by 学生会10级学习部®

分离变量法
镜像法

第一章 矢量分析

1. 拉梅系数

（1） 拉梅系数 h_i 是 M 点处曲线坐标 u_i 的微分 du_i 与该坐标线 u_i 上弧微分 dl_i 的比例系数。

（2）常用坐标系中的表示：

直角坐标系 $h_1=1$，$h_2=1$，$h_3=1$

圆柱坐标系 $h_1=1$，$h_2=\rho$，$h_3=1$

球坐标系 $h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=r\sin\theta$

2. 标量场的梯度

（1）方向导数

（2）梯度

在标量场 f 中一点 M 处，存在这样的矢量 $\bar{G}$，其方向为函数 f 在 M 点处变化率最大的方向，其模值也正好是这个最大变化率的数值，则称矢量 $\bar{G}$ 为函数 f 在点 M 处的梯度，记作 grad f，即

$$\mathrm{grad}\, f=\bar{G}=\bar{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}+\bar{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}+\bar{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}$$

3. 矢量场的散度

（1）通量

对有向曲面 S，矢量场 $\bar{F}$ 穿过 S 的通量为 $\Phi=\int_S\bar{F}\cdot d\bar{S}$，$\Phi$ 仍为标量，其值的正负取决于所有面元通量的叠加结果。

（2）散度

矢量 $\bar{F}$ 的散度 $\mathrm{div}\,\bar{F}$ 为一标量，表示 $\bar{F}$ 场中一点处的通量对体积的变化率

$$\mathrm{div}\,\bar{F}=\lim_{\Omega\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\int_S\bar{F}\cdot d\bar{S}}{\Delta\tau}$$

散度表示该点处单位体积所穿出之通量，因此也被称为该点处的源强度。

$$\mathrm{div}\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right]$$

利用哈密顿算子的运算法则容易推证(证明过程从略)，散度可以写成哈密顿算子与矢量场函数点积的形式，即

$$\mathrm{div}\bar{F}=\nabla\cdot\bar{F}=\left[\hat{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\hat{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\hat{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right]\cdot[\hat{e}_1F_1+\hat{e}_2F_2+\hat{e}_3F_3]$$

（3）不同坐标系下的散度计算公式

直角坐标系 $\nabla\cdot\bar{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

圆柱坐标系 $\nabla\cdot\bar{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

球坐标系 $\nabla\cdot\bar{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$

4. 矢量场的旋度

（1）环量

在矢量场 $\bar{F}$ 中，矢量 $\bar{F}$ 沿某一闭合有向曲线 l 的曲线积分，称为该矢量按所取方向沿曲线 l 的环量，记作

$$\Gamma=\int_l\bar{F}\cdot d\bar{l}=\int_l F\cos\theta\, dl$$

环量是一个描述场在某回路上的旋涡性的宏观量。

（2）环量密度

环量密度：矢量场内某点在给定方向上的单位面积的环量。

$$\mu_n=\lim_{\Delta S_n\to 0}\frac{\int_l\bar{F}\cdot d\bar{l}}{\Delta S_n}$$

（3）旋度

定义矢量 $\mathrm{rot}\,\bar{F}$，使 $\mathrm{rot}\,\bar{F}$ 这个矢量在 M 点的任意给定方向 $\hat{n}$ 上的投影，等于 $\bar{F}$ 在 $\hat{n}$ 方向的环量密度，即

$$(\mathrm{rot}\,\bar{F})\cdot\hat{n}=\lim_{\Delta S_n\to 0}\frac{\int_l \bar{F}\cdot d\bar{l}}{\Delta S_n}$$

旋度公式的三阶行列式的形式：

$$rot\,\bar{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ (F_1h_1) & (F_2h_2) & (F_3h_3) \end{vmatrix}$$

$$\nabla\phi=\hat{e}_1\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{h_1}+\hat{e}_2\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\cdot\frac{1}{h_2}+\hat{e}_3\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\cdot\frac{1}{h_3}$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right]$$

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_1} \\ F_1h_1 & F_2h_2 & F_3h_3 \end{vmatrix}$$

利用哈密顿算子的运算法则容易推证(证明过程从略)，旋度可以写成哈密顿算子与矢量场函数叉积的形式，即

$$rot\,\bar{F}=\nabla\times\bar{F}=\left[\hat{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\hat{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\hat{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right]\times[\hat{e}_1F_1+\hat{e}_2F_2+\hat{e}_3F_3]$$

（4）不同坐标系下的旋度计算公式

直角坐标系

$$\nabla\times\bar{F}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

圆柱坐标系

$$\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

球坐标系

$$\nabla\times\bar{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi \end{vmatrix}$$

5. 几种重要的矢量场

（1）有势场 有源无旋 $\vec{F}=-\nabla\phi$

I. 对于一个矢量场 $\bar{F}(M)$，若在给定的区域内存在单值数性函数 $\Phi(M)$ 满足

$$\bar{F}=-\nabla\Phi$$

则称此矢量场 $\bar{F}$ 为有势场，称 Φ 为矢量场 $\bar{F}$ 的势函数或位函数。

II. 有势场 ⇔ 保守场 ⇔ 无旋场

III. 直角坐标系中势函数的求解（矢量场 $\bar{F}(M)$ 为有势场）：

$$\Phi(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)dx-\int_{y_0}^{y}F_y(x,y,z_0)dy-\int_{z_0}^{z}F_z(x,y,z)dz$$

（2）管形场 有旋无源

I. 对于矢量场 $\bar{F}(M)$，若在其定义域内的每一点上都有 $\nabla\cdot\bar{F}=0$，则称 $\bar{F}(M)$ 为管形场。可见，管形场就是无散场。

II. 在面单连域内，矢量场 $\bar{F}$ 为管形场的充要条件是它为另一矢量场 $\bar{A}$ 的旋度场，即 $\bar{F}$ 可以表示为

$$\bar{F}=\nabla\times\bar{A}$$

（3）调和场

I. 若对于矢量场 $\bar{F}$，恒有 $\nabla\cdot\bar{F}=0$ 和 $\nabla\times\bar{F}=0$，则称此矢量场 $\bar{F}$ 为调和场。换言之，调和场就是既无散又无旋的无源矢量场。

II. 若 $\bar{F}$ 为调和场 $\nabla^2\Phi=0$

$$\nabla^2\Phi=\nabla\cdot\nabla\Phi$$

$$\nabla^2=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right]$$

6. 亥姆霍兹定理

在给定的区域 τ 内，一个散度和旋度均不恒为零的矢量场 $\bar{F}$，可以表示成一个无旋场（有势场）$\bar{F}_1$ 和一个无散场（管形场）$\bar{F}_2$ 之和的形式

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2$$

其中，无旋场 $\bar{F}_1$ 由该区域 τ 内的 $\nabla\cdot\bar{F}$ 及 $\bar{F}$ 在边界 s 上的法向分量 $\hat{n}\cdot\bar{F}$ 唯一确定；无散场 $\bar{F}_2$ 由区域 τ 内的 $\nabla\times\bar{F}$ 及 $\bar{F}$ 在边界 s 上的切向分量 $\hat{n}\times\bar{F}$ 唯一确定。

第二章 静电场

1. 库仑定律

真空中相距 R 的两个点电荷 Q_1 与 Q_2 之间作用力为

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{R_{21}^3}\vec{R}_{21}$$

2. 电场和电场强度

（1）点电荷产生的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

（2）电场强度的叠加原理

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}\frac{\vec{R}}{R^3}\rho(\vec{r}')d\tau'$$

3. 真空中的高斯定律

（1）积分形式：通过任意闭合面的电通量等于闭合面包围的电荷总和

$$\int_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho d\tau$$

（2）微分形式：电通量密度的散度等于电荷密度

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

4. 电位

（1）定义：静电场是保守场，所以

$$\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad 或 \quad \nabla\times\vec{E} = 0$$

因此有 $\vec{E} = -\nabla U$

（2）点电荷的电位 $U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

（3）电位的叠加原理 $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\tau'}\frac{\rho}{R}d\tau'$

5. 电介质的极化

（1）极化强度

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum\vec{p}}{\Delta\tau}$$

（2）极化电荷密度

极化电介质产生的电位与分布偶极子产生的电位等效。

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}[\vec{P}\cdot\nabla'(\frac{1}{R})]d\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{R}dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}\frac{(-\nabla'\cdot\vec{P})}{R}d\tau'$$

其中 S' 为包围介质体积的闭合面，$\hat{n}$ 为面元外向单位法向矢量，R 为场点与源点距离。

极化电荷面密度 $\rho_{pS} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

极化电荷体密度 $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$

6. 电介质中的静电场的基本方程

定义电介质中的电通量密度 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$

（1）高斯定律 $\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho d\tau \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$

（2）环路定理 $\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \nabla\times\vec{E} = 0$

（3）均匀电介质里，电位满足与真空中相似的规律。

7. 电介质分界面上的边界条件（重要）

（1）场量的边界条件

在两种介质的分界面上，电场满足的边界条件为

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad 或 \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

ρ_s 为分界面上的自由电荷面密度。

$$\hat{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad 或 \quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$

其中法线单位矢量 $\hat{n}$ 是由介质 2 指向介质 1 的。

（2）电位的边界条件

$$U_1 = U_2$$

$$-\varepsilon_1\frac{\partial U_1}{\partial n}+\varepsilon_2\frac{\partial U_2}{\partial n}=\rho_s$$

在导体表面上有 $D_n=\rho_S \qquad E_t=0$

第三章 恒定电流

1．电荷守恒定律

（1）积分形式 $\int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=\int_\tau -\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau$

意义：流出一闭合面S的总电流永远等于闭合面内部单位时间内电荷减少的总量。

微分形式 $\nabla\cdot\bar{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$

（2）恒定电流条件下，即$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$时，电荷守恒定律表示为

$$\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0 \qquad \nabla\cdot\bar{J}=0$$

2．欧姆定律

（1）欧姆定律的微分形式

自由电荷在导电媒质中的宏观运动称为传导电流。它与媒质中电场成正比。

$$\bar{J}=\sigma\bar{E}$$

3．边界条件

（1）在两种导电媒质界面上，边界条件为

$$\hat{n}\cdot(\bar{J}_1-\bar{J}_2)=0$$

或 $J_{n1}=J_{n2} \qquad \sigma_1E_{n1}=\sigma_2E_{n2}$

$$\hat{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2)=0$$

或 $J_{t1}/\sigma_1=J_{t2}/\sigma_2 \qquad E_{t1}=E_{t2}$

4．恒定电流场与静电场的类比

（1）导电媒质内恒定电流场是一无源场，同时是保守场

$$\nabla\times\bar{E}=0 \qquad \nabla\cdot\bar{E}=0$$

（2）与理想介质中静电场满足方程做--比较：

导电媒质中 $\nabla\cdot\bar{J}=0 \qquad \bar{J}=\sigma\bar{E} \qquad \bar{E}=-\nabla U$

理想介质中 $\nabla\cdot\bar{D}=0 \qquad \bar{D}=\varepsilon\bar{E} \qquad \bar{E}=-\nabla U$

导电媒质中两任意电极之间的电阻和电容满足关系

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

利用以上对偶关系，$\bar{D}\leftrightarrow\bar{J},\varepsilon\leftrightarrow\sigma$，则只要求出一种场的解就可以得到另一种场的解。

第四章 恒定磁场

1．安培磁力定律

通过电流I_1的回路l_1作用于通过电流I_2的回路l_2的力

$$\bar{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}I_1I_2\int_{l_1}\int_{l_2}\frac{d\bar{l}_2\times(d\bar{l}_1\times\bar{R})}{R^3}$$

2．磁通密度

将安培定律写作 $\bar{F}_{12}=\oint_{l_2}I_2d\bar{l}_2\times\bar{B}$

其中 $\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I_1d\bar{l}_1\times\bar{R}}{R^3}$

3．毕奥——沙伐定律

电流元$Id\bar{l}$所产生的磁通密度为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

对于体分布电流 $\vec{J}$ $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3}d\tau'$

4. 真空中的安培回路定律

（1）积分形式 $\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

对于分布电流，则 $\quad \oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$

意义：真空中矢量 B 沿任意闭合回路的积分，等于此回路所限定面积上所通过的电流。

（2）微分形式 $\quad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$

5. 磁场的高斯定律

（1）微分形式 $\quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$

（2）积分形式 $\quad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

意义：磁场是一无散源场，它与客观上不存在单独磁荷的现象一致。

6. 磁矢位

根据磁场的高斯定律可以定义一矢量 $\vec{A}$，使得

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$\vec{A}$ 称为磁矢位，它应满足安培回路定律，即

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

$\cancel{\nabla\times\nabla\times\vec{A}}$

根据亥姆霍兹定理，为了单值性的要求，取 $\nabla\cdot\vec{A} = 0$，则静磁场的磁矢位满足矢量泊松方程

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$$

对照静电位标量泊松方程的解，得任意分布电流在空间产生的磁矢位为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\vec{J}}{R}d\tau'$$

7. 磁标位

有势 有源无旋

（1）在 $\vec{J} = 0$ 区域内，磁场成为一保守场，可以引入磁标位 U_m

定义：$\quad \vec{B} = -\mu_0\nabla U_m$

$\nabla\times\vec{H} = 0$

$\vec{J} = 0$

（2）磁标位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U_m = 0$$

8. 磁偶极子

（1）一个小电流环等效于一个磁偶极子，其磁矩矢量定义为

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

（2）一个磁偶极子产生的磁矢位为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

（3）磁偶极子在空间产生的磁通密度为

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}(\hat{r}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$

（4）磁偶极子的磁标位

$$U_m = -\frac{I}{4\pi}\Omega = \frac{\vec{m}}{4\pi}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}$$

9. 磁介质和磁化强度

（1）磁化磁介质中单位体积中分子磁矩总和称为磁化强度 $\vec{M}$。

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum\vec{m}}{\Delta\tau}$$

（2）等效电流

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\vec{M}\times\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau'$$

利用矢量分析公式，上式可以写成

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}d\tau'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{M}\times\vec{n}}{R}dS'$$

等效体分布电流 $\vec{J}_m=\nabla'\times\vec{M}$

等效面分布电流 $\vec{J}_{mS}=\vec{M}\times\hat{n}$ 磁化电流，

其中，单位矢量 $\hat{n}$ 由介质内部指向外部。

（3）等效磁荷

$$U_m=\frac{1}{4\pi}\int_{\tau'}\vec{M}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}d\tau'=\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{M}\cdot\hat{n}}{R}ds'+\frac{1}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{(-\nabla'\cdot\vec{M})}{R}d\tau'$$

等效体分布磁荷为 $\rho_m=-\nabla'\cdot\vec{M}$ 磁化

等效面分布磁荷为 $\rho_{mS}=\vec{M}\cdot\hat{n}$

10. 磁介质中的恒定磁场的基本方程

定义磁介质中的磁通量密度 $\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=\mu\vec{H}$

（1）安培回路定律

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J} \quad 或 \quad \int_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}$$

（2）磁场高斯定律

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad 或 \quad \oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

（3）磁介质中磁矢位、磁标位满足与真空中相似的规律

11. 磁介质分界面上的边界条件

（1）场量的边界条件

$$\hat{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S \qquad \hat{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$$

当 $\vec{J}_S=0$ 时，可利用标量形式表示为

$$H_{1t}-H_{2t}=0 \qquad B_{1n}-B_{2n}=0$$

其中，法线单位矢量 $\hat{n}$ 由 2 区指向 1 区。

（2）磁矢位、磁标位的边界条件

第五章 静态场的边值问题

1. 静电场方程和边值问题

（1）任意空间里，静电场电位满足泊松方程

$$\nabla^2U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

在自由空间里，它的解为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\tau'}\frac{\rho}{R}d\tau'$$

其中 τ' 为分布电荷的源区域。

（2）对于电荷处处为零的有限空间，电位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2U=0$$

它仅由边界条件决定。解此方程为本章重点。

（3）边界条件分为三类：

I. "狄利赫利" 边界条件

给定全部边界上的函数值，若 Φ 表示区域内的位函数，此类边界条件可记作

$$\Phi\big|_S=C_1$$

II. "诺伊曼" 边界条件

给出全部边界上函数的法向导数值，记作

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S=C_2$$

III. 混合边界条件

给定一部分边界 S_1 上的函数值，而其余边界 S_2 上给出函数的法向导数值，记作

$$\Phi\big|_{S_1}=C_1, \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{S_2}=C_2$$

2. 惟一性定理

在给定的区域内，泊松方程（或拉普拉斯方程）满足所给定的全部边界条件的解是唯一的。

3. 分离变量法

4. 镜像法

在某些情况下，镜象法能简单的计算包含导体表面和电介质区域的电场。它是利用镜象位置上的一适当电荷来取代导体表面或不同介质界面对场的影响。镜象法只是对镜象所处区域以外的空间才能给出正确的场。有时需要无穷多个镜象电荷才能得到正确结果。

（1）导电平面外一电荷 Q 产生的，与镜象位置一镜象电荷 $-Q$ 和 Q 共同产生的场相同。

（2）距一导体球中心距离 d 的电荷 Q 产生的场，与位于 $x=a^2/d$ 的镜象电荷 $Q'=-aQ/d$ 和 Q 共同产生的场在球外是相同的。a 为导体球半径。

（3）距圆柱导体中轴线 d 的线电荷 λ，其镜象电荷 $-\lambda$，位于柱内靠近线电荷方向距中轴 a^2/d 处。a 为导体圆柱半径。

第六章　电磁感应

1. 推广的法拉第电磁感应定律

（1）积分形式　$\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

（2）微分形式　$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2. 动态电位

$$\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

3. 磁场能

（1）基本公式　$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\tau_i}\vec{A}\cdot\vec{J}_i d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau \vec{A}\cdot\vec{J}d\tau$

（2）回路的磁能

对单导线回路　$W_m = \frac{1}{2}I\Phi_m = \frac{1}{2}LI^2$

（3）磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

对于各向同性的均匀媒质　$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$

第七章　时变电磁场

1. 位移电流和麦克斯韦方程

（1）位移电流

电位移矢量 $\vec{D}$ 的时间变化率称为位移电流密度，即

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{J}_d$ 和 $\vec{J}$ 同为磁场 $\vec{H}$ 的涡旋源，因此得到推广的安培环路定律：

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

积分形式为　$\int_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$

（2）麦克斯韦方程组的微分形式

安培环路定律、法拉第定律两个旋度方程和高斯定律两个散度方程共同组成时变电磁场的基本方程，称为麦克斯韦方程组，其微分形式为：

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

辅助方程　$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$　$\vec{B}=\mu\vec{H}$　$\vec{J}=\sigma\vec{E}$

（3）麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \rho\, d\tau$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

2. 坡印廷定理

（1）电磁场的能量转化和守恒定律称为坡印廷定理，对于均匀媒质写成

$$\int_\tau \vec{E}\cdot\vec{J}d\tau + \int_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)d\tau$$

上式表示任意体积的热耗功率与穿出包围体积的闭合面的功率之和等于体积中电磁能量的减少率。

（2）瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}(t)=\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)$

$\vec{S}$ 称为功率流密度矢量，又称坡印廷矢量。它表示穿过垂直与 $\vec{E}\times\vec{H}$ 平面单位面积的功率，所以也称为能流密度。

3. 正弦电磁场和复坡印廷定理

（1）麦克斯韦方程的复数形式

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

（2）复坡印廷定理

复坡印廷矢量 $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$

复坡印廷定理

$$\int_\tau \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{J}^*)d\tau + \oint_S\left(\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s} = -j\omega\int_\tau\frac{1}{2}(\vec{B}\cdot\vec{H}^* - \vec{E}\cdot\vec{D}^*)d\tau$$

电场和磁场能量密度的平均值为

$$\langle w_e\rangle = \frac{\varepsilon}{4}\vec{E}\cdot\vec{E}^* \quad 和 \quad \langle w_m\rangle = \frac{\mu}{4}\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

平均坡印廷矢量 $\langle\vec{S}\rangle = \mathrm{Re}\left[\vec{S}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*\right]$

4. 动态位函数和波动方程

（1）动态磁矢位和动态电位

在时变场中由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，而定义的时变矢量 $\vec{A}$ 称为动态磁矢位

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

静态：$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

从而

$$\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{E} = -\nabla U$

其中 U 称为动态电位。

（2）洛伦兹规范和达朗贝尔方程

洛伦兹规范 $\nabla\cdot\vec{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}$

达朗贝尔方程

$$\nabla^2 U - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$$

（3）正弦电磁场的复位函数

动态磁矢位 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

动态电位 $\vec{E} = -\nabla U - j\omega\vec{A} = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - j\omega\vec{A}$

洛仑兹规范 $\nabla\cdot\vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon V$

达朗贝尔方程

$$\nabla^2 U + \omega^2\mu\varepsilon U = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

5. 时变电磁场的边界条件

时变条件下，在不同媒质界面上的边界条件与静场时形式相同

$$\hat{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_S$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$$

第八章　平面电磁波

1．理想介质中的平面波

（1）亥姆霍兹方程

无源理想介质（$\rho=0$，$\sigma=0$）中的正弦电磁场满足的波动方程表示为

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0$$

其中$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，此时波动方程也称为亥姆霍兹方程。

电场　　$\vec{E}=\vec{E}_0e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

于是，由麦克斯韦方程可得磁场强度为

$$\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}$$

并且有　　$\vec{k}\cdot\vec{E}=0$　　$\vec{k}\cdot\vec{H}=0$

可见$\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{k}$三个矢量正交，$\vec{E}$、$\vec{H}$位于与传播方向垂直的平面内，这种电磁波称为平面电磁波，记为TEM波。

（2）平面电磁波的主要参量

波数　　$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\dfrac{\omega}{v_p}$

波长　　$\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$

相速度　　$v=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

本征阻抗　　$\eta=\dfrac{\omega\mu}{k}=\dfrac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

由此磁场强度和电场强度关系表示为

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E}$$

（3）坡印廷矢量

平面电磁波的能流密度矢量即坡印廷矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\eta}\vec{E}\times\left(\hat{k}\times\vec{E}\right)=\frac{1}{\eta}E^2\hat{k}$$

2．电磁波的极化

电磁波电场强度矢量的取向随时间变化的方式称为极化。若平面电磁波沿$\hat{z}$方向传播，那么在垂直传播方向上将有两个分量，电场的复矢量表示为

$$\vec{E}=\hat{x}E_x+\hat{y}E_y=(\hat{x}E_{xm}e^{j\varphi_x}+\hat{y}E_{ym}e^{j\varphi_y})e^{-jkz}$$

$-j\vec{k}\cdot\vec{r}$

它是极化为x和y方向的两个波的叠加

$$E_x(z,t)=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)$$

$$E_y(z,t)=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_y)$$

展开上式并消去参变量$\omega t-kz$就得到矢量尾端所描述的轨迹方程：

$$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)\cos(\varphi_x-\varphi_y)+\left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2=\sin^2(\varphi_x-\varphi_y)$$

I. 当$(\varphi_x-\varphi_y)=0$或$\pm\pi$时，合成电磁波为一线极化波

极化角为　　$\theta=\mathrm{tg}^{-1}(\pm\dfrac{E_y}{E_x})=\mathrm{tg}^{-1}(\pm\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}})$

II. 当$\varphi_x-\varphi_y=\pm\dfrac{\pi}{2}$，同时$E_{xm}=E_{ym}=E_0$时，合成波为园极化波

极化角为　　$\theta=tg^{-1}\dfrac{\cos(\omega t-kz+\varphi_y)}{\cos(\omega t-kz+\varphi_x)}=tg^{-1}\dfrac{\pm\sin(\omega t-kz)}{\cos(\omega t-kz)}=\pm(\omega t-kz)$

$\varphi_x-\varphi_y=\dfrac{\pi}{2}$时为右旋园极化波，$\vec{E}$矢量尾端在空间将是一左旋螺旋线；

$\varphi_x-\varphi_y=-\dfrac{\pi}{2}$时为左旋园极化波，$\vec{E}$矢量尾端在空间将是一右旋螺旋线。

III. 当$\varphi_x-\varphi_y\neq\pm(n-\dfrac{1}{2})\pi$或$E_{xm}\neq E_{ym}$将成为椭圆极化波。

$0<\varphi_x-\varphi_y<\frac{\pi}{2}$ 时为右旋椭圆极化波；

$-\frac{\pi}{2}<\varphi_x-\varphi_y<0$ 时为左旋椭圆极化波。

3. 导电媒质中的平面电磁波

（1）相位常数和衰减常数

（2）复特征阻抗

4. 反射定律和折射定律

（1）反射定律

反射角等于入射角，入射波及反射波的两个波前面的法线（称入射线和反射线）与界面的法线在同一平面内，叫做入射面。媒质界面称为反射面。

（2）折射定律或称为斯奈尔定律

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}}=\frac{v_2}{v_1}$$

其中 θ_1 和 θ_2 分别是入射角和折射角。v_1 和 v_2 为电磁波在两种介质中的速度。

（3）反射系数与折射系数

菲涅耳公式把反射波和折射波的振幅和相位与入射波得振幅和相位联系起来。用脚标 ⊥ 和 // 分别标志入射波的 $\vec{E}$ 矢量是垂直于（垂直极化）还是平行于（平行极化）入射面的。

$$R_\perp=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\eta_2\cos\theta_1-\eta_1\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_1+\eta_1\cos\theta_2}$$

$$T_\perp=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_1+\eta_1\cos\theta_2}$$

$$R_{//}=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2}$$

$$T_{//}=\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2}$$

其中 R 称反射系数，T 称为折射系数。

5. 电磁波垂直入射至分界面上

（1）菲涅耳公式

当平面电磁波垂直入射到理想媒质界面上时，$\theta_1=\theta_2=0$，$\cos\theta_1=\cos\theta_2=1$，此时反射系数和折射系数为

$$R_\perp=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\qquad T_\perp=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

$$R=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\qquad T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

（2）驻波系数

1 区的总电场和总磁场是入射场和反射场的叠加，计算可得 1 区总电场的瞬时值

$$\vec{E}_1(t)=\hat{y}E_m(1+R)\cos(\omega t-k_1z)-\hat{y}E_m 2R\sin k_1z\,\sin\omega t$$

上式第一项表示向 z 方向传播的平面电磁波，称为行波；第二项为幅度随 z 按正弦变化的电磁振荡波，称为驻波，两者的混合状态称为行驻波。

电（磁）场的最大振幅值与最小振幅值之比称为驻波系数或驻波比，记作 ρ，即

$$\rho=\frac{E_{\max}}{E_{\min}}=\frac{H_{\max}}{H_{\min}}=\frac{1+|R|}{1-|R|}$$

（3）功率反射系数和功率透射系数

6. 全折射

反射系数等于零时没有反射波称为全折射，对应的入射角称为布儒斯特角。

（1）对垂直极化波，由 $R_\perp=0$ 可得

$$\sin^2\theta_1=\frac{1-\varepsilon_2\mu_1/\varepsilon_1\mu_2}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}$$

对于一般的 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ 的非磁性媒质，如果 $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$，则上式无解，即不存全折射现象。

（2）对平行极化波，由 $R=0$ 可得

$$\sin^2\theta_1=\frac{1-\varepsilon_1\mu_2/\varepsilon_2\mu_1}{1-(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}$$

对一般的非磁性媒质界面，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则得到

$$\sin\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

因此布儒斯特角 $\theta_B=\theta_1=\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r1}}}$

发生全折射时，折射角与入射角的关系是

$$\sin\theta_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_B=\sqrt{1-\sin^2\theta_B}=\cos\theta_B$$

因此 $\theta_2+\theta_B=\dfrac{\pi}{2}$

可见，发生全折射时，折射角与入射角互为余角。

7．全反射

由斯奈尔定律得出，$\sin\theta_2>1$时，将发生全反射现象。透射波沿着分界面传播，在垂直于分界面的方向上作指数衰减，等幅面和等相面相垂直，跨过分界面的平均能流是零，但瞬时能流是往复来回的。$\theta_2=\pi/2$时的入射角称为临界角θ_0。

$$\sin\theta_0=\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}$$

全反射理论是光纤工程的基础。

第九章　导行电磁波

1．矩形波导TE模

（1）TE模场分量表达式为

$$E_{0x}=\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$E_{0y}=-\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\frac{m\pi}{a}x\ \cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_{0x}=\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_{0y}=-\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\ \sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$H_{0z}=H_0\cos\frac{m\pi}{a}x\ \cos\frac{n\pi}{b}y$$

其中 $\gamma=\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}=j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-(\frac{m\pi}{a})^2-(\frac{n\pi}{b})^2}$

$$k_c^2=\gamma^2+\omega^2\mu\varepsilon=k_x^2+k_y^2=(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2$$

（2）TE模的主要参数

截止频率 $f_{mn}=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2}=\dfrac{v}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$　　$f_{mn}=\frac{v}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$

截止波长 $\lambda_{mn}=\dfrac{v}{f_{mn}}=\dfrac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}}$　　$\lambda_{mn}=\frac{v}{f_{mn}}$

相位常数 $\beta_{mn}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(f_{mn}/f)^2}$　　$\beta_{mn}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\frac{f_{mn}}{f})^2}$

相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta_{mn}}=\dfrac{v}{\sqrt{1-(f_{mn}/f)^2}}$　　$v_p=\frac{\omega}{\beta_{mn}}$

导波波长 $\lambda_g=\dfrac{2\pi}{\beta_{mn}}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-(f_{mn}/f)^2}}$　　$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta_{mn}}$

波阻抗Z_{TE} $Z_{TE_{mn}}=\dfrac{\omega\mu}{\beta_{mn}}=\dfrac{\eta}{\sqrt{1-(f_{mn}/f)^2}}$　　$Z_{TE_{mn}}=\frac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{f_{mn}}{f})^2}}$

（3）TE_{10}模

实际应用中一般选取波导尺寸$a>b$，所以通常情况下TE_{10}模具有最低的截止频率和最长的截止波长，TE_{10}模称为基模，其他模通称为高次模。

取$m=1$，$n=0$得到TE_{10}模的主要参量

截止频率 $f_{10}=\dfrac{v}{2a}$

截止波长 $\lambda_{10}=\dfrac{v}{f_{10}}=2a$

相速度 $v_p=\dfrac{v}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$

导波波长

$$\lambda_g=\frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

相位常数

$$\beta_{10}=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}$$

波阻抗

$$Z_{TE_{10}}=-\frac{E_y}{H_x}=\frac{\eta}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}}$$

TE_{10} 模电磁波的复矢量为

$$\bar{E}=-\hat{y}j\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x\,e^{-j\beta_{10}z}$$

$$\bar{H}=(\hat{x}j\beta_{10}\frac{a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}x+\hat{z}H_0\cos\frac{\pi}{a}x)e^{-j\beta_{10}z}$$

2．传输线上的TEM 波

对双导体系统有可能传输TEM 波，它与平面电磁波有相同之处。能传输TEM 波的导体系统一定能存在二维静电位，空腔波导不能传输TEM 波。

（1）TEM 波的场分量表达式 $\nabla^2 U\neq 0.$

$$E_i(x,y,z)=E_{0i}(x,y)e^{-jkz}\qquad (i=x,y)$$

$$E_i(x,y,z,t)=E_{mi}(x,y)\cos(\omega t-kz+\phi_i)\qquad (i=x,y)$$

$$H_i(x,y,z)=H_{0i}(x,y)e^{-jkz}\qquad (i=x,y)$$

$$H_i(x,y,z,t)=H_{mi}(x,y)\cos(\omega t-kz+\phi_i')\qquad (i=x,y)$$

（2）TEM 波的相速度和导波波长

相速度

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$$

导波波长

$$\lambda_g=\frac{v_p}{f}=\frac{v}{f}=\lambda$$

v_p 和 λ_g 与传输线的结构无关，分别等于同种媒质中均匀平面电磁波的速度 v 和波长 λ。

3．谐振腔

（1）谐振频率

对于尺寸为$a\times b\times d$ 的矩形谐振腔，谐振频率用 f_{mnp} 表示

$$f_{mnp}=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{d}\right)^2}$$ 相等才能工作

（2）品质因数

品质因数是表示谐振腔对频率分辨率的参数，通常用 Q 来表示，其定义为腔内电磁能量 W 与损耗功率 P 之比乘以角频率 ω，即

$$Q=\omega\frac{W}{P}$$

第十章　电磁波辐射

1．滞后位

当研究电磁辐射时，电场矢量 $\bar{E}$ 和磁场矢量 $\bar{H}$ 利用动态电位U 和动态磁矢位 $\bar{A}$ 求解较为简便。对于正弦电磁场来说，U 和 $\bar{A}$ 满足的方程是

$$\nabla^2U+k^2U=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\bar{A}+k^2\bar{A}=-\mu_0\bar{J}$$

并且两者满足洛仑兹规范 $\nabla\cdot\bar{A}+j\omega\mu_0\varepsilon_0U=0$ $\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}=0$

方程的解为

$$U(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau'}\frac{\rho(\bar{r}')}{R}e^{-jkR}d\tau'$$

$$\bar{A}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R}e^{-jkR}d\tau'$$

从解的表达式可以看出场点的位函数相位滞后于场源的相位kR，因此U 和 $\bar{A}$ 称为滞后位，因子e^{-jkR}称为相位因子。

因为U 和 $\bar{A}$ 满足洛伦兹规范，所以求得动态磁矢位 $\bar{A}$ 就可以求得相应的电磁场

$$\bar{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\bar{A}$$

$$\bar{E}=\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\bar{A}}{j\omega\mu_0\varepsilon_0}\right)-j\omega\bar{A}$$

2．赫兹电偶极子

位于原点的赫兹电偶极子产生的磁矢位是

$$\bar{A}=\hat{z}A=\hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}Idl\frac{e^{-jkR}}{R}$$

（1）远区场

$kr>>1$ 的区域称为远区，电磁场矢量表示为

$$\bar{E}=\hat{\theta}\frac{j\omega\mu_0 Idl}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$$

$$\bar{H}=\hat{\varphi}\frac{jkIdl}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$$

远区电磁场的运动方向为 $\hat{r}$ 方向，在 r=常数的球面上各点的电磁场相位都相同，等相位面为球面，这样的电磁波称为球面波。

（2）辐射功率、辐射电阻

赫兹电偶极子在其周围产生时变电磁场，其坡印廷矢量平均值为

$$<\bar{S}>=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*\right]=\hat{r}\frac{1}{2}\eta_0\left(\frac{Idl}{2\lambda}\right)^2\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

平均辐射功率等于包围它的闭合面上坡印廷矢量平均值的面积分

$$P_a=\oint_s<\bar{S}>\cdot\hat{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\frac{1}{2}\eta_0\frac{2\pi}{3}\left(\frac{Idl}{\lambda}\right)^2$$

可见同样尺寸的电偶极子，波长越短辐射功率越大。

根据 $P_a=\frac{1}{2}I^2R_a$ 可以求出辐射电阻

$$R_a=\eta_0\frac{2\pi}{3}\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2=80\pi^2\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2$$

辐射电阻是表征天线辐射本领的一个参数，R_a 越大，相同电流下辐射的功率越大。

（3）方向性函数

天线任意点电场的振幅与通过该点的球面上电场最大值之比，称为归一化方向性函数，简称方向性函数 $F(\theta,\varphi)$

$$F(\theta,\varphi)=\frac{|E(\theta,\varphi)|}{E_{\max}}$$

赫兹电偶极子的方向性函数为 $\sin\theta$。

3．赫兹磁偶极子

（1）赫兹磁偶极子的远区场

$$\bar{H}=-\hat{\theta}\frac{1}{4\pi}mk^2\frac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$$

$$\bar{E}=\hat{\varphi}\frac{\eta}{4\pi}mk^2\frac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$$

（2）辐射功率　　$P_a=\dfrac{160\pi^2m^2}{\lambda^4}$

（3）辐射电阻　　$R_a=20\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\right)^4$　　式中 $d=2a$，为电流环的直径。

（4）方向性函数

赫兹磁偶极子与赫兹电偶极子天线的方向性函数相同，所以方向图亦相同，只是电磁场的方向互换。

4．方向性系数和增益

（1）方向性增益

当天线与一无方向性天线具有相同辐射功率时，天线在该方向上的功率密度与无方向性天线在相同距离上任意方向的功率密度之比称为方向性增益，记作 $D(\theta,\varphi)$。也可以理解为与天线功率密度在全方向的平均值之比。

$$D(\theta,\varphi)=\frac{<S>}{\frac{1}{4\pi r^2}\oint_s<S>r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}=\frac{4\pi<S>}{\oint_s<S>d\Omega}$$

$D(\theta,\varphi)$ 用方向性函数表示为

$$D(\theta,\varphi)=\frac{4\pi F^2(\theta,\varphi)}{\oint_s F^2(\theta,\varphi)d\Omega}$$

（2）方向性系数

通常将场强（或功率）为最大的方向上的方向性增益称为天线的方向性系数，记作 D。它是天线的最大方向性增益。

$$D=\frac{4\pi}{\oint F^2(\theta,\varphi)d\Omega}$$

（3）天线增益

天线最大辐射方向的能流密度与无损耗情况下各方向的平均能流密度之比称为天线增益，记作 G。因而增益等于方向性系数与效率之积

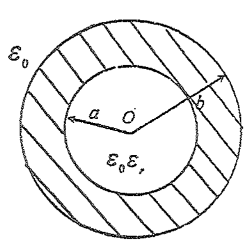
$$G=\eta_a D$$

镜像法、赫兹偶极子、边界条件

第一章

例 1.1

（2006 级 A 卷）如右图所示，内、外半径分别为 a 和 b 的导体球壳内（即 $r<a$ 区域）充满 $\varepsilon_r=4$ 的电介质，球壳外为无电荷的无限真空，球壳内（$r<a$ 区域）的静电场分布为



$$\vec{E} = \hat{r}\,\frac{10^{-6}}{12\varepsilon_0}\,r$$

求：1. 任意点的电荷分布（只求自由电荷 ρ 、 ρ_S 即可）；

答案：1. 在 $r<a$ 区域，由 $\rho=\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})$ 　　解得 $\rho=10^{-6}$

在 $r=a$ 表面，由 $\rho_s|_{r=a}=\vec{D}|_{r=a}\cdot\hat{n}_a=\left(\hat{r}\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 10^{-6}}{12\varepsilon_0}a\right)\cdot(-\hat{r})$，解得 $\rho_s=-10^{-6}a/3$

在 $r=b$ 表面，由 $\rho_s|_{r=b}=\vec{D}|_{r=b}\cdot\hat{n}_b=\dfrac{Q}{4\pi b^2}\hat{r}\cdot(\hat{r})$，解得 $\rho_s=\dfrac{10^{-6}a^3}{3b^2}$

例 1.2

在真空中有一铁质导线$(\mu=4\mu_0)$沿 z 轴放置，导线内部通有恒定电流. 在导线内部$(\rho\le a)$的磁场强度为 $\vec{H}=\hat{\varphi}J_0\rho^2$，求：导线内部的电流分布。

$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$

$\vec{J}=\frac{1}{r^2\sin\theta}(J_0\rho^2 r\cos\theta\,\hat{r}-3J_0\rho^2\sin\theta\,\rho\,\hat{\theta})$

$\vec{J}=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 0 & 0 & J_0\rho^2 r\sin\theta\end{vmatrix}$

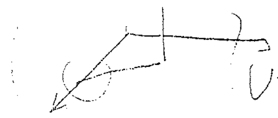
例 1.3 （P38）

判断正误：矢量场的性质可由其梯度和旋度两方面的特性唯一确定 　（错）（有 2 个错误，由散度和旋度确定—）。

第二章

例 2.1

$R(x,y,z)$



$U=\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

自由空间中，一点电荷 $+3q$ 位于 $(-2a,0,0)$ 处，另一点电荷 $-q$ 位于 $(3a,0,0)$ 处（$a>0$），

求： 1. 空间任意点的电位和电场强度；

2. 曲面 $(x+2a)^2+y^2+z^2=a^2$ 外表面的电通量。

$(-2a,0,0)$

例 2.2（P58-59）

$\Phi=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{3q}{\varepsilon_0}$ 　 $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 　 $\vec{R}=$

证明：静电场是有势场 ~~$\nabla\cdot\vec{E}=0$~~

例 2.3

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$ 　 $R_1=\sqrt{(x+2a)^2+y^2+z^2}$ 　 ρ_s 　 $\vec{J}$

（2006 级 A 卷）边界条件问题，求 ρ_s 　 $\vec{D}$

$(-2a-x,-y,-z)$

第三章

R 　 $(3,4)+(1,2)$

$(4,6)$

例 3.1（P107-108）

证明：均匀媒质中的恒定电场是调和场

第四章

例 4.1 （P153，例 4.11）

在真空中有一铁质导线$(\mu=4\mu_0)$沿 z 轴放置，导线内部通有恒定电流，在导线内部$(\rho\le a)$的磁场强度为 $\vec{H}=\hat{\varphi}J_0\rho^2$，求：空间各点的磁场强度 $\vec{H}$，磁感应强度 $\vec{B}$，磁化强度 $\vec{M}$。

例 4.2 （P136-137）

证明：恒定磁场是管型场

第五章

例 5.1

无限大理想导体平面上方的电偶极子的镜像

第六章

例 6.1

（2004 级 B 卷）试分别写出静态电磁场和动态电磁场的标量电位和矢量磁位的定义式。

静态 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\cancel{\vec{H}=-\nabla\varphi}$

$\nabla\cdot\vec{A}=0$

$\vec{E}=-\nabla U$

第七章

例 7.1

（2004 级 A 卷）写出无源理想介质（$\rho=0$，$\vec{J}_s=0$ ，$\sigma=0$，ε 和 μ 均为实常数）内复麦克斯韦方程组限定形式的微分表达式。

例 7.2 （P233，P236）

分别写出平均坡印廷矢量与瞬时坡印廷矢量的定义式。

第八章

例 8.1 （P260-261，振幅、相位、相速度、能量）

（2006 级 A 卷）说出导电媒质与理想介质中均匀平面电磁波的 3 点差别。

例 8.2

（2006 级 A 卷）真空中一均匀平面电磁波的磁场强度瞬时值为

$$\vec{H}(\vec{r},t)=10^{-6}(m_0\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\cos[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\quad A/m$$

1. 求电工作频率 f、波长 λ、相位常数 k、波矢量 $\vec{k}$ 及传播方向 $\hat{n}$；

2. 求 m_0 的数值；

3. 写出电场强度的复矢量和瞬时值表达式。

答案：1．由磁场瞬时值表达式可得 $\vec{k}\ \vec{r}=-\pi(x-y-\frac{1}{2}z)$

$$\vec{k}=-\pi(\hat{x}-\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z}),\quad k=\left|\vec{k}\right|=\pi\sqrt{1^2+1^2+1/4}=3\pi/2,\quad \hat{n}=\frac{\vec{k}}{k}=-\frac{2}{3}\hat{x}+\frac{2}{3}\hat{y}+\frac{1}{3}\hat{z}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{3\pi/2}=\frac{4}{3}\ m$$

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{4/3}=2.25\times10^8\ Hz=225\ MHz,\quad \omega=2\pi f=450\pi\times10^6\ rad/s$$

2．根据平面波的性质可知，$\vec{E},\vec{H},\vec{k}$ 成右手螺旋关系，

所以有 $\vec{H}\ \vec{k}=0$，$\vec{H}_0\ \vec{k}=(m_0\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\left[-\pi(\hat{x}-\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z})\right]=0$ 由此得 $m_0=3/2$

3．磁场复矢量 $\vec{H}(\vec{r})=10^{-6}(\frac{3}{2}\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})e^{j\pi(\hat{x}-\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z})}$

电场复矢量 $\vec{E}(\vec{r})=-\eta_0\left[\hat{k}\times\vec{H}(\vec{r})\right]=-120\pi\times10^{-6}\left[(\frac{1}{3}\hat{x}+\frac{7}{6}\hat{y}-\frac{5}{3}\hat{z})\right]e^{j\pi(\hat{x}-\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z})}$

电场瞬时值 $\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]$

$$=-120\pi\times10^{-6}\left[(\frac{1}{3}\hat{x}+\frac{7}{6}\hat{y}-\frac{5}{3}\hat{z})\right]\cos[450\pi\times10^6+\pi(\hat{x}-\hat{y}-\frac{1}{2}\hat{z})]$$

例 8.3

真空中一平面电磁波的磁场瞬时值表达式为

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{y}5\sin(\omega t+40\pi x)-\hat{z}5\cos(\omega t+40\pi x)$$

求： 1．电磁波的极化形式；

2. 若此电磁波垂直投射在 $x=0$ 的理想导体平面上，试确定反射波电场强度的复矢量，以及反射波的极化形式，求此时真空区域中总电场振幅最大的位置。

例 8.4

（2006 级 A 卷）真空中一右旋圆极化平面电磁波垂直投射在无限大的理想电介质（$\varepsilon_r>1$）平面上，说出其反射波和透射波的极化情况。

答案：反射波为左旋圆极化波，透射波为右旋圆极化波。

例 8.5

平面波电场强度复矢量为 $\vec{E}=E_m\left(\hat{x}+\hat{y}e^{j\frac{\pi}{6}}\right)e^{-jkz}$，判断极化形式。

第九章

例 9.1（P294，例 9.1）

（2004 级 A 卷）一矩形波导管的截面尺寸为 $a\times b=3\times1.5\ \mathrm{cm}^2$。

1、若波导管内部为真空，确定传播 TE_{10} 的最低工作频率；

2、在波导管内填充相对电容率 ε_r 的电介质后，欲单模传输 $f=(2.5\pm0.5)\times10^9\ Hz$ 的 TE_{10} 波，试确定 ε_r 的最小值和最大值。

答案：1. $f_{10}=\dfrac{c}{2a}=\dfrac{3\times10^8}{2\times0.03}=5\times10^9\ Hz$，所以最低工作频率 $f=5\times10^9\ Hz$

2. 令 $f_1=2.0\times10^9$，$f_2=3.0\times10^9$

则根据题意有

$f_{10}<f_1<f_{20}$，并且 $f_{10}\le f_2<f_{20}$

即 $\dfrac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}}<f_1<\dfrac{c}{a\sqrt{\varepsilon_r}}$，并且 $\dfrac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}}<f_2<\dfrac{c}{a\sqrt{\varepsilon_r}}$

解得：　$6.25<\varepsilon_r<11.1$

思考：本题是填充电介质，磁导率等于 1，如果填充磁导率不等于 1，情况会怎样？

例 9.2（P312）

矩形谐振腔 $a=3\mathrm{cm}$，$b=2\mathrm{cm}$，$d=4\mathrm{cm}$，腔内填充空气，求其 TE_{101} 模的谐振频率。

$$f_{mnp}=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{d}\right)^2}$$

第十章

例 10.1

（2004 级 B 卷）自由空间中长为 0.1m 的赫芝电偶极子，沿 z 轴放置，其电流幅度为 10A，频率为 10MHz。

试求：　1. 远区电场和磁场的复矢量表达式

2. 远区空间任意点处的位移电流密度

答案：　1. $\bar{E}=\hat{\theta}\,j\eta_0\dfrac{Idl}{2\lambda}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$

$\bar{E}=\hat{\theta}\,j2\pi\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$　　　$\bar{H}=\hat{\varphi}\,j\dfrac{1}{60}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$

2. $\bar{E}=\hat{\theta}\dfrac{2\pi\sin\theta}{r}\cos(\omega t-\dfrac{\pi}{15}r+\dfrac{\pi}{2})$

$\bar{J}_d=\dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t}=-\hat{\theta}\dfrac{2\pi\omega\sin\theta}{r}\sin(\omega t-\dfrac{\pi r}{15}+\dfrac{\pi}{2})$

$=-\hat{\theta}4\pi^2\times10^7\dfrac{\sin\theta}{r}\sin(2\pi\times10^7t-\dfrac{\pi r}{15}+\dfrac{\pi}{2})$

思考：　1. $r=10km,\theta=30^\circ$ 处的电场强度 $\bar{E}$；

2. 平均功率流密度。

$\lambda=\dfrac{c}{f}=\dfrac{3\times10^8}{1\times10^7}=30$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{2\pi}{30}=\dfrac{\pi}{15}$

$\vec{E}=\hat{\theta}j\eta_0\dfrac{Idl}{2\lambda}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$

$=\hat{\theta}j120\pi\dfrac{10\times0.1}{2\times30}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$

$=\hat{\theta}j2\pi\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$

$\vec{H}=\hat{\varphi}j\dfrac{Idl}{2\lambda}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$

$=\hat{\varphi}j\dfrac{1}{60}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}=\hat{\theta}j2\pi\varepsilon_0\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-j\frac{\pi}{15}r}$

$J_d=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}=$ 写成瞬时值求导!!

总复习

- Maxwell方程组
- 媒质本构方程

物理定律（物理概念）
解题方法
基本特性

★ 位移电流假设 ⟶ 电流连续性问题

★ 镜像电荷假设 ⟶ 边界条件不变

★ 洛伦兹条件（规范）

$\nabla\cdot\vec{A}=0$ 静态场

$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial U}{\partial t}$ 时变场

★ Maxwell方程组的不同表达式

一、积分形式

线积分

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_s\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{s}$$ 2项

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_s\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$ 1项

面积分

[illegible]

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$$ 0项

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_\tau \rho\, d\tau$$ 1项

体积分

重要性：物理定律本身，物理意义明确。

左边分别是电磁场的四个物理量。

右边是产生电磁场的源。

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

二、微分形式

散度定理 $\int_V \nabla\cdot\vec{F}dv=\oint_s \vec{F}\cdot d\vec{s}$

斯托克斯定理 $\int_s(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{s}=\oint_l \vec{F}\cdot d\vec{l}$

应用上述两个定理，积分形式变成微分形式

旋度

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$ 2项

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ 1项

散度

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$ 0项

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$ 1项

意义：空间任意点场量与场源的关系。

左边分别是电磁场的四个物理量。

右边是产生电磁场的源。

三、限定形式

仅由麦克斯韦方程组的四个基本方程还无法求解出电磁场的具体分布需要补充如下3个媒质本构方程

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\qquad \vec{B}=\mu\vec{H}\qquad \vec{J}=\sigma\vec{E}$$

将本构方程各式代入麦克斯韦方程组的微分形式中，得

$$\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=\rho$$

$$\nabla\cdot(\mu\vec{H})=0$$

四、复数形式

- 对于时谐电磁场（或正弦电磁场）

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$$
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$
$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$
$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

意义：脱离原始场源的空间任意点可以存在电磁波。
代入物质本构方程可以得到时谐电磁场的微分限定形式。
应用散度定理和斯托克斯定理可以得到时谐电磁场的积分形式。

麦克斯韦方程组的形式

- ◆有源、无源
- ◆理想介质、非理想介质
- ◆积分形式、微分形式
- ◆限定形式、非限定形式
- ◆复数形式、瞬时值形式

★ Maxwell方程组的应用

一、静态场的基本定律（源和场与时间无关）

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_\tau \rho d\tau$$ 高斯定律 → 解题捷径

$$\nabla\times\vec{E}=0$$ 静电场为保守场 → 电位

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$$ 安培回路定律 → 解题捷径

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$ 静磁场为管形场 → 矢量磁位、标量磁位

二、波动方程

时变场

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\vec{H}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

→ 非齐次矢量波动方程

$\sigma=0$ 的非导电介质

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2\vec{H}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

→ 齐次矢量波动方程

正弦场

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$
$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0$$
$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon-j\omega\mu\sigma$$

→ 矢量亥姆霍兹方程（波动方程）

三、电位和磁位方程

定义：

时变场 $\begin{cases} \bar{B}=\nabla\times\bar{A} \\ \bar{E}=-\nabla U-\dfrac{\partial\bar{A}}{\partial t} \end{cases}$　　静态场 $\begin{cases} \bar{B}=\nabla\times\bar{A} \\ \bar{E}=-\nabla U \end{cases}$

非齐次矢量 波动方程

$$\nabla^2\bar{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=-\mu\bar{J}$$

$$\nabla^2 U-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

泊松方程

$$\nabla^2\bar{A}=-\mu\bar{J}$$

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

正弦场

$$\nabla^2\bar{A}+k^2\bar{A}=-\mu\bar{J}$$

$$\nabla^2 U+k^2 U=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

亥姆霍兹方程 达朗贝尔方程

四、边界条件

- 时变场与静态场表达式一致

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(\bar{D}_1-\bar{D}_2)=\rho_s \\ D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \end{cases}\qquad \begin{cases} \hat{n}\cdot(\bar{B}_1-\bar{B}_2)=0 \\ B_{1n}-B_{2n}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{n}\times(\bar{E}_1-\bar{E}_2)=0 \\ E_{1t}-E_{2t}=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} \hat{n}\times(\bar{H}_1-\bar{H}_2)=\bar{J}_s \\ H_{1t}-H_{2t}=J_s \end{cases}$$

导体表面 $\begin{cases} \hat{n}\times\bar{E}=0 \\ E_t=0 \end{cases}\begin{cases} \hat{n}\cdot\bar{D}=\rho_s \\ D_n=\rho_s \end{cases}\begin{cases} \hat{n}\cdot\bar{B}=0 \\ B_n=0 \end{cases}\begin{cases} \hat{n}\times\bar{H}=\bar{J}_s \\ H_t=J_s \end{cases}$

时变场的唯一性定理

- 如何证明电磁波在某个区域内能传播？
- 条件1：电场和磁场满足亥姆霍兹方程。
- 条件2：满足边界上的边界条件。

媒质电磁参数

$\bar{D}=\varepsilon\bar{E}$

$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\bar{P}$

$\bar{P}=\varepsilon_0\chi_e\bar{E}$

$\chi_e=\varepsilon_r-1$

极化电荷密度 $\rho_P=-\nabla'\cdot\bar{P}$

极化电荷面密度 $\rho_{PS}=\hat{n}\cdot\bar{P}$

$\bar{B}=\mu\bar{H}$

$\bar{H}=\dfrac{\bar{B}}{\mu_0}-\bar{M}$

$\bar{M}=\chi_m\bar{H}$

$\chi_m=\mu_r-1$

$\bar{J}_m=\nabla'\times\bar{M}$

$\bar{J}_{ms}=-\hat{n}\times\bar{M}$

$\bar{J}=\sigma\bar{E}$

$V=RI$

$V=\bar{E}\cdot\bar{l}$

$R=\rho\dfrac{l}{S}$

$I=\bar{J}\cdot\bar{S}$

$\bar{E}\cdot\bar{l}=\rho\dfrac{l}{S}\bar{J}\cdot\bar{S}$

$\dfrac{1}{\rho}\bar{E}\cdot\bar{l}=\bar{J}\cdot\bar{S}$

$\bar{S}=\bar{l}$

$\bar{J}=\dfrac{1}{\rho}\bar{E}=\sigma\bar{E}$

主要物理定律

- 库仑定律、高斯定律、静电场的环路定理
- 欧姆定律、焦尔定律
- 安培磁力定律、毕奥-沙伐定律
- 安培回路定律、磁场高斯定律
- 法拉第电磁感应定律
- 推广的安培回路定律
- 波印廷定理
- 反射定律、折射定律（斯耐尔定律）

不同场源所产生的电磁场的特性

- 恒定电荷分布 ⟶ 静电场 ⟶ 有散 ⟶ 无散(无源区域)；静电场 ⟶ 无旋
- 恒定电场 ⟶ 恒定电流场 ⟶ 无散；恒定电流场 ⟶ 无旋
- 恒定电流分布 ⟶ 静磁场 ⟶ 无散；静磁场 ⟶ 有旋 ⟶ 无旋(无源区域)
- 变化的电场或磁场 ⟶ 时变场 ⟶ 有散；时变场 ⟶ 有旋

例题：以下关于时变场论述不正确的是：

A. 电场和磁场相互激发；

B. 电场和磁场不是独立的；

C. 电场是有旋场； **(D)**

D. 磁场是有源场。

例题2：电导率为 σ 的导电媒质中的恒定电场满足（ ）； $\vec{B}=0$

A. $\nabla\times\vec{E}=0$；B. $\nabla\cdot\vec{E}=\sigma$；C. $\nabla\times\vec{E}=\vec{J}$

$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (A)

解题方法——第一章

拉梅系数

直角坐标系：$h_1=1$ $h_2=1$ $h_3=1$

圆柱坐标系：$h_1=1$ $h_2=\rho$ $h_3=1$

球坐标系：$h_1=1$ $h_2=r$ $h_3=r\sin\theta$

★常用坐标系下的梯度计算

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla f=\hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla f=\hat{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

一标函数在某点的梯度的性质

- (1) 垂直于给定函数的等值面。
- (2) 指向给定函数在某位置变化最快的方向。
- (3) 它的大小等于给定函数每单位距离的最大变化率。
- (4) 一个函数在某点任意方向的方向导数等于此函数的梯度与该方向单位矢量的标积。

★常用坐标系下的旋度计算

1) 直角坐标系 $\nabla\times\bar{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$

2) 圆柱坐标系 $\nabla\times\bar{F}=\dfrac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z\end{vmatrix}$

3) 球坐标系 $\nabla\times\bar{F}=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi\end{vmatrix}$

★常用坐标系下的散度计算

1) 直角坐标系

$$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{r})=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

2) 圆柱坐标系

$$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{r})=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

3) 球坐标系

$$\nabla\cdot\bar{F}(\bar{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

解题方法——第二章

★静电场

库仑定律 → 点电荷对点电荷的受力

库仑定律 → 点电荷在电场中的受力

高斯定律 → 分布电荷产生的电场

分离变量法 → 已知边界电位求电场分布

镜像法 → 已知点电荷和边界

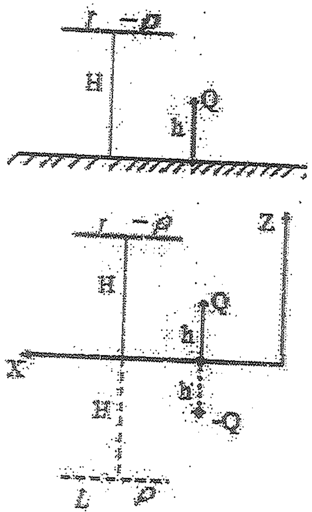
有限差分法 → 已知边界电位求电位分布

等效极化电荷分布用公式计算

例题

如图所示，一个长度为L、分布电荷密度为-ρ的线电荷垂直位于一个无限大导体平面上方（线电荷与导体平面绝缘），导体上方空间中有一点电荷Q。

问：此点电荷Q能否在空间中静止存在？如果能静止，计算静止时点电荷的位置以及图中各物理量应满足的关系。



分析：先用镜像法将导体平面撤去，然后分析点电荷的受力。

静磁场

安培磁力定律 ⟶ 线电流对线电流的受力

洛伦兹力公式 ⟶ 运动点电荷在磁场中的受力

毕奥-沙伐定律 ⟶ 分布电流产生的磁场

安培回路定律 ⟶ 已知电流分布求磁场

镜像法 ⟶ 已知线电流和边界求磁场

● 等效磁化电流分布用公式计算

例4.11 磁导率为 $\mu=\mu_0\mu_r$ 的铁质无限长圆管中通过均匀恒定电流I，管的内外半径分别为a和b，截面如图所示。

求空间任意点的 $\vec{H},\vec{B},\vec{M}$ 和磁化电流。

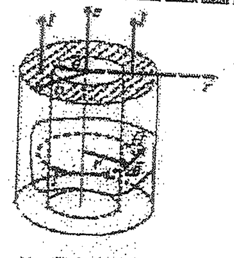
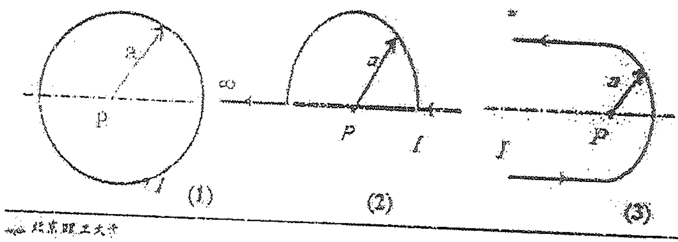


图4-41 通有电流的铁管

习题4.6 求图中各个电流回路在P点的B。



解：(1) $$B_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I a}{4\pi a^2}d\theta=\frac{\mu_0 I}{2a}$$

(2) 根据 $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ 可知通过P的电流对磁场无贡献，所以 $$B_2=\frac{1}{2}B_1=\frac{\mu_0 I}{4a}$$

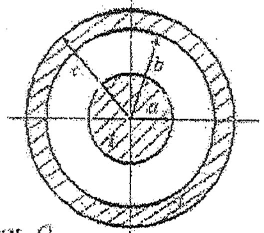
(3) B_3可以看作两根半无限长的直导线与一个半圆环电流产生磁场的叠加

$$B_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}+\frac{1}{2}B_1=\frac{\mu_0 I}{2a}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$$

静态场综合例题2

☆ 一无限长同轴线内、外导体的半径分别为a、b和c，上面流有均匀反向直流I和$-I$，内外导体的电位差 U_0，导体间为真空。

如右图所示。



求：1） $a<r<b$ 区域的 $\bar{E}$ 和 $\bar{H}$

2） $r=b$ 的电荷面密度 ρ_s

3） 单位长度的外自感。

（1） 求电场强度，设内导体电荷线密度为ρ_l

则在 $a<r<b$ 区域，根据高斯定律得 $\bar{E}=\hat{r}\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r}$

于是 $$U_{ab}=\int_a^b \bar{E}\cdot d\bar{l}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}=U_0$$

所以 $\rho_l=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 U_0}{\ln(b/a)}$ $\quad \bar{E}=\hat{r}\dfrac{U_0}{r\ln(b/a)}$

求磁场强度，利用安培回路，得 $\bar{H}=\hat{\phi}\dfrac{I}{2\pi r}$

（2） $$\rho_S\big|_{r=b}=\bar{D}\big|_{r=b}\cdot(-\hat{r})=-\varepsilon_0 E_r\big|_{r=b}=-\frac{\varepsilon_0 U_0}{b\ln(b/a)}$$

（3） 利用磁场能求自感，在 $a<r<b$区域，单位长度的磁场能是

$$W_{m0}=\frac{\mu_0}{2}\int_a^b H^2\,2\pi r dr=\frac{\mu_0}{2}\int_a^b\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$W_{m0}=\dfrac{1}{2}LI^2$ 所以外自感 $L_0=\dfrac{2W_{m0}}{I^2}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

解题方法——第 八章

一个在自由空间传播的均匀平面电磁波，其电场复矢量为

$$\bar{E}=\hat{x}12\pi e^{j40\pi z}+\hat{y}12\pi e^{j(40\pi z-\frac{\pi}{2})}$$

求：（1） 电磁波的传播方向；

（2） 电磁波的频率f；

（3） 电场强度的瞬时表达式；

（4） 磁场强度复矢量和瞬时表达式；

（5） 电磁波的极化形式；

（6） 沿传播方向单位面积流过的平均功率；

（7） 若此电磁波垂直投射在一无限大理想导体平面上，确定反射波的以上各个物理量以及 I 区的总电场。

解：（1） 根据电场复矢量的表达式可知电磁波的波矢量

$$\bar{k}=-40\pi\hat{z}$$

所以电磁波的传播方向是 $-Z$ 轴方向。

（2） 角频率 $\omega=\dfrac{k}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=kc=12\pi\times10^9$

电磁波的频率 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=6\times10^9\ Hz=6\ GHz$

（3） 电场强度的瞬时表达式为

$$\begin{aligned}\bar{E}(r,t)&=\mathrm{Re}[\bar{E}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[(\hat{x}12\pi e^{j(\omega t+40\pi z)}+\hat{y}12\pi e^{j(\omega t+40\pi z-\pi/2)}]\\&=\hat{x}12\pi\cos(\omega t+40\pi z)+\hat{y}12\pi\cos(\omega t+40\pi z-\pi/2)\\&=\hat{x}12\pi\cos(\omega t+40\pi z)+\hat{y}12\pi\sin(\omega t+40\pi z)\end{aligned}$$

(4) 磁场强度复矢量可利用平面波公式求得

$$\bar{H}=\frac{\hat{k}\times\bar{E}}{\eta_0}=\frac{1}{120\pi}\left[-\hat{y}12\pi e^{j40\pi z}+\hat{x}12\pi e^{j(40\pi z-\pi/2)}\right]$$

$$=-0.1\left[j\hat{x}+\hat{y}\right]e^{j40\pi z}$$

磁场强度瞬时表达式可以利用平面波公式求得，也可以由复矢量求得

$$\bar{H}(r,t)=-0.1\hat{y}\cos(\omega t+40\pi z)-0.1\hat{x}\cos(\omega t+40\pi z+\pi/2)$$

$$=\hat{x}0.1\sin(\omega t+40\pi z)-\hat{y}0.1\cos(\omega t+40\pi z)$$

(5) 由题意得 $\varphi_x=0$，$\varphi_y=-\frac{\pi}{2}$，$\varphi_x-\varphi_y=\frac{\pi}{2}$

并且 $E_{xm}=E_{ym}=12\pi$

所以是左旋圆极化

(6) 沿传播方向单位面积流过的平均功率即是坡印廷矢量的平均值

$$\langle\bar{S}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{E}\times\bar{H}^*\right]=\frac{1}{2}\frac{E_m^2}{\eta_0}(-\hat{z})=-0.6\pi\hat{z}$$

(7) 反射波的传播方向是 Z 轴方向。

反射波的频率不变。

反射系数 $R=-1$

反射波电场复矢量为 $\bar{E}^{r}=-\hat{x}12\pi e^{-j40\pi z}-\hat{y}12\pi e^{-j(40\pi z+\frac{\pi}{2})}$

反射波电场的瞬时表达式为 $\boxed{\text{反射波极化}}$

$$\bar{E}^{r}(r,t)=-\hat{x}12\pi\cos(\omega t-40\pi z)-\hat{y}12\pi\cos(\omega t-40\pi z-\pi/2)$$

反射波磁场复矢量为

$$\bar{H}^{r}=\frac{\hat{k}^{r}\times\bar{E}^{r}}{\eta_0}=\frac{1}{120\pi}\hat{z}\times\bar{E}^{r}=\hat{x}0.1e^{-j(40\pi z+\pi/2)}-\hat{y}0.1e^{-j40\pi z}$$

反射波磁场的瞬时表达式为

$$\bar{H}^{r}(r,t)=\hat{x}0.1\cos(\omega t-40\pi z-\frac{\pi}{2})-\hat{y}0.1\cos(\omega t-40\pi z)$$

I区总电场 $\bar{E}_1=\hat{x}24\pi\sin(40\pi z)+\hat{y}24\pi\sin(40\pi z)$

$$\bar{E}_1(r,t)=\hat{x}24\pi\sin(40\pi z)\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})+\hat{y}24\pi\sin(40\pi z)\cos(\omega t)$$

解题方法——第九章

9.4 一空气填充的矩形波导，尺寸为 $a=2.286$cm，$b=1.016$cm 若传输工作频率为 $f=10$ GHz 的 TE_{10} 模。

试求：(1) 相位常数 β 及阻抗 $\eta_{TE_{10}}$

(2) 若波导填充 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=4$ 的理想介质，重求 TE_{10} 模的 β 及 $\eta_{TE_{10}}$

(3) 若工作频率降到 5 GHz，试决定 TE_{10} 模的衰减常数 α 和阻抗 $\eta_{TE_{10}}$，并计算场幅度衰减到参考值的 e^{-1} 时的距离。

解：（1）工作频率为 $f=10$ GHz 的电磁波在自由空间中波长为

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{10\times10^9}=3\ cm$$

TE_{10} 模的截止波长为 $\lambda_{10}=2a=4.572\ cm$

故相位常数为

$$\beta_g=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{10}}\right)^2}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4.572}\right)^2}=1.58\ rad/cm$$

阻抗

$$\eta_{TE_{10}}=\eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{10}}\right)^2}=377\Big/\sqrt{1-\left(\frac{3}{4.572}\right)^2}=499\ \Omega$$

（2）若频率为 $f=10$ GHz 的电磁波在 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=4$

的无界理想介质中传播，则波长为

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}f}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{4}\times10\times10^9}=1.5\ cm$$

TE_{10} 模的截止波长为 $\lambda_{10}=2a=4.572\ cm$

故相位常数为

$$\beta_g=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{10}}\right)^2}=\frac{2\pi}{1.5}\sqrt{1-\left(\frac{1.5}{4.572}\right)^2}=3.95\ rad/cm$$

阻抗

$$\eta_{TE_{10}}=\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{10}}\right)^2}=\left(\frac{377}{2}\right)\Big/\sqrt{1-\left(\frac{1.5}{4.572}\right)^2}=200\ \Omega$$

（3）工作频率为 $f=5$ GHz 的电磁波在自由空间中波长为

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\times10^8}{5\times10^9}=6\ cm$$

TE_{10} 模的截止波长为 $\lambda_{10}=2a=4.572\ cm$

所以阻抗

$$\eta_{TE_{10}}=\eta\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{10}}\right)^2}=377\Big/\sqrt{1-\left(\frac{6}{4.572}\right)^2}=j443.8\ \Omega$$

当工作频率降为 $f=5$ GHz 时，处于截止状态，衰减常数为

$$\alpha=\gamma=\sqrt{k_x^2+k_y^2-k^2}=\sqrt{k_c^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2\pi f_c}{c}\right)^2-\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2}=\frac{2\pi f}{c}\sqrt{\frac{f_c^2}{f^2}-1}$$

$$=\frac{2\pi f}{c}\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda_{10}^2}-1}=90\ Np/m$$

电场振幅与传输距离之间的关系是

$$E_m(z)=E_{m0}e^{-\alpha z}$$

所以经过 α^{-1} 米时，即0.01米时，电场强度降为原来的 e^{-1}

※ 一无限长圆柱同轴线的内导体半径为a、外导体内径为b，内外导体之间填充两种均匀电介质材料，a<r<r0区域的电容率为ε_1，r0<r<b区域的电容率为ε_2。当内外导体表面上单位长度所带的电荷是Q和-Q时，求此同轴线内外导体间电压和两种电介质分界面$r=r_0$处的极化电荷面密度。

单位长度的储能

● 从场源电荷及介质的对称性可以看出，内外导体之间的电通量密度$\vec D$只有$\hat r$分量，并且D值具有轴对称性。过任意场点P(r)，作一半径为r，长为L的闭合圆柱面，应用高斯定理得：

$$\vec D = \hat r \frac{Q}{2\pi r}$$

由场量关系式，得到两种电介质中的电场强度为：

$$\vec E_1 = \hat r \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 r} \quad (a<r<r0) \qquad \vec E_2 = \hat r \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 r} \quad (r0<r<b)$$

在$r=r_0$分界面内侧的介质1表面上，$\hat n = \hat r$，极化电荷面密度为：

$$\rho_{ps1} = [\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\vec E_1]\cdot \hat r = \frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}\cdot\frac{Q}{2\pi r_0}$$

在$r=r_0$分界面外侧的介质2表面上，$\hat n = -\hat r$，极化电荷面密度为：

$$\rho_{ps2} = [\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)\vec E_2]\cdot(-\hat r) = -\frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\cdot\frac{Q}{2\pi r_0}$$

分界面上的总极化电荷面密度为以上两者的代数和，即：

$$\rho_{ps} = \rho_{ps1}+\rho_{ps2} = \frac{Q}{2\pi r_0}\left[\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\right] = \frac{Q}{2\pi r_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right]$$

第八章例题2

☆ 已知真空中一均匀平面电磁波的电场瞬时表达式为

$$\vec E(\vec r,t) = \hat y 30\pi\cos(\omega t + 4\pi x) + \hat z 30\pi \sin(\omega t + 4\pi x).$$

求：1）电磁波的传播方向、工作频率、极化形式；

2）电场的复矢量表达式；

3）磁场的瞬时表达式；

4）平均能流密度 $<\vec S>$

（1）因为 $-\vec k\cdot\vec r = 4\pi x$ 所以 $k=4\pi$ $\hat k = -\hat x$

电磁波沿着 $-\hat x$ 方向传播。

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{2} \qquad f = \frac{c}{\lambda} = 6\times 10^8\ Hz$$

求极化形式：将电场瞬时值写作

$$\vec E(\vec r,t) = \hat y 10\pi\cos(\omega t + 4\pi x) + \hat z 10\pi\cos(\omega t + 4\pi x - \frac{\pi}{2})$$

则 $E_{0y} = E_{0z} = 10\pi$ $\varphi_y - \varphi_z = \frac{\pi}{2}$ $\hat k = -\hat x$

所以，电磁波为左旋圆极化波。

（2）

$$\vec E(\vec r) = \hat y 10\pi e^{j4\pi x} + \hat z 10\pi e^{j(4\pi x - \frac{\pi}{2})} = 10\pi(\hat y - j\hat z)e^{j4\pi x}$$

（3）磁场复矢量为

$$\vec H = \frac{\vec k\times\vec E}{\omega\mu_0} = \frac{-4\pi\hat x\times[10\pi(\hat y - j\hat z)e^{j4\pi x}]}{\omega\mu_0} = \frac{1}{12}[j\hat y+\hat z]e^{j4\pi x} = \frac{1}{12}\left[\hat y e^{j(4\pi x+\frac{\pi}{2})} + \hat z e^{j(4\pi x - 0)}\right]$$

所以

$$\vec H(\vec r,t) = \frac{1}{12}\left[\hat y\cos(\omega t + 4\pi x + \frac{\pi}{2}) + \hat z\cos(\omega t + 4\pi x - \pi)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\hat y \sin(\omega t + 4\pi x) - \hat z\cos(\omega t + 4\pi x)\right]$$

（4）$$<\vec S> = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec E\times\vec H^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[10\pi(\hat y - j\hat z)e^{j4\pi x}\times\left(\frac{1}{12}\right)[-j\hat y+\hat z]e^{-j4\pi x}\right] = -\frac{5\pi}{6}\hat x$$

第九章

※一矩形波导管的宽边尺寸为25mm，窄边尺寸为10mm，其中一段填充空气，另一段填充相对介电常数为2.25的电介质。

求此波导可实现单模传输的频率范围；

当一频率为7.5GHz的电磁波从空气段入射到介质段时，求反射波场量与入射波场量各为多大？空气波导段内的驻波系数为多少？

※(1) 空气段波导截止波长 $\lambda_{10}=2a=50mm$

$$\lambda_{20}=a=25mm \qquad \lambda_{01}=2b=20mm$$

对应截止频率为 $f_{10}=\dfrac{v_0}{\lambda_{10}}=6\times10^9Hz \quad f_{20}=\dfrac{v_0}{\lambda_{20}}=12\times10^9Hz$

$$f_{01}=\frac{v_0}{\lambda_{01}}=15\times10^9Hz$$

所以空气段波导单模传输的频率范围是：$6GHz<f<12GHz$

(2) 电磁波从空气段波导入射到介质分界面时是垂直入射，其反射系数和折射系数分别为：

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \qquad T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

频率为7.5GHz的电磁波在此波导中传输应为TE10波。其空气段和介质段内波阻抗分别为：

$$Z_{TE_{10}}(空气)=\frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/\lambda_{10})^2}}=200\pi \quad Z_{TE_{10}}(介质)=\frac{\eta_0/\sqrt{\varepsilon_r}}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_{10})^2}}=95\pi$$

代入上式得反射系数和折射系数为：R=-0.356，T=0.644。

所以，反射波场量为35.6%，入射波场量为64.4%。

空气波导段内的驻波系数为：

$$S=\frac{1+|R|}{1-|R|}=2.1$$

解题方法——第十章

※一辐射天线的远区电场强度用最大输入电流I_0给出为

$$\vec{E}=\hat{\theta}\frac{15}{r}I_0\sin\theta \qquad V/m$$

请判断这是什么形式的辐射天线？

求相应的磁场强度表达式；

天线辐射的总功率是多少？

天线的辐射电阻为多少？

如果用一电偶极子天线测量其远区最大场强，应将接收天线放置在发射天线的什么方向？

(1) 由电场强度的方向性函数看出，辐射天线为单元偶极子天线。

(2) 单元偶极子天线远区辐射场为平面波，由 $\vec{H}=\dfrac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu_0}=\dfrac{\hat{k}\times\vec{E}}{\eta_0}$ 得：

$$\vec{H}=\frac{\hat{r}\times\hat{\theta}}{120\pi}\cdot\frac{15}{r}I_0\sin\theta\cdot e^{-jkr}=\hat{\varphi}\frac{I_0}{8\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\cdot e^{-jkr}$$

(3) 天线辐射的平均功率流密度为：

$$\langle\vec{S}\rangle=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*]=\hat{r}\frac{15I_0^2\sin^2\theta}{16\pi r^2}$$

(4) 天线辐射的总功率为：

$$P_r=\oint_s\langle\vec{S}\rangle\cdot\hat{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{5}{4}I_0^2$$

(5) 天线的辐射电阻为：$R_r=\dfrac{2P_r}{I_0^2}=2.5 \quad (\Omega)$

(6) 天线应放置在XY平面上（θ=90°），并且电偶极子与XY平面垂直。

第十章例题2

☆ 在赫兹偶极子最大辐射方向10km处，磁场强度的幅度为

$$H_\phi = 10^{-4}\ A/m$$

求：1) 与最大辐射方向夹角60°的相同距离点的电场幅度和磁场幅度；2) 此天线的波瓣宽度如何？

（1）磁场强度表示为 $\vec{H} = \hat{\phi}\, jH_m \dfrac{\sin\theta}{r} e^{-jkr}$

则 $\dfrac{H_m}{10\times10^3} = H_\phi = 10^{-4}\ A/m \qquad H_m = 1\ A/m$

于是 $\vec{H} = \hat{\phi}\dfrac{j\sin\theta}{r}e^{-jkr}$ 所以 $\vec{E} = \hat{\theta}120\pi\dfrac{j\sin\theta}{r}e^{-jkr}$

最大辐射方向为 $\theta = 90°$，与此方向夹角为 $60°$ 的位置是 $\theta = 30°, 150°$

在 $r = 10km$ 处 $\vec{H}(10\times10^3, 30°) = \hat{\phi}\dfrac{j\sin 30°}{10\times10^3}e^{-jkr}$

所以磁场强度的幅值是 $H_\phi\big|_{max} = 0.5\times10^{-4}\ A/m$

电场强度的幅值是 $E_\theta\big|_{max} = 6\pi\times10^{-3}\ V/m$

（2）根据电磁场的复矢量表达式，可知

① θ方向：$\theta_1 = 45°$和 $\theta_2 = 135°$ 时，场强幅值降为最大值的 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\theta_{3dB} = \theta_2 - \theta_1 = 90°$

② Φ方向：是全向天线，波瓣宽度为360°

体都是点乘，~~面都是叉乘~~ 面都是点的体

电/磁都是叉乘.

自由电荷密度. $\rho = \nabla\cdot\vec{D}$

自由电荷面密度 $\rho_s = \hat{n}\cdot\vec{D}$

极化电荷密度 $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$

极化电荷面密度 $\rho_{ps} = \hat{n}\cdot\vec{P}$

位移电流 $\vec{J} = \cancel{\nabla\times\vec{H}} - \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

位移电流面密度 $\vec{J}_s = \vec{D}\times\vec{S}$?

磁化电流分布 $\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M}$

磁化电流面密度 $\vec{J}_{ms} = \vec{M}\times\hat{n}$

等效磁荷体密度 $\rho_m = -\nabla\cdot M$

等效磁荷面密度 $\rho_{ms} = \vec{M}\cdot\hat{n}$

$f_{mn} = \dfrac{V}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2}$ $\qquad \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{c}{f}$ $\qquad \lambda_{mn} = \dfrac{V}{f_{mn}}.$ $\qquad \lambda g = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{f_{mn}}{f})^2}}$

$\beta_{mn} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-(\frac{f_{mn}}{f})^2}$ $\qquad Z_B = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-(\frac{f_{mn}}{f})^2}}$

边界条件：

求表面上的面电荷要代入 $r=b$ ..

静电场：

法向 $\hat{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_s$

切向 $\hat{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$

$D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$

$E_{1t}=E_{2t}$

恒电场

$\hat{n}\cdot(\vec{J}_1-\vec{J}_2)=0$

$\hat{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$

$J_{1n}=J_{2n}$

$E_{1t}=E_{2t}$

时变电场

$\hat{n}(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_s \Rightarrow D_{1n}-D_{2n}=\rho_s$

$B_{1n}=B_{2n}$

$\hat{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=J_s \Rightarrow H_{1t}-H_{2t}=J_s$

$E_{1t}=E_{2t}$

麦克斯韦方程组微分形式

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H} = \vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$$

赫兹偶极子远区公式

$\vec{E} = \hat{\theta}j\eta_0\dfrac{Idl}{2\lambda}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$ $\qquad \hat{\theta}E_0\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$

$\vec{H} = \hat{\varphi}j\dfrac{Idl}{2\lambda}\dfrac{\sin\theta}{r}e^{-jkr}$ $\qquad \hat{\varphi}E_0\dfrac{\sin\theta}{r\eta_0}e^{-jkr}$

导体内部场强为0.

$\dfrac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \dfrac{V_t}{V_i} = \dfrac{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$

库仑规范

$B=\nabla\times\vec{A}$ $\quad \nabla\cdot\vec{A}=0$ $\qquad \nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$ $\qquad \nabla^2U=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

$H=-\nabla U_m$ $\qquad \nabla^2U_m=0$ $\qquad \nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial U}{\partial t}$ 洛伦兹规范

时变场. $B=\nabla\times\vec{A}$ $\qquad \nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$

毕奥—沙伐定律.

$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}$