电磁场理论基础 练习卷-2（含答案）

一、填空题（20分）

1. 恒定电场（是/不是）___是___有势场，___是___管形场，___是___调和场；
2. 对于标量场$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其梯度为___$\hat{R}=\left(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}\right)/R$___，沿$\hat{\theta}$的方向导数为___0___；
3. 亥姆霍兹定理表明，在给定的区域内，旋度和散度不恒为零的矢量场可以表示为___无散场___和___无旋场___之和的形式。
4. 电流密度$\vec{J}\left(x',y',z'\right)=x'\hat{z}$，C为常数，则$\nabla\cdot\vec{J}\left(x',y',z'\right)=$___0___，$\nabla'\cdot\vec{J}\left(x',y',z'\right)=$___0___；
5. 介质分界面上，静电场的边界条件和时谐电场的边界条件（相同、不相同）___相同___。
6. 矩形空波导中传输的电磁波其相速（大于/等于/小于）___大于___光速，其群速___小于___光速，其能量传输的速度___等于___群速；
7. 在介质与理想导体的分界面上，斜入射时平行极化电磁波的反射系数为___1___，垂直极化电磁波的反射系数为___-1___。
8. 赫兹偶极子天线的远场电磁波（是/不是）___是___TEM 波，___不是___均匀平面电磁波，___不是___均匀球面电磁波。
9. 良导体中传播的平面波，其电场和磁场的相差为___$\pi/4$___。
10. 在均匀介质中传播的电磁波，其电场能量和磁场能量（相等/不相等）___相等___；在均匀有耗媒质中传播的电磁波，其电场能量和磁场能量（相等/不相等）___不相等___。

二、判断题（对√，错×）。（10分）

1. 空间体积中有电流时，该空间内表面上便有面电流。（×）
2. 电偶极子的电场与磁偶极子的磁场之间存在对偶关系。（√）
3. 泊松方程适用于有源区域，拉普拉斯方程适用于无源区域。（√）
4. 镜像法和分离变量法理论依据为唯一性定理。（√）
5. 恒定电流场是无散、无旋场。（×）

三、计算题（15分）

设两种均匀介质（介电常数分别为$\varepsilon_1,\varepsilon_2$）的分界面为无限大平面，现在分界面两侧分别放置一点电荷q_1和q_2，其间距为$2d$，试求电荷q_1所受的力。

解：在媒质2的空间中放置一镜像电荷q_1'，等效q_1所产生电场在分界面上造成的极化电荷：

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊
装订线内不得答题

$q_1' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q_1$；　　（5 分）

在媒质 2 的空间再放置一镜像电荷 q_2'，等效 q_2 所产生的电场在分界面上造成的极化电：

$q_2' = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q_2$。　　（5 分）

则电荷 q_1 所受的力，应为 q_1'，q_2'，q_2 总场的作用：

$$\vec{F}_1 = \vec{E} q_1 = \frac{q_1' + q_2' + q_2}{4\pi\varepsilon_1 (2d)^2} q_1 = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q_1 + \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q_2}{16\pi\varepsilon_1 d^2} q_1 \quad （5 分）$$

四、计算题（15 分）

已知真空中传播的均匀平面电磁波的磁场强度复矢量表示为：

$\vec{H}(r) = \dfrac{1}{120\pi}(\hat{x} + j0.8\hat{y} + j0.6\hat{z}) e^{-j\pi(3y-4z)}$ A/m。

求：（1）该电磁波的波矢量，频率；（2）电场强度的复矢量表示；（3）平均坡印廷矢量表示

解：（1）由题意 $e^{-j\pi(3y-4z)}$，可知 $\pi(3y-4z) = k_y y + k_z z$，因此：$k_y = 3\pi, k_z = -4\pi$，则波矢量为：

$\vec{k} = 3\pi\hat{y} - 4\pi\hat{z}$，$k = \sqrt{(3\pi)^2 - (4\pi)^2} = 5\pi$　（3 分）

则频率为：$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{kc}{2\pi} = 0.75GHz$　　（2 分）

（2）
$$\begin{aligned}\vec{E}(r) &= \eta_0 \vec{H}(r) \times \hat{k} = e^{-j\pi(3y-4z)}(\hat{x} + j0.8\hat{y} + j0.6\hat{z}) \times (0.6\hat{y} - 0.8\hat{z}) \\ &= e^{-j\pi(3y-4z)}(-j\hat{x} + 0.8\hat{y} + 0.6\hat{z})\end{aligned}$$
（5 分）

（3）$\vec{S}_{av} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}(r) \times \vec{H}^*(r)\right) = \dfrac{\hat{k}}{2}\dfrac{1}{\eta_0}\left|\vec{E}(r)\right|^2 = \dfrac{\hat{k}}{2\eta_0}\left(\sqrt{1 + 0.6^2 + 0.8^2}\right)^2 = \dfrac{\hat{k}}{\eta_0}$　（5 分）

五、计算题（15 分）

一均匀平面波由空气入射到 z=0 的无限大理想导体平面上，已知入射的电场为：

$\vec{E}(r) = \hat{y} 10 e^{-j(\omega t - 6x - 8z)}$ V/m，求：

（1）入射角、电磁波的频率和波长　（2）反射波电场和磁场的表示（3）合成波电场和磁场的表示

解：（1）由题意 $e^{-j(6x+8z)}$，可知 $\vec{k} = 6\hat{x} + 8\hat{z}$，则入射角为 $\theta_i = \arctan\left[\dfrac{6}{8}\right] = 36.87^\circ$（2 分）

电磁波频率为：$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{kc}{2\pi} = \dfrac{15e8}{\pi} = 0.478GHz$　　（2 分）

波长为 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=0.628m$ （1 分）

（2）有题意知反射波的波矢量为：$\vec{k}_r=6\hat{x}-8\hat{z}$ 。入射波为垂直极化波，则反射系数为-1，因此反射波的电场为：$\vec{E}_r(r)=-\hat{y}10e^{-j(6x-8z)}$ （3 分）

磁场为：$\vec{H}_r(r)=\dfrac{\hat{k}_r\times\vec{E}_r(r)}{\eta_0}=\dfrac{10}{120\pi}\times\dfrac{(6\hat{x}-8\hat{z})\times(-\hat{y})}{10}e^{-j(6x-8z)}=\dfrac{1}{120\pi}(-6\hat{z}-8\hat{x})e^{-j(6x-8z)}$（2 分）

（3）合成电场为：

$$\vec{E}_s(r)=\hat{y}10e^{-j(6x+8z)}-\hat{y}10e^{-j(6x-8z)}=\hat{y}10e^{-j6x}\left(e^{-j8z}-e^{j8z}\right)=-\hat{y}20j\sin 8ze^{-j6x}$$ （2 分）

入射的磁场为：$\vec{H}(r)=\dfrac{1}{120\pi}(6\hat{z}-8\hat{x})e^{-j(6x+8z)}$，则合成磁场为：

$$\begin{aligned}\vec{H}_s(r)&=\frac{1}{120\pi}(6\hat{z}-8\hat{x})e^{-j(6x+8z)}+\frac{1}{120\pi}(-6\hat{z}-8\hat{x})e^{-j(6x-8z)}\\&=\frac{1}{120\pi}e^{-j6x}\left[6\hat{z}e^{-j8z}-6\hat{z}e^{j8z}-8\hat{x}e^{-j8z}-8\hat{x}e^{j8z}\right]\\&=\frac{1}{60\pi}e^{-j6x}\left[-j6\hat{z}\sin 8z-8\hat{x}\cos 8z\right]\end{aligned}$$ （3 分）

六、计算题（15 分）

矩形空波导 $a\times b$（a>b），当此波导传输工作频率为 3GHz 的 TE10 模电磁波，其纵向磁场的复矢量为：

$\vec{H}_z(r)=H_0\cos\left(\dfrac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_{10}z}$，其中 H_0 为实数。

求：（1）横向电场的复矢量表示（2）窄壁上的表面电流（3）宽边的最小允许尺寸

解：（1）横向磁场可表示为：

$$\boldsymbol{H}_t=-\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_z=-\hat{x}\frac{j\beta_{10}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_{10}z}\right)=\hat{x}\frac{ja\beta_{10}}{\pi}H_0\sin(x)e^{-j\beta_{10}z}$$

则横向电场为：

$$\boldsymbol{E}_t=-Z_{TE}\hat{z}\times\boldsymbol{H}_t=-\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma_{10}}\hat{z}\times\boldsymbol{H}_t=-\frac{\omega\mu}{\beta_{10}}(\hat{z}\times\hat{x})\frac{ja\beta_{10}}{\pi}H_0\sin(x)e^{-j\beta_{10}z}=-\frac{ja\omega\mu}{\pi}\hat{y}H_0\sin(x)e^{-j\beta_{10}z}$$ （6 分）

（2）窄壁，即 $x=0$ 或 $x=a$ 上的电流

$x=0$ 上的电流为：

$\vec{J}_{x=0}=\hat{x}\times\left(\vec{H}_t+\hat{z}H_z\right)=\hat{x}\times\hat{z}H_0\cos(0)e^{-j\beta_{10}z}=-\hat{y}H_0e^{-j\beta_{10}z}$； （3 分）

$x=a$ 上的电流为：

$\vec{J}_{x=a}=-\hat{x}\times\left(\vec{H}_t+\hat{z}H_z\right)=-\hat{x}\times\hat{z}H_0\cos(\pi)e^{-j\beta_{10}z}=\hat{y}H_0e^{-j\beta_{10}z}$； （3 分）

（3）

截止频率为 $f_{10}=\dfrac{c}{2a}$，依据题意 $f=3GHz>f_{10}=\dfrac{c}{2a}$，则 $a>\dfrac{1}{2}\dfrac{c}{3e9}=0.05m$。（3 分）

七、计算题（15 分）

已知电偶极子的发射功率为 100W，辐射场的频率为 30MHz,求离开电偶极子距离为 50 千米处的电场和磁场。

解：已知电偶极子的辐射电阻为：

$R_a=80\pi^2(\dfrac{dl}{\lambda})^2$，则远场的辐射功率为：$P_a=\dfrac{1}{2}I^2R_a=40\pi^2(\dfrac{Idl}{\lambda})^2=100$，则 $\dfrac{Idl}{\lambda}=\dfrac{\sqrt{10}}{2\pi}=0.5$。

波数为 $k=\dfrac{2\pi f}{c}=\dfrac{2\pi 0.03}{0.3}=0.2\pi$；

电偶极子的在此远场处表示为：

$$\vec{E}=j\hat{\theta}\eta_0\frac{Idl}{2\lambda}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta=j\hat{\theta}\frac{120\pi}{2}\frac{5}{\sqrt{10\pi}}\frac{e^{-j\pi\times10^4}}{50\times10^3}\sin\theta=j1.885\times10^{-3}\hat{\theta}e^{-j\pi\times10^4}\sin\theta\text{；}$$

则磁场表示为：

$$\vec{H}=j\hat{\phi}\frac{Idl}{2\lambda}\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\theta=j5\times10^{-6}\hat{\theta}e^{-j\pi\times10^4}\sin\theta$$