信号处理理论与技术

授课教师：赵娟

北京理工大学　信息与电子学院

2025年6月14日

德以明理　学以精工

信号处理理论与技术 I

复习提纲

考试安排

第 1 章 绪论

第 2 章 连续时间信号分析

第 3 章 连续时间系统分析

第 4 章 信号采样与重建

信号处理理论与技术

考试安排

◊ 考试安排

25.6.23（周一）10:10-12:10，理教 210，提前 20 分钟到考场

◊ 试卷结构

一、计算与简答（6 小题，40 分）

二、综合题（3 大题，多问，60 分）

◊ 答疑

问卷截止 6.20 晚 8:00

6.22 前微信群集中回复

备注授课老师，便于指定老师解答

信号处理
理论与技术 I

复习提纲

考试安排

第 1 章 绪论

第 2 章 连续时间信号分析

第 3 章 连续时间系统分析

第 4 章 信号采样与重建

信号处理理论与技术

- 1.1 信号的概念与类型
  - 周期信号/非周期信号
  - 能量信号/功率信号
- 1.2 常见的信号模型
  - 正弦信号：$A\cos(\omega t+\theta)$，周期 $T=2\pi/\omega$
  - 实指数信号：$Ae^{\sigma t}$，A,σ 均为实数
  - 复指数信号：Ce^{st}，C,s 均为复数，例：$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$，$e^{st}=e^{\sigma t}e^{j\omega t}$
  - 矩形脉冲信号：$A\mathrm{rect}\left(\dfrac{t-u}{\tau}\right)=\begin{cases}A, & \lvert t-u\rvert<\tau/2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 τ 为脉宽
  - 抽样函数/sinc 函数：$\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}, \mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$
- 1.3 系统的概念与类型
- 1.4 系统的基本性质：线性、时不变性、因果性、稳定性

✓ 重点掌握连续时间信号与连续时间系统。

信号处理
理论与技术 I

复习提纲

信号处理理论与技术

考试安排

第 1 章 绪论

第 2 章 连续时间信号分析

第 3 章 连续时间系统分析

第 4 章 信号采样与重建

- 2.1.1 时域基本运算
- 2.1.2 阶跃函数与冲激函数
  - 单位阶跃函数: $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 注：旧版教材记作 $\varepsilon(t)$
  - 阶跃函数可表示含有跳变的信号；或表示信号的非零范围 (支撑集)，如 $e^{at}u(t)$，$e^{at}u(-t)$，$\mathrm{rect}(t/T)=u(t+T/2)-u(t-T/2)$
  - 单位冲激函数：$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$
  - 两者关系

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\Leftrightarrow u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

  - 冲激函数的性质：偶函数、尺度性质、筛选性质
  - 斜坡函数 $r(t)=tu(t)$、冲激偶 $\delta'(t)$

- 2.1.3 连续时间信号的时域分解
  - 信号分解的思想 $\rightarrow$ 信号分析、系统分析的基础
  - 信号的时域分解：$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*\delta(t)$
- 2.1.4 卷积积分
  - 计算方法：图形法 (反褶-> 时移-> 相乘-> 积分)、公式法 (结合性质)
  - 性质：交换律、结合律、分配律、微分、积分、时移，综合运用简化计算
  - 从系统角度理解卷积运算 $\rightarrow$ 冲激响应

$$x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=x(t)*\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau=x(t)*u(t)$$

  - 常见的卷积关系，如：两个相同的矩形脉冲卷积为三角脉冲，见教材 P88 例 2.21。

- 2.2.1 傅里叶级数的定义
  - 复指数形式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t,\ \text{其中}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

  c_n 的物理意义：离散频谱 (复)，$|c_n|$ 幅度谱，$\angle c_n$ 相位谱

  - 三角形式

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\leftrightarrow a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t,\ n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t,\ n \geq 1$$

  - 两种形式的关系：利用欧拉公式可相互转化

- 2.2.2 傅里叶级数的性质
  - 线性
  - 时移
  - 反褶
  - 奇偶 (复指数形式、三角级数形式)
  - 共轭、共轭对称 (实信号)
  - 奇谐、偶谐 *(不同于奇偶性)
  - 帕塞瓦尔定理：平均功率守恒
- 2.2.3 傅里叶级数的收敛性 *
  - 了解判定条件
  - 了解吉布斯现象

- 2.3.1 傅里叶变换的定义

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\leftrightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

  $X(j\omega)$ 的物理意义：频谱 (密度)，$|X(j\omega)|$ 幅度谱，$\angle X(j\omega)$ 相位谱
- 傅里叶变换的存在性 *
- 2.3.2 常见信号的傅里叶变换 (熟练运用！)
- 2.3.3 周期信号的傅里叶变换
  - 特点：时域周期化↔频域离散化

$$x(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)\Rightarrow\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT)\overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow}c_n=\frac{1}{T}X(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-nT)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0),\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

  - 例：周期矩形脉冲 $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$ 离散 sinc；$\delta_T(t)\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$(应用：理想采样模型)

- 2.3.4 傅里叶变换的性质 (熟练运用！)
  - 线性
  - 尺度变换、反褶 $(a=-1)$
  - 共轭、共轭对称 (实信号)
  - 奇偶
  - 时移
  - 频移
  - 对偶：矩形/sinc 函数 $\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$sinc/矩形函数 (明确表达式关系)
  - 微分 (时域/频域)：微分方程 $\rightarrow$ 求解频率响应
  - 积分 (时域/频域 *)
  - 卷积定理：滤波的基本原理，求解系统零状态响应
  - 乘积定理：幅度调制的基本原理
  - 帕塞瓦尔定理：能量守恒

- 2.4.1 拉普拉斯变换的定义

双边：$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ s\in\mathcal{R}\leftrightarrow x(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\mathrm{d}s,\ \forall\,\sigma\in\mathcal{R}$

单边：$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ \mathrm{Re}(s)\geq\sigma_0\leftrightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]u(t)$

- 2.4.2 拉普拉斯变换的收敛域
  - 收敛域与信号 (左边/右边/双边/有限长) 的关系
  - 有理函数形式，收敛域与零极点分布的关系
- 2.4.3 拉普拉斯变换的性质
  - 双边：类比傅里叶变换
  - 单边：微分 (用于求解系统响应)、积分 (画系统框图)、初值定理、终值定理 (快速计算 $x(0^+)$，$x(+\infty)$)。
- 2.4.4 逆拉普拉斯变换的计算
  - 围线积分法 (留数定理)*
  - 有理函数形式：部分分式展开法 (熟练运用！)

信号处理
理论与技术 I

复习提纲

考试安排

第 1 章 绪论

第 2 章 连续时间信号分析

第 3 章 连续时间系统分析

第 4 章 信号采样与重建

信号处理
理论与技术

- 3.1.1 系统响应的时域求解
  - 全响应的划分

$$\begin{aligned}\text{全响应} &= \text{自然响应 (齐次解)} + \text{受迫响应 (特解)}\\ &= \boxed{\text{零输入响应} + \text{零状态响应}} \quad (\text{重点掌握})\\ &= \text{稳态响应} + \text{瞬态响应}\end{aligned}$$

    结合例题理解各类响应的关系，如课件 chp3-1，例 7。
  - 经典法 *：自然响应 (齐次解)+ 受迫响应 (特解)，存在局限
- 3.1.2 零输入响应
  - 求解思路：齐次方程结合初始条件。
  - 零输入响应不满足系统的线性性质，即：输入为零，输出必然为零。
  - 零输入响应与初始条件具有齐次关系，参考课件 chp3-1，例 4。

- 3.1.3 零状态响应
  - 零状态响应：初始条件为零，由激励信号产生的 (全) 响应，即包含受迫响应以及部分自然响应

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

注：旧版教材用 $e(t)$ 表示激励，$r(t)$ 表示响应。
  - 零状态响应满足系统的线性时不变性，参考课件 chp3-1，例 4。
- 3.1.4 冲激响应
  - 冲激响应：$\delta(t)$ 激励下的零状态响应
  - 冲激响应的时域求解：Heaviside 算子法 * $\Longleftrightarrow$ 拉氏变换法(更简便)
  - 常见系统的冲激响应，如：微分、积分、RC 电路
  - 冲激响应的作用：刻画系统特性，如：因果性、稳定性
  - 阶跃响应 *：$u(t)$ 激励下的零状态响应，$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$

- 3.2.1 连续时间系统的频率响应
  - 频率响应的概念

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

幅频响应：$|H(j\omega)|$、相频响应 $\angle H(j\omega)$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \times |X(j\omega)|$$
$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

  - 系统的 3dB 带宽
  - 频率响应的计算

已知 $h(t)$：$H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

由微分方程导出：$H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \dfrac{\sum_{i=0}^{M} b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j\omega)^i}$，其中 $a_N = 1$

- 3.2.2 零状态响应的频域求解
  - 求解思路：$y_{zs}(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)X(j\omega)]$
  - 冲激响应的频域求解：与时域算子法等价
  - 常见系统的频率响应，如：微分、积分、RC 电路。
  - 单频正弦信号激励 LTI 系统的输出：不产生新的频率成分

$$x(t)=A\cos[\omega_0 t+\theta]\rightarrow y(t)=A\left|H(j\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)+\theta]$$

  - 周期信号激励 LTI 系统的输出：各谐波分量的频响

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\rightarrow y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

  - 从特征函数角度理解频率响应

$$x(t)=e^{j\omega t}\rightarrow y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$$

- 3.2.3 无失真系统的频率特性
  - 无失真系统的输入输出关系

$$y(t)=Kx(t-t_0)\leftrightarrow Y(j\omega)=Ke^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

  - 幅频特性与相频特性

$$|H(j\omega)|=K\ (\text{常数}),\ \varphi(\omega)=-\omega t_0\ (\text{过原点的直线})$$

根据频率响应曲线判定系统是否为无失真系统或特定信号通过系统是否产生失真，参考课件 chp3-2 P32 练习、教材 P181 习题 3.13 等。

  - 相位时延与群时延 *

$$\text{相位时延：}\ t_0=-\frac{\varphi(\omega)}{\omega},\quad \text{群时延：}\ \tau(\omega)=-\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

对于高频窄带信号，载波的时延由相位时延决定，包络的时延由群时延决定。

  - 带通无失真系统的频率特性 *：通带范围内幅频响应为常数，相频响应为直线 (不必过原点)。

- 3.2.4 理想滤波器的频率特性
  - 理想滤波器的类型：低通、高通、带通、带阻
  - 理想低通滤波器的频率特性

$$H_{\mathrm{LPF}}(j\omega)=\begin{cases}Ke^{-j\omega t_0}, & |\omega|\le\omega_c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

  - 冲激响应与阶跃响应 (假设 $K=1,t_0=0$)

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t),\ s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(\omega_c t)$$

  - 理想滤波器不是物理可实现滤波器，也不是无失真系统。
  - 物理可实现滤波器：具有因果性；满足佩利 - 维纳准则 *
  - 设计方法 *：巴特沃斯滤波器，切比雪夫 I 型/II 型滤波器
  - 应用：调制解调、采样重建

- 3.2.5 希尔伯特变换
  - 解析信号：复信号，具有单边频谱

$$x_a(t)=x(t)+j\hat{x}(t)=x(t)+j\boxed{x(t)*\frac{1}{\pi t}}\ (\text{希尔伯特变换})$$

实信号、复信号、单边谱、双边谱的关系，见课件 chp3-2 P64 练习。

  - 希尔伯特变换的冲激响应与频率响应：

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}H(j\omega)=-j\mathrm{sgn}\omega$$

  - 物理意义：90° 相移滤波器
  - 常用关系：对窄带信号作希尔伯特变换，包络不变，载波相位改变

$$a(t)\cos(\omega_0 t)=-a(t)\sin(\omega_0 t)$$
$$a(t)\sin(\omega_0 t)=a(t)\cos(\omega_0 t)$$

  - 逆变换：$\mathcal{H}^{-1}=-\mathcal{H}$
  - 应用 *：单边带调制、包络检波

- 3.3.1 连续时间系统的系统函数
  - 系统函数的概念

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

  - 冲激响应、频率响应、系统函数之间的关系
  - 物理意义：$x(t) = e^{st} \to y(t) = H(s)e^{st}$。
  - 系统函数的计算：

$$\text{已知 } h(t)\text{：}\ H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

$$\text{由微分方程导出：}\ H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k},\ \text{其中 } a_N = 1$$

$\mathcal{L}$ 为双边拉氏变换。

- 3.3.2 系统的零极点分布与系统特性
  - 零极图

$$H(s)=H_0\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)},\ \text{其中}\ H_0=b_M/a_N$$

$z_1,\cdots,z_M$ 为零点（“○”）；$p_1,\cdots,p_N$ 为极点（“×”）

  - 因果性：从最右侧极点起的右侧平面
  - 稳定性：收敛域包含虚轴
  - 因果稳定性：极点全部位于左半平面
  - 最小相位 *：因果稳定条件下，零点均位于左半平面
  - 全通系统 *：零、极点关于虚轴对称分布
  - 通过零极点分布画频率响应 *(MATLAB 实验)
  - 波特图 *(MATLAB 实验)

- 3.3.3 系统响应的复频域求解
  - 求解方法：单边拉氏变换、n 阶微分性质、常见拉氏变换对 (熟练掌握！)
  - 冲激响应的复频域求解：与时域算子法等价
  - 优势：可同时求出零输入响应 (由初始条件决定)、零状态响应 (由激励信号决定) 及全响应
- 3.3.4 电路系统的复频域分析 *
- 3.3.5 系统框图
  - 基本结构：串联 ($H_1(s)H_2(s)$)、并联 ($H_1(s)+H_2(s)$)、反馈 ($H_1(s)/(1+H_1(s)H_2(s))$)
  - 基本运算单元：加法器、标量乘法器、积分器 (时域 $\int \leftrightarrow$ 复频域 $1/s$)
  - 正准型 (掌握！) $\Longleftrightarrow$ 直接 I 型/II 型 *

- 3.4 通信调制技术
  - 调制的概念与类型
  - 幅度调制的基本原理：傅里叶变换乘积定理、频谱搬移

$$x(t)\cos(\omega_c t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(j(\omega+\omega_c)) + X(j(\omega-\omega_c))]$$

$$x(t)\sin(\omega_c t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{j}{2}[X(j(\omega+\omega_c)) - X(j(\omega-\omega_c))]$$

  - 相干解调：频谱搬移、低通滤波
  - 单边带调制 *：希尔伯特变换

信号处理
理论与技术 I

复习提纲

考试安排

第 1 章 绪论

第 2 章 连续时间信号分析

第 3 章 连续时间系统分析

第 4 章 信号采样与重建

信号处理理论与技术

- 4.2.1 理想采样模型
  - 采样信号的时域表示

$$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

T 为采样间隔，$\omega_s=2\pi/T$ 为采样率 (rad/s)。

  - 采样信号的频域表示

$$X_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left[j\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$

  - 时域离散化↔频域周期化
  - 混叠现象：当 $\omega_s<2\omega_M$ 时，相邻周期频谱发生重叠

4.2 低通信号的采样与重建

- 4.2.2 低通信号的重建
  - 奈奎斯特-香农采样定理
  - 重建条件：(1) 原信号低通带限；(2) $\omega_s > 2\omega_M$，$2\omega_M$ 称为奈奎斯特采样率
  - 重建的频域表示 (理想低通滤波)

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_s(j\omega), \text{ 其中 } H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

  - 重建的时域表示 (sinc 插值)

$$x_r(t) = x_s(t) * \operatorname{sinc}(t/T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

带通采样、实际采样、量化与编码等其他小节内容了解。