$

$$\Rightarrow \quad N \geq \frac{2f_h}{F}$$

$\forall F$ —— 频率分辨率

∵DFT的 $F=\dfrac{1}{NT}=\dfrac{f_s}{N}$

$$\left(\because \Delta\omega=\frac{2\pi}{N}\rightarrow \Delta f=\frac{1}{N},\ \Delta\Omega=\frac{\Delta\omega}{T},\ \Delta f_a=\frac{\Delta\Omega}{2\pi}=\frac{1}{NT}\right)$$

$f_s \geq 2f_h$ 或 $T\leq\dfrac{1}{2f_h}$

$$\therefore N\geq\frac{2f_h}{F}\quad\left(\because N=\frac{f_s}{F}\right)$$

注意：

$$\forall t_p = NT \Longrightarrow F=\frac{1}{NT}=\frac{1}{t_p}\ \text{不变}$$

$$N\uparrow \longrightarrow T\downarrow \longrightarrow f_s\uparrow \longrightarrow \frac{f_s}{N}$$

示波器AD采样，FIFO->N一定，
改变T，也即fs，可以调节F

## 二、栅栏效应

$$X(k) \approx X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k,\,0\le k\le N-1}$$

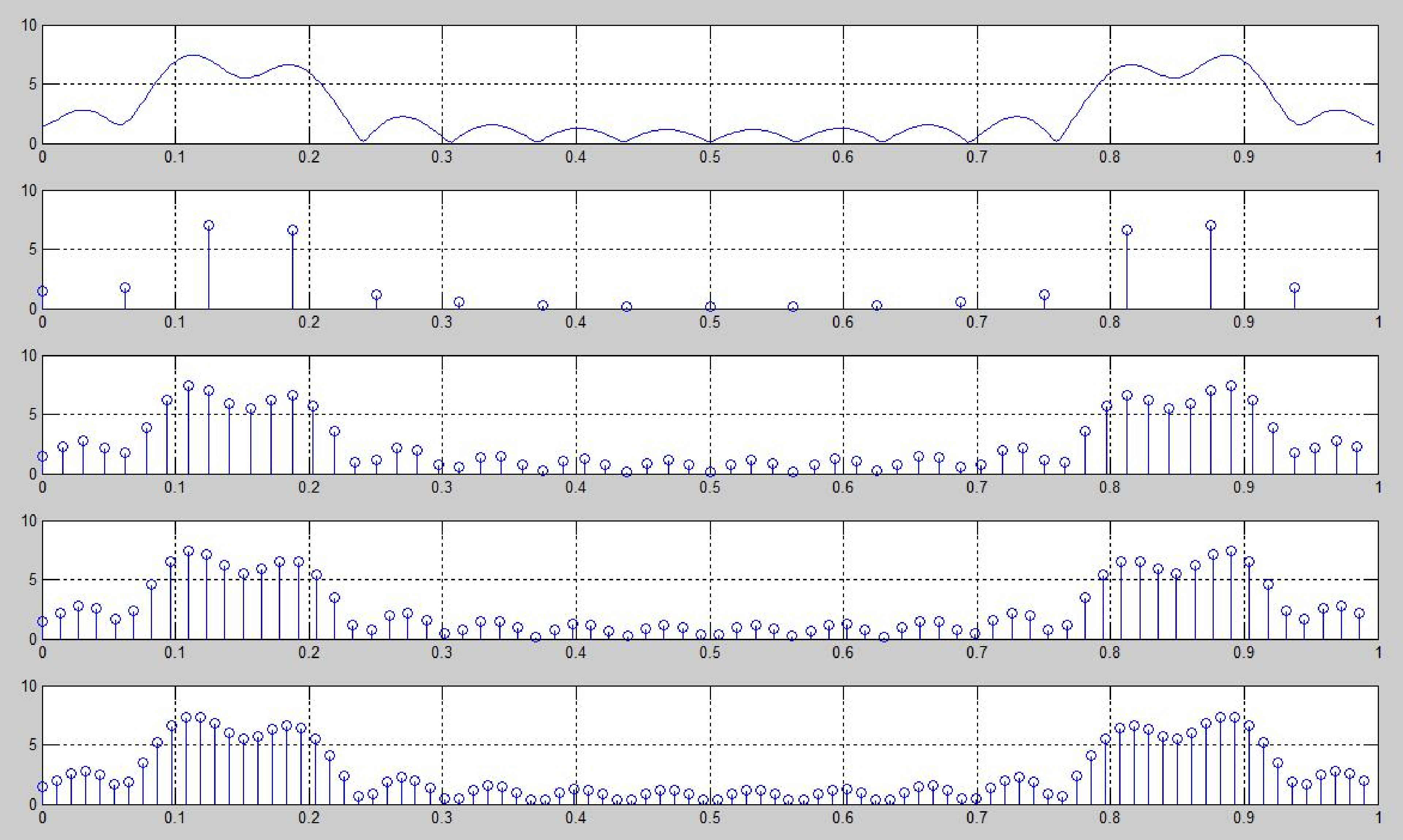
办法：对 $x(n)$ 通过补零加长。

**注意：补零不能提高分辨力！**

延长序列的DFT (不是2的整数次幂)

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15；

补零到64点，73点，93点，作DFT运算



# 三、频谱泄露现象

$$x_a(nT) \to x(n), 0 \le n \le N-1$$

$$\downarrow$$

$$x_a(nT)R_N(n) \xleftrightarrow{FT} X_a(e^{j\omega}) \widetilde{\otimes} R_N(e^{j\omega})$$

$$\downarrow \textbf{DFT} \qquad \omega = \frac{2\pi}{N}k$$

$$X(k) = X_a(k) \otimes R_N(k)$$

$\because R_N(k)$并非 $\delta(k)$

$\therefore X_a(k)$ 中的的频谱被展宽→泄漏

**解决办法：**选择谱特性更接近$\delta(k)$的窗函数

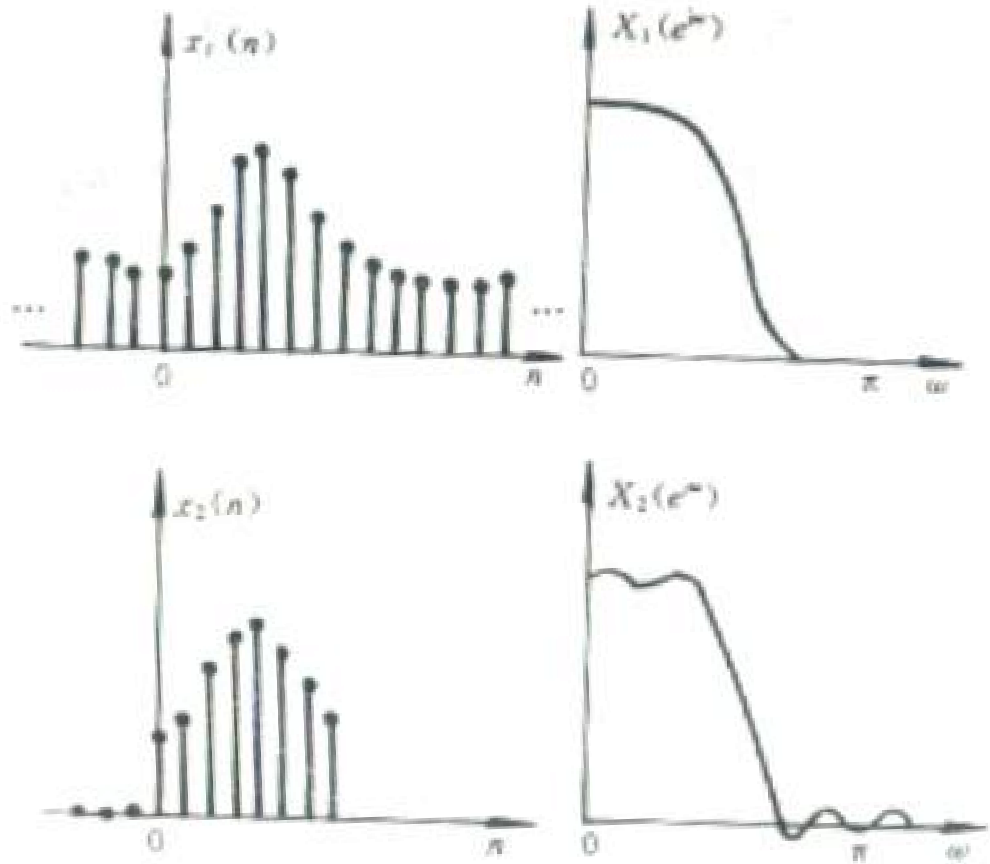



图 3－23　信号截断时产生的频谱泄漏现象

对模拟信号$x(t) = \cos(400\pi t)$以一定的采样率进行采样，得到一个256点数字序列$x(n)$，其中$n = 0 \sim 255$。

(1) 若采样率$F_s = 0.8$KHz，计算序列$x(n)$的256点DFT。该结果能否说明题中所述情形不存在谱泄露现象？为什么？

(2) 若采样率$F_s = 0.4$KHz，重新计算序列$x(n)$的256点DFT，并解释产生该结果的原因。

解：

$$(1)\, x(t) = \cos(400\pi t)$$

$$F_s = 0.8KHz$$

$$x(n) = \cos(400\pi nT) = \cos\left(\frac{400\pi n}{F_s}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}\right], n = 0 \sim 255$$

$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = 128\left[\delta(k-64) + \delta(k-192)\right]$$

$$(2)\, x(t) = \cos(400\pi t)$$

$$F_s = 0.4KHz$$

$$x(n) = \cos(400\pi nT) = \cos\left(\frac{400\pi n}{F_s}\right) == \cos(\pi n)$$

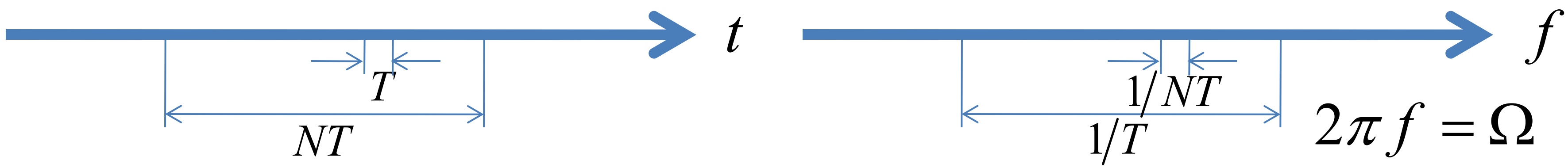
$$\mathrm{DFT}\{x(n)\} = 256\delta(k-128)$$

# 例题：习题集P47-13

频谱分析的模拟信号以8kHz被抽样，计算了512个抽样的DFT，试确定频谱抽样之间的频率间隔。

解：

由下图



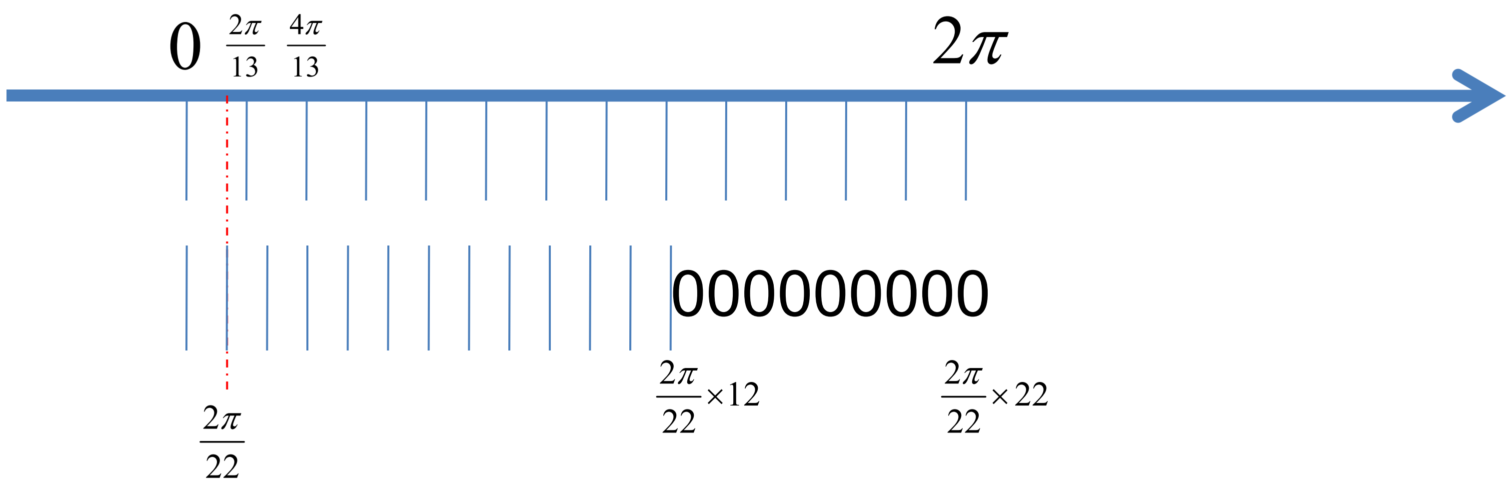

$$频域抽样间隔 f_0 = \frac{1}{NT} = \frac{8k}{512} = 15.6Hz$$

# 历年考试真题

设有限长序列$x(n), 0 \le n \le 12$, 令$X(e^{j\omega})$表示$x(n)$的离散时间傅里叶变换$DTFT$，如果希望通过计算一个M点DFT来求出$\omega = \pi / 11$处$X(e^{j\omega})$的值，试确定最小可能的正整数M，并给出一种利用M点DFT求出$\omega = \pi / 11$处$X(e^{j\omega})$的值的方法。

# 历年考试真题

设有限长序列$x(n), 0 \le n \le 12$, 令$X(e^{j\omega})$表示$x(n)$的离散时间傅里叶变换$DTFT$，如果希望通过计算一个M点DFT来求出$\omega = \pi / 11$处$X(e^{j\omega})$的值，试确定最小可能的正整数M，并给出一种利用M点DFT求出$\omega = \pi / 11$处$X(e^{j\omega})$的值的方法。




$$0 < \omega = \frac{2\pi}{22} < \frac{2\pi}{13}$$

对模拟信号$x(t)=\cos(2000\pi t)$,以$T=0.25ms$间隔采样$N$点。

$(1)$写出采样后序列$x(n)$表达式和对应的数字频率；

$(2)$当$N=8$时,求$x(n)$的8点$DFT$序列$X(k)$，画出$|X(k)|$的示意图；

$(3)$该结果能否说明题中所述情况不存在频谱泄露现象？为什么？

$$x(n)=\cos(0.5\pi n),\omega=0.5\pi$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{7}\cos(0.5\pi n)e^{-j\omega n}$$

$$X(2)=X(6)=4$$

采样点正好在k=2和k=6，观察不到频谱泄露。

1.基-2 DIT
2.基-2 DIF
3.统一复合数
4.基-4 DIF/DIT
5.分裂基
6.实序列FFT
7.Chirp Z变换

算法原理
时抽频抽
蝶形流图
复乘复加
算法特点
变换卷积

# 往年真题：

1、试导出按时间抽取基-2 FFT算法的蝶形运算公式，并画出相应的N=8（16）时的算法流图，并说明算法的特点。（要求输入反序，输出正序，原位运算）

# 往年真题：

2、试导出按频率抽取基-2 FFT算法的蝶形运算公式，并画出相应的N=8（16）时的算法流图。（要求输入正序，输出反序，原位运算）

# 往年真题：

3、试给出4(8)点分裂基FFT算法L形蝶形运算公式，并画出相应的L形蝶形运算流图。

参考P163 -8

04(06-07)

# 往年真题：

4、设有两个有限长实序列，试给出用基-2 FFT计算其线性卷积的方法步骤（要求尽量减少乘法运算次数），并与用线性卷积定义直接计算时的运算量做以比较。

1.x(n)->X(k)

y(n)->Y(k)

可以采用实序列FFT算法

N点FFT计算2N点

2.x(n)*y(n)＝IFFT[X(k)Y(k)]

综合4-7(实序列)和4-10(卷积)

# 往年真题：

5、已知实序列x(n)和y(n)，长度分别为N和M，试给用仅用基-2 FFT正变换快速计算其线性卷积的方法步骤，要求尽量减少乘法运算次数。

06(08-09)

# §4-7 实序列的FFT算法

## 一、问题的提出

$$\forall\, x(n) — DFT[x(n)] \to FFT$$

实数：$\forall\, x(n) = x^*(n), \qquad 0 \le n \le N-1$

$$DFT[x(n)] \longrightarrow FFT\ \ ?$$

可能的办法：

① $x(n) \to x(n) + j0 \to y(n) \to FFT$

② $x(n) \to DFT[x(n)] \to$ 专用算法/硬件

③ 能否有更好的方法吗？

# 二、算法一：用一个N-FFT同时计算两个N点实序列

$$\forall\, x_1(n), \quad 0 \le n \le N-1$$

$$x_2(n), \quad 0 \le n \le N-1$$

$$\downarrow$$

$$x(n) \overset{\Delta}{=} x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$X(k) = X_1(k) + jX_2(k),$$

$X_1(k)$, $X_2(k)$都是复数序列（Matlab）

## DFT的性质：[P.91]

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$X(K) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

周期共轭对称分量　　周期共轭反对称分量

$$x_r(n) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_l(n) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

即：

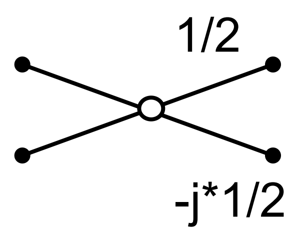
$$X_{ep}(k) \overset{\Delta}{=} DFT[x_r(n)] \quad = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_{op}(k) \overset{\Delta}{=} DFT[jx_i(n)] \quad = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$

$$\therefore X_1(k) = X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \qquad \textbf{(4-51)}$$

$$X_2(k) = -jX_{op}(k) = -\frac{j}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \qquad \textbf{(4-52)}$$

$$\begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \longrightarrow x(n) \xrightarrow{FFT} \begin{matrix} X(k) \\ X^*(N-k) \end{matrix}$$




$$\begin{matrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{matrix} \qquad k = 0,1,\ldots,N$$

# 三、算法二：用一个N-FFT计算一个2N点实序列

$$\forall\, x(n) = x^*(n), \qquad 0 \le n \le 2N-1$$

**令：**

$$x_1(n) = x(2n)$$
$$x_2(n) = x(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\downarrow$$

$$y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$Y(k) = X_1(k) + jX_2(k)$$

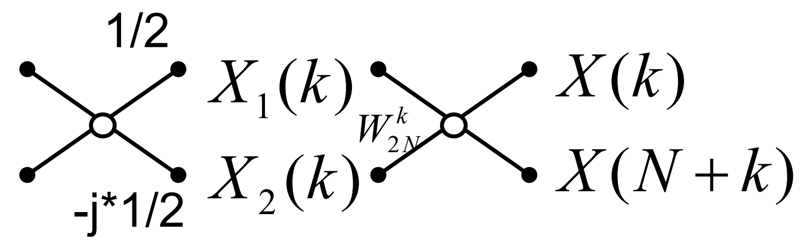
$$\begin{cases} X_1(k) = Y_{ep}(k) = \dfrac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)] \\ X_2(k) = -jY_{op}(k) = -j\dfrac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(N+k) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases}$$

$$0 \le k \le N-1$$

见P127 图4-2

$$x(n) \to \begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{matrix} \to y(n) \xrightarrow{FFT} \begin{matrix} Y(k) \\ Y^*(N-k) \end{matrix}$$



# § 4-10 FFT的应用

## 一、利用FFT求卷积——快速卷积

$$\forall \ x(n) \qquad 0 \le n \le N_1 - 1$$

$$h(n) \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$$

$$\exists \ x(n) * h(n) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x(l)h(n-l) = \sum_{l=0}^{N_2-1} h(l)x(n-l)$$

$$\begin{matrix} x(n) \\ h(n) \end{matrix} \xrightarrow{\text{补零}} \begin{matrix} x'(n) \\ h'(n) \end{matrix} \xrightarrow{FFT} X'(k)H'(k) \xrightarrow{IFFT}$$

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$ 分段卷积
3. $x(n) = x^*(n), \quad h(n) = h^*(n)$

运算量比较：
1.直接卷积：$N^2$
2.快速卷积：$3N\log_2 N$

思考：补零会造成卷积计算误差吗？

# 一、利用FFT求卷积——快速卷积计算步骤

$(1)x(n)\ N_1\ h(n)\ N_2$

$y(n)=x(n)*h(n)$

$(2)$补零$N\ge N_1+N_2-1\quad N=2^v$

$x'(n)\quad h'(n)$

$$y'(n)=x'(n)\otimes h'(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x'(k)h'((n-k))_N R_N(n)$$

$(3)FFT: x'(n)\to X'(k)\quad h'(n)\to H'(k)$

$(4)Y'(k)=X'(k)H'(k)$

$$(5)IFFT: y'(n)=\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Y'(k)]W_N^{-nk}=\left[\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Y'^*(k)]W_N^{nk}\right]^*$$

$(6)y(n)$

# 一、利用FFT求卷积——高效的FFT卷积

$\forall$实序列 $g(n), \mathrm{s}(n), h(n) \quad 0 \le n \le N-1$

$$G(k), S(k), H(k) \; 0 \le k \le N-1$$

用一次FFT实现两个卷积运算

$$\begin{cases} y_1(n) = g(n) \otimes h(n) \\ y_2(n) = s(n) \otimes h(n) \end{cases}$$

合成：$p(n) = g(n) + js(n)$

则：$DFT[p(n)] = P(k) = G(k) + jS(k)$

令：$Y(k) = H(k)P(k)$

$$y(n) = IFFT[Y(k)] = p(n) \otimes h(n)$$

$$= [g(n) + js(n)] \otimes h(n) = g(n) \otimes h(n) + js(n) \otimes h(n)$$

因此：$\begin{cases} y_1(n) = g(n) \otimes h(n) = \mathrm{Re}[y(n)] \\ y_2(n) = s(n) \otimes h(n) = \mathrm{Im}[y(n)] \end{cases}$

# § 4-10 FFT的应用

## 一、利用FFT求卷积——高效的FFT卷积

应用：

(1)一个系统同时通过两种输入信号

(2)一个系统同时处理长序列分段过滤中的两个片段

(3)一个信号同时通过两个系统

## 二、利用FFT求相关——快速相关

$$\forall \ x(n) \qquad 0 \le n \le N_1 - 1$$

$$y(n) \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$$

$$\exists \ z(n) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x^*(l) y(n+l) = \sum_{l=0}^{N_2-1} y^*(l) x(n+l)$$

$$\begin{matrix} x(n) \\ y(n) \end{matrix} \xrightarrow{\text{补零}} \begin{matrix} x'(n) \\ y'(n) \end{matrix} \xrightarrow{FFT} X'^*(k)Y'(k) \xrightarrow{IFFT} z(n)$$

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$
3. $x(n) = x^*(n), \quad y(n) = y^*(n)$

$x(n) = y(n) \rightarrow$ 自相关

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$
3. $x(n) = x^*(n)$

# 二、利用FFT求相关——快速相关计算步骤

$(1)x(n)\ N_1\ \ y(n)\ N_2$

$$z(n)=\sum_{k=0}^{N_1} x^*(k)y(n+k)$$

$(2)$补零$N \geq N_1+N_2-1 \quad N=2^v$

$x'(n) \quad y'(n)$

$(3)FFT: x'(n) \rightarrow X'(k) \quad y'(n) \rightarrow Y'(k)$

$(4)Z(k)=X'^*(k)Y'(k)$

$$(5)IFFT: z'(n)=\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Z(k)]W_N^{-nk}=\left[\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Z^*(k)]W_N^{nk}\right]^*$$

$(6)z(n)$

# IIR滤波器设计—脉冲响应不变变换法

# IIR滤波器设计1—课本P194

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \le 0.2\pi$的通带范围内幅度变化不大于$1dB$,

(b) 在$0.3\pi \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$15dB$,

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数$N$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

解：（1）由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\frac{\omega}{T}) = H_a(j\Omega), |\omega| \le \pi$$

$\omega = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = 0.2\pi, \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.3\pi,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j0.2\pi)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j0.3\pi)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -1dB & \text{通带} \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -15dB & \text{阻带} \end{cases}$$

取等号 $\begin{cases} 1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1} \quad (a) \\ 1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1.5} \quad (b) \end{cases}$

解出：$N = 5.89$，$\Omega_c = 0.7047$取$N = 6$

代入$(a), \Omega_c = 0.7032$ 满足通带，给阻带裕量

代入$(b), \Omega_c = 0.7080$ 满足阻带，给通带裕量

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k=\Omega_c e^{j\pi[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]},k=1,2,\cdots,N$$

$$s_{1,2}=-0.18\pm j0.70;\qquad s_{3,4}=-0.50\pm j0.50;\qquad s_{5,6}=-0.70\pm j0.18$$

$$H_a(s)=\frac{K}{(s^2+0.36s+0.49)(s^2+0.99s+0.49)(s^2+1.36s+0.49)};\quad K=0.12\quad (H_a(s)\big|_{s=0}=1)$$

或直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^{\,6}}{s^6+3.863\Omega_c s^5+7.464\Omega_c^{\,2}s^4+9.141\Omega_c^{\,3}s^3+7.464\Omega_c^{\,4}s^2+3.863\Omega_c^{\,5}s+\Omega_c^{\,6}}$$

$$=\frac{0.12093}{s^6+2.7170s^5+3.6910s^4+3.1789s^3+1.8252s^2+0.6644s+0.1209}$$

展成部分分式

$$H_a(s)=\left[\frac{0.9351-1.6196\mathrm{i}}{s-(-0.6845+0.1834\mathrm{i})}+\frac{0.9351+1.6196\mathrm{i}}{s-(-0.6845-0.1834\mathrm{i})}\right]$$

$$+\left[\frac{0.1447+0.2505\mathrm{i}}{s-(-0.1834+0.6845\mathrm{i})}+\frac{0.1447-0.2505\mathrm{i}}{s-(-0.1834-0.6845\mathrm{i})}\right]$$

$$+\left[\frac{-1.0797-0.0000\mathrm{i}}{s-(-0.5011+0.5011\mathrm{i})}+\frac{-1.0797+0.0000\mathrm{i}}{s-(-0.5011-0.5011\mathrm{i})}\right]$$

$$H_a(s)=\left[\frac{0.94-1.62\mathrm{i}}{s-(-0.68+0.18\mathrm{i})}+\frac{0.94+1.62\mathrm{i}}{s-(-0.68-0.18\mathrm{i})}\right]$$

$$+\left[\frac{0.14+0.25\mathrm{i}}{s-(-0.18+0.68\mathrm{i})}+\frac{0.14-0.25\mathrm{i}}{s-(-0.18-0.68\mathrm{i})}\right]+\left[\frac{-1.08}{s-(-0.50+0.50\mathrm{i})}+\frac{-1.08}{s-(-0.50-0.50\mathrm{i})}\right]$$

由$\dfrac{1}{s-s_i}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\dfrac{z}{z-e^{s_iT}}$

$$s_1=-0.68+0.18\mathrm{i}\Rightarrow\frac{0.94-1.62\mathrm{i}}{s-(-0.68+0.18\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{0.94-1.62\mathrm{i}}{1-e^{-0.68+0.18\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$s_2=-0.68-0.18\mathrm{i}\Rightarrow\frac{0.94+1.62\mathrm{i}}{s-(-0.68-0.18\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{0.94+1.62\mathrm{i}}{1-e^{-0.68-0.18\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$s_3=-0.18+0.68\mathrm{i}\Rightarrow\frac{0.14+0.25\mathrm{i}}{s-(-0.18+0.68\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{0.14+0.25\mathrm{i}}{1-e^{-0.18+0.68\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$s_4=-0.18-0.68\mathrm{i}\Rightarrow\frac{0.14-0.25\mathrm{i}}{s-(-0.18-0.68\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{0.14-0.25\mathrm{i}}{1-e^{-0.18-0.68\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$s_5=-0.50+0.50\mathrm{i}\Rightarrow\frac{-1.08}{s-(-0.50+0.50\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{-1.08}{1-e^{-0.50+0.50\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$s_6=-0.50-0.50\mathrm{i}\Rightarrow\frac{-1.08}{s-(-0.50-0.50\mathrm{i})}\Leftrightarrow\frac{-1.08}{1-e^{-0.50-0.50\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{0.94\ -\ 1.62\mathrm{i}}{1-e^{-0.68\ +\ 0.18\mathrm{i}}z^{-1}}+\frac{0.94+1.62\mathrm{i}}{1-e^{-0.68\ -\ 0.18\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$+\frac{0.14+0.25\mathrm{i}}{1-e^{-0.18\ +\ 0.68\mathrm{i}}z^{-1}}+\frac{0.14\ -\ 0.25\mathrm{i}}{1-e^{-0.18\ -\ 0.68\mathrm{i}}z^{-1}}$$

$$+\frac{-1.08}{1-e^{-0.50\ +\ 0.50\mathrm{i}}z^{-1}}+\frac{-1.08}{1-e^{-0.50\ -\ 0.50\mathrm{i}}z^{-1}}$$

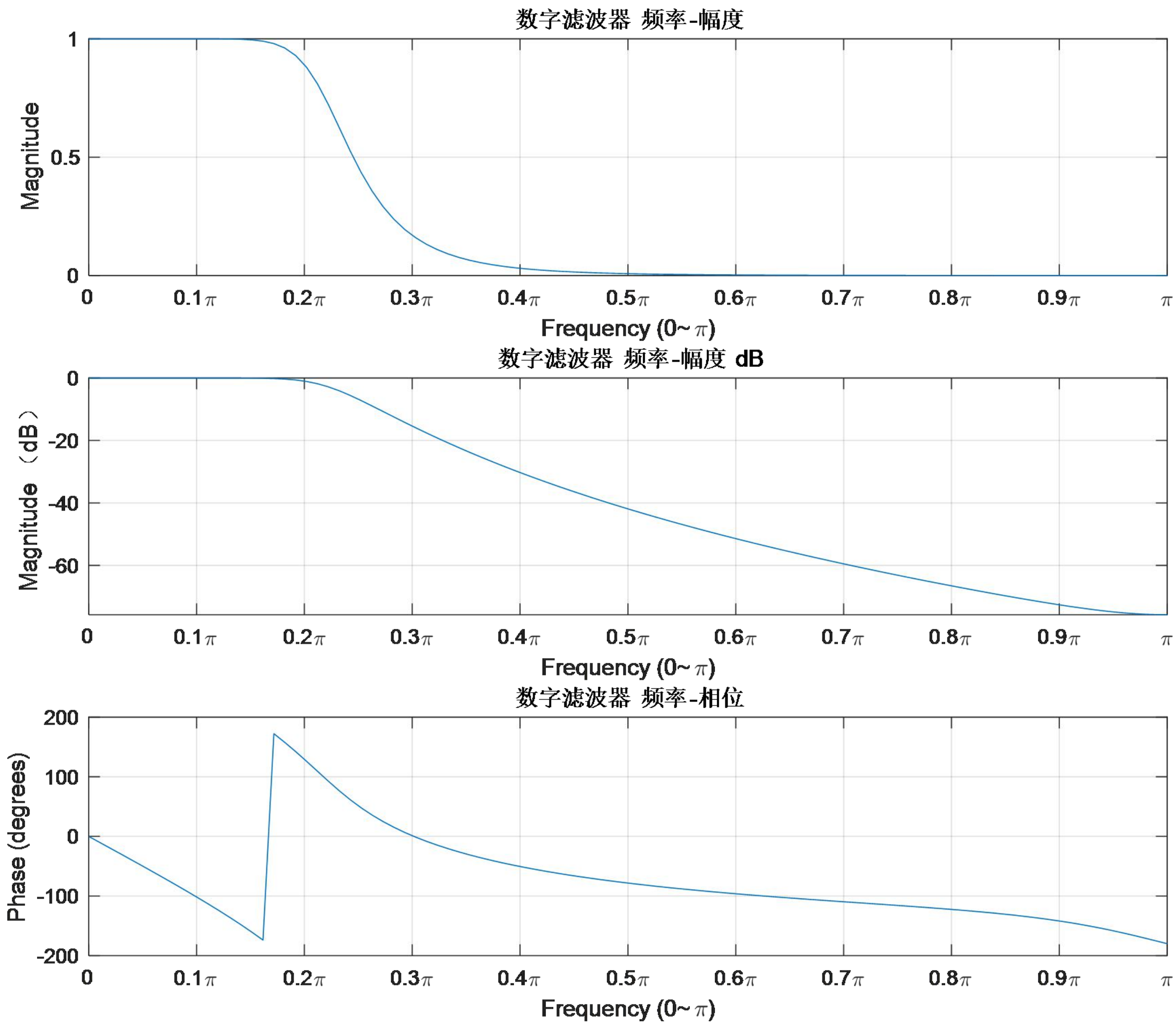
$$=\frac{0.94\ -\ 1.62\mathrm{i}}{1-\left(0.50+0.09i\right)z^{-1}}+\frac{0.94+1.62\mathrm{i}}{1-\left(0.50-0.09i\right)z^{-1}}$$

$$+\frac{0.14+0.25\mathrm{i}}{1-\left(0.65+0.53i\right)z^{-1}}+\frac{0.14\ -\ 0.25\mathrm{i}}{1-\left(0.65-0.53i\right)z^{-1}}$$

$$+\frac{-1.08}{1-\left(0.53+0.29i\right)z^{-1}}+\frac{-1.08}{1-\left(0.53-0.29i\right)z^{-1}}$$

$$=\frac{1.84-0.65z^{-1}}{1-z^{-1}+0.26z^{-2}}+\frac{0.28-0.45z^{-1}}{1-1.3z^{-1}+0.7z^{-2}}+\frac{-2.16+1.14z^{-1}}{1-1.06z^{-1}+0.37z^{-2}}$$

$$=\frac{0.0007z^{-1}+0.0105z^{-2}+0.0167z^{-3}+0.0042z^{-4}+0.0001z^{-5}}{1-3.36z^{-1}+5.07z^{-2}-4.28z^{-3}+2.12z^{-4}-0.58z^{-5}+0.07z^{-6}}$$


数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.5
0
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-20
-40
-60
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
200
100
0
-100
-200
Frequency (0~π)

# IIR滤波器设计2--往年真题
# 脉冲响应不变变换法

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \le \pi/8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$,

(b) 在$\pi/2 \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$20dB$,

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数$N$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的直接II型结构实现形式

03A(05-06)

提示：

(1)所有小数均计算到小数点后两位

(2)假设取样间隔$T=1$

(3)双线性变换的频率变换关系为：

$$\Omega = 2/Ttg(\omega/2)$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器$H_a(s)$的极点为：

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k=1,2,\cdots,N$$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器平方函数为：

$$A^2(\Omega) = 1/[1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}]$$

解：(1) 由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\frac{\omega}{T}) = H_a(j\Omega),$$

$\omega = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{\pi}{8},\ \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\frac{\pi}{8})\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\frac{\pi}{2})\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{\pi/8}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{\pi/2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -20dB \end{cases}$$

$$\text{取等号}\begin{cases} 1+\left(\frac{\pi/8}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.3}\ (a) \\ 1+\left(\frac{\pi/2}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{2}\ (b) \end{cases}$$

$\Omega_c = \pi/8 = 0.39$

解出：$N = 1.66$，取$N = 2$

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]}, k=1,2$$

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{\pi}{8} e^{j\pi\frac{3}{4}} \\ = 0.39(-0.707 + j0.707) \\ s_2 = \dfrac{\pi}{8} e^{j\pi\frac{5}{4}} \\ = 0.39(-0.707 - j0.707) \end{cases}$$

$$s_{1,2} = 0.28(-1 \pm j)$$

由表5-1

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

(3)展成部分分式

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

$$= \frac{A}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{B}{s-(-0.28-j0.28)}$$

解得 $\begin{cases} A = -0.28j \\ B = 0.28j \end{cases}$

$$H_a(s) = \frac{-0.28j}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{0.28j}{s-(-0.28-j0.28)}$$

由 $\dfrac{1}{s-s_k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}} = \dfrac{z}{z-e^{s_kT}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}} + \frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

此处修订了符号错误

把课本（5-23）和（5-43）（5-46）统一起来

$$H(z)=\frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}}+\frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

$$=\frac{-0.28j}{1-\left(\ 0.7282+0.2078\mathrm{i}\right)z^{-1}}+\frac{0.28j}{1-\left(0.7282-0.2078\mathrm{i}\right)z^{-1}}$$

$$=\frac{0.1164z^{-1}}{1-1.4564z^{-1}+0.5735z^{-2}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

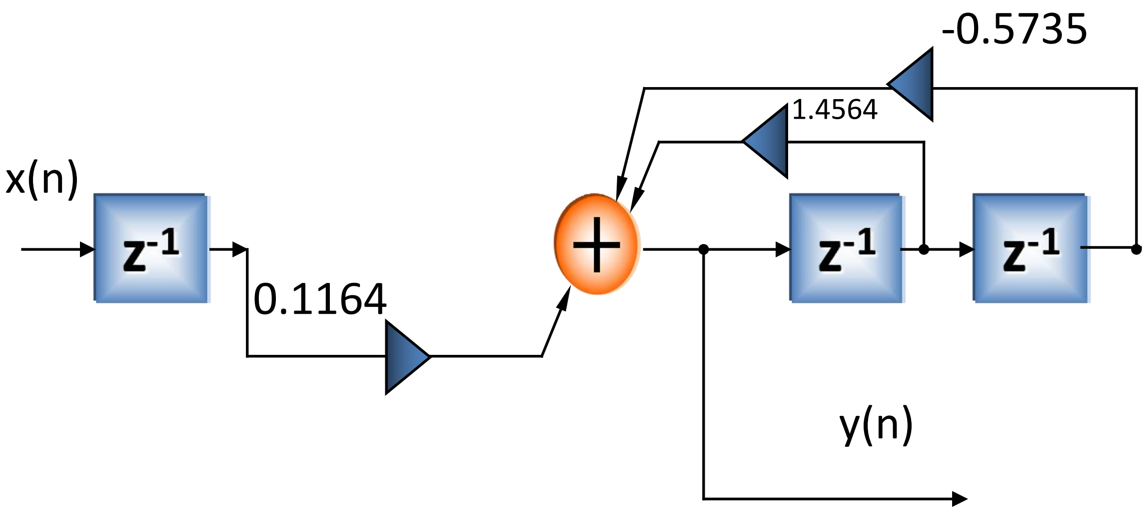
$$H(z)=\frac{0.1164z^{-1}}{1-1.4564z^{-1}+0.5735z^{-2}}$$

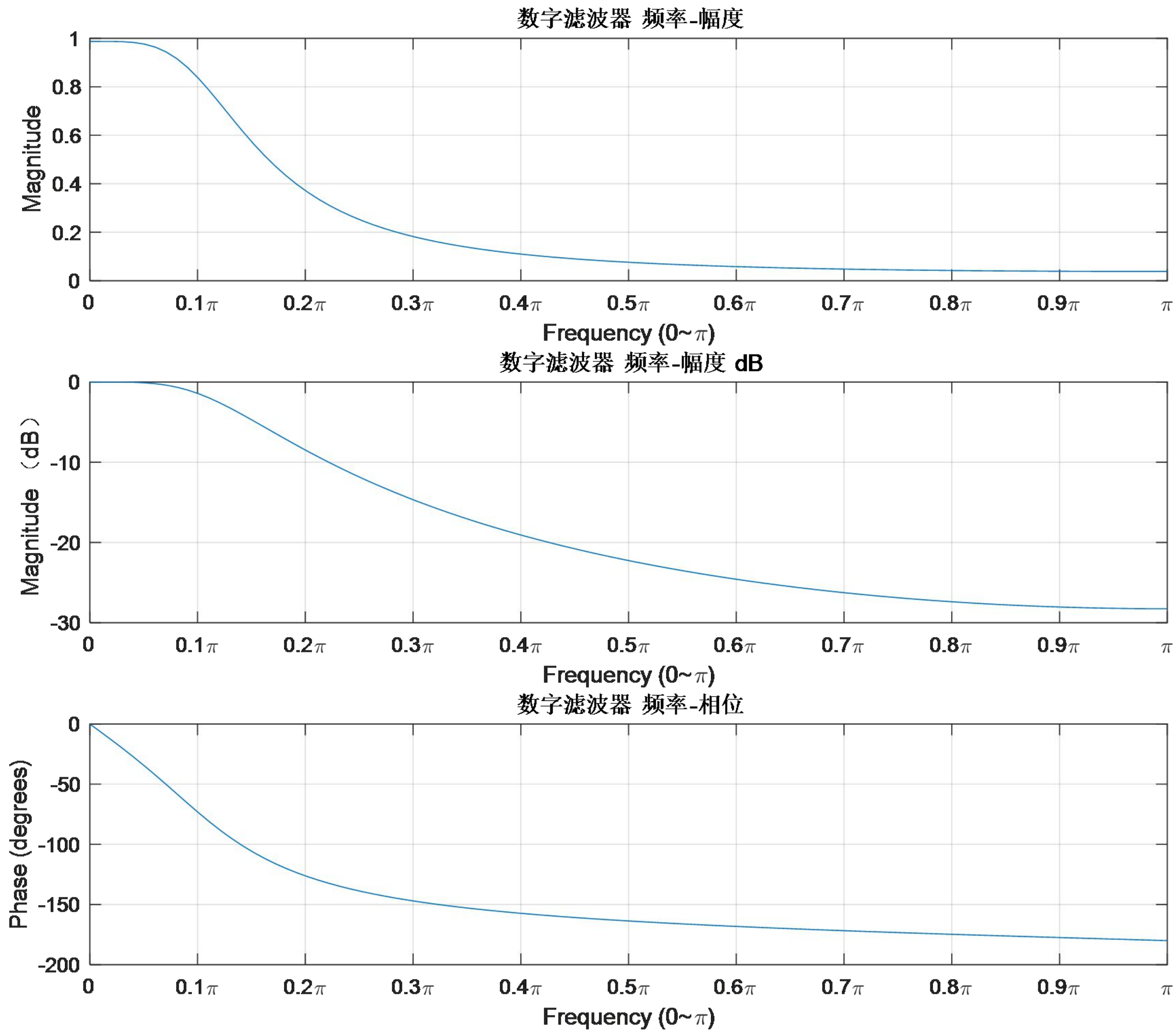
(5)频率响应

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

直接I，II




数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
Frequency (0~π)

# IIR滤波器设计—双线性变换法

# IIR滤波器设计1--往年真题

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \le \pi/8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$，

(b) 在$\pi/2 \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$20dB$，

试用双线性变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数$N$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

03B(05-06)

解：

(1) 预畸

$$\Omega=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c=2tg\frac{\pi}{16}=0.4\ ,\Omega_s=2tg\frac{\pi}{4}=2$$

(2)由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|=-10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|\geq -3dB\\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right|\leq -20dB\end{cases}$$

$$\begin{cases}-10\lg\left[1+\left(\dfrac{\Omega_c}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\geq -3dB\\ -10\lg\left[1+\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\leq -20dB\end{cases}$$

由题干3$dB$，可直接得到$\Omega_c=0.40$

解出：$N=1.42$，取$N=2$

(3)直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c{}^2}$$得到

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\text{代入}H_a(s)$$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{0.16(1+z^{-1})^2}{5.28-7.26z^{-1}+3.02z^{-2}}$$

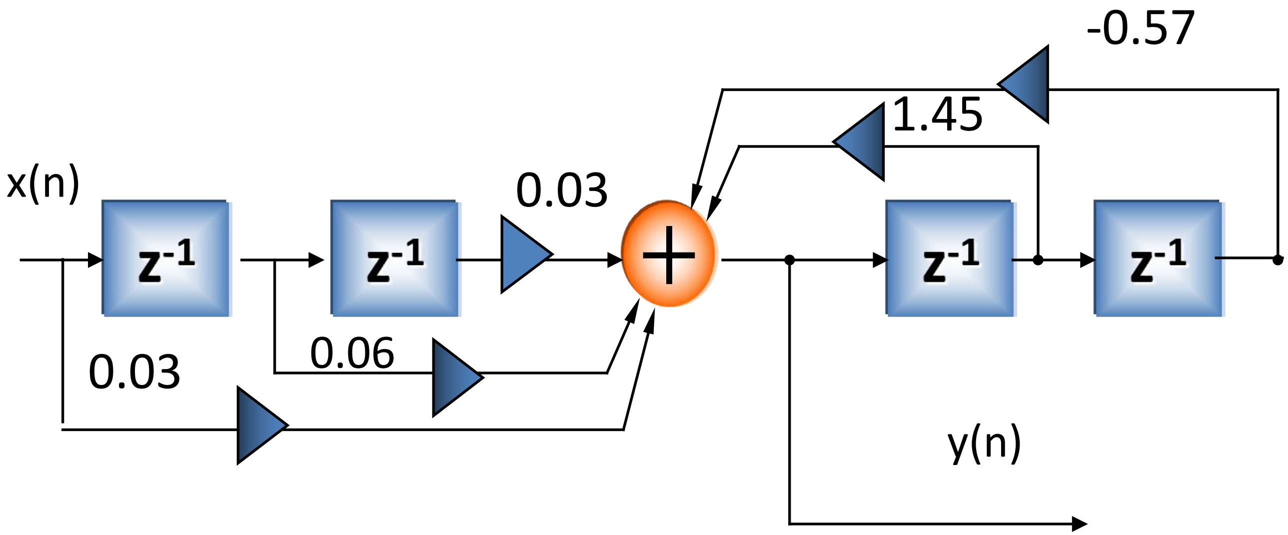
$$=\frac{0.03+0.06z^{-1}+0.03z^{-2}}{1-1.45z^{-1}+0.57z^{-2}}$$

(4)频率响应

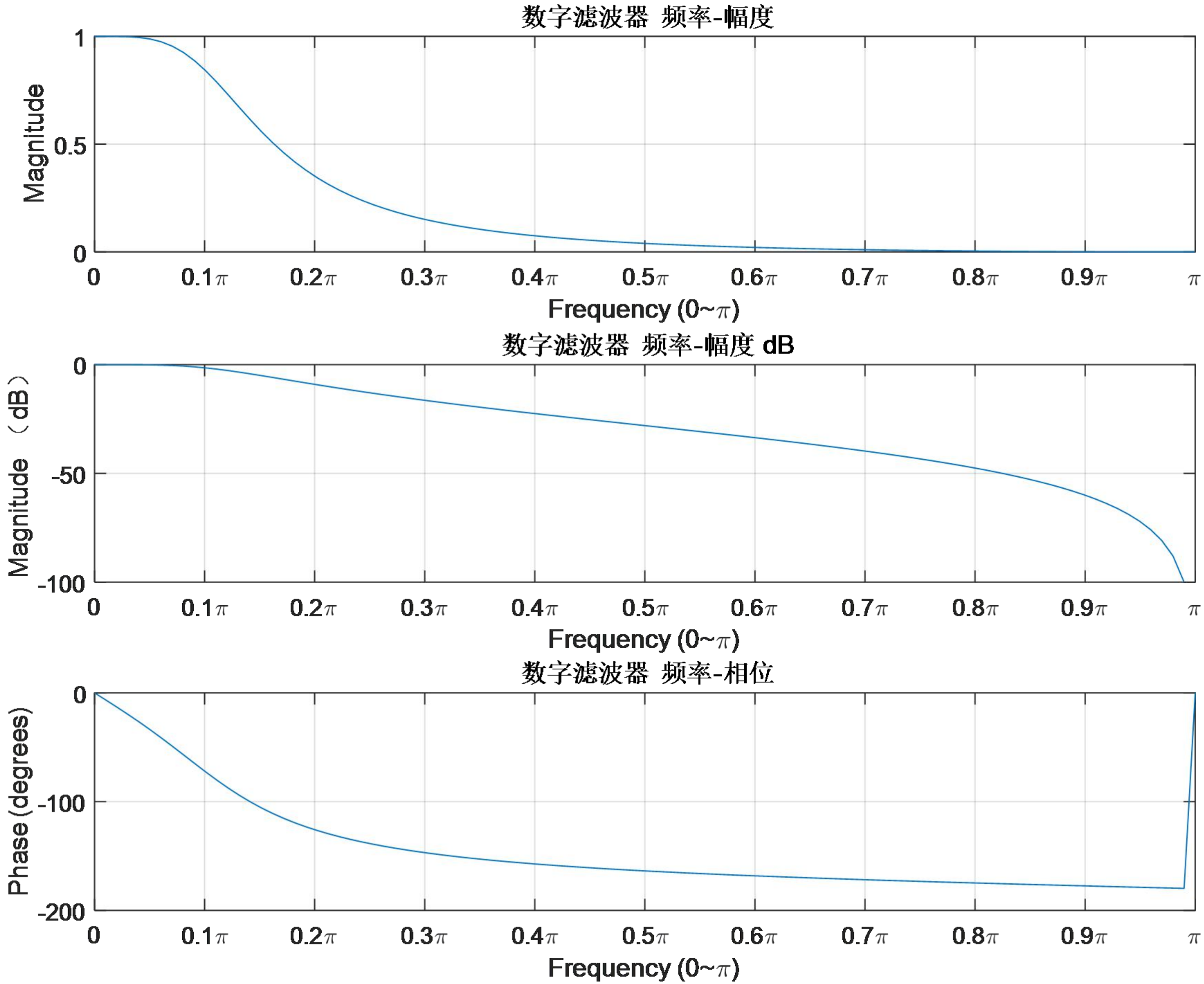
$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

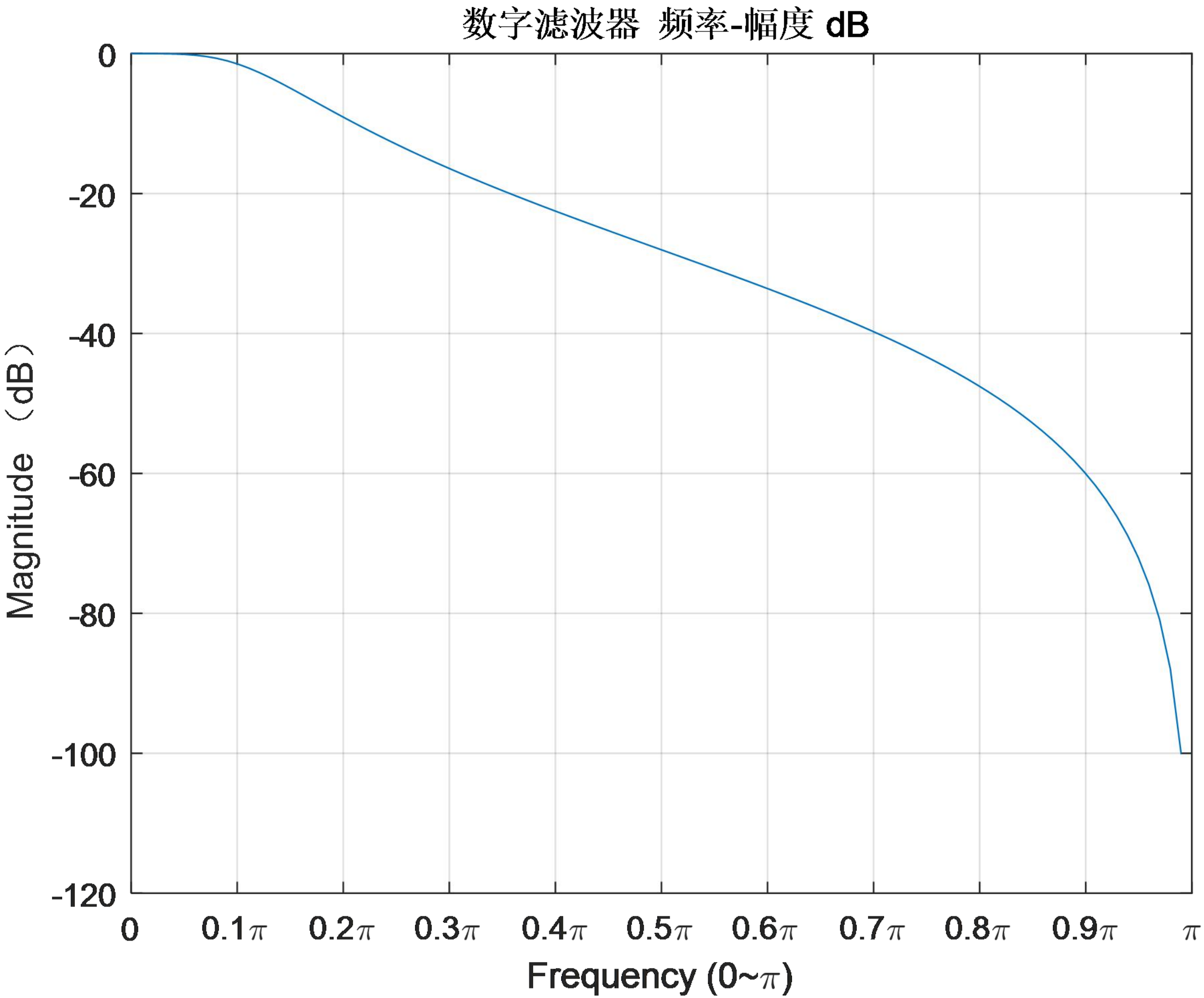
(5)滤波器结构

直接I，II



ch5_bilinear3.m




数字滤波器 频率-幅度 dB
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
Magnitude （dB）
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)

# IIR滤波器设计2—习题集P91

用双线性变换法设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

指标：$0 \le f \le 2.5Hz$衰减小于$3dB$

$f \ge 50Hz$衰减大于或等于$40dB$

抽样频率$f_s = 200Hz$。

(1) 确定滤波器的阶数$N$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式

√

由模拟指标到数字指标，由数字指标预畸到模拟指标，设计模拟滤波器，再由模拟滤波器到数字滤波器

解：

(1)把模拟角频率转化为数字角频率

$$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{200},$$

$$\Rightarrow \Omega_c{}'=2\pi f_c=5\pi \qquad \omega_c=\Omega_c{}'T=\frac{\pi}{40},$$

$$\Rightarrow \Omega_s{}'=2\pi f_s=100\pi \quad \omega_s=\Omega_s{}'T=\frac{\pi}{2},$$

(2) 预畸

$$\Omega=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Omega_c=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega_c}{2}\right)=400tg\frac{\pi}{80}$$

$$=15.7=5\pi$$

$$\Rightarrow \Omega_s=\frac{2}{T}tg\left(\frac{\omega_s}{2}\right)=400tg\frac{\pi}{4}$$

$$=400=127.39\pi$$

(3)列出对模拟滤波器的衰减要求

$$A^2(\Omega)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|=-10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right|\ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right|\le -40dB \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\dfrac{\Omega_c}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\le -40dB \end{cases}$$

由题干3$dB$，可直接得到$\Omega_c=15.7$

取等号解出：$N=1.42$，取$N=2$

(4)直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^{\,2}}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^{\,2}}$$ 得到

$$\Rightarrow H_a(s)=\frac{246.5}{s^2+22.2s+246.5}$$

将 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入 $H_a(s)$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

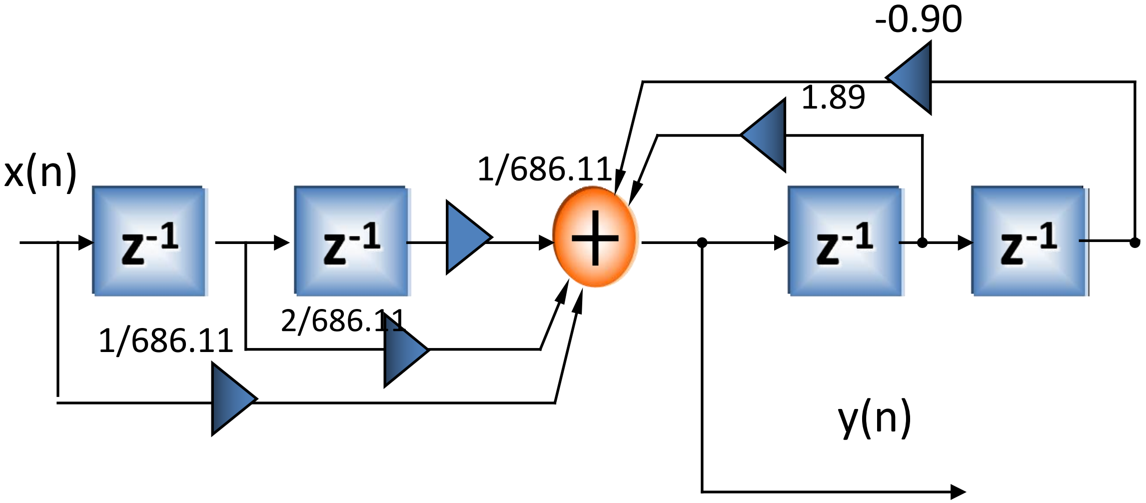
$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{686.11}\bullet\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-1.89z^{-1}+0.90z^{-2}}$$

(5)频率响应

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

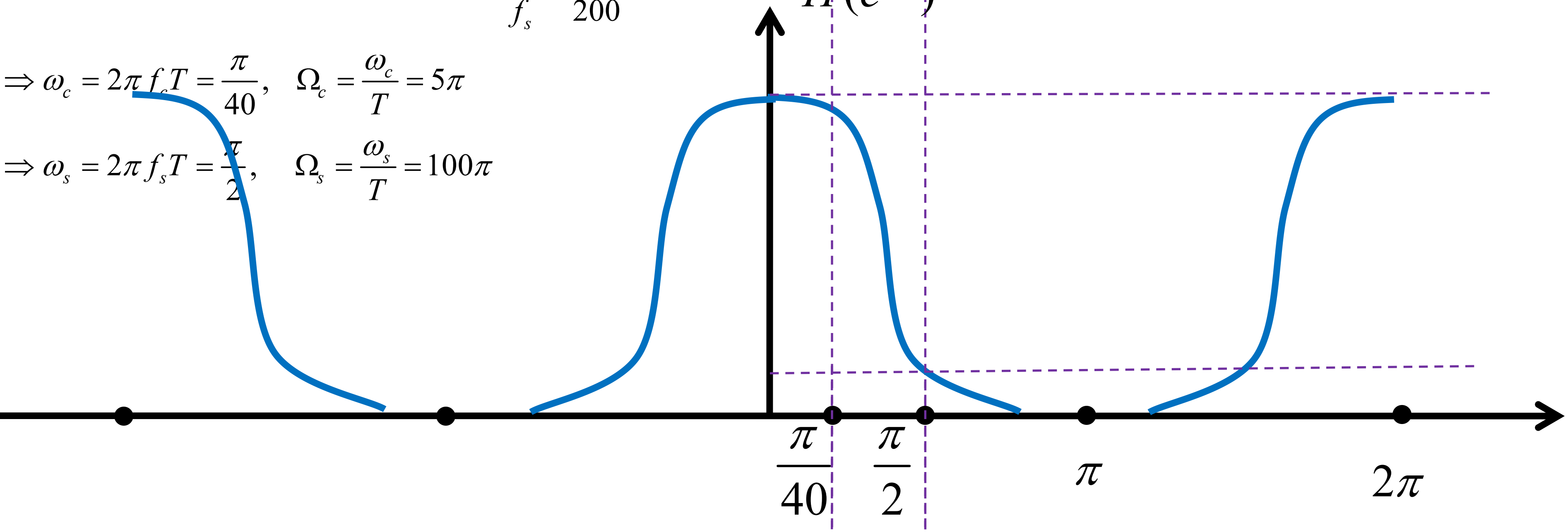
直接I，II



把模拟角频率转化为数字角频率 $T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{200}$，

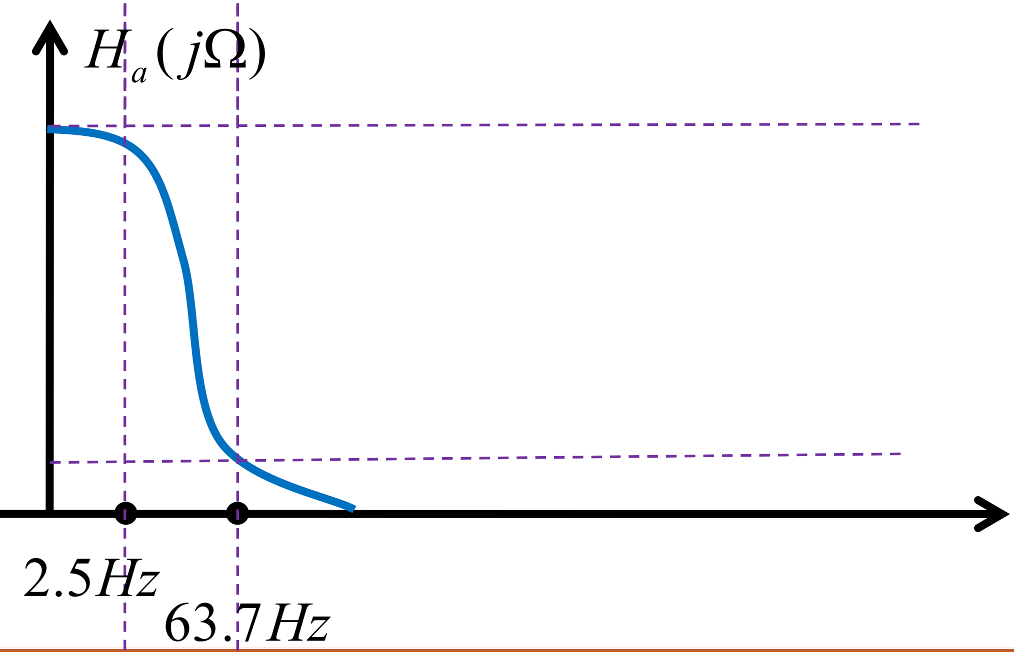
$\Rightarrow \omega_c = 2\pi f_c T = \frac{\pi}{40}$， $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = 5\pi$

$\Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s T = \frac{\pi}{2}$， $\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 100\pi$



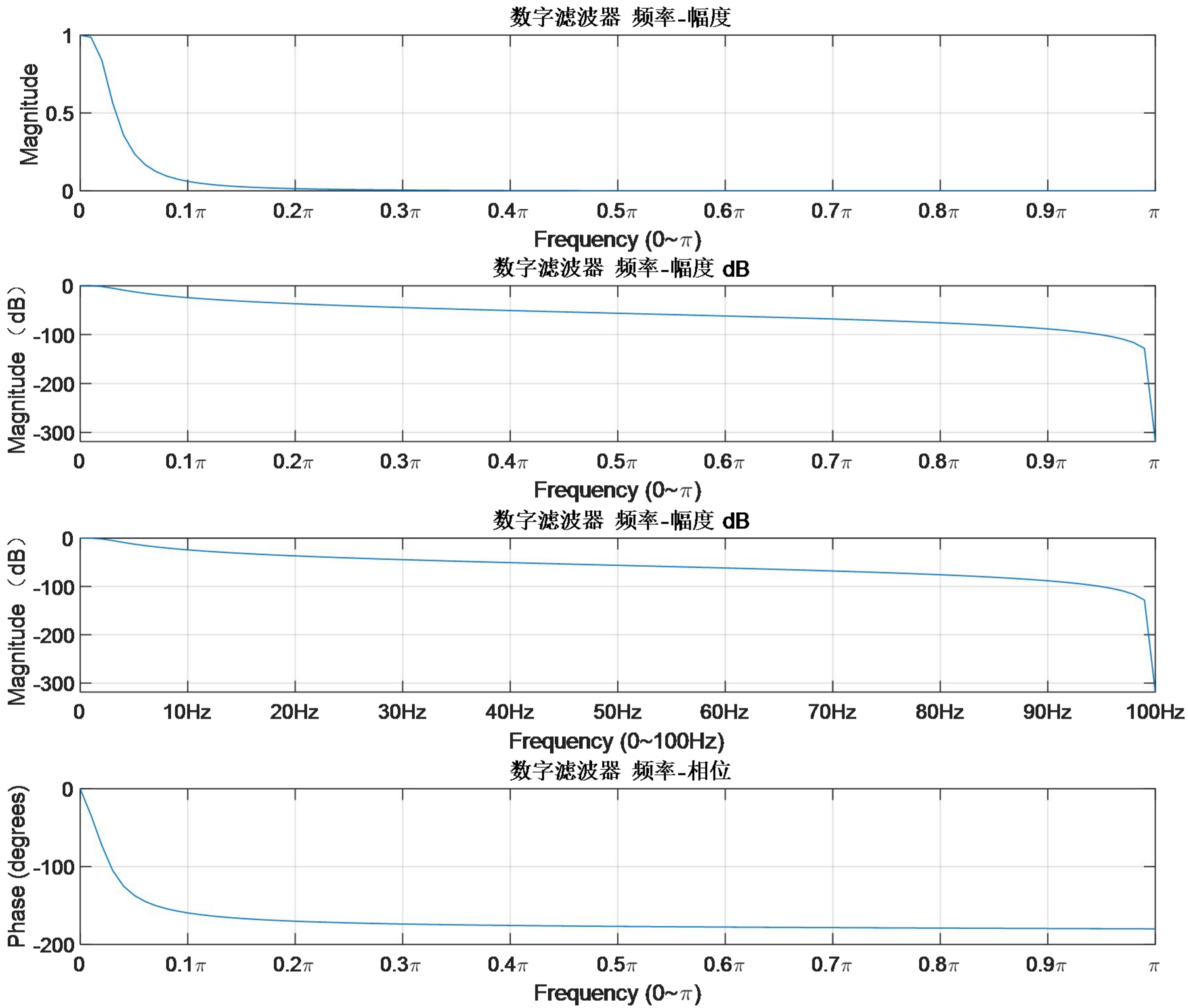

$\omega = \Omega T$

线性映射

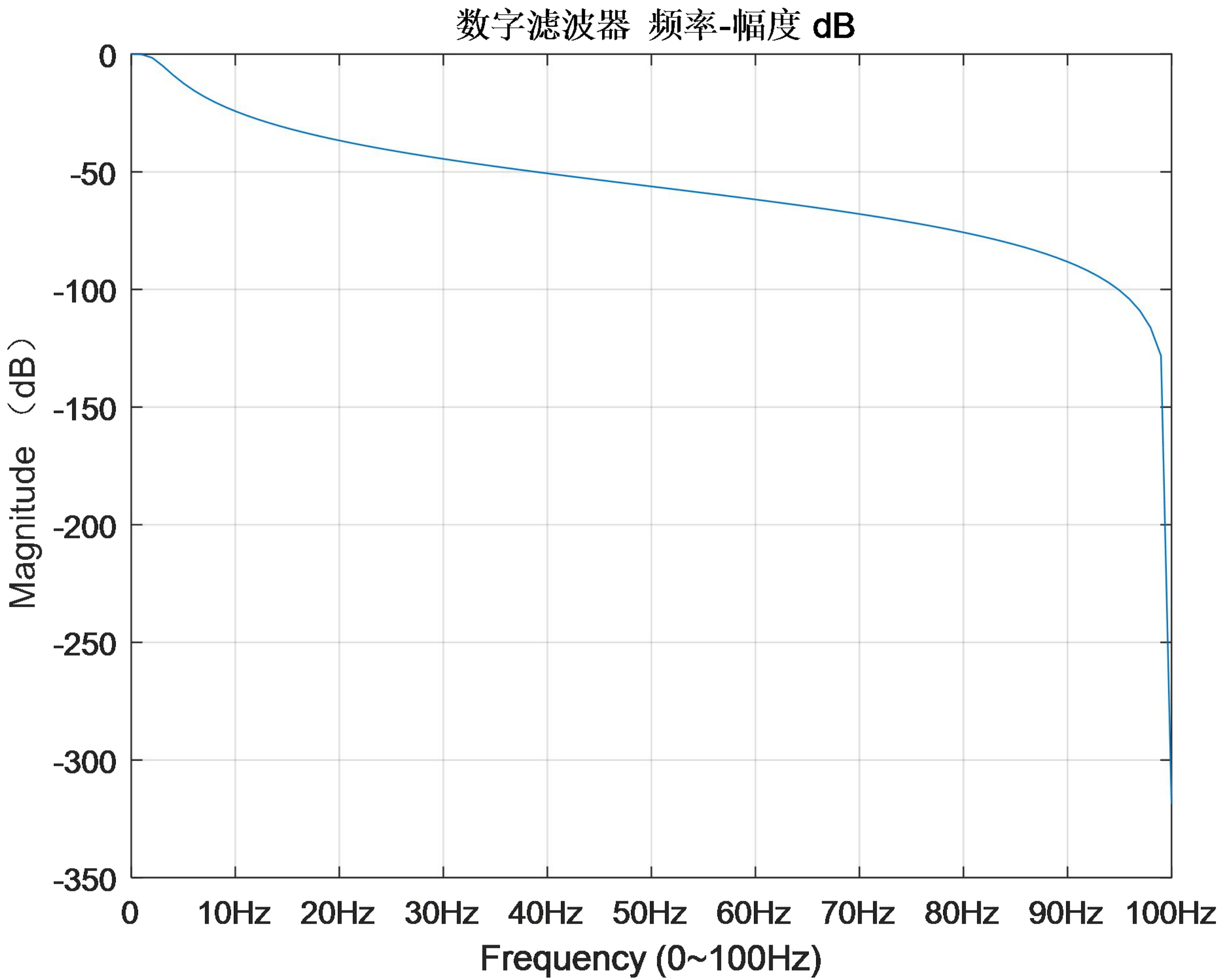



**理解：P192数字频率响应相对于模拟频率响应产生变形**

**（模拟和数字横坐标不成线性，导致过渡带斜率不相同，即变形）**



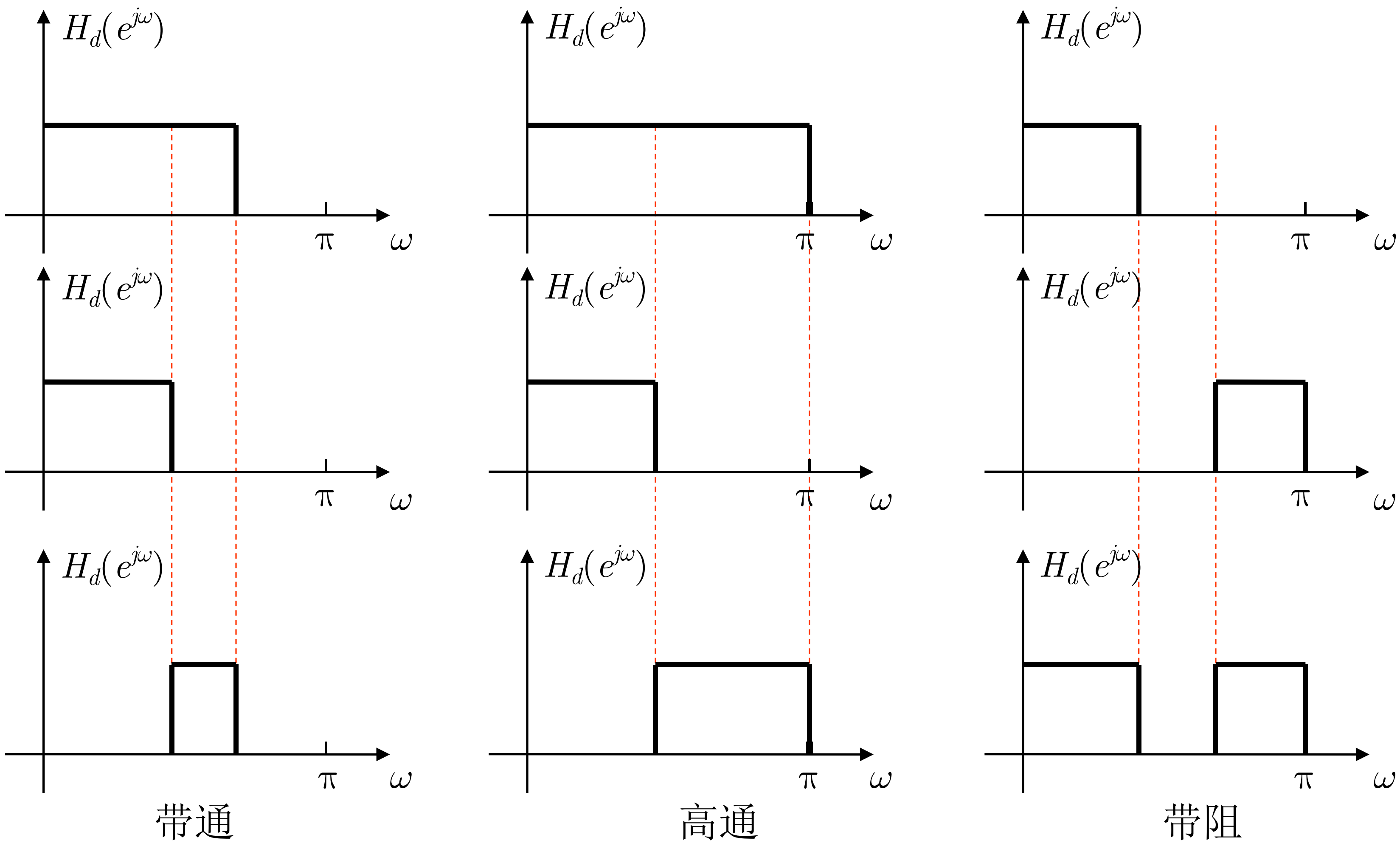
数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
Frequency (0~100Hz)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
Frequency (0~π)



数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
0
10Hz
20Hz
30Hz
40Hz
50Hz
60Hz
70Hz
80Hz
90Hz
100Hz
Frequency (0~100Hz)

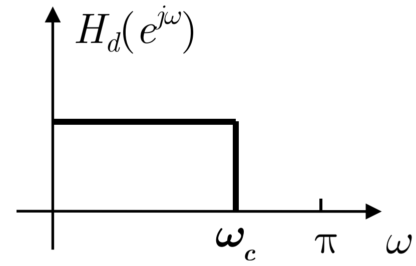
# FIR滤波器设计—窗函数法

# From low pass to band pass, high pass, band stop …



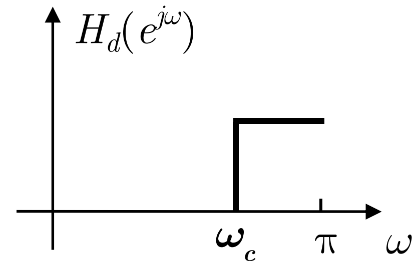
## 低通滤波器$(\omega_c)$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\sin[\omega_c(n-\alpha)] & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=\alpha\end{cases}$$



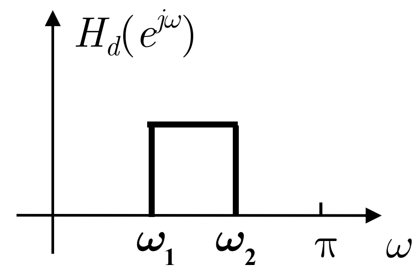

## 高通滤波器$(\omega_c)=$全通滤波器$-$低通滤波器$(\omega_c)$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[\pi(n-\alpha)]-\sin[\omega_c(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\pi-\omega_c) & n=\alpha\end{cases}$$



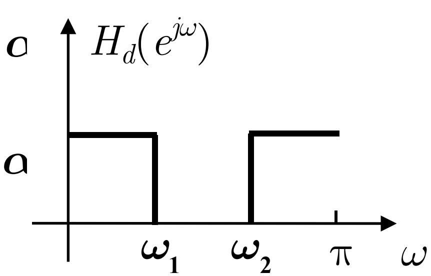

## 带通滤波器$(\omega_1,\omega_2)=$低通滤波器$(\omega_2)-$低通滤波器$(\omega_1)$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[\omega_2(n-\alpha)]-\sin[\omega_1(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\omega_2-\omega_1) & n=\alpha\end{cases}$$




## 带阻滤波器$(\omega_1,\omega_2)=$高通滤波器$(\omega_2)+$低通滤波器$(\omega_1)$

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin[\pi(n-\alpha)]+\sin[\omega_1(n-\alpha)]-\sin[\omega_2(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\pi+\omega_1-\omega_2) & n=\alpha\end{cases}$$



# FIR滤波器设计1—习题集P108

用矩形窗函数方法设计一个FIR线性相位数字低通滤波器，已知$\omega_c = 0.5\pi, N = 21$。

(1) 确定单位抽样响应序列$h(n), n = 0,1,\cdots, N-1$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3) 确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式

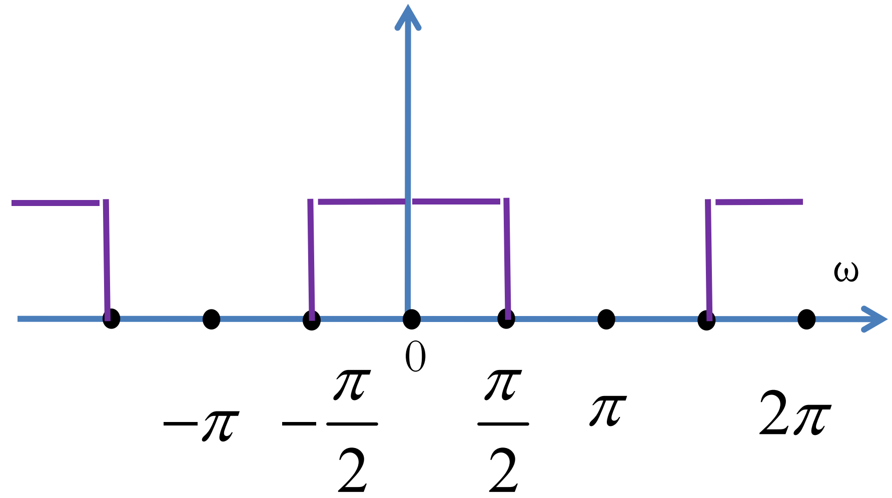
理想数字低通滤波器的幅频响为

$$\left|H_d(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

√

解：理想数字低通滤波器的幅频响应为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & 其他 \end{cases}$$




$$\Rightarrow \tau=\frac{N-1}{2}=10,\ \ \omega_c=\frac{\pi}{2}$$

$$(1)h_d(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\sin[\omega_c(n-\tau)] & n\ne\tau \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=\tau \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-10)}\sin[\dfrac{\pi}{2}(n-10)] & n\ne 10 \\ \dfrac{1}{2} & n=10 \end{cases}$$

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-10)}\sin[\dfrac{\pi}{2}(n-10)],0\le n\le 20,n\ne 10 \\ \dfrac{1}{2}, & n=10 \\ 0, & n为其他 \end{cases}$$

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-10)}\sin[\dfrac{\pi}{2}(n-10)], 0\le n\le 20, n\ne 10\\ \dfrac{1}{2}, & n=10\\ 0, & n\text{为其他}\end{cases}$$

$$h(0)=0; h(1)=\frac{1}{9\pi}=0.035; \qquad h(11)=\frac{1}{\pi}=0.318; h(12)=0;$$

$$h(2)=0; h(3)=\frac{-1}{7\pi}=-0.045; \qquad h(13)=\frac{-1}{3\pi}=-0.106; h(14)=0;$$

$$h(4)=0; h(5)=\frac{1}{5\pi}=0.064 \qquad h(15)=\frac{1}{5\pi}=0.064; h(16)=0;$$

$$h(6)=0; h(7)=\frac{-1}{3\pi}=-0.106; \qquad h(17)=\frac{-1}{7\pi}=-0.045; h(18)=0;$$

$$h(8)=0; h(9)=\frac{1}{\pi}=0.318; \qquad h(19)=\frac{1}{9\pi}=0.035; h(20)=0;$$

$$h(10)=\frac{1}{2}$$

$$(2)H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

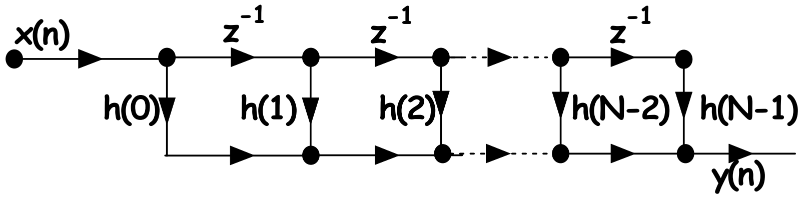
$$(3)H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

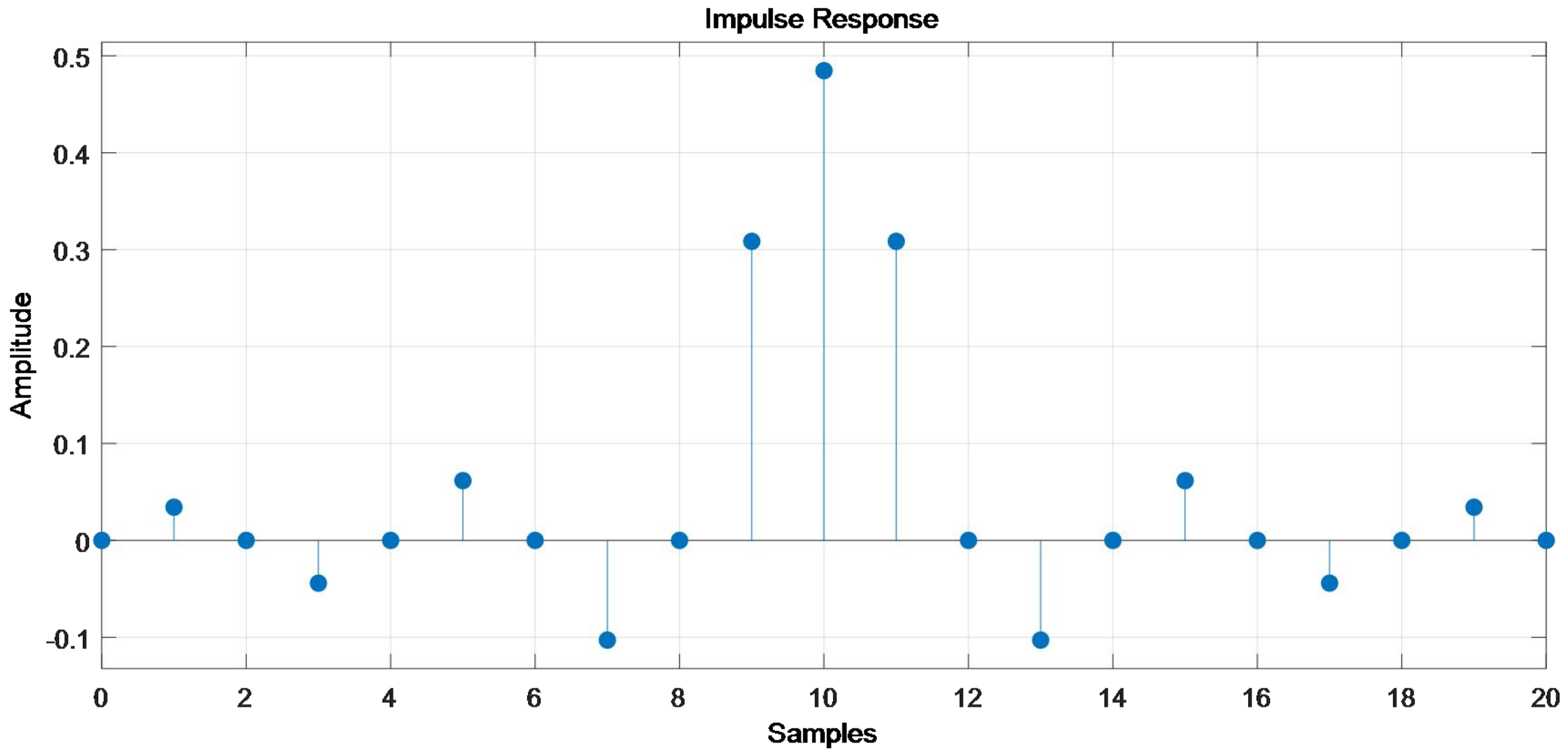
(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式

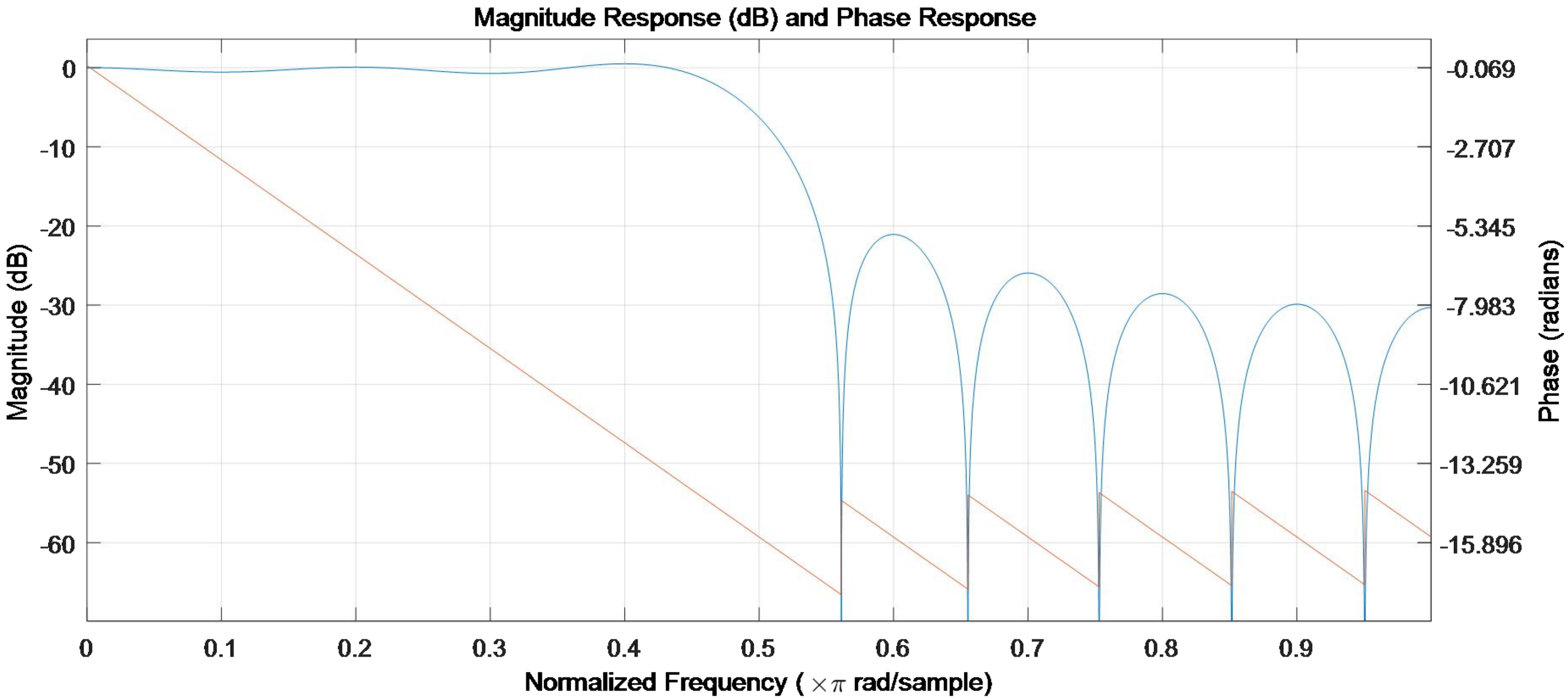
直接型

```
figure;
ord = 20;
b = fir1(ord,0.5,'low',rectwin(ord+1));
fvtool(b,1);
Hz = filt(b,1);
```

```
b =
    0.0000    0.0343   -0.0000   -0.0441    0.0000    0.0617   -0.0000   -0.1029    0.0000    0.3086
    0.4847
    0.3086    0.0000   -0.1029   -0.0000    0.0617    0.0000   -0.0441   -0.0000    0.0343    0.0000

Hz =

  0.03429 z^-1  - 0.04408 z^-3 + 0.06172 z^-5  - 0.1029 z^-7 + 0.3086 z^-9 + 0.3086 z^-11 - 0.1029 z^-13 + 0.06172 z^-15 - 0.04408 z^-17
+ 0.03429 z^-19
```

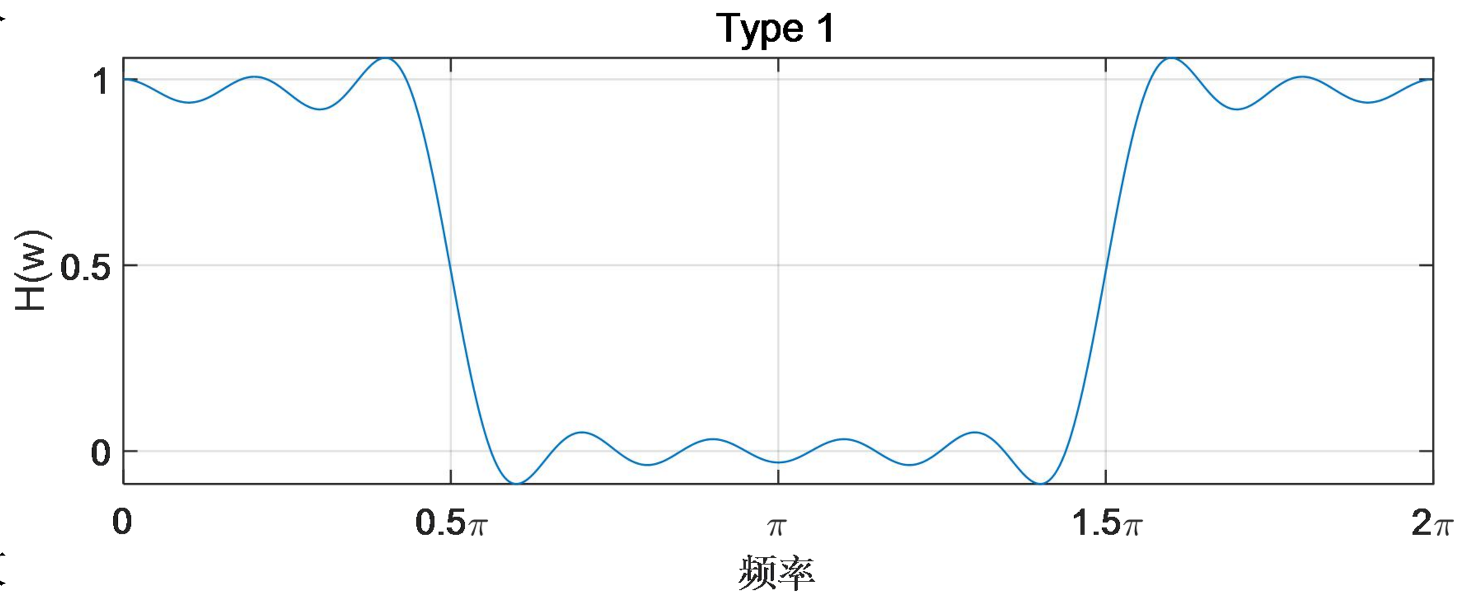



Impulse Response
Amplitude
Samples
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

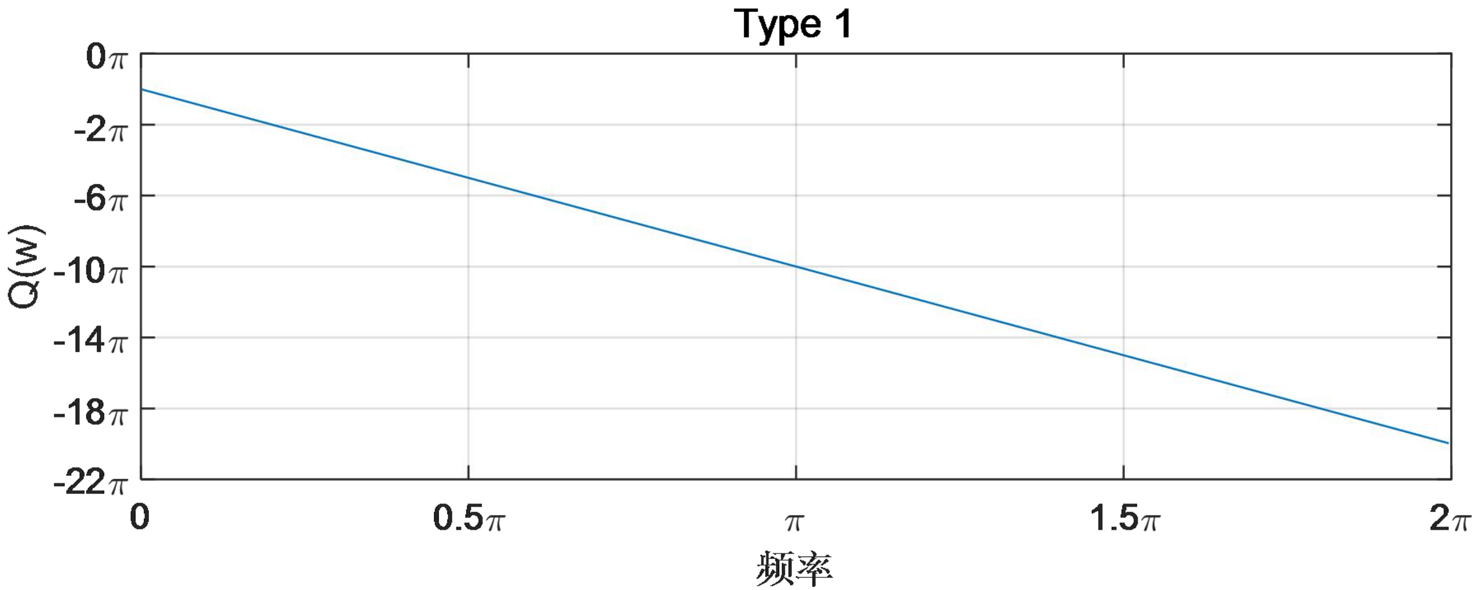


Magnitude Response (dB) and Phase Response
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
Magnitude (dB)
-0.069
-2.707
-5.345
-7.983
-10.621
-13.259
-15.896
Phase (radians)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Normalized Frequency ( ×π rad/sample)

幅度函数


Type 1
1
0.5
0
H(w)
0
0.5π
π
1.5π
2π
频率

相位函数


Type 1
0π
-2π
-6π
-10π
-14π
-18π
-22π
Q(w)
0
0.5π
π
1.5π
2π
频率

# FIR滤波器设计——频率取样法

# FIR滤波器设计1--往年真题

设理想数字带通滤波器的幅频响应为

$$\left|H_d(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \pi/4 \le |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & |\omega| < \pi/4,\ \pi/2 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

要求用频率取样法设计相应的$N = 15$ 时FIR 线性相位数字带通滤波器，

(1) 确定频率抽样序列$H(k), k = 0,1,\cdots,N-1$

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)给出滤波器的任意一种结构实现形式

02(04-05)

解：

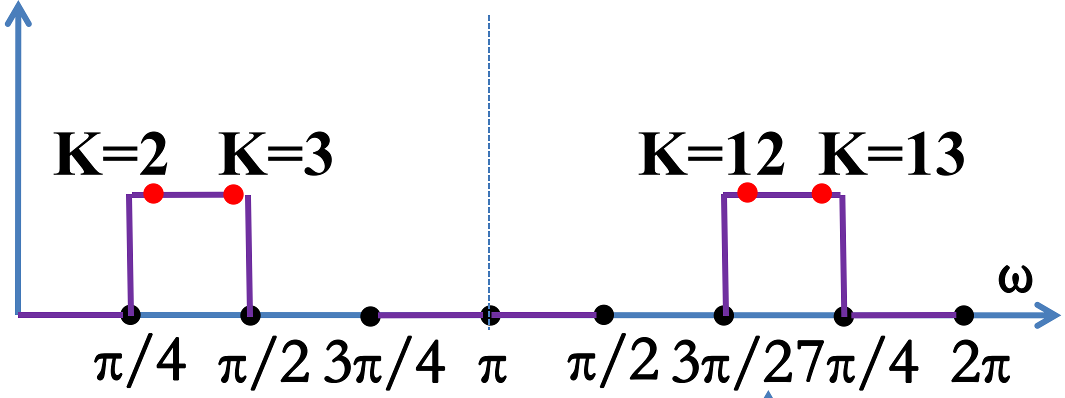
(1) 理想数字带通滤波器的幅频响为

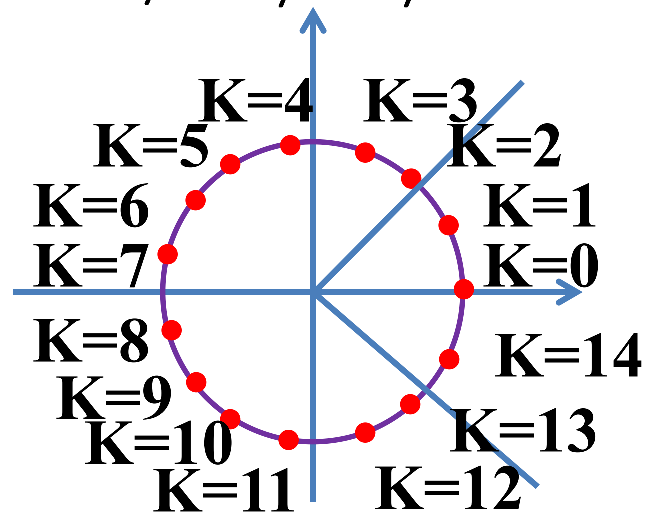
$$H(k)=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{15}$$

$$\begin{cases}1<\dfrac{\pi/4}{\Delta\omega}=\dfrac{\pi/4}{2\pi/15}=\dfrac{15}{8}<2\\[2ex] 3<\dfrac{\pi/2}{\Delta\omega}=\dfrac{\pi/2}{2\pi/15}=\dfrac{15}{4}<4\\[2ex] 11<\dfrac{3\pi/2}{\Delta\omega}=\dfrac{3\pi/2}{2\pi/15}=\dfrac{45}{4}<12\\[2ex] 13<\dfrac{7\pi/4}{\Delta\omega}=\dfrac{7\pi/4}{2\pi/15}=\dfrac{105}{8}<14\end{cases}$$

$$\Rightarrow |H_d(k)|=\begin{cases}1, & k=2,3,12,13\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$




$$H(k)=|H_d(k)|e^{-j\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k}=e^{-j\frac{14}{15}\pi k}$$

$k=2,3,12,13$

$$H(k)=\begin{cases}e^{-j\frac{14}{15}\pi k}, & k=2,3,12,13\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$H(k)=\left|H_d(k)\right|e^{-j\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k}=e^{-j\frac{14}{15}\pi k}$$

$$k=2,3,12,13$$

$$H(k)=\begin{cases} e^{-j\frac{14}{15}\pi k}, & k=2,3,12,13 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$H(0)=H(1)=H(4)=H(5)=H(6)=H(7)$$

$$=H(8)=H(9)=H(10)=H(11)=H(14)=0$$

$$H(2)=e^{-j\frac{28}{15}\pi}=e^{j\frac{2}{15}\pi}=0.91+j0.41,$$

$$H(13)=e^{-j\frac{182}{15}\pi}=e^{-j\frac{2}{15}\pi}=0.91-j0.41$$

$$H(3)=e^{-j\frac{42}{15}\pi}=e^{-j\frac{12}{15}\pi}=-0.81+j0.59,$$

$$H(12)=e^{-j\frac{168}{15}\pi}=e^{j\frac{12}{15}\pi}=-0.81-j0.59$$

$$H(k)=H^*(N-k)$$

## 或采用P243（5-238）求解

$$H(k)=\begin{cases}|H(k)|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left|\frac{N-1}{2}\right|} & k=0,\dots,\dfrac{N-1}{2}\\ |H(k)|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\frac{N-1}{2}} \quad or\left|H(N-k)\right|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\frac{N-1}{2}} & k=\dfrac{N+1}{2},\dots,\ N-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow H(k)=\begin{cases}e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left|\frac{N-1}{2}\right|}=e^{-j\frac{14}{15}\pi k}, & k=2,3\\ e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left|\frac{N-1}{2}\right|}=e^{j\frac{14}{15}\pi(15-k)}=e^{-j\frac{14}{15}\pi k}, & k=12,13\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

$$H(0)=H(1)=H(4)=H(5)=H(6)=H(7)$$
$$=H(8)=H(9)=H(10)=H(11)=H(14)=0$$

$$H(2)=e^{-j\frac{28}{15}\pi}=e^{j\frac{2}{15}\pi}=0.91+j0.41,$$

$$H(13)=e^{-j\frac{182}{15}\pi}=e^{-j\frac{2}{15}\pi}=0.91-j0.41$$

$$H(3)=e^{-j\frac{42}{15}\pi}=e^{-j\frac{12}{15}\pi}=-0.81+j0.59,$$

$$H(12)=e^{-j\frac{168}{15}\pi}=e^{j\frac{12}{15}\pi}=-0.81-j0.59$$

$$(2)H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1-z^{-15}}{15}\sum_{k=0}^{14}\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi k}}{1-W_{15}^{-k}z^{-1}}=\frac{1-z^{-15}}{15}\sum_{k=2,3,12,13}\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}k}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 2}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}2}z^{-1}}+\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 3}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}3}z^{-1}}+\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 12}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}12}z^{-1}}+\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 13}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}13}z^{-1}}\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left((\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 2}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}2}z^{-1}}+\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 13}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}13}z^{-1}})+(\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 3}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}3}z^{-1}}+\frac{e^{-j\frac{14}{15}\pi 12}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}12}z^{-1}})\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left((\frac{e^{-j\frac{2}{15}\pi}}{1-e^{-j\frac{4\pi}{15}}z^{-1}}+\frac{e^{j\frac{2}{15}\pi}}{1-e^{j\frac{4\pi}{15}}z^{-1}})+(\frac{e^{-j\frac{4}{5}\pi}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}+\frac{e^{j\frac{4}{5}\pi}}{1-e^{j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}})\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\left(\frac{e^{-j\frac{2}{15}\pi}}{1-e^{-j\frac{4\pi}{15}}z^{-1}}+\frac{e^{j\frac{2}{15}\pi}}{1-e^{j\frac{4\pi}{15}}z^{-1}}\right)+\left(\frac{e^{-j\frac{4}{5}\pi}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}+\frac{e^{j\frac{4}{5}\pi}}{1-e^{j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}\right)\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\frac{e^{-j\frac{2}{15}\pi}(1-e^{j\frac{4\pi}{15}}z^{-1})+e^{j\frac{2}{15}\pi}(1-e^{-j\frac{4\pi}{15}}z^{-1})}{(1-e^{-j\frac{4\pi}{15}}z^{-1})(1-e^{j\frac{4\pi}{15}}z^{-1})}+\frac{e^{-j\frac{4}{5}\pi}(1-e^{j\frac{2\pi}{5}}z^{-1})+e^{j\frac{4}{5}\pi}(1-e^{-j\frac{2\pi}{5}}z^{-1})}{(1-e^{-j\frac{2\pi}{5}}z^{-1})(1-e^{j\frac{2\pi}{5}}z^{-1})}\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\frac{(e^{j\frac{2}{15}\pi}+e^{-j\frac{2}{15}\pi})-(e^{j\frac{2}{15}\pi}+e^{-j\frac{2}{15}\pi})z^{-1}}{1-2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{(e^{j\frac{4}{5}\pi}+e^{-j\frac{4}{5}\pi})-(e^{j\frac{2}{5}\pi}+e^{-j\frac{2}{5}\pi})z^{-1}}{1-2\cos\frac{2\pi}{5}z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\frac{2\cos\frac{2\pi}{15}-2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1}}{1-2\cos\frac{4\pi}{15}z^{-1}+z^{-2}}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{5}-2\cos\frac{2\pi}{5}z^{-1}}{1-2\cos\frac{2\pi}{5}z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{1-z^{-15}}{15}\left(\frac{1.83-1.83z^{-1}}{1-1.34z^{-1}+z^{-2}}+\frac{-1.62-0.62z^{-1}}{1-1.83z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

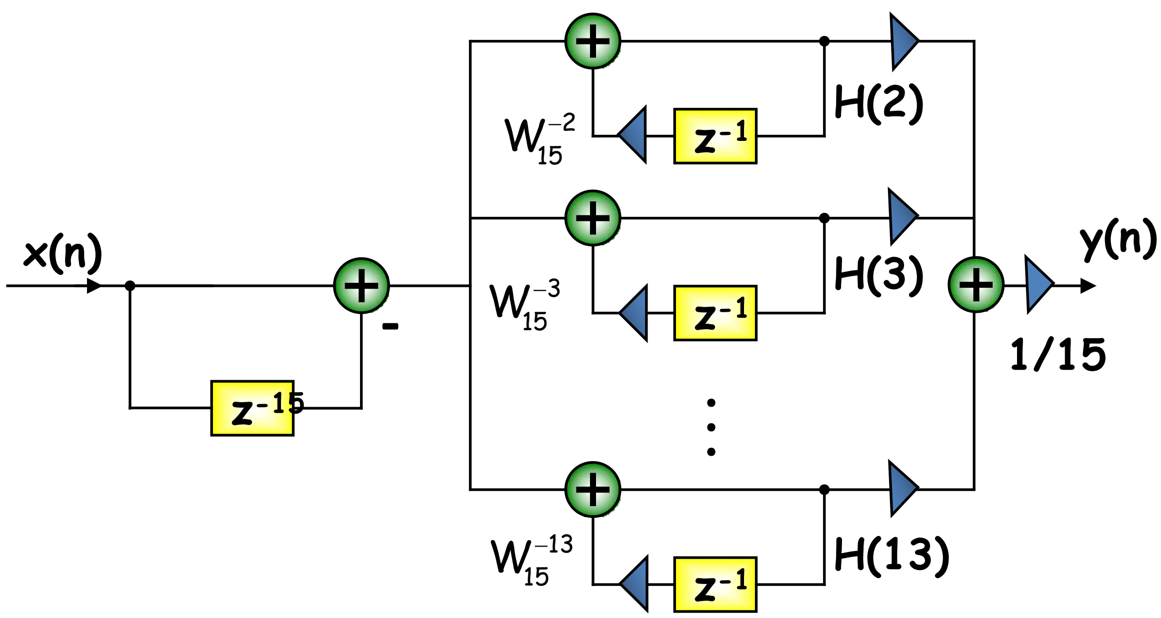
(3)

$$H(2)=e^{-j\frac{28}{15}\pi}=e^{j\frac{2}{15}\pi}=0.91+j0.41,$$

$$H(13)=e^{-j\frac{182}{15}\pi}=e^{-j\frac{2}{15}\pi}=0.91-j0.41$$

$$H(3)=e^{-j\frac{42}{15}\pi}=e^{-j\frac{12}{15}\pi}=-0.81+j0.59,$$

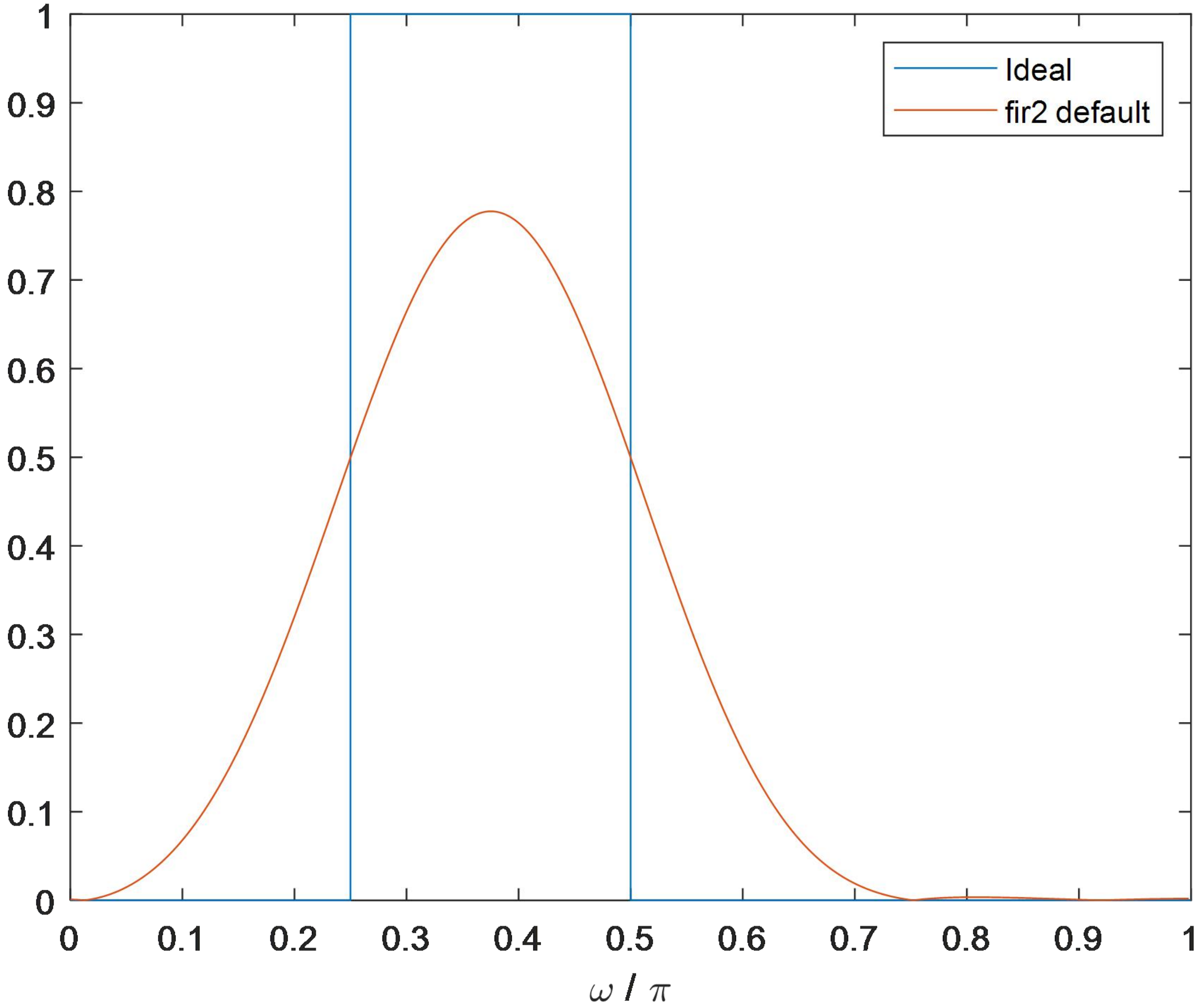
$$H(12)=e^{-j\frac{168}{15}\pi}=e^{j\frac{12}{15}\pi}=-0.81-j0.59$$



```
ord = 14;
f = [0 0.25 0.25 0.5 0.5 1];
m = [0 0 1 1 0 0];
b1 = fir2(ord,f,m);
fvtool(b1,1);
Hz = filt(bi,1);
Hk = fft(b1);
```

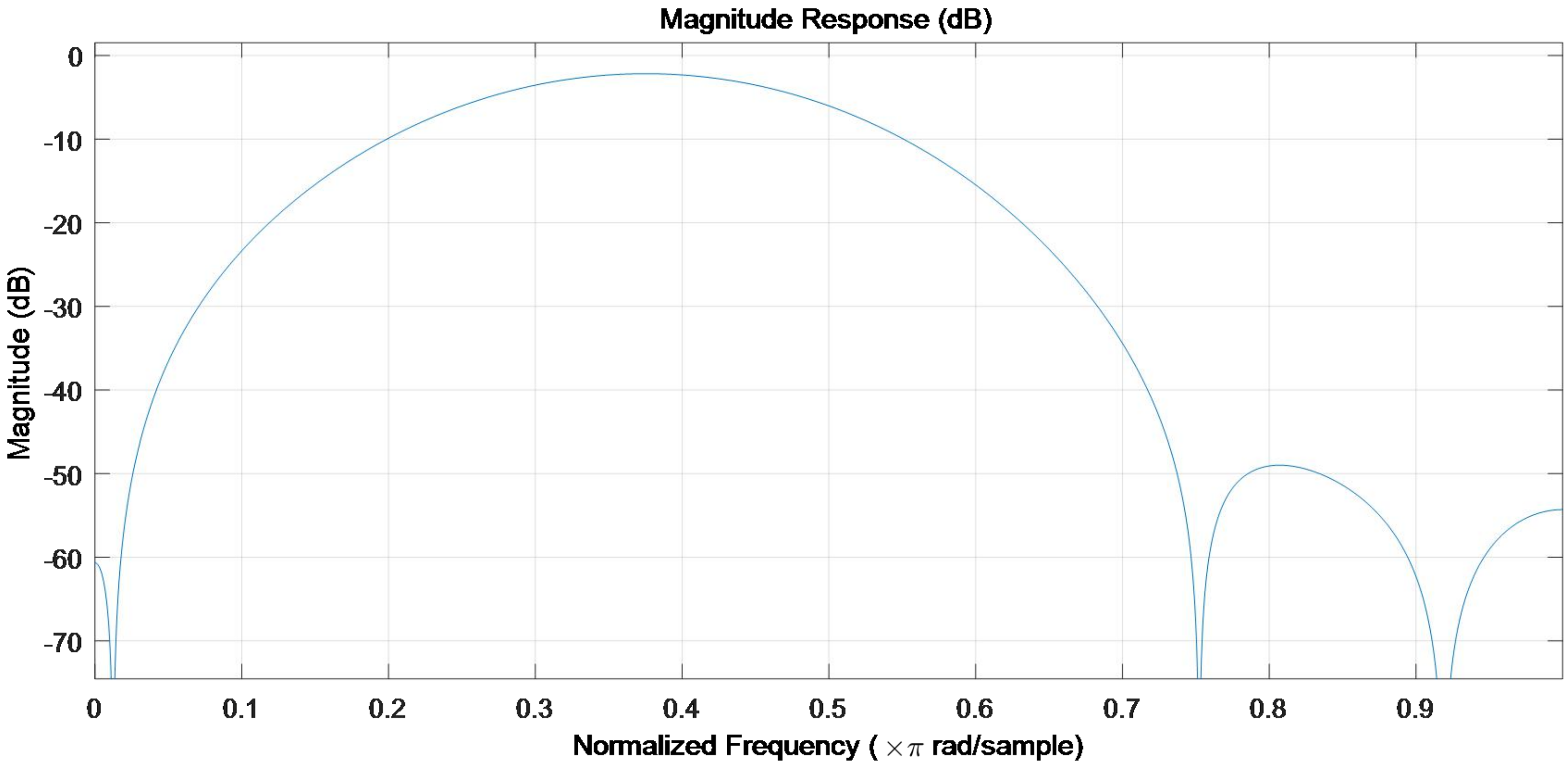
```
b =

  -0.0010    0.0065    0.0271   -0.0000   -0.1157   -0.1313    0.0889    0.2500    0.0889   -0.1313   -0.1157    0.0000    0.0271    0.0065   -0.0010

Hk =

  -0.0009 + 0.0000i  -0.1269 - 0.0270i   0.5104 + 0.2272i  -0.6184 - 0.4493i   0.2527 + 0.2807i  -0.0240 - 0.0415i

  -0.0011 - 0.0033i  -0.0001 - 0.0006i  -0.0001 + 0.0006i  -0.0011 + 0.0033i  -0.0240 + 0.0415i   0.2527 - 0.2807i

  -0.6184 + 0.4493i   0.5104 - 0.2272i  -0.1269 + 0.0270i

Hz =

  -0.001033 + 0.006512 z^-1 + 0.02709 z^-2 - 2.606e-17 z^-3 - 0.1157 z^-4 - 0.1313 z^-5 + 0.08893 z^-6

         + 0.25 z^-7 + 0.08893 z^-8 - 0.1313 z^-9 - 0.1157 z^-10 + 2.259e-17 z^-11 + 0.02709 z^

                                                       -12 + 0.006512 z^-13 - 0.001033 z^-14
```

N=15



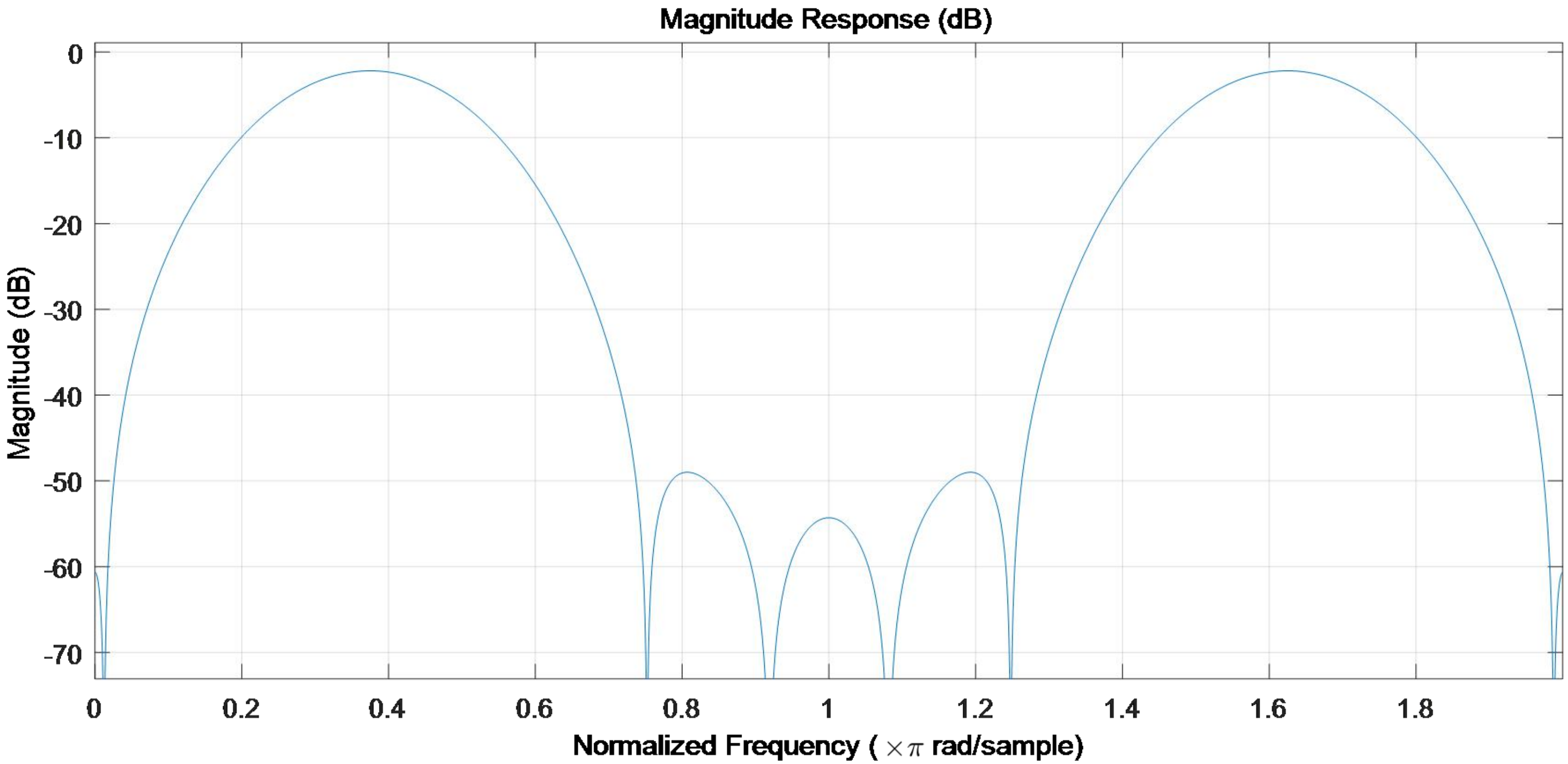
Ideal
fir2 default
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ω / π

N=15



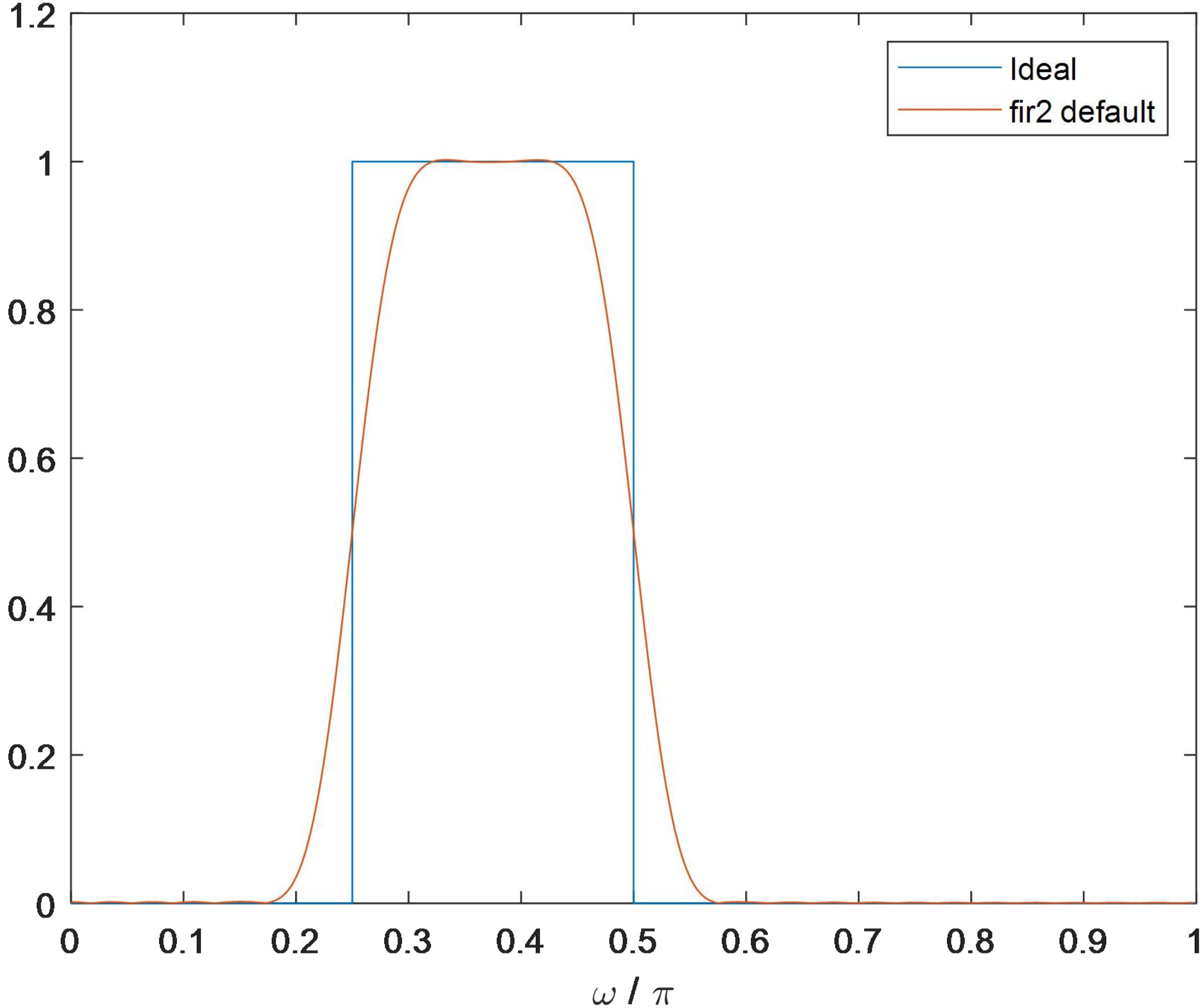
Magnitude Response (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
Magnitude (dB)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Normalized Frequency ( ×π rad/sample)

N=15



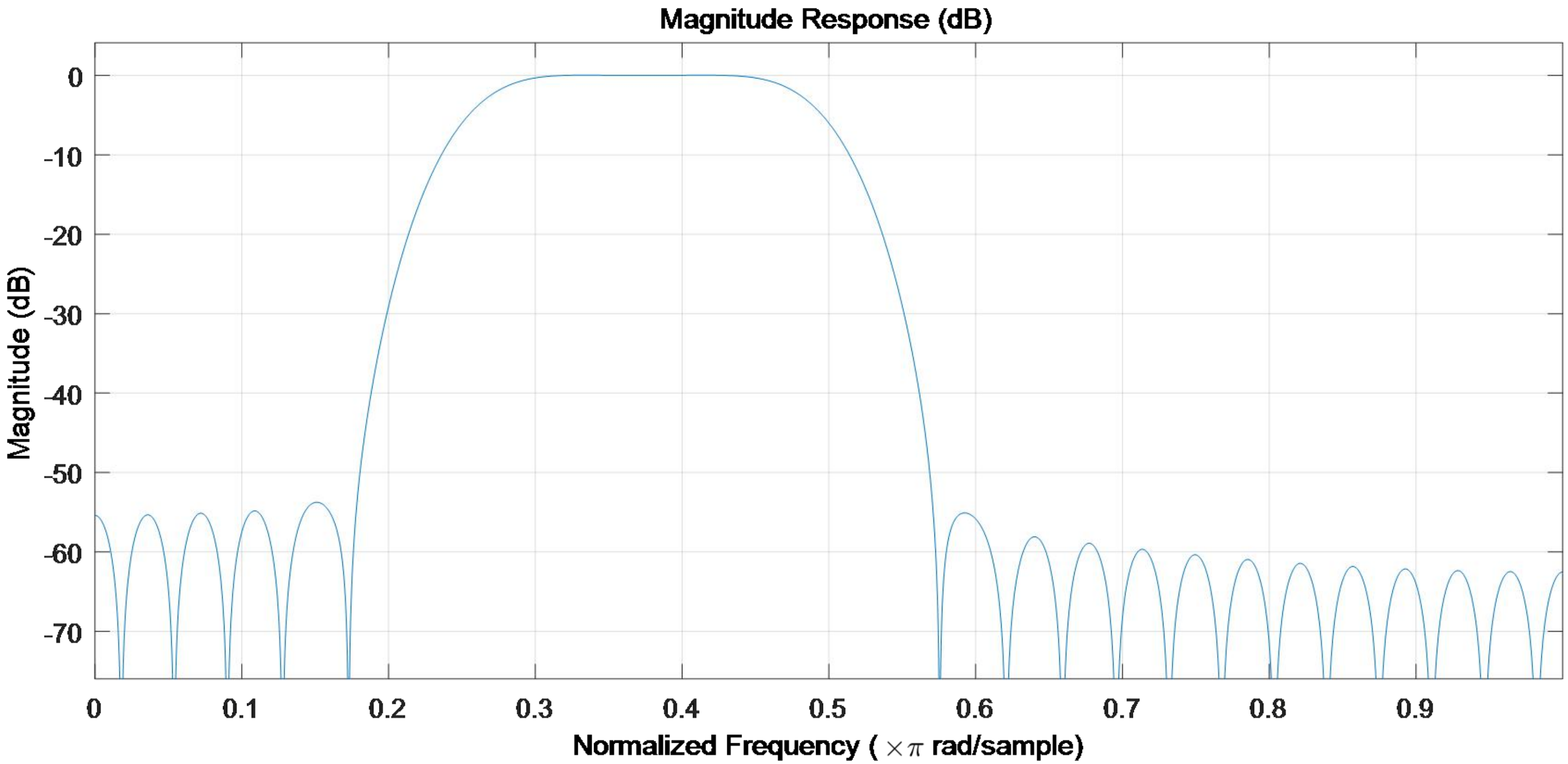
Magnitude Response (dB)
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Normalized Frequency ( ×π rad/sample)

N=55

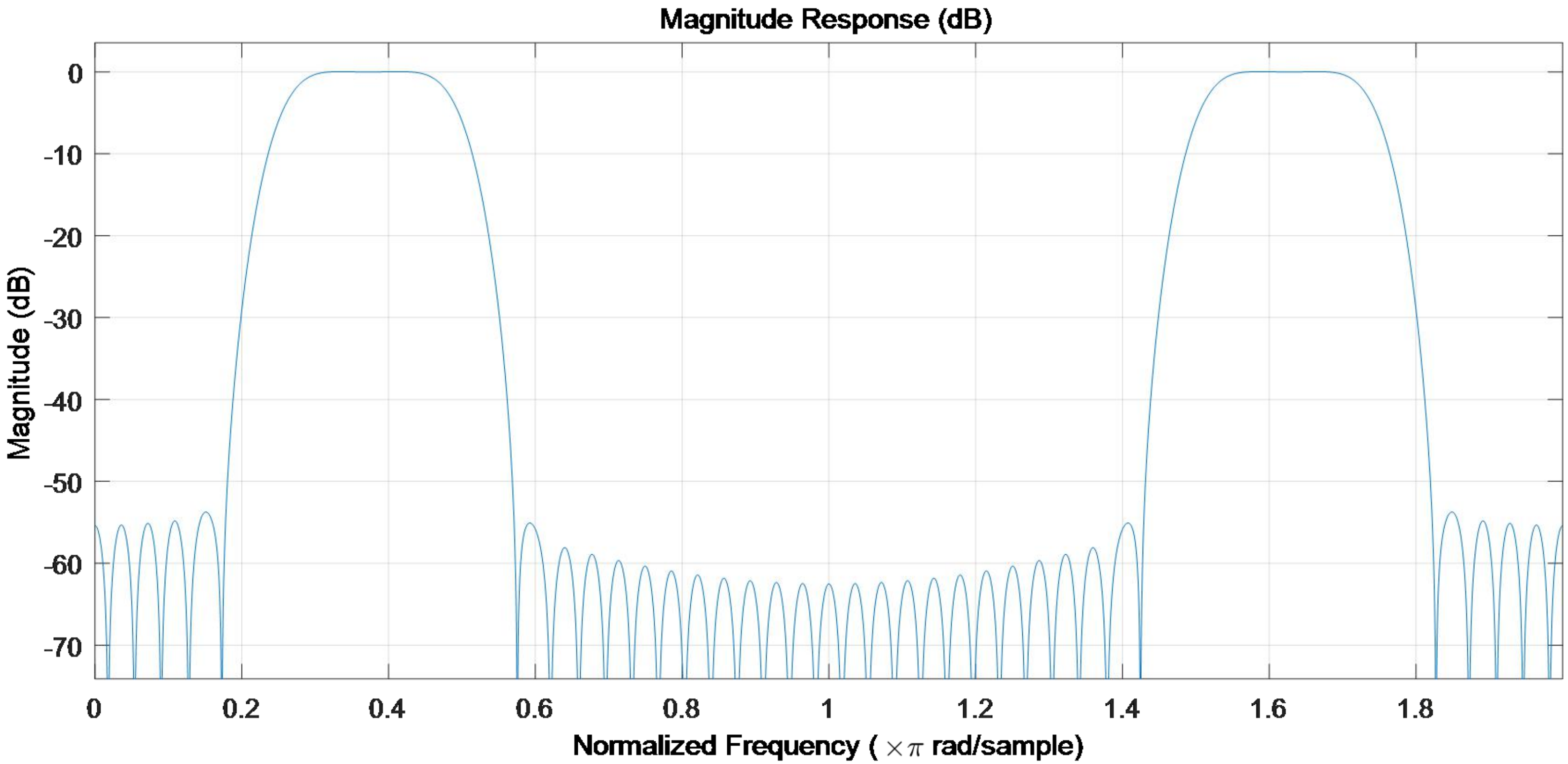


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
$\omega$ / $\pi$
Ideal
fir2 default

N=55


Magnitude Response (dB)
Magnitude (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Normalized Frequency ( ×π rad/sample)

N=55



Magnitude Response (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
Magnitude (dB)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Normalized Frequency ( ×π rad/sample)