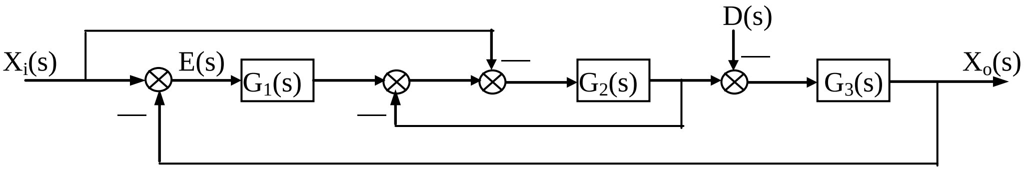
控制理论基础复习题

1. 求系统的传递函数。$X_o(s)/X_i(s)$、$X_o(s)/D(s)$、$E(s)/X_i(s)$、$E(s)/D(s)$。



1) 对于 $X_o(s)/X_i(s)$：

有 2 条前向通路：

$P_1 = G_1G_2G_3$

$P_1 = -G_2G_3$

2 条反馈回路：

$L_1 = -G_2$

$L_2 = -G_1G_2G_3$

所以没有两两互不接触的回路

所以$\Delta = 1-(L_1+L_2) = 1+G_2+G_1G_2G_3$

所有回路均与前向通路接触，所以$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$

所以$\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)} = \dfrac{P_1\Delta_1 + P_1\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{G_1G_2G_3 - G_2G_3}{1+G_2+G_1G_2G_3}$

2) 对于 $X_o(s)/D(s)$：

有 1 条前向通路：

$P_1 = -G_3$

L_2 与之接触，所以$\Delta_1 = 1+G_2$

所以$\dfrac{X_o(s)}{D(s)}=\dfrac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-G_3(1+G_2)}{1+G_2+G_1G_2G_3}$

3) 对于 E(s)/X_i(s)：

有 2 条前向通路：

$P_1=1$

$P_2=G_2G_3$

L_2与之接触，所以$\Delta_1=1+G_2$

$\Delta_2=1$

所以$\dfrac{E(s)}{X_i(s)}=\dfrac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{1+G_2+G_2G_3}{1+G_2+G_1G_2G_3}$

4) 对于 E(s)/D(s)：

有 1 条前向通路：

$P_1=G_3$

L_2与之接触，所以$\Delta_1=1+G_2$

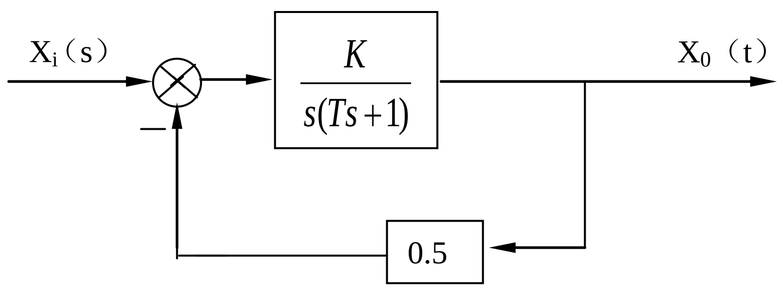
所以$\dfrac{E(s)}{D(s)}=\dfrac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{G_3(1+G_2)}{1+G_2+G_1G_2G_3}$

2. 系统结构如图所示，其中 K=8，T=0.25。

（1） 输入信号 xi（t）=1（t），求系统的响应；

（2） 计算系统的性能指标t_r、t_p、t_s（5%）、σ_p；

（3） 若要求将系统设计成二阶最佳ζ=0.707，应如何改变 K 值



（1）

系统传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{0.5K}{s(Ts+1)}}=\frac{K}{Ts^2+s+0.5K}$$

代入 K=8 和 T=0.25 可得：

$$\Phi(s)=\frac{8}{\frac{1}{4}s^2+s+4}=2\times\frac{16}{s^2+4s+16}$$

所以$\begin{cases}2\zeta\omega_n=4\\ \omega_n^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_n=4\\ \zeta=0.5\end{cases}$

二阶系统阶跃响应为

$$\begin{aligned}c(t)&=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sin\omega_d t\bullet\zeta+\cos\omega_d t\bullet\sqrt{1-\zeta^2}\right)\\&=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\phi)\quad(t\geq 0)\end{aligned}$$

所以$\phi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}=\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}=3.46$$

$$c(t)=2-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(3.46t+\frac{\pi}{3})$$

（2）第 2 问直接带公式

（3）

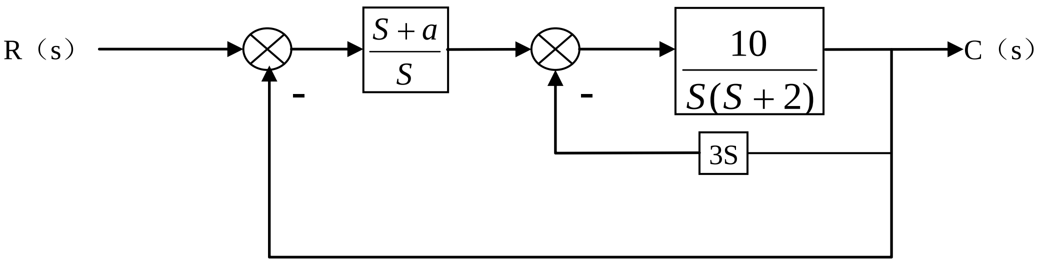
第 3 问，由$\Phi(s)=\dfrac{K}{Ts^2+s+0.5K}$可知

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{1}{T} \\ \omega_n^2 = \dfrac{0.5K}{T} \end{cases} \Rightarrow 2\zeta\sqrt{\dfrac{0.5K}{T}} = \dfrac{1}{T}$$

代入$\zeta = 0.707$，$T = 0.25$可得：

$$\sqrt{2}\sqrt{2K} = 4 \Rightarrow K = 4$$

3. 已知系统如图示，求使系统稳定时 a 的取值范围。



传递函数为：

$$G_1(s) = \frac{\dfrac{10}{s(s+2)}}{1+\dfrac{10\times 3s}{s(s+2)}} = \frac{10}{s(s+2)+30s} = \frac{10}{s^2+32s}$$

$$G(s) = \frac{\dfrac{(s+a)\times 10}{(s^2+32s)s}}{1+\dfrac{(s+a)\times 10}{(s^2+32s)s}} = \frac{10s+10a}{s^3+32s^2+10s+10a}$$

特征方程

$$\therefore A(s) = s^3+32s^2+10s+10a$$

列劳斯表

s^3	1	10
s^2	32	$10a$
s^1	$\dfrac{320-10a}{32}$	
s^0	$10a$	

要稳定，需要$0 < a < 32$

4.已知单位反馈控制系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{10}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

式中 T_1=0.1(s)，T_2=0.5(s). 输入信号为 r(t)=2+0.5t,求系统的稳态误差。

$$\Phi_E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{10}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}}=\frac{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)+10}$$

$$=\frac{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+10}$$

特征方程为$T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+10$

列劳思表

$$\begin{array}{lcc} s^3 & T_1T_2 & 1 \\ s^2 & T_1+T_2 & 10 \\ s^1 & T_1+T_2-10T_1T_2 & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

稳定充分必要条件为：

$T_1T_2>0$， $T_1+T_2>0$， $T_1+T_2>10T_1T_2$， 系统满足条件，因此

稳态误差为

$$e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\Phi_E(s)R(s)$$

$$=\lim_{s\to 0} s\frac{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+10}\left(\frac{2}{s}+\frac{0.5}{s^2}\right)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{2s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+10}+\lim_{s\to 0}\frac{0.5(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+10}$$

$$=0.05$$

5．已知单位负反馈系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{K}{(s+1)^2(s+4)^2}$，试绘制 K 由 0 ->+∞变化的闭环根轨迹图,系统稳定的 K 值范围。

系统有两对重极点　$-p_{1,2}=-1$，　$-p_{3,4}=-4$

1）4 条分支

2) 4 条渐进线

$$-\sigma=\frac{-1-1-4-4}{4}=-2.5$$
$$\theta=\frac{(2k+1)\times180^\circ}{4}=45^\circ,135^\circ,225^\circ,315^\circ(k=0,1,2,3)$$

3）实轴上的根轨迹，-1，-4 之间没有根轨迹（重根）。

$$D(s)=(s+1)^2(s+4)^2=\left(s^2+2s+1\right)\left(s^2+8s+16\right)$$
$$=s^4+10s^3+33s^2+40s+16$$
$$D'(s)=4s^3+30s^2+66s+40=0$$
$$\Rightarrow(s+1)(s+4)(4s+10)=0\Rightarrow\begin{cases}s_1=-1\\ s_2=-4\\ s_3=-2.5\end{cases}$$

$s_3=-2.5$ 剔除，实轴上的根轨迹为两点 s=-1 s=-4 也为分离点（相当于-1 与-1 之间有根轨迹，-4 与-4 之间有根轨迹）。分离角均为 $\theta=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$。

4)根轨迹与虚轴的交点坐标。系统特征方程 $(s+1)^2(s+4)^2+K=0$

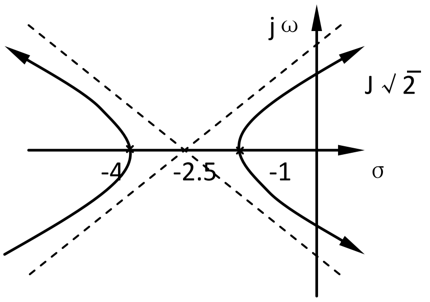
即　$s^4+10s^3+33s^2+40s+16+K=0$　令 $s=j\omega$ 代入特征方程，得

$\omega^4-j10\omega^3-33\omega^2+j40\omega+16+K=0$

令上式实部虚部分别等于 0，则有

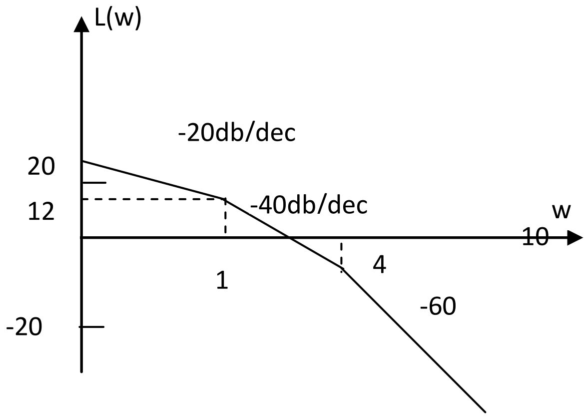
$$\begin{cases}\omega^4-33\omega^2+16+K=0\\ -10\omega^3+40\omega=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\omega=\pm2\\ K=100\end{cases}$$

该系统根轨迹如下图所示。



由图可知，当 0≤K<100 时，闭环系统稳定。

6．最小相位系统的对数幅频特性如图所示。试求开环传递函数和相位裕量γ。



两个转折频率$\omega_1=1$，$\omega_2=4$。

1 个积分+1 放大，2 个惯性环节

12=20lgK-20lg1，∴K=4

所以开环传递函数为

$$\frac{4}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

$\gamma=180^0+\phi(\omega_c)$

$y-12=-40(\lg x-\lg 1)$，当$y=0$可得

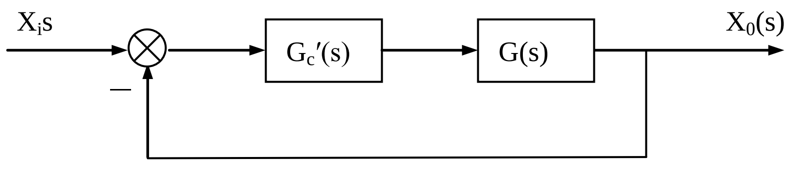
$\omega_c = 2$

$\phi(\omega_c) = -90 - \arctan\omega_c - \arctan 0.25\omega_c$

$\gamma = 180^0 - 90 - \arctan 2 - \arctan 0.5 = 180^0 - 180^0 = 0^0$

7．某控制系统的结构如图，其中 $G(s) = \dfrac{K}{s(0.1s+1)(0.001s+1)}$

要求设计串联补偿，使系统具有 K≥1000 及 $\gamma \geq 45^o$ 的性能指标。



转折频率为 $\omega_1 = 10, \omega_2 = 1000$

$\omega < 10$ 时，积分+放大 $20\lg K - 20\lg\omega$

代入 $K = 1000$

$60 - 20\lg\omega$

因此转折频率 ω_1 处坐标为 $(10, 40\text{ dB})$。

建立方程 $y - 40 = -40(\lg x - \lg 10)$，令 $y = 0$

∴初始剪切频率为 $\omega_{co} = 100$，因此

初始相位裕度

$$\gamma = 180^o - 90^o - \arctan 0.1\times 100 - \arctan 0.001\times 100$$
$$= 90^o - \arctan 10 - \arctan 0.1 = 0^o$$

超前补偿网络为

$$G_c(s)=\frac{\frac{1}{\omega_1}s+1}{\frac{1}{\omega_2}s+1},\frac{\omega_2}{\omega_1}=a$$

最大超前角（就是最终的相位裕度）

$\angle G_{cm}=\arctan\frac{a-1}{2\sqrt{a}}$， $\omega_m=\sqrt{\omega_1\omega_2}$

要求$a<20$，先取$a=7.5$

$\angle G_{cm}=49.88^{\circ}$，符合要求。

先看$\omega_m=\sqrt{\omega_1\omega_2}>\omega_{co}$，代入$\frac{\omega_2}{\omega_1}=7.5$可得

$\begin{cases}\omega_1>36.5\\ \omega_2>273.9\end{cases}$，选$\omega_1=60$，这时$\omega_2=450$

所以补偿网络为$G_c(s)=\frac{0.0167s+1}{0.0022s+1}$