波导本征值问题有限元求解

教师：杨明林

yangminglin@bit.edu.cn，13581817948

北京理工大学集成电路与电子学院

射频技术与软件研究所

http://www.cems.bj.cn/

授课内容

- 有限元法简介
- 有限元法理论基础
- 有限元法应用实例
- 波导本征值问题有限元求解

授课内容

- 有限元法简介
- 有限元法理论基础
- 有限元法应用实例
- 波导本征值问题有限元求解

电磁计算的几个发展阶段

- 自麦克斯韦方程建立以来，求解已知激励、特定边界条件下麦克斯韦方程的解一直是一百多年来最受关注的问题之一。
- 电磁计算发展的四个阶段：

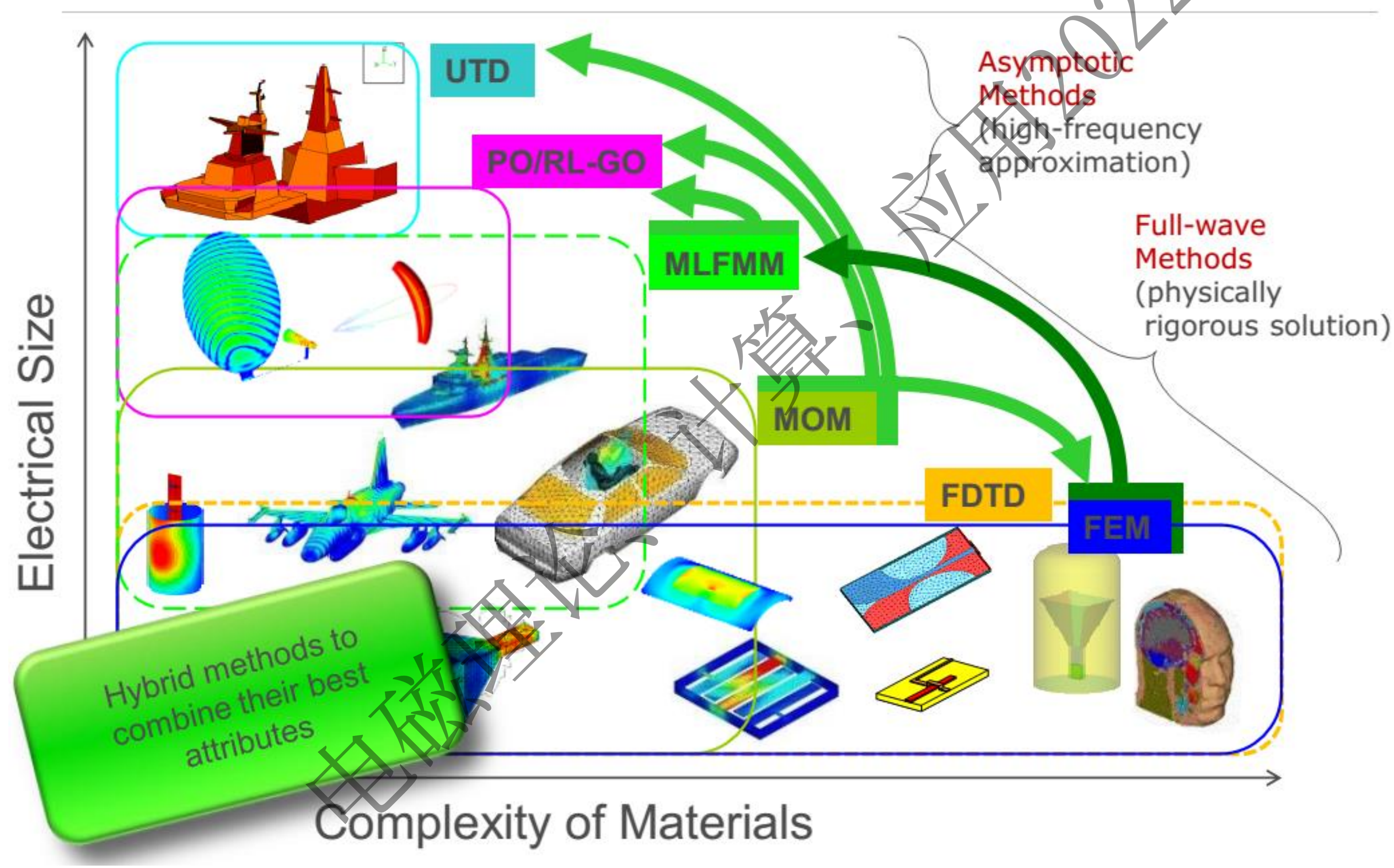
  ① 解析方法（19世纪-20世纪），Mie Series

  ② 近似方法（近似求解）：GO，PO， GTD，PTD

  ③ 数值方法（精确求解）：时域有限差分，有限元，矩量法

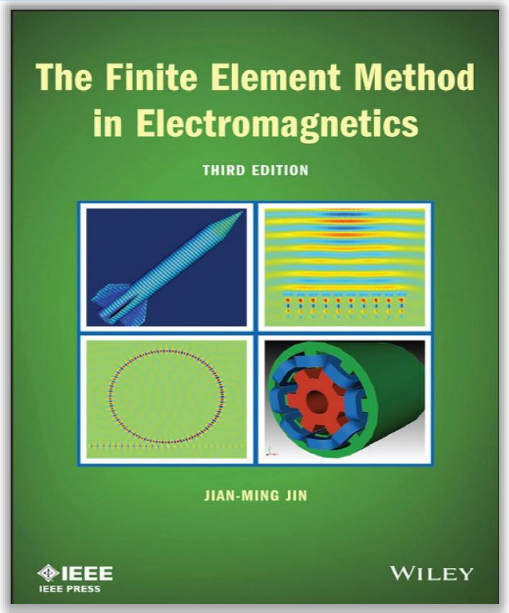
  ④ 快速算法（精确快速求解）：MLFMA，CG-FFT，区域分解

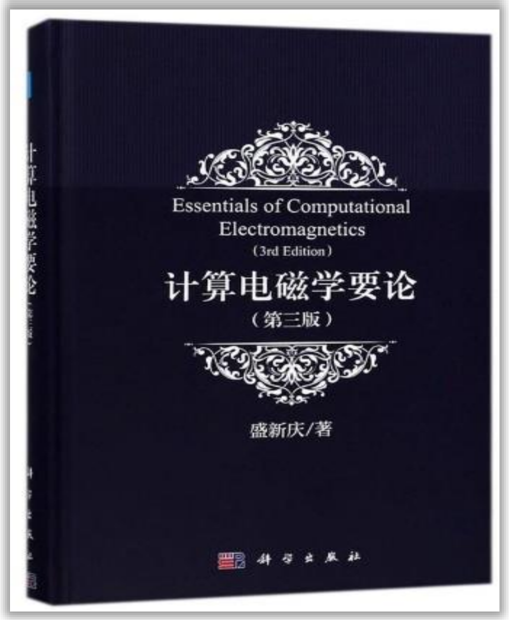
电磁计算的几个发展阶段



有限元法简介

- 1943年， Courant，扭转问题，首次提出了有限元的思想；
- 1956年，航空，机翼，刚性法，工程学界上有限元法的开端；
- 1960年，W. Clough系统总结，形成一种比较完整的方法，推广到土木工程，并将其命名为有限元法；
- 1969年，P. P. Silvester首次将该方法用于波导本征值问题的求解，可看作是有限元法在计算电磁领域应用的开端；
- 20世纪80年代，新的矢量有限元精确地模拟了电磁场的本质，消除了传统的节点标量有限元产生的伪解、强加边界不便等缺陷；
- 20世纪90年代，有限元区域分解技术被应用于电磁场的计算；
- 2005年左右，使用传输边界条件的有限元区域分解方法。





有限元法在电磁学中的演进

- 问题
  - 本征值问题
    - 波导
      - 空波导
      - 介质填充波导
      - 介质波导
    - 谐振腔
  - 确定性问题
    - 波导中的不连续性问题
    - 散射和辐射问题

有限元法的优点

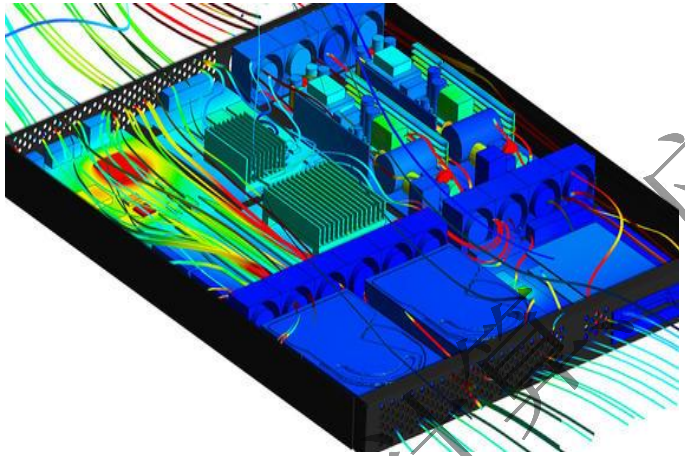
- 离散化过程保持了明显的物理意义，变分原理描述了支配物理现象的物理学中的最小作用原理（如力学中的最小势能原理、静电学中的汤姆逊定理等）基于问题固有的物理特性予以离散化处理，可保证方法的正确性、数值解的存在与稳定性等。
- 优异的解题能力，在适应场域边界几何形状以及媒质物理特性变异情况复杂的问题求解上，有突出的优点。
- 可方便地编写通用计算机程序，使之构成模块化的子程序集合，适应计算功能延拓的需要。

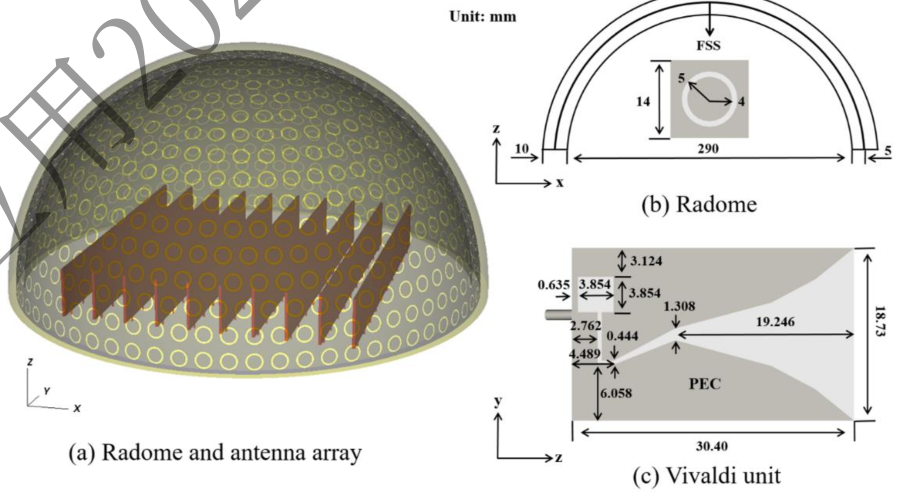
有限元法的缺点

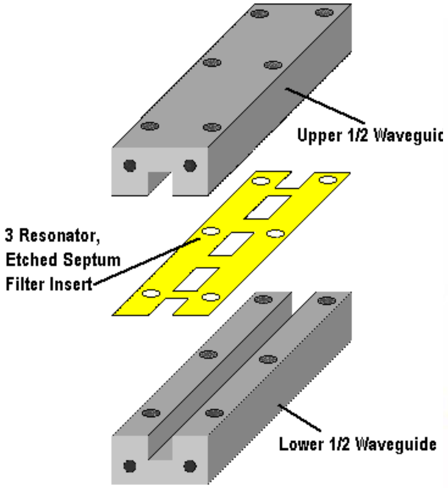
- 有数值色散误差，且此误差会随着目标增大累积。有限元和时域有限差分是通过一系列中间未知量传递作用。通过的中间变量越多，其误差就越大。这种误差被称为数值色散误差。可以通过采用高阶基函数或者是增加离散单元数获得改善，但这相当于变相带来了计算问题规模的增大。
- 有限元适用于分析开域问题时，需要人为的引入一个近似边界条件如完全匹配吸收层、吸收边界（HFSS等商业软件中的空气盒子）来对计算域进行截断，这种近似是精度不可控的。
- 三维电动问题形成的有限元矩阵通常性态差，难以采用迭代求解方式高效求解。

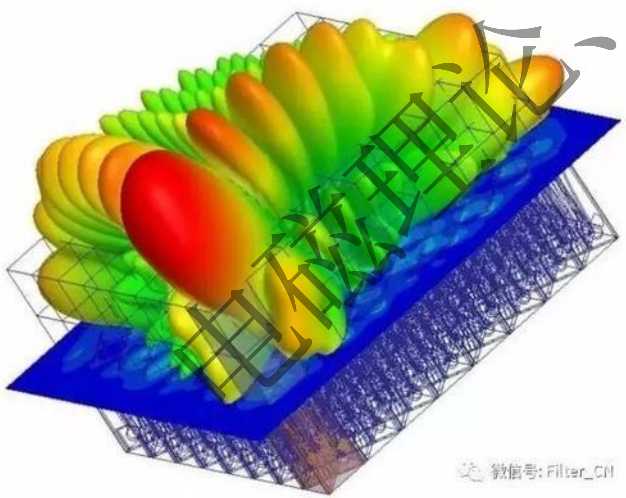
有限元法应用

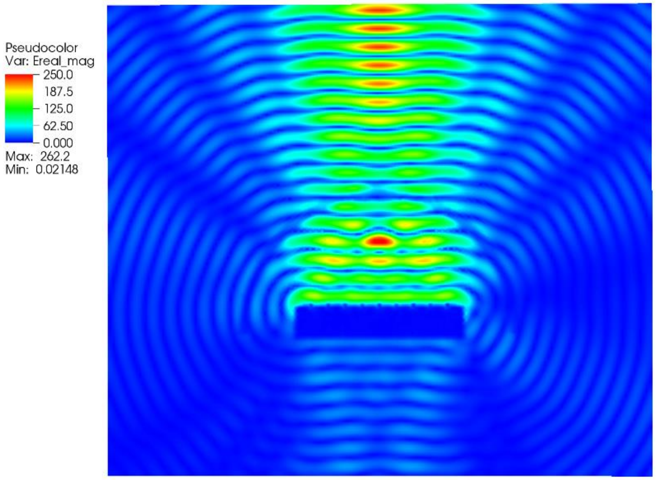
- 微波元器件设计
- 天线、天线罩设计
- 目标特性和RCS仿真
- 光电器件

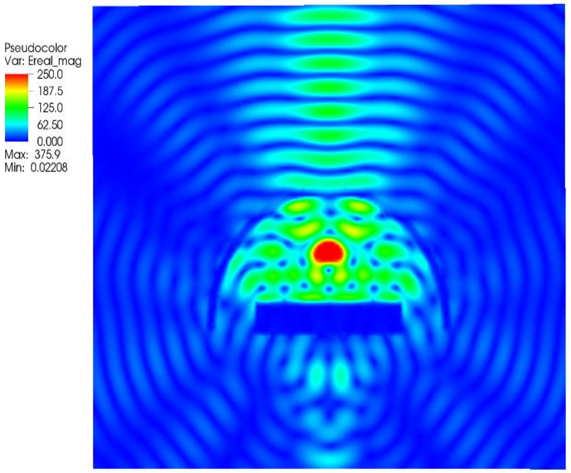












授课内容

- 有限元法简介
- **有限元法理论基础**
- 有限元法应用实例
- 波导本征值问题有限元求解

边值问题的经典解法

典型边值问题 $$L(f)=g$$

- 控制微/积分方程
- 边界条件

理想电导体 $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$，$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}=0$

理想磁导体 $\mathbf{n}\times\mathbf{H}=0$，$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{E}=0$

第一类边界：$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$，$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=0$

第二类边界：$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}=0$，$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{E}=0$

辐射条件 $\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{r}\left[\nabla\times\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right]=0$ 第三类边界

阻抗边界、吸收边界 ⋯

求解方法

- 里兹方法（瑞利—里兹，**Rayleigh-Ritz**）
- 伽辽金方法 （ **Galerkin’s Method** ）

里兹方法

里兹方法

$$F(f)=\frac{1}{2}\langle L(f),f\rangle-\frac{1}{2}\langle f,g\rangle-\frac{1}{2}\langle g,f\rangle$$

- 边值问题用变分表达式（也称为泛函，不唯一）表示；
- 泛函的极小值对应于给定边界条件下的微分控制方程；
- 求泛函相对于其变量的极小值（变分），可得近似解。

内积 $\langle\Phi,\psi\rangle=\int_{\Omega}\Phi\psi^{*}d\Omega$

正定 $\langle L(\Phi),\Phi\rangle\begin{cases}>0(\Phi\neq 0)\\=0(\Phi=0)\end{cases}$

自伴 $\langle L(\Phi),\psi\rangle=\langle\Phi,L(\psi)\rangle$

为突破标准变分限制，提出了修正变分、广义变分原理

里兹方法

泛函 $$F(f)=\frac{1}{2}\langle L(f),f\rangle-\frac{1}{2}\langle f,g\rangle-\frac{1}{2}\langle g,f\rangle$$

展开 $$f=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j f_j=\{\alpha\}^T\{f\}=\{f\}^T\{\alpha\}$$

f 全域基函数，α展开系数

代入 $$F=\frac{1}{2}\{\alpha\}^T\int_\Omega\{f\}L\{f\}^T d\Omega\{\alpha\}-\{\alpha\}^T\int_\Omega\{f\}gd\Omega$$

求变分

（展开系数）

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{2}\int_\Omega f_iL\{f\}^T d\Omega\{\alpha\}+\frac{1}{2}\{\alpha\}^T\int_\Omega\{f\}Lf_i d\Omega-\int_\Omega f_i g d\Omega$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\int_\Omega(f_iLf_j+f_jLf_i)d\Omega-\int_\Omega f_i g d\Omega=0$$

解方程 $$[\mathbf{A}]\{\alpha\}=\{b\}$$

有限元法

- 里兹方法采用的试探函数为全域基函数，要求在整个求解域内能表示或至少近似表示问题真解，所有一维问题都能获取，部分标准形状的二维、三维问题也能获取，但对一般二维、三维问题比较难构造，较少使用。
- 在规则的子域上定义基函数，只在一个局部范围内不为零，其余全为零，具有“局部化”特点，获取简单。此种方式即为有限元。
- 基于里兹方法的过程通常称为里兹有限元法，或变分有限元法；基于伽辽金有限元法的过程称为伽辽金有限元法。实际中这两种方法往往殊途同归。

有限元法求解过程

- 区域的离散；
- 选择插值函数；
- 泛函求变分，建立方程组；
- 强加边界条件；
- 求解方程组。

简单例子

假设两无限大平板间的静电势 Φ。一块平板位于***x=0***处，$\Phi=0$；另一块平板位于***x=1m***处，$\Phi=1V$。其间填充介电常数为 ε 的均匀媒质，电荷密度是变化的，$\rho(x)=-(x+1)\varepsilon$。此问题可用泊松方程描述，简化为二阶微分方程

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=x+1 \qquad 0<x<1$$

$$\Phi|_{x=0}=0 \qquad \Phi|_{x=1}=1$$

精确解 $$\Phi(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$$

里兹方法求解

泛函已知 $F(\Phi)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2dx+\int_0^1(x+1)\Phi dx$?

展开 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2x+\Phi_3x^2+\Phi_4x^3$

利用边界条件 $\Phi_1=0,\quad \Phi_2=1-\Phi_3-\Phi_4$

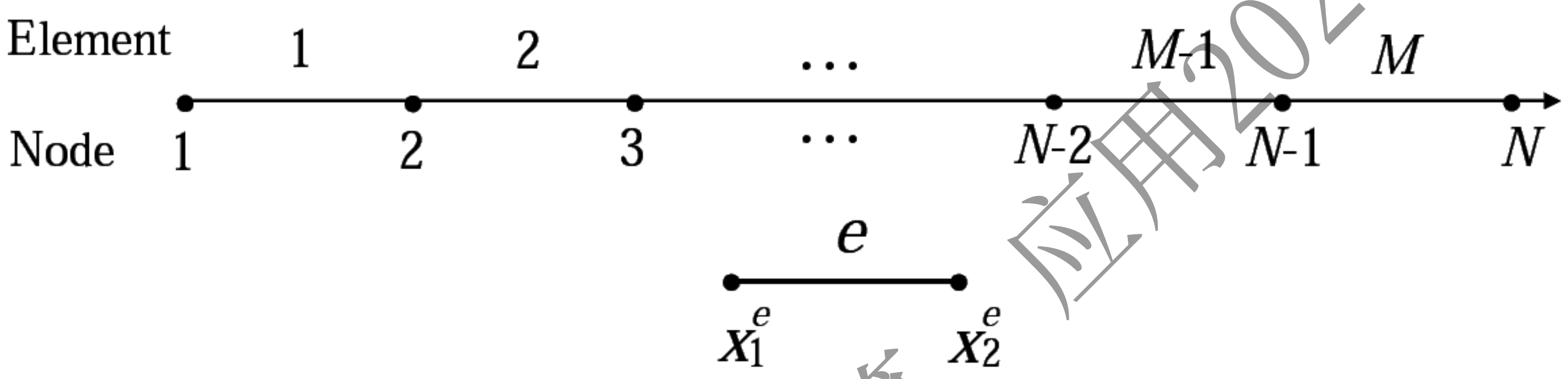
简化为 $\Phi=x+\Phi_3\left(x^2-x\right)+\Phi_4\left(x^3-x\right)$

代入泛函 $F=\frac{2}{5}\Phi_4^2+\frac{1}{6}\Phi_3^2+\frac{1}{2}\Phi_3\Phi_4-\frac{23}{60}\Phi_4-\frac{1}{4}\Phi_3+\frac{4}{3}$

求变分并令为 0 $\frac{\partial F}{\partial\Phi_3}=\frac{1}{3}\Phi_3+\frac{1}{2}\Phi_4-\frac{1}{4}\quad \frac{\partial F}{\partial\Phi_4}=\frac{1}{2}\Phi_3+\frac{4}{5}\Phi_4-\frac{23}{60}$

得到解 $\Phi_2=\frac{1}{3},\quad \Phi_3=\frac{1}{2},\quad \Phi_4=\frac{1}{6}$

有限元法求解-区域离散



e \ j	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
:	:	:
M	M	M+1

局部编号

单元编号

全局编号

有限元法求解-选取插值函数

$x_1=0$ $\quad x_2$ $\quad x_3$ $\quad x_4=1$

$$\Phi^e=\Phi_i\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}+\Phi_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\qquad x_i\le x\le x_{i+1},\quad i=1,2,3$$

$$=\sum_{j=1}^{2}N_j^e\Phi_j^e=\left\{\Phi_1^e\quad \Phi_2^e\right\}\begin{Bmatrix}N_1^e\\N_2^e\end{Bmatrix}=\left\{N_1^e\quad N_2^e\right\}\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\\Phi_2^e\end{Bmatrix}$$

$$F_e=\boxed{\frac{1}{2}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\left(\frac{d\Phi^e}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d\Phi^e}{dx}\right)dx}+\boxed{\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)\Phi^e dx}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Phi_1^e\quad \Phi_2^e\right\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{Bmatrix}\dfrac{dN_1^e}{dx}\\[2mm]\dfrac{dN_2^e}{dx}\end{Bmatrix}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx}\quad\frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\\Phi_2^e\end{Bmatrix}$$

$$\left\{\Phi_1^e\quad \Phi_2^e\right\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)\begin{Bmatrix}N_1^e\\N_2^e\end{Bmatrix}dx$$

有限元法求解-建立方程组

$$\frac{1}{2}\left\{\Phi_1^e \quad \Phi_2^e\right\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{Bmatrix}\dfrac{dN_1^e}{dx}\\[2mm] \dfrac{dN_2^e}{dx}\end{Bmatrix}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx} \quad \frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial F^e}{\partial \Phi_1^e}\longrightarrow \frac{1}{2}\left\{1 \quad 0\right\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{Bmatrix}\dfrac{dN_1^e}{dx}\\[2mm] \dfrac{dN_2^e}{dx}\end{Bmatrix}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx} \quad \frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}\left\{\Phi_1^e \quad \Phi_2^e\right\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}\begin{Bmatrix}\dfrac{dN_1^e}{dx}\\[2mm] \dfrac{dN_2^e}{dx}\end{Bmatrix}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx} \quad \frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$=\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{dN_1^e}{dx}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx} \quad \frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}=\left[K_{11}^e \quad K_{12}^e\right]\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial F^e}{\partial \Phi_2^e}\longrightarrow \int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{dN_2^e}{dx}\cdot\left\{\frac{dN_1^e}{dx} \quad \frac{dN_2^e}{dx}\right\}dx\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}=\left[K_{21}^e \quad K_{22}^e\right]\begin{Bmatrix}\Phi_1^e\\ \Phi_2^e\end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{dN_i^e}{dx}\cdot\frac{dN_j^e}{dx}dx$$

有限元法求解-建立方程组

$$\{\Phi_1^e \quad \Phi_2^e\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)\begin{Bmatrix}N_1^e\\N_2^e\end{Bmatrix}dx$$

$$\frac{\partial F^e}{\partial \Phi_1^e} \rightarrow \{1 \quad 0\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)\begin{Bmatrix}N_1^e\\N_2^e\end{Bmatrix}dx=\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)N_1^e dx$$

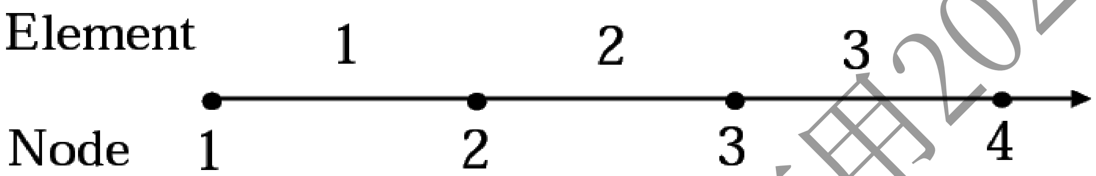
$$\frac{\partial F^e}{\partial \Phi_2^e} \rightarrow \{0 \quad 1\}\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)\begin{Bmatrix}N_1^e\\N_2^e\end{Bmatrix}dx=\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)N_2^e dx$$

$$\rightarrow b_i^e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)N_i^e dx$$

$$\begin{bmatrix}K_{11}^i & K_{12}^i\\K_{21}^i & K_{22}^i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi_1^i\\\Phi_2^i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_1^i\\b_2^i\end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{dN_i^e}{dx}\cdot\frac{dN_j^e}{dx}dx \qquad b_i^e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}(x+1)N_i^e dx$$

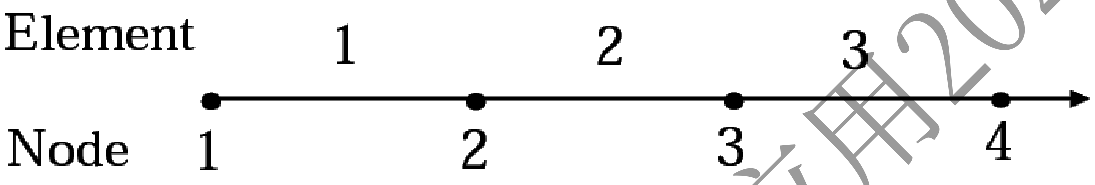
有限元法求解-建立方程组



$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \boldsymbol{K}^{(1)}=\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)}&K_{12}^{(1)}\\K_{21}^{(1)}&K_{22}^{(1)}\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)}&K_{12}^{(1)}&0&0\\K_{21}^{(1)}&K_{22}^{(1)}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \boldsymbol{b}^{(1)}=\begin{bmatrix}b_1^{(1)}\\b_2^{(1)}\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1^{(1)}\\b_2^{(1)}\\0\\0\end{bmatrix}$$

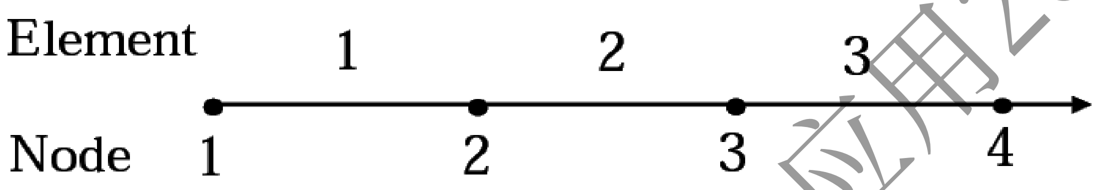
有限元法求解-建立方程组



$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K}^{(2)}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{b}^{(2)}=\begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)}+b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

有限元法求解-建立方程组



$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)}+b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)}+b_1^{(3)} \\ b_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

有限元法求解-强加边界条件

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_1=p$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ b_2-K_{21}p \\ b_3-K_{31}p \\ b_4-K_{41}p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_2-K_{21}p \\ b_3-K_{31}p \\ b_4-K_{41}p \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1=0$$

$$\Phi_4=1$$

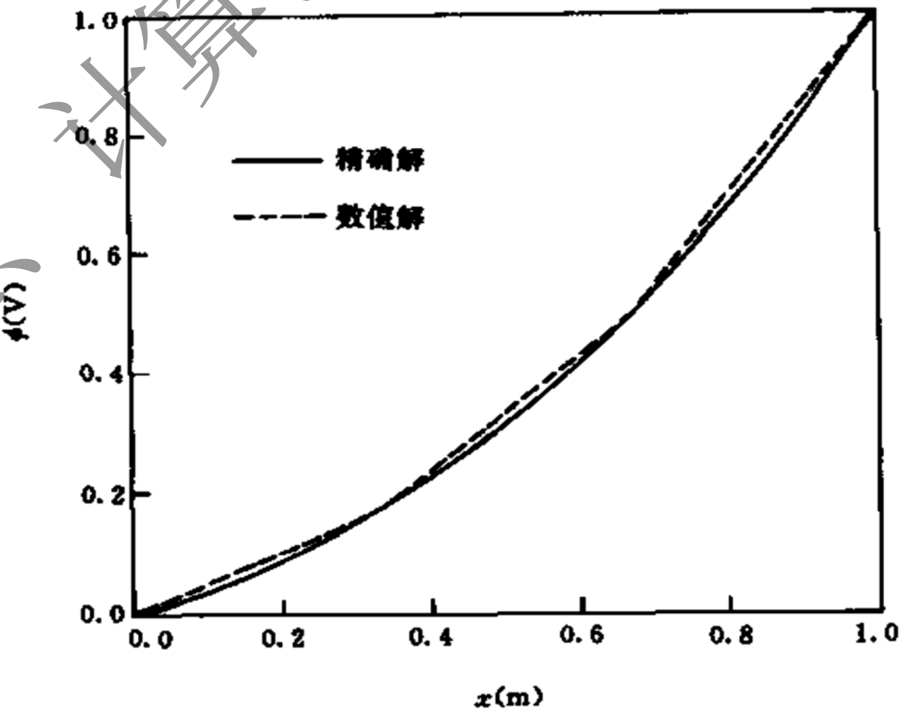
有限元法求解-求解矩阵方程

$x_1=0$ $\quad x_2 \quad x_3 \quad x_4=1$

$$6\Phi_2-3\Phi_3+\frac{4}{9}=0 \qquad -3\Phi_2+6\Phi_3-\frac{22}{9}=0$$

得到解

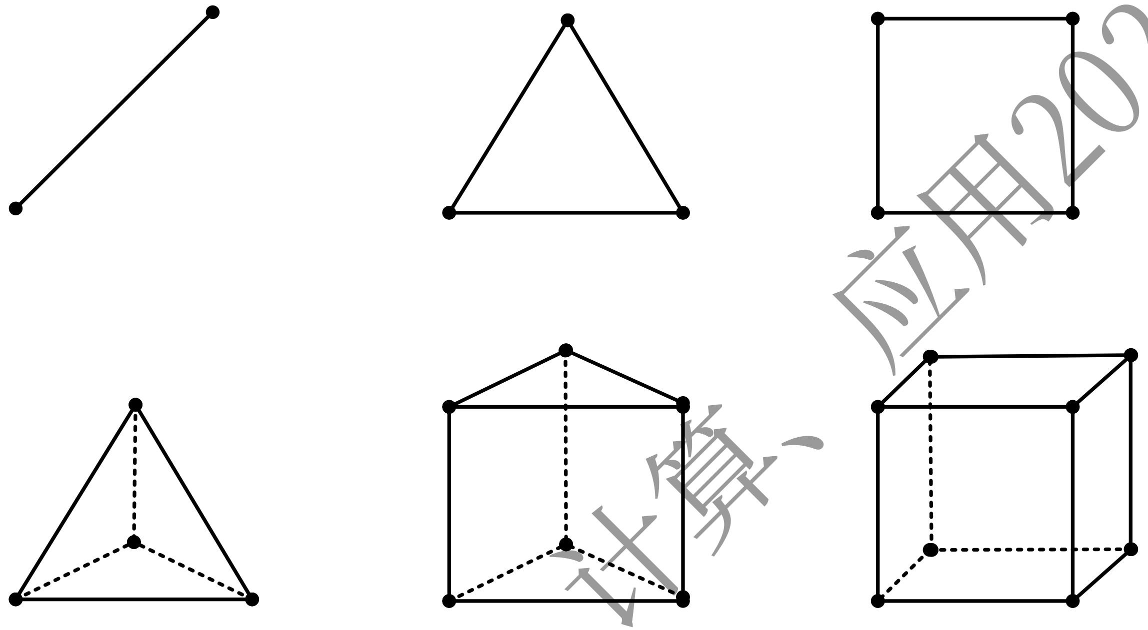
$$\Phi_2=\frac{14}{81}, \quad \Phi_3=\frac{40}{81}$$

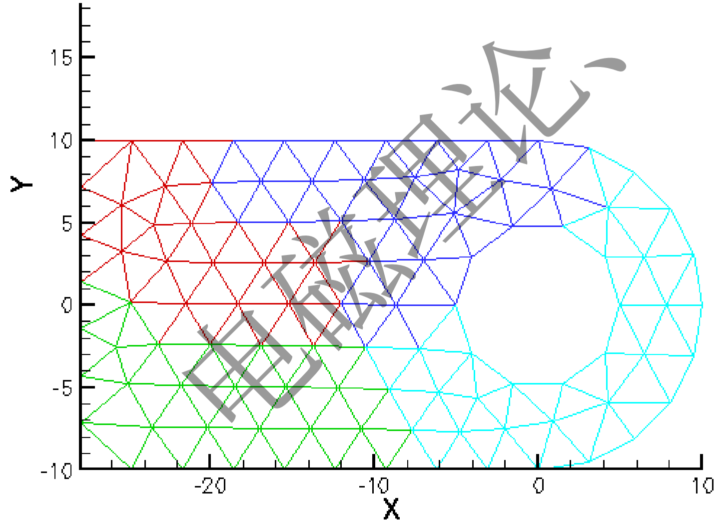


授课内容

- 有限元法简介
- 有限元法理论基础
- **有限元法应用实例**
- 波导本征值问题有限元求解

区域离散（网格划分）



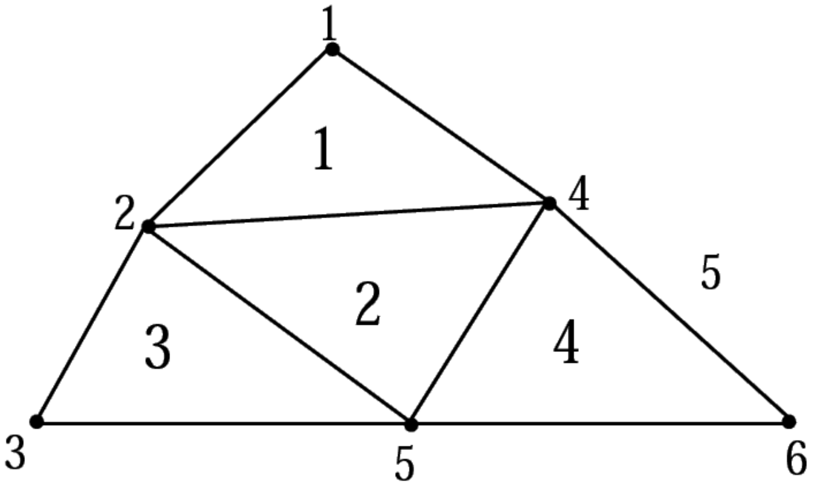


- 坐标值
- 局部编号
- 全局编号

网格划分要求

- 单元的边长尽量地接近，尽量避免具有大的钝角、尖锐角，一般最长的一条边不大于最短边的三倍。
- 各单元之间只能以顶点相交，即两相邻的单元有公共的顶点及等长的公共边、相同形状的面，不能把一个单元的顶点取在另一个单元的边上（常规算法要求共形，非共形区域分解算法可不共形）。
- 不同媒质边界区分明确，将介质的交面线/面选为分割边界。
- 对复杂变化的部分适当采用细密网格保证模拟曲线足够光滑。

区域离散-2D



局部编号

e \ i	1	2	3
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

单元编号

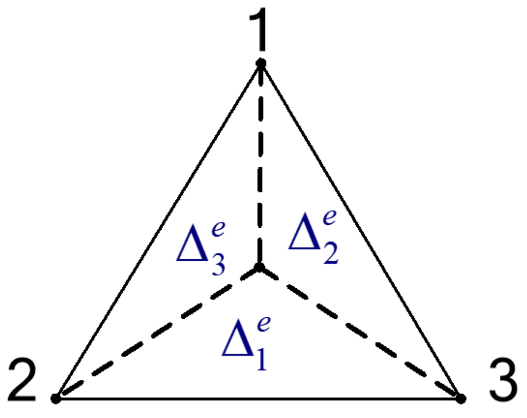
全局编号

基函数的选取

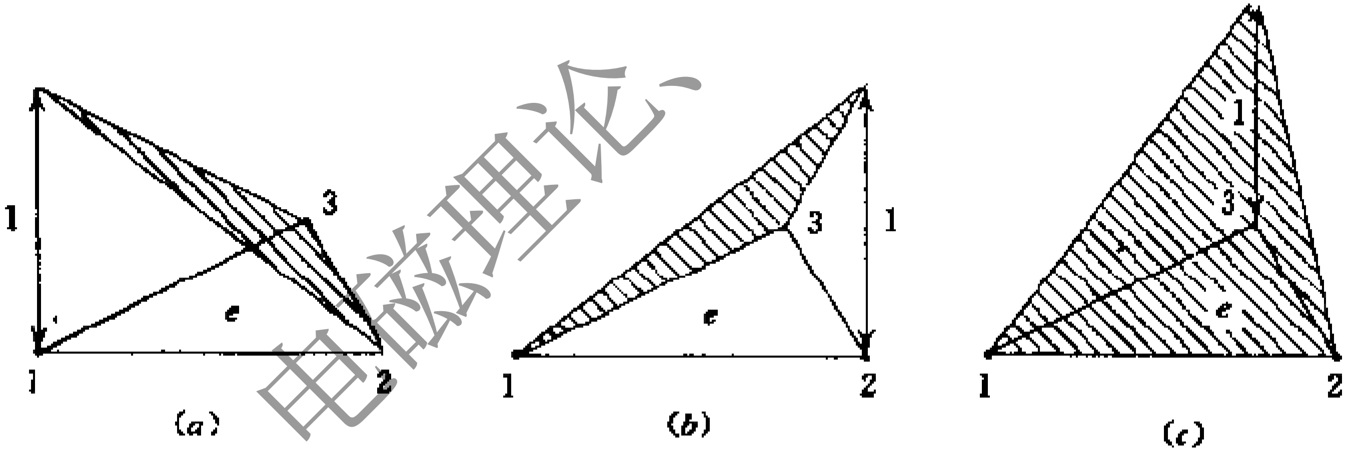
■ 顶点元

$$L_i^e(x,y)=\frac{1}{2\Delta^e}(a_i^e+b_i^e x+c_i^e y)=\frac{\Delta_i^e}{\Delta}$$

$$a_1^e=x_2^e y_3^e-x_2^e y_3^e;\quad b_1^e=y_2^e-y_3^e;\quad c_1^e=x_3^e-x_2^e$$
$$a_2^e=x_3^e y_1^e-x_3^e y_1^e;\quad b_2^e=y_3^e-y_1^e;\quad c_2^e=x_1^e-x_3^e$$
$$a_3^e=x_1^e y_2^e-x_1^e y_2^e;\quad b_3^e=y_1^e-y_2^e;\quad c_3^e=x_2^e-x_1^e$$



面积坐标



基函数的选取

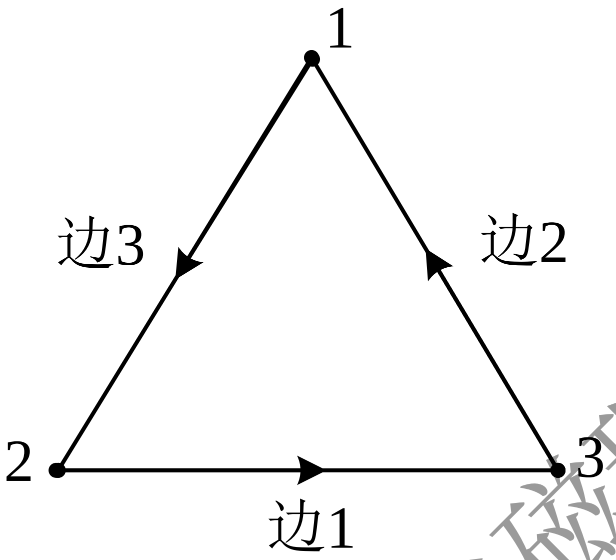
■ 边缘元

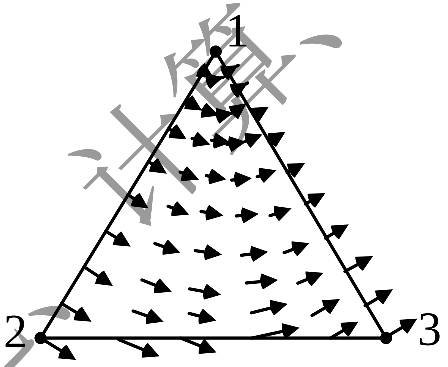
$$\begin{cases} \overrightarrow{W_1^e} = (L_2^e \nabla L_3^e - L_3^e \nabla L_2^e) l_1^e \\ \overrightarrow{W_2^e} = (L_3^e \nabla L_1^e - L_1^e \nabla L_3^e) l_2^e \\ \overrightarrow{W_3^e} = (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e) l_3^e \end{cases}$$

$$\hat{e}_1 \cdot \overrightarrow{W_1^e} = 1$$

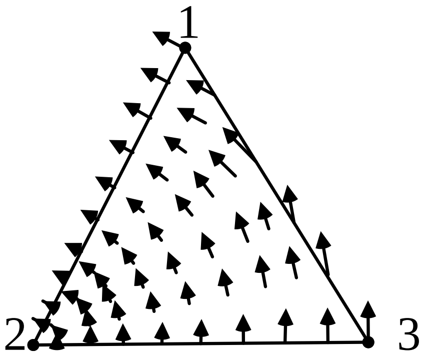
$$\hat{e}_2 \cdot \overrightarrow{W_1^e} = 0$$

$$\hat{e}_3 \cdot \overrightarrow{W_1^e} = 0$$

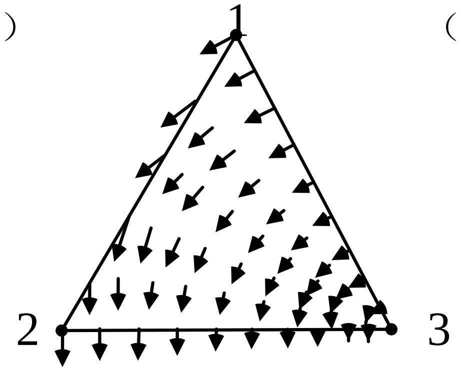




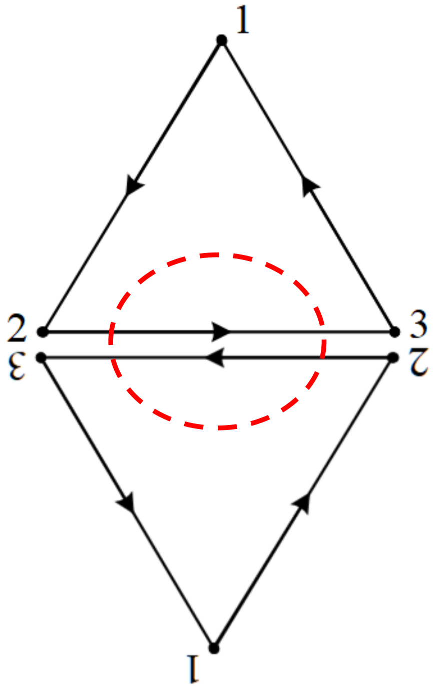
(a)



(b)



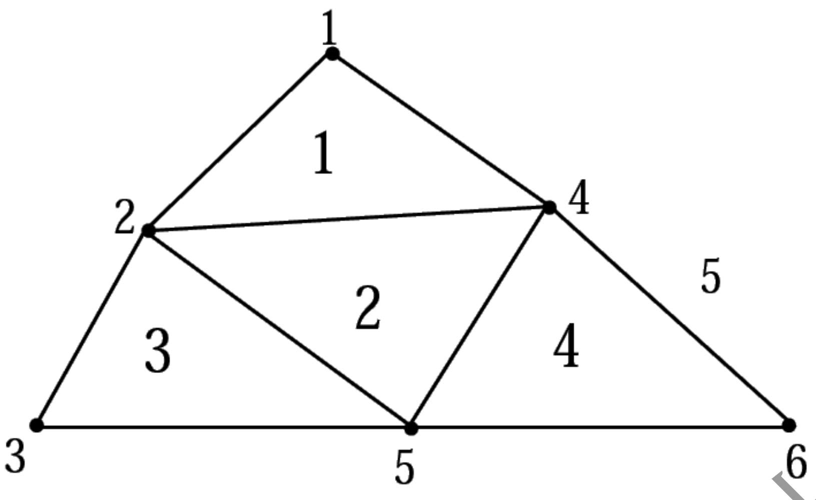
(c)



矢量，有方向（正负）！！

故需要通过全局 顶点编号统一方向

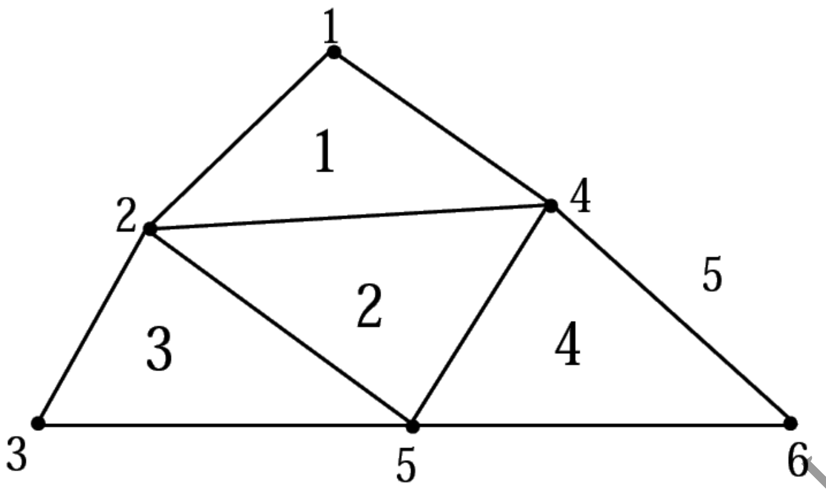
全局矩阵的组装-2D



e \ i	1	2	3
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} & 0 & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_3^{(1)} \\ b_1^{(1)} \\ 0 \\ b_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

全局矩阵的组装-2D



e \ i	1	2	3
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} & 0 & K_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)}+K_{33}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(1)}+K_{32}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23}^{(1)} & K_{21}^{(1)}+K_{23}^{(2)} & 0 & K_{22}^{(1)}+K_{22}^{(2)} & K_{21}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} & 0 & K_{12}^{(2)} & K_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_3^{(1)} \\ b_1^{(1)}+b_3^{(2)} \\ 0 \\ b_2^{(1)}+b_2^{(2)} \\ b_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

稀疏矩阵的存储

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

满阵（**Full matrix**）

坐标形式（**Coordinates, COO**）

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

行压缩形式（**Compressed Sparse Row, CSR**）

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

边界条件

- 第二类或第三类边界条件在变分问题中已被包含在泛函达到极值的要求之中，不必单独写出，是自动满足的，不必另行处置，故称此种边界条件为自然边界条件，其相应的变分问题称为无条件变分问题。
- 对于第一类边界条件，必须作为定解条件列出，故其变分问题求极值函数时必须在满足这一类边界条件的函数中去寻求。因此，称这类边界条件为强加边界条件，其相应的变分问题称条件变分问题。

方程组的求解

确定性问题 $[K]\{\Phi\}=\{b\}$ 或 $[A]\{\Phi\}=\lambda[\mathbf{B}]\{\Phi\}$ 本征值问题

- 直接法：经过有限步算术运算，无需迭代可直接求得方程组精确解的方法。对于不同的右端项，矩阵分解只需一次，计算复杂度高，内存需求大。
- 迭代法：不是用有限步运算求精确解，而是迭代产生近似解逼近精确解。如**Jacobi**迭代、**Gauss—Seidel**迭代、**SOR**迭代法等。计算复杂度低，需要的内存少，但计算效率极大的依赖于矩阵的性态，对于有限元稀疏矩阵，通常需要构建预处理才能快速收敛。

授课内容

- 有限元法简介
- 有限元法理论基础
- 有限元法应用实例
- 波导本征值问题有限元求解

矩形空波导本征值问题

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)E_z = 0$$

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)H_z = 0$$

- 求解波导问题的一般途径是先解出纵向场，后由纵向场直接求出横向场。
- 柱坐标系下，电场和磁场的标量亥姆霍兹方程如上。
- 电磁波在波导中传输，横向上呈固定场分布，纵向上以一定速度传播

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}(t)e^{-\gamma z} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{H}(t)e^{-\gamma z} \qquad k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

- 最终得到 $\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$ **TM模** $\quad \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$ **TE模**

参考文献：盛新庆，《电磁理论、计算、应用》第2.2节

矩形空波导本征值问题

TE模

$$\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

在边界上 $\frac{\partial H_z}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0$

两端同乘 δH_z 并做积分 $\int_S \left(\nabla^2 H_z + k_c^2 H_z\right)\delta H_z dS - \int_\Gamma \delta H_z \cdot \frac{\partial H_z}{\partial n} dl = 0$

$$\int_S \delta H_z \cdot \nabla^2 H_z dS + \int_S \nabla \delta H_z \cdot \nabla H dS$$

第一类标量格林定理

$$= \int_\Gamma \delta H_z \cdot \frac{\partial H_z}{\partial n} dl$$

得泛函 $F\left(H_z\right) = \frac{1}{2}\int_S \left(\nabla H_z \cdot \nabla H_z - k_c^2 H_z^2\right) dS$

矩形空波导本征值问题

TM模

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

在边界上 $E_z = 0$

两端同乘 δE_z 并做积分 $\int_S \left(\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z\right)\delta E_z dS = 0$

$$\int_S \delta E_z \cdot \nabla_t^2 E dS + \int_S \nabla_t \delta E_z \cdot \nabla_t E dS$$

第一类标量格林定理

$$= \int_\Gamma \delta E_z \cdot \frac{\partial E_z}{\partial n} dl = 0$$

得泛函 $F\left(E_z\right) = \frac{1}{2}\int_S \left(\nabla_t E_z \cdot \nabla_t E_z - k_c^2 E_z^2\right) dS$

矩形空波导本征值问题

泛函 $$F(E_z)=\frac{1}{2}\int_S\left(\nabla E_z\cdot\nabla E_z-k_c^2E_z^2\right)dS$$

单元内展开 $$E_z^e=\sum_{i=1}^{3}L_i^eE_{zi}^e=\left\{E_z^e\right\}^T\left\{L^e\right\}$$

代入泛函 $$F=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\left(\left\{E_z^e\right\}^T\left[\mathbf{A}^e\right]\left\{E_z^e\right\}-k_c^2\left\{E_z^e\right\}^T\left[\mathbf{B}^e\right]\left\{E_z^e\right\}\right)$$

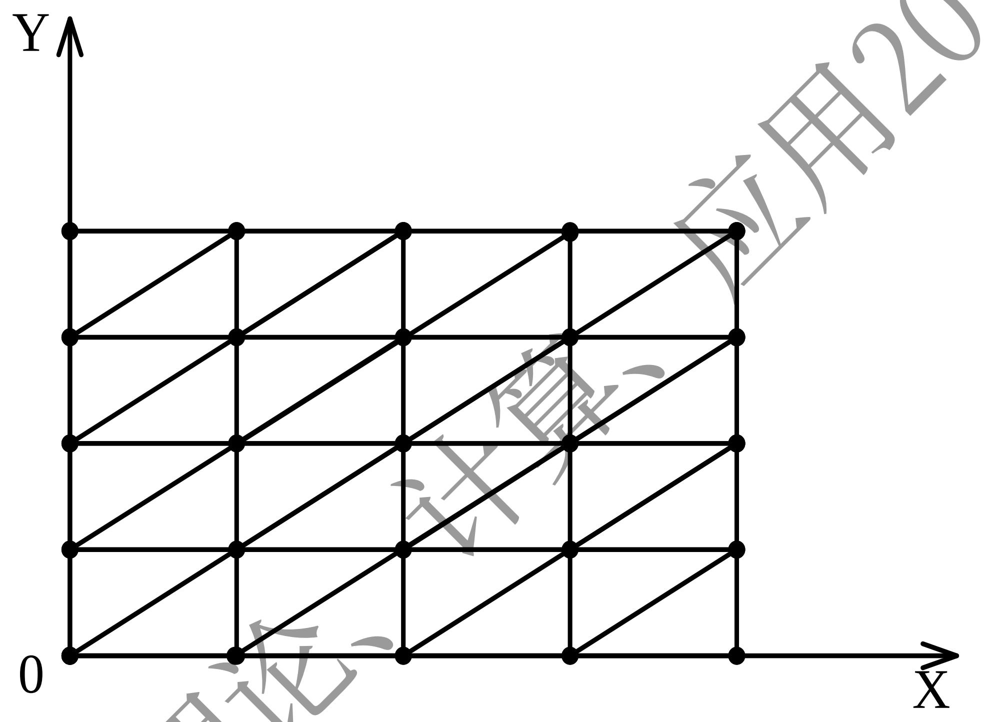
$$\left[\mathbf{A}^e\right]=\int_S\left(\nabla L^e\cdot\nabla\left\{L^e\right\}^T\right)dS\qquad\left[\mathbf{B}^e\right]=\int_S\left(L^e\cdot\left\{L^e\right\}^T\right)dS$$

泛函求变分 $$[\mathbf{A}]\{E_z\}=k_c^2[\mathbf{B}]\{E_z\}$$

程序编写流程

波导截面剖分及特征的获取 → 离散单元矩阵的计算及集成 → 强加边界条件的处理 → 计算本征值

程序实现1：网格剖分



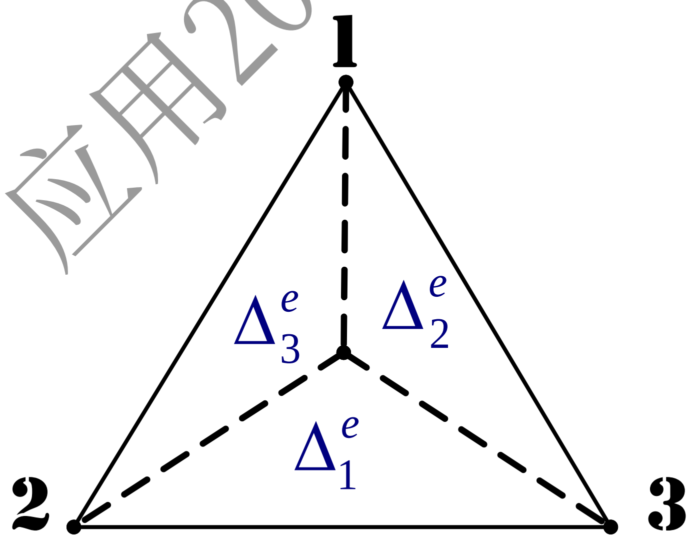
Matlab pdetool

- 顶点和三角形单元总数；
- 所有顶点坐标，用实型数xynodes(2,maxnodes)组存储；
- 三角形单元内各顶点局部编号和整体编号之间的关系

程序实现2：基函数的选取

$$E_z^e = \sum_{i=1}^{3} L_i^e E_{zi}^e = \left\{E_z^e\right\}^T \left\{L^e\right\}$$

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{2\Delta^e}\left(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y\right), \quad i = 1, 2, 3$$



$$a_1^e = x_2^e y_3^e - x_2^e y_3^e; \quad b_1^e = y_2^e - y_3^e; \quad c_1^e = x_3^e - x_2^e$$

$$a_2^e = x_3^e y_1^e - x_3^e y_1^e; \quad b_2^e = y_3^e - y_1^e; \quad c_2^e = x_1^e - x_3^e$$

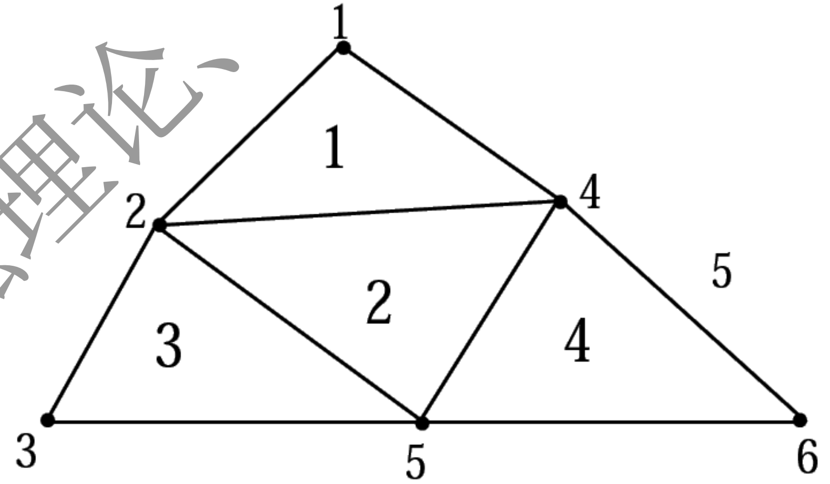
$$a_3^e = x_1^e y_2^e - x_1^e y_2^e; \quad b_3^e = y_1^e - y_2^e; \quad c_3^e = x_2^e - x_1^e$$

程序实现3：矩阵组装

$$[\mathbf{A}]\{E_z\} = k_c^2[\mathbf{B}]\{E_z\}$$

$$\mathbf{A}=\sum_{e=1}^{M}\left[\mathbf{A}^e\right] \qquad \mathbf{A}_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta}\left(b_i b_j + c_i c_j\right)$$

$$\mathbf{B}=\sum_{e=1}^{M}\left[\mathbf{B}^e\right] \qquad \mathbf{B}_{ij}^e = \frac{1+\delta_{ij}}{12}\Delta$$



程序实现4：边界条件

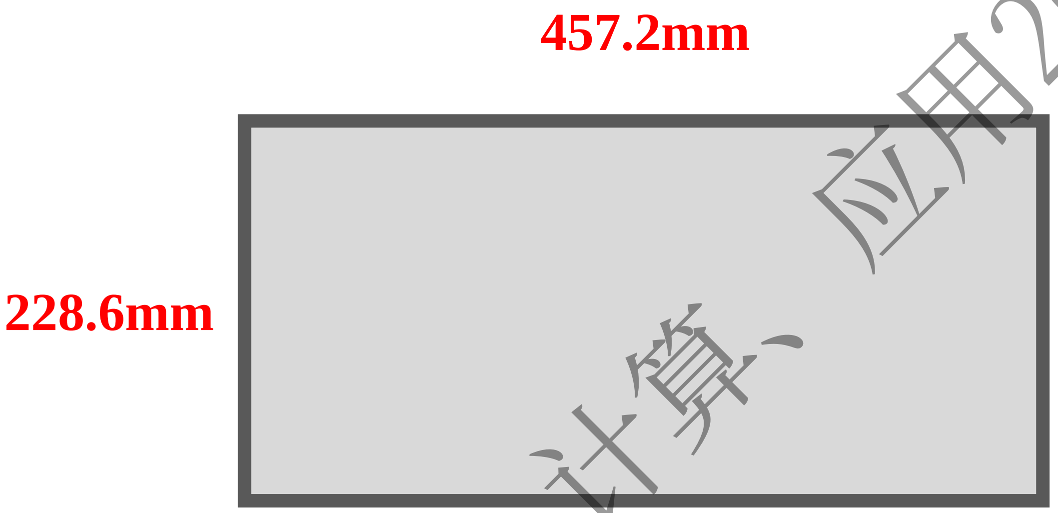
TM $E_z|_\Gamma = 0$

剔除掉对应边界上的顶点！！

TE $\frac{\partial H_z}{\partial n}|_\Gamma = 0$

已包含在泛函中，无需强加！！

作业要求

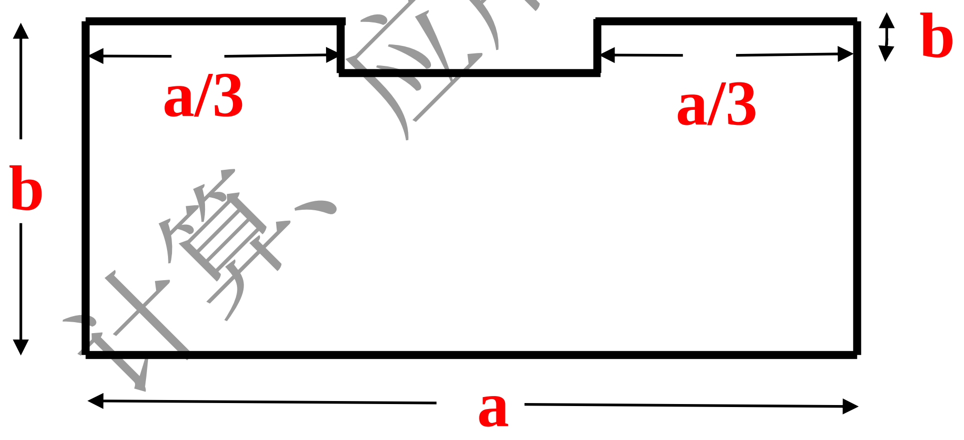


- ■ 编写有限元程序求出此波导的前10个本征模的传播常数；
- ■ 给出与理论值的对比结果，验证程序的正确性；
- ■ 考察不同剖分对计算结果的影响。

作业要求

a =457.2mm

b=228.6mm



- 编写有限元程序求出此波导的前5个本征模的传播常数；
- 汇总实验报告：**Matlab**程序代码、剖分截图、矩形波导结果与理论解对比表；任意形状界面波导的计算结果表。

泛函推导

$$F(f)=\frac{1}{2}\langle L(f),f\rangle-\frac{1}{2}\langle f,g\rangle-\frac{1}{2}\langle g,f\rangle$$

$$L(f)=\frac{d^2\Phi}{dx^2}$$

$$g=x+1$$

$$f=\Phi$$

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d^2\Phi}{dx^2}\bullet\Phi^*dx-\frac{1}{2}\int_0^1 f\bullet g^*dx-\frac{1}{2}\int_0^1 g\bullet f^*dx$$

Φ与g不含虚部，所以共轭是其本身

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d^2\Phi}{dx^2}\bullet\Phi dx-\frac{1}{2}\int_0^1 f\bullet gdx-\frac{1}{2}\int_0^1 g\bullet fdx$$

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d^2\Phi}{dx^2}\bullet\Phi dx-\int_0^1 f\bullet gdx$$

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d^2\Phi}{dx^2}\bullet\Phi dx-\int_0^1 \Phi\bullet(x+1)dx$$

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_a^b\Phi d\Phi'-\int_0^1 \Phi\bullet(x+1)dx$$

a,b为积分变量由x换为Φ后的积分上下界

$$F(f)=\frac{1}{2}\left[\Phi\Phi'\Big|_a^b-\int_a^b\Phi' d\Phi\right]-\int_0^1 \Phi(x+1)dx$$

第一项为常量，对后续变分无影响，舍去
（可参考《电磁场有限元方法》P130内容）

$$F(f)=-\frac{1}{2}\int_a^b\Phi' d\Phi-\int_0^1 \Phi(x+1)dx$$

$$F(f)=-\frac{1}{2}\int_0^1\Phi'\bullet\Phi' dx-\int_0^1 \Phi(x+1)dx$$

$$F(f)=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 dx-\int_0^1 \Phi(x+1)dx$$

$$F(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 dx+\int_0^1 \Phi(x+1)dx$$

后续对泛函求变分，使其结果为0，所以上面两式等效

$$\frac{d\Phi}{dx}=\Phi'$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\Phi'}{dx}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}\bullet dx=\frac{d\Phi'}{dx}\bullet dx=d\Phi'$$