

自动控制原理要点总结:

第二章、控制系统数学模型

一、

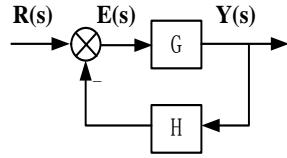
①列写微分方程

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \dots + b_m r$$

②传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m s}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n s}$$

③开环传递函数



④闭环传递函数★★

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

⑤误差传递函数★★

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} \quad (\text{单位负反馈})$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \quad (\text{非单位负反馈})$$

二、典型环节

①比例环节: $G(s) = K$

②积分环节: $G(s) = 1/s$

③纯微分环节: $G(s) = s$

④一阶微分环节: $G(s) = \tau s + 1$

⑤二阶微分环节:

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$$

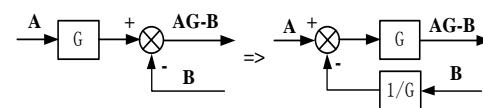
⑥惯性环节: $G(s) = 1/(Ts + 1)$

$$\text{⑦振荡环节: } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

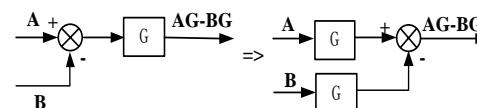
$$\text{⑧延迟环节: } G(s) = e^{-\tau s}$$

三、结构框图★

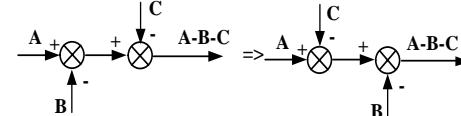
①综合点前移:



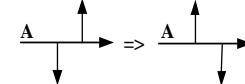
②综合点后移:



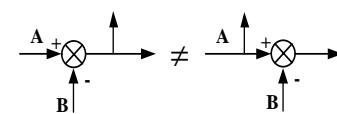
③综合之间的移动:



④引出点之间的移动:



⑤避免引出点和综合点之间的互换:



四、梅森公式★★

$$G(s) = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta}$$

$G(s)$: 待求的总的传递函数;

n : 前向通道数; P_k : 前向通路增益;

L_i : 回路增益;

Δ : 特征式;

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots$$

$\sum L_i$: 所有单回路增益之和;

$\sum L_i L_j$: 两两互不接触回路增益乘积之和;

$\sum L_i L_j L_k$: 三个互不接触回路增益乘积之和;

Δ_i : 在 Δ 中将与前向通路 P_k 相接触的回路所在项除去后所余下的部分, 称为余子式;

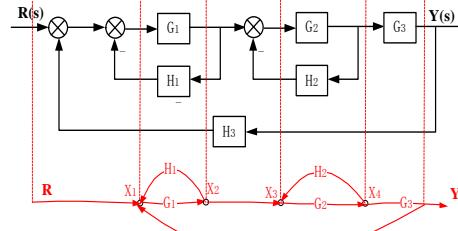
单位阶跃响应: $c(t) = 1 - e^{-t/T}$, $t \geq 0$,

调节时间: $\Delta = 5\%$, $t_s = 3T$;

$\Delta = 2\%$, $t_s = 4T$

$$\text{二阶系统: } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \star\star$$

从结构框图到信号流图的转换★



结点位置选择: ①结构框图中每个传递函数方框的输入点 X_1, X_3, X_4 ②结构框图中引出点和综合点之间 X_2 ③输入点 R 和输出点 Y

第三章、时域分析法

一、典型输入信号★

①单位阶跃信号: $r(t) = 1, R(s) = 1/s$

②单位斜坡信号: $r(t) = t, R(s) = 1/s^2$

③单位脉冲信号: $r(t) = \delta(t), R(s) = 1$

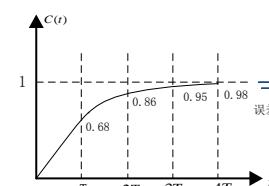
④正弦信号: $r(t) = \sin(\omega t), G(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

⑤指数衰减信号: $r(t) = e^{-at}, G(s) = \frac{1}{s+a}$

⑥指数乘斜坡: $r(t) = te^{-at}, G(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$

二、性能指标

一阶系统: $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$



$$\text{上升时间: } t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\text{峰值时间: } t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\text{超调量: } \sigma = \frac{r(t_p) - r(\infty)}{r(\infty)} = e^{-\pi \cdot \text{ctg} \phi} = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

$$\text{调节时间: } \Delta = 5\%, \quad t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n};$$

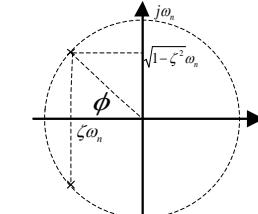
$$\Delta = 2\%, \quad t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

稳定性判据

①稳定性判据: 系统特征方程的所有根都具有非负实部

②劳斯判据: 闭环传递函数特征方程设为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \star\star$$



劳斯表

s^n	a_0	a_2	a_4	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	...
s^{n-2}	$\frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$\frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$
s^{n-3}	$\frac{c_1a_3 - a_1c_2}{c_1}$	$\frac{c_1a_5 - a_1c_3}{c_1}$		
\vdots				
s^0				

- 系统稳定的充要条件是：第一列元素全大于0；第一列元素正负号交换次数等于极点在RHP的个数。
- 如果某一行第一列为0，用 $\sigma > 0$ 代替
- 辅助方程：如果某一行全都得0，将上一行做辅助方程求导，填入当前行。
- ★辅助方程求特征根：辅助方程的根应该是特征方程的一些特征根：a)大小相等符号相反的实根 b)一对纯虚根等。利用辅助方程可以得到一些特征方程的特殊根，再利用长除法得到其余的根。

三、稳态误差★

$$\text{开环传递函数: } G(s)H(s) = \frac{K N_0(s)}{s^v D_0(s)},$$

其中 K 是开环增益， v 是系统型别。

输入信号	稳态误差
r_0/s	$e_{ss} = \begin{cases} r_0 & v=0 \\ \frac{r_0}{1+K} & v=1 \\ 0 & v \geq 2 \end{cases}$
v_0/s^2	$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v=0 \\ \frac{v_0}{K} & v=1 \\ 0 & v \geq 2 \end{cases}$
a_0/s^3	$e_{ss} = \begin{cases} \infty & v=0,1 \\ \frac{a_0}{K} & v=2 \\ 0 & v \geq 3 \end{cases}$

$$E(s) = \Phi_{BR}(s) \cdot R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{v+1} D_0(s)}{s^v D_0(s) + K N_0(s)} R(s)$$

第四章、根轨迹

若负反馈开环传递函数为 $G(s)H(s)$ ，则
闭环系统特征方程为： $1 + G(s)H(s) = 0$ ；
幅值条件为： $|G(s)H(s)| = 1$
相角条件为： $\angle G(s)H(s) = (2K + 1)\pi$

一、绘制根轨迹的规则：★★

- ①起于开环极点
- ②终于开环零点
- ③根轨迹的实轴对称性
- ④根轨迹条数=开环极点个数
- ⑤实轴上根轨迹区段的右侧，开环零、极点数目之和应为奇数。
- ⑥渐近线相角： $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$

$$\text{渐近线与实轴交点: } \sigma = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

⑦根轨迹上的分离点和汇合点：实轴上，两个极点之间会产生分离点，两个零点之间会产生会合点。对于 $C(s) = \frac{K N(s)}{D(s)}$ ，分离点与会合点有两种求解方法：

- $N(s)D'(s) - D(s)N'(s) = 0$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d-p_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{d-z_j}$, 其中 d 为分离点或汇合点

分离角会和角：进入 d 点的根轨迹与离开 d 点的根轨迹个数相同l，彼此间隔，夹角为 $\frac{\pi}{l}$ 。

- ⑧根轨迹与虚轴交点，纯虚根
令 $s = j\omega$, 则有： $1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega) = 0$

$$\text{也就是: } \begin{cases} \operatorname{Re}[1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)] = 0 \end{cases}$$

第五章频率特性

一、极坐标图（奈奎斯特图）

$$\text{①惯性环节: } G(s) = \frac{1}{1+Ts}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

$$\text{②积分环节: } G(s) = \frac{1}{s}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

③微分环节:

$$(1) G(s) = s$$

$$|G(j\omega)| = \omega$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) G(s) = \tau s + 1$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \tau\omega$$

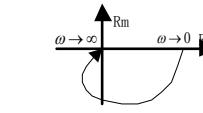
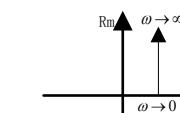
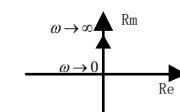
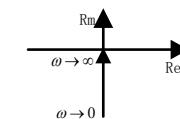
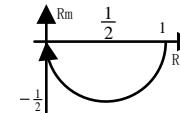
$$\text{④振荡环节: } \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$|G(j\omega)| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

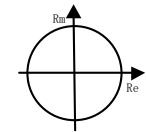
$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{⑤延迟环节: } G(s) = e^{-\tau s}$$



$$|G(j\omega)| = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\tau\omega$$



二、极坐标绘制: ★

相角规律:

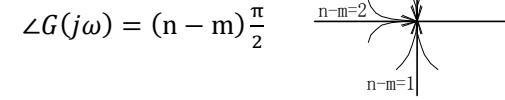
$$\text{①当 } \omega \rightarrow 0 \text{ 时, } \angle G(j\omega) = -\nu \frac{\pi}{2}$$

0型: $(k, j0)$

I型: $\frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

II型: $\frac{k}{\omega^2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$$\text{②当 } \omega \rightarrow \infty \text{ 时, }$$



三、奈奎斯特稳定判据

$$Z = P - R$$

F: 辅助函数 $F = 1 + GH$, F的分子为闭环传递函数的分母, F的分母为开环传递函数的分子。因此 F 的零极点分别对应闭环和开环传递函数的极点。

P: 开环传递函数在RHP的极点个数。

R: 奈奎斯特曲线逆时针绕 $-1 + j0$ 的圈数，其中 $\omega: -\infty \rightarrow 0^- \rightarrow 0 \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty$ ；

Z: 闭环传递函数在RHP的极点个数。如果等于0，表示稳定，否则不稳定。

具体方法: 奈奎斯特曲线在

1) $\omega \in (-\infty, +\infty)$, 逆时针包围 $-1 + j0$ 点P周

2) $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $P=0$, 不包围 $-1 + j0$ 点

3) $\omega \in (0^+, +\infty)$, 逆时针包围 $-1 + j0$ 点 $\frac{P}{2}$ 周

4) $\omega \in (0, +\infty)$, 在 $-1 + j0$ 点左侧正穿越负实轴次数之差 $n^+ - n^- = \frac{P}{2}$, 正穿越: 由

上而下，负穿越：由下而上

四、Bode 图绘制★

开环对数频率特性和相位特性曲线的绘制

五、幅值裕度，相位裕度★★

①相位裕度

穿越频率 ω_c : 满足 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$

相位裕度 PM: $\gamma = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) + 180^\circ$

②幅值裕度

满足 $\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ$ 的频率 ω_g

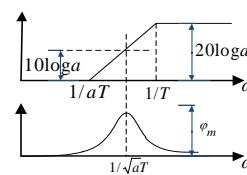
幅值裕度 GM: $K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$

或者 $20\log K_g = -20\log |G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$

五、校正网络

超前网络★★

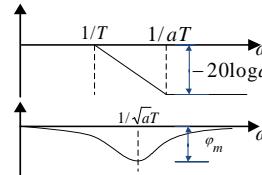
$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a > 1$$



$$a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

滞后网络

$$G_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}, \quad a < 1$$



第七章、现代控制理论

一、状态空间方程★

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

这里 A 称为系统矩阵， B 称为输入矩阵， C 称为输出矩阵， D 称为直接传递矩阵。

时域：

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny \\ = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_nu \end{aligned}$$

① 可控规范型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - b_0a_n \quad \cdots \quad b_1 - b_0a_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

② 可观测规范型

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_n - b_0a_n \\ b_{n-1} - b_0a_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0a_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二、由状态方程求传递函数★★

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(I_s - A)^{-1}B + D$$

三、线性定常系统的解★★

$$\text{状态转移矩阵 } \Phi(t) = e^{At}$$

$$\Phi(t) \text{ 的拉氏变换为: } \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

线性定常非齐次状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$
的解法:

➢ 一般法: $x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

➢ 拉普拉斯:

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) \\ + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU(s)] \end{aligned}$$

四、可观测性矩阵、可控性矩阵★★

对于 n 阶定常系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

① 可控性矩阵与可控性判据

定理: 系统状态完全可控的充要条件是系统的可控性矩阵:

$$Q_k = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

满足 $\text{rank } Q_k = n$

② 可观测性矩阵与可观测性判据

定理: 系统状态完全可观测的充要条件是系统的可观测性矩阵:

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

满足: $\text{rank } Q_g = n$

③ 传递函数零极点对消与对偶

➢ 若传递函数存在零极点对消，则系统或是可控但不可观（可控规范型），或者可观但不可控（可观规范型），或者既不可控又不可观。

➢ 若传递函数不存在零极点对消，则其系

统既可控又可观。（若写成可控标准型，它必可观，写成可观标准型，它必可控）

$$S_1: \dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$$

$$S_2: \dot{z} = A^T z + C^T u, y = B^T z$$

系统 S_1 和 S_2 互为对偶，有相同的传递函数， S_1 的可观/可控相当于 S_2 的可控/可观。

四、状态反馈、状态观测器与极点配置

① 状态反馈控制&极点配置:

设 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$; 反馈控制规律为 $u = r - Kx$; 则有

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br, y = Cx$$

闭环系统矩阵为: $(A - BK)$

特征方程为 $|sI - (A - BK)| = 0$

算法 1:

算法 2: 低阶系统★★

1. 写出期望闭环特征多项式

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*)$$

$$= s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n$$

2. 设待求的 $K = [k_1, k_2 \cdots k_n]$

$$f(s) = |sI - (A - BK)| = f(s, k_1, k_2 \cdots k_n)$$

3. 令 $f^*(s) = f(s)$, 解得 $k_i \Rightarrow K$

② 全维状态观测器与观测极点配置:

1. 写出期望闭环特征多项式

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i^*)$$

$$= s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n$$

2. 设待求的 $G = [g_1, g_2 \cdots g_n]$

$$f(s) = |sI - (A - GC)| = f(s, g_1, g_2 \cdots g_n)$$

3. 令 $f^*(s) = f(s)$, 解得 $g_i \Rightarrow G$

4. 计算 $A - GC$