



北京理工大学
Beijing Institute of Technology

本科生实验报告

课程名称： 信号与线性系统

实验名称： 实验 1 信号的频域分析

任课教师：			实验教师：		
实验日期：			实验地点：		
实验类型：	<input checked="" type="checkbox"/> 原理验证		<input checked="" type="checkbox"/> 综合设计		<input checked="" type="checkbox"/> 自主创新
学生姓名：		班级：		学号：	
学 院：	信息与电子学院			专 业：	电子信息工程（徐特立英才班）
组 号：		同组同学：	（无需填写）		
成 绩：					



信息与电子学院

SCHOOL OF INFORMATION AND ELECTRONICS

实验 1 信号的频域分析

一、实验目的

1. 理解信号傅里叶级数的概念，掌握信号的频域分析方法。
2. 观察典型周期信号的频谱，掌握频谱特性。

二、实验原理

1. 连续周期信号的傅里叶展开

连续周期信号可以展开为傅里叶级数的形式，即：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2)$$

其中， T_0 表示基波周期， $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 为基波频率。

周期信号的傅里叶级数也可以由三角函数的线性组合来表示：

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\omega_0 t \quad (3)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt, & a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (4)$$

任何满足狄里赫利条件的周期信号都可以表示成一组谐波关系的复指数函数的叠加。一般来说周期信号需要无穷多项傅里叶级数才能完全逼近原始信号。但在实际应用中一般取有限项。

2. 利用数值计算的方法对周期信号进行频域分析

当采样率无限大时，傅里叶变换 $X(\omega)$ 可近似离散化表示：

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) e^{-jk\omega_0 \Delta} \quad (5)$$

若 $x(t)$ 为有限信号，则上式可进一步表示为：

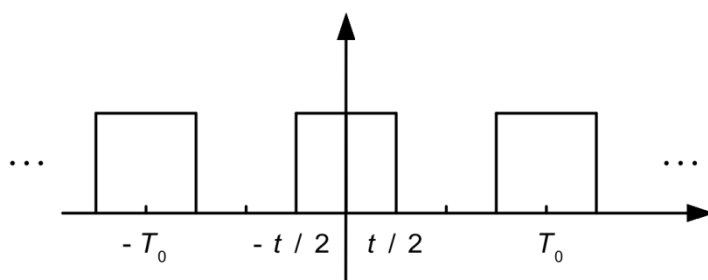
$$X(\omega) = \Delta \sum_{k=a}^b x(k\Delta) e^{-jk\omega \Delta} \quad (6)$$

即

$$X(\omega) = [x(a\Delta), x((a+1)\Delta), \dots, x(b\Delta)] \times \begin{bmatrix} e^{-ja\Delta\omega} \\ e^{-j(a+1)\Delta\omega} \\ \vdots \\ e^{-jb\Delta\omega} \end{bmatrix} \quad (7)$$

三、 实验内容

已知 $x(t)$ 是如下图所示的周期矩形脉冲信号。



1. 计算该信号的傅里叶级数；

由上图可以写出 $x(t)$ 在一个周期内的表达式：

$$x(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad (8)$$

将其代入公式(2)，可得：

$$c_k = \frac{A\tau}{T_0} \text{Sa}(k\pi\tau/T_0) \quad (9)$$

再将其代入公式(1)，可求得该信号的傅里叶级数为：

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(k\pi\tau/T_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (10)$$

2. 利用 MATLAB 绘制前 N 次谐波叠加后的近似波形；

MATLAB 代码如下：

```
1. %% 周期矩形脉冲参数
2. T0 = 2;          % 周期
3. tau = 0.5;       % 脉宽
4. A = 1;           % 幅度
5. N = 20;          % 叠加到前 N 次谐波 (n=-N 到 N)
6.
7. % 时间轴 (三个周期内细化)
8. t = linspace(-3*T0/2, 3*T0/2, 10000);
9. Omega0 = 2*pi/T0;
10.
11. % 初始化信号
```

```

12. xN = zeros(size(t));
13.
14. for n = -N:N
15.     % 计算傅里叶系数 Xn
16.     Xn = (A*tau/T0) * sinc(n*tau/T0);
17.     % 叠加谐波分量
18.     xN = xN + Xn * exp(1j*n*Omega0*t);
19. end
20.
21. % 绘图
22. figure(1);
23. plot(t, real(xN), 'LineWidth', 1.2);
24. xlabel('Time (t)'); ylabel('Amplitude');
25. title(['前 20 次谐波叠加']);
26. grid on;

```

在这段代码中，我们设 $T_0 = 2$ ， $\tau = 0.5$ ， $A = 1$ ， N 分别取 20 和 50，如下图所示：

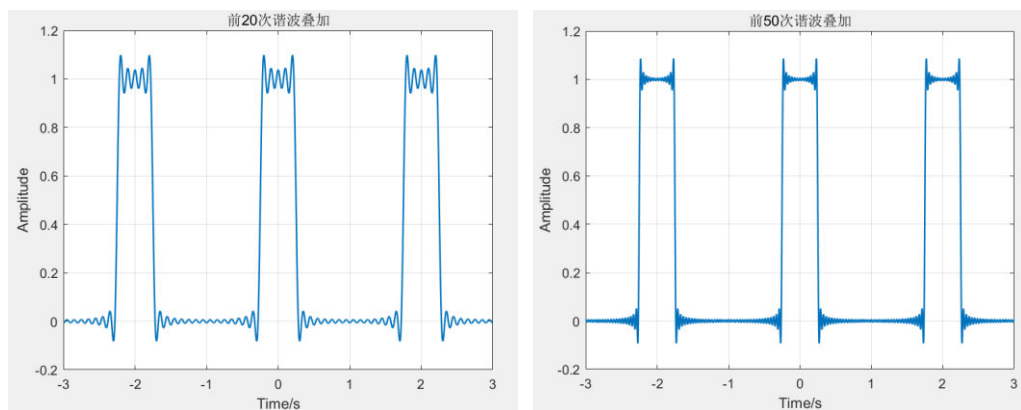


图 1: $N=20$ (左)以及 $N=50$ (右)时谐波叠加后的近似波形

由上图可以看出，叠加的谐波分量次数越高，对原信号的近似程度越好，并且在信号的不连续点处观察到了吉布斯现象，与理论分析相符。

3. 利用 MATLAB 数值算法绘制出信号的频谱，并总结参数 T_0 和 τ 是如何影响信号的频谱的。

MATLAB 代码如下：

```

1. %% 定义信号参数
2. T0 = 2;
3. tau = 0.5;
4. A = 1;
5. N0 = 10;
6.
7. % 生成时域信号

```

```

8. dt = 0.002;
9. t = -N0*T0/2:dt:N0*T0/2-dt;
10. x = zeros(size(t));
11.
12. % 生成周期矩形脉冲信号
13. for k = -N0/2:N0/2
14.     start0 = k*T0 - tau/2;
15.     end0 = k*T0 + tau/2;
16.     x = x + A * (t >= start0 & t <= end0);
17. end
18.
19. % 绘制时域波形
20. figure('Position', [100, 100, 1200, 800])
21. plot(t, x, 'LineWidth', 1.2);
22. xlabel('时间 t (s)');
23. ylabel('幅度');
24. title(['周期矩形脉冲信号 (T_0 = 2' 's, \tau = ' '0.5s) ']);
25. grid on;
26.
27. % 频域计算参数
28. w = -60*pi:120*pi/10240:60*pi-120*pi/10240;
29. X = x*exp(-1j*t'*w)*dt;
30.
31. % 绘制频谱
32. figure('Position', [100, 100, 1200, 800])
33. plot(w, abs(X), 'LineWidth', 1.5)
34. title('周期矩形脉冲信号的频谱幅度 |X(\omega)|')
35. xlabel('\omega/ (rad/s)')
36. ylabel('幅度')
37. grid on
38.
39. % 分析 T0 和 \tau 对频谱的影响
40. figure('Position', [100, 100, 1200, 800])
41.
42. % 改变 T0, 保持 \tau 不变
43. tau_fixed = 0.5;
44. T0_values = [1, 2, 4];
45. N0_values = [20, 10, 5];
46. for i = 1:length(T0_values)
47.     T0 = T0_values(i);
48.     N0 = N0_values(i);
49.
50.     % 生成时域信号
51.     t = -N0*T0/2:dt:N0*T0/2-dt;

```

```

52.     x = zeros(size(t));
53.     for k = -N0/2:N0/2
54.         start0 = k*T0 - tau_fixed/2;
55.         end0 = k*T0 + tau_fixed/2;
56.         x = x + A * (t >= start0 & t <= end0);
57.     end
58.
59.     % 计算频谱
60.     X = x * exp(-1j*t'*w) * dt;
61.
62.     % 绘制频谱
63.     subplot(2, length(T0_values), i)
64.     plot(w, abs(X), 'LineWidth', 1.5)
65.     title(['T_0 = ', num2str(T0), 's, \tau = ', num2str(tau_fixed), 's'])
66.     xlabel('\omega/ (rad/s)')
67.     ylabel('幅度')
68.     grid on
69. end
70.
71. % 改变  $\tau$ , 保持  $T_0$  不变
72. T0_fixed = 2;
73. tau_values = [0.25, 0.5, 1];
74. N0 = 10;
75. for i = 1:length(tau_values)
76.     tau = tau_values(i);
77.
78.     % 生成时域信号
79.     t = -N0*T0_fixed/2:dt:N0*T0_fixed/2-dt;
80.     x = zeros(size(t));
81.     for k = -N0/2:N0/2
82.         start0 = k*T0_fixed - tau/2;
83.         end0 = k*T0_fixed + tau/2;
84.         x = x + A * (t >= start0 & t <= end0);
85.     end
86.
87.     % 计算频谱
88.     X = x * exp(-1j*t'*w) * dt;
89.
90.     % 绘制频谱
91.     subplot(2, length(tau_values), length(T0_values) + i)
92.     plot(w, abs(X), 'LineWidth', 1.5)
93.     title(['T_0 = ', num2str(T0_fixed), 's, \tau = ', num2str(tau), 's'])
94.     xlabel('\omega/ (rad/s)')
95.     ylabel('幅度')

```

```
96. grid on
```

```
97. end
```

取 $T_0 = 2$, $\tau = 0.5$, $A = 1$, 并选取对称于零时刻的十个周期, 首先画出时域波形:

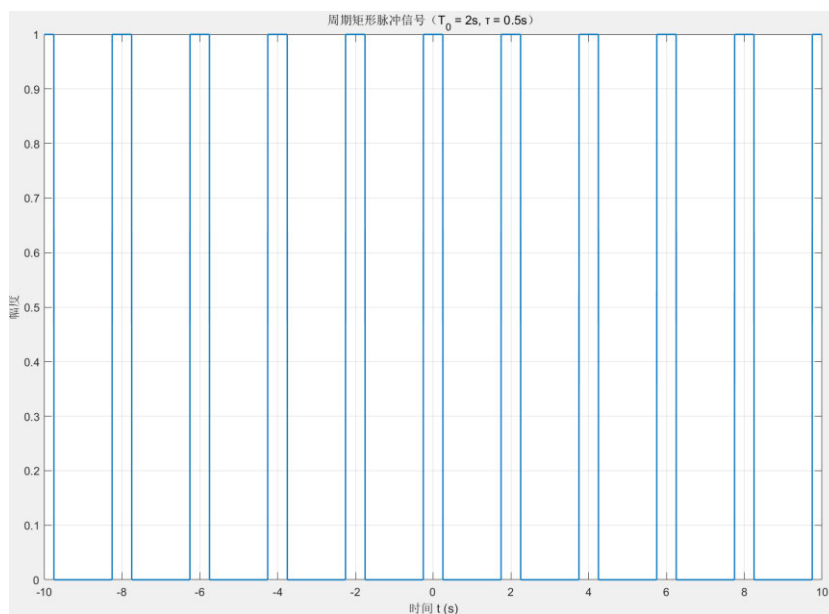


图 2: 时域波形

利用数值算法绘制出的信号频谱如下图所示:

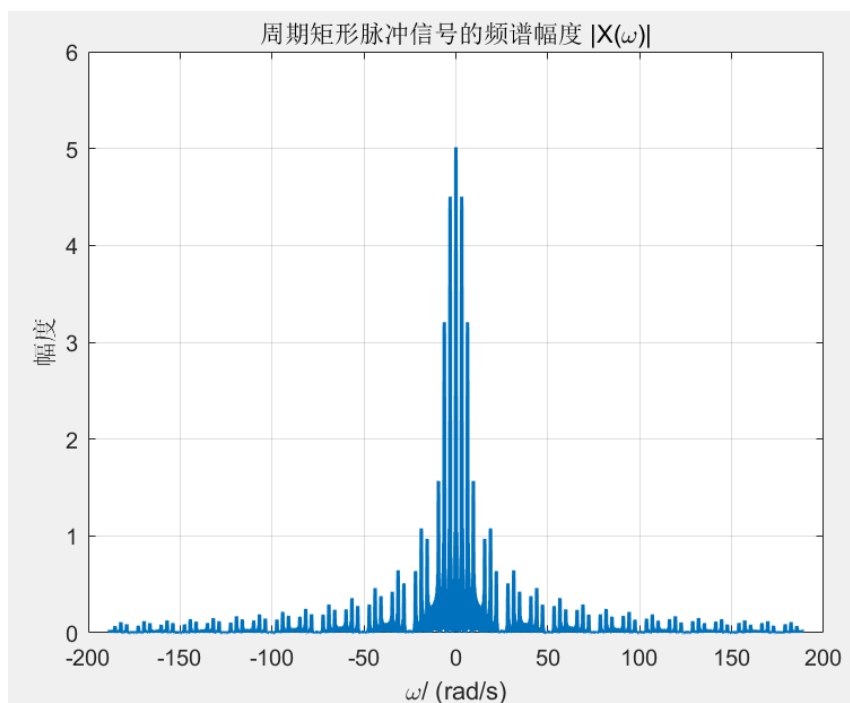


图 3: 信号频谱

下面我们观察改变参数 T_0 和 τ 对信号的频谱的影响:

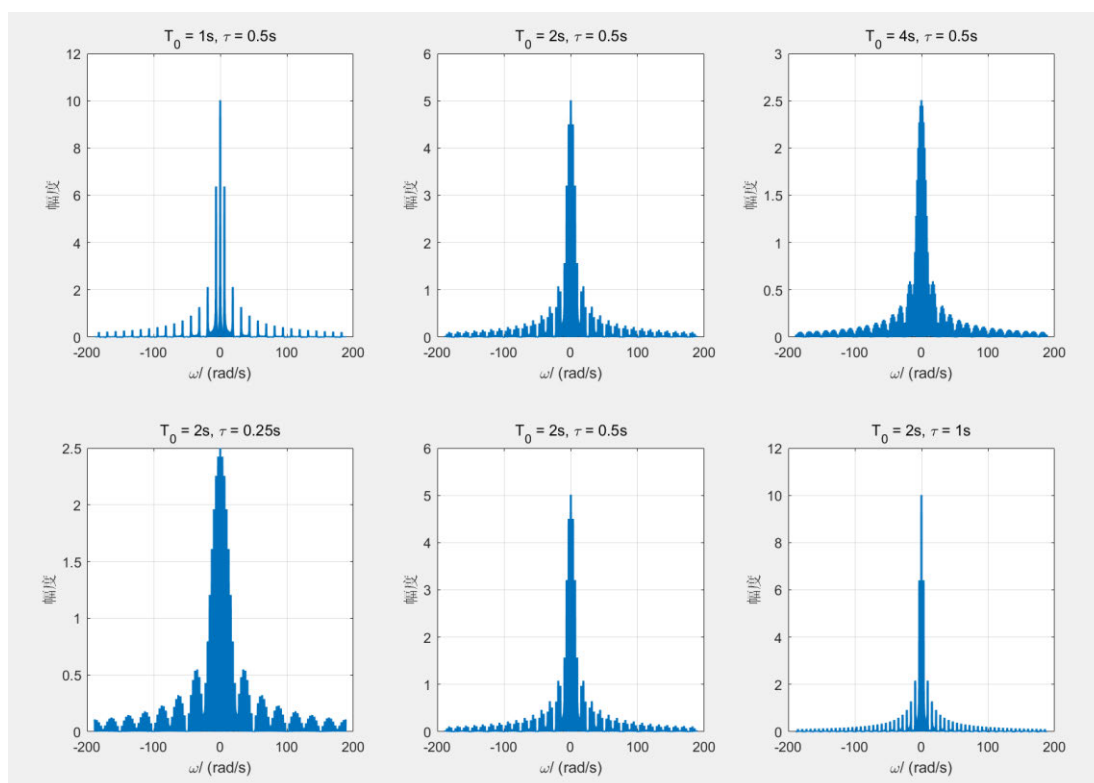


图 4：不同参数 T_0 和 τ 的信号频谱

由上图可知：当 τ 固定时，第一个过零点位置 $\omega = 2\pi/\tau$ 不变，所以此时的信号带宽 $\Delta f = 1/\tau$ 不变，即主瓣宽度不变。 T 增大时，基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T$ 减小，谱线间的间隔减小，谱线逐渐密集。随着周期 T 增大，同频率分量的幅度也相应地成反比减小，即频谱幅度逐渐减小。当周期 T 趋向于无穷大时，频谱的谱线就无限密集，而频谱幅度则无限趋于零，这时周期矩形脉冲信号无限趋近于非周期性矩形单脉冲信号。

当 T 固定时，基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T$ 不变，所以频谱间隔不会改变。随之 τ 减小，幅度为零的谐波频率 $2\pi/\tau$ 逐渐升高，主瓣宽度逐渐增大，因此各次谐波幅度趋近于零的收敛速度也相应地变慢。与此同时，随着 τ 减小，整个频谱的幅度都相应地减小了。因此当 τ 减小时，信号能量向高频扩散，信号的频带宽度逐渐变宽。