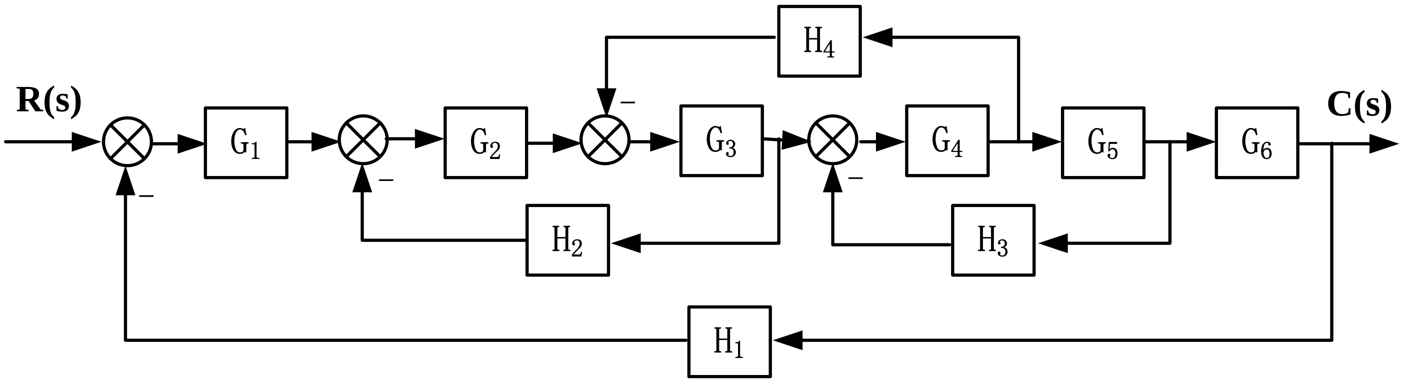
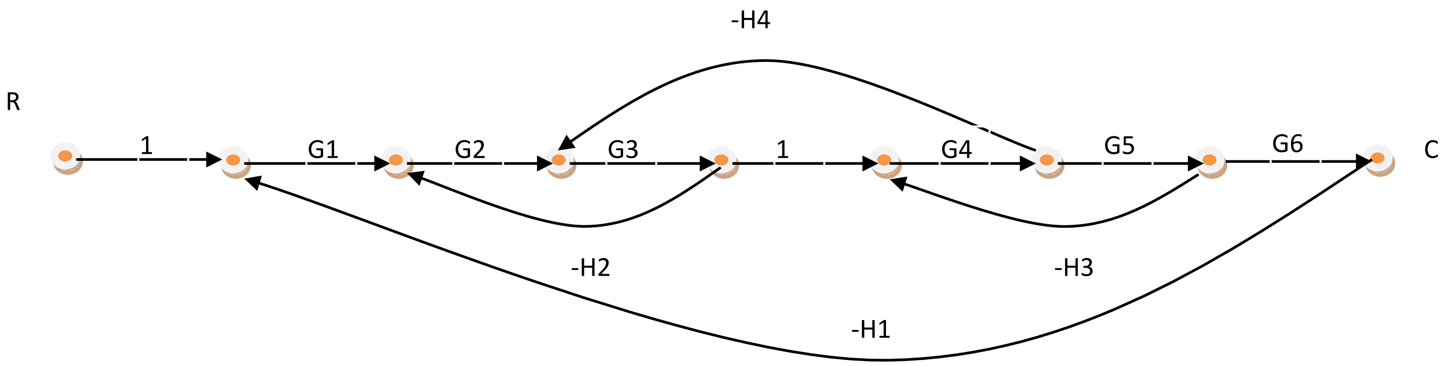
复习资料

一、画图示系统的信号流图， $\frac{C(s)}{R(s)}$ 并求系统的传递函数



解画出信号流图：



1.求Δ

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{4} L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{4} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$= -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 - G_2G_3H_2 - G_4G_5H_3 - G_3G_4H_4$$

$$\sum L_i L_j = L_2 L_3 = (-G_2G_3H_2)(-G_4G_5H_3)$$

$$= G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

$\sum L_i L_j L_k$不存在

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{4} L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \cdots$$
$$= 1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3$$
$$+ G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

2. 求 P_k, Δ_k

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6$

图中不再有回路，故Δ_1=1

3. 求总传递函数 C/R

$$C/R = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3}$$

二. （20 分）已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{7}{s(s+3)}$$

(1) 写出系统的闭环传递函数；

(2) 计算输入 $r(t)=1(t)$ 时，系统的超调量 σ_p 和过渡过程时间 $t_s(2\%)$；

(3) 求当输入分别为 $r(t)=1(t)$, t, t^2 时系统的稳态误差 $e_{ss}(\infty)$。

解：1、写出系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{7}{s^2+3s+7}$$

2、$r(t)=1(t)$ 时，$R(s)=1/s$

$\omega_n^2=7$，$\omega_n=2.65$

$2\zeta\omega_n=3$，$\zeta=\dfrac{3}{2\omega_n}=0.57$

$\sigma_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}100\%=11.5\%$

$t_s=\dfrac{4}{\zeta\omega_n}=2.67s$

3、输入分别为 $r(t)=1(t)$, t, t^2 时系统的稳态误差 $e_{ss}(\infty)$

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$$

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}.R(s)=R(s).\frac{1}{1+\dfrac{7}{s(s+3)}}$$

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to0}sE(s)$$

当 $R(s)=1/s$ 时，

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s.\frac{1}{s}\frac{1}{1+\dfrac{7}{s(s+3)}}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

当 $R(s)=1/s^2$ 时，

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s.\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{7}{s(s+3)}}=\frac{1}{0+\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}$$

当 $R(s)=2/s^3$ 时，

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s.\frac{2}{s^3}\frac{1}{1+\frac{7}{s(s+3)}}=\frac{2}{0}=\infty$$

三、判断特征方程为

$$s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0$$

的系统的稳定性，并求出所有的特征根。

解

$$s^6+s^5-2s^4-3s^3-7s^2-4s-4=0$$

s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	
s^4	1	-3	-4	
s^3	0	0	0	

$$\frac{dF(s)}{ds}=4s^3-6s=0$$

s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	
s^4	1	-3	-4	
s^3	4	-6	0	
s^2	-1.5	-4		
s^1	-16.7	0		
s^0	-4			

表中的第一列各系数中，只有符号的变化，所以该特征方程只有一个正实部根。求解辅助方程，可知产生全零行的根为±2，±j 。再可求出特征方程的其它两个根 $-1\pm j\sqrt{3}$

三 BSB. （10 分）某闭环采样系统的结构如图二所示，

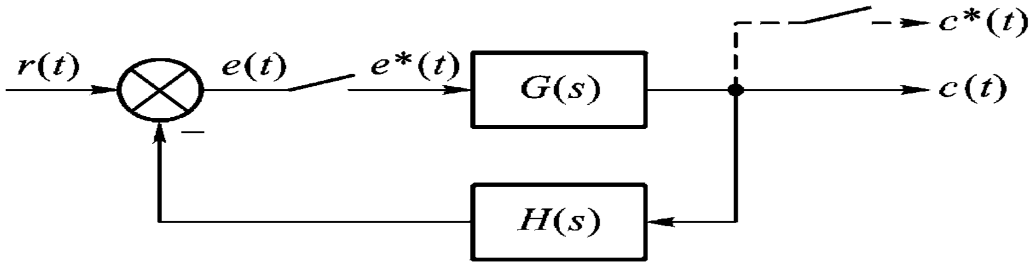


图 二

其中 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$ $\qquad H(s)=1$

采样周期 $T=1$ 秒，求闭环脉冲传递函数；

若 r(t)=1(t)，求 $c^{*}(t)$。

解：

$$G(z)=GH(z)=\frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.632z}{z^{2}-0.737z+0.368}$$

对于阶跃输入函数有

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

则输出信号的 z 变换为

$$C(z)=\frac{0.632z^{2}}{(z-1)(z^{2}-0.736z+0.368)}$$

$$=0.632z^{-1}+1.096z^{-2}+1.205z^{-3}+$$
$$1.120z^{-4}+1.014z^{-5}+0.98z^{-6}+\cdots$$

于是

$$c^*(t)=0.632\delta(t-1)+1.096\delta(t-2)+1.205\delta(t-3)+$$
$$1.120\delta(t-4)\ +1.014\delta(t-5)+0.98\delta(t-6)+\cdots$$

四.（15 分）已知负反馈系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

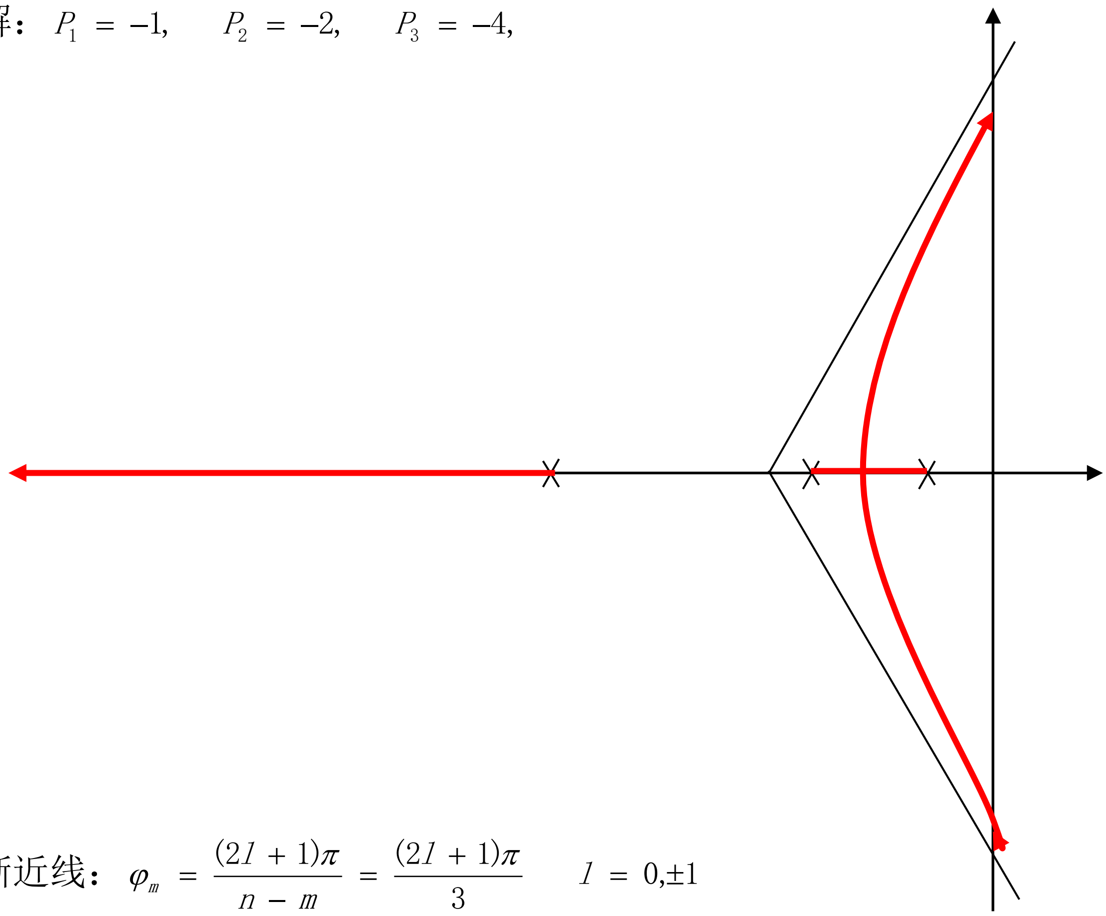
（1）绘制闭环根轨迹图（要求详细过程）;

（2）利用根轨迹绘制条件

(a) 验证 $\boldsymbol{s=-1+j\sqrt{3}}$ 为根轨迹上的点;

(b) 确定此时的 $\boldsymbol{k}$ 值。

解: $P_1=-1,\quad P_2=-2,\quad P_3=-4,$



渐近线: $\varphi_m=\dfrac{(2l+1)\pi}{n-m}=\dfrac{(2l+1)\pi}{3}\qquad l=0,\pm1$

$\varphi_1=\dfrac{\pi}{3},\quad \varphi_2=-\dfrac{\pi}{3},\quad \varphi_1=\pi$

渐近线与实轴交点：$\sigma = \frac{\sum P_k - \sum Z_k}{n-m} = \frac{-1-2-4}{3} = -\frac{7}{3}$

分离点坐标：$\sum \frac{1}{d-P_k} = \sum \frac{1}{d-Z_k} \Rightarrow d = \frac{-14 \pm \sqrt{28}}{6}$

$d = -1.45$

分离角=汇合角=$\frac{\pi}{2}$

实轴上的根轨迹：$(-\infty,-4]$，$[-2,-1]$

与虚轴的交点：
$$\begin{aligned}
&s = j\omega, \quad s^3 + 7s^2 + 14s + 8 + k = 0 \\
&-j\omega^3 - 7\omega^2 + j14\omega + 8 + k = 0 \\
&-\omega^3 + 14\omega = 0, \quad -7\omega^2 + 8 + k = 0 \\
&\omega = \sqrt{14}, \quad k = 90
\end{aligned}$$

(a) 验证$\boldsymbol{s=-1+j\sqrt{3}}$为根轨迹上的点；

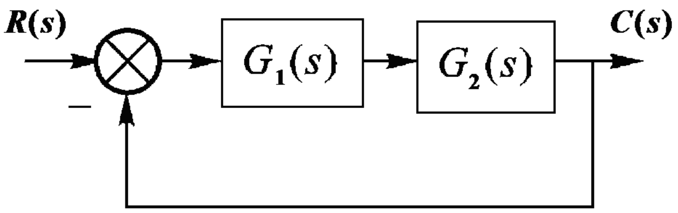
$$\angle G(s)H(s)\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \angle \frac{k}{(s+1)(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}}$$

$$= -\angle j\sqrt{3} - \angle(1+j\sqrt{3}) - \angle(3+j\sqrt{3}) = -180°$$

$$\frac{k}{(s+1)(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = -1$$

$$k = \sqrt{3}.\sqrt{1+3}.\sqrt{9+3} = 12$$

五．（10 分）已知系统如图二所示



图二

其中

$$G_1(s)=\frac{K(s+3)}{s(s^2+20s+625)}, \quad \omega_c=15rad/s$$

(1) 求$G_1(s)$的相位裕度$\gamma(\omega_c)$；

(2) 当$G_2(s)=e^{-Ts}$，$T>0$时，求使系统稳定的T 的最大值不能超过多少？

解：

$\gamma(\omega_c) = 180° + \angle(3 + j15) - 90° - \angle(10 + j15 - j22.9) - \angle(10 + j15 + j22.9)$

$= 180° + 78.69° - 90° + 38.31° - 75.22° = 131.78°$

(2) 当$G_2(s)=e^{-Ts}$，$T>0$时，求使系统稳定的T 的最大值不能超过多少？

$\angle e^{-Ts} = -T\omega$

$\gamma(\omega_c) - T\omega \geq 0$

$131.78\pi / 180 \geq T\omega_c$

$T \leq 0.15s$

六．（15 分）给定系统结构如图三所示，

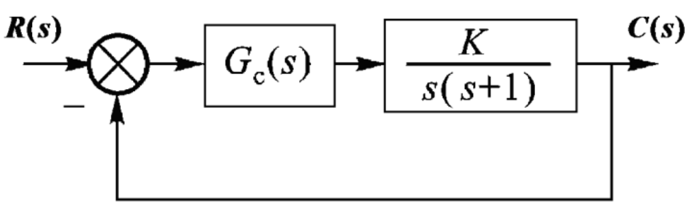


图 三

(1) 设计超前校正$G_c(s)$和 K， 使得系统在 $r(t)=t$ 的作用下稳态误差 $K_v \geq 12s^{-1}$。相位裕度满足$\gamma \geq 40^{\circ}$。（规定校正后系统的幅值穿越频率为$\omega_c=4.74rad/s$）。

(2) 分别画出原系统，校正装置，校正后系统的对数幅频特性和相频特性图。

解：

1）根据稳态误差的要求计算 k

$$e_{rss} = \frac{1}{k_v} \le \frac{1}{12} \Rightarrow k \ge 12,$$ 取 k=12

2） 根据 k=12，做出未校正的开环对数幅频特性和相频特性

得 $$\omega_c = 2.91 rad/s$$

$$\gamma = 180° + (-90° - tg^{-1} 2.91) = 19° \le 40°$$

不满足要求。

3）选取相位超前校正

取 $$\omega'_c = 4.74 rad/s$$

$$\varphi_m = 40 - 19 = 21°$$

$$\phi_m = \sin^{-1}\frac{a-1}{a+1}$$

$$a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 2.06$$

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = 4.74, \quad a = 2.06, \quad T = 0.15$$

$$G_c(s) = \frac{0.31s+1}{0.15s+1}, \varphi_m = \arcsin\frac{2-1}{2+1} = 19.47°$$

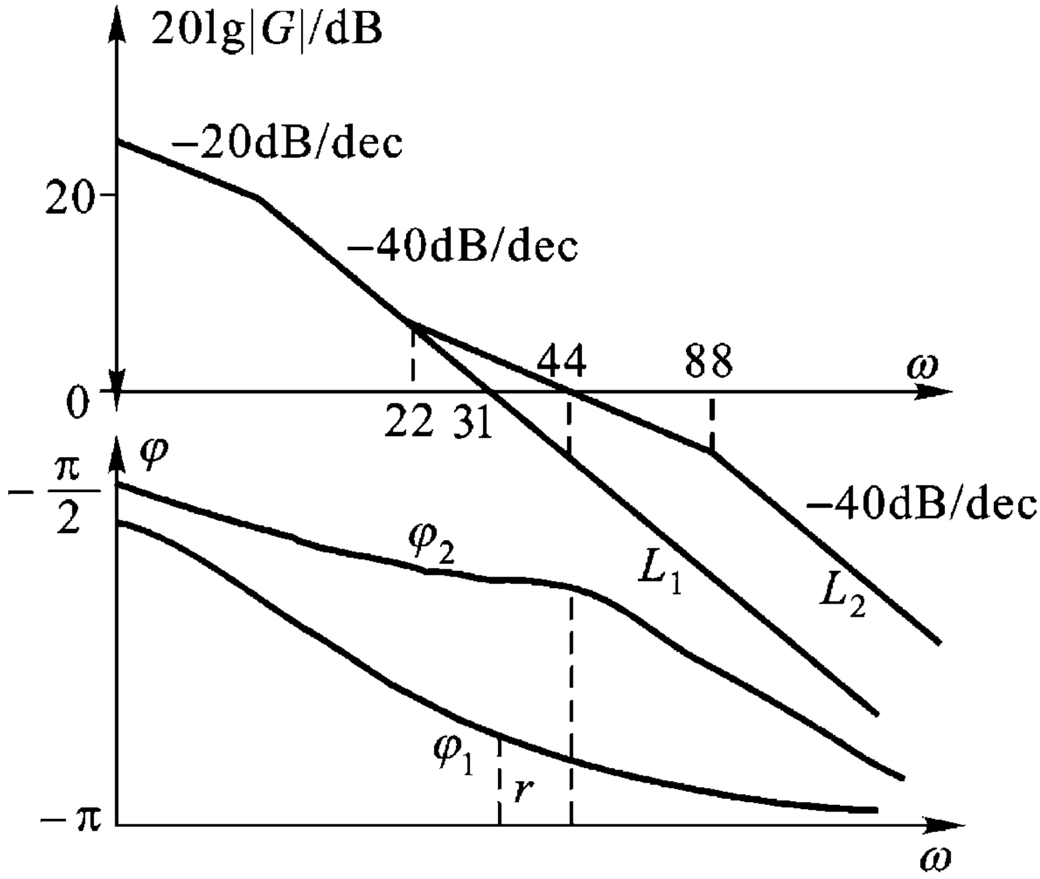
校正后开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{12(0.31s+1)}{s(0.15s+1)(s+1)}$$

校正后相稳定裕度为

$$\gamma' = 40.47^\circ$$

满足要求



七.（10 分）已知线性定常连续系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(1) 判断系统的状态可控性；

(2) 判断系统的状态可观测性。

解：状态可控性 $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ 的秩为 1，不可控

状态可观测性$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$的秩为 2，可观测

九 设线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax$$

其中$A \in R^{2\times2}$，若

$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$时，$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$

$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$时，$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$

试求$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$时的 x（t）。

解：设$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} = L([SI - A]^{-1})^{-1}$

由条件得

$\phi_{11}(t) - \phi_{12}(t) = e^{-2t}$

$\phi_{21}(t) - \phi_{22}(t) = -e^{-2t}$

$2\phi_{11}(t) - \phi_{12}(t) = 2e^{-t}$

$2\phi_{21}(t) - \phi_{22}(t) = -e^{-t}$

$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

因此$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$X(t) = \begin{bmatrix} 8e^{-t} - 7e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 7e^{-2t} \end{bmatrix}$