参考答案

- **习题 6.8** 已知离散时间系统的结构如图所示，

(1) 写出系统的差分方程；
(2) 求系统的冲激响应 $h[n]$；
(3) 判断系统是否稳定；
(4) 若激励信号为 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$，求系统的零状态响应 $y[n]$。

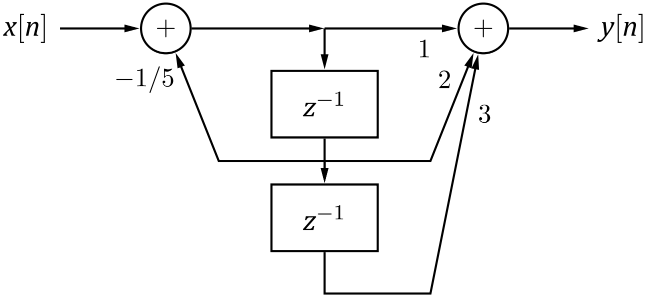

图 1　习题 6.8 系统框图

- **习题 6.8** 已知离散时间系统的结构如图所示，

(1) 写出系统的差分方程；

解：根据框图，列出如下等式

$$w[n]=x[n]-\frac{1}{5}w[n-1],\ \ y[n]=w[n]+2w[n-1]+3w[n-2]$$

进行 z 变换，有

$$\begin{cases} W(z)=X(z)-\frac{1}{5}z^{-1}W(z) \\ Y(z)=W(z)+2z^{-1}W(z)+3z^{-2}W(z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} M(z)=\frac{X(z)}{1+\frac{1}{5}z^{-1}} \\ Y(z)=(1+2z^{-1}+3z^{-2})M(z) \end{cases}$$

整理得 $Y(z)+\frac{1}{5}z^{-1}Y(z)=X(z)+2z^{-1}X(z)+3z^{-2}X(z)$，进行逆 z 变换，得到系统差分方程

$$y[n]+\frac{1}{5}y[n-1]=x[n]+2x[n-1]+3x[n-2]$$

- **习题 6.8** 已知离散时间系统的结构如图所示，

(2) 求系统的冲激响应 $h[n]$；

解： 由 (1)，得到系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}=\frac{z^2+2z+3}{z^2+\frac{1}{5}z}$$

$$\Rightarrow \frac{H(z)}{z}=\frac{z^2+2z+3}{z^2(z+\frac{1}{5})}=\frac{66}{z+\frac{1}{5}}+\frac{15}{z^2}-\frac{65}{z}$$

$$\Rightarrow H(z)=66\frac{z}{z+\frac{1}{5}}+15\frac{1}{z}-65$$

进行逆 z 变换，得到冲激响应

$$h[n]=66\left(-\frac{1}{5}\right)^n u[n]+15\delta[n-1]-65\delta[n]$$

- **习题 6.8** 已知离散时间系统的结构如图所示，

(3) 判断系统是否稳定；

(4) 若激励信号为 $x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n}$，求系统的零状态响应 $y[n]$

解：（3）$H(z)$ 的极点为 $z = 0,\ z = -\frac{1}{5}$，均在单位圆内。收敛域 $|z| > \frac{1}{5}$ 包含单位圆，故系统稳定。

（4）令 $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$，根据线性时不变系统的频率响应特性，零状态响应为

$$y[n] = H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n} = \frac{1 + 2e^{-j\Omega_0} + 3e^{-j2\Omega_0}}{1 + \frac{1}{5}e^{-j\Omega_0}}e^{j\Omega_0 n}$$

- **习题 6.9** 若系统在信号 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 激励下，零状态响应为

$y[n]=(0.5)^n(u[n-2]-u[n-6])$：

(1) 求该系统的冲激响应 $h[n]$；

(2) 写出系统的差分方程。

解： 将输出信号 $y[n]$ 改写为

$$y[n]=(0.5)^2\cdot(0.5)^{n-2}u[n-2]-(0.5)^6\cdot(0.5)^{n-6}u[n-6]$$

根据输入信号，可知系统差分方程为

$$y[n]=\frac{1}{4}x[n-2]-\frac{1}{64}x[n-6]$$

冲激响应为

$$h[n]=\frac{1}{4}\delta[n-2]-\frac{1}{64}\delta[n-6]$$

- **习题 6.10** 已知激励信号为 $x[n]=u[n]$ 时，系统的零状态响应为 $2(1-0.5^n)u[n]$。当激励信号为 $x[n]=0.5^n u[n]$ 时，求系统的零状态响应。

解： 已知激励 $x_1[n]=u[n]$ 和响应 $y_1[n]=2(1-0.5^n)u[n]$ 的 Z 变换为

$$X_1(z)=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1,\quad Y_1(z)=2\cdot\frac{z}{z-1}-2\cdot\frac{z}{z-0.5},\quad |z|>1$$

激励信号 $x[n]_2=0.5^n u[n]$ 的 Z 变换为

$$X_2(z)=\mathcal{Z}\{0.5^n u[n]\}=\frac{z}{z-0.5},\quad |z|>0.5$$

则 $X_2(z)$ 对应的输出为

$$Y_2(z)=H(z)\cdot X_2(z)=\frac{Y_1(z)}{X_1(z)}\cdot X_2(z)=\frac{z}{(z-0.5)^2},\quad |z|>0.5$$

利用 Z 变换的微分性质求逆 Z 变换，得到零状态响应为 $y_2[n]=n\cdot 0.5^n u[n]$。

- **习题 6.15** 已知某离散时间系统的零、极点分布如图 6.24 所示，系统的冲激响应应为右边序列，即 $h[n]=0, n<N$，其中 N 为整数，试判断该系统的因果性和稳定性，并说明理由。

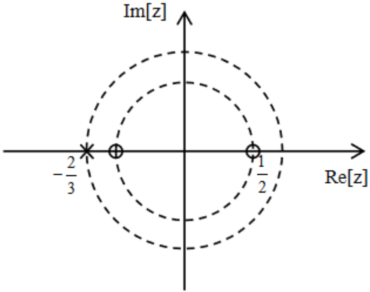

图 6.24　习题 6.15 的系统零、极点分布

- **习题** **6.15** 已知某离散时间系统的零、极点分布如图 6.24 所示，系统的冲激响应为右边序列，即 $h[n] = 0, n < N$，其中 N 为整数，试判断该系统的因果性和稳定性，并说明理由。

解： 由零极点图可知，系统函数 $H(z)$ 的一般形式为

$$H(z) = K\frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}{z+\frac{2}{3}}$$ 其中 K 为常数

由于分子中 z 的阶次高于分母中 z 的阶次，故系统是非因果的。

极点为 $\pm 1/2$，所有极点均位于单位圆内，收敛域 $|z| > \frac{2}{3}$ 包含单位圆，故系统是稳定的。

- **习题 6.16** 已知某离散时间系统的冲激响应 $h[n]$ 为右边序列，即

$h[n]=0, n<N$，其中 N 为整数，且满足如下条件。试确定系统函数 $H(z)$，并判断系统的因果性和稳定性。

(1) $h[0]=1, H(-1)=2$;
(2) $H(z)$ 在原点 $z=0$ 有一个二阶零点;
(3) $H(z)$ 有两个复共轭极点，且位于圆周 $|z|=1/2$ 上。

解： 设极点 $p_1=\frac{1}{2}e^{j\theta}, p_2=\frac{1}{2}e^{-j\theta}$，有 $p_1p_2=|p_1|^2=\frac{1}{4}$，
$p_1+p_2=2\cdot\mathrm{Re}\{p_1\}=\cos(\theta)$。令 $a=-\cos(\theta)$，有 $|a|<1$。
根据条件 (2) 和 (3) 可知，系统函数 $H(z)$ 的一般形式为

$$H(z)=K\frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}=K\frac{z^2}{z^2+az+\frac{1}{4}}$$

其中 K 和 a 是待定常数。由于 $h[n]$ 为右边序列，可知 $\mathrm{ROC}:|z|>1/2$。

- **习题 6.16** 已知某离散时间系统的冲激响应 $h[n]$ 为右边序列，即

$h[n] = 0, n < N$，其中 N 为整数，且满足如下条件。试确定系统函数 $H(z)$，并判断系统的因果性和稳定性。

解：

- **因果性：**系统 $H(z)$ 是有理函数形式，分子分母中 z 的最高阶次相同，可知该系统是因果系统。
- **稳定性：**一个 LTI 系统是稳定的充要条件是其系统函数 $H(z)$ 的 ROC 包含单位圆 $|z| = 1$。该系统的 ROC 为 $|z| > 1/2$，单位圆 $|z| = 1$ 包含在收敛域内。因此，该系统是稳定系统。

- **习题 6.16** 已知某离散时间系统的冲激响应 $h[n]$ 为右边序列，即 $h[n]=0, n<N$，其中 N 为整数，且满足如下条件。试确定系统函数 $H(z)$，并判断系统的因果性和稳定性。

解： 根据 $H(z)$ 的表达式，可知系统为因果系统，$h[n]$ 为因果序列，利用单边 Z 变换的初值定理，有

$$
\begin{aligned}
h[0] &= \lim_{z\to\infty} H_+(z) = \lim_{z\to\infty} H(z) \\
&= \lim_{z\to\infty} \frac{K}{1+az^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} = K
\end{aligned}
$$

根据条件 (1) $h[0]=1$，得到 $K=1$。

参考答案

- **习题 6.16** 已知某离散时间系统的冲激响应 $h[n]$ 为右边序列，即 $h[n]=0, n<N$，其中 N 为整数，且满足如下条件。试确定系统函数 $H(z)$，并判断系统的因果性和稳定性。

解： 此时，系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2+az+\frac{1}{4}}$$

再利用条件 (1) 中的 $H(-1)=2$，有

$$H(-1)=\frac{(-1)^2}{(-1)^2+a(-1)+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{5}{4}-a}=2$$

解得 $a=\frac{3}{4}$，满足 $|a|<1$ 的约束条件。因此系统函数为

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2+\frac{3}{4}z+\frac{1}{4}}$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=(0.5)^n u[n]$，其中 $y[0]=0, y[1]=-1$；

解： 令 $x[n]=(0.5)^n u[n]$。对差分方程两边取单边 z 变换，利用移位性质，有

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\}=zY(z)-zy[0]$$
$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\}=z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1]$$
$$X(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

得到

$$2(z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1])+3(zY(z)-zy[0])+Y(z)=X(z)$$
$$(2z^2+3z+1)Y(z)-(2z^2+3z)y[0]-2zy[1]=X(z)$$

参考答案

● **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=(0.5)^n u[n]$，其中 $y[0]=0, y[1]=-1$；

解： 进而得到 $Y(z)$ 为

$$Y(z)=\underbrace{\frac{(2z^2+3z)y[0]+2zy[1]}{2z^2+3z+1}}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{\frac{X(z)}{2z^2+3z+1}}_{Y_{zs}(z)}$$

代入初始条件 $y[0]=0, y[1]=-1$，有

$$Y_{zi}(z)=\frac{-2z}{2z^2+3z+1}=\frac{-2z}{(2z+1)(z+1)}$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=(0.5)^n u[n]$，其中 $y[0]=0, y[1]=-1$；

解： 进行部分分式分解

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{-2}{(2z+1)(z+1)}=\frac{-1}{(z+0.5)(z+1)}=\frac{-2}{z+0.5}+\frac{2}{z+1}$$

进行逆 z 变换，得到零输入响应为

$$y_{zi}[n]=\left[-2(-0.5)^n+2(-1)^n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=(0.5)^n u[n]$，其中 $y[0]=0, y[1]=-1$；

解：

$$Y_{zs}(z)=\frac{X(z)}{2z^2+3z+1}=\frac{z/(z-0.5)}{(2z+1)(z+1)}=\frac{0.5z}{(z-0.5)(z+0.5)(z+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{0.5}{(z-0.5)(z+0.5)(z+1)}=\frac{1/3}{z-0.5}+\frac{-1}{z+0.5}+\frac{2/3}{z+1}$$

$$\Rightarrow Y_{zs}(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z+0.5}+\frac{2}{3}\frac{z}{z+1}$$

进行逆 z 变换，得到零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[\frac{1}{3}(0.5)^n-(-0.5)^n+\frac{2}{3}(-1)^n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1) $2y[n+2]+3y[n+1]+y[n]=(0.5)^n u[n]$，其中 $y[0]=0, y[1]=-1$；

解： 全响应 $y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$，即

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \left[\left(2+\frac{2}{3}\right)(-1)^n+(-2-1)(-0.5)^n+\frac{1}{3}(0.5)^n\right]u[n] \\
&= \left[\frac{8}{3}(-1)^n-3(-0.5)^n+\frac{1}{3}(0.5)^n\right]u[n]
\end{aligned}
$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

（2） $y[n]+2y[n-1]=[n-2]u[n]$，其中 $y[0]=1$；

解： 令 $x[n]=[n-2]u[n]$，其 z 变换为

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2z}{z-1}=\frac{z-2z(z-1)}{(z-1)^2}=\frac{3z-2z^2}{(z-1)^2}$$

对差分方程两边取单边 z 变换，利用 $\mathcal{Z}\{y[n-1]\}=z^{-1}Y(z)+y[-1]$，有

$$Y(z)+2(z^{-1}Y(z)+y[-1])=X(z)$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{-2y[-1]}{1+2z^{-1}}}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{\frac{X(z)}{1+2z^{-1}}}_{Y_{zs}(z)}$$

● **习题** **6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(2) $y[n]+2y[n-1]=[n-2]u[n]$，其中 $y[0]=1$；

解：对于零状态响应，有

$$Y_{zs}(z)=\frac{X(z)}{1+2z^{-1}}=\frac{(3z-2z^2)/(z-1)^2}{(z+2)/z}=\frac{z(3z-2z^2)}{(z-1)^2(z+2)}$$

进行部分分式分解，得到

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{3z-2z^2}{(z-1)^2(z+2)}=\frac{-14/9}{z+2}+\frac{-4/9}{z-1}+\frac{1/3}{(z-1)^2}$$

进行逆 z 变换，得到零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[-\frac{14}{9}(-2)^n-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

（2） $y[n]+2y[n-1]=[n-2]u[n]$，其中 $y[0]=1$；

解： 在 $n=0$ 时，有 $y[0]+2y[-1]=-2$，推得 $y[-1]=-1.5$，因此

$$Y_{zi}(z)=\frac{-2y[-1]}{1+2z^{-1}}=\frac{3}{1+2z^{-1}}$$

进行逆 z 变换，得到零输入响应为

$$y_{zi}[n]=3(-2)^n u[n]$$

全响应 $y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$ 为

$$y[n]=\left[\frac{13}{9}(-2)^n-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(3) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=u[n]$，其中 $y[-1]=0, y[-2]=1/2$；

解： 输入信号 $X(z)=\mathcal{Z}\{u[n]\}=\frac{z}{z-1}$，对差分方程两边取单边 z 变换，有

$$Y(z)+3(z^{-1}Y(z)+y[-1])+2(z^{-2}Y(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2])=X(z)$$

$$(1+3z^{-1}+2z^{-2})Y(z)=X(z)-(3+2z^{-1})y[-1]-2y[-2]$$

令 $H(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+3z+2}=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}$，有

$$Y(z)=\underbrace{H(z)[-(3+2z^{-1})y[-1]-2y[-2]]}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{H(z)X(z)}_{Y_{zs}(z)}$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(3) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=u[n]$，其中 $y[-1]=0, y[-2]=1/2$;

解： 代入 $y[-1]=0, y[-2]=1/2$，有

$$Y_{zi}(z)=-H(z)=\frac{-z^2}{(z+1)(z+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zi}(z)}{z}=\frac{-z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}+\frac{-2}{z+2}$$

$$\Rightarrow Y_{zi}(z)=\frac{z}{z+1}-2\frac{z}{z+2}$$

进行逆 z 变换，得到零输入响应为

$$y_{zi}[n]=\left[(-1)^n-2(-2)^n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(3) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=u[n]$，其中 $y[-1]=0, y[-2]=1/2$；

解:

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2}{(z+1)(z+2)}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z+2)}=\frac{1/6}{z-1}+\frac{-1/2}{z+1}+\frac{4/3}{z+2}$$

$$\Rightarrow Y_{zs}(z)=\frac{1}{6}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}+\frac{4}{3}\frac{z}{z+2}$$

进行逆 z 变换，得到零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n\right]u[n]$$

参考答案

● **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(3) $y[n]+3y[n-1]+2y[n-2]=u[n]$，其中 $y[-1]=0, y[-2]=1/2$；

解： 全响应 $y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$ 为

$$y[n]=\left[(-1)^n-2(-2)^n\right]u[n]+\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n\right]u[n]$$

$$=\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{2}{3}(-2)^n\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 输入信号 $X(z)=\mathcal{Z}\{u[n]\}=\frac{z}{z-1}$。对差分方程两边取单边 z 变换，有

$$(z^2Y(z)-z^2y[0]-zy[1])+(zY(z)-zy[0])+Y(z)=X(z)$$

$$(z^2+z+1)Y(z)-(z^2+z)y[0]-zy[1]=X(z)$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{(z^2+z)y[0]+zy[1]}{z^2+z+1}}_{Y_{zi}(z)}+\underbrace{\frac{X(z)}{z^2+z+1}}_{Y_{zs}(z)}$$

可知，系统极点为 $e^{\pm j2\pi/3}$。

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 代入 $y[0]=1, y[1]=2$，有

$$Y_{zi}(z)=\frac{z^2+3z}{z^2+z+1}=A\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}+B\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

其中 $\cos\omega_0=-1/2, \sin\omega_0=\sqrt{3}/2$。

$$\frac{z^2+3z}{z^2+z+1}=A\frac{z(z+1/2)}{z^2+z+1}+B\frac{z\sqrt{3}/2}{z^2+z+1}=\frac{A(z^2+0.5z)+B(\sqrt{3}/2)z}{z^2+z+1}$$

比较分子系数：$Az^2+(0.5A+\frac{\sqrt{3}}{2}B)z=z^2+3z$，解得 $A=1, B=\frac{5\sqrt{3}}{3}$。

参考答案

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 代入 $A=1, B=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 得到

$$Y_{zi}(z)=\frac{z(z+0.5)}{z^2+z+1}+\frac{\frac{5}{2}z}{z^2+z+1}$$

进行逆 z 变换，可得零输入响应为

$$y_{zi}[n]=\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]u[n]$$

- **习题** **6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 对于零状态响应，有

$$Y_{zs}(z)=\frac{X(z)}{z^2+z+1}=\frac{z}{(z-1)(z^2+z+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zs}(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{1/3}{z-1}+\frac{-1/3z-2/3}{z^2+z+1}$$

$$\Rightarrow Y_{zs}(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{3}\frac{z^2+2z}{z^2+z+1}$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 对第二项 $\frac{z^2+2z}{z^2+z+1}$ 进行分解，方法同上：$A'z^2+(0.5A'+\frac{\sqrt{3}}{2}B')z=z^2+2z$
解得 $A'=1, B'=\sqrt{3}$，得到

$$Y_{zs}(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{3}\frac{z^2+0.5z}{z^2+z+1}-\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{2}z}{z^2+z+1}$$

进行逆 z 变换，可得零状态响应为

$$y_{zs}[n]=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]u[n]$$

- **习题 6.19** 利用 z 变换分析法求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(4) $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=u[n]$，其中 $y[0]=1, y[1]=2$；

解： 全响应 $y[n]=y_{zi}[n]+y_{zs}[n]$ 为

$$\begin{aligned} y[n] &= \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]u[n] \\ &\quad +\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]u[n] \\ &= \left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right]u[n] \end{aligned}$$