

# 信号处理 理论与技术

北京理工大学 信息与电子学院

2025 年 12 月 10 日

德以明理



学以精工

# 信号处理 理论与技术 II

## 复习提纲

### 考试安排

第 5 章 离散时间信号分析

第 6 章 离散时间系统分析

第 7 章 傅里叶变换离散化算法

第 8 章 滤波器设计



## ◇ 考试安排

25.12.24 (周三) 10:10-12:10, 提前 20 分钟到考场

## ◇ 试卷结构

一、计算与简答 (7 题, 40 分)

二、综合题 (4 题, 60 分)

## ◇ 答疑

问卷截止 12.22 (周一) 晚 8:00

微信群集中回复

备注授课老师, 便于对应老师解答



# 信号处理 理论与技术 II

## 复习提纲

### 考试安排

第 5 章 离散时间信号分析

第 6 章 离散时间系统分析

第 7 章 傅里叶变换离散化算法

第 8 章 滤波器设计



### □ 5.1.1 时域基本运算

- 对自变量进行变换：

- 时移： $x[n] \rightarrow x[n - n_0]$

- 反褶： $x[n] \rightarrow x[-n]$

- 抽取\*： $x[n] \rightarrow x[Dn]$

- 内插\*：

$$x[n] \rightarrow \begin{cases} x[n/I], & n = kl \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 对序列整体进行运算：

- 相加： $x_1[n] + x_2[n]$

- 相乘： $x_1[n]x_2[n]$

- 数乘： $cx[n]$

- 差分： $\nabla x[n] = x[n] - x[n - 1]$

- 累加和： $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$

注：标\*为了解内容，下同。



### □ 5.1.2 线性卷积

#### ● 定义

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]$$

#### ● 范围和长度

设**有限长序列**  $x_1[n], n_1 \leq n \leq n_2$ ,  $x_2[n], n_3 \leq n \leq n_4$ , 长度分别为  $N_1 = n_2 - n_1 + 1$ ,  $N_2 = n_4 - n_3 + 1$ , 则  $x_1[n] * x_2[n]$  的**自变量范围**为  $n_1 + n_3 \leq n \leq n_2 + n_4$ , **长度**为  $L = N_1 + N_2 - 1$ 。

#### ● 计算 (根据情况灵活选择)

1. 定义法/图解法 (反褶、移位、相乘、求和)
2. 阵列法 (适用于**有限长序列**)
3. 竖式乘法 (等价于阵列法)

#### ● 性质 交换律、结合律、分配律、移位、差分、累加和等



## ● 常见序列的线性卷积

$x_1[n]$	$x_2[n]$	$x_1[n] * x_2[n]$
$x[n]$	$\delta[n]$	$x[n]$
$x[n]$	$u[n]$	$\sum_{m=-\infty}^n x[m]$
$a^n u[n]$	$u[n]$	$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$
$a^n u[n]$	$b^n u[n]$	$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} u[n], b \neq a$
$a^n u[n]$	$a^n u[n]$	$(n + 1)a^n u[n]$
$u[n]$	$u[n]$	$(n + 1)u[n]$
$nu[n]$	$nu[n]$	$\frac{1}{6}n(n - 1)(n + 1)u[n]$



### □ 5.1.3 周期卷积和循环卷积

#### ● 周期序列与主值序列

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \leftrightarrow x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$$

#### ● 周期卷积的定义

$$\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n - m]$$

#### ● 周期卷积的计算\*

周期序列整体反褶、移位、相乘、求和 (一个周期内), 结果依然为周期序列。





- 循环卷积的定义

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[\langle n - m \rangle_N]$$

- 循环反褶与循环移位

$$x[\langle -n \rangle_N] = \tilde{x}[-n] R_N[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ x[N - n], & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$
$$x[\langle n - m \rangle_N] = \tilde{x}[n - m] R_N[n] = \begin{cases} x[N - m + n], & 0 \leq n \leq m \\ x[n - m], & m \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

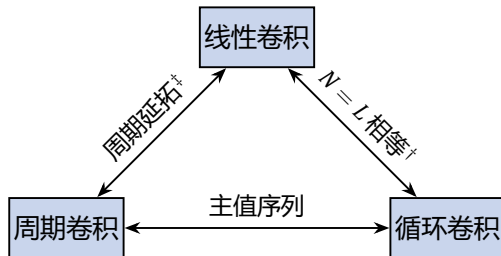
结合图形理解、计算，详见课件 chp5-1 P37-38。



### ● 循环卷积的计算

1. 矩阵法
2. 竖式乘法 (等价于矩阵法的转置)

### ● 三类卷积的关系



<sup>†</sup> $N$ : 延拓周期/循环点数;  $L$ : 线性卷积长度

<sup>‡</sup> 周期延拓:  $N \geq L$ : 无混叠;  $N < L$ : 有混叠



### □ 5.1.4 信号的相关 \*

- **定义** 以离散时间信号为例:

$$r_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n-m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\bar{y}[m-n] = (x * \bar{y})[m]$$

其中  $\bar{y}[n] = y^*[-n]$ 。若  $x[n] = y[n]$ , 互相关序列转化为自相关序列。

- **计算**

共轭 (若实序列则省略)、移位、相乘、求和。

- **范围和长度**

设**有限长序列** $x[n], n_1 \leq n \leq n_2$  和  $y[n], n_3 \leq n \leq n_4$ , 长度分别为  $N_1 = n_2 - n_1 + 1$  和  $N_2 = n_4 - n_3 + 1$ , 则  $r_{xy}[m]$  的**自变量范围**是  $n_1 - n_4 \leq m \leq n_2 - n_3$ , **长度**为  $L = N_1 + N_2 - 1$ 。

- **性质** 参考课件 chp5-1 P56



### □ 5.2.1 离散时间傅里叶变换的定义

#### • 定义

$$X(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (\text{正变换/分析})$$

$$x[n] = \text{DTFT}^{-1}[X(e^{j\Omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \quad (\text{逆变换/综合})$$

#### • 与傅里叶变换的关系 周期延拓、频率归一化、幅度 $\times 1/T$

$$X(e^{j\Omega}) = X_s(j\omega) \Big|_{\omega=\Omega/T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

其中  $\Omega = \omega T$  为**数字角频率**，单位 rad。 $X(e^{j\Omega})$  是以  $2\pi$  为周期的**周期化频谱**。



## □ 5.2.2 常见信号的 DTFT

$x[n]$	$X(e^{j\Omega})$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$a^n u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$a^{ n },  a  < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$
$\begin{cases} 1, &  n  \leq N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{\sin(\Omega(N + 1/2))}{\sin(\Omega/2)}$
$\frac{\sin Wn}{\pi n}$	$\begin{cases} 1, &  \Omega  \leq W \\ 0, & W <  \Omega  \leq \pi \end{cases}$



### □ 5.2.2 常见信号的 DTFT

$x[n]$	$X(e^{j\Omega})$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$
$\sin \Omega_0 n$	$j\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$
$1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - m]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$

泊松求和公式\*： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$  (常数序列 1 的 DTFT)



### □ 5.2.3 DTFT 的性质

性质	时域 $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ 频域
线性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$
共轭	$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\Omega})$
反褶	$x[-n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\Omega})$
时移	$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$
频移	$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$
抽取 *	$x[Dn] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j\frac{\Omega - 2\pi k}{D}})$
内插 *	$\begin{cases} x[n/I], & n = kI \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega I})$



### □ 5.2.3 DTFT 的性质

性质	时域 $\xleftrightarrow{\text{DTFT}}$ 频域
时域差分	$X[n] - X[n-1] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} (1 - e^{-j\Omega})X(e^{j\Omega})$
累加和	$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
频域微分	$nX[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} j \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega})$
卷积定理	$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_1(e^{j\Omega})X_2(e^{j\Omega})$
乘积定理	$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\Omega}) \circledast X_2(e^{j\Omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\Omega}) ^2 d\Omega$

能够综合运用 DTFT 性质分析、计算问题。





### □ 5.3.1 $z$ 变换的定义

#### ● 双边 $z$ 变换

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathcal{R} \quad (\text{正变换/分析})$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (\text{逆变换/综合})$$

#### ● 与 DTFT 的关系

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \text{DTFT}[x[n]], \quad z = e^{j\Omega} \in \mathcal{R}$$

#### ● 单边 $z$ 变换

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}_u} X_+(z) = \mathcal{Z}[x[n]u[n]]$$



### □ 5.3.2 $z$ 变换的收敛域

信号	收敛域
有限长序列 <sup>1</sup>	$0 <  z  < \infty$
右边序列	$ z  > \max_k( p_k )$ , $p_k$ 为极点
左边序列	$ z  < \min_k( p_k )$ , $p_k$ 为极点
双边序列	$r_1 <  z  < r_2$ 或空集

<sup>1</sup> 若起始时刻  $\geq 0$ , 则包含无穷远点; 若截止时刻  $\leq 0$ , 则包含原点。

□ 5.3.3  $z$  变换的性质● 双边  $z$  变换

性质	时域 $\xleftrightarrow{Z}$ 频域
线性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$
共轭	$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$
反褶	$x[-n] \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1})$
移位	$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$
抽取 *	$x[Dn] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(W_D^k z^{1/D})$
内插 *	$\begin{cases} x[n/I], & n = kI \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \xleftrightarrow{Z} X(z^I)$
时域差分	$X[n] - X[n - 1] \xleftrightarrow{Z} (1 - z^{-1})X(z)$



### □ 5.3.3 $z$ 变换的性质

性质	时域 $\xleftrightarrow{Z}$ 频域
累加和	$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{Z} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$
$z$ 域微分	$nX[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{d}{dz} X(z)$
$z$ 域尺度变换	$a^n X[n] \xleftrightarrow{Z} X(z/a)$
卷积定理	$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$
乘积定理	$x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(\nu)X_2(z/\nu)\nu^{-1}d\nu$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\nu)X^*(1/\nu^*)\nu^{-1}d\nu$

能够综合运用  $z$  变换的性质分析、计算问题。

□ 5.3.3  $z$  变换的性质● 单边  $z$  变换

性质	时域 $\xleftrightarrow{\mathcal{Z}_u}$ 频域
左移	$x[n+k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}_u} z^k \left[ X_+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], k > 0$
右移	$x[n-k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}_u} z^{-k} \left[ X_+(z) + \sum_{n=1}^k x[-n]z^n \right], k > 0$
初值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X_+(z)$
终值定理	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X_+(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X_+(z)$

单边  $z$  变换的移位性质主要用于求解系统的响应。



### □ 5.3.4 逆 $z$ 变换

#### ● 围线积分法 (留数法)\*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{p_i \in C} \text{Res}[X(z)z^{n-1}, p_i]$$

其中  $C$  为收敛域内任意一条封闭曲线, 留数计算方式如下:

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}, p_i] = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^k X(z)z^{n-1} \right|_{z=p_i}, \quad p_i \text{ 为 } k \text{ 阶极点}$$



### ● 部分分式展开法

假设  $X(z)$  具有有理函数形式, 将  $X(z)$  的分子、分母表示成  $z$  的多项式, 对  $X(z)/z$  作部分分式展开 (假设均为一阶极点):

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z - p_N}$$

其中

$$A_i = \left. \frac{(z - p_i)X(z)}{z} \right|_{z=p_i}, \quad i = 1, \cdots, N$$

于是

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - p_i} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}}$$

最后根据收敛域判断时域表达式。

## 5.3 离散时间信号的复频域分析



表 1: 常见双边  $z$  变换对

$x[n]$	$X(z)$	收敛域
$\delta[n]$	1	$z$ 平面
$\delta[n - k]$	$z^{-k}$	$z$ 平面 <sup>1</sup>
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $
$(n + 1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$-(n + 1)a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $

<sup>1</sup> 须排除原点 (若  $k > 0$ ) 或无穷远点 (若  $k < 0$ )。



## 5.3 离散时间信号的复频域分析



表 1(续): 常见双边  $z$  变换对

$x[n]$	$X(z)$	收敛域
$C_{n+m-1}^n a^n u[n], m \geq 1$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^m}$	$ z  >  a $
$-C_{n+m-1}^n a^n u[-n-1], m \geq 1$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^m}$	$ z  <  a $
$\cos(\Omega n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \Omega}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$\sin(\Omega n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin \Omega}{1 - 2z^{-1} \cos \Omega + z^{-2}}$	$ z  > 1$
$a^n \cos(\Omega n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \Omega}{1 - 2az^{-1} \cos \Omega + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \sin(\Omega n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin \Omega}{1 - 2az^{-1} \cos \Omega + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $

组合数:  $C_{n+m-1}^n = \binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$

# 信号处理 理论与技术 II

## 复习提纲

### 考试安排

第 5 章 离散时间信号分析

**第 6 章 离散时间系统分析**

第 7 章 傅里叶变换离散化算法

第 8 章 滤波器设计



### ● 描述方法

- 差分方程
- 系统函数  $H(z) \Leftrightarrow$  冲激响应  $h[n] \Leftrightarrow$  频率响应  $H(e^{j\Omega})$
- 系统框图

### ● 类型与结构

- 递归/非递归
- FIR/IIR
- MA/AR/ARMA \*

### ● 系统框图

- 基本运算单元: **加法器** $\oplus$ 、**标量乘法器** $\xrightarrow{a}$ 、**单位延时器** $z^{-1}$
- 基本结构: 串联、并联、反馈
- 具体结构:
  - FIR: **直接型** (仅有  $B(z)$ , **无反馈**)
  - IIR: **直接 I 型** ( $B(z)$ ,  $1/A(z)$  级联, **有反馈**) / **II 型** (共享延时器)



### □ 6.2.1 离散时间系统的零输入响应

零输入响应：在无信号激励下系统的**自然响应**，满足齐次差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0 \quad (\text{特征方程})$$

#### ● 特征根均为单根

$$y_{zi}[n] = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \cdots + C_N \lambda_N^n$$

其中  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_N$ ,  $C_i, i = 1, \cdots, N$  根据**初始条件**确定。

**思考：**零输入响应和全响应的初始条件有何区别？

#### ● 特征根有重根\*

$$y_{zi}[n] = (C_{k1} + C_{k2}n + \cdots + C_{km}n^{m-1}) \lambda_k^n + \sum_{i \neq k} C_i \lambda_i^n$$

其中  $\lambda_k$  为  $m$  重根，其余  $\lambda_i$  为单根，待定系数根据**初始条件**确定。



### □ 6.2.2 离散时间系统的零状态响应

零状态响应：**初始状态为零**，由激励信号产生的响应，满足差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

#### ● 卷积法

1. 先求**冲激响应**  $h[n]$  (即  $\delta[n]$  的零状态响应)，具有**齐次解**的形式 (详见课件 chp6-2 P21-22)；
2. 再求激励信号  $x[n]$  与冲激响应  $h[n]$  的卷积，结果即为零状态响应：

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n]$$

#### ● $z$ 变换法 (如无要求，优先使用✓)



### □ 6.3.1 离散时间系统的系统函数

#### ● 定义

$$H(z) = \mathcal{Z}[h[n]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

#### ● 物理意义

从复频域刻画了输入输出关系及系统特性：

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = H(z)X(z) \text{ (仅限零状态响应)}$$

若输入为  $x[n] = z^n$ ，则输出为  $y[n] = z^n H(z)$ ，因此  $z^n$  可视为系统的特征函数， $H(z)$  为特征值。



## □ 6.3.2 离散时间系统的复频域分析

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (\text{有理函数})$$

### ● 零状态响应求解

对差分方程两端作**双边  $z$  变换**，求得零状态响应的  $z$  域形式，再对其作逆  $z$  变换。

### ● 零输入响应及全响应求解

对差分方程两端作**单边  $z$  变换**，利用单边  $z$  变换的**移位性质**，在转换过程中自动引入**初始条件**。

$$x[n-k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}_u} z^{-k} \left[ X_+(z) + \sum_{n=1}^k x[-n]z^n \right], \text{ 其中 } X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}, k > 0$$



## □ 6.3.3 离散时间系统的因果性与稳定性

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = c_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = c_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

其中  $c_0 = b_0/a_0$ ,  $z_i, i = 1, \dots, M$  为零点,  $p_i, i = 1, \dots, N$  为极点。

性质	$h[n]$	$H(z)$
因果	$h[n] = 0, n < 0$	收敛域 $ z  > r$
稳定	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  h[n]  < \infty$	收敛域包含单位圆
因果稳定	同时满足 (1)、(2)	所有 <b>极点</b> 在单位圆内
最小相位 <sup>1</sup>	—	所有 <b>零点</b> 在单位圆内

<sup>1</sup> 最小相位：系统具有最小相移，等价于逆系统具有因果稳定性。





### □ 6.3.4 离散时间系统的频率响应

#### ● 定义

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = |H(e^{j\Omega})|e^{j\angle H(e^{j\Omega})}$$

#### ● 特点

频率响应以 $2\pi$ 为周期。

若  $h[n]$  是实序列，则幅频响应为偶函数，相频响应为奇函数。

#### ● 物理意义

从频域刻画了输入输出关系及系统特性：

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \text{ (仅限零状态响应)}$$

若输入为  $x[n] = e^{j\Omega n}$ ，则输出为  $y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} = |H(e^{j\Omega})|e^{j(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega}))}$ 。利用该关系可快速判断复指数/正弦序列对应的输出。

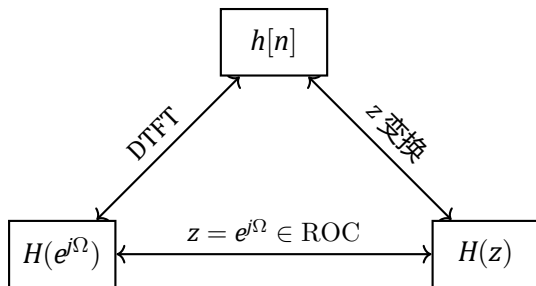
## 6.3 离散时间系统的变换域分析



### ● 冲激响应、频率响应、系统函数的关系

对于**稳定系统**(收敛域包含单位圆), 令  $z = e^{j\Omega}$ , 便可得到频率响应:

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$



熟练运用三种方式分析系统。



### • 无失真系统\*

$$H(e^{j\Omega}) = Ce^{-j\alpha\Omega} \Leftrightarrow \begin{cases} |H(e^{j\Omega})| = C & (\text{常数}) \\ \angle H(e^{j\Omega}) = -\alpha\Omega & (\text{线性相位}) \end{cases}, \Omega \in [-\pi, \pi]$$

信号通过无失真系统，输入输出关系为

$$Y(e^{j\Omega}) = Ce^{-j\alpha\Omega} X(e^{j\Omega}) \leftrightarrow y[n] = \begin{cases} Cx[n - \alpha], & \alpha \in \mathbb{Z} \\ Cx[n] * \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi(n - \alpha)}, & \alpha \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

### • 相位时延\*

$$\tau_p(\Omega) = -\frac{\varphi(\Omega)}{\Omega}$$

### • 群时延\*

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}$$

对于高频窄带信号，**载波**和**包络**的时延分别由**相位时延**和**群时延**决定。



### □ 6.3.5 常见的离散时间系统的频率特性\*

- 理想滤波器  $\Rightarrow$  FIR 数字滤波器设计 ✓
- 全通系统:  $|H(z)| = C$ , 零、极点成对出现:  $z = z_0, z = 1/z_0$
- 最小相位系统: 具有最小相移, 零、极点均在单位圆内, 等价于逆系统具有因果稳定性
- 一阶差分系统:  $h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a|$
- 陷波滤波器: 滤除指定频率
- 梳状滤波器: 频率响应具有周期性
- 谐振器: 增强指定频率 (谐振频率)

详见课件 chp6-3 P41-63, 了解不同系统的定义、特性和作用, 联系第 8 章滤波器设计。

# 信号处理 理论与技术 II

## 复习提纲

### 考试安排

第 5 章 离散时间信号分析

第 6 章 离散时间系统分析

**第 7 章 傅里叶变换离散化算法**

第 8 章 滤波器设计



### □ 7.1.1 离散傅里叶级数的定义

#### • 定义

$$\tilde{X}[k] = \text{DFS} [\tilde{x}[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{正变换/分析})$$

$$\tilde{x}[n] = \text{IDFS} [\tilde{X}[k]] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{逆变换/综合})$$

#### • 与 DTFT 的关系

设  $\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k]$ ,  $x[n] = \tilde{x}[n] R_N[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})$ , 则

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N} k}$$



### □ 7.1.2 频域采样与时域混叠

设非周期序列  $x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})$ , 若对其频谱进行采样, 则时域上发生**周期延拓**:

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \leftrightarrow X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

**时域周期化**  $\leftrightarrow$  **频域离散化**

如果  $x[n]$  是  $0 \leq n \leq L-1$  上的有限长序列, 当  $N \geq L$  时, 不会发生时域混叠。此时, 可以从  $x_p[n]$  精确重建原序列  $x[n]$ :

$$\hat{x}[n] = x_p[n]R_N[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



## □ 总结：四类信号的傅里叶表示

时域	非周期	周期	
连续	FT $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	FS $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ $c_n = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	非周期
离散	DTFT $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$	DFS $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	周期
	连续	离散	频域





## □ 7.1.3 离散傅里叶级数的性质

性质	时域 $\xleftrightarrow{\text{DFS}}$ 频域
线性	$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
反褶	$\tilde{x}[-n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[-k]$
共轭	$\tilde{x}^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}^*[-k]$
时移	$\tilde{x}[n-m] \xleftrightarrow{\text{DFS}} W_N^{mk} \tilde{X}[k]$
频移	$W_N^{-mn} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k-m]$
对偶	$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}[-k]$
卷积定理	$\tilde{x}_1[n] \otimes \tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$
乘积定理	$\tilde{x}_1[n] \tilde{x}_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \frac{1}{N} \tilde{X}_1[k] \otimes \tilde{X}_2[k]$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=0}^{N-1}  \tilde{x}[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  \tilde{X}[k] ^2$



### □ 7.2.1 离散傅里叶变换的定义

#### • 定义

$$X[k] = \text{DFT}[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (\text{正变换/分析})$$

$$x[n] = \text{IDFT}[X[k]] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (\text{逆变换/综合})$$

其中  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 。

#### • 与 DFS 和 DTFT 的关系

$$\begin{aligned} x[n] &= \tilde{x}[n] R_N[n] \leftrightarrow X[k] = \tilde{X}[k] R_N[k] \\ X[k] &= X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$



### • DFT 的计算

$$\text{DFT : } \mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

$$\text{IDFT : } \mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}$$

其中  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]^T$ ,  $\mathbf{X} = [X[0], \dots, X[N-1]]^T$ ,

$$\mathbf{W}_N = [W_N^{ij}]_{\substack{0 \leq i \leq N-1 \\ 0 \leq j \leq N-1}} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{(N-1)2} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{DFT 矩阵})$$

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N. \quad (\text{正交矩阵})$$



## □ 7.2.2 离散傅里叶变换的性质

性质	时域 $\xleftrightarrow{\text{DFT}}$ 频域
线性	$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k]$
循环反褶	$x[\langle -n \rangle_N] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[\langle -k \rangle_N]$
共轭	$x^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X^*[\langle -k \rangle_N]$
循环时移	$x[\langle n - m \rangle_N] \xleftrightarrow{\text{DFT}} W_N^{km} X[k]$
循环频移	$W_N^{-mn} x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[\langle k - m \rangle_N]$
对偶	$X[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} Nx[\langle -k \rangle_N]$
卷积定理	$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] X_2[k]$
乘积定理	$x_1[n] x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \textcircled{N} X_2[k]$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=0}^{N-1}  x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}  X[k] ^2$



### □ 7.2.3 利用 DFT 进行频谱分析

#### ● 理论依据：DFT 与 FT 的关系

(1) 时域采样：

$$x[n] = x(t) \Big|_{t=nT} = x(nT) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left[ j \left( \frac{\Omega - 2\pi k}{T} \right) \right]$$

(2) 截断 (加窗)：

$$x_N[n] = x[n]r_N[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_N(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast R_N(e^{j\Omega})$$

(3) 频域采样：

$$X[k] = X_N(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=2\pi k/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



### ● 潜在问题与解决方法

- 时域采样  $\Rightarrow$  频谱混叠  $\rightarrow$  提高采样率  $\omega_s > 2\omega_M$
- 截断 (加窗)  $\Rightarrow$  频谱泄漏  $\rightarrow$ 
  - ① 对于周期序列, 截断长度应取周期的整数倍, 此时仅在信号频率点出现冲激, 其他采样频点恰好位于周期 sinc 函数 (矩形窗的 DTFT) 的过零点;
  - ② 对于非周期序列, 可以增加截断长度, 或改用其他窗函数, 降低旁瓣能量, 但无法从根本上避免频谱泄漏。
- 频域采样  $\Rightarrow$  栅栏效应  $\rightarrow$  增加 DFT 点数 (序列补零), 减小频域采样间隔。

参考课件 chp7-2 7.2.3 节分析及图示, 深刻理解各类现象产生的原因、数学原理和物理意义。



### ● 频率分辨率

区分不同频率分量的**最小间隔**，间隔 (数值) 越小，分辨能力越强。

$$\text{数字频率分辨率: } \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \text{ (rad)}$$

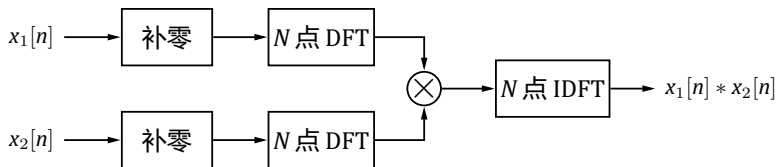
$$\text{模拟频率分辨率: } \Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{f_s}{N} \text{ (Hz)}$$

- 可通过增加信号的**观测时长** $T_0$  或序列的**截断长度** $N$  来提高频率分辨率。
- 仅对序列**补零**无法提高频率分辨率，只能降低栅栏效应。

参考课件 chp7-2 7.2.3 节分析、图示及习题。



### □ 7.2.4 线性卷积的高效计算 \*



**基本原理：** 线性卷积  $\Leftrightarrow$  循环卷积  $\Leftrightarrow$  DFT 乘积

#### ● 长、短序列的线性卷积 \*

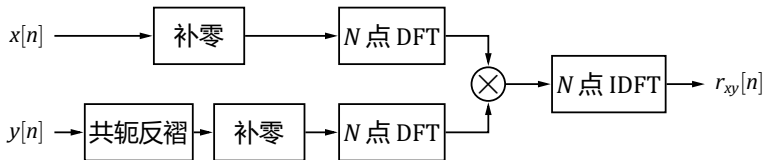
- 重叠相加法
- 重叠保留法





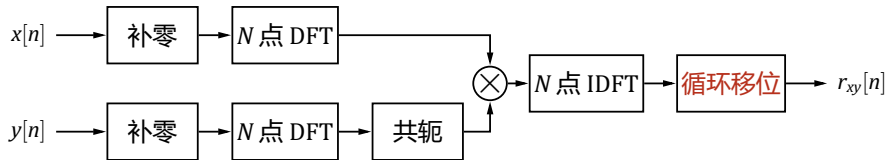
### □ 7.2.4 线性相关的高效计算 \*

#### ● 方法一：



**基本原理：** 线性相关  $\Leftrightarrow$  线性卷积  $\Leftrightarrow$  循环卷积  $\Leftrightarrow$  DFT 乘积

#### ● 方法二：



**基本原理：** 线性相关  $\Leftrightarrow$  循环相关  $\Leftrightarrow$  DFT 共轭相乘



### □ 7.3.1 FFT 的基本原理

#### ● 旋转因子的性质

##### (1) 周期性

$$W_N^{kn} = W_N^{k(mN+n)} = W_N^{(mN+k)n}$$

##### (2) 可约性

$$W_{mN}^{mkn} = W_N^{kn}$$

##### (3) 特殊值

$$W_N^0 = 1, W_N^{N/4} = -j, W_N^{N/2} = -1, W_N^{3N/4} = j$$

#### ● 基本思想：“分治”

将  $N$  点长 DFT 转化为  $N/2$  点长 DFT:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2} & \mathbf{D}_{N/2} \mathbf{W}_{N/2} \\ \mathbf{W}_{N/2} & -\mathbf{D}_{N/2} \mathbf{W}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix}$$

原  $N$  点 DFT 计算量:  $N^2$  次乘法和  $N(N-1)$  次加法;

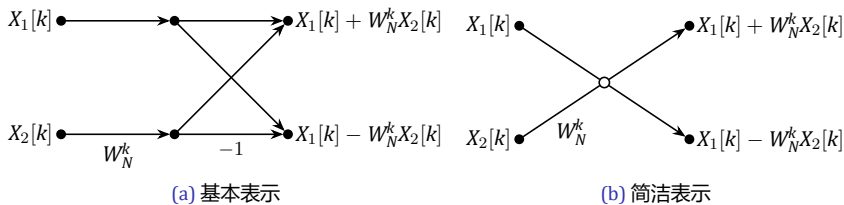
分解后降至:  $N^2/2 + N/2$  次乘法和  $N^2/2$  次加法。

## □ 7.3.2 基-2 时间抽取 FFT 算法

### ● DIT 的蝶形运算

$$\begin{bmatrix} X[k] \\ X[k + N/2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_N^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1[k] \\ X_2[k] \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

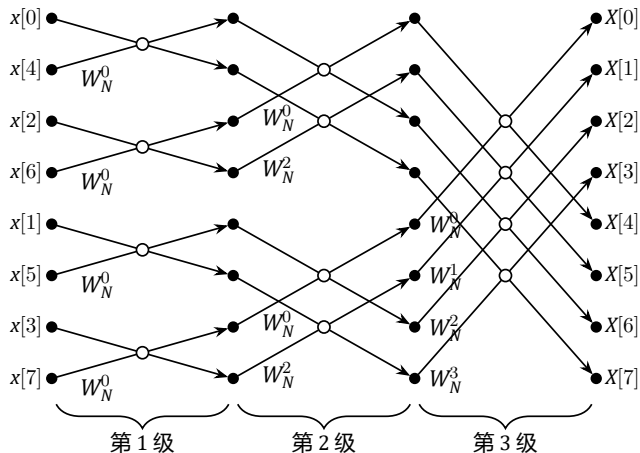
其中  $X_1[k] = \text{DFT}[x_e[n]] = \text{DFT}[x[2n]]$ ,  $X_2[k] = \text{DFT}[x_o[n]] = \text{DFT}[x[2n + 1]]$ 。



每个蝶形运算单元包含1次乘法和2次加法。



## ● 例：8 点 DIT-FFT



●  **$N$  点 FFT 计算量**  $(N \log_2 N)/2$  次乘法,  $N \log_2 N$  次加法,  $\sim O(N \log_2 N)$ 。

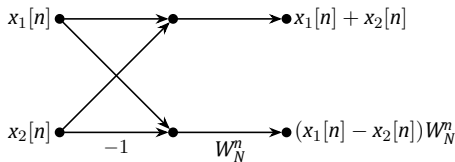


### □ 7.3.3 基-2 频率抽取 FFT 算法

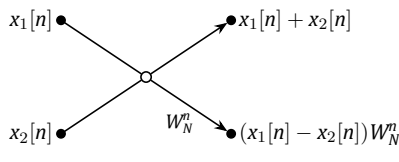
#### ● DIF 的蝶形运算

$$\begin{bmatrix} f[n] \\ g[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$

其中  $x_1[n] = x[n]$ ,  $x_2[n] = x[n + N/2]$ 。



(a) 基本表示

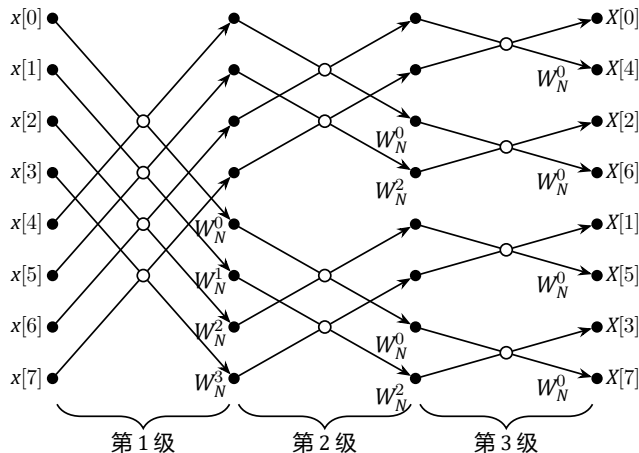


(b) 简洁表示

每个蝶形运算单元包含1次乘法和2次加法。



## ● 例：8 点 DIF-FFT



●  **$N$  点 FFT 计算量**  $(N \log_2 N)/2$  次乘法,  $N \log_2 N$  次加法,  $\sim O(N \log_2 N)$ 。



### □ 7.3.4 实序列 FFT 的高效计算

#### ● 2 个 $N$ 点实序列的 FFT

已知  $N$  点实序列及其 DFT:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k], \quad x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2[k]$$

构造复序列:

$$y[n] = x_1[n] + jx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} Y[k]$$

$$y^*[n] = x_1[n] - jx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} Y^*[\langle -k \rangle_N]$$

于是

$$\begin{aligned} x_1[n] = \text{Re}(y[n]) &= \frac{1}{2}(y[n] + y^*[n]) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] = \frac{1}{2}(Y[k] + Y^*[\langle -k \rangle_N]) \\ x_2[n] = \text{Im}(y[n]) &= \frac{1}{2j}(y[n] - y^*[n]) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2[k] = \frac{1}{2j}(Y[k] - Y^*[\langle -k \rangle_N]) \end{aligned}$$



### ● 2N 点实序列的 FFT

将  $x[n]$  分解为奇、偶子列:

$$x_e[n] = x[2n], \quad x_o[n] = x[2n + 1], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

构造复序列:

$$y[n] = x_e[n] + jx_o[n] \xrightarrow{\text{DFT}} Y[k]$$

于是

$$X_e[k] = \frac{1}{2}(Y[k] + Y^*[\langle -k \rangle_N]), \quad X_o[k] = \frac{1}{2j}(Y[k] - Y^*[\langle -k \rangle_N])$$

根据 DIT-FFT 算法, 可得  $x[n]$  的 DFT 为

$$\begin{bmatrix} X[k] \\ X[k + N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_{2N}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e[k] \\ X_o[k] \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

掌握基本原理, 熟练运用 DFT 性质, 计算量分析 \* 详见课件 chp7-3 P29-32。



# 信号处理 理论与技术 II

## 复习提纲

### 考试安排

第 5 章 离散时间信号分析

第 6 章 离散时间系统分析

第 7 章 傅里叶变换离散化算法

第 8 章 滤波器设计



- **物理可实现滤波器**  $\Rightarrow$  佩利 - 维纳准则 \*

- **滤波器的设计参数**

以低通滤波器为例:

- 通带截止频率:  $\omega_p = 2\pi f_p$  (rad/s)
- 阻带截止频率:  $\omega_s = 2\pi f_s$  (rad/s)
- 过渡带宽:  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$  (rad/s)
- 通带波纹:  $\delta_p$  或  $A_p$  (dB)
- 阻带波纹/阻带衰减:  $\delta_s$  或  $A_s$  (dB)

- **原型滤波器**

- 巴特沃斯滤波器 ✓
- 切比雪夫 I 型/II 型滤波器 \*

- **模拟滤波器的频率转换\***



### □ 冲激响应不变法

- **基本原理** 对模拟滤波器的冲激响应**采样**，得到数字滤波器的冲激响应：

$$h(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k}, \quad \sigma > \max_{1 \leq k \leq N} \{\operatorname{Re}(p_k)\}$$
$$h[n] = h(t) \Big|_{t=nT} = h(nT) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}, \quad |z| > \max_{1 \leq k \leq N} |e^{p_k T}|$$

- **映射关系**

复平面：  $z = e^{sT}$  (**多对一，呈现周期性**)

频率：  $\Omega = \omega T$  (**线性，以  $2\pi$  为周期**)

- **局限** 频率响应无限宽或采样率不足时，会引入混叠。不适合设计高通滤波器。



### □ 双线性变换法

- **基本原理** 对模拟滤波器的系统函数直接作**变量代换**:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

- **映射关系**

$$\text{复平面: } z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \leftrightarrow s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (\text{双线性变换})$$

$$\text{频率: } \Omega = 2 \arctan \left( \frac{\omega T}{2} \right) \leftrightarrow \omega = \frac{2}{T} \tan \left( \frac{\Omega}{2} \right) \quad (\text{非线性, 高频压缩})$$

- **特点** 当  $\omega T$  较小时,  $\Omega \approx \omega T$ , 接近线性关系; 当  $\omega T$  较大时, 高频被压缩。映射保证了  $|\Omega| < \pi$ , 能够避免混叠。适用于设计各类滤波器。



### □ IIR 滤波器的设计步骤

以低通滤波器为例，

(1) 若模拟滤波器  $H_a(s)$  已确定，则跳过 (1)-(3)；否则，选择**原型滤波器**，如巴特沃斯、切比雪夫 I 型/II 型；

(2) 根据**数字滤波器**参数指标，包括  $\Omega_p, \Omega_s, \delta_p$  或  $R_p, \delta_s$  或  $A_s$ ，确定**模拟滤波器**参数指标，包括  $\omega_p, \omega_s, \delta_p$  或  $R_p, \delta_s$  或  $A_s$ 。对于截止频率，两种方法**稍有不同**：

- 冲激响应不变法： $\omega = \Omega/T$  (**线性**)
- 双线性映射法： $\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$  (**非线性**)  $\approx \Omega/T$  (**当  $\Omega/2$  较小，接近线性**)

(3) 根据模拟滤波器参数，基于原型滤波器设计模拟滤波器  $H_a(s)$ ，如巴特沃斯主要确定阶数  $N$  和 3dB 截止频率  $\omega_c$ ；

(4) 在确定模拟滤波器  $H_a(s)$  之后，采用**冲激响应不变法**或**双线性变换法**，将其转换为数字滤波器  $H(z)$ ；

(5) 画出  $H(z)$  的频率响应，检验是否符合设计指标。



### □ 8.3.0 线性相位条件

设因果滤波器  $h[n]$ ,  $0 \leq n \leq M-1$ ,

$$\begin{aligned} h[n] = h[M-1-n] &\leftrightarrow H(e^{j\Omega}) = H_r(e^{j\Omega})e^{-j\Omega(M-1)/2} \\ h[n] = -h[M-1-n] &\leftrightarrow H(e^{j\Omega}) = H_r(e^{j\Omega})e^{-j[\Omega(M-1)-\pi]/2} \end{aligned}$$

其中  $H_r(e^{j\Omega})$  是关于  $\Omega$  的**实函数**，四类具体形式 \* 参考课件 chp8-3 P3-4。相频响应为 (以偶对称为例):

$$\varphi(\Omega) = \begin{cases} -\Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| > 0 \\ \pi - \Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) = -|H(e^{j\Omega})| < 0 \end{cases}$$

注意到相频响应的**斜率**由滤波器长度  $M$  决定。



### □ 8.3.1 窗函数法

- **基本思想** 对理想滤波器的冲激响应**加窗**，以低通滤波器为例：

$$h[n] = h_d[n]w_M[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) \circledast W_M(e^{j\Omega})$$

其中

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa} \left[ \Omega_c \left( n - \frac{M-1}{2} \right) \right], \quad -\infty < n < \infty$$
$$w_M[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} W_M(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \frac{\sin(\Omega M/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

- **常见窗函数\***

了解不同窗函数的特性，如主瓣宽度、旁瓣峰值等。



### □ 8.3.3 频率采样法

- **基本思想** 对理想频率响应**采样**，然后作 IDFT，得到冲激响应：

$$H[k] = H_d(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_k} = H_d(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{M}}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

$$\Rightarrow h[n] = \text{IDFT}[H[k]] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k] e^{j2\pi kn/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

- **采样值要求**

若要求滤波器是**实系数**且满足**对称性**： $h[n] = h[M-1-n]$ ，利用 DFT 的**共轭对称性**，即  $H[k] = H^*[M-k]$ ，可以推得

$$H_r[k] = (-1)^{M-1} H_r[M-k] = \begin{cases} H_r[M-k], & M \text{ 为奇数} \\ -H_r[M-k], & M \text{ 为偶数} \end{cases}$$

基于上述关系，进而可确定  $H[k] = H_r[k] e^{-j\pi k(M-1)/N}$ 。