

2021 试题

1. (1) 设 a, b 均为经过四舍五入得到的精确到小数点后第 n 位的近似值, 给出各数的绝对误差限和相对误差限, 求 $ab^2, \frac{a}{b^2}$ 的绝对误差限。

(2) 正方形的边长为 20cm, 问测量边长时误差应该多大, 才能保证面积的误差不超过 0.1cm^2 ?

2. 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$.

- (1) 将 A 分解为 $A = LU$, 其中 L 为单位下三角矩阵, U 为上三角矩阵;
- (2) 解出 x ;
- (3) 求向量 b 的 1 范数, ∞ 范数和 2 范数;
- (4) 求矩阵 A 的 1 范数, ∞ 范数, 2 范数. (2 范数不必求解, 写出求法即可)

3. 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- (1) 写出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式;
- (2) 对任意初值, 上述迭代法是否收敛? 说明理由.

4. (1) 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, 运用幂法求其按模最大特征值, 迭代两步, 取 $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, 运用反幂法求解按模最小的特征值, 迭代一步, 取 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. 已知 $y = f(x)$ 的函数表如下:

x_i	-2	0	1	2
y_i	3	1	3	15

用 3 次插值多项式近似计算 $f(-1)$ 的值.

6. 已知数据组 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$, 试求其如下形式的最小二乘拟合函数, 请写出对应的正则方程组:

$$(1) y = a + bx + cx^2; \quad (2) y = ax + bx^4; \quad (3) y = e^{ax}; \quad (4) y = ae^{bx}; \quad (5) y = \frac{x}{ax + b}.$$

7. 已知 $f(x) \in C^{(5)}[0, 2.0]$, 以及下面数据表:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	0. 0	0. 5	1. 0	1. 5	2. 0
$f(x)$	1. 0	0. 6	0. 4	0. 25	0. 15

(1) 请根据所给数据表, 计算求积分 $I = \int_0^2 f(x)dx$ 的梯形值序列 T_1, T_2, T_4 , 并给出 T_4 的先验误差估计和后验误差估计。

(2) 请根据所给数据表, 计算求积分 $I = \int_0^2 f(x)dx$ 的 Simpson 值序列 S_2, S_4 , 并给出 S_4 的先验误差估计和后验误差估计。

8. (1) 判断求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 具有几次代数精确度, 是否为 Gauss 型公式?

(2) 运用上述求积公式求 $\int_6^7 \frac{1}{x - \ln x} dx$ 的数值积分近似值(写出算式, 不必计算)。

9. 已知非线性方程 $x^2 - x - 2 = 0$.

(1) 对迭代格式 $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\phi(x) = x^2 - 2$, 判断收敛性;

(2) 对迭代格式 $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\phi(x) = 1 + \frac{2}{x}$, 判断收敛性;

(3) 写出求解此非线性方程的 Newton 迭代格式, 并证明对于任意初值 $x_0 \neq \frac{1}{2}$, Newton 迭代法

都是收敛的, 并分析收敛结果与初值选取的关系.

10. 取步长 $h = 0.1$, 分别用 Euler 方法及改进 Euler 法求下列初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + x + y, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解函数在 $x = 0.1$ 处的近似值.