

1. 已知 $\sqrt{1021} \approx 31.953$ 有 5 位有效数字, 求方程 $x^2 - 32x + \frac{3}{4} = 0$ 的两个根, 要求至少有 4 位有效数字.

2. 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (1) 将 A 分解为 $A = LL^T$, 其中 L 为下三角矩阵且主对角线上的元素为正;
- (2) 用 Cholesky 分解法求解 x : 即先求 $Ly = b$ 得到 y , 再求 $L^T x = y$ 得到 x ;
- (3) 求向量 b 的 1 范数, ∞ 范数和 2 范数;
- (4) 求矩阵 A 的 1 范数, ∞ 范数, 2 范数和 Frobenius 范数.

3. 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -4 & 20 & -4 \\ 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (1) 写出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式;
- (2) 对任意初值, Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法是否收敛? 说明理由;
- (3) 如果对本题的 A 和 b 施行 $\omega = \frac{1}{2}$ 的松弛法, 那么该松弛法是否收敛? 说明理由.

4. 考虑特征值问题 $Ax = \lambda x$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

- (1) 运用幂法 (Power Method) 求按模最大的特征值, 取 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 迭代两步;
- (2) 运用带移位的反幂法 (Shifted Inverse Power Method), 即对 $A - \lambda^* I$ (λ^* 取为 3)

施行反幂法, 求 A 的按模最大的特征值, 取 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 迭代两步.

5. 已知 $y = f(x)$ 的函数表如下:

x_i	-2	0	2
y_i	24	0	8

用 Lagrange 二次插值多项式近似计算 $f(1)$ 的值, 用 Newton 二次插值多项式近似计算 $f(-1)$ 的值.

6. 已知数据组 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, 请对如下形式的最小二乘拟合函数分别写出对应

的正则方程组:

(1) $y = a + bx^2$;

(2) $y = axe^{bx}$.

7. 根据 $f(x)$ 的如下数据表, 计算 $I = \int_0^2 f(x)dx$. 这里我们假定 $f(x) \in C^4[0,2]$.

x_i	0	1	2
y_i	1	2	5

(1) 用复化梯形公式近似计算 I 得到 I_T , 并给出截断误差的估计式;

(2) 用 Simpson 公式近似计算 I 得到 I_S , 并给出截断误差的估计式;

(3) 先对数据表求 Lagrange 二次插值多项式 $L_2(x)$, 再比较 $I_L = \int_0^2 L_2(x)dx$ 与 I_S 之间的关系, 这种关系是否必然?

8. 写出代数精确度为 4 的 Gauss 型求积公式 $\int_{-1}^1 xf(x)dx \approx A_1f(x_1) + A_2f(x_2)$, 其中 $x_1 < x_2$, 需满足的非线性方程组, 求出一组解, 再用它求 $I_4 = \int_{-1}^1 x^5 dx$ 和 $I_5 = \int_{-1}^1 (7x^6 + p_5(x))dx$ 的近似值, 其中 $p_5(x)$ 是至多 5 次多项式.

9. 已知非线性方程 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

(1) 对初始有根区间 $[0,3]$ 采用对分区间法 (bisection method) 求 $f(x)$ 在 $\frac{3}{2}$ 附近的根, 要求迭代 2 次;

(2) 对初值 $x_0 = 2$ 的定点迭代 $x_{n+1} = g_1(x_n)$, $g_1(x) = -x^3 + x^2 + 1$, 计算迭代 2 次所得的 x_1, x_2 , 判断该迭代法的敛散性;

(3) 对初值 $x_0 = 2$ 的定点迭代 $x_{n+1} = g_2(x_n)$, $g_2(x) = \frac{1+x+x^2-x^3}{2}$, 求出 x_n 关于 n 的表达式, 判断该迭代法的敛散性;

(4) 写出 Newton 法的迭代格式, 对初值 $x_0 = \frac{3}{2}$ 计算迭代 1 次所得的 x_1 , 并证明存在 $\delta > 0$ 使得对于任意初值 $x_0 \in (1-\delta, 1+\delta)$, Newton 迭代法都是收敛的.

10. 考虑初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2y}, & 0 \leq x \leq 1. \\ y(0) = 1 \end{cases}$

- (1) 取步长 $h = 0.1$, $y_0 = 1$, 计算用 Euler 法步进一次得到的 y_1 ;

(注意: 只有本小题的 h 取具体的值, 下面的其它小题中的 h 假定为足够小但不取具体的数值.)

- (2) 先写出梯形法 (Trapezoidal Method) 的格式, 后手动消除该格式中需要的“非线性方程求根”的迭代法, 即把 y_{n+1} 用 x_n , x_{n+1} 和 y_n 表示出来;
- (3) 写出改进 Euler 法的格式.