参考答案

- **习题 7.1** 求下列周期序列的 DFS。

(1) $\tilde{x}[n]=1+\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$;

解： 利用欧拉公式和 IDFS 有

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\left(N+N\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}-e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}}{2\mathrm{j}}+N\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}+e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\left(N+N\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}-e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n(N-1)}{N}}}{2\mathrm{j}}+N\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{N}}+e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n(N-1)}{N}}}{2}\right)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

由于 DFS 为周期序列，只需计算其主值序列，在 $k=0,1,\ldots N-1$ 的范围内，有

$$\tilde{X}[0]=N,\ \tilde{X}[1]=\frac{N}{2}(1-\mathrm{j}),\ \tilde{X}[N-1]=\frac{N}{2}(1+\mathrm{j})$$

- **习题 7.1** 求下列周期序列的 DFS。

(2) $\tilde{x}[n] = (-1)^n \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-2m]$;

解： 由题目条件可知，当 n 为偶数，$\tilde{x}[n]=1$，否则 $\tilde{x}[n]=0$；

即 $\tilde{x}[n]$ 的周期 $N=2$, 其主值序列为 $\tilde{x}[0]=1, \tilde{x}[1]=0$。

可得 DFS 的主值序列为

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{1} \tilde{x}[n] W_2^{kn} = 1, \quad k = 0, 1$$

- **习题 7.1** 求下列周期序列的 DFS。

(3) $\tilde{x}[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$;

解： 由题目条件可知，最小周期 $N=8$，利用欧拉公式和 IDFS, 有

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{8}\cdot 8\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{8}}+e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n(8-1)}{8}}}{2}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

因此，在 $k=0,1,...7$ 的范围内，其 DFS 主值序列为

$$\tilde{X}[1]=4,\ \tilde{X}[7]=4$$

- **习题 7.1** 求下列周期序列的 DFS。

(4) $\tilde{x}[n]=\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right)+2\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$。

解： 由题目条件可知，最小周期 $N=8$，利用欧拉公式和 IDFS，有

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{8}\left(8\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi 3n}{8}}+e^{\mathrm{j}\frac{2\pi(8-3)n}{8}}}{2}+16\frac{e^{\mathrm{j}\frac{2\pi n}{8}}-e^{\mathrm{j}\frac{2\pi(8-1)n}{8}}}{2\mathrm{j}}\right)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

因此，在 $k=0,1,\ldots 7$ 的范围内，其 DFS 主值序列为

$$\tilde{X}[1]=-8\mathrm{j},\ \tilde{X}[3]=4,\ \tilde{X}[5]=4,\ \tilde{X}[7]=8\mathrm{j}$$

- **习题 7.2** 已知图 7.30 所示的周期序列 $\tilde{x}[n]$，回答下列问题：

（1）$\tilde{x}[n]$ 的 DFS $\tilde{X}[k]$ 是否为实序列？如不是，是否可以对 $\tilde{x}[n]$ 进行修改，使得修改后的序列的 DFS 为实序列？

解：（1）由图 7.30 可知，两个序列周期均为 $N=8$，在一个周期内取值如下：

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \tilde{x}_a[n] = [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \\
&\text{(b)} \quad \tilde{x}_b[n] = [1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]
\end{aligned}$$

若 DFS 为实序列，则对应的时域序列满足共轭对称性：$\tilde{x}[n] = \tilde{x}^*[N-n]$。
对于 (a)：$\tilde{x}_a[1] = 1 \neq 0 = \tilde{x}_a[7]$，不满足对称性，则 DFS 不是实序列。
对于 (b)：$\tilde{x}_b[1] = 1 \neq 0 = \tilde{x}_b[7]$，不满足对称性，则 DFS 不是实序列。

- **习题 7.2** 已知图 7.30 所示的周期序列 $\tilde{x}[n]$，回答下列问题：

(1) $\tilde{x}[n]$ 的 DFS $\tilde{X}[k]$ 是否为实序列？如不是，是否可以对 $\tilde{x}[n]$ 进行修改，使得修改后的序列的 DFS 为实序列？

解： 可以修改，使得修改后序列的 DFS 为实序列

对于 (a)：可以构造如下序列：

$$\tilde{x}_{a_{\text{sym}}}[n] = [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1]$$

对于 (b)：可以构造如下序列：

$$\tilde{x}_{b_{\text{sym}}}[n] = [1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1]$$

- **习题 7.2** 已知图 7.30 所示的周期序列 $\tilde{x}[n]$，回答下列问题：

（2）$\tilde{x}[n]$ 的 DFS $\tilde{X}[k]$ 是否满足 $\tilde{X}[k]=0$，$k=\pm2,\ \pm4,\ \pm6,\ \cdots$？

解： 对于序列 (a)，有

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_a[k] &= \sum_{n=0}^{3} W_8^{kn} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2}{8}\pi nk} \\
&= \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{\sin(\pi k4/8)}{\sin(\pi k/8)} e^{-j\pi k3/8}
\end{aligned}
$$

因此，当 $k=\pm2,\ \pm4,\ \pm6,\ \cdots$ 时，满足 $\tilde{X}_a[k]=0$。

- **习题 7.2** 已知图 7.30 所示的周期序列 $\tilde{x}[n]$，回答下列问题：

（2）$\tilde{x}[n]$ 的 DFS $\tilde{X}[k]$ 是否满足 $\tilde{X}[k]=0$，$k=\pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$？

解： 对于序列 (b)，有

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_b[k] &= \sum_{n=0}^{2} W_8^{kn} = \sum_{n=0}^{2} e^{-j\frac{2}{8}\pi nk} \\
&= \frac{1-e^{-j\frac{3\pi}{4}k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{\sin(\pi k3/8)}{\sin(\pi k/8)} e^{-j\pi k2/8}
\end{aligned}
$$

因此，当 $k=\pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$ 时，不满足 $\tilde{X}_b[k]=0$。

- **习题 7.3** 设 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 N 的周期序列，若

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn},\quad \tilde{X}_1[k]=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}$$

试用 $\tilde{X}[k]$ 来表示 $\tilde{X}_1[k]$。

解： 由于 $\tilde{x}[n]$ 周期为 N，可将求和拆分为两个周期, 即

$$\tilde{X}_1[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}$$

令 $m=n-N$，则 $\tilde{x}[n]=\tilde{x}[m]$，且

$$W_{2N}^{kn}=W_{2N}^{k(m+N)}=W_{2N}^{km}W_{2N}^{kN}=W_{2N}^{km}e^{-j\pi k}=(-1)^kW_{2N}^{km}$$

参考答案

- **习题 7.3** 设 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 N 的周期序列，若

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn},\qquad \tilde{X}_1[k]=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}$$

试用 $\tilde{X}[k]$ 来表示 $\tilde{X}_1[k]$。

解： 可得

$$\tilde{X}_1[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}+(-1)^k\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}[m]W_{2N}^{km}=\left[1+(-1)^k\right]\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}$$

当 k 为偶数时，令 $k=2r$，有 $W_{2N}^{2rn}=W_N^{rn}$，得到

$$\tilde{X}_1[2r]=2\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{2rn}=2\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{rn}=2\tilde{X}[r]$$

参考答案

- **习题 7.3** 设 $\tilde{x}[n]$ 是周期为 N 的周期序列，若

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn},\quad \tilde{X}_1[k]=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}[n]W_{2N}^{kn}$$

试用 $\tilde{X}[k]$ 来表示 $\tilde{X}_1[k]$。

解： 当 k 为奇数时，$1+(-1)^k=0$，故 $\tilde{X}_1[k]=0$。因此，$\tilde{X}_1[k]$ 可用 $\tilde{X}[k]$ 表示为

$$\tilde{X}_1[k]=\begin{cases}2\tilde{X}[k/2], & k\text{为偶数}\\ 0, & k\text{为奇数}\end{cases}$$