• 习题 5.11

已知

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}), \quad y[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega})$$

且 $x[n]$，$y[n]$ 均为实序列，证明如下关系成立：

$$r_{xy}[m] = x[m] * y[-m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega})Y^*(e^{j\Omega})$$

证明: 根据 DTFT 的反褶性质，以及实序列的 DTFT 的共轭对称性，可知，当 $y[m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\Omega})$ 时，有

$$y[-m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{-j\Omega}) = Y^*(e^{j\Omega})$$

根据卷积定理，时域卷积对应频域相乘，得到

$$r_{xy}[m] = x[m] * y[-m] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\Omega}) \cdot Y^*(e^{j\Omega})$$

参考答案

- **习题 5.13 计算下列离散时间信号的 DTFT。**

(1) $x[n] = 2^n u[-n]$;

(2) $x[n] = (-0.5)^n \cos(\pi n/3) u[n]$;

(3) $x[n] = (-1)^n \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$;

(4) $x[n] = e^{-(\alpha + j\pi/4)n} u(n)$;

(5) $x[n] = \cos(\pi n/8) + \sin(\pi n/5)$;

(6) $x[n] = 1 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(\pi m/4) \delta[n-m]$.

- **习题 5.13**

（1）由于 $x[n]=2^n u[-n]$，可得

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{0}2^n e^{-j\Omega n}=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-1})^k e^{j\Omega k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega}}{2}\right)^k$$

当 $\left|\frac{e^{j\Omega}}{2}\right|<1$，该级数收敛，即

$$X(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-\frac{e^{j\Omega}}{2}}=\frac{2}{2-e^{j\Omega}}$$

- **习题 5.13**

（2）利用欧拉公式，有 $\cos(\pi n/3) = \frac{e^{j\pi n/3}+e^{-j\pi n/3}}{2}$，可得

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[\left(-0.5e^{j\pi/3}\right)^n + \left(-0.5e^{-j\pi/3}\right)^n\right] u[n]$$

由于 $\alpha^n u[n]$ 的 DTFT 为 $\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$，$|\alpha| < 1$，可得

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+0.5e^{-j(\Omega-\pi/3)}} + \frac{1}{1+0.5e^{-j(\Omega+\pi/3)}}\right]$$

- **习题 5.13**

（3） $y[n] = \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}$ 的 DTFT 为

$$Y(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\Omega| \le \pi \end{cases} \quad \text{周期} 2\pi$$

由于 $x[n] = (-1)^n y[n] = e^{j\pi n} y[n]$，根据频移性质，有 $X(e^{j\Omega}) = Y(e^{j(\Omega-\pi)})$。在 $[0, 2\pi)$ 内，$|\Omega - \pi| \le \pi/3$ 即 $\Omega \in [2\pi/3, 4\pi/3]$，因此可得

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{2\pi}{3} \le \Omega \le \frac{4\pi}{3} \\ 0, & [0, 2\pi) \text{ 其他} \end{cases} \quad \text{周期} 2\pi$$

参考答案

• 习题 5.13

（4）由于

$$x[n]=\left[e^{-(\alpha+j\pi/4)}\right]^n u[n]$$

令 $a=e^{-(\alpha+j\pi/4)}$，当 $|a|<1$，$x[n]$ 的 DTFT 收敛，即当 $e^{-\alpha}<1\Rightarrow\alpha>0$ 时，有

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-e^{-(\alpha+j\pi/4+j\Omega)}}\quad \alpha>0$$

- **习题 5.13**

（5）利用 DTFT 对

$$\cos(\Omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\sin(\Omega_0 n) \leftrightarrow \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$$

因此，$x[n] = \cos(\pi n/8) + \sin(\pi n/5)$ 的 DTFT 为

$$X(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \pi/8 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \pi/8 - 2\pi k)]$$

$$+ \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \pi/5 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \pi/5 - 2\pi k)]$$

- **习题 5.13**

（6）由于

$$1=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-m]\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(\pi m/4)\delta[n-m]=\cos(\pi n/4)$$

因此，$x[n]=1+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(\pi m/4)\delta[n-m]$ 的 DTFT 为

$$X(e^{j\Omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

$$+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)\right]$$

参考答案

- **习题 5.14** 已知离散时间信号 $x[n]$ 的 DTFT 为 $X(e^{j\Omega})$，求下列信号的 DTFT。

(1) $x_1[n] = x^*[-n+1] + x[-n-1]$；

(2) $x_2[n] = (1-n)^2 x[n]$；

(3) $x_3[n] = j^n x[n+1] + j^{-n} x[n-1]$；

(4) $x_4[n] = e^{j0.5\pi(n-2)} x[n+2]$

- **习题 5.14**

解：（1） $x_1[n]=x^*[-n+1]+x[-n-1]$；

由 DTFT 的反褶、时移、共轭性质，可得

$$X_1(e^{j\Omega})=e^{-j\Omega}X^*(e^{j\Omega})+e^{j\Omega}X(e^{-j\Omega})$$

（2） $x_2[n]=(1-n)^2x[n]=x[n]-2nx[n]+n^2x[n]$ ；

由 DTFT 的微分性质，可得

$$X_2(e^{j\Omega})=X(e^{j\Omega})-2j\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}-\frac{d^2X(e^{j\Omega})}{d\Omega^2}$$

- **习题 5.14**

解：（3） $x_3[n] = j^n x[n+1] + j^{-n} x[n-1] = e^{j\frac{\pi}{2}n} x[n+1] + e^{-j\frac{\pi}{2}n} x[n-1]$；

由 DTFT 的时移、频移性质，可得

$$X_3(e^{j\Omega}) = e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})} X(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})}) + e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{2})} X(e^{j(\Omega+\frac{\pi}{2})})$$

（4） $x_4[n] = e^{j0.5\pi(n-2)} x[n+2] = -e^{j\frac{\pi}{2}n} x[n+2]$；

由 DTFT 的时移、频移性质，可得

$$X_4(e^{j\Omega}) = e^{j2\Omega} X(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})})$$

• 习题 5.15 计算下列各式的逆 DTFT

(1) $X(e^{j\Omega}) = \cos^2(2\Omega) + \sin^2(\Omega)$;

解： 根据三角公式和欧拉公式，可得

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1+\cos(4\Omega)}{2} + \frac{1-\cos(2\Omega)}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cos(4\Omega) - \frac{1}{2}\cos(2\Omega)$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{j4\Omega} + e^{-j4\Omega}) - \frac{1}{4}(e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega})$$

根据 DTFT 的时移性质，有

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+4] + \frac{1}{4}\delta[n-4] - \frac{1}{4}\delta[n+2] - \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

- **习题 5.15 计算下列各式的逆 DTFT**

（2） $X(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega/3}$；

解：利用 IDTFT 公式，有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega/3} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega\left(n-\frac{1}{3}\right)} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left.\frac{e^{j\Omega\left(n-\frac{1}{3}\right)}}{j\left(n-\frac{1}{3}\right)}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{j\pi\left(n-\frac{1}{3}\right)} - e^{-j\pi\left(n-\frac{1}{3}\right)}}{j\left(n-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin\pi(n-1/3)}{\pi(n-1/3)}$$

注：不能使用时移性质进行计算，因为时移性质要求时移量为整数。

- **习题 5.15 计算下列各式的逆 DTFT**

(3) $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \pi/3 - k\pi)$;

解： $X(e^{j\Omega})$ 是一个周期冲激串，周期为 π。利用 IDTFT 公式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

在 $(-\pi, \pi]$ 区间内，$X(e^{j\Omega})$ 为 $\delta(\Omega - \pi/3) + \delta(\Omega + 2\pi/3)$，将其代入逆变换公式，有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\delta(\Omega - \pi/3) + \delta(\Omega + 2\pi/3)]e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}[e^{j(\pi/3)n} + e^{j(-2\pi/3)n}]$$

- **习题 5.15 计算下列各式的逆 DTFT**

（4） $X(e^{j\Omega}) = \frac{12e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}{6 - e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}$；

解：令 $z = e^{j\Omega}$，可得

$$X(z) = \frac{12z^{-1} - z^{-2}}{6 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{12z - 1}{6z^2 - z - 1} = \frac{12z - 1}{(3z+1)(2z-1)}$$

进行部分分式展开，有

$$X(z) = \frac{3}{3z+1} + \frac{2}{2z-1} = \frac{z^{-1}}{1 + 1/3z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - 1/2z^{-1}}$$

因此，可得

$$x[n] = \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] u[n-1]$$

- **习题 5.16** 已知 $x[n]=[-1,2,\underset{\uparrow}{-3},2,-1]$，其 DTFT 为 $X(e^{j\Omega})$，计算下列各式的值。
  1. $X(e^{j0})$ 和 $X(e^{j\pi})$；
  2. $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\ \mathrm{d}\Omega$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 \mathrm{d}\Omega$。

解：（1）$X(e^{j0})=\sum_{n=-2}^{2} x[n]=-1$　　$X(e^{j\pi})=\sum_{n=-2}^{2} x[n]\,(-1)^n=-9$

（2）利用逆变换，代入 $n=0$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})\ d\Omega = 2\pi\, x[0] = -6\pi$$

由帕塞瓦尔定理，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\pi \times 19 = 38\pi$$