

## 第二章 静电场

静电场是静止电荷产生的电场。本章将从库仑实验定律出发，介绍静电场的基本概念和主要性质，推导出场函数与位函数的基本方程。

### § 2.1 电荷与电荷密度

两个不同质料的物体，例如丝绢与玻璃棒或毛皮与橡胶棒，经相互摩擦后，都能吸引纸屑、毛发等轻小物体。此时，我们称这样的两个物体为带电体，说它们带有电荷。电荷有两种，一种叫正电荷，一种叫负电荷。同种电荷间有斥力，异种电荷间有引力。

一个带电体所带电荷的多少叫电量，在国际单位制（SI单位制）中，电量的单位是库仑（C）。正电荷的电量为正值，负电荷的电量为负值，一个带电体的总电量是其所带正负电量的代数和。

电荷既看不见，也摸不到，并且没有质量和形态，但它的确是一种可以测量到的客观存在。近代物理学的发展，使我们对电荷的一些基本性质有了进一步的了解。

电荷的分布离散性：带电体上的电荷是带在物质的原子核内及核外电子上，原子核内的质子带有正电荷，核外电子带有负电荷，它们都是电荷的载体。因为从微观上讲，原子核及电子的空间分布是不连续的，所以带电体上的电荷分布也必然是空间离散的。

电荷的量子性：实验证明，任何带电体所带电量都是一个质子电量或电子电量的整数倍。一个质子所带的电荷量称为基元电荷，用e表示，经测定

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ (C)}$$

有人从理论上曾预言有一些电量为 $\pm e/3$ 和 $\pm 2e/3$ 的基本粒子（称为层子或夸克）存在，但至今尚未得到直接的实验证。

电荷的守恒性：实验指出，对一个电荷系统，如果没有净电荷出入其边界，无论发生任何变化，如物理变化、化学反应、甚至基本粒子的转换，系统内的正、负电荷电量的代数和都将保持不变，这一性质称为电荷守恒定律，是物质不灭定律在电荷上的体现。它表明电荷既不能被创造，也不能被消灭，它们只能在一个物体内移动，或从一个物体转移到另一个物体上。例如，摩擦生电和闪雷放电等现象，实质上都是物体原有正、负电荷的分离或中和，在这些过程中并没有电荷的创生或消灭。

电荷的相对论不变性：一个带电体的电量与它的运动状态无关。在不同的运动参照系中，观察同一个带电体的运动状态不同，电荷分布的密度不同，但总电量是相同的。

本书所讨论的宏观电磁场是由成千上万个基元电荷共同产生的，并且所涉及的空间距离要远远大于相邻基元电荷之间的距离。因此，我们一般都忽略电荷电量的量子性和空间分布的离散性，认为电荷可以连续分布于某区域内，并且电量可取任意数值。对于绝大多数的宏观电磁问题，这种近似所产生的计算误差是微乎其微的。

带电体上的电荷分布情况，通常采用以下几种电荷密度进行描述：

1. 当电荷连续分布在某体积 $\tau'$ 内时，在 $\tau'$ 内的任意点 $M(x', y', z')$ 处取一小体积元 $\Delta\tau'$ ，如图2-1(a)所示。若 $\Delta\tau'$ 内的电荷量为 $\Delta q$ ，则定义

$$\rho(x', y', z') = \lim_{\Delta\tau' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau'} \quad (2-1)$$

$\rho(x', y', z')$ 称为 $M$ 点处的电荷体密度，单位是库仑/米<sup>3</sup>(C/m<sup>3</sup>)，其物理意义为 $M$ 点处单位体积内的电荷电量。

2. 当电荷连续分布于某一薄层区域内时, 若薄层厚度  $t$  能够忽略, 可认为电荷被压缩在一个几何曲面  $s'$  上, 以面分布状态存在。在  $s'$  面的任意点  $M(x', y', z')$  处取一小面积元  $\Delta s'$ , 如图2-1(b)所示。若  $\Delta s'$  所围电荷量为  $\Delta q$ , 则定义

$$\rho_s(x', y', z') = \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s'} \quad (2-2)$$

$\rho_s(x', y', z')$  称为  $M$  点处的电荷面密度, 单位是库仑/米<sup>2</sup>(C/m<sup>2</sup>), 其物理意义为  $M$  点处单位面积上的电荷电量。

3. 当电荷连续分布于某一细柱区域内时, 若柱体径向尺寸能够忽略, 可认为电荷被集中在柱体轴线  $l'$  上, 以线分布状态存在。在  $l'$  线上任意点  $M(x', y', z')$  处取一小线元  $\Delta l'$ , 如图2-1(c)所示。若  $\Delta l'$  内所含电荷量为  $\Delta q$ , 则定义

$$\rho_l(x', y', z') = \lim_{\Delta l' \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l'} \quad (2-3)$$

$\rho_l(x', y', z')$  称为  $M$  点处的电荷线密度, 单位是库仑/米(C/m), 其物理意义为  $M$  点处单位长度上的电荷电量。

4. 当带电体的各维尺寸均能忽略时, 可认为此带电体的总电量  $Q$  集中在一个体积为零的几何点上。这种电荷称为点电荷, 单位为库仑(C)。利用  $\delta$  函数, 可以将点  $M'(\bar{r}')$  处的一个点电荷  $Q$  表示成电荷密度的形式

$$\rho(\bar{r}') = Q\delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

由  $\delta$  函数的性质可知, 在  $\bar{r} \neq \bar{r}'$  的点上, 有  $\rho(\bar{r}') = 0$ , 表明该点无电荷; 在包含  $\bar{r}'$  点的任意区域内, 对上式做体积分

$$\int_{\tau} \rho(\bar{r}') d\tau = \int_{\tau} Q\delta(\bar{r} - \bar{r}') d\tau = Q$$

恰符合电荷密度与总电荷的关系, 这种表示方法为后面公式的统一书写带来方便。

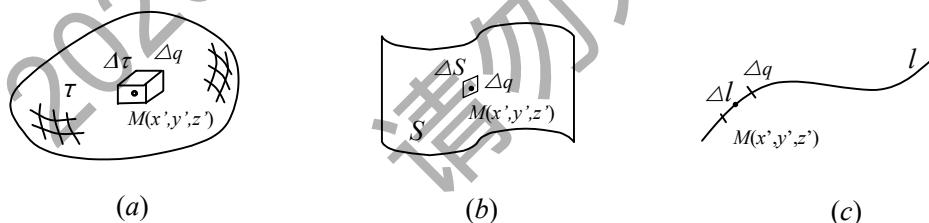


图2-1 体电荷、面电荷、线电荷的概念

应当注意, 电荷体分布是带电体宏观描述的一般形式, 而面电荷、线电荷和点电荷只是三种特殊状态的极限近似。在实际问题中, 能否采用上述近似取决于带电体的各维尺寸与问题中其它距离尺寸相对比值的大小以及计算精度的要求, 而不在于带电体本身绝对尺寸的大小。同一个带电体, 计算离它很远点的电场时, 可近似为点电荷; 而在求近点电场时, 则必须作为体分布电荷对待。

## § 2.2 库仑定律

电荷之间存在着相互作用力。1785年, 法国科学家库仑通过实验总结出了反映两个点电

荷相互作用力定量关系的库仑定律。这个定律可以简述为：在真空中，两个静止点电荷之间的作用力，与这两个电荷的电量乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，作用力的方向在两个电荷的连线上，两电荷同号为斥力，异号为吸力。图2-2表示真空中的两个点电荷 $Q_1$ 和 $Q_2$ 分别位于点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，原点 $O$ 到 $P_1$ 和 $P_2$ 的位置矢量分别记为 $\vec{r}_1$ 和 $\vec{r}_2$ ，则 $Q_1$ 作用于 $Q_2$ 的力可以用矢量公式表示成

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \hat{R}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^3} \vec{R}_{21} \quad (2-4)$$

上式是真空中库仑定律的数学表达式，此作用力常称为**库仑力或静电力**。其中 $\vec{R}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 代表自 $Q_1$ 点指向 $Q_2$ 点的相对位置矢量， $R_{21} = |\vec{R}_{21}|$ 为 $Q_1$ 与 $Q_2$ 的距离， $\hat{R}_{21} = \vec{R}_{21} / R_{21}$ 是 $\vec{R}_{21}$ 的单位矢量。即

$$\begin{aligned}\vec{R}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)\hat{z} \\ R_{21} &= |\vec{R}_{21}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ \hat{R}_{21} &= \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y} + (z_2 - z_1)\hat{z}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\end{aligned}$$

在SI单位制中，长度、电量和力的单位分别用米(m)、库仑(C)和牛顿(N)，则式(2-4)中的比例常数 $k$ 的数值和单位为

$$k = 8.988 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 [\text{Nm}^2/\text{C}^2]$$

为了使后面大多数的电磁场公式更加简洁，我们将比例常数 $k$ 写成

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

其中 $\epsilon_0 = 8.8538 \times 10^{-12} \approx 1/(36\pi \times 10^9)$  法拉/米(F/m)，称为**真空电容率或真空介电常数**。此时式(2-4)写成

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{R}_{21}}{R_{21}^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}^3} \quad (2-5)$$

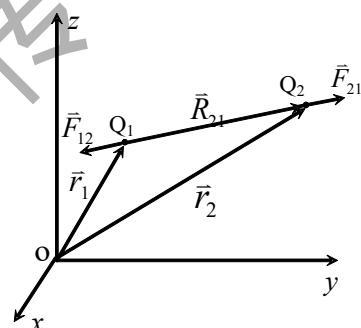


图2-2 真空中的两个点电荷

从上式可知，当电荷 $Q_1$ 和 $Q_2$ 同号时， $\vec{F}_{21}$ 与 $\vec{R}_{21}$ 的方向相同，从 $Q_1$ 指向 $Q_2$ ，这时两电荷之间为斥力；当电荷 $Q_1$ 和 $Q_2$ 异号时， $\vec{F}_{21}$ 与 $\vec{R}_{21}$ 的方向相反，从 $Q_2$ 指向 $Q_1$ ，两电荷之间为引力。

如果把式(2-5)中的 $\vec{R}_{21}$ 换成 $\vec{R}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ，就可以得到 $Q_1$ 所受的力 $\vec{F}_{12}$ ，可见 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ，两个点电荷的相互作用力符合牛顿第三定律。

当空间有多个点电荷时，每个点电荷所受的总作用力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的作用力的矢量和，这一性质称为静电力的**叠加原理**。也就是说，若空间存在 $N$ 个点电荷，则第*i*个点电荷 $Q_i$ 所受到的总静电力为

$$\bar{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{F}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[ \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{R}_{ij}}{R_{ij}^3} \right] \quad (2-6)$$

其中  $\bar{R}_{ij}$  是从电荷  $Q_j$  指向电荷  $Q_i$  的相对位置矢量。

例2.1 真空中的三个点电荷  $Q_1 = 10^{-6}$ ,  $Q_2 = 8 \times 10^{-6}$ ,  $Q_3 = -4 \times 10^{-6}$  分别位于  $P_1(1,1,0)$ ,  $P_2(0,1,1)$ ,  $P_3(1,0,1)$ , 如图2-3所示。求点电荷  $Q_1$  所受的静电力。

解：根据静电力的叠加原理，先分别求出  $\bar{F}_{12}$  和  $\bar{F}_{13}$ ，然后再矢量相加。

$$\bar{R}_{12} = (1-0)\hat{x} + (1-1)\hat{y} + (0-1)\hat{z} = \hat{x} - \hat{z}$$

$$R_{12} = \sqrt{2}$$

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^3} \bar{R}_{12}$$

$$= 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times 8 \times 10^{-6}}{2\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{z}) = \frac{3.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{z}) \quad (\text{N})$$

$$\bar{R}_{13} = (1-1)\hat{x} + (1-0)\hat{y} + (0-1)\hat{z} = \hat{y} - \hat{z}$$

$$R_{13} = \sqrt{2}$$

$$\bar{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}^3} \bar{R}_{13} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times (-4) \times 10^{-6}}{2\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) = \frac{-1.8 \times 10^{-2}}{\sqrt{2}} (\hat{y} - \hat{z}) \quad (\text{N})$$

电荷  $Q_1$  所受到的总库仑力为

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{2}} (3.6\hat{x} - 1.8\hat{y} - 1.8\hat{z}) \quad (\text{N})$$

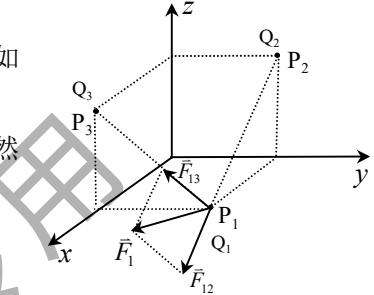


图2-3 三个点电荷的力

### § 2.3 电场和电场强度

库仑定律给出了点电荷之间静电力的定量关系，但并没有对作用力的本质作出解释。对这个问题，历史上有几种不同的观点。较早的一种观点认为静电力是一种“超距作用”，它的传递不需要媒介，也不需要时间。第二种较有影响的观点认为静电力是通过中间媒质传递的，该中间媒介是弥漫于整个宇宙空间的一种不可见且静止不动的特殊物质，称之为“以太”，静电力通过“以太”传递。第三种是法拉第所提出的场的观点，这种观点认为，电荷在其周围空间产生电场这种物质，当其它带电体的电荷处于这个电场之中时，就会与该电场作用而受力。两个点电荷之间的静电力，实质上是一个电荷的电场作用在另一个电荷上的电场力。

大量的实验结果证明，法拉第“场”的观点是正确的。电场是伴随着电荷而产生的一种特殊物质，虽然它不象普通的“三态”物质那样由原子、分子构成，也没有可见的形态，但其具有可以被检测的运动速度、能量和动量，占有空间（尽管该空间允许其它物质再入），是一种真实的客观存在。场和实物是物质存在的两种不同形式。

为了描述电场的分布情况和研究电场空间各点的性质，我们引入电场强度的概念。由于电荷在电场中受力是电场的特有表征，因此可以用试验电荷所受的电场力来研究电场的性

质。所谓“**试验电荷**”是指电量和体积都很小的带电体，当它放入电场后，可以被视为放置在某一点上的点电荷，且不会对原有电场产生显著影响。通过测试发现，当把试验电荷 $\Delta Q$ 放在某给定电场的任意一点A处时， $\Delta Q$ 受到一个电场力 $\vec{F}$ 。如果把试验电荷的电量增加为 $2\Delta Q$ 、 $3\Delta Q$ …… $n\Delta Q$ ，则它们所受电场力分别为 $2\vec{F}$ 、 $3\vec{F}$ …… $n\vec{F}$ ，力的大小按相同倍数增大，但方向始终不变；如果将试验电荷改变符号，换成 $-\Delta Q$ 、 $-2\Delta Q$ 、 $-3\Delta Q$ …… $-n\Delta Q$ ，则其受力为 $-\vec{F}$ 、 $-2\vec{F}$ 、 $-3\vec{F}$ …… $-n\vec{F}$ ，力的大小与正试验电荷时相同，但方向相反。通过上述的实验可以看出，在A点处，试验电荷所受电场力与其电量的比值 $(\vec{F}/\Delta Q)_A$ 是一个大小和方向都确定的值，与试验电荷本身电量的大小和符号无关。同样，若另选一点B进行的测试，比值 $(\vec{F}/\Delta Q)_B$ 将是另外的一个确定值。由此可见， $\vec{F}/\Delta Q$ 是一个反映电场空间各点电场性质的物理量，我们将其记作 $\vec{E}$ ，称为**电场强度**，即

$$\vec{E} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta Q} \quad (2-7)$$

由上面的定义可知，电场空间某一点上的电场强度，其大小等于单位电荷在该点所受电场力的大小，其方向与正电荷在该点所受电场力的方向相同。但注意，电场强度的单位是牛顿/库(N/C)，或记作伏特/米(V/m)，与力的单位牛顿(N)是不同的。

在电场空间任意指定一点，就有一个与之对应的电场强度矢量 $\vec{E}$ 。因此，电场空间的 $\vec{E}$ 是一个矢量点函数，一般情况下它的大小和方向都是坐标的函数。所谓“求某电荷(或某带电体)产生的电场”，实质就是指出电场强度与空间坐标的函数关系 $\vec{E}(x, y, z)$ 。

如果空间一点的电场强度 $\vec{E}$ 已知，则位于该点的点电荷 $Q$ 所受的电场力为

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (2-8)$$

定义式(2-7)适用于任何场源电荷所产生的电场。若场源是一个位于点 $M(x', y', z')$ 处的点电荷 $Q$ ，则在任意场点 $P(x, y, z)$ 处，试验电荷 $\Delta Q$ 所受的库仑力为

$$\vec{F} = \frac{Q\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$

将上式代入 $\vec{E}$ 的定义式(2-7)，可得到点电荷 $Q$ 在 $P(x, y, z)$ 点产生的电场强度表达式

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\hat{R}}{R^2} \quad (2-9)$$

其中 $\vec{R}$ 是从电荷所在点 $M(x', y', z')$ 指向观测点 $P(x, y, z)$ 的相对位置矢量， $R$ 和 $\hat{R}$ 分别是 $\vec{R}$ 的模与单位矢量。

习惯上，将观测点称作为**场点**，场源电荷所在点称为**源点**。场点的位置一般用不带撇号的坐标 $(x, y, z)$ 表示，或用场点的位置矢量 $\vec{r}$ 表示；源点的位置用带撇号的坐标 $(x', y', z')$ 表示，或用源点的位置矢量 $\vec{r}'$ 表示。因此，式(2-9)中 $\vec{R}$ 和 $R$ 的直角坐标表达式为

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \\ R &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

当源点坐标已知时，(2-9)式就是一个表示电场强度空间分布的函数 $\vec{E}(x, y, z)$ 。

一个点电荷的电场强度是其电荷的线性函数，所以多个点电荷在空间一点产生的总电场强度满足矢量叠加原理。如果真空中有 $N$ 个点电荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ ，则任意场点 $P(x, y, z)$

处的总电场强度等于各个点电荷单独产生的电场强度的矢量和

$$\bar{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N Q_i \frac{\bar{R}_i}{R_i^3} \quad (2-10)$$

其中  $\bar{R}_i$  代表自  $Q_i$  到  $P(x, y, z)$  点的相对位置矢量，如图2-4所示。

利用叠加原理还可以由式(2-10)导出电荷分别呈体分布、面分布和线分布三种情况下的电场强度表达式。图2-5表示了电荷连续分布在体积  $\tau'$ 、曲面  $s'$  和曲线  $l'$  上的情况。

如果电荷以体密度  $\rho(\bar{r}')$  分布在体积  $\tau'$  内，在  $\tau'$  内任意点  $M$  处取一体积元  $d\tau'$ ，由于  $d\tau'$  的尺寸远小于场源距离  $R$ ，所以  $\rho(\bar{r}')d\tau'$  可看作是一个点电荷，它所产生的电场强度为

$$d\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{R}}{R^3} \rho(\bar{r}') d\tau' \quad (2-11)$$

体积  $\tau'$  内的分布电荷在场点  $P(\bar{r})$  处产生的总场强是上式的体积分

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\bar{R}}{R^3} \rho(\bar{r}') d\tau' \quad (2-11)$$

如果电荷以面密度  $\rho_s(\bar{r}')$  分布在曲面  $s'$  上，则面积元  $ds'$  上的电荷元  $\rho_s(\bar{r}')ds'$  可视为点电荷， $s'$  上的面电荷所产生的电场强度为

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\bar{R}}{R^3} \rho_s(\bar{r}') ds' \quad (2-12)$$

如果电荷以线密度  $\rho_l(\bar{r}')$  分布在曲线  $l'$  上，则线元  $dl'$  上的电荷元  $\rho_l(\bar{r}')dl'$  可视为点电荷， $l'$  上的线电荷所产生的电场强度为

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\bar{R}}{R^3} \rho_l(\bar{r}') dl' \quad (2-13)$$

当场源电荷的分布已知时，选择应用公式 (2-9) ~ (2-13)，可以计算出电场强度的分布函数。

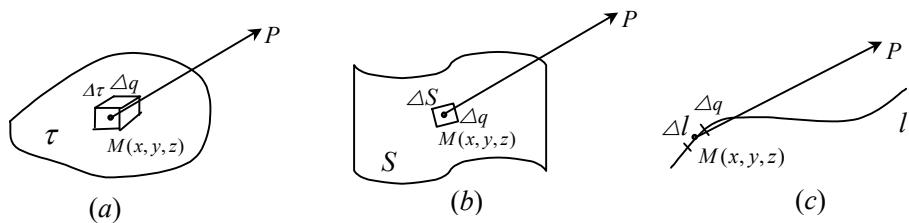


图2-5 体电荷、面电荷、线电荷的电场

例2.2 长为  $l$  的线段上均匀分布着线密度为  $\rho_l$  的电荷，计算线外任意点的电场强度。

解：直线电荷产生的电场有轴对称性，故采用圆柱坐标系。令  $z$  轴与线电荷重合，原点位于线电荷的中点，如图2-6所示。

设场点坐标为  $P(r, \varphi, z)$ , 电荷线元  $\rho_l dz'$  所在点坐标为  $(0, 0, z')$ , 则  $\rho_l dz'$  在  $P$  点产生电场的三个分量为

$$dE_r = dE \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_l dz'}{R^2} \sin \theta$$

$$dE_\varphi = 0$$

$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho_l dz'}{R^2} \cos \theta$$

为了便于计算, 将  $R$  和  $dz'$  化为变量  $r$  与  $\theta$  的函数

$$R = r \csc \theta$$

$$z' = z - r \cot \theta$$

$$dz' = r \csc^2 \theta d\theta$$

对  $\theta$  从  $\theta_1$  到  $\theta_2$  积分, 便得到整条线电荷在  $P$  点产生的电场

$$E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

如果令线电荷长度  $l$  趋于无穷, 则  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ , 可得到

$$E_z = E_\varphi = 0, \quad E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2-14)$$

即

$$\bar{E} = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2-14)$$

例2.3 一半径为  $a$  的圆形薄板上均匀分布着密度为  $\rho_s$  的面电荷, 求圆面轴线上任意一点的电场强度。

解: 设场点  $P$  在圆面轴线上, 与圆心距离为  $x$ , 如图2-7所示。在圆面上取一半径为  $r$ 、宽度  $dr$  的细环带。先求环带电荷在  $P$  点产生的电场  $\bar{E}_{dr}$ , 将环带上电荷元  $\rho_s ds = \rho_s r d\varphi dr$  在  $P$  点产生的  $d\bar{E}_{dr}$  分解成与轴线平行和垂直的两个分量  $d\bar{E}_{\parallel}$  和  $d\bar{E}_{\perp}$ 。由对称性可以看出, 圆环上圆心对称的电荷元产生的  $d\bar{E}_{\perp}$  矢量相加为零, 而  $d\bar{E}_{\parallel}$  的矢量和  $\bar{E}_{dr}$  为

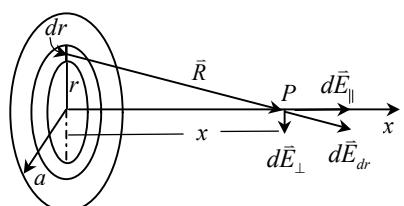


图2-7 圆面电荷的电场

$$\bar{E}_{dr} = \hat{x} \oint d\bar{E}_{\parallel} = \hat{x} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_s r dr d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta$$

其中

$$R = [r^2 + x^2]^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{R} = \frac{x}{[r^2 + x^2]^{1/2}}$$

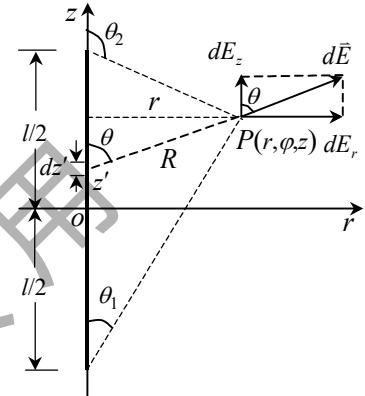


图2-6 有限长直线电荷的电场

代入上式，得到

$$\bar{E}_{dr} = \hat{x} \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0[r^2 + x^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \hat{x} \frac{\rho_s x r dr}{2\epsilon_0[r^2 + x^2]^{3/2}}$$

上式为环带电荷在P的产生的电场，对r从0至a积分，可得到整个圆面电荷在P点产生的电场

$$\bar{E} = \hat{x} \int_0^a \frac{\rho_s x r dr}{2\epsilon_0[r^2 + x^2]^{3/2}} = \hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

对上例作两种特殊情况的讨论：

1.  $x \ll a$  的情况。此时有

$$\begin{aligned} \bar{E} &\approx \hat{x} \lim_{a/x \rightarrow \infty} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right] \\ &= \hat{x} \lim_{a/x \rightarrow \infty} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{(a^2/x^2 + 1)^{1/2}} \right] = \hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2-15)$$

进一步的讨论可以证明，对于不在轴线上的场点，只要与轴线的距离远小于电荷圆面的半径，再加上 $x \ll a$ 的条件，式 (2-15) 仍然成立。而且，这一结论还可以推广到边缘不是圆形的均匀带电平面。对上面这种特殊情况，可以将源电荷近似地视为“无限大”的均匀带电平面。并由上式得知，无限大均匀带电平面所产生的电场是一个均匀场，场值与场点到平面的距离无关，由公式

$$\bar{E} = \pm \hat{n} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (2-16)$$

决定。其中， $\hat{n}$ 是带电平面的法矢，当 $\rho_s > 0$  时， $\bar{E}$ 的方向为带电平面指向场点的方向；当 $\rho_s < 0$  时， $\bar{E}$ 的方向从场点指向带电平面。

2.  $x \gg a$  的情况。此时有

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{a^2}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \hat{x} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} + \dots \right) \right] \\ &\approx \hat{x} \frac{\rho_s \pi a^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \hat{x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \end{aligned} \quad (2-17)$$

上式中  $Q = \rho\pi a^2$  为圆面所带的总电量。上式与点电荷场强公式一致。可见，只要  $a/x$  足够小，就可以把带电圆面视为点电荷。这进一步的说明，一个带电体能否被看作点电荷，不在于其本身绝对尺寸的大小，而在于其线度与它到场点的距离相比是否足够小。同一个带电圆面，当场点很远时可被看作点电荷，当场点在圆心附近时则可被看作无限大平面。

## § 2.4 电力线与电通量

### 一. 电力线

当场源电荷分布已知后，可以利用(2-9)~(2-13)各式计算出电场强度的空间分布函数，其结果是场点坐标的解析表达式。例如在直角坐标系内，一般形式为

$$\bar{E}(x, y, z) = \hat{x}E_x(x, y, z) + \hat{y}E_y(x, y, z) + \hat{z}E_z(x, y, z)$$

此时欲求某场点  $P(x_0, y_0, z_0)$  的电场强度，只需将该点坐标代入上式即可得。可见，有了场强函数的解析表达式后，对于计算每一点的电场强度是方便的，但仅由表达式却很难一目了然地描述电场分布的全貌和变化趋势。为了直观和形象地描述电场，我们常采用电力线图示法。

**电力线**是充满电场空间的一个假想曲线族，曲线上每一点的切线方向与该点电场强度的方向平行，曲线的疏密与场强的大小成正比，如图2-8所示。根据这样的约定，当我们拿到一张电力线图时，根据电力线的疏密和走向，就可以直观的判断出电场分布的强弱和方向。

可以看出，电力线实质上就是矢量分析中所介绍的矢量线。在正交坐标系中，电力线满足下面的微分方程

$$\frac{h_1 du_1}{E_1} = \frac{h_2 du_2}{E_2} = \frac{h_3 du_3}{E_3} \quad (2-18)$$

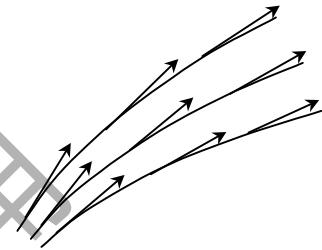


图2-8 电力线

在具体坐标系中，将已知的电场表达式代入上式求解，可得到矢量线方程的通解。图2-9是几种常见电荷系统的电力线。

电力线有两条基本性质，它们可以由静电场的基本定律推出，我们在这里不做证明，直

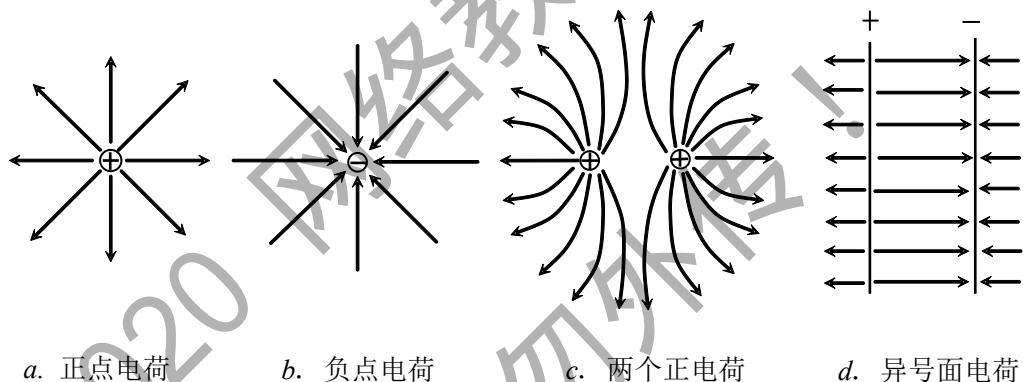


图2-9 几种常见电场系统的电力线图

接给出结论。

性质1. 电力线发自正电荷（或无穷远），止于负电荷（或无穷远），不形成闭合回线，在无电荷处不中断。

性质2. 任何两条电力线不会相交，这说明静电场中每一点的场强只有一个方向。

虽然电力线的定义在理论上是严格的，但在实际作图时，电力线密度与场强成正比的要求却是不易精确控制的。由此，电力线图示法一般只是用于电场全貌的粗略直观描述，而每一场点的电场精确值，还需通过场强函数的表达式进行计算。

## 二. 真空中的电通量

为了进一步讨论电场与电荷的联系，需要引入电通量的概念。定义真空中的电通量

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad (2-19)$$

$\bar{D}$  称为电通量密度(也称作电位移矢量)，单位是库仑/米<sup>2</sup>(C/m<sup>2</sup>)，与电荷面密度的单位相同。

在真空中， $\bar{D}$ 与 $\bar{E}$ 两矢量的方向处处相同，模值只差一个常量 $\epsilon_0$ 。

电场中任意点处矢量面元 $d\bar{s}$ 与该点电通量密度矢量 $\bar{D}$ 的点积，叫作此面元所通过的电通量，记作

$$d\Phi = \bar{D} \cdot d\bar{s} = D ds \cos\theta \quad (2-20)$$

其中 $\theta$ 为面元法线 $\hat{n}$ 与矢量 $\bar{D}$ 的夹角。由上式可见，矢量面元上的电通量是一个标量值，单位是库仑(C)，与电荷的单位相同。 $\theta < \pi/2$ (即 $\bar{D}$ 与 $\hat{n}$ 指向曲面的同侧)时， $d\Phi$ 为正； $\theta > \pi/2$ (即 $\bar{D}$ 与 $\hat{n}$ 指向曲面的两侧)时， $d\Phi$ 为负，如图2-10所示。

通过有限面积 $s$ 的电通量是 $s$ 上所有面元电通量的代数和，即

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \oint_s D \cos\theta ds \quad (2-21)$$

如果 $s$ 为一闭合曲面，则 $s$ 上通过的电通量可以写成

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \oint_s D \cos\theta ds \quad (1-22)$$

由于闭合曲面一般都规定其面元法线指向外，因此若 $\Phi > 0$ ，就形象的说有电通量“流出”闭合面； $\Phi < 0$ ，则称有电通量“流入”闭合面。

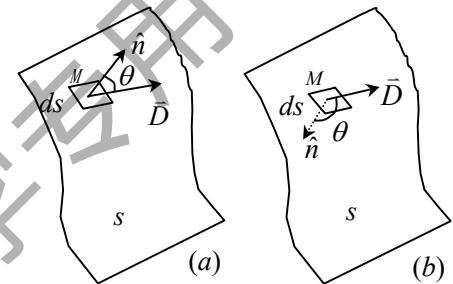


图2-10 通量的符号

## § 2.5 高斯定律

### 一. 立体角

为了推导高斯定律，我们首先介绍立体角的概念。如图2-11(a)所示，从一给定点 $O$ 向一给定的有向曲面 $s$ 的边线作连线，连线的集合构成一个锥面，该锥面所对应的空间角度 $\Omega$ 叫做 $O$ 点对 $s$ 所张的立体角， $O$ 点称为立体角的顶点。

在曲面 $s$ 上任取一矢量面元 $d\bar{s}$ ，从顶点 $O$ 向 $d\bar{s}$ 做相对位置矢量 $\bar{R}$ ，其单位矢量为 $\hat{R}$ 。如图2-11(b)所示。 $O$ 点对 $d\bar{s}$ 的立体角值定义为

$$d\Omega = \frac{\hat{R} \cdot d\bar{s}}{R^2} = \frac{ds \cos\theta}{R^2} \quad (2-23)$$

其中 $\theta$ 为面元法矢 $\hat{n}$ 与 $\hat{R}$ 的夹角。立体角的度量单位是球面度，记作Sr。立体角有正负之分，当立体角的顶点与面元的法矢在面元同侧时， $d\Omega < 0$ ；反之 $d\Omega > 0$ 。

任意曲面 $s$ 对一点所张立体角的值是式(2-23)的面积分，即

$$\Omega = \int_s \frac{\hat{R} \cdot d\bar{s}}{R^2} \quad (2-24)$$

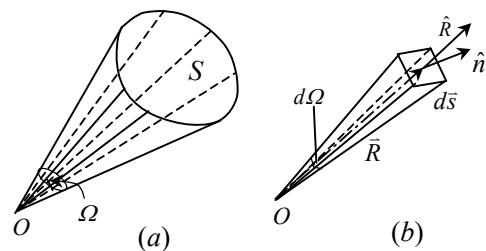


图2-11 立体角的定义

闭合曲面的立体角是立体角应用的重要内容。首先讨论闭合面为球面且顶点在球心的立体角，此时球面上面元 $ds$ 到顶点的距离 $R$ 恒等于球的半径，且有 $\hat{R} = \hat{n}$ ，所以有

$$\Omega = \int_s \frac{\hat{R} \cdot d\bar{s}}{R^2} = \frac{1}{R^2} \oint_s ds = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi \quad (2-25)$$

对于任意闭合曲面的立体角，可以分下面两种情况讨论：

1. 立体角的顶点 $O$ 在闭合曲面内部的情况。以顶点 $O$ 为中心做一个辅助球面 $s_0$ ，如图2-12(a)所示。 $O$ 点对 $s$ 面上任意面元 $d\bar{s}$ 所张的小锥面必然在 $s_0$ 上割出一个相应的面元 $d\bar{s}_0$ ，这两个面元对应着同一个立体角，符号均为正，并且 $s$ 面上所有面元的小立体角与 $s_0$ 面上的小立体角一一对应。由式(2-25)可知， $s_0$ 对 $O$ 点的立体角等于 $4\pi$ ，所以任意闭合曲面 $s$ 对其内部一点 $O$ 的立体角亦恒为 $4\pi$ ，即

$$\Omega = 4\pi \quad (2-26)$$

2. 立体角的顶点 $O$ 在闭合曲面外部的情况。如图2-12(b)所示，从顶点 $O$ 向 $s$ 上的面元 $d\bar{s}$ 做射线族构成小立体角 $d\Omega_1$ ，延长此立体角的锥面，在 $s$ 面的另一侧截出面元 $d\bar{s}_2$ ，记 $d\bar{s}_2$ 对 $O$ 点所张的小立体角为 $d\Omega_2$ 。因为 $\hat{n}_1$ 与 $\hat{r}_1$ 的夹角大于 $\pi/2$ ，有 $d\Omega_1 < 0$ ， $\hat{n}_2$ 与 $\hat{r}_2$ 的夹角小于 $\pi/2$ ，有 $d\Omega_2 > 0$ ，且 $|d\Omega_1| = |d\Omega_2|$ ，即这一对面元的立体角等值异号。考虑到 $s$ 的阳面一侧的面元与阴侧面元一一对应，故整个闭合曲面 $s$ 对 $O$ 点的总立体角必然为零。即

$$\Omega = 0 \quad (2-27)$$

例2.4 有一半径0.3m的圆盘，在通过圆心并且与圆盘相垂直的轴线上、距离圆心0.4m处的 $P$ 点观看该盘时，立体角等于多少？

解：设圆盘的法线向下，此时 $P$ 点对圆盘的立体角等于 $P$ 点对图2-13所示球冠曲面的立体角，即

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_s \frac{ds}{r_0^2} = \int_0^{\theta_1} \frac{(2\pi r_0 \sin \theta)(r_0 d\theta)}{r_0^2} \\ &= 2\pi(1 - \cos \theta_1) \end{aligned}$$

按本题所给数值

$$\cos \theta_1 = \frac{0.4}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}} = 0.8$$

代入前式，得 $P$ 点对圆盘的立体角

$$\Omega = 0.4\pi \quad (\text{Sr})$$

从上面的结果还可以看到，当 $P$ 点无限趋近圆盘时， $\cos \theta_1 = 0$ ,  $\Omega = 2\pi$ ；如果 $P$ 点是从

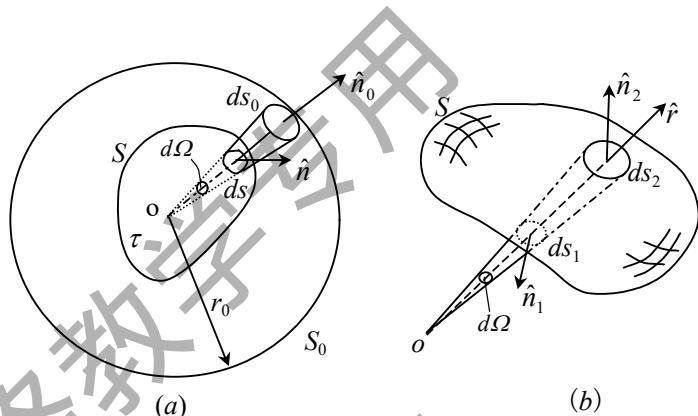


图2-12 闭合曲面的立体角

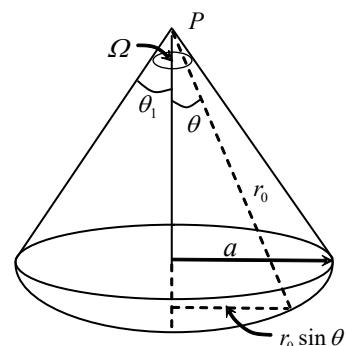


图2-13 圆盘对轴线的立体角

盘下方趋近圆盘，则 $\Omega = -2\pi$ 。此结果可以推广到任意曲面上，即曲面上的点对曲面所张的立体角为 $\pm 2\pi$ ，点和曲面法矢在曲面的两侧时取正，同侧时取负。

## 二. 高斯定律的积分形式

高斯定律是反映电场基本性质的一个重要定律，它的积分形式给出了一个闭合曲面上的电通量与闭合面内外电荷的关系。

首先讨论空间电场由 $O$ 点处的点电荷 $Q$ 产生，闭合曲面 $s$ 包围电荷 $Q$ 的情况。在 $s$ 上任取一点 $P$ ， $O$ 点到 $P$ 的相对位置矢量为 $\bar{R}$ ，单位矢量为 $\hat{R}$ ，如图2-14所示。根据点电荷的电场强度公式(2-9)及电通量的定义， $P$ 点处的面元 $d\bar{s}$ 上通过的电通量为

$$d\Phi = \bar{D} \cdot d\bar{s} = \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = \epsilon_0 \frac{Q \hat{R}}{4\pi \epsilon_0 R^2} \cdot d\bar{s}$$

利用立体角定义式(1-23)，上式可表示为

$$d\Phi = \bar{D} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\hat{R} \cdot d\bar{s}}{R^2} = \frac{Q}{4\pi} d\Omega$$

闭合面 $s$ 所通过的电通量为上式的积分

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \frac{Q}{4\pi} \oint_s d\Omega$$

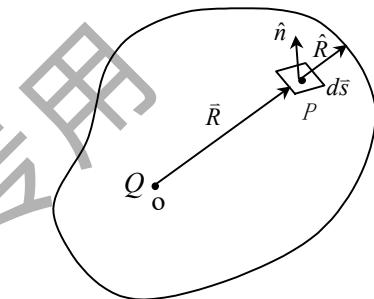


图2-14 点电荷的电通量

上式将求闭合面的电通量转化为求闭合面对 $Q$ 所在点的立体角。因 $O$ 点位于闭合面 $s$ 的内部，对 $s$ 的立体角等于 $4\pi$ ，于是有

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad (2-28)$$

可见，此时闭合面上的电通量恰等于 $s$ 面内所包围的电荷 $Q$ 。

当闭合曲面 $s$ 不包围电荷 $Q$ 时，分析过程与上面相同。但此时 $O$ 点在闭合面 $s$ 之外，对 $s$ 所张的立体角为零，故有

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (2-29)$$

这表明，当闭合面不包围电荷时，其电通量恒为零。

将以上结果推广到空间有 $M$ 个点电荷的情况。设第 $i$ 个电荷 $Q_i$ 产生的电通量密度为 $\bar{D}_i$ ，利用静电场的叠加原理，可得到闭合面 $s$ 上的总电通量

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \oint_s \left( \sum_{i=1}^M \bar{D}_i \right) \cdot d\bar{s} = \sum_{i=1}^M \oint_s \bar{D}_i \cdot d\bar{s}$$

如果曲面 $s$ 仅包围 $i=1 \dots N$ 个点电荷( $N \leq M$ )。由式(2-28)和(2-29)的结果可知，上式的右边等于闭合面 $s$ 内 $N$ 个电荷的代数和，即

$$\Phi = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \sum_{i=1}^N Q_i \quad (2-30)$$

当电荷以体密度 $\rho$ 分布在闭合曲面 $s$ 内时，将体积元 $d\tau$ 内的电荷 $\rho d\tau$ 看成点电荷，此时只须把式(2-30)中的 $Q_i$ 换成 $\rho d\tau$ ，同时将求和变成体积分，得

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_{\tau} \rho d\tau \quad (2-31)$$

其中  $\tau$  为闭合面  $s$  所包围的体积。

对于  $s$  面内的电荷呈面分布或线分布的情况，只须将式(2—31)中的体电荷积分相应地换成面电荷或线电荷积分即可，它们与点电荷的情况一样，均可视为式(2—31)的特例。

式(2—31)称作高斯定律的积分形式，它表明，电场空间任意闭合曲面上的电通量恒等于此闭合曲面所包围的总电荷量。为了进一步表明高斯定律的物理意义，也可以将其写成

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_{\text{内}} \quad (2-32)$$

应当明确，虽然闭合曲面上的电通量只与曲面内部的电荷量有关，但闭合面上每一点的  $\bar{D}$  和  $\bar{E}$  却与曲面内外的电荷都相关，它们是空间所有电荷共同产生的。只不过曲面外电荷在闭合曲面各面元上产生的电通量相互抵消，对闭合曲面总电通量的贡献为零。

高斯定律和库仑定律都是对电场与电荷关系的表述。已知电场的空间分布时，可以利用高斯定律积分形式确定某闭合面内的总电量；反过来，当场源电荷的分布具有某种对称性时，也可利用该定律计算电场的分布。

**例 2.5** 电量  $Q_0$  以体电荷形式均匀分布在  $a \leq r \leq b$  的球壳层区域内，求空间任意点的电场强度。

解：由电荷分布的球对称性容易看出，电场强度矢量也具有对称性，即  $\bar{E}$  只有  $\hat{r}$  分量，且在等半径球面  $r = C$  上，各点的电场强度模值相等。将场空间分为  $r \leq a$ 、 $a \leq r \leq b$ 、 $r \geq b$  三个区域，如图2—15所示。

在  $r \geq b$  区域内，以  $O$  点为球心，过任意场点  $P_3(r, \theta, \varphi)$  作球面  $s_3$ ，在此闭合面上应用高斯定律，有

$$\oint_{s_3} \bar{D}_3 \cdot d\bar{s} = Q_0$$

因  $\bar{D}_3$  只有  $\hat{r}$  分量，与球面  $s_3$  上的面元  $d\bar{s} = \hat{r} ds$  方向相同，且球面  $s_3$  上  $D_3$  为常量，因此有

$$\oint_{s_3} \bar{D}_3 \cdot d\bar{s} = \oint_{s_3} D_3 ds = D_3 \oint_{s_3} ds = D_3 4\pi r^2 = Q_0$$

由此可得

$$\bar{D}_3 = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

$$\bar{E}_3 = \frac{\bar{D}_3}{\epsilon_0} = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (r \geq b)$$

在  $a \leq r \leq b$  的区域内，以  $O$  点为球心，过任意场点  $P_2(r, \theta, \varphi)$  作球面  $s_2$ ，在此闭合面上应用高斯定律，有

$$\oint_{s_2} \bar{D}_2 \cdot d\bar{s} = \int_{\tau_2} \rho d\tau = \rho \tau_2 = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)} \cdot \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) = Q_0 \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

利用场的对称性，得

$$\oint_{s_2} \bar{D}_2 \cdot d\bar{s} = D_2 4\pi r^2 = Q_0 \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

因此有

$$\bar{D}_2 = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}$$

$$\bar{E}_2 = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3} = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 (b^3 - a^3)} \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \quad (a \leq r \leq b)$$

在  $r \leq a$  的区域内，以  $O$  点为球心，过任意场点  $P_1(r, \theta, \varphi)$  作球面  $S_1$ ，在此闭合面上应用高斯定律，有

$$\oint_{S_1} \bar{D}_1 \cdot d\bar{s} = 0$$

因此有

$$\bar{D}_1 = 0$$

$$\bar{E}_1 = 0 \quad (r \leq a)$$

上述三个区域内的电场分布可以用图2-15描述，从图中的电场分布曲线可得到如下结论：当场源电荷以均匀体密度分布在球壳层区域 ( $a \leq r \leq b$ ) 内时，壳内无电荷区域 ( $r \leq a$ ) 的电场恒为零，电荷区域 ( $a \leq r \leq b$ ) 的电场分成  $1/r^2$  和  $r$  两部分，壳外无电荷区域的电场与一个放在球心处的等电量点电荷的电场相同。

当  $a \rightarrow 0$  时，电荷区域变成全充填球体，此时的球内电场为

$$\bar{E} = \hat{r} \frac{Q_0}{4\pi b^3} r$$

与球心到场点的距离  $r$  成正比，而球外点的场仍与一个放在球心处的等电量点电荷的电场相同。

当  $a \rightarrow b$  时，电荷域变成球面。此时球面内的电场恒为零，球面外的场与球心处等电量点电荷的电场相同，电场在电荷面两侧产生突变。

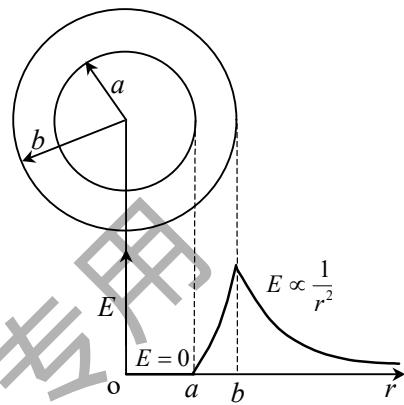


图2-15 均匀带电球壳的电场

例2.6 无限大均匀带电平面上的电荷面密度为  $\rho_s$ ，求任意点的电场强度。

解：取距离带电平面为  $x$  的任意场点  $P$ ，做一个轴线与带电平面垂直的圆柱闭合面，其两个底面对称分布在带电平面两侧，面积为  $\Delta s$ ， $P$  点位于其中的一个底面上，如图2-16 所示。

因为电荷均匀分布在无限大平面上，对于任意场点到带电平面的垂线而言，电荷都是对称分布的，所以场点的电场一定是垂直于带电平面的。在圆柱侧面上的点，电通量密度矢量与柱面面元的法矢垂直，通量  $d\Phi = \bar{D} \cdot d\bar{s} = 0$ ；两底面上的点，电通量密度矢量与柱面面元的法矢平行，通量  $d\Phi = \bar{D} \cdot d\bar{s} = Dds$ ，且底面上的  $D$  值相等。将高斯定律用在圆柱闭合面上，可得

$$\Phi = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = 2 \int_{\Delta s} \bar{D} \cdot d\bar{s} = 2D\Delta s = Q_{\text{内}}$$

圆柱闭合面所包围的电荷是  $Q_{\text{内}} = \rho_s \Delta s$ ，所以有

$$D = \frac{\rho_s}{2}$$

若给定带电平面的法矢为  $\hat{n}$ ，则场点在法矢同侧时，电场矢量与法矢方向相同，场点在法矢异侧时，电场矢量与法矢方向相反，即

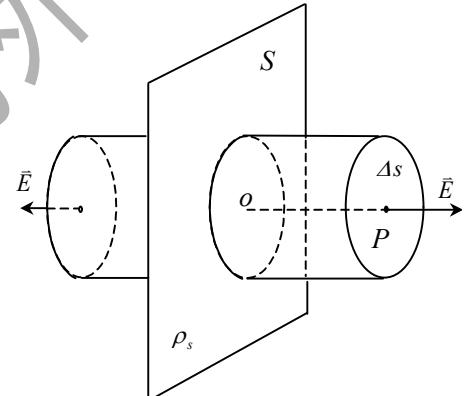


图2-16 无限大电荷平面的电场

$$\bar{D} = \pm \hat{n} \frac{\rho_s}{2}$$

与例2.3的结果相同。

由以上几个例子可以看到，利用高斯定律可以较容易地求解一些特殊电荷分布的电场问题。其方法一般包含三个步骤：首先，根据电荷分布的对称性分析电场的方向和对称性；然后，再将高斯定律应用在过场点的闭合曲面上计算电通量密度数值；最后，写出电场强度的矢量表达式。应用高斯定律求电场的关键技巧是选取合适的闭合曲面（也称为高斯面），以便使积分号内的 $D$ 能以常量的形式从积分号内提出。

对于场源电荷不具对称性的情况，一般不能直接用高斯定律求电场。但应明确，这并不是说高斯定律对这类问题不成立，而只是高斯面上的 $D$ 不能做为常量从积分号内提出，使下面的计算无法进行。对于一些特殊的不对称情况，可以将高斯定律和叠加原理相结合，把不对称的场源电荷分解成若干个对称场源的和，分别应用高斯定律求解后，再对结果进行叠加。

**例2.7** 在半径为 $b$ 、体电荷密度为 $\rho$ 的均匀带电球体内部，有一半径为 $a$ 的不带电偏心球形空腔，两球心的相对位置矢量为 $\vec{c}$  ( $a+c < b$ )，如图2-17所示。求空腔内的电场强度。

解：此问题的场源电荷可以看成两部分电荷的叠加，一部分是以密度 $\rho$ 充满 $r=b$ 的球域内，另一部分以密度 $-\rho$ 分布在 $r=a$ 的空腔区域，两者叠加的结果恰为题中所给的电荷分布。根据电场的叠加原理，总电场应该等于每部分电荷独立产生的电场的矢量和。

应用高斯定律，可求得 $r=b$ 球域电荷在球内点的电场

$$4\pi r_b^2 D_b = \frac{4}{3}\pi r_b^3 \rho$$

$$\bar{D}_b = \hat{r}_b \frac{\rho}{3} r_b = \frac{\rho}{3} \bar{r}_b$$

对 $r=a$ 球域内的电荷，在球内点产生电场为

$$4\pi r_a^2 D_a = -\frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho$$

$$\bar{D}_a = -\hat{r}_a \frac{\rho}{3} r_a = -\frac{\rho}{3} \bar{r}_a$$

腔内任意点的场是上面两部分电场的矢量和，即

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\bar{D}_b + \bar{D}_a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\bar{r}_b - \bar{r}_a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \bar{c}$$

可见，空腔内的电场是一个均匀场。

### 三. 高斯定律的微分形式

高斯定律的积分形式只表明了一个闭合曲面上的总电通量与面内总电荷量之间的联系，要描述空间某一点上电场与该点电荷的一一对应关系，须采用高斯定律的微分形式。

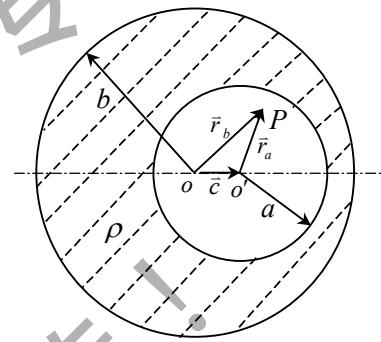


图2-17 偏心空腔带电球的电场

为了导出高斯定律的微分形式，让我们做一个小闭合曲面  $s$  包围所要讨论的场点  $P(x,y,z)$ ，将高斯定律积分形式用到此闭合面上，有

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_{\tau} \rho d\tau \quad (2-33)$$

将闭合面  $s$  向  $P$  点收缩，当  $s$  足够小后，其内部各点的电荷密度近似等于  $P$  点的电荷密度  $\rho$ ， $s$  内的总电量近似为  $\rho \Delta \tau$ ， $\Delta \tau$  是  $s$  所包围的体积。于是上式可写成

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} \approx \rho \Delta \tau$$

两边除以  $\Delta \tau$ ，并令  $\Delta \tau$  趋于零，得到

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s}}{\Delta \tau} = \rho$$

上式的右边是场点  $P$  处的电荷体密度，左边正是矢量  $\bar{D}$  的散度  $\nabla \cdot \bar{D}$ ，即

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2-34)$$

上式称为**高斯定律的微分形式**，反映了空间任意一点的电场与该点电荷密度的一一对应关系。

实际上，式 (2-34) 也可以通过对积分形式 (2-33) 左边应用散度定理直接导出，即

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \bar{D} d\tau = \int_{\tau} \rho d\tau$$

上式对任意区域  $\tau$  都成立，一定有两边的被积函数相等，由此可得式 (2-34)。

习惯上，将散度处处等于零的矢量场称为**无散源场**；散度不恒为零的矢量场称为**散度场**，或称**有散源场**。由高斯定律的微分形式可知，在产生电场的电荷区域内， $\bar{D}$  和  $\bar{E}$  的散度不为零，故静电场是有散源场。

**例2.9** 已知一电场的分布为

$$\bar{E} = \begin{cases} \hat{r}(r^3 + Ar^2) & (r \leq a) \\ \hat{r}(a^5 + Aa^4)/r^2 & (r > a) \end{cases}$$

求对应的电荷分布  $\rho(\bar{r})$ 。

解：在  $r > a$  的区域内

$$\rho(\bar{r}) = \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \epsilon_0 \frac{a^5 + Aa^4}{r^2} \right) = 0$$

在  $r < a$  的区域内

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}) &= \nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \epsilon_0 (r^3 + Ar^2)] \\ &= \epsilon_0 (5r^2 + 4Ar) \end{aligned}$$

## § 2.6 静电场的环路定理

如果将电荷元  $\rho d\tau'$ 、 $\rho_s ds'$ 、 $\rho_l dl'$  和点电荷  $Q$  统一记作  $\Delta Q$ ，则各类电荷元产生的电场可以统一写成

$$d\vec{E} = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{R}$$

将上式再对场点坐标取旋度，并利用恒等式  $\nabla \times \nabla f = 0$ ，可以得到

$$\nabla \times d\vec{E} = -\frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \nabla \frac{1}{R} = 0$$

因总电场是所有电荷元电场的矢量叠加，即

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

可以得到

$$\nabla \times \vec{E} = \sum \nabla \times d\vec{E} = 0 \quad (2-35)$$

上式表明，任何分布电荷所产生的静电场都是无旋场。由无旋场与保守场的等价关系可知，静电场必为保守场，其线积分与路径无关或闭合回路线积分为零，即

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2-36)$$

上式称为静电场环路定理，式(2-35)可视为它的微分形式。静电场环路定理表明了静电场的保守性和无旋性，是静电场的基本定律之一。

由亥姆霍兹定理可以知道，一个矢量场的性质由它的散度和旋度共同决定。因此，高斯定律和环路定理被称作静电场的基本方程。

## §2.7 电位和电位差

静电场的保守性表明它是一种有势场，因此，可以引入它的势函数做为研究电场的辅助工具。根据场论基础中的定义，有势场  $\vec{E}$  与其势函数  $U$  的关系为

$$\vec{E} = -\nabla U \quad (2-37)$$

$U$  称为电位或电势，单位为伏特(V)。当电位函数已知后，可以利用上式得到电场分布；反之，当已知电场  $\vec{E}$  的分布时，任意场点  $P$  的电位可按下式计算

$$U = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_0}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-38)$$

其中， $d\vec{l}$  是从场点  $P$  到参考点  $P_0$  的任意路径  $l$  上的矢量线元， $P_0$  为电位的参考点，由  $\vec{E}$  的保守性可知，参考点的电位为零。

电位的物理意义可以由式(2-38)得到，因为  $\vec{E}$  在数值上等于单位电荷在电场中所受的电场力，所以，空间一点  $P$  的电位值应等于电场力将单位电荷从场点  $P$  移到参考点  $P_0$  所作的功。

按照定义式(2-38)，场点的电位值是与参考点的位置有关的。因此在谈及一个场点的电位值时，必须指出电位的参考点在何处，否则这个电位值将没有明确的意义。但同时我们也必须明确，选取不同的参考点仅使电位函数相差一个常数，只要在一个问题中选定同一个电位参考点，则空间所有点的电位值都增加或减少同一个常数，此时虽然场点电位的绝对值变化了，但空间各点电位之间的相对关系并不改变，不会影响利用电位来分析电场。也就是说，利用式(2-37)所得到的电场强度值并不随电位参考点的不同而变化。

当场源电荷分布在有限区域内时，为了电位表达式的简洁，一般都习惯把参考点  $P_0$  放在

无限远处，这时的电位也可称作**绝对电位**。在此约定下，任意点 $P$ 的电位为

$$U = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-39)$$

此时 $U$ 值的意义为电场力把单位电荷从 $P$ 点移到无限远处所作的功，或者是外力克服电场力把单位电荷从无限远移至 $P$ 点所作的功。

在式(2-39)的约定下，我们可以推导出由场源电荷分布计算电位的公式。

1. 点电荷的电位。当一个场源点电荷 $Q$ 位于 $M'$ 点时，任意场点 $M$ 处的电场强度为

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_M^3} \hat{R}_M$$

其中 $\hat{R}_M$ 是源点 $M'$ 到场点 $M$ 的相对位置矢量。若设 $P$ 点为待求电位的场点， $M'$ 点到 $P$ 点的相对位置矢量为 $\bar{R}$ ，如图2-18所示。将上式代入电位定义式(2-39)，得

$$\begin{aligned} U &= \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^\infty \frac{Q\bar{R}_M \cdot d\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 R_M^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dR_M}{R_M^2} \\ &= \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_\infty} \right) \end{aligned}$$

当 $R_\infty \rightarrow \infty$ 时，上式括号内的第二项趋于零，由此得到 $P$ 点电位

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2-40)$$

式中的 $R$ 是点电荷 $Q$ 所在点到场点 $P$ 的距离。

2. 点电荷电位的叠加。当场源电荷是 $N$ 个点电荷时，由定义式(2-39)和电场的叠加原理，可得

$$U = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \left( \int_R^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right)$$

再利用式(2-40)的结果，有

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i} \quad (2-41)$$

其中 $R_i$ 是第 $i$ 个点电荷 $Q_i$ 到场点 $P$ 点的距离。这表明， $N$ 个点电荷在场点上产生的电位等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电位之代数和。

3. 连续分布电荷的电位。当场源电荷以体密度 $\rho(\vec{r}')$ 、面密度 $\rho_s(\vec{r}')$ 或线密度 $\rho_l(\vec{r}')$ 连续分布在某区域内时，将电荷元 $\rho(\vec{r}')d\tau'$ 、 $\rho_s(\vec{r}')ds'$ 和 $\rho_l(\vec{r}')dl'$ 视为点电荷，按照式(2-41)进行叠加，在这里也就是进行积分，则得到各种电荷分布时的电位表达式

$$\text{电荷体分布: } U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} d\tau' \quad (2-42)$$

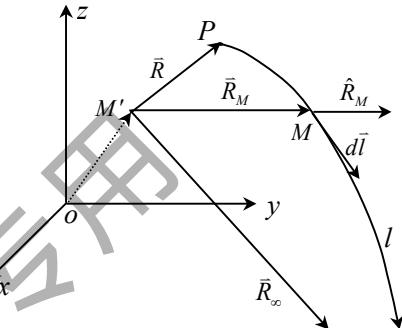


图2-18 点电荷的电位

电荷面分布: 
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{R} ds' \quad (2-43)$$

电荷线分布: 
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l(\vec{r}')}{R} dl' \quad (2-44)$$

各式中的 $R$ 是电荷元到场点的距离, 积分域是电荷存在的区域。

应特别注意, (2-41) ~ (2-44) 各式均是以无穷远点为电位参考点而推出的, 一般它们只适用于场源电荷分布在有限区域内的。如果用来计算电荷延伸至无限远的问题, 三个积分公式可能会出现不收敛的结果。对于此类无限场源问题的处理, 我们将在后面的例题中讨论。

电场中任意两点 $A$ 和 $B$ 的电位之差, 叫做 $A$ 、 $B$ 两点之间的电位差(或电压), 记作 $U_{AB}$ (或记作 $V$ ), 由式(2-38)可得

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l} - \int_B^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (2-45)$$

电位差的单位也是伏特(V)。

根据电位差 $U_{AB}$ 的正负, 可以判断场中 $A$ 、 $B$ 两点电位的高低。并且由上面的定义可知, 电位差的数值等于电场力将单位电荷从 $A$ 点移到 $B$ 点所作的功。由此, 对于点电荷 $Q$ , 从 $A$ 点移到 $B$ 点电场力所作的功可以写成

$$A = QU_{AB} \quad (2-46)$$

对电位和电位差的概念还应明确以下几点:

1. 电位是点函数, 每一个场点有一个对应的电位值, 电位值与参考点的位置选取有关。而电位差则对应着两个点, 对于确定的电场, 无论将电位参考点选在何处, 两场点的电位差都不会改变。因此, 在说电位差时, 不必指出电位参考点的位置。

2. 由于电场与电位函数满足关系式  $\bar{E} = -\nabla U$ , 因此, 空间一点上的电场强度矢量一定与过该点的等电位面垂直, 且指向电位的最速下降方向, 如图2-19所示。

3. 根据前面的讨论已经看到, 电荷在电场中不同点所受到的电场力一般不同, 并且移动电荷时电场作功, 这说明电荷在电场中是具有位能的。仿照物体在重力场中的位能定义, 我们将一个电荷的电量 $Q$ 与该电荷所在点的电位 $U$ 的乘积称作该电荷的电位能或电势能, 记作 $W_Q$ , 由式(2-38)可得到

$$W_Q = QU = Q \int_P^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (2-47)$$

电位能具有能量的单位, 为焦耳(J)。在确定了电位参考点后, 一个电荷电位能的高低与其电量的数值及所在场点的电位值有关: 正电荷在正电位点具有正的电位能, 且 $Q$ 值越大电位能越高; 而负电荷在正电位点具有负电位能,  $Q$ 的绝对值越大其电位能越低。在负电位点时, 情况正好相反。结合电场力公式  $\bar{F} = Q\bar{E}$  可以看出, 在电场力的作用下, 任何电荷都有

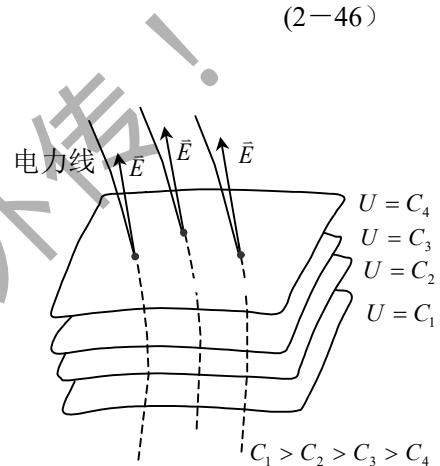


图2-19 电场矢量与等电位面

从高电位能点向低电位能点运动的趋势。

例2.9 求一半径为 $a$ 、总电量为 $Q$ 的均匀电荷球面所产生的电位。

解：设带电球面的球心位于坐标系的原点，并取无穷远为电位参考点。

解法1. 由于场源电荷具有球对称性，利用高斯定律的积分形式可容易地求出空间任意点的电场强度

$$\bar{E}_1 = 0 \quad (r < a)$$

$$\bar{E}_2 = \hat{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

代入式(2-39)，得

$$r > a \text{ 时 } U = \int_P^\infty \bar{E}_2 \cdot d\bar{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r < a \text{ 时 } U = \int_P^\infty \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_P^a \bar{E}_1 \cdot d\bar{l} + \int_a^\infty \bar{E}_2 \cdot d\bar{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

解法2. 电荷球面的电荷面密度为

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

代入电位计算公式(2-44)得

$$U = \int_s \frac{\rho_s ds'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2}{R} \sin\theta d\varphi d\theta$$

由于电位具有球对称性，故可以将任意场点 $P$ 选在 $\theta = 0$ 的极轴上，如图2-20a所示。设 $P$ 点到原点的距离为 $r$ ，则电荷元 $\rho_s ds'$ 到 $P$ 点的距离为

$$R = [r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta]^{1/2}$$

代入上式得

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{16\pi^2\epsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{[r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta]^{1/2}} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 ra} [r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta]^{1/2} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 ra} [(r+a) \pm (r-a)] \end{aligned}$$

上式中， $r > a$ 时取“ $(r-a)$ ”， $r < a$ 时取“ $-(r-a)$ ”，则有

$$U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (r < a)$$

$$U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq a)$$

可见，球壳内的电位恒等于球面电位，而球壳外的电位相当于电荷 $Q$ 集中在球心的点电荷产生的电位，如图2-20b 所示。这一结论以后可以直接引用，并可以推广到电荷以体密度 $\rho = C$  或  $\rho = f(r)$  分布在 $a < r < b$  或 $r < a$  内的情况。

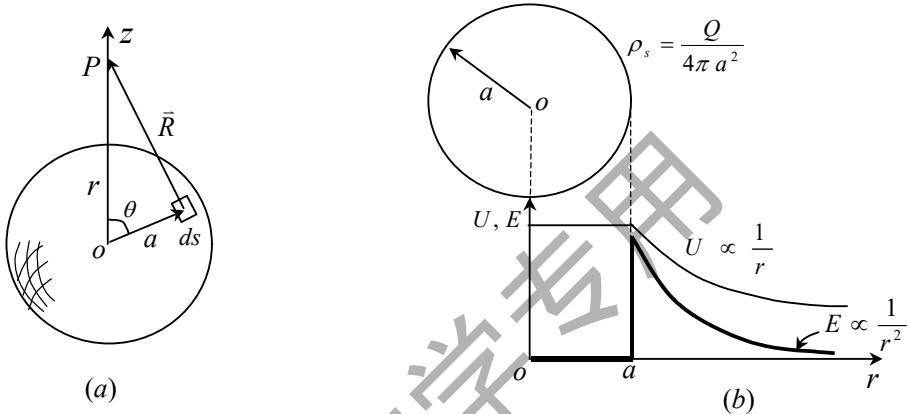


图2-20 球面电荷的电场与电位

从本例题还看到，当电荷以面密度分布时，电荷面两侧的电场强度是不相等的，而两侧的电位却是连续的，如本题

$$\bar{E}_1(r \rightarrow a_-) = 0$$

$$\bar{E}_2(r \rightarrow a_+) = \hat{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$U_1(r \rightarrow a_-) = U_2(r \rightarrow a_+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

这一结论对于面电荷两侧的电场和电位具有普遍意义。

例2.10 真空中一长度为L的线电荷与 $z$  轴重合且电荷沿线均匀分布，电荷密度为 $\rho_l$ 。

求： (a) 此线电荷产生的任意点电位。

(b) 当 $L \rightarrow \infty$ 时，任意点的电位和电场强度。

解： (a) 设线电荷的中点位于坐标系原点，如图2-21 (a) 所示。从电荷的对称性容易看出，电位是圆柱坐标 $r$ 和 $z$ 的函数，场点 $P(r, \varphi, z)$ 的电位由式 (2-44) 计算

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{R} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ (z' - z) + \sqrt{r^2 + (z' - z)^2} \right] \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left(\frac{L}{2} - z\right) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2} - z\right)^2}}{-\left(\frac{L}{2} + z\right) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2} + z\right)^2}} \end{aligned}$$

(b) 当 $L \rightarrow \infty$ 时，由前面的结果可推得

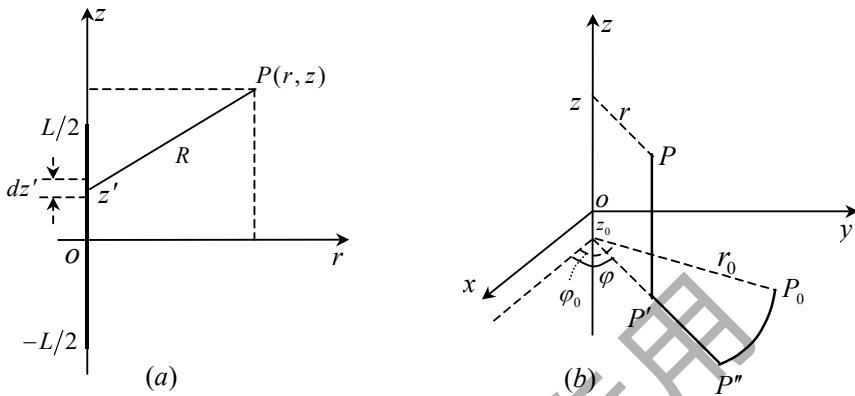


图2-21 线电荷的电位

$$\begin{aligned}
 U &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L}\right)^2}}{-\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{L}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{L}\right)^2}} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L}\right)^2}\right] \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{L}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{L}\right)^2}\right]}{r^2 / L^2} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{r} \rightarrow \infty
 \end{aligned} \tag{2-48}$$

这表明，当场源电荷延伸至无限时，直接应用无限远参考点的电位积分式将出现电位发散的结果。为了得到收敛的电位值，在计算此类问题时，应将参考点选在有限远的某一点上。对于本题，可以采用如下两种方法求解：

解法1. 将无限长线电荷的电场表达式  $\bar{E} = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$  代入式 (2-38)

$$U = \int_P^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

其中  $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$  是任选的有限远电位参考点。上式的积分路径由三段构成， $PP'$  段与线电荷平行， $P'$ 、 $P''$  和  $P_0$  三点同在与线电荷垂直的平面内，线段  $P'P''$  在过  $P'$  点的径向上， $P''P_0$  是半径为  $r_0$  的一段圆弧，如图2-21 (b) 所示。因此有

$$U = \int_P^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_P^{P'} \bar{E} \cdot d\bar{l}_1 + \int_{P'}^{P''} \bar{E} \cdot d\bar{l}_2 + \int_{P''}^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l}_3$$

因长直线电荷的电场只有  $\hat{r}$  分量，在  $PP'$  和  $P''P_0$  两个积分段上，电场矢量与线元  $d\bar{l}_i$  垂直，点积为零，故对上式积分值有贡献的只有  $P'P''$  段，在此段上， $d\bar{l}_2 = \hat{r} dr$ ，所以有

$$\begin{aligned}
 U &= \int_P^{P_0} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{P'}^{P''} \bar{E} \cdot d\bar{l}_2 = \int_r^{r_0} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\
 &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + C
 \end{aligned}$$

解法2. 在空间任选一点  $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$ ，由式(2-48)的结果给出场点  $P(r, \varphi, z)$  和  $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$  的电位，并将两点的电位差做为场点  $P(r, \varphi, z)$  的电位，即

$$\begin{aligned} U = U_{PP_0} &= U_P - U_{P_0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{r} - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{r_0} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 \end{aligned}$$

当  $r=r_0$  时，上式等于零，可见点  $P_0(r_0, \varphi_0, z_0)$  在这里是电位的参考点。

将上面求得的电位表达式代入式(2-37)，可得到无限长线电荷的电场

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla U = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{1}{r} - \ln r_0 \right) \right] \\ &= -\hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln \frac{1}{r} \right) = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

从本例可以看到：

1. 当场源电荷延伸到无限远时，零电位参考点应选在有限远的某一点上。由此得到的电位函数带有一个与参考点坐标有关的常数，但此常数不影响求解电场强度  $\vec{E}$ 。
2. 与电场强度的情况相似，线电荷所在点 ( $r=0$ ) 处的电位值趋于无穷大。因为在求解讨论这些场点时，线电荷的概念已不再适用。

## § 2.8 电位的泊松方程和拉普拉斯方程

在前面几节中，我们已经讨论了已知电荷分布直接计算电场强度和先求电位函数再计算梯度求电场的两类方法。这些方法在计算上并不困难，但前提是必须已知空间的所有电荷分布。由于电荷的分布一般无法直接测量，特别当电场空间内存在导体或介质时，会出现感应电荷或极化电荷，使得已知电荷分布这一前提条件更是难于满足。因此，对于实际应用中的电场问题，一般的求解方法是结合边界条件求解电位函数所满足的微分方程，这称之为解边值问题。在这一节中，我们先推导静电位所满足的微分方程，边值问题的具体解法将在后面的章节中详细介绍。

静电位所满足的微分方程可以由静电场两个基本定律的微分形式导出。将  $\vec{E} = -\nabla U$  代入高斯定律  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho$ ，得

$$\nabla \cdot (-\epsilon_0 \nabla U) = \rho$$

即

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-49)$$

上式称为电位的泊松(Poisson)方程。在正交曲线坐标系中，该方程写成

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-50)$$

在直角坐标系中

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-51)$$

在  $\rho=0$  的无电荷区域内，Poisson方程变为拉普拉斯(Laplace)方程

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2-52)$$

利用矢量分析中的第三格林公式

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] ds'$$

可以得到Poisson方程的积分形式解。令上式中的  $\Phi = U$ , 并注意  $\nabla^2 U = -\rho / \epsilon_0$ , 得

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] ds' \quad (2-53)$$

其中  $\tau$  和  $s$  是待求的区域和其表面,  $\hat{n}$  为  $s$  的外法矢。上式右边的第一项是  $\tau$  内的电荷对场点电位的贡献, 第二项表示边界上的电荷和边界外的电荷对场点电位的贡献, 但它以边界上的电位值和电位导数值来等效。

当所求区域为无界空间时, 式 (2-53) 的面积分项为零, 得到

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho}{R} d\tau' \quad (2-54)$$

这正是前面所给出的 (2-42) 式。

当所求区域内无电荷时, 式 (2-53) 的体积分项为零, 可得到该区域电位的Laplace问题解

$$U = \frac{1}{4\pi} \oint_s \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R} \right) \right] ds' \quad (2-55)$$

从形式上看, 由式 (2-53) 和式 (2-55) 可以得到待求区域的Poisson问题和Laplace问题的电位解。但在实际应用中, 由于边界条件  $U|_s$  和  $\partial U / \partial n|_s$  一般不会同时已知, 所以这两个式子并没有多大的实用价值, 因此称为形式解。Poisson和Laplace边值问题的实用解法有分离变量法、镜像法、保角变换法以及多种数值解法, 将在后面的章节中讨论。但如果问题是二维的, 即电位只是一个坐标变量的函数, 则可以通过简单的直接积分法求解。

例2.11 两个无限大平面  $x=0$  和  $x=a$  之间均匀填充体密度为  $\rho_0$  的电荷, 且已知

$U|_{x=0} = 0$ ,  $U|_{x=a} = V_0$ 。求两平面间任意点的电位和电场。

解: 在所求区域内, 电位函数满足Poisson方程, 且只是坐标  $x$  的函数, 所以有

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

将上式两次对  $x$  积分, 得

$$U = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$$

将边值条件  $U|_{x=0} = 0$ ,  $U|_{x=a} = V_0$  代入上式, 可以确定出两个待定常数

$$C_1 = \frac{a\rho_0}{2\epsilon_0} + \frac{V_0}{a}, \quad C_2 = 0$$

代入前式, 得两平面间的电位分布

$$U = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x^2 + \left( \frac{a\rho_0}{2\epsilon_0} + \frac{V_0}{a} \right) x$$

电场强度为

$$\vec{E} = -\nabla U = -\hat{x} \frac{dU}{dx} = \hat{x} \left( \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x - \frac{a\rho_0}{2\epsilon_0} - \frac{V_0}{a} \right)$$

## § 2.9 电偶极子

**电偶极子**是指一对等值异号点电荷相距一微小距离所构成的电荷系统，它是一种常见的场源电荷存在形式，在后面讨论电介质的电场问题时会用到这种电荷形式。图2-23表示中心位于坐标系原点上的一个电偶极子，它的轴线与z轴重合，两个点电荷 $Q$ 和 $-Q$ 间的距离为 $l$ 。此电偶极子在场点 $P(r, \theta, \varphi)$ 处产生的电位等于两个点电荷在该点的电位之和，即

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2-56)$$

其中 $R_1$ 与 $R_2$ 分别是 $Q$ 和 $-Q$ 到 $P$ 点的距离。

利用余弦定理可以将它们写成 $P$ 点坐标 $(r, \theta, \varphi)$ 的函数

$$R_1 = [r^2 + (l/2)^2 - rl\cos\theta]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (l/2)^2 + rl\cos\theta]^{1/2}$$

一般情况下，我们关心的是电偶极子产生的远区场，即偶极子到场点的距离 $r$ 远远大于偶极子长度 $l$ 的情形，此时上面两式中的 $(l/2)^2$ 远小于另外两项，可得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &\approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \\ \frac{1}{R_2} &\approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

利用二项展开式

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

将上面两式展开，并取前两项近似，得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &\approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{2r} \cos\theta \right) \\ \frac{1}{R_2} &\approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{l}{2r} \cos\theta \right) \end{aligned}$$

代入式(2-56)，得到电偶极子的远区电位表达式

$$U = \frac{Q l \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2-57)$$

可见，电偶极子的远区电位与 $Ql$ 成正比，与 $r^2$ 成反比，并且和场点位置矢量 $\vec{r}$ 与 $z$ 轴的夹角 $\theta$ 有关。

为了便于描述电偶极子，我们引入一个矢量 $\vec{p}$ ，模值为 $p=Ql$ ，方向由 $-Q$ 指向 $Q$ ，称之为电偶极子的**电矩矢量**，简称为**偶极矩**，记作

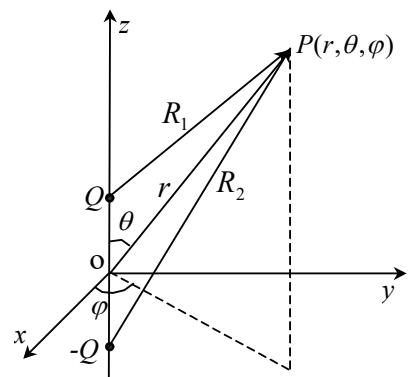


图2-22 电偶极子的电位

$$\bar{p} = p\hat{l} = Ql\hat{l} = Q\bar{l} \quad (2-58)$$

此时，式(2-57)又可以写成

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\bar{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2-59)$$

电偶极子的远区电场强度可由式(2-59)求梯度得到。因电位 $U$ 只是坐标 $r$ 和 $\theta$ 的函数，于是有

$$\bar{E} = -\nabla U = -\left(\hat{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \quad (2-60)$$

从式(2-59)和式(2-60)可以看到，电偶极子的远区电位和电场分别与 $r^2$ 和 $r^3$ 成反比。因此，其位和场随距离 $r$ 的下降速度比单个点电荷更为迅速，这是由于两个点电荷 $Q$ 和 $-Q$ 的作用在远区相互抵消的缘故。

根据式(2-59)，电偶极子的等电位面方程可由

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = C$$

得到，即

$$r^2 = C_1 \cos \theta \quad (2-61)$$

其中常数

$$C_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 C}$$

将电力线微分方程式(2-18)写成球坐标形式，并注意此时电场只有 $E_r$ 和 $E_\theta$ ，有

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

把电场表达式(2-60)代入上式，得

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

$$\ln r = \ln \sin^2 \theta + \ln C_2$$

两边积分，得

$$\text{所以 } r = C_2 \sin^2 \theta \quad (2-62)$$

上式即是电偶极子远区场电力线方程。

图2-23绘出了电偶极子所在 $\varphi = \varphi_0$ 平面内， $C_1$ 和 $C_2$ 取一系列值所对应的等电位线和电力线。

前面讨论的是电偶极子的中点位于坐标系原点且偶极矩方向为 $\hat{z}$ 的情况。对中点不在原点和偶极矩非 $\hat{z}$ 方向的一般情形，通过与前面类似的推导，可以得到远区电位

$$U = \frac{\bar{p} \cdot \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1-63)$$

其中， $\bar{R}$ 是电偶极子中心指向场点 $P$ 的相对位置矢量，偶极矩 $\bar{p} = Q\bar{l}$ ， $\bar{l}$ 的方向依然规

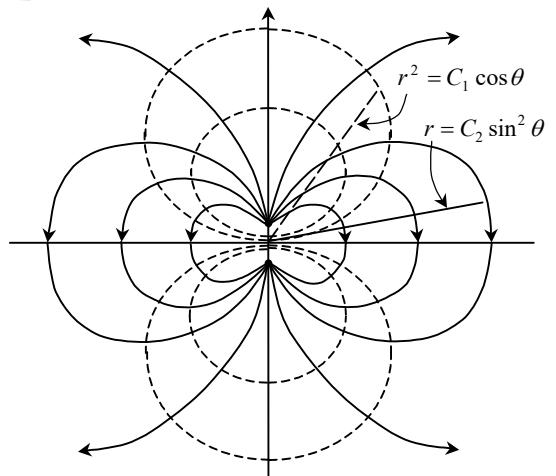


图2-23 偶极子的电场和电位

定为从 $-Q$ 指向 $Q$ 。

将上式代入 $\bar{E} = -\nabla U$ ，经推导可得此时的远区电场

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\bar{p} \cdot \bar{R})}{R^5} \bar{R} - \frac{\bar{p}}{R^3} \right] \quad (1-64)$$

前面讨论了电偶极子自身所产生的远区电位和电场，下面再看一看把一个电偶极子放入其它电荷系统产生的外电场 $\bar{E}$ 中的情况。在实际应用的许多情况下，电偶极子的长度 $l$ 远小于外电场的空间变化幅度，因此可将电偶极子所在的区域近似为一个均匀外电场区域。此时，偶极子的 $\pm Q$ 同时受外电场的电场力作用， $-Q$ 电荷受到一个逆外场方向的力 $\bar{F}_- = -Q\bar{E}$ ， $+Q$ 电荷受到一个顺外场方向的力 $\bar{F}_+ = Q\bar{E}$ ，两者大小相等，方向相反，如图2-24所示。如果电偶极子是一个刚性体，则偶极子重心所受的合力为零，不会产生平行移动。但由于 $\bar{F}_+$ 与 $\bar{F}_-$ 这两个力的作用线不重合，将使偶极子绕其中心产生旋转。由力学原理可知，转矩矢量的模值等于力、力臂以及两者夹角正弦的乘积，即

$$T = 2F_+ \sin \theta \frac{l}{2} = QE \sin \theta l = p \sin \theta E$$

转矩矢量的方向由右手螺旋定则确定，在这里也就是 $\bar{p} \times \bar{E}$ 的方向。因此，电偶极子所受转矩的矢量表达式为

$$\bar{T} = \bar{p} \times \bar{E} \quad (2-65)$$

上述分析表明：处于均匀外电场中的电偶极子所受到的平移合力为零，但受到一个使其旋转的转矩作用，其转动趋势是力图使偶极矩 $\bar{p}$ 与外场方向一致。

例2.12 在均匀外电场 $\bar{E}_0 = \hat{z}E_0$ 中，放置一个中心在坐标原点，偶极矩为 $\bar{p} = \hat{z}Ql$ 的电偶极子，试求零电位面的曲面方程和此面上的电场强度。

解：空间的总电位是均匀外电场 $\bar{E}_0$ 所对应的电位与电偶极子产生的电位之和。因外电场 $\bar{E}_0$ 是 $\hat{z}$ 方向的均匀场，故可设 $xy$ 平面为它的零电位参考面，这与本题所给电偶极子所产生的零电位面是吻合的。此时 $\bar{E}_0$ 所对应的电位为

$$U_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$

将电偶极子的电位式(1-60)与上式相加，得到空间总电位

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos \theta \quad (a)$$

令上式中 $\theta = \pi/2$ ，即得到本题的一个零电位面—— $xy$ 平面，方程可以记作

$$\theta = \pi/2 \quad \text{或} \quad z = 0 \quad (b)$$

除此之外，令上式右边等于零，可得到本题另一个零电位面的方程

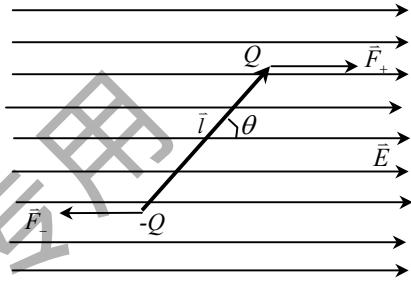


图2-24 偶极子所受的转矩

$$r = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3} \quad (c)$$

这是一个以坐标原点为球心、 $(p/4\pi\epsilon_0 E_0)^{1/3}$  为半径的球面。

对(a)式求梯度，得任意点的电场强度

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla U = -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r\cos\theta\right) \\ &= \hat{r}\left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \cos\theta\right) + \hat{\theta}\left(\frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \sin\theta\right) \end{aligned} \quad (d)$$

令上式中  $\theta = \pi/2$ ，得零电位xy平面上的电场强度

$$\bar{E}_1 = \hat{\theta}\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0\right) = -\hat{z}\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0\right)$$

将(c)式代入(d)式，得到零电位球面上的电场强度

$$\bar{E}_2 = \hat{r}3E_0\cos\theta$$

## § 2.10 电介质中的静电场

### 一. 电介质的极化

电介质也就是我们通常所说的绝缘物质，如木材、橡胶、塑料、石油和空气等。电介质物质的原子核对核外电子有很强的束缚力，因而理想的电介质不导电。但当把一块电介质放入电场中时，它也要受到电场的作用，其分子或原子内的正负电荷将在电场力的作用下产生微小的弹性位移或偏转，形成了一个个小电偶极子，这种现象称之为**电介质的极化**。被极化的电介质内部存在着大量的小电偶极子，所以它们所产生的场也要反过来影响原来的电场。例如在两块带有异号电荷的导体板间插入电介质片，就可以用静电计测量出两极板上电压的变化，说明电介质片使两极板间的电场发生变化。

从电介质的微观电结构分析，电介质的极化主要有四种形式：

第一种是**电子极化**。该类极化来源于电场对原子所带正负电荷的库仑力作用，使电子云的负电荷中心相对原子核的正电荷中心产生一个小位移，形成了原子量级的电偶极子，其偶极矩沿外电场的方向取向，如图2—25所示。所有的电介质都由原子组成，因此在外电场作用下，所有的电介质都产生电子极化。

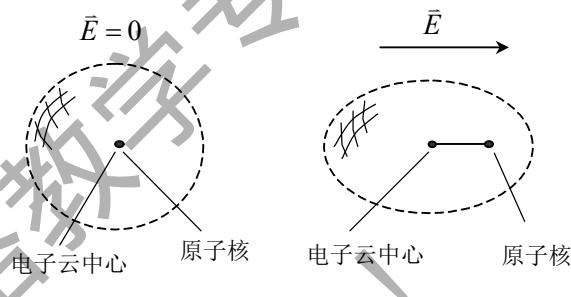


图2—25 电子极化

第二种称为**离子极化**。对于由不同元素所组成的化合物分子，各原子间靠离子键结合，一种元素的原子把它的价电子给了另一元素的原子。这种化合物又可分为两种类型：一类是无外电场时，分子的正负电荷中心重合，分子本身不显电性，如甲烷、二氧化碳等，这类分子称为**非极性分子**；另一类是无外电场时，分子的正负电荷中心不重合，有一个固有的分子电偶极矩，如水、食盐、一氧化碳等，这类分子称为**极性分子**。

不论非极性分子还是极性分子的电介质，当被放入电场中后，它们的正负离子都将在电场力的作用下在其平衡位置上沿外场方向分离。非极性分子的正负电荷中心被拉开产生分子电偶极矩，而极性分子的固有电偶极矩沿外场方向的分量会进一步加大。这种极化称为**离子极化**。

第三种称**取向极化**。对于绝大部分的极性分子电介质，虽然每个分子都有一个固有电偶极矩，但在无外电场作用时，由于分子的热运动，使分子固有电偶极矩  $\vec{p}$  随机分布，产生的电场效应相互抵消，此时电介质并不显示宏观电性。但当有了外电场时，各分子的固有电偶极矩受转矩作用趋向外场方向，电偶极矩的统计平均值不再为零，因而产生了宏观的电场效应。这种极化称为**取向极化**或**转向极化**。

第四种极化是**空间电荷极化**。在实际的电介质材料中，由于微观结构上的缺陷、杂质或分层，可能会在外电场的作用下使电荷在电介质中分布不均匀，形成电偶极矩，这种极化称为空间电荷极化。

对于理想的电介质，单原子分子的电介质只存在电子极化，如He、Ne等惰性气体；化合物介质都存在电子极化和离子极化；有极分子的电介质会同时存在电子、离子和取向三种形式的极化。对非纯净的实用电介质材料，还可能存在空间电荷极化。虽然上述几种极化的机理不同，但其最终结果都是使电介质内部出现了大量的、趋于外电场方向的小电偶

极子，分子电偶极矩的平均值不再为零。为了描述电介质内各点极化程度的强弱，我们引入极化强度  $\bar{P}$  这个物理量。假设在电介质中，某点  $(x', y', z')$  处体积元  $\Delta\tau$  内的分子电偶极矩矢量和用  $\Sigma \bar{p}$  表示，则该点的极化强度矢量定义为

$$\bar{P}(x', y', z') = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum \bar{p}}{\Delta\tau} \quad (2-66)$$

极化强度  $\bar{P}$  的单位是库仑/米<sup>2</sup>(C/m<sup>2</sup>)，物理意义为电介质某点上单位体积中的电偶极矩的矢量和。

当一块电介质受到电场作用被极化后，从电性能角度看，它变为真空中的一个电偶极子群。因此，这块极化电介质所产生的附加电场就可以通过真空中的这群电偶极子求得。图2-26表示一块体积为  $\tau'$  的极化电介质，它的极化情况用极化强度  $\bar{P}$  表示，一般情况下  $\bar{P}$  是坐标的函数。下面计算该极化电介质在空间一点  $P(x, y, z)$  处产生的附加电位。

电介质内部  $O(x', y', z')$  点处，体积元  $d\tau'$  内的电偶极子群可以看成是电偶极矩为  $\bar{p} = \bar{P}d\tau'$  的一个基本电偶极子，由式(2-59)可以写出此基本电偶极子产生的电位

$$dU = \frac{\bar{p} \cdot \bar{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \frac{\bar{R}}{R^3} d\tau'$$

将矢量关系式  $\nabla'(\frac{1}{R}) = \frac{\bar{R}}{R^3}$  代入上式，得

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \nabla'(\frac{1}{R}) d\tau'$$

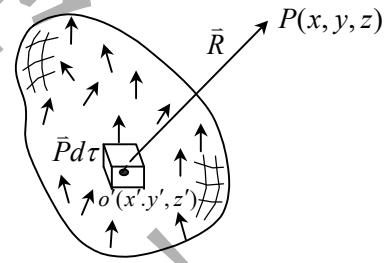


图2-26 极化电介质的电位

整块极化电介质产生的电位是上式的体积分

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} [\bar{P} \cdot \nabla'(\frac{1}{R})] d\tau' \quad (2-67)$$

利用矢量恒等式可得到

$$\bar{P} \cdot \nabla'(\frac{1}{R}) = \nabla' \cdot (\frac{\bar{P}}{R}) - \frac{\nabla' \cdot \bar{P}}{R}$$

代入式(2-67)，得

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \nabla' \cdot (\frac{\bar{P}}{R}) d\tau' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \cdot \bar{P}}{R} d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s'} \frac{\bar{P} \cdot \hat{n}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{-\nabla' \cdot \bar{P}}{R} d\tau' \end{aligned} \quad (2-68)$$

上面最后等式的第一项是运用了散度定理的结果，其中  $s'$  为体积  $\tau'$  的表面积， $\hat{n}$  是面元  $ds'$  的外法矢。

式(2-68)给出了一块极化电介质所产生的附加电位。从形式上看，上式右边第一项与表面分布电荷产生电位的表达式(2-43)相同，而第二项与体分布电荷产生电位的表达式(2-42)相同。因此，该附加电位可以看作是等效体分布电荷与等效面分布电荷在真空中共同产生的。等效分布电荷由极化强度确定

$$\rho_p = -\nabla' \cdot \bar{P} \quad (2-69)$$

$$\rho_{ps} = \hat{n} \cdot \bar{P} \quad (2-70)$$

$\rho_p$  和  $\rho_{ps}$  分别称为极化电荷体密度和极化电荷面密度，或叫作束缚电荷体密度和束缚电荷面密度，单位分别是  $C/m^3$  和  $C/m^2$ 。应当明确， $\rho_p$  和  $\rho_{ps}$  只是对电介质极化场效应的一种等效，它们与前面所介绍的分布电荷（常称为自由电荷） $\rho$  和  $\rho_s$  有本质的区别。电介质中某点上有  $\rho_p \neq 0$ ，并不说明该点一定有宏观净电荷存在，而只是表明该处分子电偶极矩对外界点的场位贡献与存在自由电荷  $\rho$  时的作用相同。

## 二. 电介质中静电场的基本定律

在前面的小节中，我们导出了根据极化强度  $\bar{P}$  求解极化电介质附加电位的计算式(2-68)。但由于  $\bar{P}$  是与电介质中的实际电场强度  $\bar{E}$  相联系的，当电场强度为未知的待求量时，极化强度亦不会是已知量。因此，式(2-68)对求解实际问题并没有直接的使用价值，它的主要意义在于表明了极化电介质对电场的附加作用可以由真空中的两种等效电荷求解，并且这两种等效电荷在激励电场方面与真空中的分布电荷遵循相同的规律。在讨论有电介质存在的静电场时，可以将所有的自由电荷和极化电荷作为产生场的共同源，使场空间变为一个真空空间，从而把介质场问题转化为两类电荷源激励下的真空场问题，从中得到电介质内静电场的基本规律。

对于分布电荷产生的真空场，高斯定律的积分形式可以写成

$$\oint_s \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = Q \quad (2-71)$$

其中  $Q$  是  $s$  面内包围的总电荷。按照前面的讨论，电介质空间内的高斯定律应以如下形式表达

$$\oint_s \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = Q + Q_p \quad (2-72)$$

其中的  $\bar{E}$  代表空间内的实际电场，即外源场与极化电荷附加场之和， $Q$  和  $Q_p$  分别是  $s$  面所包围的分布电荷与极化电荷，式中的  $\epsilon_0$  则表示了实际场  $\bar{E}$  是两种电荷源在真空中的激励结果。

如果闭合面  $s$  完全落在一种电介质内，则其包围的区域内只存在体分布自由电荷与体分布极化电荷，式(2-72)可以写成

$$\oint_s \epsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_v (\rho + \rho_p) d\tau$$

对上式左边应用散度定理，并考虑到  $\tau$  是任取的区域，可得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E}) = \rho + \rho_p$$

将  $\rho_p$  表达式(2-69)代入上式，并注意此时的  $\nabla$  和  $\nabla'$  是对同一点坐标运算而相同，可得到

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho \quad (2-73)$$

令

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (2-74)$$

$\bar{D}$  称为电介质中的电通量密度，也叫做电位移矢量，单位是库仑/米<sup>2</sup>(C/m<sup>2</sup>)。

将式(2-74)代入式(2-73)，得

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2-75)$$

上式称为电介质中高斯定律的微分形式，它的形式与真空场的对应方程(2-34)式完全相同，

$\rho$  仍然是场点处的分布电荷密度，介质的极化效应已被包含在  $\bar{D}$  中。

式(2-74)表达了  $\bar{D}$ 、 $\bar{E}$  和  $\bar{P}$  之间的关系，在弱电场时，各向同性电介质中的  $\bar{P}$  与  $\bar{E}$  成正比，记作

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (2-76)$$

无量纲数  $\chi_e$  称为电极化率[读作Kai]，与电介质类型和坐标位置有关。将式(2-76)代入式(2-74)，得

$$\bar{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} = \epsilon \bar{E} \quad (2-77)$$

其中

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2-78)$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2-79)$$

$\epsilon$  称为电介质的电容率， $\epsilon_r$  称为相对电容率，有时也分别叫做介电常数和相对介电常数。 $\epsilon$  是表征电介质极化性质的物理量，它是材料的一个重要电参量。在相同电场强度下， $\epsilon$  越大说明材料中单位体积的电矩越大，因而电通量密度也越大。对于真空，因  $\bar{P} = 0$ ，所以有  $\chi_e = 0$  和  $\epsilon_r = 1$ ， $\epsilon = \epsilon_0$ 。 $\epsilon_r$  一般是位置坐标的函数，若  $\epsilon_r$  是与坐标无关的常量，则称此电介质为均匀电介质；否则，称为非均匀电介质。 $\epsilon_r$  值一般通过测量得到，表2-1列出了几种电介质材料的  $\epsilon_r$  测量值。

表2-1 常见电介质材料的相对电容率

材 料	$\epsilon_r$	材 料	$\epsilon_r$	材 料	$\epsilon_r$
空 气	1.0006	水	81	聚 乙 烯	2.3
胶 木	5.0	玻 璃	4~6	聚四氟乙烯	2.1
橡 胶	2.3~4.0	干 土 壤	3~4	聚苯乙烯	2.6

式(2-76)所给  $\bar{D}$  与  $\bar{E}$  的正比关系仅是在弱电场下对常见电介质而言，还有一些电介质的  $\bar{D}$  与  $\bar{E}$  不成正比关系，称为非线性电介质。此外，某些电介质的极化情况与外电场的方向有关， $\bar{D}$  与  $\bar{E}$  不同方向，这类介质称为各向异性电介质。本书只讨论各向同性的线性电介质。

对式(2-75)做任意体积分，再对左边应用散度定理，得

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_v \rho d\tau \quad (2-80)$$

上式称为电介质中高斯定律的积分形式，与式(2-75)的微分形式共同组成了电介质中静电场的第一基本定律。

因为电介质的实际电场可视为分布电荷与极化电荷在真空中共同激励的结果，而由前面的讨论已知，静电荷在真空中产生的电场是保守场，所以电介质中的静电场也必定是保守场。因此有

$$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad (2-81)$$

和

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad (\text{或 } \bar{E} = -\nabla U) \quad (2-82)$$

以上两式分别称为电介质中静电场第二基本定律的积分形式和微分形式。

在电介质的两组基本定律(或称基本方程)中，微分形式只能用在电场和介质参数  $\epsilon$  连续的点上，而积分形式则可以用在包括介质分界面在内的任意区域。这两组基本方程与真空中的基本方程有完全相同的形式，基本场量的区别仅在于  $\bar{D}$  与  $\bar{E}$  是通过  $\epsilon$  联系，而真空

中是  $\epsilon_0$ ，可以认为电介质的极化效应已被包含在  $\epsilon$  之中了。因此，只要将真空中所有静电场公式中的  $\epsilon_0$  换成  $\epsilon$ ，就可以用来求解均匀无限电介质内的静电场问题，公式中所出现的电荷仍然仅为分布电荷。例如，可以像真空中一样引入电位函数

$$\vec{E} = -\nabla U$$

和

$$U = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

并用同样的方法可以推出，均匀电介质中的电位在有分布电荷和无分布电荷区域仍分别满足泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2-83)$$

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2-84)$$

$\tau'$  内的分布体电荷  $\rho$  在均匀无限电介质空间产生的电位和电场依然为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau'} \frac{\rho}{R} d\tau' \quad (2-85)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau'} \frac{\rho \vec{R}}{R^3} d\tau' \quad (2-86)$$

但应注意，上述真空场公式的直接引用一般只适用于无限均匀电介质的情况。对于分区均匀介质和非均匀介质的问题，除了两组基本方程依然与真空场基本方程有相同形式外，其余的导出公式可能不再相同。例如，由电介质的基本方程可以证明，在非均匀介质中，电位函数的泊松方程及拉普拉斯方程不再成立；而对于分区均匀介质的情况，虽然在每一个介质均匀的区域内，式(2-83)或式(2-84)这两个微分方程成立，但由于是有边界的问题，所以电位和电场的解不能用公式(2-85)和(2-86)表示，此时一般要求解边值问题。

对于非均匀和分区均匀电介质的几种特殊情况，也可以采用如下的简单求解方法：

1. 当场源电荷与电介质参数的分布都具有对称性时，可以利用高斯定律的积分形式求解，方法和要求与真空时的情况相同。例如，在分层电介质球或无限长分层电介质圆柱中，场源电荷与电容率都是常量或只是坐标  $r$  的函数的情况。

例2.13 一无限长圆柱同轴线的内、外导体半径分别为  $a$  和  $b$ ，内外导体之间填充两种均匀电介质材料， $a < r < r_0$  区域的电容率为  $\epsilon_1$ ， $r_0 < r < b$  区域的电容率为  $\epsilon_2$ ，如图2-27所示。当内外导体表面上单位长度所带的电荷是  $\rho_l$  和  $-\rho_l$  时，试求此同轴线内外导体间电压和两介质分界面  $r = r_0$  处的极化电荷面密度。

解：由场源电荷及介质的对称性可以看出，内外导体之间的电通量密度  $\bar{D}$  只有  $\hat{r}$  分量，并且  $D$  值具有轴对称性。过任意场点  $P(r)$ ，作一半径为  $r$ ，长为  $L$  的闭合圆柱面，将高斯定律应用到此闭合面上，可得到

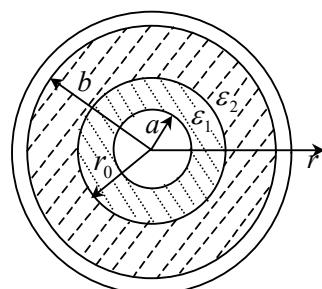


图2-27 填充两种电介质的同轴线

$$D = \frac{\rho_l}{2\pi r}$$

根据式(2-77)的关系, 可以得到两种电介质中的电场强度

$$\vec{E}_1 = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_1 r} \quad (a < r < r_0)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_2 r} \quad (r_0 < r < b)$$

内外导体之间的电压为

$$U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{r_0} E_1 dr + \int_{r_0}^b E_2 dr = \frac{\rho_l}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_0}{a} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{b}{r_0} \right)$$

由  $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} = [\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}] \cdot \hat{n}$  可得:

在  $r = r_0$  分界面内侧的介质1表面上,  $\hat{n} = \hat{r}$ , 极化电荷面密度为

$$\rho_{ps1} = [\epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)E_1 \hat{r}] \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \frac{\rho_l}{2\pi r_0}$$

在  $r = r_0$  分界面外侧的介质2表面上,  $\hat{n} = -\hat{r}$ , 极化电荷面密度为

$$\rho_{ps2} = [\epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)E_2 \hat{r}] \cdot (-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \frac{\rho_l}{2\pi r_0}$$

分界面上的总极化电荷面密度为以上两者的代数和, 即

$$\begin{aligned} \rho_{ps} &= \rho_{ps1} + \rho_{ps2} = \frac{\rho_l}{2\pi r_0} \left[ \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \right] \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi r_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right] \end{aligned}$$

2. 如果已知空间所有的电荷分布, 包括各种分布电荷与极化电荷, 则可以利用无限空间真空中场的公式计算任意点的电场和电位, 例如

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau_\infty} \frac{\rho_\Sigma \vec{R}}{R^3} d\tau \quad (2-87)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau_\infty} \frac{\rho_\Sigma}{R} d\tau \quad (2-88)$$

式中的  $\rho_\Sigma$  表示包括极化电荷在内的所有电荷, 而  $\epsilon_0$  则表明, 有电介质存在时的任意点电场, 实质上是分布电荷与极化电荷这两类电荷在真空中产生的电场之和。

3. 当均匀电介质充满无限空间或以闭合导体面为边界, 中间存在着若干个导体, 若分布电荷仅以面密度的形式带在各导体的表面上, 则电介质内任意点的电场和电位可以按无限电介质空间的公式计算, 即

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{s_i} \frac{\rho_{s_i} \vec{R}_i}{R_i^3} ds_i \quad (2-89)$$

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s_i} \frac{\rho_{s_i}}{R_i} ds_i \quad (2-90)$$

这种情况的根据将通过以后的例题加以证明。

例2.14 推导电介质内一点上极化电荷体密度  $\rho_p$  与分布电荷体密度  $\rho$  的关系，并讨论之。

解： 将  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$  代入高斯定律的微分形式，得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho$$

整理得

$$-\nabla \cdot \bar{P} = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon_0 \bar{E}}{\epsilon_r} \right) - \rho$$

根据  $\rho_p = -\nabla \cdot \bar{P}$ ， $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$  和  $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ ，可得

$$\rho_p = -\nabla \cdot \bar{P} = \nabla \cdot \left( \frac{\bar{D}}{\epsilon_r} \right) - \rho = \frac{\nabla \cdot \bar{D}}{\epsilon_r} + \nabla \left( \frac{1}{\epsilon_r} \right) \cdot \bar{D} - \rho = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \rho + \nabla \left( \frac{1}{\epsilon_r} \right) \cdot \bar{D} \quad (2-91)$$

对于均匀电介质， $\epsilon_r$  是常数，故结果的第二项为零，得

$$\rho_p = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \rho = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho \quad (2-92)$$

上面结果表明，均匀电介质中的极化体电荷总是与分布体电荷共存的，并且由于一般有  $\epsilon_r > 1$ ，所以一点上的极化体电荷密度总是与该点的分布体电荷密度符号相反。但对于非均匀电介质， $\epsilon_r$  是坐标的函数， $\nabla(1/\epsilon_r)$  可以不等于零，因此在没有分布电荷的点上，仍然可能存在极化电荷。

### 三. 电介质分界面上的边界条件

实际中所遇到的静电场问题很多都属于分区介质的情况。在两种电介质的分界面上，电容率的不连续使界面上出现极化面电荷，从而导致了界面两侧电场强度的突变。分界面两侧的场量关系可以由基本方程的积分形式导出，这些关系称为分界面的**边界条件**。边界条件与场的基本方程相当，是基本方程在界面上的表述形式。对于求解分区介质问题，边界条件是必不可少的。

图2-28表示电容率为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的两种电介质的分界面，规定界面的法线单位矢量  $\hat{n}$  是由2区指向1区。假设分界面两侧的电通量密度分别为  $\bar{D}_1$  和  $\bar{D}_2$ 。作一扁平圆柱状小闭合面，圆柱的上底面和下底面分别位于分界面的两侧并且与分界面平行。设上、下底面的面积均为  $\Delta s$ ，闭合面所包围的电荷为  $\Delta Q$ 。将高斯定律积分形式应用在此闭合面上，然后令圆柱的高度趋于零。对有限值的电通量密度，从圆柱侧面通过的电通量随圆柱高度趋于零而为零，上、下底面的场点趋于分界面两侧，于是得到

$$\bar{D}_1 \cdot \hat{n} \Delta s - \bar{D}_2 \cdot \hat{n} \Delta s = \Delta Q$$

当圆柱体的高度趋于零时，闭合面内所包围的体分布电荷亦随之趋于零，而只可能包含分界面上的面分布电荷  $\rho_s$ 。将  $\Delta Q = \rho_s \Delta s$  代入上式，得

$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \quad (2-93a)$$

或写成

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (2-93b)$$

上式称为两种电介质分界面上电通量密度法向分量的边界条件，它说明了电通量密度法向分量在分界面上的不连续量等于界面上的分布电荷面密度。如果界面上没有自由面电荷，则式(2-93b)变为

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (2-94)$$

此时电通量密度的法向分量在界面上是连续的。根据  $D_n = \epsilon E_n$  和  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ，由上式可得到

$$E_{1n} \neq E_{2n}$$

电场强度法向分量的不连续是由界面上的极化面电荷引起的。

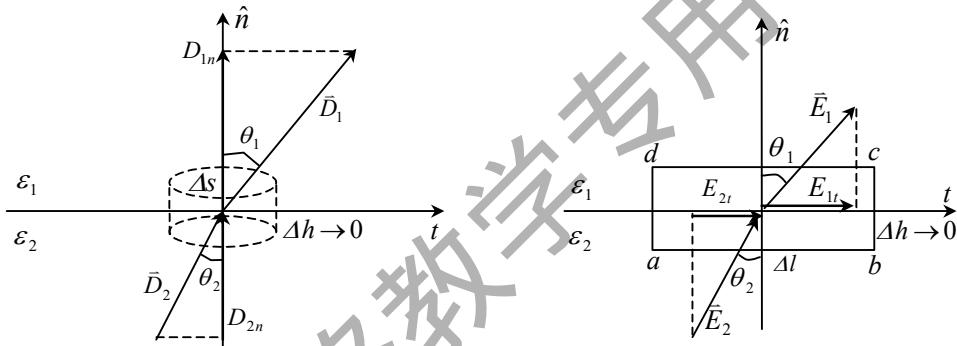


图2-28  $\bar{D}$  的法向边界条件

图2-29  $\bar{E}$  的切向边界条件

运用静电场的第二基本方程，可以推导出分界面的另外一个边界条件。在分界面的任意截面中作一狭长的矩形回路abcd，它的ab边和cd边分别在分界面两侧且与分界面平行，如图2-29所示。设ab=cd=Δl，分界面两侧的电场强度为 $\bar{E}_1$ 和 $\bar{E}_2$ 。将静电场环路定理(2-81)式应用在此回路上，然后令回路的窄边bc和da趋于零。对有限值的电场强度，窄边上的积分随边长趋于零而等于零，长边上的场点趋于分界面的两侧，于是得到

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

由此可得

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (2-95a)$$

或写成

$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (2-95b)$$

上式称为两种电介质分界面上电场强度切向分量的边界条件，它说明电场强度的切向分量在分界面上是连续的。

由上面的切、法向边界条件可知，电场强度矢量在通过介质分界面时一般要发生变化。若界面上不存在面分布电荷，则电场强度的方向变化决定于两侧介质的电容率。假设 $\bar{E}_1$ 和 $\bar{E}_2$ 与分界面法矢 $\hat{n}$ 的交角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ，如图2-29所示，式(2-94)和式(2-95a)可以写成

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

以上两式相除，并将 $\bar{D}_1 = \epsilon_1 \bar{E}_1$ 和 $\bar{D}_2 = \epsilon_2 \bar{E}_2$ 代入，得到

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2-96)$$

可见，只要  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ，则界面两侧的电场必然不同。

分界面上的边界条件也可以用电位关系表达，将  $D_n = \epsilon E_n = -\epsilon(\partial U / \partial n)$  代入式 (2-93)，得

$$-\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} + \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} = \rho_s \quad (2-97)$$

当  $\rho_s = 0$  时，上式变成

$$\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad (2-98)$$

以上两式是用电位法向导数表达的边界条件。此外，因分界面两侧的电场值是有限的，当两侧场点间的距离趋于零时，其电位差亦应趋于零，由此可得到用两侧电位值表达的另一边界条件

$$U_1 = U_2 \quad (2-99)$$

例2.15 已知相对电容率为  $\epsilon_{r1} = 2$  和  $\epsilon_{r2} = 4$  的两种电介质以xy平面为分界面，分界面上带有  $\rho_s = 3|\epsilon_0|$  C/m<sup>2</sup> 的面电荷。已知第1种电介质中的电场为  $\vec{E}_1 = 3\hat{y} + 6\hat{z}$  (V/m)，求第2种电介质中电场强度。

解： 在本题中，分界面的法矢为  $\hat{n} = \hat{z}$ ，所以有

$$E_{1x} = E_{1y} = 3$$
$$D_{1n} = D_{1z} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{1z} = 12|\epsilon_0|$$

根据边界条件得

$$E_{2y} = E_{1y} = 3$$

$$D_{2z} = D_{1z} - \rho_s = 9|\epsilon_0|$$

$$E_{2z} = \frac{D_{2z}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{9}{4}$$

2区的电场强度矢量为

$$\vec{E}_2 = \hat{y}E_{2y} + \hat{z}E_{2z} = 3\hat{y} + \frac{9}{4}\hat{z} \quad (\text{V/m})$$

## § 2.11 静电场中的导体

### 一. 导体的静电平衡和边界条件

导体是指内部含有大量能自由运动的电荷(如金属中的自由电子和导电液体中的正、负离子等)的一类物质。导体在静电场中的一个重要特征是其内部的电场恒等于零，即

$$\vec{E}_{in} \equiv 0 \quad (2-100)$$

因为若导体内有电场，其内部自由电荷就会在电场力的作用下发生宏观定向运动而形成电流。在静电场中，处于稳定状态的导体内部是不存在电流的，这表明导体内没有电场，我们称此时导体处于静电平衡状态。

应该明确，导体被放入外电场的初始时刻，其内部是存在电场的。在此电场力的作用下，导体内的正电荷沿电场或负电荷逆电场向表面运动，这些分离电荷所产生的电场与原来外

场的方向相反，使导体内的总电场受到削弱，这个过程一直进行到导体内的总电场变成零为止。此时，导体内的电荷运动亦随之停止，达到静电平衡状态。对于金属类的良好导体，静电平衡状态一般是在极短时间内完成的。以铜为例，电场降低到原值 $1/e$ 的时间（称作弛豫时间）大约只需 $10^{-19}$ 秒。

外电场使导体内部电荷趋于表面的现象称为静电感应。静电感应能使原来不带电的导体的一部分表面带有过剩的正电荷，而另一部分表面带有等值的负电荷，这些表面电荷称为感应电荷。感应电荷属于自由电荷，或者说是一种分布电荷，它与电介质中受束缚的极化电荷是不同的。

静电平衡下的导体内部一定没有净电荷，即

$$\rho_{in} = 0 \quad (2-101)$$

因为，若导体内部有净电荷，则电荷周围就一定有电场，这与导体内部电场恒为零的结论相矛盾。因此在静电场中，导体所带的电荷只能分布在表面上。导体的表面电荷（包括感应电荷和充电电荷）在导体外部产生电场，这个电场与外部源所产生的电场之和构成了导体外的总电场，这个总电场一般不为零。

对于导体内部没有电场和电荷的结论，应该注意它们的前提条件。首先，我们所讲的电场和电荷都是针对“宏观点”而言的，即某物理点体积元内电场或电荷的平均值，至于微观的点，例如导体内某个原子内部的点，其电场与电荷当然可以不为零。其次，导体内的自由电荷除了电场力之外不受其它力（如化学反应所引起的非静电力等）的作用，否则即使导体内无电流，但内部电场仍可能不为零。例如对开路的干电池，其碳芯内无电流，但静电场不为零。此时导体碳芯内的自由电荷同时受静电力和化学力的作用，两者的合力为零，故电荷不运动。

导体可以看作是电介质的一个特例，其表面外侧的电场可由电介质的边界条件确定。设2区为导体，1区为真空或电介质，由式(2-93)和式(2-95)中 $\bar{D}_2$ 和 $\bar{E}_2$ 等于零，可得到导体外侧 $\bar{E}$ 和 $\bar{D}$ 的边界条件

$$\hat{n} \times \bar{E} = 0 \quad (2-102)$$

$$\hat{n} \cdot \bar{D} = \rho_s \quad (2-103)$$

式(2-102)称为导体表面电场强度切向边界条件，它说明导体表面外侧电场强度的切线分量恒等于零，电场强度矢量一定垂直于导体表面，该式又可以写成标量形式

$$E_t = 0 \quad (2-104)$$

式(2-103)称作导体表面电通量密度法向边界条件，由 $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ 及式(2-104)可知，导体外侧的电通量密度矢量也与导体表面垂直，其模值等于该点的电荷面密度，写成标量形式

$$D = \pm \rho_s \quad (2-105)$$

在 $\rho_s < 0$ 的表面点处，电场矢量垂直指向导体； $\rho_s > 0$ 处，电场矢量从导体表面垂直向外，如图2-30所示

导体表面的边界条件也可以用电位表达。由于导体表面上 $E_t = 0$ ，所以表面上任意两点间的电位

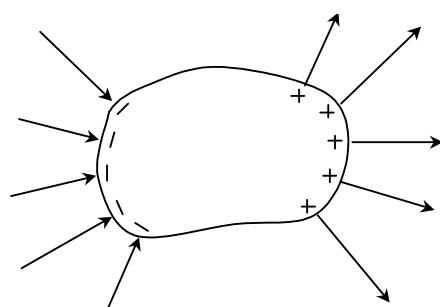


图2-30 导体外侧的电场

差等于零，导体表面是一个等电位面

$$U_s = C \quad (2-106)$$

由于导体内部的电场恒等于零，所以其各点的电位相同且等于表面电位，导体是一个等电位体。

由导体内部等电位的结论可知，式(2-35)中 $\varepsilon_2(\partial U_2 / \partial n)$ 项为零，可得到导体表面电位所满足的另一边界条件

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (2-107)$$

例2.16 试证明在导体与电介质分界面的一点上，极化电荷面密度与分布电荷面密度满足如下关系

$$\rho_{ps} = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \rho_s \quad (2-108)$$

证明：在分界面上，若设导体表面的法矢为 $\hat{n}$ ，则电介质表面的法矢为 $-\hat{n}$ 。由式(2-70)得

$$\rho_{ps} = (-\hat{n}) \cdot \bar{P} = (-\hat{n}) \cdot (\bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E}) = -\hat{n} \cdot \bar{D} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) = -\hat{n} \cdot \bar{D} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

将式(2-103)代入上式，得

$$\rho_{ps} = -\rho_s \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \rho_s$$

对一般电介质有 $\varepsilon_r > 1$ ，所以 $\rho_{ps}$ 与 $\rho_s$ 符号相反，极化面电荷起着削弱外侧电场的作用。

应当明确，静电平衡时导体内部的电场恒等于零，并不是说场源电荷在导体内不产生电场，而只是所有电荷（包括外源电荷、感应电荷和极化电荷）在导体内部产生的电场相互抵消，其矢量和为零。同理，在边界条件(2-105)中，导体表面上的电荷面密度与导体外侧的电通量密度模值相等，并不等于该点电场只是由该点电荷产生的，这种等量关系也是空间所有电荷共同作用的结果。当外源电荷发生改变时，同时影响导体表面上的电荷分布与外侧电场，但这两者间的等量关系仍然成立。

作为特例，当空间只有一个表面带有电荷的**孤立导体**（或其它带电体远离此导体，电场作用可以忽略）时，该导体表面上的电荷分布取决于导体的形状。一般来讲，在曲率较大的尖锐部位，电荷密度也大；曲率较小的平坦部位，电荷密度也较小；而负曲率的凹进部分，电荷密度最小。此外，若导体形状是对称的，则电荷分布也将是对称的。上述结论可以通过如图2-31所示的实验来验证，用悬在丝线下的带电通草小球靠近带同种电荷的孤立导体，小球因受斥力而张开一个角度，通过张角的大小就可以判断导体表面电荷密度的大小。

当尖端上的电荷过多时，会引起尖端放电现象。这种现象可以这样来解释。由于尖端上面电荷密度很大，所以它周围的电场很强。那里空气中散存的带电粒子（如电子或离子）在这种强电场的作用下作加速运动时就可能获得足够的能量，以致它们和空气分子碰撞时，能使后者离解成电子和离子。这些新的电子和离子与其它空气分子相碰，又能产生新的带电粒子。这样，就会产生大量的带电粒子。与尖端上电荷异号的带电粒子受尖端电荷的吸引，飞向尖端，使尖端上的电荷被中和掉；与尖端上电荷同号的带电粒子受到排斥而从尖

端附近飞开。图2-32从外表上看，就好象尖端上的电荷被“喷射”出来放掉一样，所以叫做尖端放电。

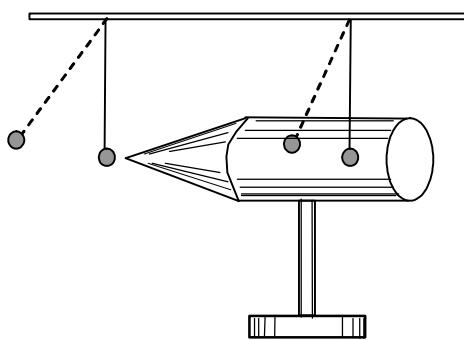


图2-31 孤立带电导体电荷分布的验证

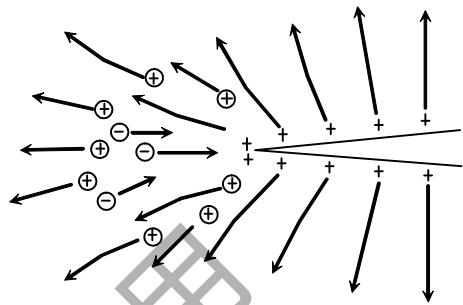


图2-32 尖端放电示意图

在高压电器设备中，为了防止因尖端放电而引起的危险和漏电造成的损失，输电线的表面应是光滑的。具有高电压的零部件的表面也必须做得十分光滑并尽可能做成球面。与此相反，在很多情况下，人们还利用尖端放电。例如，火花放电设备的电极往往做成尖端形状，避雷针也是利用尖端的缓慢放电而避免“雷击”（雷击实际上是天空中大量异号电荷急剧中和所产生的恶果）。

## 二、有导体存在时静电场的分析与计算

当场空间内存在导体时，电场在导体上激励出感应电荷，而这些感应电荷又会反过来影响电场，这种电场与电荷分布的相互作用，使确定电荷分布的工作变得十分复杂。因此，在一般求解这类问题时，都是将导体表面作为区域的一部分边界，求解电位的Poison方程或Laplace方程，即解边值问题。但对于特殊的情况，也有一些简单的解法。

**例2.17** 有一块面积为 $s$ 的大金属平板A，带正电荷 $Q$ 。在其近旁放置另一块原来不带电荷的大金属平板B。求静电平衡后金属板上的电荷分布和周围空间的电场分布。如果把第二块金属板接地，情况又如何？（忽略金属板的边缘效应）

**解：**由于静电平衡时导体内部无静电荷，所有电荷只能分布在两金属板的表面上。不考虑边缘效应，每一个表面上的电荷应是均匀分布的。设四个表面上的电荷面密度分别为 $\rho_{s1}$ 、 $\rho_{s2}$ 、 $\rho_{s3}$ 和 $\rho_{s4}$ ，如图2-9所示。由题中所给条件可知

$$\rho_{s1} + \rho_{s2} = \frac{Q}{s} \quad (1)$$

$$\rho_{s3} + \rho_{s4} = 0 \quad (2)$$

选取一个两底面分别在两个金属板内而侧面垂直于板面的柱状封闭面作为高斯面 $s_0$ ，若高斯面的底面面积为 $\Delta s$ ，则有

$$\oint_{s_0} \bar{D} \cdot d\bar{s} = \rho_{s2} \Delta s + \rho_{s3} \Delta s$$

因导体内部的电场恒为零，所以高斯面左、右底面

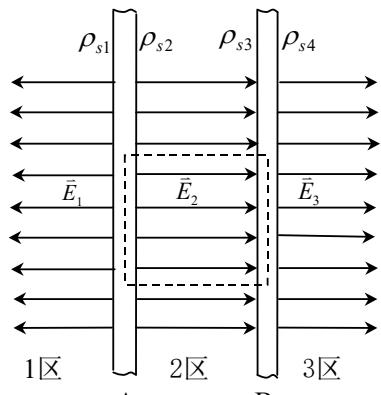


图2-33 平行导体板的电场

的电通量为零，又因两金属板间的电场与高斯面的侧面平行，无电通量从侧面穿出，故整个高斯面的电通量等于零。因此由上式可以得到

$$\rho_{s2} + \rho_{s3} = 0 \quad (3)$$

在B板内任取一点P, P点的电场应该是四个带电面的电场的叠加，且等于零。由例2.3 可知，一个无限大电荷面产生的电场为

$$\bar{E} = \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

其中，场点与法矢在电荷面的同侧时取“+”，异侧时取“-”。因此有

$$E_P = \frac{\rho_{s1}}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_{s2}}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_{s3}}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_{s4}}{2\epsilon_0} = 0 \quad (4)$$

联立求解方程 (1) ~ (4) 得

$$\rho_{s1} = \rho_{s2} = \rho_{s4} = \frac{Q}{2s}, \quad \rho_{s3} = -\frac{Q}{2s}$$

各区域内的电场都是均匀场，由导体的边界条件

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n}$$

可以得到1、2、3各区域的电场强度分别为

$$\bar{E}_1 = -\frac{Q}{2s\epsilon_0} \hat{x}, \quad \bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \frac{Q}{2s\epsilon_0} \hat{x}$$

其中  $\hat{x}$  是指向右方的单位矢量。

如果将B板接地（从字面的含义，接地是指与大地相连接，因为地平面延伸至无穷远，所以接地也意味着与无穷远相连接。但接地的另一种含义，也可以说其本质的含义是指与零电位点连接。当零电位参考点选在大地或无穷远时，上述两种含义是统一的，否则应该是指后一种意义。在一个给定的问题中，应根据具体情况来判别接地的实际含义。），则B板右侧表面上的电荷必须为零。因为如果此面上存在电荷，这些电荷必然要发出电力线。由电力线在无电荷处不中断的性质，并且B板为无穷大，这些电力线只能终止于大地（即无穷远），又因为沿电力线的电位是不断下降的，因此会出现B板电位高于大地电位，与接地的条件矛盾。可见，要满足B板接地的已知条件，其右侧表面的电荷必须等于零。此时仿照前面的分析方法，或直接令 (1) 、 (3) 、 (4) 三个式子中的  $\rho_{s4} = 0$ ，得到

$$\rho_{s1} + \rho_{s2} = \frac{Q}{s}$$

$$\rho_{s2} + \rho_{s3} = 0$$

$$\rho_{s1} + \rho_{s2} + \rho_{s3} = 0$$

联立求解上面三式，得到

$$\rho_{s1} = 0, \quad \rho_{s2} = \frac{Q}{s}, \quad \rho_{s3} = -\frac{Q}{s}$$

此时两块导体上的电荷分布与B板未接地时相比都发生了变化，这一变化是负电荷通过接地线从大地流入B板的结果。这些负电荷的总电量是  $-Q$ ，一半中和了B板右表面的原有正电荷，另一半添加到B板左表面，使其总电量变成  $-Q$ ，同时将A板的电荷  $Q$  全部吸引到右表面，形成上面的分布，只有这样才能达到两导体内部电场为零的静电平衡状态。

例2.18 一个半径为 $a$ 的金属球带电荷 $Q_1$ , 在它外面有一个同心的金属球壳 $B$ , 其内、外半径分别为 $b$ 和 $c$ , 带有电荷 $Q$ , 如图2-10所示。试求任意点的电场和电位, 以及内球与球壳之间的电位差。如果用导线将内球和球壳连接一下, 结果又将如何?

解: 在 $r < a$ 和 $b < r < c$ 两个区域的导体内部内, 电场为零。由对称性可知, 每个导体表面上的电荷应均匀分布。设 $r = b$ 的球壳内表面上带有电荷 $Q_2$ ,  $r = c$ 的球壳外表面上带有电荷 $Q_3$ , 则有

$$Q_2 + Q_3 = Q$$

在球壳的导体内作一个包围内腔的闭合面, 利用高斯定律和导体内电场为零的概念可以得到

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

由以上两式解得

$$Q_2 = -Q_1$$

$$Q_3 = Q + Q_1$$

由以上的电荷分布, 利用高斯定律容易求得电场分布

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (a < r < b)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (r > c)$$

$a < r < b$ 区域的电位为

$$U_1 = \int_r^b E_1 dr + \int_c^\infty E_2 dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

$r > c$ 区域的电位为

$$U_2 = \int_r^\infty E_2 dr = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

壳外电位与一个球心处电量为 $Q_1 + Q$ 的点电荷的电位相同。

内球与球壳间的电位差为

$$U_{AB} = \int_a^b E_1 dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

如果用导线将内球与外壳连接一下,  $r = b$ 面上的电荷 $-Q_1$ 将流向内球, 与内球表面上的电荷 $Q_1$ 中和, 使这两个表面都不再带电荷, 两表面之间的电场和电位差均变为零。此时,  $r = c$ 面上的电荷仍保持为 $Q_1 + Q$ 且均匀分布,  $r > c$ 区域的电场和电位分布与原来相同; 而 $r < c$ 的球域则变成为一个电场为零的等电位区域, 其任意点的电位均为

$$U_{r < R_s} = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\epsilon_0 c}$$

例2.19 试证明: 当均匀电介质充满无限空间或以闭合导体面为边界, 中间存在着若干个导体, 若分布电荷仅以面密度的形式带在各导体的表面上, 则电介质内任意点的电场可以按无限电介质空间的公式计算, 即

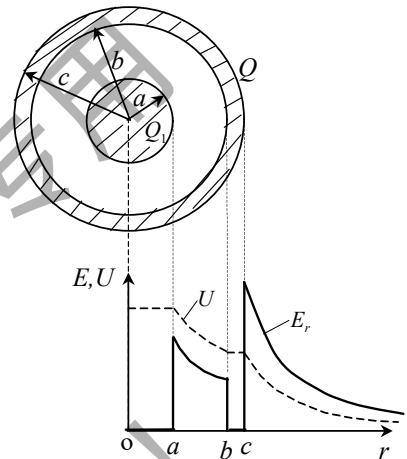


图2-34 带电导体球壳的电场与电位

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_i} \frac{\rho_{s_i} \vec{R}_i}{R_i^3} d\vec{s}_i \quad (2-109)$$

证明：由本章前面的讨论可知，无论场空间存在任何介质或导体，其实际的电场都可以看成是空间各类电荷（包括分布电荷、极化电荷在内的所有电荷）分别产生的真空场的叠加。在均匀电介质中，由例2-14的结果知道，极化体电荷仅存在于分布体电荷不为零的点上，由本题体分布电荷  $\rho \equiv 0$  的已知条件，有

$$\rho_p = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\rho = 0$$

可见，本命题的实际电场应等于所有面电荷的真空场叠加，即

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_i} \frac{\rho_{s_i\Sigma} \vec{R}_i}{R_i^3} d\vec{s}_i$$

其中的  $\rho_{s_i\Sigma}$  是第  $i$  个导体界面上的分布电荷与极化电荷之和，再由例2-16 的结果，有

$$\rho_{s_i\Sigma} = \rho_{s_i} + \rho_{ps_i} = \rho_{s_i} + \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right)\rho_{s_i} = \frac{\rho_{s_i}}{\epsilon_r}$$

代入上式，得

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_i} \frac{\frac{\rho_{s_i}}{\epsilon_r} \vec{R}_i}{R_i^3} d\vec{s}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \oint_{S_i} \frac{\rho_{s_i} \vec{R}_i}{R_i^3} d\vec{s}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon} \oint_{S_i} \frac{\rho_{s_i} \vec{R}_i}{R_i^3} d\vec{s}_i \end{aligned}$$

命题得证。

### 三. 静电屏蔽

从前面的分析看到，把导体引入静电场后，导体上的原有电荷及感应电荷将重新分布而使电场发生改变。利用这一性质，可根据应用需求，人为地选择导体形状来改造电场。利用导体空壳来隔断其内外电场的相互影响就是这一性质的应用，一般称之为静电屏蔽。下面分几个区域介绍静电屏蔽的原理和结论。

#### 1. 导体壳内空间的电场

1). 若壳内空间无分布电荷，如图2-35 所示，无论壳外的电荷与电场如何分布，壳内空间电场恒等于零，壳内壁上的表面电荷密度亦恒等于零，即

$$\vec{E}_1 = 0, \quad \rho_{s1} = 0$$

上述结论可以用验电器进行实验验证，也可以从理论上作如下简要证明：

在无电荷的壳内区域，静电位满足 Laplace 方程  $\nabla^2 U = 0$ ，即壳内的电位函数  $U$  是一个调和函数。该区域以导体壳为边界，

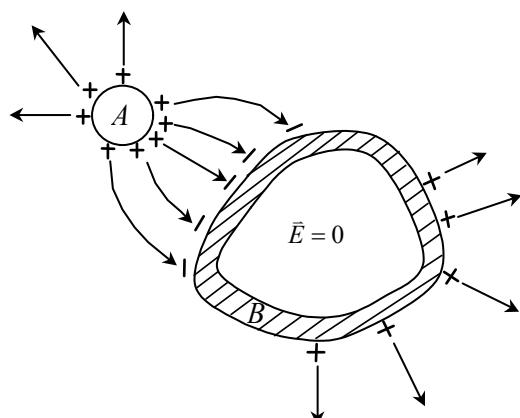


图2-35 导体壳的静电屏蔽

边界值应为同一常数  $C$ ，由边界值为常数的调和函数在区域内恒为该常数的性质可知，壳内的电位是与导体壳电位相同的常数，即  $U_1 = C$ 。在等电位空间内，电场必为零。又由导体的边界条件

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{n}$$

和电场为零的结论，可以得到壳内表面的电荷面密度恒等于零的结果。

这里要再一次强调， $\bar{E}_1 \equiv 0$  并不是说壳外电荷不在壳内空间产生电场，而是表明壳外分布电荷与壳外壁上的感应电荷在壳内空间产生的电场之和为零。当壳外分布电荷的位置变化时，壳外表面的感应电荷也会相应改变，但它们在壳内空间产生的电场之和仍保持为零。

2). 若壳内空间有电荷，则必然在电荷周围出现电场，壳的内壁也会出现面电荷。由数理方程的知识可以证明，此时壳内电场及内表面电荷  $\rho_{s1}$  的分布，只取决于壳内带电体的电荷分布及内壁的形状，而与壳外的电场、电荷及外壁形状无关。

这个结论可以作如下的定性解释：壳外电荷对壳内电场及电荷分布的影响必须通过电场来传递，但由于壳导体中的电场恒等于零，这相当于在壳的内外之间形成了一个切断电场力传递的“隔离带”，壳外电荷对壳内的电场及电荷失去控制，从而使得壳内的场与壳外无关。

综合以上两点，无论封闭导体壳的内部有无电荷，壳外的电荷与电场均对壳内空间的电场无影响，这正是应用静电屏蔽时所需求的。

## 2. 导体壳外的电场

1). 若壳外空间无分布电荷，我们首先分析导体壳不接地的情况。设导体壳本身不带净电荷，壳内空间有一个正的点电荷  $q$ 。在导体内作一个高斯面包围空腔，用高斯定律和导体内电场为零的概念容易证明，壳内壁上应存在着总电量为  $-q$  的面电荷（可以视为点电荷  $q$  所激励出的感应电荷）。又因为导体壳本身不带净电荷，所以壳的外表面必带有总电量为  $q$  的电荷（另一部分感应电荷）。此时壳外空间的电场是不为零的，这个电场实质上是由点电荷  $q$ 、内壁面电荷  $-q$  和外壁面电荷  $q$  共同产生的，但点电荷  $q$  与内壁面电荷  $-q$  在壳外产生的场处处抵消。因此，在讨论壳外电场时，可以将壳外表面所包围的区域视为一个实心的导体，计算电场时只需考虑壳外壁上电荷  $q$  的分布。可见，此种情况壳外的电场仅决定于电量  $q$  和壳外表面的形状。

如果将导体壳与地相连接，则壳外壁上的面电荷  $q$  必须全部流入大地，否则这些电荷所发出的电力线将与导体壳接地的条件矛盾。此时壳外无任何电荷，故壳外的电场为零，即

$$\bar{E}_2 = 0$$

这表明，如果要使自己的仪器设备不影响他人，不泄漏信息，应将其放置在一个接地的封闭导体壳之内。

2). 当壳外空间有分布电荷时，无论壳内有无电荷或导体是否接地，壳外一般总是有电场的。若导体壳不接地，壳内电荷对壳外电场的贡献如前所述，只是将与其总电量  $q$  相等的感应电荷提供到壳外表面上，至于这些电荷如何分布，则完全取决于外部的状态。此时的壳外电场由壳外电荷分布，壳外表面形状和壳内的电荷总量  $q$  共同决定。若导体壳接地，根据前面的分析，外表面上的感应电荷  $q$  将全部流入地。但必须注意，此时外表面上的电荷面密度却不一定为零，因为壳外的分布电荷产生的电场是要在外表面上激励感应电荷的，这部分感应电荷的多少和分布决定于外部电荷的分布及外表面的形状，而与壳内情况无关。

将上面的所有性质做简单归纳：当导体壳不接地时，壳外电荷不影响壳内电场，壳内的电荷将向外面提供感应电荷而影响壳外电场；当导体壳接地时，内部与外部的电场完全隔离，讨论其一时，可以将另一部分作为实心导体对待。

导体壳的屏蔽效应在电工和电子技术中有广泛的应用，并且对于直流电和交流电磁场也可以产生相同的屏蔽效果。为了节省材料，有时也用金属网罩代替导体壳，如精密测量时所用的屏蔽室和高压输电工人穿的屏蔽服等。

2020 网络数学专用  
请勿外传！

## § 2.12 电场能量与静电力

电场能量是电场物质性的主要特征，它的直观表现是对场中的带电体具有作用力，凡有电场的地方，一定有对应的电场能量。本节讨论静电场的能量和静电力，并介绍与电场储能有关的重要电路元件——电容器的概念与计算。

### 一、电场能量

电场中贮存的电场能量来源于场源电荷系统建立过程中的功能转换。在电荷系统的始建过程中，为了克服库仑力的作用使电荷得到最终分布的确定位置，必须有外源做功。如果只计算外源在系统建立过程中克服电荷库仑力方面的做功，而不涉及热损耗和辐射损耗等因素，根据能量守恒定律，外源所做的这部分功应全部转化为该电场所具有的能量而贮存的电场空间内。如果以  $W_e$  表示某电场系统的电场能量，用  $A_s$  表示场源电荷系统建立过程中外源克服库仑力做的总功，则必定有

$$W_e = A_s \quad (2-110)$$

因电场能量仅由其场源电荷系统的最终电荷分布决定，所以建立过程中外源做的总功也必然只决定于电荷的最终分布，而与电荷系统的建立过程和方式无关。因此，在计算外源做功时，可以根据方便和需要来任意假设电荷系统的建立过程。下面首先讨论电荷以体密度  $\rho$  分布在区域  $\tau$  内这种最一般形式的电场系统的能量，场源以点、线、面电荷分布的情况可由此一般形式的结果导出。

假设在该电荷系统建立过程中， $\tau$  内各点的电荷密度是从零开始同步增长的。如果电荷密度的最终分布为  $\rho(\vec{r})$ ，后面简记作  $\rho$ ，同步增长是指在某点  $\vec{r}_0$  处电荷密度达到  $\rho_t(\vec{r}_0) = k\rho(\vec{r}_0)$  的  $t$  时刻， $\tau$  内所有点上的电荷密度均满足  $\rho_t(\vec{r}) = k\rho(\vec{r})$ ，其中  $0 \leq k \leq 1$ ，是一个表示电荷系统建立过程的参量， $k=0$  和  $k=1$  分别表示建立开始和结束。由电位与电荷之间的线性关系可知，空间电位分布的增长也是同步的。在  $t$  时刻的电位为  $U_t(\vec{r}) = kU(\vec{r})$ ，其中  $U(\vec{r})$  表示最终的电位分布，后面也简记作  $U$ 。

根据电位的物理意义，一点上的电位值等于外力把单位电荷从无穷远移至该点所做的功，在电荷密度由  $k\rho$  增加到  $(k+dk)\rho$  的小过程  $\Delta t$  的时间内，外源对  $\tau$  内某体积元  $d\tau$  所做的功可以表示为

$$[\Delta Q_{t+\Delta t} - \Delta Q_t]U_t = [(k+dk)\rho d\tau - k\rho d\tau][kU] = kdk(\rho U d\tau)$$

在  $\Delta t$  时间内，外源对源区域  $\tau$  所做的功为上式的体积分

$$kdk \int_{\tau} \rho U d\tau$$

对于电荷密度从零增长到终值  $\rho$  的系统建立全过程， $k$  从 0 变到 1，外源所做的总功为

$$A_s = \int_0^1 kdk \int_{\tau} \rho U d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho U d\tau$$

根据能量守恒定律，外源所做的功全部转化为该电荷系统的电场能  $W_e$ ，因此有

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho U d\tau \quad (2-111)$$

当已知某电荷系统的电荷分布  $\rho$  和电荷区域内的电位  $U$ ，利用上式可计算该系统的电场能

量。

上式适用于场源电荷以体密度分布的一般情况，对系统电荷分布在 $N$ 个导体 $S_1$ 、 $S_2 \cdots \cdots S_N$ 的表面上的特殊情况，式(2-111)可以写成

$$W_e = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} U_i \oint_{S_i} \rho_{S_i} ds_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} Q_i U_i \quad (2-112)$$

其中 $U_i$ 和 $Q_i$ 分别是第*i*个导体的电位和表面上的电荷。

因为每个导体的电位是其自身电荷对本导体产生的电位与其它导体的电荷在该导体上产生的电位的代数和，所以上式中的 $U_i$ 可写成

$$U_i = U_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ij} \quad (2-113)$$

其中， $U_{ii}$ 代表电荷 $Q_i$ 在导体 $S_i$ 独立存在时所产生的自电位， $U_{ij}$ 代表导体 $S_j$ 上的电荷 $Q_j$ 在导体 $S_i$ 上产生的互电位。将式(2-113)代入式(2-112)，得

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i U_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N Q_j U_{ij} \quad (2-114)$$

上式右边第一项称为此多导体系统电场能量的**自能部分**，它等于各导体孤立存在时，电荷从零增长到终值的过程中，外源克服各导体自身电荷排斥力所做的功，自能部分总是正值。第二项叫作**互能部分**，它等于把带电导体逐个自无限远移到最终位置过程中，外源克服各导体之间库仑力所做的功。互能可以是正值或负值，取决于系统建立过程中各导体间的库仑力是排斥或吸引。将电场能量分为自能和互能两部分，可以对分析带电多导体作相互运动的问题带来方便，此时各导体的自能是不变的，导体运动时的功能转换只与系统的互能有关。

下面讨论点电荷系统的电场能量问题。令前面的各导体所带电荷不变而体积趋于零，就得到一个点电荷系统。但若仍然利用式(2-112)或(2-114)计算系统的电场能量，因点电荷在自身点产生的电位是无穷大，从而出现系统能量趋于无穷大的不正确结果。产生这一结果的原因来源于点电荷的定义，因为在实际问题中，非无限小的电荷量不可能被集中到体积为零的几何点上，所以理想的点电荷在现实中是不存在的。点电荷概念的引入是为了方便带电体远区场的近似计算，这种近似在非远区场点产生很大的误差，在点电荷的“自身点”上的电场和电位值为无穷大，从而导致系统能量趋于无穷的谬误结果。一般来讲，只有当电荷体分布和面分布时，其自能才是有意义的；而点电荷与线电荷因在自身点上“产生”无穷大的电位，其自能是无意义的。由于在讨论点电荷系统的功能问题时，有意义的只是系统的互能部分。为此，我们将其互能部分定义为系统的电场能量，即

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N Q_i U_{ij} \quad (2-115)$$

其中的 $Q_i$ 是第*i*个点电荷的电量， $U_{ij}$ 是第*j*个点电荷在第*i*个点电荷所在的点处产生的电位。

上面各式的计算都是针对场源电荷所在的区域进行的，但这并不意味着电场能量只贮存在电荷所在的区域内。从电场的物质性观点来讲，电场能量应该存在于所有电场空间内。此外，因为有电场的地方带电体就要受力，移动带电体时就会出现功能转换，这也说明电场不为零的地方一定储存有电场能量，而无论该处是否有电荷。

为了得到电场能量与电场强度的直接关系，将高斯定律  $\rho = \nabla \cdot \bar{D}$  代入式 (2-111)，并应用矢量恒等式  $\nabla \cdot (U\bar{D}) = \bar{D} \cdot \nabla U + U\nabla \cdot \bar{D}$ ，得到

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} [\nabla \cdot (U\bar{D}) - \bar{D} \cdot \nabla U] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_S U\bar{D} \cdot d\bar{s} + \frac{1}{2} \int_{\tau} \bar{D} \cdot \bar{E} d\tau \end{aligned} \quad (2-116)$$

上式第一项的导出用了散度定理， $S$ 为电荷区域  $\tau$  的表面，第二项是代入了  $\bar{E} = -\nabla U$  的结果。上式将电场能量分成两部分，第二项表示贮存在体积  $\tau$  内的能量，而第一项则代表区域  $\tau$  以外的能量，它由  $S$ 面上的场位值计算。

如果令式 (2-111) 所对应的电荷系统不变，但将该式的积分域扩展到无穷大。由于增加的区域内  $\rho = 0$ ，所以该式的积分结果不变，其导出式 (2-116) 的值也不变。此时的电荷域对于无穷大  $S$ 面上的场点而言，可以视为一个点电荷，由点电荷的场位计算公式有

$$U \propto \frac{1}{R}, \quad D \propto \frac{1}{R^2}$$

其中  $R$  是源点到场点的距离。当  $R \rightarrow \infty$  时，式 (2-116) 的第一项趋于零，于是得到

$$W_e = \int_{\tau_\infty} \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} d\tau = \int_{\tau_\infty} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau \quad (2-117)$$

上式就是用电场所表示的电场能量公式， $\tau_\infty$  为电场不为零的所有区域，表明电场能量存在于电场的所有空间。上式的被积函数可视为电场空间一点处单位体积内的电场能量，用  $w_e$  表示

$$w_e = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (2-118)$$

$w_e$  称为电场能量密度，单位是焦耳/米<sup>3</sup> (J/m<sup>3</sup>)。

与前面的几个能量公式相比，式 (2-117) 和 (2-118) 在使用中更具灵活性，它们不但可以用来计算整个电场系统的总能量，也可以计算部分区域内的能量，而式 (2-111)~(2-116) 的各公式却只能计算系统的总能量。

**例2.20** 计算电荷体密度为  $\rho_0$  的均匀球形区域电荷系统的电场能量。已知球的半径为  $a$ ，球内外均为真空。

解：本题可以分别利用式 (2-111) 和式 (2-117) 计算。首先计算出空间任意点的电场和电位。

对  $r > a$  的区域，均匀带电球体相当于一个位于球心的点电荷，因此有

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \hat{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \hat{r} \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \hat{r} \frac{a^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2} \\ U_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{a^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

在  $r < a$  的区域内，可以将场点半径  $r$  以内的电荷视为点电荷，按点电荷公式计算电场，也可以用高斯定律求解电场。然后，对电场积分求出电位。即

$$\bar{E}_2 = \hat{r} \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \hat{r} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \hat{r} \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}$$

$$U_2 = \int_r^a E_2 dr + \int_a^\infty E_1 dr = \int_r^a \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{a^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{a^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} - \frac{r^2 \rho_0}{6\varepsilon_0}$$

利用式(2-111)计算电场能量,得

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} U d\tau = \frac{1}{2} \int_0^a \rho_0 \left( \frac{a^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} - \frac{r^2 \rho_0}{6\varepsilon_0} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho_0^2}{15\varepsilon_0} a^5$$

若采用式(2-117)计算,得

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau_\infty} \varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_0^a \varepsilon_0 \left( \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \int_a^\infty \varepsilon_0 \left( \frac{a^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{2\pi \rho_0^2 a^5}{45\varepsilon_0} + \frac{2\pi \rho_0^2 a^5}{9\varepsilon_0} = \frac{4\pi \rho_0^2}{15\varepsilon_0} a^5 \end{aligned}$$

## 二. 静电力

静电场中的带电导体和电介质会受到电场力的作用,求这个力一般有两种方法:

### 1. 利用库仑定律

以求解带电导体受力为例,设此带电导体上的电荷面密度为 $\rho_s$ ,在导体表面上任取一个矢量面元 $d\vec{s} = \hat{n}ds$ ,面元所带的电荷为 $dQ = \rho_s ds$ ,此电荷元受到的电场力为

$$d\vec{F} = dQ \vec{E}' = \rho_s ds \vec{E}' \quad (2-119)$$

必须注意,上式中的 $\vec{E}'$ 应该等于导体外侧该点实际电场 $\vec{E}$ 的一半,即

$$\vec{E}' = \frac{1}{2} \vec{E} \quad (2-120)$$

其原因是利用库仑定律 $\vec{F} = Q\vec{E}'$ 计算电荷 $Q$ 受力时,公式中的 $\vec{E}'$ 应该是其它的电荷在 $Q$ 处产生的电场,不包括 $Q$ 自身产生的电场。而导体外侧的实际电场 $\vec{E}$ 则是由包括电荷 $\rho_s ds$ 在内的所有电荷产生的。当 $ds$ 足够小时,可以将导体表面视为无限大带电平面,利用高斯定律容易证明,电荷元 $\rho_s ds$ 在导体的内外两侧产生的电场是

$$\vec{D}_1 = \pm \frac{1}{2} \rho_s \hat{n}$$

如图2-36所示。而除去 $\rho_s ds$ 外的其余所有电荷在 $ds$ 两侧产生的电场是

$$\vec{D}_2 = + \frac{1}{2} \rho_s \hat{n}$$

在导体内侧,两部分电场等幅反向,使得导体内的电场等于零;而导体外侧,两部分电场等幅同向,矢量和恰为外侧的实际电场 $\vec{D} = \rho_s \hat{n}$ ,与前面导出的导体边界条件吻合。由上述分析可得

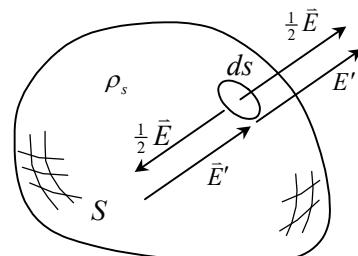


图2-36 导体外侧的电场

$$\bar{E}' = \frac{1}{2} \bar{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \hat{n} \quad (2-121)$$

将上式代入式(2-109)，得

$$d\bar{F} = \rho_s ds \bar{E}' = \frac{1}{2\epsilon} \rho_s^2 ds \hat{n} \quad (2-122)$$

上式为导体表面上的电荷元 $dQ$ 所受到的电场力，可见，不论此表面电荷元的符号如何，它所受到的电场力总是沿表面法矢向外的。整个导体受力为

$$\bar{F} = \frac{1}{2\epsilon} \oint_s \rho_s^2 \hat{n} ds \quad (2-123)$$

其中 $s$ 为导体表面，若已知量是导体外侧的实际电场 $\bar{E}$ ，将 $\bar{E} = \hat{n} \rho_s / \epsilon$ 代入上式，可得到

$$\bar{F} = \frac{\epsilon}{2} \oint_s E^2 \hat{n} ds \quad (2-124)$$

例2.21 有一对面积为 $S$ 的平行导体电极板，其相对的表面上分别带有电量为 $Q$ 和 $-Q$ 的均匀分布面电荷，两极板的距离 $h$ 远小于极板尺寸，中间填充电容率为 $\epsilon$ 的电介质，如图2-37所示。求上极板所受的作用力。

解：上极板的带电表面的法矢是指向下方的，与坐标系 $z$ 轴的方向相反，即 $\hat{n} = -\hat{z}$ 。极板内侧的电荷面密度为 $\rho_s = Q/S$ ，代入式(2-123)，得

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{2\epsilon} \int_s \rho_s^2 \hat{n} ds = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{Q}{S}\right)^2 (-\hat{z}) S \\ &= -\frac{Q^2}{2\epsilon S} \hat{z} \end{aligned}$$

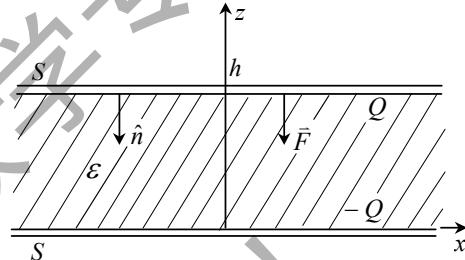


图2-37 平行带电导体板的受力

式中的负号表示上极板受到向下的作用力。用同样的方法可以求出下极板受力，它与上极板受力等值反向，两极板相互吸引。

## 2. 虚位移法.

计算带电体受力的另一种常用方法是虚位移法，该方法是通过假想电场系统中某带电体产生位移并引起系统能量改变来计算该带电体的受力。虚位移法的根据是能量守恒定律，由该定律可知，在没有其它能量损失的情况下，外源提供给某电场系统的总能量一定等于该系统所做的机械功与系统储能的增量之和。如果用 $dW_s$ 表示该带电体位移过程中外源向系统提供的能量， $dA$ 表示该带电体在所求电场力的作用下位移而作的机械功， $dWe$ 表示位移过程中系统电场能量的增量，则三者的关系为

$$dW_s = dA + dWe \quad (2-125)$$

下面讨论带电多导体系统中的导体受力，如图2-38所示。如果求导体 $i$ 在给定的方向 $\hat{l}$ 上所受的电场力 $\bar{F}_l$ ，我们就设想导体 $i$ 在 $\bar{F}_l$ 的作用下沿 $\hat{l}$ 方向产生了一个位移 $d\bar{l}$ （因为是设想的位移，所以称为虚位移）。电场力对此位移作的机械功为

$$dA = F_l d\bar{l}$$

代入式(2-125)得

$$F_l = \frac{dW_s}{dl} - \frac{dW_e}{dl} \quad (2-126)$$

根据两种给定的假设条件消去上式中的外源项,可以得到用电场能量 $W_e$ 计算 $F_l$ 的两个计算公式:

1) 假设在虚位移过程中,各导体所带的电荷量始终保持不变。因为在多导体系统中,外源向系统提供能量的实质就是向各导体上输送电荷,各导体上的电荷保持不变就是说外源没有提供能量,即 $dW_s = 0$ 。导体*i*位移机械功的耗能只能是以系统电场贮能减少为代价的。将 $dW_s = 0$ 代入式(2-126),得到虚位移法的第一个计算公式

$$F_l = -\left. \frac{dW_e}{dl} \right|_{Q=const} \quad (2-127)$$

上式表明:如果令系统能量表达式中所有导体上的电荷为常量,则某导体在 $\hat{l}$ 方向所受的电场力可以通过计算系统电场能量在该点 $\hat{l}$ 方向的负方向导数得到。

2) 假设在虚位移过程中,各导体的电位始终保持不变。因为位移使导体*i*与其它导体的相对位置发生了变化,要使各导体的电位不变,则必须使各导体上的电荷发生变化。这相当于每个导体上连接着一个电压恒定的电源,在虚位移过程中电源向各自的导体提供电荷,此时每个电源都要做功。设各导体的电位分别为 $U_1, U_2, \dots, U_N$ ,位移过程中各电源所提供的电荷分别为 $dQ_1, dQ_2, \dots, dQ_N$ 。由于电位等于外源力把单位电荷从零电位点移到场点(在这里也就是把单位电荷从电源移到导体上)所做的功,所以虚位移过程中各电源所做的总功为

$$dW_s = \sum_{i=1}^N U_i dQ_i \quad (2-128)$$

另一方面,由电场能量公式(2-112)可知,各导体的电位不变而电荷增加 $dQ$ 所引起的电场储能增量为

$$dW_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i dQ_i$$

比较上面两式,得

$$dW_s = 2dW_e \quad (2-129)$$

可见,在此条件下,外源所提供的能量 $dW_s$ 被分成相等的两部分,一半供给第*i*个导体位移做功,另一半则转变为电场能量贮存在电场内。将式(2-129)代入式(2-126),得到虚位移法的第二个计算公式

$$F_l = \left. \frac{dW_e}{dl} \right|_{U=const} \quad (2-130)$$

上式表明:如果令系统能量表达式中所有导体的电位为常量,则某导体在 $\hat{l}$ 方向所受的电场力可以通过计算系统电场能量在该点 $\hat{l}$ 方向的方向导数得到。

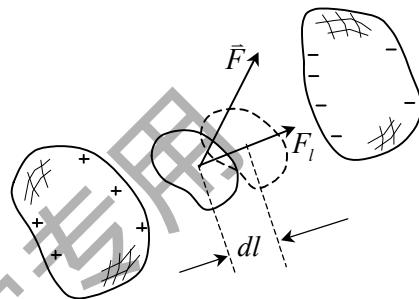


图2-38 带电导体的受力

必须明确，虚位移法是利用假想的位移计算电场力，公式(2-127)和(2-130)也是在两种假定前提条件下导出的。因此，在计算一个具体问题时，选择哪个公式完全取决于解题方便，而不必考虑导体上是否接有电源或者已知条件是导体上的电位还是电荷。这两个公式的差别，仅在于在计算时把能量表达式中的哪些量当作常量来对待，其最终结果应该是相同的。如对于例题2.21，忽略边缘效应，极板间是均匀场，用公式(2-117)可求出此系统的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \tau = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{Q}{\varepsilon S}\right)^2 Sh = \frac{1}{2} \frac{h}{\varepsilon S} Q^2 \quad (2-131)$$

上式是以极板上电荷为已知量的电场能量表达式，我们也可以根据已知条件将它变成极板电位的函数。因为两极板间的电位差为

$$U = Eh = \frac{Qh}{\varepsilon S} \quad (2-132)$$

如果令下极板为零电位，上式就是上极板的电位，代入式(2-131)，得到以上极板电位 $U$ 表示的系统能量表达式

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{h} U^2 \quad (2-133)$$

求上极板受力时，若使用式(2-27)，设上极板向 $\hat{z}$ 方向产生一个位移 $dz$ ，将能量表达式(2-131)中的位移变化相关量 $h$ 改记作 $z$ ，得到

$$F_z = - \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} \frac{z}{\varepsilon S} Q^2 \right) \Big|_{\substack{Q=const \\ z=h}} = - \frac{Q^2}{2 \varepsilon S}$$

上式结果的负号表示上极板的实际受力方向与假设的位移方向相反，即受到一个向下的力。

若使用式(2-130)计算上极板受力，将能量表达式(2-133)代入，得

$$F_z = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{z} U^2 \right) \Big|_{\substack{U=const \\ z=h}} = - \frac{U^2 \varepsilon S}{2 h^2}$$

利用式(2-132)的关系容易证明，上面两算法的结果是相同的。

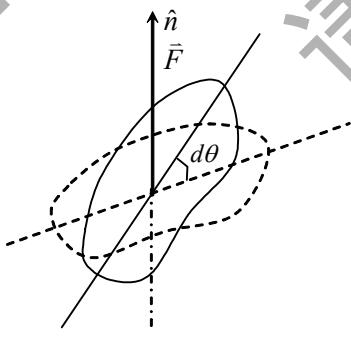


图2-39 带电导体的转矩

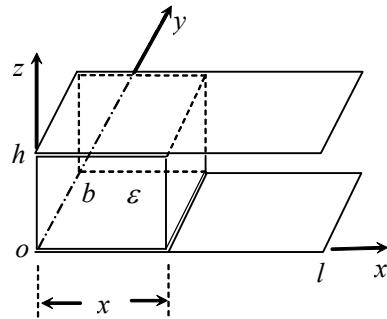


图2-40 两电极间介质片受力

仿照前面的分析方法，也可以推导出带电体在电场中所受的转矩。假设导体*i*在所求转矩 $T_n$ 的作用下绕 $r_2$ 轴产生一个虚旋转 $r_1$ ，如图2-39所示。则电场力所做的机械功为

$$dW = F_\theta r d\theta = T_n d\theta \quad (2-134)$$

代入式(3-125)，并按与前面相同的假定条件可以得到

$$T_n = -\frac{dW_e}{d\theta} \Big|_{Q=const} \quad (2-135)$$

$$T_n = \frac{dW_e}{d\theta} \Big|_{V=const} \quad (2-136)$$

此外，电介质在静电场中所受的电场力和转矩也可以利用虚位移和虚旋转法计算，计算公式仍为上面给出的四个公式。

**例2.22** 一对平行导体板电极的宽度 $b$ ，长为 $l$ ，极间距离为 $h$ 。其长度等于 $x(0 < x < l)$ 的部分填充了电容率为 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 的电介质，如图2-40所示。当两极板间的电压为 $V_0$ 时，求电介质片的受力。

解：忽略边缘效应，两极板间的电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 x b h + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 (l-x) b h$$

由对称性可知，介质片只可能受 $\hat{x}$ 方向的力。假设介质片沿 $\hat{x}$ 方向产生一个位移 $dx$ ，由于介质片所占空间比例增大，使电场贮能发生变化。由式(3-18)得

$$F_x = \frac{d}{dx} W_e \Big|_{U=const} = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 b h - \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 b h = \frac{1}{2} \frac{b}{h} V_0^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$$

对一般电介质有 $\epsilon_r > 1$ ，此时电介质片受到被拉进电极中心的电场力。

## § 2.13 电容

### 一、电容与电容器

由电介质或真空气隔开的一对导体电极称之为**电容器**，是电工和无线电技术中一种常用的电路元件。其中，平行板电容器是一种最基本的形式，它由两块平行金属板或金属箔中间夹以云母片或浸了油或蜡的纸等电介质薄膜构成。当电容器工作时，它的两个金属板的相对表面上总是带有等量异号的电荷 $Q$ 和 $-Q$ ，这时两极板间有电压 $V = U_+ - U_-$ 。一个电容器所带的电量 $Q$ 总是与极板电压 $V$ 成正比，其比值叫做该电容器的电容，用 $C$ 表示，即

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2-137)$$

在SI单位制中，电容的单位是(C/V)，称为法拉(F)。法拉是一个非常大的单位，实际中的常用单位是微法拉( $\mu F$ )和皮法拉( $pF$ )。

$$1 \mu F = 10^{-6} F$$

$$1 pF = 10^{-12} F$$

电容器的电容决定于电容器本身的结构，即两导体的形状、尺寸以及两导体之间电介质的电容率等，而与它所带的电荷量无关。从定义式(2-137)可见，在给定的电压下，电容器的电容越大，在极板上储存的电荷就越多，所以电容是反映电容器储存电荷本领大小的物理量。能够储存电荷只是电

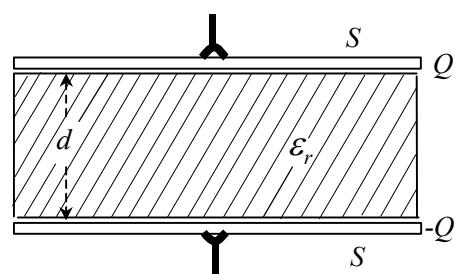


图2-41 平行板电容器

容器的基本功能之一，在电工和无线电电路中电容器有着广泛的用途，如交流电路中电流和电压的控制，发射机中振荡电流的产生，接收机中的频率调谐以及信号的耦合、滤波等等都要用到电容器。

简单电容器的电容可以容易地计算出来。例如对平行板电容器，设极板内表面的面积为S，两极板的距离为d，其间充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质，如图2-41所示。为了计算电容，设两极板的相对表面上带电荷Q和-Q。由于实际电容器的极板距离d都远远小于极板的长度和宽度，忽略边缘效应，可认为两极之间的电场是均匀分布的，利用导体的边界条件容易求得

$$E = D / \epsilon_r \epsilon_0 = \rho_s / \epsilon_r \epsilon_0 = Q / S \epsilon_r \epsilon_0$$

两极间的电压为

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

代入(2-137)式，得

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (2-138)$$

此结果表明电容的确只决定于电容器的结构，并且从上式可以得到增大电容的三个途径：增大极板面积，减小极间距离和填充大电容率的电介质。做为实用的平行板电容器，可将电介质薄膜夹在两条铝箔之间并卷成圆柱，以便用较小的体积获得较大电容。

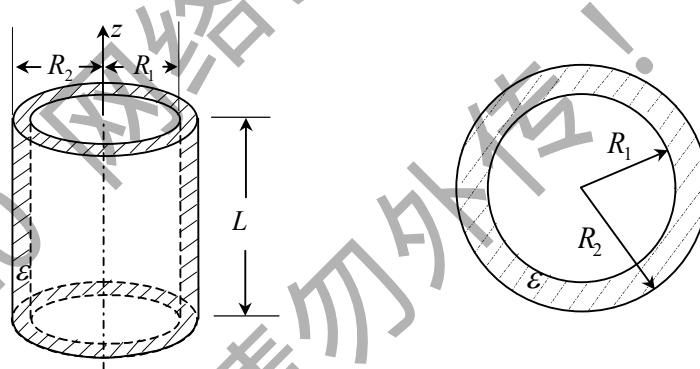


图2-42 圆柱电容器

图2-43 球形电容器

两个共轴的导体圆柱面可以构成圆柱形电容器，如图2-42所示。设内外圆柱电极面的半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，圆柱长为L，两柱面之间充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质。忽略边缘效应，认为此电容器是无限长同轴线上的一段，若设同轴线内外柱面上单位长度分别带电荷为 $\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，用高斯定律容易求出两柱面间的电场

$$\bar{E} = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

内外柱面间的电位差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \bar{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由于长度为L的柱面带电荷 $Q = \rho_l L$ ，将Q和V代入式(2-137)，得此圆柱形电容器的电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)} \quad (2-139)$$

此外，两个同心的导体球壳构成球形电容器。设内外球壳电极的半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ ，中间充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质，如图2-43所示。用与前面类似的方法求出其电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2-140)$$

除了电容器之外，实际的电工和电子装置中的任何两个彼此隔离的导体之间都有电容。例如两条导线、两个焊点以及晶体管的电极与管壳之间都存在着电容。这种电容实际上反映了两部分导体之间通过电场的相互影响，有时叫做“杂散电容”和“潜布电容”。尽管它们一般都比较小，但有时却对电路的性能产生十分明显的影响。

对一个孤立的导体，可以认为它与无限远处的另一导体组成一个电容器。这样一个电容器的电容叫做这个导体的**孤立电容**。例如对一个空气中的半径为 $R$ 的孤立导体球可以认为它与一个半径为无穷大的同心导体球壳组成一个电容器。假设此孤立导体球带电荷 $Q$ ，则该导体球与无限远处的电位差为

$$V = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

因此可得到孤立导体球的电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2-141)$$

衡量一个实际电容器的性能有两个主要指标，一个是它的电容大小，另一个是它的耐压能力。使用电容器时，所加电压不能超过规定的耐压值，否则会使电介质中的场强过高而击穿。对于相同的电容值，低耐压的电容器可以做的很小，而高耐压电容器则必须增大极板间的距离和极板面积，体积会显著增大。

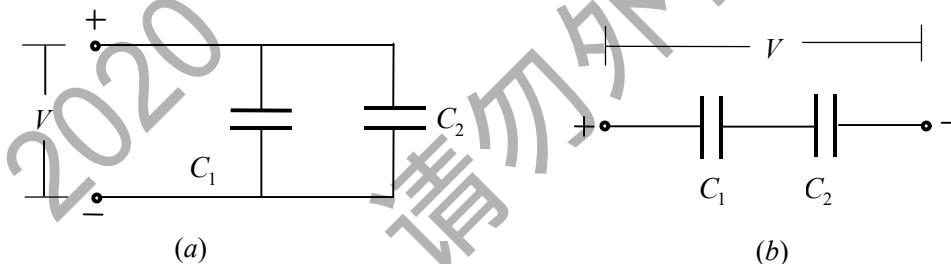


图2-44 电容器的并联和串联

为了满足电路对电容量和耐压的要求，常常把几个电容器进行串联或并联，构成电容器组使用。电容器组在电路中仍然起着电容器的作用，其总电容等于充电时流入电容器组的总电荷量与两端总电压的比值。

电容器并联时，如图2-44(a)所示，电容器组的总电压 $V$ 就等于每一个电容器的电压，而总电荷量等于各电容器的电量之和，即

$$Q = Q_1 + Q_2$$

所以此电容器组的总电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2 \quad (2-142)$$

此结果可以推广到多个电容器并联的情况，即并联总电容等于各电容之和。

电容器串联时，如图2-44(b)所示，流入电容器组的电量 $Q$ 全部进入第一个电容器的左极板（设A端接高电位），而第一电容器的右极板感应出电荷 $-Q$ 。因电容器1的右板与电容器2的左板连为一体，且原来不带电荷，所以电容器2的左板出现电荷 $Q$ ，而右板感应出 $-Q$ 。可见，每一个电容器极板上的电量都等于流入电容器组一端的电量 $Q$ ，而电容器组两端的总电压等于各电容器上的电压之和。因此有

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (2-143)$$

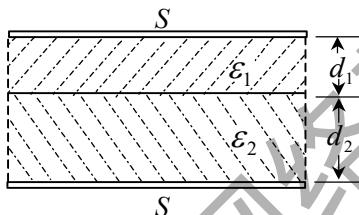
或记

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2-144)$$

此结果也可以推广到多个电容器串联的情况，即串联总电容的倒数等于各电容的倒数之和。

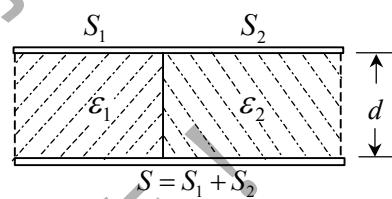
电容器并联可以提高总电容值，但电容器组的耐压能力等于耐压最低的那个电容器的耐压值；电容器串联时，由于总电压分配在各个电容上，所以总耐压提高了，但总电容反而比单个电容器小。

对于一个电容器，当内部分层和分块填充不同的电介质时，也可以等效为电容器的串联或并联来计算总电容，例如



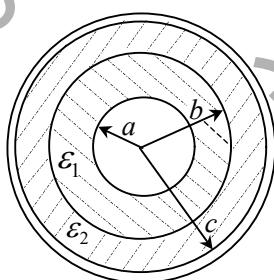
等效为两个平行板电容器串联

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}}$$



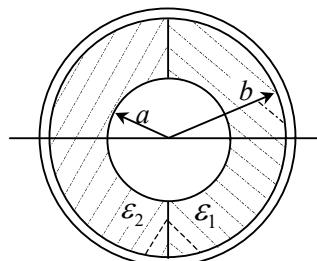
等效为两个平行板电容器并联

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$



等效为两个圆柱电容器串联

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{2\pi\epsilon_1 L}{\ln(b/a)} + \frac{2\pi\epsilon_2 L}{\ln(c/b)}}$$



等效为两个圆柱电容器并联

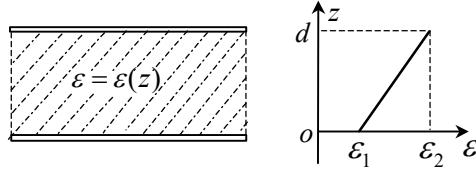
$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi\epsilon_1 L}{\ln(b/a)} + \frac{1}{2} \frac{2\pi\epsilon_2 L}{\ln(b/a)} \\ &= \frac{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)L}{\ln(b/a)} \end{aligned}$$

图2-45 填充不同介质的电容器

例2.23 在极板面积为 $S$ 、极间距离为 $d$ 的平行板电容器中填充电容率渐变的电介质，从下极板( $z=0$ )处的 $\epsilon_1$ 线性变化到上极板( $z=d$ )处的 $\epsilon_2$ ，如图2-46所示。求此电容器的电容。

解：依题意，极间任意点电容率为

$$\epsilon = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z$$



设上极板带电荷 $Q$ ，下极板带电荷 $-Q$ ，忽略边缘效应，认为极间电场均匀分布，由导体边界条件可求出任意点的电场

$$\bar{E} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{z} = -\frac{Q}{S(\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z)} \hat{z}$$

两极板间的电位差为

$$V = \int_d^0 \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_d^0 \frac{Q}{S(\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} z)} dz = \frac{Qd}{S(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

此电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2 / \epsilon_1)}$$

电容器是一个双导体系统，其储存的电场能量可由多导体系统的能量公式计算

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 Q_i U_i = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2) = \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) = \frac{1}{2} Q V \\ &= \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$

## 二、多导体系统的电荷、电位与电容

当场源电荷仅分布在多个导体上时，我们称之为多导体系统。下面讨论多导体系统的电荷、电位及电容问题。设导体系周围的媒质为线性电介质，导体系由 $N$ 个导体 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 和电位为零的大地构成，并设各导体所带电荷分别为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ 。根据电位的线性叠加原理，各导体的电位与各导体上电荷的关系可以用下式表达

$$U_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2-145)$$

上式中的 $p_{ij}$ 称电位系数，单位是1/法拉(1/F)。由上式可知， $p_{ij}$ 的数值等于第 $j$ 个导体带有单位正电荷而其他导体均不带电荷时第 $i$ 个导体的电位值，即

$$p_{ij} = \frac{U_i^{(j)}}{Q_j}, \quad p_{jj} = \frac{U_j^{(j)}}{Q_j} \quad (2-146)$$

因为 $S_j$ 带正电荷，它所发出的电力线将终止于其他导体或大地，而其他导体在此时都假设净电荷为零，它们接收的电力线必定再发出，因此，由 $S_j$ 所发出的电力线最终都将归于大地，如图2-47所示。根据电位沿电力线下降的性质，可知此时各导体的电位均应大于或等于零，并且导体 $S_j$ 的电位最高，因此有

$$p_{jj} > p_{ij} \geq 0 \quad (i \neq j, j = 1, 2, \dots, N) \quad (2-147)$$

由于电位系数是在单位电荷下定义的，所以它们的数值仅与导体系的几何参数有关，而与各导体上的实际电荷量和电位值无关。可以证明，电位系数有互易性，即

$$p_{ji} = p_{ij} \quad (2-148)$$

式(2-145)表示一个N元一次方程组，对其反演可得到各导体上的电荷表达式方程组

$$Q_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} U_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2-149)$$

$\beta_{ij}$ 称为电容系数，单位是法拉(F)。

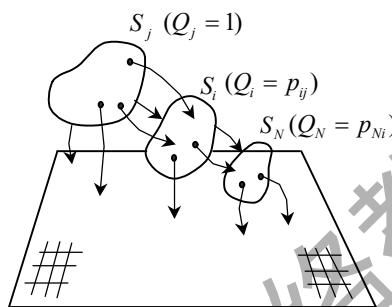


图2-47 电位系数的意义

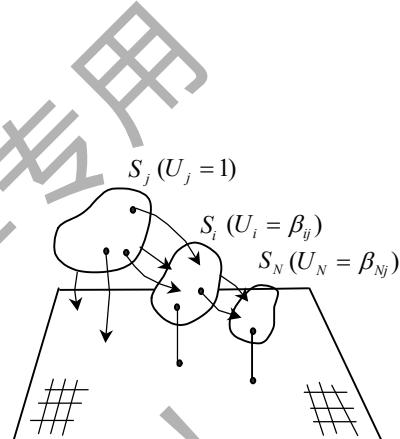


图2-48 电容系数的意义

方程组(2-145)与(2-149)的系数矩阵有如下关系

$$[\beta_{ij}] \cdot [p_{ij}]^{-1} \quad (2-150)$$

由式(2-149)可知， $\beta_{ij}$ 的数值等于第*j*个导体的电位是1V而其他导体都接地(零电位)时第*i*个导体上所带的电荷量，即

$$\beta_{ij} = \frac{Q_i}{U_j}, \quad \beta_{jj} = \frac{Q_j}{U_j} \quad (2-151)$$

因为此时导体*j*的电位为正而其他导体电位为零，故电场的电力线应从第*j*个导体发出而终止于其他各导体和大地，如图2-48所示。由此可得导体*j*带正电荷而其他导体带负电荷。考虑到导体*j*发出的电力线可能有一部分终止于地，所以其余各导体上负电荷总和的绝对值必小于或等于导体*j*上的正电荷量，因此有

$$\beta_{jj} > 0, \quad \beta_{ij} \leq 0, \quad \beta_{jj} + \sum_{i \neq j} \beta_{ij} \geq 0 \quad (2-152)$$

$\beta_{ij}$ 仅与导体系的几何参数有关，且具有互易性

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad (2-153)$$

式(2-149)可以改写成另外的一种形式，以第*i*个导体的方程为例，对右边每项加减 $\beta_{ij} U_i$ ，得

$$\begin{aligned}
Q_i &= \sum_{j=1}^N \beta_{ij} U_j - \sum_{j=1}^N \beta_{ji} U_i + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} U_i = \sum_{j=1}^N -\beta_{ij} (U_i - U_j) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} U_i \\
&= \sum_{j=1}^N C_{ij} (U_i - U_j) + C_{i0} U_i
\end{aligned} \tag{2-154}$$

其中

$$C_{ij} = -\beta_{ij}, \quad C_{i0} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \dots + \beta_{iN} \tag{2-155}$$

式(2-154)中的 $U_i - U_j$ 是第*i*个导体与第*j*个导体的电位差，可记作 $U_{ij}$ ； $U_i$ 是第*i*个导体对地的电位差，记作 $U_{i0}$ ，故该式又可以写成

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} U_{ij} + C_{i0} U_{i0} \tag{2-156}$$

上式中的 $C_{i0}$ 称为第*i*个导体与大地间的部分电容，或称为导体*i*的自有部分电容，它的数值等于设全部导体的电位都为1V时第*i*个导体上的电荷量。而 $C_{ij}$ 称为第*i*个导体与第*j*个导体间的互有部分电容，它的数值等于第*i*个导体的电位为1V而其余导体均接地时第*i*个导体上的电荷量。由上面的定义可以看出，所有部分电容都为正值且互有部分电容有互易性，即

$$C_{ij} = C_{ji} \tag{2-157}$$

上节介绍的电容器是一个双导体系统，若其中的一个导体被另一个与地相接的导体所完全包围，按前面的讨论，两个导体的自有部分电容都不存在，由式(2-156)得

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_{12} U_{12} \\
Q_2 &= C_{21} U_{21} = -C_{12} U_{12} = -Q_1
\end{aligned}$$

记  $Q_1 = -Q_2 = Q$ ， $U_{12} = U$ ， $C_{12} = C$ ，则得到上一节中的电容器电容公式

$$C = \frac{Q}{U}$$

但如果电容器中没有起屏蔽作用的接地导体，导体电极所发出的电力线将有一部分终止于大地，此时由式(2-156)得

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_{10} U_{10} + C_{12} U_{12} \\
Q_2 &= C_{20} U_{20} + C_{21} U_{21} = C_{20} U_{20} - C_{12} U_{12}
\end{aligned}$$

这表明，两个导体电极上的电荷除了有一个等值异号的部分 $|C_{12} U_{12}|$ 外，还各有一个与大地相联系的部分 $C_{i0} U_{i0}$ 。在一般情况下，此时的 $Q_1$ 与 $Q_2$ 不再等值异号，因此也就不能用一个电容量 $C$ 来表示两极上的电荷与电压关系，而必须使用部分电容的概念进行说明与计算。图2-49示意了此时的部分电容关系。

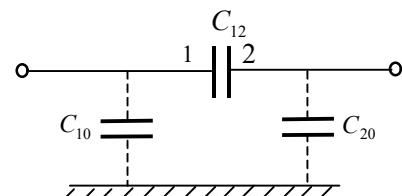


图2-49 无屏蔽电容器的部分电容

**例2.24** 真空中有两个半径分别为 $a_1$ 和 $a_2$ 的导体小球，两球心之间的距离为 $r$ ，并有 $r \gg a_1$ 和 $r \gg a_2$ 。(a) 求此导体系统的电

位系数、电容系数和部分电容；(b) 当用一根细导线将两球相连接后，求两球上的电荷量之比和电场强度之比。

解：(a) 因为  $r \gg a_1$  和  $r \gg a_2$ ，所以球面上的电荷可近似为均匀分布。设两个小球分别带电荷  $Q_1$  和  $Q_2$ ，电位分别为  $U_1$  和  $U_2$ 。每个小球的电位都是自身电荷产生的自电位与另一个小球的电荷在此产生的互电位之和，在计算互电位时可以把小球近似为一个点，因此有

$$U_1 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_1}\right)Q_1 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\right)Q_2 \quad (1)$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\right)Q_1 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_2}\right)Q_2 \quad (2)$$

将上面两式与式(2-145)相比较，得到此系统的电位系数

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_1}, \quad p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a_2}$$

将上面的  $p_{ij}$  代入关系式(2-150)，得到系统的电容系数

$$\beta_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 r a_1}{r^2 - a_1 a_2}, \quad \beta_{12} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a_1 a_2}{r^2 - a_1 a_2}$$

$$\beta_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a_1 a_2}{r^2 - a_1 a_2}, \quad \beta_{22} = -\frac{4\pi\epsilon_0 r a_2}{r^2 - a_1 a_2}$$

利用式(2-155)可以得到部分电容

$$C_{10} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a_1 (r - a_2)}{r^2 - a_1 a_2}, \quad C_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0 a_1 a_2}{r^2 - a_1 a_2}$$

$$C_{20} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a_2 (r - a_1)}{r^2 - a_1 a_2}, \quad C_{21} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a_1 a_2}{r^2 - a_1 a_2}$$

(b) 当两球用导线连接后电位相等，令前面的(1)、(2)两式相等，可推导出

$$Q_1 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{r - a_2}{r - a_1} Q_2$$

由已知条件  $r \gg a_1$  和  $r \gg a_2$ ，上式可以近似为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

考虑到球面上的电荷近似均匀分布，可将  $Q_i = 4\pi a_i^2 \rho_{si}$  代入上式，得到

$$\frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{a_2}{a_1}$$

再将导体表面的边界条件  $\epsilon_0 E_i = \rho_{si}$  代入上式，得到两球面上的电场强度之比为

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

由上式看到，两球连接后变为一个孤立导体，表面上的电场强度与导体表面的曲率半径成

反比。

## 习题二

2.1 一点电荷  $Q_1 = 3.2 \times 10^{-10} \text{ C}$ ，位于点  $P_1(2,1)$ ，另一点电荷  $Q_2 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  位于  $P_2(1,2)$ 。求  $Q_2$  所受到的作用力  $\vec{F}$ 。

2.2 一个正  $\pi$  介子由一个  $u$  夸克和一个反  $d$  夸克组成。 $u$  夸克带电量为  $\frac{2}{3}e$ ，反  $d$  夸克带电量为  $\frac{1}{3}e$ 。将夸克作为经典粒子处理，试计算正  $\pi$  介子中夸克间的电力（设它们之间的距离为  $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ ）。

2.3 在  $xy$  平面上有点电荷  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = 2Q$ , 和  $Q_3 = -3Q$ ，它们分别位于点  $P_1(1/2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0)$  和  $P_3(0, 1)$ 。求坐标原点上的电场强度  $\vec{E}$ 。

2.4 实验证明，地球表面上方电场不为零，晴天大气电场的平均场强约为  $120 \text{ V/m}$ ，方向向下，这意味着地球表面上有多少过剩电荷？试以每平方厘米的额外电子数表示。

2.5 一半径为  $a$  的细导线圆环，环上均匀分布着电荷密度为  $\rho_l$  的线电荷。求轴线上任一点的电场强度。

2.6 (1) 计算刚好平衡一个电子重力的电场强度  $\vec{E}$ 。

(2) 如果这个电场是位于下方的另一电子产生的，试问两电子间的距离是多少？

2.7 假设在边长  $a = 10 \text{ cm}$  的正方形的四个顶点上各放一个  $Q = 10^{-6} \text{ C}$  的点电荷，试计算  $q = 2 \times 10^{-7} \text{ C}$  的试验点电荷自中心位移到一边的中点时外力所作的功。

2.8 半径为  $a$ ，长为  $2L$  的圆柱面上均匀分布着电荷密度为  $\rho_s$  的面电荷，设圆柱轴线与  $z$  轴重合且中心在原点。求  $z$  轴上的电位和电场强度。

2.9 半径为  $a$  的球中充满密度为  $\rho(r)$  的体分布电荷，已知电场为

$$E_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \leq a) \\ (a^5 + Aa^4)/r^2 & (r > a) \end{cases}$$

求电荷密度  $\rho(r)$ 。

2.10 设真空中电位按照下面规律分布

$$U_r = \begin{cases} C \frac{a^3}{r} & (r \geq a) \\ \frac{3}{2}C(a^2 - \frac{r^2}{3}) & (r < a) \end{cases}$$

求对应的电荷分布。

2.11 假设一带电导体系统是由同心的内球和外球壳所组成，其中内球的半径为  $a$ ，外球的内表面和外表面的半径分别为  $b$  和  $c$ ，内球带电荷  $Q$ ，外球壳带净电荷  $Q'$ ，求任意点的电位与电场强度。

2.12 两异性点电荷  $Q_1$  和  $Q_2$  分别位于原点和  $x = -L$  处，试证明电位等于零的曲面为一

球面，此球面中心坐标为  $x = -LQ_1^2/(Q_1^2 - Q_2^2)$ ，半径等于  $LQ_1Q_2/(Q_1^2 - Q_2^2)$ 。

2.13 一半径为  $a$  的球体充满密度为  $\rho = a^2 - r^2$  的体分布电荷。用高斯定律和解电位微分方程的方法分别求任意点的电场强度和电位。

2.14 计算以下不同方向上电偶极子的电场强度分量  $E_\theta$  与  $E_r$  的比值

$$(1) \theta = 0^\circ; (2) \theta = 30^\circ; (3) \theta = 60^\circ; (4) \theta = 90^\circ$$

2.15 精密的实验已表明，一个电子与一个质子的电量在实验误差为  $\pm 10^{-21} \text{ e}$  的范围内是相等的，而中子的电量在  $\pm 10^{-21} \text{ e}$  的范围内为零。试问，在最坏情况下，一个氧原子（具有8个电子，8个质子和8个中子）所带的最大可能静电荷是多少？试比较氢原子核与核外电子之间的电力和万有引力的大小。

2.16 一种经典理论认为：氢原子的结构是大小为  $+e$  的电荷被密度为  $\rho(r) = -Ce^{-2r/a_0}$  的负电荷所包围， $a_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，称为“玻尔半径”， $C$  是为使负电荷总量等于  $-e$  而设的常量，试问半径  $a_0$  内的净电荷是多少？半径  $a_0$  处的电场强度有多大？

2.17 假设一均匀静电场的方向向上，一半径  $a = 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$  的带电水滴表面电场强度为  $6 \text{ KV/m}$ ，若不让水滴落下，电场强度应为多大？

2.18 两个点电荷  $q$  和  $-kq$  ( $k < 1$ ) 分别位于  $(0, 0, 0)$  点和  $(0, d, 0)$  点，求零电位面方程。

2.19 线电荷以密度  $\rho_l$  均匀分布在半径为  $a$  的半圆弧上，求圆心处的电场强度；设想所有的电荷集中于一点，并在圆心处产生相同的电场，求此点的位置。

2.20 假设真空里电位按照下面规律分布

$$U = \frac{e^{-ar}}{r}$$

求对应电荷分布。

2.21 一个半径为  $a$  的带电球壳，电荷密度为  $\rho_s = \rho_0 \cos \theta$ ，其中  $\theta$  是极角。计算球外的远区电位和它的偶极矩。

2.22 证明电偶极子在位置矢  $\vec{r}$  的点上所产生的电场强度矢量可以表示为

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right]$$

2.23 在以下均匀电介质里有两个相同的点电荷  $Q = 10^{-8} \text{ C}$ ，电荷之间相距  $R = 0.1 \text{ m}$ ，试计算两电荷的相互作用力。

(1) 空气 ( $\epsilon_r = 1$ ) ； (2) 变压器油 ( $\epsilon_r = 2.2$ ) ； (3) 蒸馏水 ( $\epsilon_r = 81$ )。

2.24 一半径为  $8 \text{ cm}$  的导体球上套一层厚度为  $2 \text{ cm}$  的介质层，假设导体球带电荷  $4 \times 10^{-6} \text{ C}$ ，介质的  $\epsilon_r = 2$ ，计算距离球心  $250 \text{ cm}$  地方的电位。

2.25 假设真空中有均匀电场  $\vec{E}_0$ ，若放一厚度为  $d$ ，相对电容率为  $\epsilon_r$ ，法线与  $\vec{E}_0$  的夹角为  $\theta_0$  的大介质片，求介质片中的电场强度  $\vec{E}$  及  $\vec{E}$  与法线的夹角  $\theta$  和介质表面的极化电荷密度  $\rho_{ps}$ 。

2.26 一个半径为  $a$  的电介质球含有均匀分布的自由电荷  $\rho$ ，证明其中心点的电位是

$$\frac{2\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r} \cdot \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$$

2.27 一半径为  $a$  的电介质球内极化强度为  $\bar{P} = \hat{r} K/r$ ，其中  $K$  是一常数，

- (1) 计算极化电荷的体密度和面密度；
- (2) 计算自由电荷密度；
- (3) 计算球内、外的电位分布。

2.28 电荷密度处处等于零的非均匀电介质中，静电位满足什么形式的微分方程？

2.29 一导体球半径为  $a$ ，其外罩以内外半径分别为  $b$  和  $c$  的同心厚导体壳，此系统带电后内球的电位为  $U$ ，外球所带总电量为  $Q$ 。求此系统各处的电位和电场分布。

2.30 如图2-50所示，有三块互相平行的导体板，外面的两块用导线连接，原来不带电。中间一块上所带总面电荷密度为  $1.3 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ 。求每快板的两个表面的面电荷密度（忽略边缘效应）。

2.31 同轴线电容器的外导体内半径为  $b$ ，中间充满相对电容率为  $\epsilon_r$  的介质。当内、外导体间加电压  $U_0$  时，求使电容器中的电场强度取最小值时的内导体半径  $a$  和这个  $E_{\min}$  的值。

2.32 一同轴线的内导体半径为  $a$ ，外导体的内半径为  $b$ ，之间填充两种绝缘材料， $a < r < r_0$  电容率为  $\epsilon_1$ ， $r_0 < r < b$  电容率为  $\epsilon_2$ 。若要求两种介质中电场强度的最大值相等，介质分界面的半径  $r_0$  应当等于多少？

2.33 一半径为  $a$  的介质球均匀极化，极化强度为  $\bar{P} = \hat{z} P$ ，求此介质球在空间任意点上所产生的电位。

2.34 如果同轴导体之间充以电介质，要使介质中电场强度与  $r$  无关，则相对电容率  $\epsilon_r$  应随  $r$  如何变化？束缚电荷体密度是多少？

2.35 在两种电容率分别为  $\epsilon_1, \epsilon_2$  的电介质的分界面上，有密度为  $\rho_s$  的面电荷，界面两侧的电场为  $\vec{E}_1$  和  $\vec{E}_2$ 。证明  $\vec{E}_1$ 、 $\vec{E}_2$  与界面法线  $\hat{n}$  间的夹角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  间如下关系：

$$\tan \theta_2 = \frac{\epsilon_2 \tan \theta_1}{\epsilon_1 [1 - \rho_s / (\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1)]}$$

2.36 一个半径为  $a$  的实心导体球的与一个内、外半径分别为  $b$  和  $c$  的导体球壳同心，在内球表面上套一层厚度为  $t$  ( $t < b - a$ ) 的电介质，电介质的电容率为  $\epsilon$ ，求任意点电位

- (1) 假设内导体球带电荷  $Q$ ，导体球壳不带电；
- (2) 假设内导体球不带电，导体球壳带电荷  $-Q$ 。

2.37 两电介质的分界面为  $z=0$  平面，已知  $\epsilon_{r1}=2$  和  $\epsilon_{r2}=3$ ，如果已知区域1中的

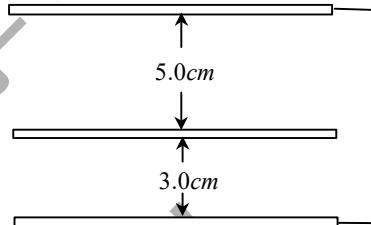


图2-50 题2.30图

$$\vec{E}_1 = 2y\hat{x} - 3x\hat{y} + (5+z)\hat{z}$$

我们能求出区域2中哪些地方的  $\vec{E}_2$  和  $\vec{D}_2$ ？能求出2中任意点的  $\vec{E}_2$  和  $\vec{D}_2$  吗？

2.38 电场中有一半径为  $a$ 、电容率为  $\epsilon$  的电介质球，已知

$$U_1 = -E_0 r \cos \theta - \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{\epsilon + 2\epsilon_0} a^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (r \geq a)$$

$$U_2 = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 r \cos \theta \quad (r < a)$$

验证球面的边界条件，并计算球表面的极化电荷密度。

2.39 一平板电容器的电极面积  $A = 0.05 \text{ m}^2$ ，电极间的距离  $d = 5 \text{ mm}$ ，两极电压为  $U = 200 \text{ V}$ ，计算电极上的电荷、电容器的储能以及电极之间的作用力。

2.40 一个  $100 \text{ pF}$  的电容器充电到  $100 \text{ V}$ ，把充电电池断开后，在把电容器并联到另一电容器上，最后电压是  $30 \text{ V}$ ，第二个电容器的电容多大？并联后损失了多少电能？这电能哪里去了？

2.41 三个电容器的电容分别为

$C_1 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 10 \mu\text{F}$ 。各自用  $36 \text{ V}$  的直流电源充电后，按图2-51那样连接起来，求连接后各电容器的电量和电压

2.42 假设一同轴线内、外导体单位长度所带的电荷为  $q$  和  $-q$ ，证明其单位长度的电场贮能为  $q^2/(2C)$ ，其中  $C$  是同轴线单位长度的电容。

2.43 一平行板电容器的极板面积为  $A$ ，电极之间距离为  $d$ ，电极之间绝缘材料是由电容率  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  的两种电介质组成，它们的厚度分别为  $d_1$  和  $d_2$ 。假设电极之间电压为  $V_0$ ，求每种电介质界面之间电压以及两种电介质中电场能量密度之比。

2.44 两个导体小球的半径分别为  $a_1$  和  $a_2$ ，两球心之间距离为  $R$ ，而且  $R \gg a_1$  和  $R \gg a_2$ ，两球分别带电荷  $Q_1$  和  $Q_2$ 。求导体系统的电场能量和两球的相互作用力。

2.45 将相对电容率为  $\epsilon_r$ ，内、外半径分别为  $a$ 、 $b$  的介质球壳从无穷远移至真空点电荷  $Q$  的电场中，并使点电荷位于其球心，求此过程中电场力所做的功。

2.46 已知空气的击穿强度为  $3 \times 10^3 \text{ KV/m}$ ，当一平行板空气电容器两极板间加电压  $50 \text{ KV}$  时，每平方米面积的电容最大是多少？

2.47 为了测量电介质材料的相对电容率，将一块厚度为  $1.5 \text{ cm}$  的平板材料慢慢地插进一距离为  $2.0 \text{ cm}$  的空气电容器中间，在插入过程中，电容器的电荷保持不变。插入后，两极板间的电位差减小为原来的  $60\%$ ，问电介质的相对电容率是多大？

2.48 有一半径为  $a$ 、带电量  $Q$  的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的电容率分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ ，分界面可视为无限大平面。求：

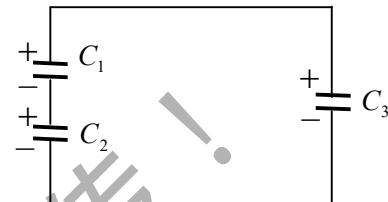


图2-51 题2.41 图

(1) 球的电容; (2) 总静电能。

2.49 同轴圆柱电容器的内导体半径为 $a$ , 外导体内半径为 $b$ , 两导体间 $0 < \varphi < \varphi_0$  的区域内充填介电常数为 $\varepsilon$  的电介质, 其余部分为真空, 求单位长度的电容。

2020 网络教学专用  
请勿外传!