

课程编号： INF05029 北京理工大学 2014-2015 学年第一学期
2012 级 数字信号处理 课程试卷 A 卷

1. (20 分)

- (1) 简述什么是栅栏效应和频谱泄露，并指出其产生的原因，以及克服的办法。
- (2) $x(n)$ 是列长为 N 的复数序列， $x_{ep}(n)$, $x_{op}(n)$ 分别为其周期性共轭对称分量和周期性共轭反对称分量， $X(k)$ 为其 DFT，证明： $DFT(x_{ep}(n)) = \operatorname{Re}[X(k)]$, $DFT(x_{op}(n)) = j\operatorname{Im}[X(k)]$ 。

2. (15 分) 已知 $u(n) = [1 \ -4 \ 4 \ -4]$ 和 $v(n) = [3 \ -1 \ 0 \ -2]$,

- (1) 求序列 $x(n) = u((3-n))_5 R_5(n)$ 和 $y(n) = v((2+n))_5 R_5(n)$ ；
- (2) 求序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 5 点圆周卷积，结果中哪些值与两者的线性卷积结果相同，解释其原因；
- (3) 写出利用 FFT 计算 $w(n) = u(n) + jv(n)$ 和 $z(n) = x(n) + jy(n)$ 线性卷积的主要步骤，要求尽量减少乘法运算次数，并估计运算量。

3. (15 分)

$$(1) \quad x(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

求 $X(k) = DFT[x(n)]$

$$(2) \quad \text{已知 } X(k) = \begin{cases} \frac{N}{2} e^{j\theta} & k = m \\ \frac{N}{2} e^{-j\theta} & k = N-m, m \text{ 为正整数, 且 } 0 < m < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases},$$

N 为列长，且为偶数。求 $x(n) = IDFT[X(k)]$ 。

- (3) 判断下列 FIR 数字滤波器是否具有线性相位特性，若有，说明理由；若没有，如何做才能使其具有线性相位特性，并给出相应的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = (1 + 0.25z^{-1})(1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j)z^{-1})(1 - (0.5 - 0.5j)z^{-1})$$

4. (15 分)

- (1) 推导按频率抽取基-2FFT 算法的蝶形运算公式，并画出蝶形运算结构；
- (2) 画出相应的 $N=16$ 时的算法流程图（要求输入正序，输出反序，原位运算）；
- (3) 给出复乘、复加的运算量公式，并与直接计算的 DFT 运算量比较；
- (4) 结合算法流图，解释改善 DFT 运算量的基本途径。

5. (20 分) 用双线性变换法设计数字巴特沃斯低通滤波器，要求在 $0 \leq f \leq 100Hz$ 的通带范围内幅度变化不大于 $2dB$ ，在 $f \geq 200Hz$ 的阻带范围内衰减不小于 $15dB$ ，采样频率为 $1KHz$ 。

- (1) 确定数字滤波器的阶数 N;
- (2) 确定数字滤波器的系统函数 $H(z)$
- (3) 画出数字滤波器的任意一种结构实现形式。

6. (15 分) 设理想数字带通滤波器的幅频响应为

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.6\pi \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

要求用 I 型频率取样设计法，设计采样点数为 15 的线性相位 FIR 数字滤波器

- (1) 确定滤波器的频域取样序列 $H(k)$ ；
- (2) 确定滤波器的系统函数 $H(z)$ 和频率响应 $H(e^{j\omega})$ ；
- (3) 画出数字滤波器的一种结构实现形式。

北京理工大学 2014-2015 学年第一学期
 2012 级 数字信号处理 课程试卷 A 卷
 参考答案及评分标准

1. (20 分)

(1) (10 分)

栅栏效应: $X(k) \approx X_a(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 好像通过一个“栅栏”观察, 可以通过补零改善。频谱泄露:

信号截断, 频谱分量从正常频谱扩散出来, 可以通过窗函数加权改善。

(2) (10 分)

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$$

$$DFT[x_{ep}(n)] = \frac{1}{2} \{ DFT[x(n)] + DFT[x^*(N-n)] \} = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] = \operatorname{Re}[X(k)]$$

$$DFT[x_{op}(n)] = \frac{1}{2} \{ DFT[x(n)] - DFT[x^*(N-n)] \} = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(k)] = j \operatorname{Im}[X(k)]$$

或:

$$\frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] = \operatorname{Re}[X(k)]$$

$$j \operatorname{Im}[X(k)] = \frac{1}{2} [X(k) - X^*(k)]$$

$$IDFT\{\operatorname{Re}[X(k)]\} = \frac{1}{2} \{ IDFT[X(k)] + IDFT[X^*(k)] \} = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)] = x_{ep}(n)$$

$$IDFT\{j \operatorname{Im}[X(k)]\} = \frac{1}{2} \{ IDFT[X(k)] - IDFT[X^*(k)] \} = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)] = x_{op}(n)$$

2. (15 分)

(1) (4 分) $x(n) = [-4 \ 4 \ -4 \ 1 \ 0]$, $y(n) = [0 \ -2 \ 0 \ 3 \ -1]$

(2) (6 分) $x(n) * y(n) = [0 \ 8 \ -8 \ -4 \ 14 \ -16 \ 7 \ -1 \ 0]$ (这一步结果可以不给出)

$x(n) \circledcirc y(n) = [-16 \ 15 \ -9 \ -4 \ 14]$ (4 分, 第 1 步算错了, 最多得一半)

(解释原因 2 分) 5 点圆周卷积是线性卷积以 5 为周期延拓所得周期序列的主值序列, 由于混叠, 只有最后一个点 (第 5 点, 或 $n=4$) 与线性卷积结果一样。(如果答 $n=3, 4$ 也算正确)

(3) (5 分) 主要步骤 (4 分):

① $w(n) \sim M = 4, z(n) \sim N = 5$, 将 $w(n)$ 和 $z(n)$ 分别补零到 L 点, $L \geq M + N - 1$, $L = 2^v$,

$(L = 8)$, 得 $w'(n)$ 和 $z'(n)$;

② 对 $w'(n)$ 和 $z'(n)$ 分别作 FFT, 得到 $W(k)$ 和 $Z(k)$;

③ $w(n)$ 和 $z(n)$ 的线性卷积结果为 $[W(k)Z(k)]$ 的 IFFT。

运算量 (1 分)

2 个 L 点 FFT, 复乘法 $2 * \left(\frac{L}{2}\right) * \log_2 L$, 复加法: $2 * L * \log_2 L$

$W(k)Z(k)$, L 次复乘法

1 个 L 点 IFFT, 复乘法: $\left(\frac{L}{2}\right) * \log_2 L$, 复加法: $L * \log_2 L$

总运算量, 复乘法: $3 * \left(\frac{L}{2}\right) * \log_2 L + L$, 复加法: $3 * L * \log_2 L$

3. (15 分)

(1) (5 分)

$$x(n) = [4 \ 3 \ 3 \ 4]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = [14 \ 1 + j \ 0 \ 1 - j]$$

(2) (5 分)

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \left[e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + e^{-j\theta} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)} \right]$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right)$$

(3) (5 分)

没有 (2 分)

$$z_1 = -0.25, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, z_3 = 0.5 - 0.5j$$

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - z_1 z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{z_1} z^{-1}\right) (1 - z_2 z^{-1}) (1 - z_2^* z^{-1}) (1 - z_3 z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{z_3} z^{-1}\right) (1 - \\ &\quad z_3^* z^{-1}) \left(1 - \frac{1}{z_3^*} z^{-1}\right) \end{aligned}$$

4. (15 分)

(1) (5 分) 推导

$x(n) \sim N = 2^v$, 将 $x(n)$ 分为前后两半: $x(n)$ 和 $x\left(n + \frac{N}{2}\right)$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{(n+\frac{N}{2})k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + W_N^{\frac{N}{2}k} x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

令 $k = 2r$ 及 $k = 2r+1$, $r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nr}$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{(2r+1)n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n W_N^{nr}$$

令

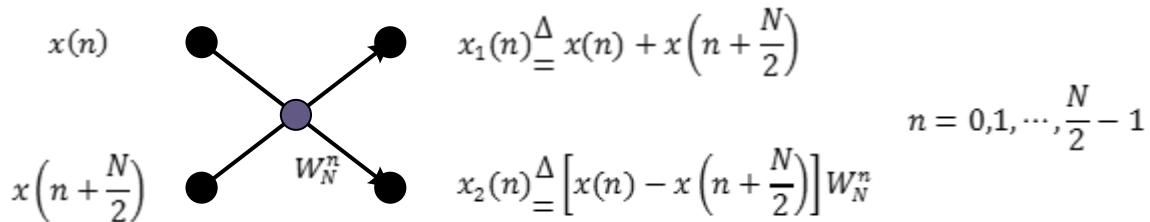
$$x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)$$

$$x_2(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n$$

则

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_N^{nr}$$

$$X(2r+1) \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_N^{nr}$$



(2) (5 分) 输入输出顺序 2 分, 系数 2 分, 蝶形图是否规范 1 分

(3) (3 分)

FFT, 复乘法: $\left(\frac{N}{2}\right) * \log_2 N$, 复加法: $N * \log_2 N$

直接计算 DFT: 复乘法: N^2 , 复加法: $N(N - 1)$

(4) (2 分)

利用 W_N^{nk} 的对称性和周期性使长序列的 DFT 分解为更小点数的 DFT, 分解一次运算量减少差不多一半, $N = 2^v$ 时经过 v 次分解后分解为 $N/2$ 个两点 DFT, 极大减少了计算量。(重点是要答出分解为跟小点数的 DFT)

(5) (20 分)

(1) (8 分)

$$\omega_p = 2\pi f_p T = 0.2\pi, \quad \omega_s = 2\pi f_s T = 0.4\pi, \quad \alpha_p = 2dB, \quad \alpha_s = 15dB \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right), \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{cases} -20 \log_{10} |H_a(j\Omega_p)| \leq \alpha_p \\ -20 \log_{10} |H_a(j\Omega_s)| \geq \alpha_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10 \log_{10} |H_a(j\Omega_p)|^2 \leq \alpha_p \\ -10 \log_{10} |H_a(j\Omega_s)|^2 \geq \alpha_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \geq -\alpha_p \\ -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \leq -\alpha_s \end{cases}$$

取等号求解方程组

$$N = \frac{\log_{10} \left(\frac{\frac{\alpha_p}{10^{10}} - 1}{\frac{\alpha_s}{10^{10}} - 1} \right)}{2 \log_{10} \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s} \right)} \approx 2.46$$

(4 分, 方法正确, 结果计算错误 2 分)

(2) (8 分)

取 $N = 3$,

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{\frac{\alpha_p}{10^{10}} - 1}} \approx 710.6$$

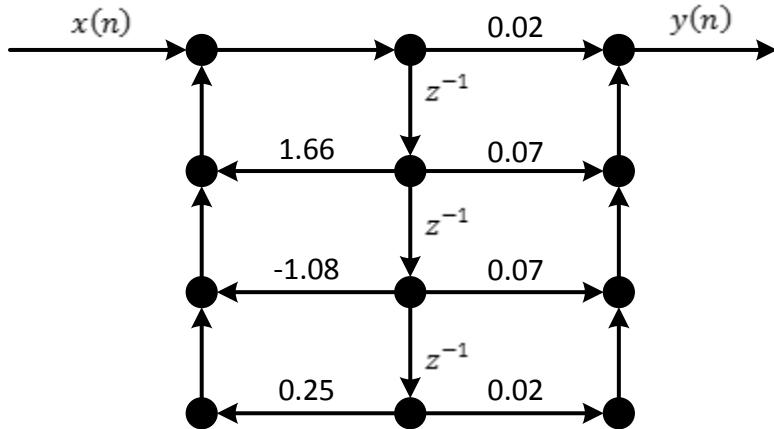
$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3} = \frac{358819147.02}{s^3 + 1421.2s^2 + 1009904.72s + 358819147.02}$$

(4 分, 极点正确或公式正确, 结果计算错误 2 分)

$$H(z) = H_a(s)|_{s=\frac{z-1}{T_1+z^{-1}}} = \frac{0.02 + 0.07z^{-1} + 0.07z^{-2} + 0.02z^{-3}}{1 - 1.66z^{-1} + 1.08z^{-2} - 0.25z^{-3}}$$

(4 分, 映射关系正确, 结果计算错误 2 分)

(3) (4 分, 结构正确, 系数错误 2 分)



6. (15 分)

(1) (15 分)

$$H_k = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (\text{要有判断过程})$$

$$\theta(k) = -\frac{2\pi}{N}k \left(\frac{N-1}{2}\right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad \text{或}$$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k \left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0, \dots, \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k) \left(\frac{N-1}{2}\right), & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$H(k) = H_k e^{j\theta(k)} \quad (6 \text{ 分})$$

(以下 2 分)

$$H(3) = e^{-j\frac{14}{15}3\pi} = e^{-j\frac{12}{15}\pi} = e^{-j\frac{4}{5}\pi} = -0.81 - 0.59j$$

$$H(4) = e^{-j\frac{14}{15}4\pi} = e^{-j\frac{26}{15}\pi} = e^{j\frac{4}{15}\pi} = 0.67 + 0.74j$$

$$H(11) = e^{j\frac{14}{15}4\pi} = e^{j\frac{26}{15}\pi} = e^{-j\frac{4}{15}\pi} = 0.67 - 0.74j$$

$$H(12) = e^{j\frac{14}{15}3\pi} = e^{j\frac{12}{15}\pi} = e^{j\frac{4}{5}\pi} = -0.81 + 0.59j$$

$$\begin{aligned} H(0) &= H(1) = H(2) = H(5) = H(6) = H(7) = H(8) = H(9) = H(10) = H(13) = H(14) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) (4 分 $H(z)$ 2 分, $H(e^{j\omega})$ 2 分)

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \quad \text{或}$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \left[\frac{H_0}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{2(-1)^k H_k \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right) (1-z^{-1})}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}} \right]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-15}}{15} \left[\frac{-1.62 + 1.62z^{-1}}{1 - 0.62z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1.34 - 1.34z^{-1}}{1 + 0.21z^{-1} + z^{-2}} \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N})} \quad \text{或}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

(3) (3 分)

