内　容

几种重要的矢量场

1. 有势场

定义： 对于一个矢量场$\vec{F}(M)$，若在给定的区域内存在$\Phi(M)$ 满足

$$\vec{F}=-\nabla\Phi$$

则称此矢量场为有势场，称Φ 为矢量场$\vec{F}(M)$的势函数或位函数。

性质：

①势函数不唯一 $\vec{F}=-\nabla\left(\Phi_1+C\right)=-\nabla\Phi_1$ C 为非零常数

②线积分与积分路径无关

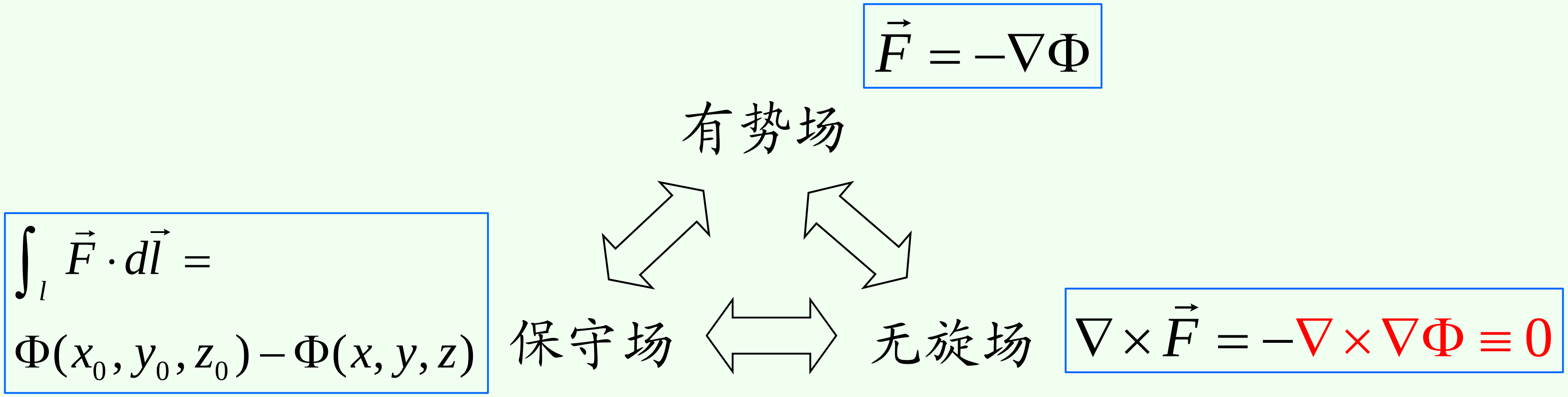
$$\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{l}=-\int_A^B\nabla\Phi\cdot d\vec{l}=-\int_A^B d\Phi=\Phi_A-\Phi_B$$

推论：$\oint_l\vec{F}\cdot d\vec{l}=0$

★**保守场：** 线积分与路径无关的矢量场常常被称为保守场。

③有势场必为无旋场 $\nabla\times\vec{F}=-\nabla\times\nabla\Phi\equiv0$

★推论： 无旋场必为保守场



$\vec{F} = -\nabla\Phi$

有势场

$\int_l \vec{F}\cdot d\vec{l} = \Phi(x_0,y_0,z_0) - \Phi(x,y,z)$

保守场 $\Longleftrightarrow$ 无旋场

$\nabla\times\vec{F} = -\nabla\times\nabla\Phi \equiv 0$

对势函数的说明（多样性、适用性）：

①利用势函数求解有势场较为方便

②如果一个矢量场 $\vec{F}$ 在给定的区域内存在着 $\nabla\times\vec{F}\neq 0$ 的点，则不可随便利用 $\vec{F}=-\nabla\Phi$ 来定义辅助的势函数

2. 管形场

定义： 对于矢量场$\vec{F}$，若在其定义域内的每一点上都有 $\nabla\cdot\vec{F}=0$ ，则称 $\vec{F}$ 为管形场。管形场就是无散场。

性质：

①管形场在任一个矢量管的两个任意横截面上的通量都相等

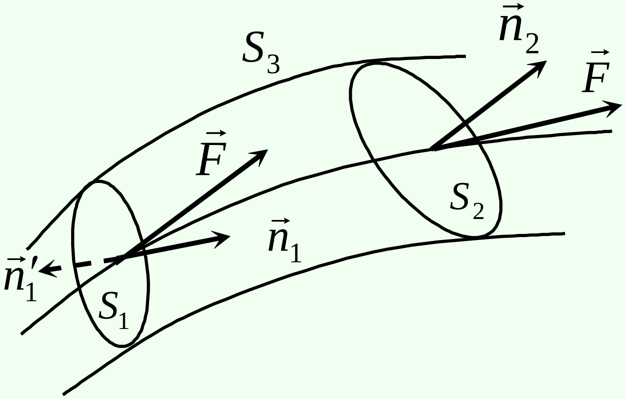
$$\int_{s_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}_1=\int_{s_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}_2$$

$$\oint_{s}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=\oint_{s_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot\left(-d\vec{S}_1\right)-\oint_{s_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}_2$$

$$+\oint_{s_3}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}_3$$

$$=\oint_{s_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot\left(-d\vec{S}_1\right)-\oint_{s_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}_2=\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})d\tau=0$$

$$\Rightarrow\oint_{s_1}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}_1=\oint_{s_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{S}_2$$



管形场的性质

②矢量场 $\vec{F}$ 为管形场 的充要条件是它为另一矢量场的旋度，即

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$$

★矢量位 $\vec{A}$

满足$\nabla \times \vec{A} = \vec{F}$的矢量$\vec{A}$称为矢量场$\vec{F}$的矢量势或矢量位。

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A} \right) \equiv 0$$

★注意：（多样性、适用性）

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\vec{A} + \nabla \phi + C \right)$$

若 $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$ 不可随便引入矢量为 $\vec{A}$

3. 调和场

定义： 若对于矢量场 $\vec{F}$ ，恒有 $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ 和 $\nabla \times \vec{F} = 0$ ，

则称此矢量场为调和场。

换言之，调和场就是既无散又无旋的无源矢量场。

注意： 对于一个实际的物理场，调和场只能在有限的区域内存在，其原因是场的散度和旋度代表着产生场的两种源，若在无限空间内既无散源又无旋源，这个场也就不存在了。

拉普拉斯方程

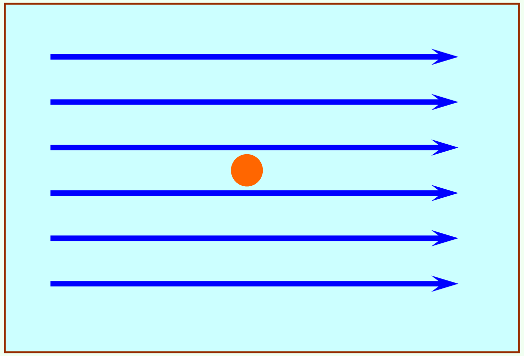
$$\text{调和场}\ \vec{F} \Rightarrow \begin{array}{l} \nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\nabla \Phi \\ \nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \end{array}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0 \longrightarrow \text{拉普拉斯(Laplace)方程}$$

满足拉普拉斯方程的标量函数 Φ 叫做**调和函数**，$\nabla^2 \Phi$ 称作**调和量**。

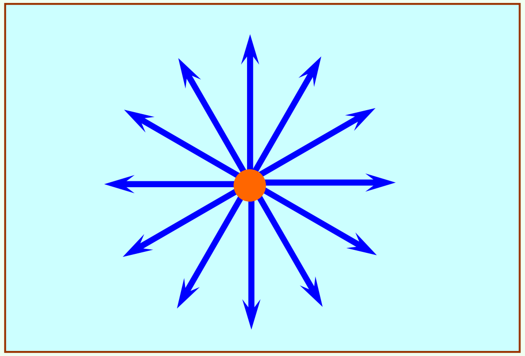
不同的源、矢量场

无源-调和场



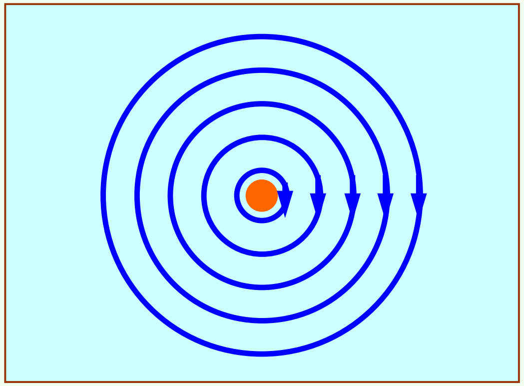
$$\nabla\cdot\vec{F}=0,\nabla\times\vec{F}=0$$

散源-无旋场



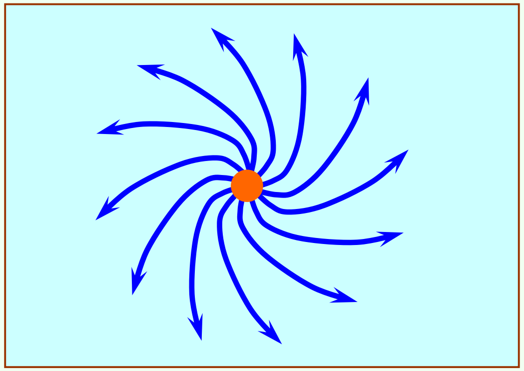
$$\nabla\cdot\vec{F}\neq 0.\nabla\times\vec{F}=0$$

漩涡源-无散场



$$\nabla\cdot\vec{F}=0,\nabla\times\vec{F}\neq 0$$

散源、漩涡源-有散、有旋场



$$\nabla\cdot\vec{F}\neq 0,\nabla\times\vec{F}\neq 0$$

内　容

库伦定律

场点位置

源点位置

电荷之间的作用力： $$\boldsymbol{F} = \frac{Q\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$$ $$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$$

引入电场： $$\boldsymbol{E} = \frac{F}{\Delta Q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2}$$

推广为连续电荷分布形式： $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}d\tau'$$

静电场的性质1: $\nabla\times\boldsymbol{E}=?$

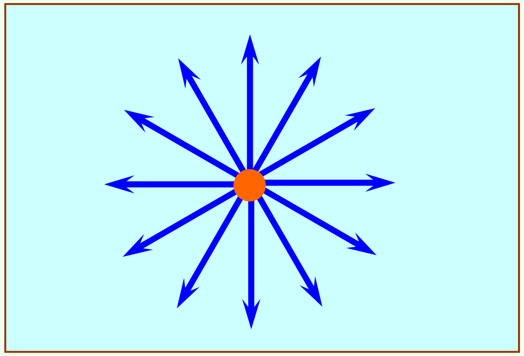
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)d\tau'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)d\tau'=0$$

静电场的性质2: $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=?$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)d\tau'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)d\tau'$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho\left[-4\pi\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\right]d\tau'=\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{\varepsilon_0}$$

散源−无旋场



$\because \quad \nabla\times\boldsymbol{E}=0$

引入电位（电势）： $\boldsymbol{E}=-\nabla U$

已知电场求电位： $\int_{P_0}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_0}^{P}\left(-\frac{dU}{dn}\hat{n}\right)\cdot d\vec{l}=-\int_{P_0}^{P}dU=-U+U_0$

参考点处电位

$\because \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}$

解非齐次偏微分方程

先求电位再求电场： $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(-\nabla U)=\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}\Rightarrow\boxed{\nabla^2U=-\dfrac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0}}$

引入电通量密度： $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho(\boldsymbol{r}')$ 微分形式

$\oint\boldsymbol{D}\cdot ds=Q$ 积分形式

安培定律

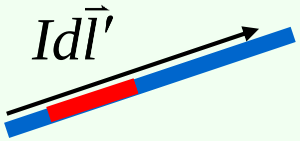
电流元之间的作用力：$\boldsymbol{F}_{21} = \oint_{l_2}\oint_{l_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\boldsymbol{l}_2 \times \left(I_1 d\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{21}\right)}{R_{21}^3}$

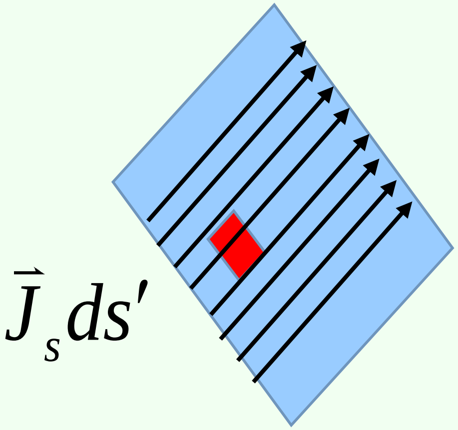
引入磁感应强度：$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{\left(I_1 d\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{R}_{21}\right)}{R_{21}^3}$

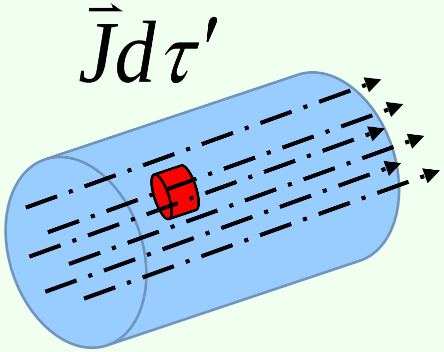
$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}'\right)$

推广为连续电流分布形式：$I d\boldsymbol{l}' \to \frac{I}{ds'} d\boldsymbol{l}' ds' \to \boldsymbol{J} d\tau',\quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{R}}{R^3} d\tau'$

体电流 $\boldsymbol{J}\left(x', y', z'\right)$







安培定律

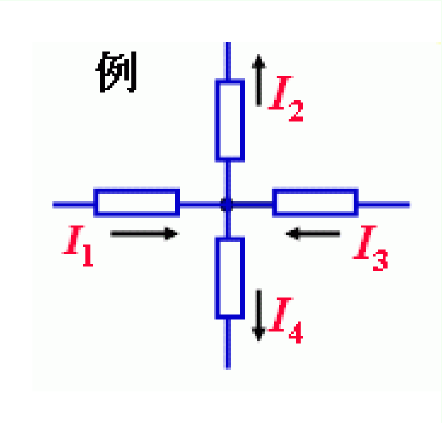
电荷守恒定律:

$$\nabla'\cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \int_{V} \nabla'\cdot \boldsymbol{J}dv = \int_{S} \boldsymbol{J}\cdot d\vec{s} = -\int_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}dv$$

$$\left(\int_{S} \boldsymbol{J}\cdot d\vec{s}\right)d\,t = -d\left(\int_{V} \rho dv\right)$$

恒定电流: $\boldsymbol{J}\left(x',y',z'\right)=\vec{C}$

$$\nabla'\cdot \boldsymbol{J} = 0$$



$$I_2 + I_4 = I_1 + I_3$$

基尔霍夫电流定律

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

恒定磁场的性质1: $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=?$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right)d\tau'$$

其中: $\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right)=-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\nabla\times\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\cdot\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=0$

恒定磁场的性质2: $\nabla\times\boldsymbol{B}=?$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right)d\tau'$$

其中: $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=-\nabla\times\left(\boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right)$

其中: $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)=\frac{\nabla\times\boldsymbol{J}}{R}+\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{J}\Rightarrow\boldsymbol{J}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)$ 带入上式

$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right)=\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)-\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)$ （矢量拉普拉斯算子定义）

磁感应强度的旋度变为：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)d\tau'$$

第一项：

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla\left(\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)\right)d\tau'=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{\tau'}\left(\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)\right)d\tau'$$

其中：

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)=\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}}{R}+\boldsymbol{J}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\boldsymbol{J}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\boldsymbol{J}\cdot\frac{\hat{R}}{R^2}$$

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{J}=0$$

考虑到：

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)=\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}}{R}+\boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\boldsymbol{J}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=-\boldsymbol{J}\cdot\frac{\hat{R}}{R^2}$$

仅当恒定电流时成立。

因此：

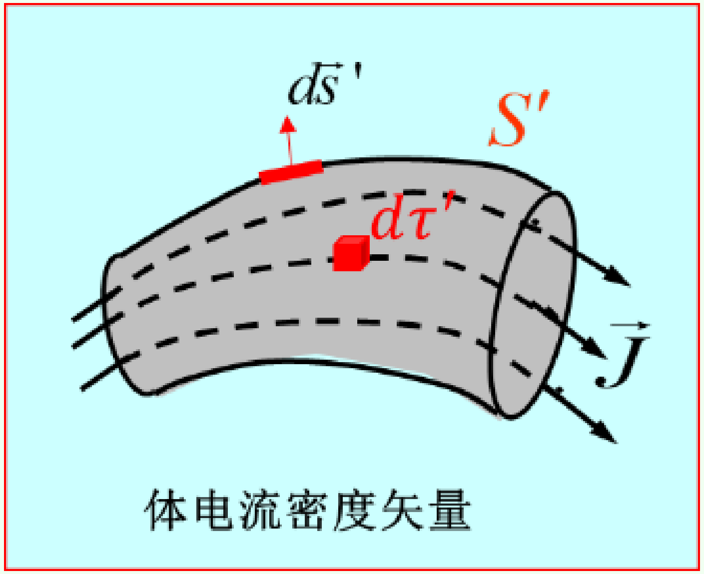
$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)=-\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)$$

第一项变为：

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{\tau'}\left(\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)\right)d\tau'$$

利用散度定理将体积分转换为面积分:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{\tau'}\left(\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)\right)d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_{S'}\frac{\boldsymbol{J}}{R}\cdot d\boldsymbol{s}'$$



体电流密度矢量

S’表示包含所电流在内的外表面.

则在此外表面上，电流一定为切向。

$$\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}'\equiv 0$$

第一项：零。

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\cancel{\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)}d\tau'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)d\tau'$$

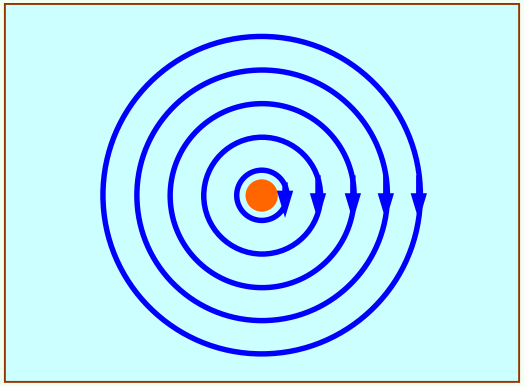
第二项:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{J}}{R}\right)d\tau'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\boldsymbol{J}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)d\tau'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\boldsymbol{J}\left(-4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right)d\tau'=\mu_0\boldsymbol{J}\left(\mathbf{r}\right)$$

$$\therefore\quad\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

漩涡源–无散场



引入磁场强度: $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$ $\quad\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\nabla\times\vec{H}\neq0$$

法拉第感应定律

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{d\,t}\int_s \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_s \boldsymbol{B}\cdot\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} + \int_s -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$$

动生　　感生

仅考虑感生电动势: $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_s -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$

利用斯托克斯定理，将法拉第感应定律写为微分形式:

$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$　　磁场变化产生的电场为非保守场。

麦克斯韦之前电与磁问题的梳理：

库伦定律：$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$

安培定律：$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$

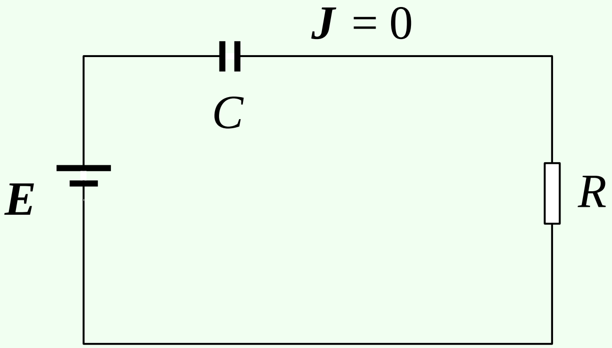
法拉第感应定律：$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$

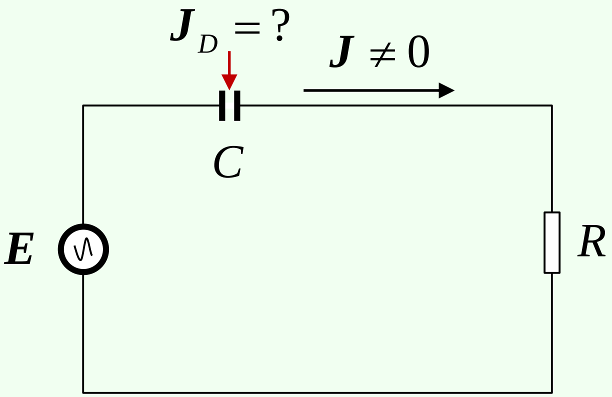
电荷守恒定律：$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

欧姆定律：$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$

矛盾： $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(t)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}(t)=0\neq-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

矛盾的实际表现实例:





麦克斯韦引入位移电流对安培定律提出修正:

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_D$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_D\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_D=0\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{J}_D=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

代入库伦定律: $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_D=\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{D}}{\partial t}=\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\Rightarrow\boldsymbol{J}_D=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$

麦克斯韦方程组形式:

库伦定律: $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

安培定律: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

法拉第感应定律: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

本构关系:

$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$

$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$

麦克斯韦方程组还存在不对称性: 磁荷? 磁流?

库伦定律: $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m$

安培定律: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

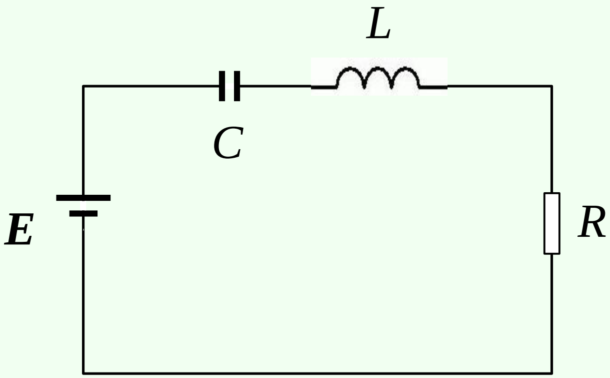
法拉第感应定律: $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{M} - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

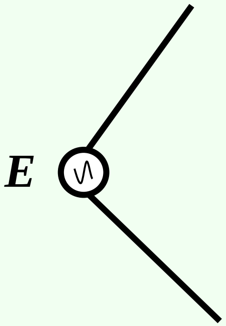
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

电和磁转换的条件: 电场和磁场的变化频率

当电场和磁场的变化频率比较低，电磁形成的是**路**（circuit）；只有在变化频率很高的情况下，电磁波会夺路而走，形成自由的**波**（wave）。



路：受约束的电磁波



波：开放的路

内　容

麦克斯韦方程组的频域形式

时变电磁场随时间的变化规律可以有多种形式：

正弦波、方波、锯齿波、脉冲……

任意时变函数可以用展开为展开为傅里叶变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

因此，时变电磁场可以通过对正弦电磁场的数学变换来进行分析和求解。

1. 正弦电磁场的复数表示法

基础：正弦电磁场的时间变量和空间坐标变量可以进行分离

约定：用余弦函数表示正弦电磁场

□ 振幅

$$\vec{E}(r,t)=\hat{x}E_x(\vec{r},t)+\hat{y}E_y(\vec{r},t)+\hat{z}E_z(\vec{r},t)$$

$$=\hat{x}E_{0x}(\vec{r})\cos[\omega t+\phi_x(\vec{r})]+\hat{y}E_{0y}(\vec{r})\cos[\omega t+\phi_y(\vec{r})]+\hat{z}E_{0z}(\vec{r})\cos[\omega t+\phi_z(\vec{r})]$$

其中 $E_{0x}(\vec{r}),\ E_{0z}(\vec{r}),\ E_{0y}(\vec{r})$ 振幅

$\varphi_x(\vec{r}),\ \varphi_y(\vec{r}),\ \varphi_z(\vec{r})$ 初位相

只与位置有关

$\omega=2\pi f$ 角频率 单位：$\boldsymbol{rad/s}$

f 频率 单位：$\boldsymbol{Hz}$ 或 $\boldsymbol{s^{-1}}$

□ **复振幅**　　利用欧拉公式 $e^{jx}=\cos x+j\sin x$，则有

$$E_x(\vec{r},t)=\hat{x}E_{0x}(\vec{r})\cos[\omega t+\phi_x(\vec{r})]=\mathrm{Re}[E_{0x}e^{j(\omega t+\phi_x)}]=\mathrm{Re}[E_{0x}e^{j\phi_x}e^{j\omega t}]$$

令 $E_x=E_{0x}e^{j\varphi_x}$，则表达式更为简洁 $E_x(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[E_xe^{j\omega t}]$

E_x称为复振幅，一般是坐标变量的复函数，包含着振幅和初相信息

□ **复矢量**

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\hat{x}\,\mathrm{Re}(E_xe^{j\omega t})+\hat{y}\,\mathrm{Re}(E_ye^{j\omega t})+\hat{z}\,\mathrm{Re}(E_ze^{j\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}[(\hat{x}E_x+\hat{y}E_y+\hat{z}E_z)e^{j\omega t}]$$

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right)=\hat{x}E_x+\hat{y}E_y+\hat{z}E_z$$

称为电场强度的复矢量，它的各分量就是每个瞬时分量的复振幅。

瞬时矢量与复矢量转换 $\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]$

★特别强调指出：

①复振幅和复矢量都只是场点坐标的函数或常量，因此在它们的表达式中不应出现时间变量 t；

②而瞬时场矢量或分量都是实数域内的函数，在它们的表达式中不能出现复数的标记 j。

例题：已知一电场的瞬时矢量为

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\hat{x}120\pi\cos[2\pi\times10^{6}t+\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)-\frac{\pi}{4}]$$

$$-\hat{z}240\pi\sin[2\pi\times10^{6}t+\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)+\frac{\pi}{6}]$$

写出它的复矢量。

解： 首先利用三角关系将电场瞬时矢量的 z 分量写成余弦函数

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\hat{x}120\pi\cos[2\pi\times10^{6}t+\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)-\frac{\pi}{4}]$$

$$-\hat{z}240\pi\cos[2\pi\times10^{6}t+\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)-\frac{\pi}{3}]$$

所以复矢量表达式为

$$\vec{E}(x,y,z)=\hat{x}120\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)-\frac{\pi}{4}]}-\hat{z}240\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(2x+\sqrt{3}y+z)-\frac{\pi}{3}]}$$

例题：已知一磁场分量的复振幅为

$$H_y = j120\pi\, e^{-j[\frac{\pi}{3}(x-\sqrt{2}y-z)+\frac{\pi}{4}]}$$

频率为 $f = 4\times 10^8\,\mathrm{Hz}$**，写成对应的瞬时表达式。**

解： 利用公式 $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ 将所给表达式写成模值和辐角的形式

$$H_y = 120\pi e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j[\frac{\pi}{3}(x-\sqrt{2}y-z)+\frac{\pi}{4}]} = 120\pi e^{-j[\frac{\pi}{3}(x-\sqrt{2}y-z)-\frac{\pi}{4}]}$$

对应的瞬时分量表达式为

$$H_y(x,y,z,t) = 120\pi\cos\left\{8\pi\times 10^8 t - [\frac{\pi}{3}(x-\sqrt{2}y-z)-\frac{\pi}{4}]\right\}$$

2. 麦克斯韦方程的复数形式

考察瞬时安培回路定律

$$\nabla\times\vec{H}(t)=\vec{J}(t)+\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}$$

利用复数表达式

$$\vec{H}(t)=\mathrm{Re}[\vec{H}e^{j\omega t}]\quad\vec{J}(t)=\mathrm{Re}[\vec{J}e^{j\omega t}]\quad\vec{D}(t)=\mathrm{Re}[\vec{D}e^{j\omega t}]$$

得

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\vec{H}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\vec{J}e^{j\omega t}]+\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}[\vec{D}e^{j\omega t}])$$

因为取实和微分可互换顺序，则

$$\mathrm{Re}\left[\vec{J}e^{j\omega t}\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{Re}(\vec{D}e^{j\omega t})\right]=\mathrm{Re}\left[\vec{J}e^{j\omega t}+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}e^{j\omega t})\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[(\vec{J}+j\omega\vec{D})e^{j\omega t}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\to j\omega}$$

因此可以得到安培回路定律的复数表示

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

这组复矢量的方程组称为麦克斯韦方程组的复数形式，或复麦克斯韦方程组。

★时域方法、频域方法

频域方法：首先求解复麦克斯韦方程组，得到所求的复矢量后，再利用瞬时矢量与复矢量的关系式得到瞬时场量。

时域方法：直接求解瞬时麦克斯韦方程组获得瞬时场量。

例题：假设真空中有一电场矢量为

$$E(\vec{r},t)=(2\hat{x}+3\hat{y})\cos(2\pi\times10^{8}t-\frac{2\pi}{3}z)$$

求磁场矢量 $\vec{H}(\vec{r},t)$

解：电场的复矢量为 $\vec{E}(\vec{r})=(2\hat{x}+3\hat{y})e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$

$\boxed{\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}}$ $\Rightarrow$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{\nabla\times\vec{E}(\vec{r})}{-j\omega\mu_0}=\frac{1}{-j\omega\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2e^{-j\frac{2\pi}{3}z} & 3e^{-j\frac{2\pi}{3}z} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{-j\omega\mu_0}[\hat{x}j2\pi e^{-j\frac{2\pi}{3}z}-\hat{y}\frac{4\pi}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}z}]=[-\hat{x}\frac{1}{40\pi}+\hat{y}\frac{1}{60\pi}]e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}\Big[\big(-\hat{x}\frac{1}{40\pi}+\hat{y}\frac{1}{60\pi}\big)e^{-j\frac{2\pi}{3}z}e^{j2\pi\times10^{8}t}\Big]$$

$$=[-\hat{x}\frac{1}{40\pi}+\hat{y}\frac{1}{60\pi}]\cos(2\pi\times10^{8}t-\frac{2\pi}{3}z)$$

内　容

一． 几种重要的矢量场

二． 麦克斯韦方程组

三． 麦克斯韦方程组的频域形式

四． 电磁波的预言与验证

五． 电磁波问题的确定性表述

六． 电磁波的性质

电磁波的预言

1、瞬时波动方程

$$\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})=\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H})$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

同理可得 $\nabla^2\vec{H}=\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$

非齐次矢量波动方程

若媒质是 $\sigma=0$ 的非导电介质，则有

$$\nabla^2\vec{E}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{H}=\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

齐次矢量波动方程

★时变的电磁场是电磁波。可由波动方程求解。

2、矢量亥姆霍兹方程（复波动方程）

讨论范围：均匀媒质无源区域

在时谐时情况下，可得到复矢量的波动方程，称为亥姆霍兹方程。

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = j\mu\sigma\omega \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\omega^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

令 $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma$

同理可得 $$\left.\begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{array}\right\}$$ 矢量亥姆霍兹方程

3. 亥姆霍兹方程的一般解

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

其中 $k = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma}$ k 称为波数、也成为传播常数。

直角坐标系中，电磁场复矢量各分量满足标量齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E_i + k^2 E_i = 0 \quad \nabla^2 H_i + k^2 H_i = 0 \quad i = x, y, z$$

以 x 分量为例，利用分离变量法求解，令

$$E_x = f(x) g(y) h(z)$$

则有
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_x + k^2 E_x = 0$$

带入后等式两边除以 $f(x) g(y) h(z)$ 得:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{h(z)} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

引入分离常数

$$\underset{\begin{array}{c}\downarrow\\ -k_x^2\end{array}}{\boxed{\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}}+\underset{\begin{array}{c}\downarrow\\ -k_y^2\end{array}}{\boxed{\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}}}+\underset{\begin{array}{c}\downarrow\\ -k_z^2\end{array}}{\boxed{\frac{1}{h(z)}\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2}}}+k^2=0$$

分离常数间满足约束关系：$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$

于是得到三个独立的二阶全微分方程

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+k_x^2 f(x)=0$$

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2}+k_y^2 g(y)=0$$

$$\frac{d^2 h(z)}{dz^2}+k_z^2 h(z)=0$$

三个方程的解分别为

$$f(x)=A^+e^{j\,k_x\,x}+A^-e^{-j\,k_x\,x}$$

$$g(y)=B^+e^{j\,k_y y}+B^-e^{-j\,k_y y}$$

$$h(z)=C^+e^{j\,k_z\,z}+C^-e^{-j\,k_z\,z}$$

$$f(x) = A^+ e^{j k_x x} + A^- e^{-j k_x x}$$

$$g(y) = B^+ e^{j k_y y} + B^- e^{-j k_y y}$$

$$h(z) = C^+ e^{j k_z z} + C^- e^{-j k_z z}$$

考虑到A^+，A^-，k_x等参数也是具体问题的待定参数，故将以上三式指数上的“±”取成“－”并不失普遍意义。 “+”表示沿-z传播的电磁波； “－”表示沿+z传播的电磁波。

由此得到电场分量E_x的复振幅表达式

$$E_x = f(x)\,g(y)\,h(z) = E_{0x} e^{-j\,(k_x\, x + k_y\, y + k_z\, z)}$$

式中 $E_{0x} = A^- B^- C^-$，是复常数，可表示为$E_{0x} = E_{xm} e^{j\varphi_x}$

令 $\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$ 任意场点$P(x,y,z)$的位置矢量为 $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

所以复振幅表示为 $E_x = E_{0x} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = E_{xm} e^{j\phi_x} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

将各电场分量矢量相加，就得到电场强度的复矢量表达式

$$\vec{E}=\hat{x}E_x+\hat{y}E_y+\hat{z}E_z=(\hat{x}E_{0x}+\hat{y}E_{0y}+\hat{z}E_{0z})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

其中 $\vec{E}_0=\hat{x}E_{xm}e^{j\varphi_x}+\hat{y}E_{ym}e^{j\varphi_y}+\hat{z}E_{zm}e^{j\varphi_z}$表示坐标原点处的电场复矢量。

利用电场的复矢量可以求得瞬时值

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}]$$

讨论一个最简单的情况： $\varphi_x=0$ $\vec{E}_0=\hat{x}E_{xm}$ $\vec{k}=\hat{z}k$

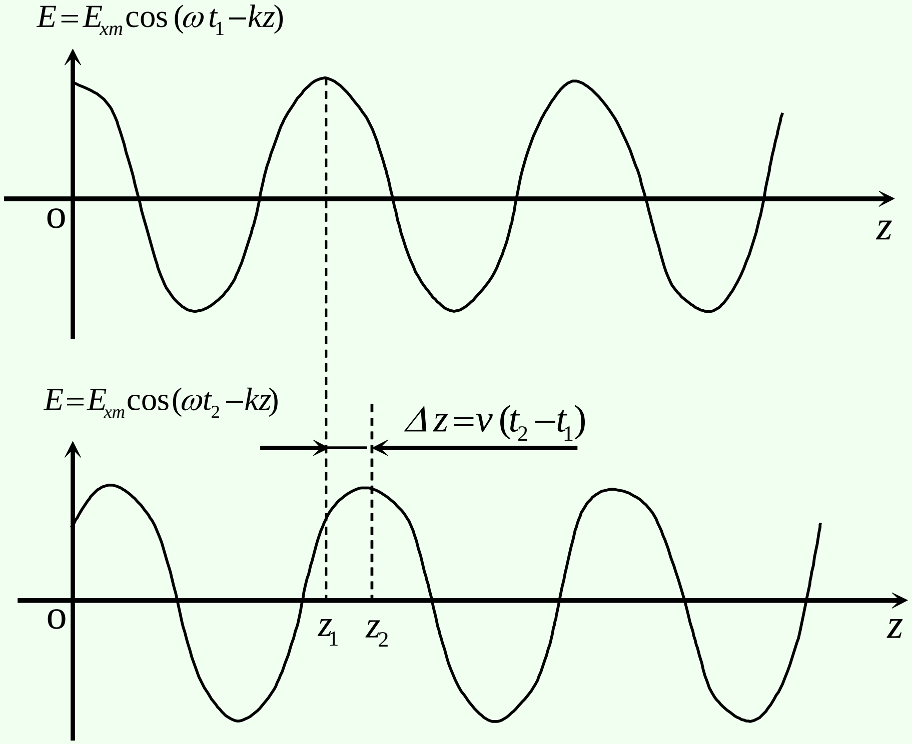
并且媒质是无耗的，此时 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

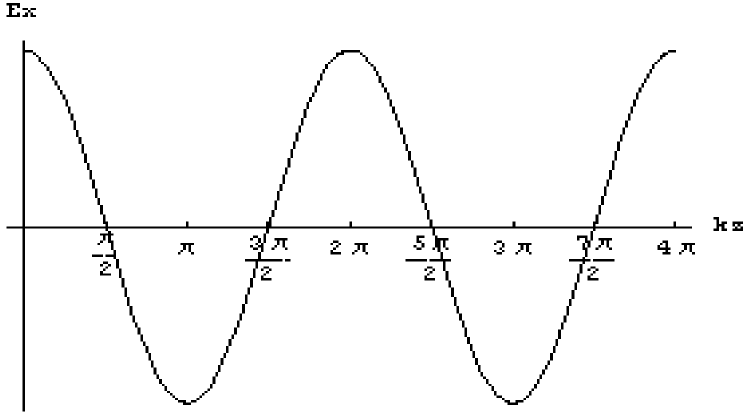
于是电场的瞬时表达式为

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\hat{x}E_{xm}e^{-jkz}e^{j\omega t}]=\hat{x}E_{xm}\cos(\omega t-kz)$$

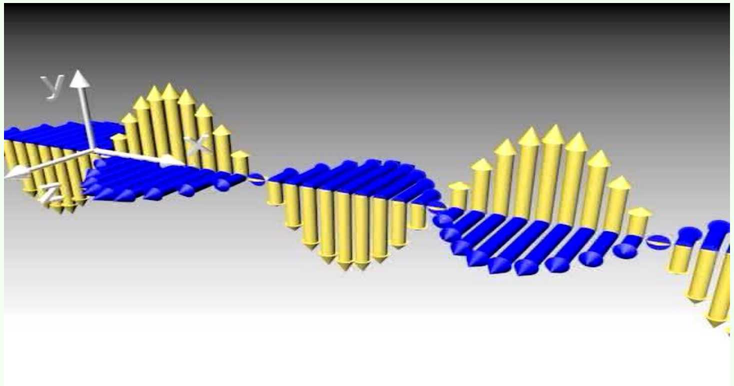
$\vec{E}(z,t)=\hat{x}E_{xm}\cos(\omega t-kz)$代表着一个向 $\hat{z}$方向传播的电磁波。

$$k=\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}=\frac{\omega}{c}\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$





$E_{1x}=E_m\cos(\omega t-kz)$ 的波形



经典的习题： 判断下述矢量是否满足无源真空中的麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

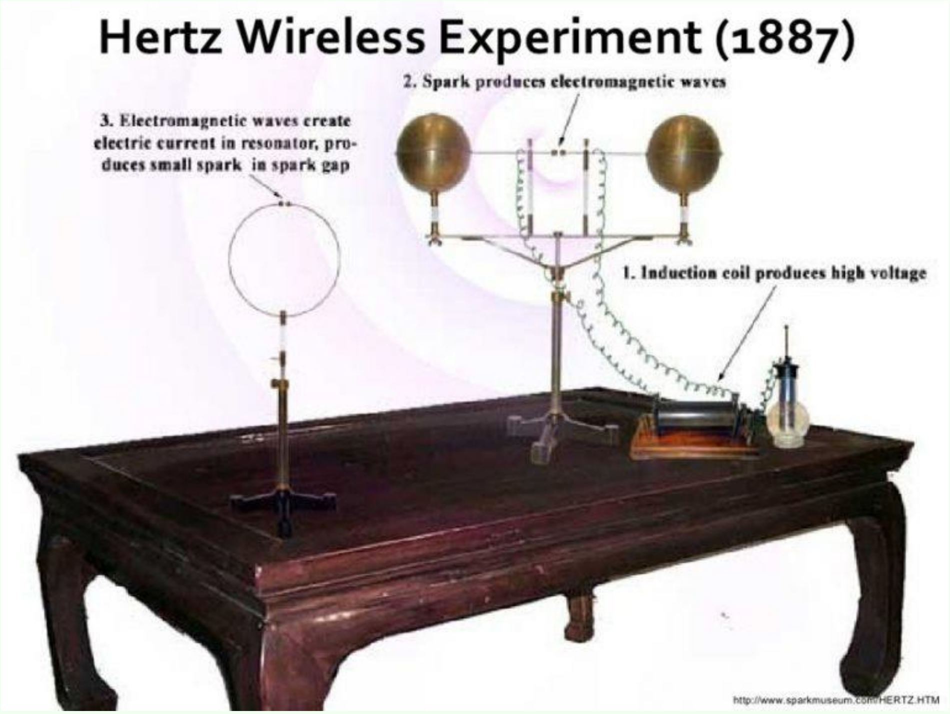
(1) $\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z \right)$

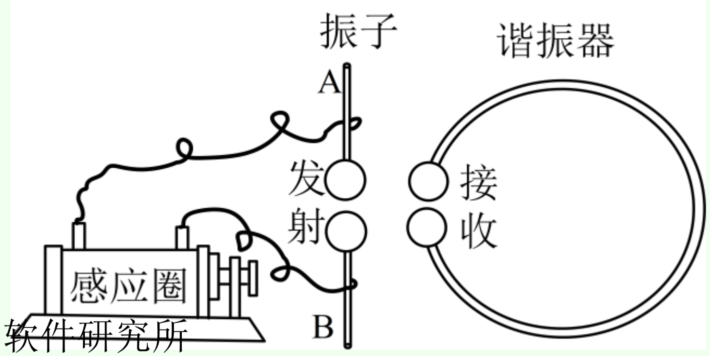
(2) $\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} z \right)$

(3) $\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x \right)$

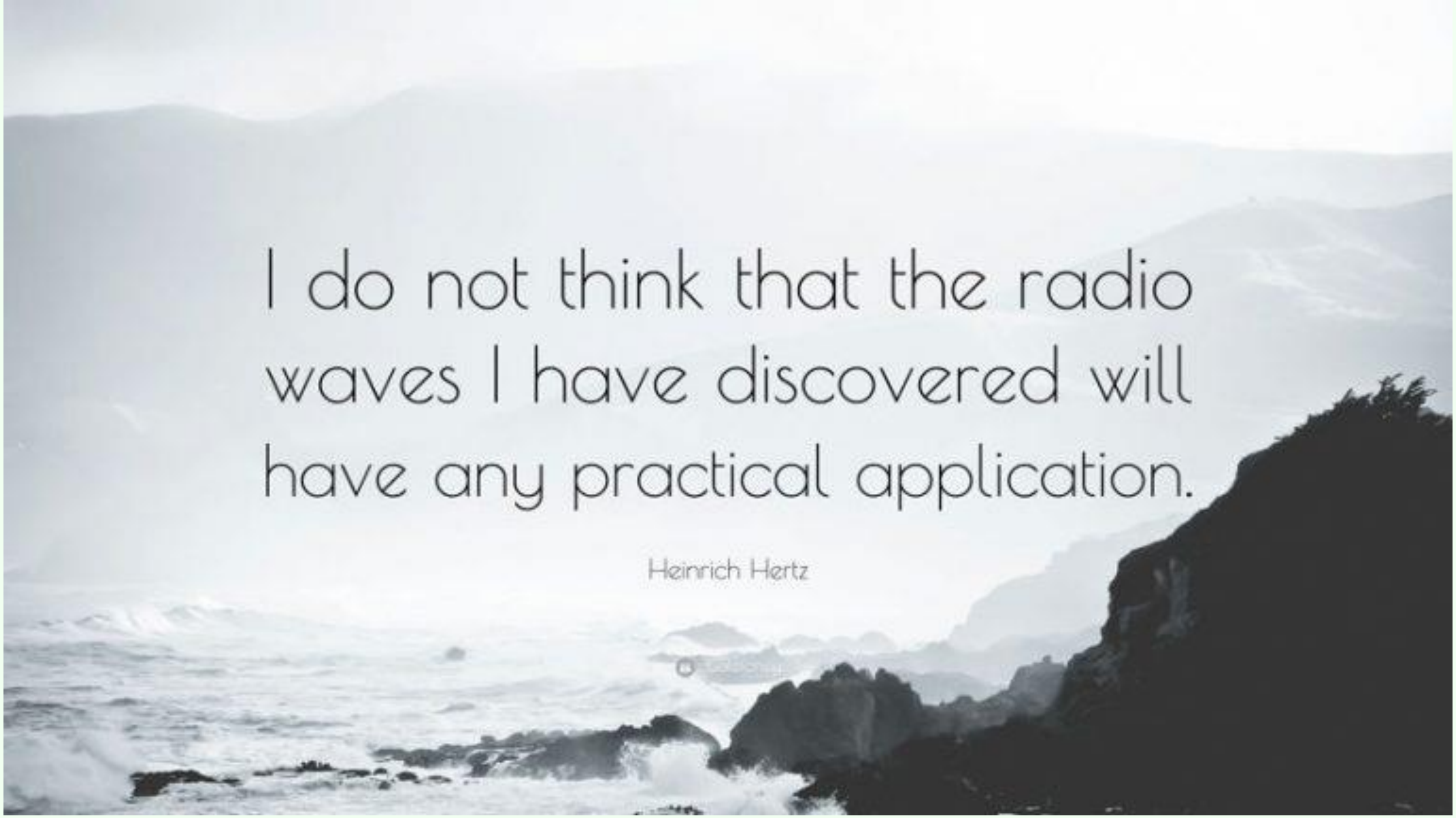
电磁波的验证


Heinrich Rudolf Hertz
Learning History


Hertz Wireless Experiment (1887)
2. Spark produces electromagnetic waves
3. Electromagnetic waves create electric current in resonator, produces small spark in spark gap
1. Induction coil produces high voltage
http://www.sparkmuseum.com/HERTZ.HTM


振子
谐振器
A
发
射
接
收
感应圈
B


J1206-1型电子感应圈



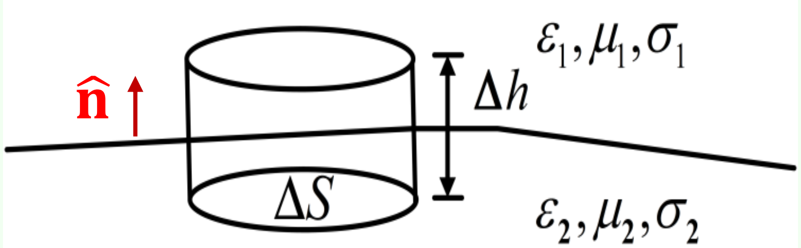
I do not think that the radio waves I have discovered will have any practical application.

Heinrich Hertz

It's of no use whatsoever ... this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right— we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there.

内　容

■ 电位移矢量D的边界条件



边界条件的面积分回路示意图

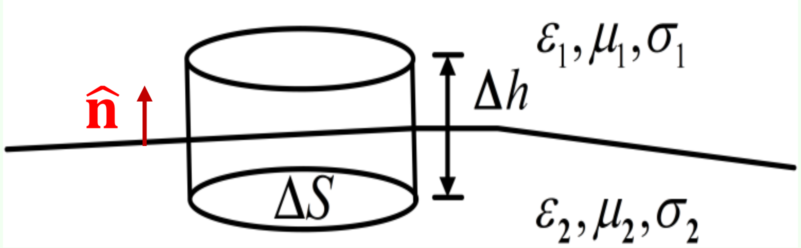
麦克斯韦方程中的库伦定律应用于此扁圆柱形闭合面

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_V \rho \cdot dV$$

$\Delta h \to 0$

左边: $$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{Top} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{bottom} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}$$

右边: $$\int_V \rho \cdot dV = \int_{\Delta S} \rho_{eS} \cdot dS$$



$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{Top}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{bottom}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}$$

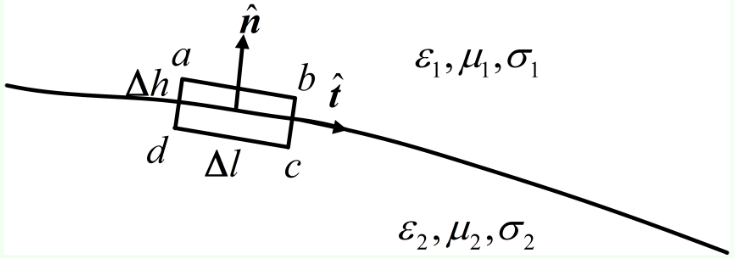
ΔS 足够小，故可认为穿过此面积的电通量密度为常数

$$\boldsymbol{D}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\Delta S + \boldsymbol{D}_2\cdot\left(-\hat{\boldsymbol{n}}\right)\Delta S = \rho_{eS}\Delta S$$

$$\left(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \rho_{eS} \qquad D_{1n} - D_{2n} = \rho_{eS}$$

说明：当在存在面电荷的分界面两端电位移矢量的法向分量是不连续的。

■ 磁场强度*H*的边界条件



边界条件的线积分回路示意图

将麦克斯韦方程中安培定律的积分形式应用于此矩形回路

$$\oint_{abcda} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_b^c \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_d^a \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{s}$$

$\hat{s} = \hat{n}\times\hat{t}$ 的方向与abcda回路成右手螺旋关系。

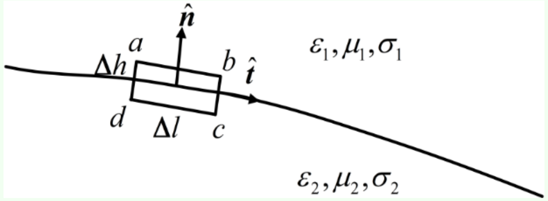
由于矩形回路宽度趋近于零 ， H又为有限量

$$bc = da = \Delta h \to 0$$

因此: $\oint_{abcda} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \lim\limits_{\Delta h \to 0} \left[\int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s} \right]$

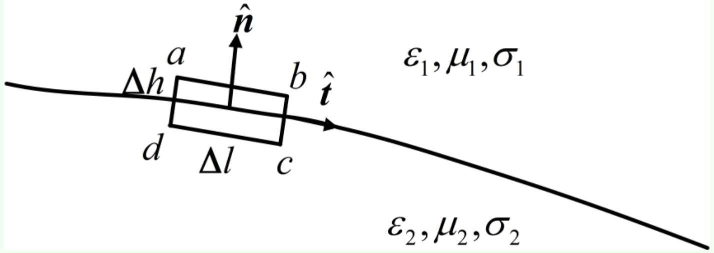
右边第一项: $\lim\limits_{\Delta h \to 0} \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{s} = \lim\limits_{\Delta h \to 0} \int_S \boldsymbol{J} \cdot \left(\hat{n} \times \hat{t} \Delta h \right) dl = \int_{\Delta l} \underline{\boldsymbol{J}_s} \cdot \left(\hat{n} \times \hat{t} \right) dl$

由于电通量密度的变化率 $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为有限值，因此 $\lim\limits_{\Delta h \to 0} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$



因此: $\oint_{abcda} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_c^d \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\Delta l} \boldsymbol{J}_s \cdot \left(\hat{n} \times \hat{t} \right) dl$

矢量表示: $\int_{\Delta l} \left(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 \right) \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl = \int_{\Delta l} \boldsymbol{J}_s \cdot \left(\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{t}} \right) dl$



$$\int_{\Delta l}(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl = \int_{\Delta l}\boldsymbol{J}_s\cdot(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{t}})dl = \underline{\int_{\Delta l}\hat{\boldsymbol{t}}\cdot(\boldsymbol{J}_s\times\hat{\boldsymbol{n}})dl}$$

对于任意$\hat{\boldsymbol{t}}$都成立，因此: $\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_s\times\hat{\boldsymbol{n}}$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s \qquad H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

可见，在存在面电流的分界面两端，磁场强度的切向分量是不连续的。

同理，应用麦克斯韦另外两个方程的积分形式可得关于E 和B的边界条件：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

⇒

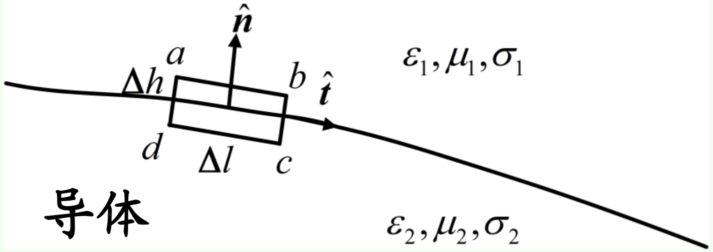
$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2\right)=\boldsymbol{J}_s$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\right)=0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2\right)=\rho_s$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2\right)=0$$

导体分界面上的边界条件



由于完全导体中电磁场为零，因此:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2\right)=\boldsymbol{J}_s \qquad \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2\right)=0 \qquad \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2\right)=\rho_s \qquad \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_s$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2\right)=0 \qquad \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

无穷远处的边界条件

求解域为无限大空间（例如第三、四章要讲述的辐射和散射问题），在无穷远处的边界条件为

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\boldsymbol{E}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}\right]=0$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\boldsymbol{H}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}\right]=0$$

对于该形式的电磁波是否满足上述条件？

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

推导一下： $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ $\nabla\times\vec{E}=-j\vec{k}\times\vec{E}$

$$\nabla\times\vec{E}=\nabla\times(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\times\vec{E}_0+(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0$$

$$\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r}\right)=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\left(-j(k_x x+k_y y+k_z z)\right)$$

$$=(-jk_x\hat{x}-jk_y\hat{y}-jk_z\hat{z})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=-j\vec{k}\,e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\nabla\times\vec{E}=(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0=-j\vec{k}\times\left(\vec{E}_0\,e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)=-j\vec{k}\times\vec{E}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left[-j\vec{k}\times\vec{E}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}\right]\neq 0$$

内　容

麦克斯韦方程组的频域形式如下：

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

带入本构关系得：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\sigma\boldsymbol{E}$$

令： $\boldsymbol{J}_e=\left(\sigma+j\omega\varepsilon\right)\boldsymbol{E}=y\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{M}=j\omega\mu\boldsymbol{H}=z\boldsymbol{H}$$

将感应电磁流与外加电磁流（即源）分开

$$-\nabla\times\boldsymbol{E}=z\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}^i$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=y\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}^i$$

外加电磁流

1. 唯一性定理

假设被曲面S包围的区域里有一组激励源 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{M}$

假设此问题有两组解: $\boldsymbol{E}^a \quad \boldsymbol{E}^b$

其差为: $\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^a - \boldsymbol{E}^b \qquad \delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^a - \boldsymbol{H}^b$

将解'a'满足的方程减去解'b'满足的方程

$$-\nabla\times\boldsymbol{E} = z\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}^i \Longrightarrow \nabla\times\delta\boldsymbol{E} = -z\ \delta\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = y\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}^i \Longrightarrow \nabla\times\delta\boldsymbol{H} = y\ \delta\boldsymbol{E}$$

由上两式计算得:

$$\delta\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\delta\boldsymbol{H}^* - \delta\boldsymbol{H}^*\cdot\nabla\times\delta\boldsymbol{E} = z\ \left|\delta\boldsymbol{H}\right|^2 + y^*\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^2$$

$$\delta\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\delta\boldsymbol{H}^{*}-\delta\boldsymbol{H}^{*}\cdot\nabla\times\delta\boldsymbol{E}=z\;\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^{2}+y^{*}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^{2}$$

$$\underline{\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{H}^{*}\times\delta\boldsymbol{E}\right)}=z\;\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^{2}+y^{*}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^{2}$$

⇩

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^{*}\right)+z\;\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^{2}+y^{*}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^{2}=0$$

对上式在S所围区域作积分，并利用高斯散度定律

$$\oiint_{S}\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^{*}\right)\cdot d\boldsymbol{S}+\int_{V}\left(z\;\left|\delta\boldsymbol{H}\right|^{2}+y^{*}\left|\delta\boldsymbol{E}\right|^{2}\right)d\tau\;=0$$

当区域边界的切向电场或切向磁场，或部分切向电场，其他部分为切线磁场确定时：

$$d\boldsymbol{S}\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^{*}\right)=\delta\boldsymbol{E}\cdot\underset{\text{切向磁场}}{\left(\delta\boldsymbol{H}^{*}\times d\boldsymbol{S}\right)}=\delta\boldsymbol{H}^{*}\cdot\underset{\text{切向电场}}{\left(d\boldsymbol{S}\times\delta\boldsymbol{E}\right)}=0$$

$$\oiint_{S}\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^{*}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

$$\int_V \left(z\;|\delta \boldsymbol{H}|^2 + y^*|\delta \boldsymbol{E}|^2 \right) d\tau \;=0$$ 分解为虚部和实部表示：

z=$j\omega\mu$

y=$(\sigma + j\omega\varepsilon)$

$$\int_V \left[\mathrm{Re}(z) \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 + \mathrm{Re}(y^*)|\delta \mathbf{E}|^2 \right] d\tau = 0$$

$$\int_V \left[\mathrm{Im}(z) \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 - \mathrm{Im}(y)|\delta \mathbf{E}|^2 \right] d\tau = 0$$

当媒质处处有耗时，$\int_V \left[\mathrm{Re}(z) \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 + \mathrm{Re}(y^*)|\delta \mathbf{E}|^2 \right] d\tau = 0$

$$\int_V \left[\sigma |\delta \mathbf{E}|^2 \right] d\tau = 0$$

$$\int_V \left[\mathrm{Im}(z) \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 - \mathrm{Im}(y)|\delta \mathbf{E}|^2 \right] d\tau = 0$$

$$\delta \mathbf{E} = 0$$

$$\delta \mathbf{H} = 0$$

当区域边界的切向电场或切向磁场，或部分切向电场，其他部分为切线磁场确定时，对于有耗媒质，此区域中的电磁场是唯一解。

当媒质处处无耗时：　$z=j\omega\mu$　　$y=j\omega\varepsilon$

$$\int_V \left[\mathrm{Im}(z) \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 - \mathrm{Im}(y) \left| \delta \mathbf{E} \right|^2 \right] d\tau = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_V \left[\omega\mu \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 - \omega\varepsilon \left| \delta \mathbf{E} \right|^2 \right] d\tau = 0$$

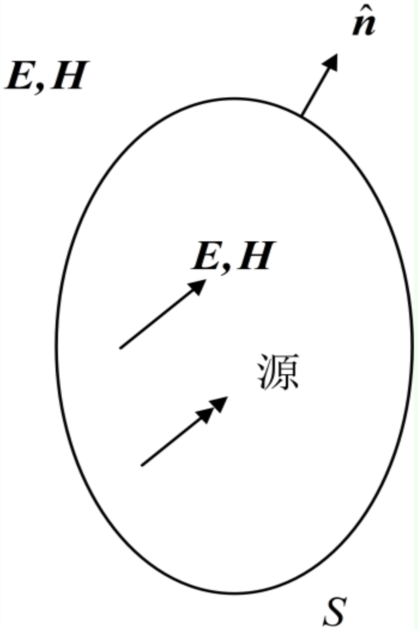
$$\Downarrow$$

$$\omega\mu \lfloor \delta \mathbf{H} \rfloor^2 = \omega\varepsilon \left| \delta \mathbf{E} \right|^2$$

当区域边界的切向电场或切向磁场，或部分切向电场，其他部分为切线磁场确定时，对于无耗媒质，此区域中的电磁场不唯一，由无数谐振解（电场能量和磁场能量相互转化）。

2. 等效原理

等效原理由唯一性定理引申得到。
用途：如何构造新问题保证和原问题的解一致。



原问题

划分区域，区域外为所关注的解空间。

目的：简化区域内的复杂电磁场问题的同时，保证区域外的电磁场不变。

为了方面问题的求解，引入假定的磁流和磁荷，使得麦克斯韦方程组具有严格对偶性。

$$
\begin{array}{ccc}
\nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J} & & \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J} \\
\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & \Longrightarrow & \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{M} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho & & \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 & & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\boldsymbol{m}}
\end{array}
$$

严格对偶性的麦克斯韦方程组对应的边界条件：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{M}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_{\boldsymbol{m}}$$

⇒

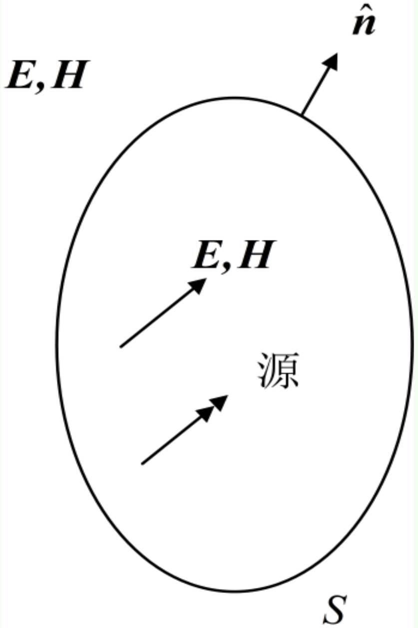
$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \left(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 \right) = \boldsymbol{J}_s$$

$$\left(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 \right) \times \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{M}_s$$

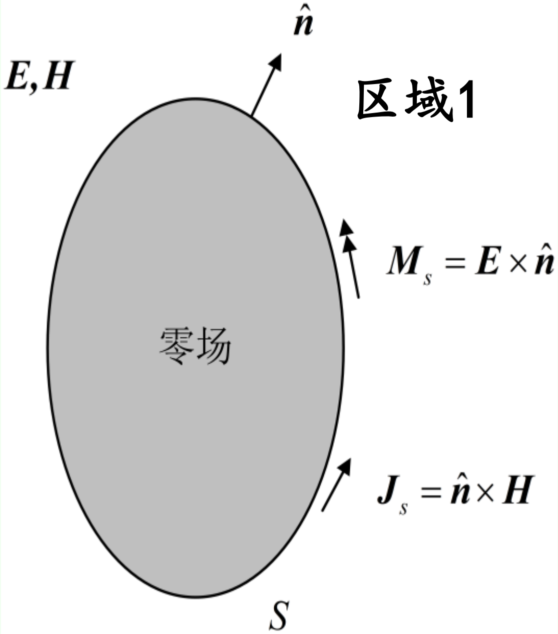
$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2 \right) = \rho_{es}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2 \right) = \rho_{ms}$$

形式一：设区域内的电磁场为零。



原问题



新问题

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_1-\cancel{\boldsymbol{H}}_2\right)=\boldsymbol{J}_s$$ ✓

$$\left(\boldsymbol{E}_1-\cancel{\boldsymbol{E}}_2\right)\times\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{M}_s$$ ✓

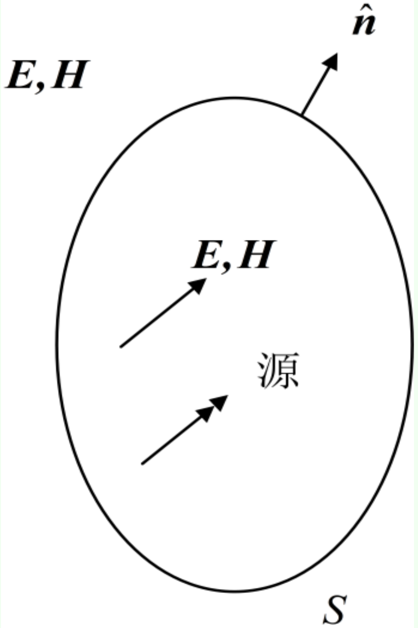
⇓

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_s$$

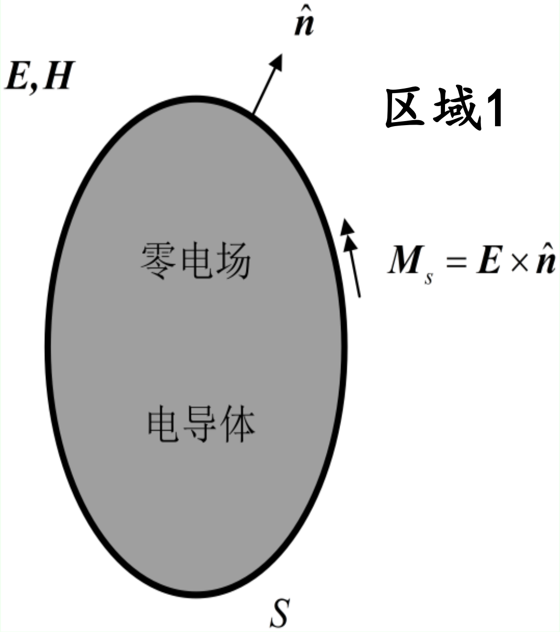
$$\boldsymbol{E}_1\times\hat{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{M}_s$$

因此仅需在S表面上强加边界电流源和磁流源即可保证区域外的解与原问题一致。

形式二：设区域内为理想电导体。



原问题



新问题

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2\right) = \boldsymbol{J}_s = 0$$

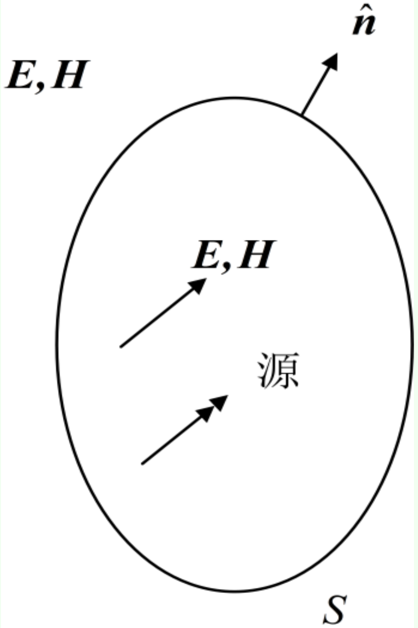
$$\left(\boldsymbol{E}_1 - \cancel{\boldsymbol{E}}_2\right)\times\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{M}_s \quad \checkmark$$

$$\Downarrow$$

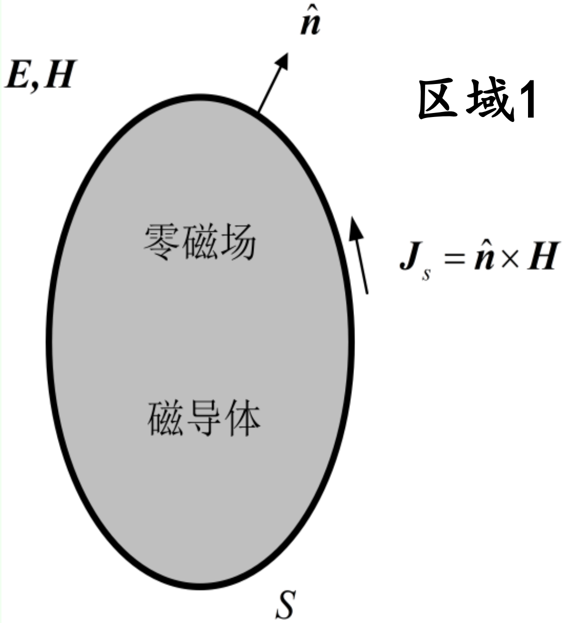
$$\boldsymbol{E}_1 \times\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{M}_s$$

因此仅需在S表面上强加边界磁流源即可保证区域外的解与原问题一致。

形式三：设区域内为理想磁导体。



原问题



新问题

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2$$

$$(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)\times\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{M}_s = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{H}_1 - \cancel{\boldsymbol{H}_2}) = \boldsymbol{J}_s \checkmark$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_s$$

因此仅需在S表面上强加边界电流源即可保证区域外的解与原问题一致。

3. 对偶原理

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H} - \boldsymbol{M}$$

$$\nabla \cdot \left(\mu \boldsymbol{H}\right) = \rho_m$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon \boldsymbol{E}\right) = \rho$$

将上述电磁场分成电荷和电流产生的部分和由磁流和磁荷产生的部分：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_e+\boldsymbol{E}_m \qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_e+\boldsymbol{H}_m$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_e=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_e+\boldsymbol{J}$$

电流源

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_e=-j\omega\mu\boldsymbol{H}_e$$

$$\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{H}_e\right)=0$$

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\boldsymbol{E}_e\right)=\rho$$

电荷源

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_m=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_m$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_m=-\boldsymbol{M}-j\omega\mu\boldsymbol{H}_m$$

磁流源

$$\nabla\cdot\left(\mu\boldsymbol{H}_m\right)=\rho_m$$

磁荷源

$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\boldsymbol{E}_m\right)=0$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_e\rightarrow\boldsymbol{H}_m\\ \boldsymbol{H}_e\rightarrow-\boldsymbol{E}_m\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{J}\rightarrow\boldsymbol{M}\\ \rho\rightarrow\rho_m\end{cases} \qquad \begin{cases}\varepsilon\rightarrow\mu\\ \mu\rightarrow\varepsilon\end{cases}$$

◆ 对偶原理的形式不是死板而唯一的。

◆ 利用对偶原理可以简化问题求解。例如，已经求解得到电荷及电流源产生的电磁场，可以直接利用对偶关系，得到磁荷和磁流产生的电磁场。

4. 互易原理

源a对源b的电磁反应的定义

$$\langle a,b\rangle = \iiint_V \left(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b\right) dV$$

下面证明在各向同性介质中的互易定律:

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$$

$$\underline{-\nabla\times\boldsymbol{E}_a = z\boldsymbol{H}_a + \boldsymbol{M}_a} \qquad -\nabla\times\boldsymbol{E}_b = z\boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{M}_b$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}_a = y\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{J}_a \qquad \underline{\nabla\times\boldsymbol{H}_b = y\boldsymbol{E}_b + \boldsymbol{J}_b}$$

$$-\left(\nabla\times\boldsymbol{E}_a\right)\cdot\boldsymbol{H}_b = \left(z\boldsymbol{H}_a + \boldsymbol{M}_a\right)\cdot\boldsymbol{H}_b \quad \boldsymbol{+} \quad \left(\nabla\times\boldsymbol{H}_b\right)\cdot\boldsymbol{E}_a = \left(y\boldsymbol{E}_b + \boldsymbol{J}_b\right)\cdot\boldsymbol{E}_a$$

$$-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b\right)=z\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{H}_b+\underline{\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b}+y\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b+\boldsymbol{J}_b\cdot\boldsymbol{E}_a$$

同理可得:

$$-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a\right)=z\boldsymbol{H}_a\cdot\boldsymbol{H}_b+\boldsymbol{M}_b\cdot\boldsymbol{H}_a+y\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b+\underline{\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b}$$

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b-\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b\right)&=-\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_b\times\mathbf{H}_a\right)-z\mathbf{H}_a\cdot\mathbf{H}_b-\mathbf{M}_b\cdot\mathbf{H}_a-y\mathbf{E}_a\cdot\mathbf{E}_b\\&+\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_a\times\mathbf{H}_b\right)+z\mathbf{H}_a\cdot\mathbf{H}_b+y\mathbf{E}_a\cdot\mathbf{E}_b+\mathbf{J}_b\cdot\mathbf{E}_a\\&=-\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_b\times\mathbf{H}_a\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_a\times\mathbf{H}_b\right)+\left(\mathbf{J}_b\cdot\mathbf{E}_a-\mathbf{M}_b\cdot\mathbf{H}_a\right)\end{aligned}$$

$$\left(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b-\boldsymbol{M}_a\cdot\boldsymbol{H}_b\right)-\left(\mathbf{J}_b\cdot\mathbf{E}_a-\mathbf{M}_b\cdot\mathbf{H}_a\right)=-\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_b\times\mathbf{H}_a\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_a\times\mathbf{H}_b\right)$$

体积分 散度定理

$$\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle=\oiint_S\left(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle=\oiint_S\left(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

◆对于导体边界条件： $\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=0$

$$\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b\cdot d\boldsymbol{S}=d\boldsymbol{S}\cdot\left(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b\right)=\boldsymbol{E}_a\cdot\left(\boldsymbol{H}_b\times d\boldsymbol{S}\right)=\boldsymbol{H}_b\cdot\underline{\left(d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}_a\right)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle=0$$

◆对于无限区域边界：

$$\lim_{r\to\infty}r\left[\nabla\times\boldsymbol{E}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}\right]=0$$

$$\lim_{r\to\infty}r\left[\nabla\times\boldsymbol{H}+jk_0\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}\right]=0$$