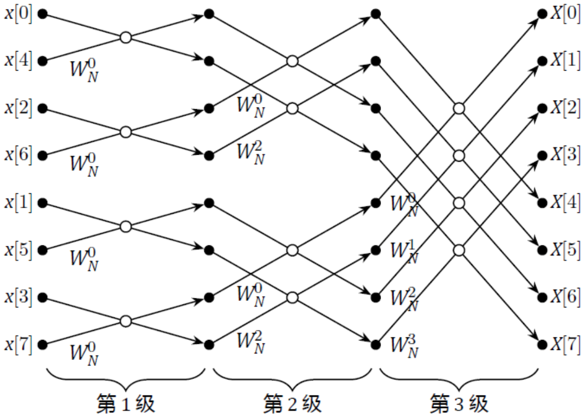
● **习题** 7.26 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

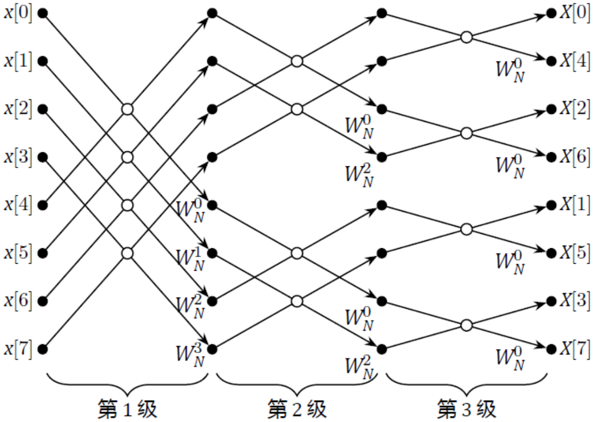
8 点 DIT-FFT 算法结构



参考答案

- **习题** 7.26 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

8 点 DIF-FFT 算法结构



- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(1) $x_1[n] = u[n] - u[n-8], \quad 0 \le n \le 7$**;**

解：1. 基-2 DIT 算法计算过程： 输入 (码位倒置) $\rightarrow \{1,1,1,1,1,1,1,1\}$

- **第 1 级 (2 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{1,1\} \rightarrow \{2,0\}$
  输出: $\{2,0,2,0,2,0,2,0\}$
- **第 2 级 (4 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{2,2\} \rightarrow \{4,0\}$
  输出: $\{4,0,0,0,4,0,0,0\}$
- **第 3 级 (8 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{4,4\} \rightarrow \{8,0\}$

最终结果: $X_1[k] = \{8,0,0,0,0,0,0,0\}$

- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(1) $x_1[n] = u[n] - u[n-8], \quad 0 \le n \le 7$**;**

解：2. 基-2 DIF 算法计算过程： 输入 (自然顺序) $\rightarrow \{1,1,1,1,1,1,1,1\}$

- **第 1 级**：蝶形运算 $\{1,1\} \rightarrow \{2,0\}$
  输出：$\{2,2,2,2,0,0,0,0\}$
- **第 2 级**：蝶形运算 $\{2,2\} \rightarrow \{4,0\}$
  输出：$\{4,4,0,0,0,0,0,0\}$
- **第 3 级**：蝶形运算 $\{4,4\} \rightarrow \{8,0\}$
  输出 (码位倒置)：$\{8,0,0,0,0,0,0,0\}$

最终结果 $X_1[k] = \{8,0,0,0,0,0,0,0\}$

参考答案

- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(2) $x_2[n] = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]u[n], \quad 0 \leq n \leq 7$**;**

解： 序列 $x_2[n]$ 为 $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$。

1. 基-2 DIT 算法计算过程： 输入 (码位倒置) $\rightarrow \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$

- **第 1 级 (2 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{1, 1\} \rightarrow \{2, 0\}$
  输出: $\{2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 2 级 (4 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{2, 2\} \rightarrow \{4, 0\}$
  输出: $\{4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 3 级 (8 点 DFT)：** 蝶形运算 $\{4, 0\} \rightarrow \{4, 4\}$

最终结果 $X_2[k] = \{4, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0\}$

参考答案

- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(2) $x_2[n] = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]u[n], \quad 0 \leq n \leq 7$;

解：2. 基-2 DIF 算法计算过程： 输入 (自然顺序)$\rightarrow \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}$

- **第 1 级**：蝶形运算 $\{1, 1\} \rightarrow \{2, 0\}$
  输出：$\{2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 2 级**：蝶形运算 $\{2, 2\} \rightarrow \{4, 0\}$
  输出：$\{4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 3 级**：蝶形运算 $\{4, 0\} \rightarrow \{4, 4\}$
  输出 (码位倒置)：$\{4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

最终结果 $X_2[k] = \{4, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0\}$

- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(3) $x_3[n] = \cos(\pi n/2)u[n], \quad 0 \le n \le 7$。

解： 序列 $x_3[n]$ 为 $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$。

1. 基-2 DIT 算法计算过程： 输入 (码位倒置)$\rightarrow \{1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0\}$

- **第 1 级：** 蝶形运算 $\{1, 1\} \rightarrow \{2, 0\}$ $\{-1, -1\} \rightarrow \{-2, 0\}$
  输出：$\{2, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 2 级：** 蝶形运算 $\{2, -2\} \rightarrow \{0, 4\}$
  输出：$\{0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 3 级：** 蝶形运算 $\{4, 0\} \rightarrow \{4, 4\}$

最终结果 $X_3[k] = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$

参考答案

- **习题 7.26** 分别采用基 2 时间抽取和基 2 频率抽取算法计算下列序列的 8 点 FFT，并画出基于蝶形图的运算框图。

(3) $x_3[n] = \cos(\pi n/2)u[n], \quad 0 \le n \le 7$。

解：2. 基-2 DIF 算法计算过程： 输入 (自然顺序) $\to \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$

- **第 1 级**：蝶形运算 $\{1, 1\} \to \{2, 0\}, \{-1, -1\} \to \{-2, 0\}$
  输出：$\{2, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 2 级**：蝶形运算 $\{2, -2\} \to \{0, 4\}$
  输出：$\{0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- **第 3 级**：蝶形运算 $\{4, 0\} \to \{4, 4\}$
  输出 (码位倒置)：$\{0, 0, 4, 4, 0, 0, 0, 0\}$

最终结果 $X_3[k] = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$

- **补充题 1. 已知长度为 1000 的有限长序列，对其作基-2 频率抽取 FFT，问：（1）需要多少级蝶形运算？每级有多少个蝶形单元？（2）需要做多少次复数乘法和复数加法？**

解：基-2 FFT 要求序列长度 N 为 2 的整数次幂。因此，对长度为 1000 的序列进行补零至 1024 点。

- **蝶形运算级数**：$M = \log_2 N = \log_2 1024 = 10$ 级
- **每级蝶形单元数**：$N/2 = 1024/2 = 512$ 个
- **复数乘法次数**：

$$\frac{N}{2}\log_2 N = 512 \times 10 = 5120 \text{ 次}$$

- **复数加法次数**：

$$N\log_2 N = 1024 \times 10 = 10240 \text{ 次}$$

参考答案

● 补充题 2. 已知一个长度为 1024 的复序列与一个长度为 32 的复序列卷积，（1）求直接计算卷积所需的复数乘法次数；（2）如果采用重叠相加法计算卷积，并采用 64 点基 2-时间抽取 FFT，求所需的复数乘法次数。提示：分段卷积长度可取 32。

解： 设长序列为 $x[n]$，短序列为 $h[n]$。即 $L_x = 1024$，$L_h = 32$。

（1）**直接计算卷积**

$$\text{乘法次数} = L_x \cdot L_h = 1024 \times 32 = 32768 \text{ 次}$$

（2）**重叠相加法 (使用 FFT 计算卷积)**

- 分段长度 $L = 32$
- 分段数量：$K = \frac{L_x}{L} = \frac{1024}{32} = 32$ 段
- 滤波器长度 $M = L_h = 32$
- FFT 点数 $N = 64$
- $L + M - 1 = 63 \le N = 64$，满足不产生时域混叠的条件

参考答案

- **补充题 2. 已知一个长度为 1024 的复序列与一个长度为 32 的复序列卷积，（1）求直接计算卷积所需的复数乘法次数；（2）如果采用重叠相加法计算卷积，并采用 64 点基 2-时间抽取 FFT，求所需的复数乘法次数。提示：分段卷积长度可取 32。**

解：

- **计算滤波器的** $H(k)$：对 $h(n)$ 补零至 64 点，做一次 64 点 FFT

$$C_1 = \frac{N}{2}\log_2 N = \frac{64}{2} \times 6 = 192 \text{ 次}$$

- **分段数据的** $X_i(k)$：64 点 FFT 需做 192 次复数乘法。
- **频域相乘**：$Y_i(k) = X_i(k) \cdot H(k)$，需做 $N = 64$ 次复数乘法。
- **IFFT**：做 64 点 IFFT，将结果变换回时域，需做 192 次复数乘法。

参考答案

● 补充题 2. 已知一个长度为 1024 的复序列与一个长度为 32 的复序列卷积，（1）求直接计算卷积所需的复数乘法次数；（2）如果采用重叠相加法计算卷积，并采用 64 点基 2-时间抽取 FFT，求所需的复数乘法次数。提示：分段卷积长度可取 32。

解：

- **总复数乘法次数**：单段总乘法次数为 $192 + 64 + 192 = 448$ 次。所有 32 段的总次数：$C_2 = 32 \times 448 = 14336$ 次。

$$C_{total} = C_1 + C_2 = 192 + 14336 = 14528 \text{ 次}$$

结论：

- 直接卷积乘法次数：32768 次。
- 采用 FFT 重叠相加法乘法次数：14528 次。
- 可见 FFT 方法显著减少了运算量。