参考答案

- **习题 8.6** 证明：如果 FIR 滤波器的系数满足反对称性：

$$h[n] = -h[M-1-n], \quad 0 \le n \le M-1$$

则频率响应可表示为

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)-\pi]/2} H_r(e^{j\Omega})$$

式中

$$H_r(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2\sum\limits_{k=0}^{M/2-1} h[k]\sin\left[\left(\dfrac{M-1}{2}-k\right)\Omega\right], & M\text{为偶数} \\ 2\sum\limits_{k=0}^{(M-3)/2} h[k]\sin\left[\left(\dfrac{M-1}{2}-k\right)\Omega\right], & M\text{为奇数} \end{cases}$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \pi/2-\Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) \ge 0 \\ 3\pi/2-\Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) < 0 \end{cases}$$

- **习题 8.6**

证明：考虑因果 FIR 滤波器，系统函数为 $H(z)=\sum_{n=0}^{M-1}h[n]z^{-n}$。利用奇对称性 $h[n]=-h[M-1-n]$，下面分两种情况讨论。

情况一：M 为偶数

令 $M=2L$，利用奇对称性 $h[2L-1-n]=-h[n]$，得到

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}+\sum_{n=L}^{2L-1}h[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{L-1}h[2L-1-n]z^{-(2L-1-n)} \\
&= \sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}-\sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-(2L-1-n)}
\end{aligned}
$$

- **习题 8.6**

证明：令 $\alpha = (M-1)/2$，有

$$H(z) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]\left(z^{-n} - z^{-(2L-1-n)}\right)$$

$$= z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{L-1} h[n]\left(z^{-n+\alpha} - z^{n-\alpha}\right)$$

代入 $z = e^{j\Omega}$，得到

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\alpha\Omega} \sum_{n=0}^{L-1} h[n]\left(e^{-j\Omega(n-\alpha)} - e^{j\Omega(n-\alpha)}\right)$$

$$= e^{-j\alpha\Omega} \cdot 2j \sum_{n=0}^{L-1} h[n] \sin[\Omega(\alpha - n)]$$

- **习题 8.6**

证明：注意 $j = e^{j\pi/2}$，且 $\alpha = (M-1)/2$，代入得

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot 2\sum_{n=0}^{L-1} h[n]\sin\left[\Omega\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right]$$
$$= e^{-j[\Omega(M-1)-\pi]/2} \cdot H_r(e^{j\Omega})$$

其中实函数

$$H_r(e^{j\Omega}) = 2\sum_{n=0}^{M/2-1} h[n]\sin\left[\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\Omega\right]$$

相频响应为

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -\frac{\Omega(M-1)-\pi}{2} + \angle H_r(e^{j\Omega}) = \begin{cases} \pi/2 - \Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) \geq 0 \\ 3\pi/2 - \Omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\Omega}) < 0 \end{cases}$$

参考答案

- **习题 8.6**

证明：**情况二：M 为奇数**

令 $M=2L+1$，则 $L=(M-1)/2$。由奇对称性，当 $n=L$ 时，有

$$h[L]=-h[2L+1-1-L]=-h[L] \quad \Rightarrow \quad h[L]=0$$

故系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}+\sum_{n=L+1}^{2L}h[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}+\sum_{m=0}^{L-1}h[2L-m]z^{-(2L-m)}$$
$$=\sum_{n=0}^{L-1}h[n]z^{-n}-\sum_{m=0}^{L-1}h[m]z^{-(2L-m)}=\sum_{n=0}^{L-1}h[n]\left(z^{-n}-z^{-(2L-n)}\right)$$

- **习题 8.6**

证明：令 $\alpha = (M-1)/2 = L$，有

$$H(z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{L-1} h[n] \left(z^{-n+\alpha} - z^{n-\alpha}\right)$$

代入 $z = e^{j\Omega}$，类似偶数情况推导，可得

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)-\pi]/2} \cdot H_r(e^{j\Omega})$$

其中

$$H_r(e^{j\Omega}) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n] \sin\left[\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\Omega\right]$$

相频响应与偶数情况相同。综上，命题得证。

参考答案

- **习题 8.7** 已知滤波器的冲激响应如下，试判断滤波器是否具有线性相位。

1. $h[k] = [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]$;
2. $h[k] = [1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5]$;
3. $h[k] = [1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2]$;
4. $h[k] = [1, 2, 3, 4, 5, -4, -3, -2, -1]$。

解： 对于长度为 N 的线性相位滤波器，其单位冲激响应 $h[k]$ 必须满足下列偶对称或奇对称条件：

- **偶对称:** $h[k] = h[N-1-k]$
- **奇对称:** $h[k] = -h[N-1-k]$

其中对称中心为 $\frac{N-1}{2}$。

参考答案

- **习题 8.7** 已知滤波器的冲激响应如下，试判断滤波器是否具有线性相位。

1. $h[k]=[1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1]$;
2. $h[k]=[1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]$;
3. $h[k]=[1,2,3,4,5,4,3,2]$;
4. $h[k]=[1,2,3,4,5,-4,-3,-2,-1]$。

解： (1) 序列长度 $N=9$，观察可知 $h[k]$ 满足 $h[k]=h[8-k]$, 即序列关于 $k=4$ 偶对称。因此具有线性相位。

(2) 序列长度 $N=10$，观察可知 $h[0]=1\neq h[9]=5$，且 $h[0]\neq -h[9]$。因此不具有线性相位。

- **习题 8.7** 已知滤波器的冲激响应如下，试判断滤波器是否具有线性相位。

1. $h[k]=[1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1]$;
2. $h[k]=[1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]$;
3. $h[k]=[1,2,3,4,5,4,3,2]$;
4. $h[k]=[1,2,3,4,5,-4,-3,-2,-1]$。

解：(3) 序列长度 $N=8$，观察可知 $h[0]=1\neq h[7]=2$。因此不具有线性相位。

(4) 序列长度 $N=9$，观察可知，$h[4]=5\neq 0$，不满足奇对称条件 ($h[k]=-h[8-k]$ 。因此不具有线性相位。

参考答案

- **习题 8.8** 采用窗函数法设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，具体指标为：通带截止频率 $\Omega_p = 0.2\pi$，阻带截止频率 $\Omega_s = 0.4\pi$，阻带衰减 $A_s = 45$ dB。试说明采用哪种窗函数？并求出 $h[n]$ 的表达式。

解： 1. **确定窗函数类型**

各种窗函数的性能指标如下：

- 矩形窗：$A_s \approx 21$ dB
- 哈宁窗 (Hanning)：$A_s \approx 44$ dB (通常认为不足以满足 45 dB 要求)
- 汉明窗 (Hamming)：$A_s \approx 53$ dB
- 布莱克曼窗 (Blackman)：$A_s \approx 74$ dB

为了满足 $A_s = 45$ dB 且阶数尽可能低，选择**汉明窗**。

参考答案

- **习题 8.8** 采用窗函数法设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，具体指标为：通带截止频率 $\Omega_p = 0.2\pi$，阻带截止频率 $\Omega_s = 0.4\pi$，阻带衰减 $A_s = 45$ dB。试说明采用哪种窗函数？并求出 $h[n]$ 的表达式。

解： 2. **确定滤波器阶数** N

过渡带宽度为

$$\Delta\Omega = \Omega_s - \Omega_p = 0.4\pi - 0.2\pi = 0.2\pi$$

对于汉明窗，过渡带宽度与阶数 N 的近似关系为 $\Delta\Omega \approx \frac{6.6\pi}{N}$。由此可求得

$$N = \frac{6.6\pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

故取滤波器长度 $N = 33$。

- **习题 8.8** 采用窗函数法设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，具体指标为：通带截止频率 $\Omega_p = 0.2\pi$，阻带截止频率 $\Omega_s = 0.4\pi$，阻带衰减 $A_s = 45$ dB。试说明采用哪种窗函数？并求出 $h[n]$ 的表达式。

解： 3. **确定理想低通滤波器的单位脉冲响应** $h_d[n]$

理想滤波器具有第一类线性相位，其对称中心（群延时）为 $\alpha = \frac{N-1}{2} = 16$

理想低通滤波器的截止频率 Ω_c 取通带和阻带的中心频率，即

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p + \Omega_s}{2} = \frac{0.2\pi + 0.4\pi}{2} = 0.3\pi$$

由此得到理想低通滤波器的单位脉冲响应为

$$h_d[n] = \frac{\sin[\Omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} = \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}$$

参考答案

- **习题 8.8** 采用窗函数法设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，具体指标为：通带截止频率 $\Omega_p = 0.2\pi$，阻带截止频率 $\Omega_s = 0.4\pi$，阻带衰减 $A_s = 45$ dB。试说明采用哪种窗函数？并求出 $h[n]$ 的表达式。

解： 4. **确定窗函数表达式** $w[n]$

长度为 $N = 33$ 的汉明窗表达式为：

$$w[n] = \left(0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right)R_N[n] = \left(0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right), \quad 0 \le n \le 32$$

5. **所设计滤波器的单位脉冲响应** $h[n]$

$$h[n] = h_d[n]\cdot w[n] = \begin{cases} \frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}\left(0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right), & 0 \le n \le 32 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$