课程编号: 100171211　　　　　　　　　　　　　北京理工大学 2022-2023 学年第二学期

数值计算方法期末试题 A 卷

座号________ 班级______________ 学号______________ 姓名______________

答题要求: 共 10 个题目, 每题 10 分, 必须有步骤; 所有题目的答案都应写在答题纸上. 在具体的计算过程中, 可以保持结果为有理数, 根式或小数.

1. (1) 设准确值 $x>0$ 的近似值 x^* 的相对误差为 δ, 求 $\ln(x^*)$ 的绝对误差;

   (2) 设准确值 $x>1$ 的近似值 x^* 的相对误差为 10^{-6}, 求 $(x^*)^{100}$ 的相对误差.

$2A_0+2A_1$

$2A_0+2A$

$2A_3+$

装

2. 考虑线性方程组 $Ax=b$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&-2&2\\1&-2&4&-4\\-1&2&-4&7\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

   (1) 将 A 分解为 $A=L_CL_C^T$, 其中 L_C 为下三角矩阵且主对角线上的元素为正;

   (2) 将 A 分解为 $A=LDL^T$, 其中 L 为下三角矩阵且主对角线上的元素为 1, D 为对角矩阵;

订

   (3) 用改进平方根法求解 x: 即先求 $Ly=b$ 得到 y, 再求 $L^Tx=D^{-1}y$ 得到 x;

   (4) 求 $\mathrm{cond}_\infty(B)$, 其中 $B=\begin{bmatrix}100&99\\99&98\end{bmatrix}$.

$99 \times 99 = 9801$　　$199 \times 199 = 3961$

3. 考虑线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2=b_1\\a_2x_1-x_2=b_2\end{cases}$.

线

   (1) 写出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的计算公式;

   (2) 证明 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法同时收敛或者发散. -2

4. (1) 运用幂法 (Power Method) 求 $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$ 的按模最大的特征值, 取 $x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, 迭代两步;

   (2) 求矩阵 Q, R 使得 $QR=A=\begin{bmatrix}-8&0&3\\8&6&9\\-4&3&-15\end{bmatrix}$, 其中 Q 为正交矩阵, R 为上三角矩阵. -8

5. (1) 对于 $f(x)$ 的数据表

x_i	-1	1	2
y_i	-18	0	24

, 用 Lagrange 二次插值多项式近似计算

$f(0)$ 的值，写出截断误差 $R(x)=f(x)-L_2(x)$ 的表达式；

(2) 对于 $f(x)$ 的数据表

x_i	-1	1	2
y_i	9	5	12

，用 Newton 二次插值多项式近似计算 $f(0)$ 的值，写出截断误差 $R(x)=f(x)-N_2(x)$ 的表达式；

(3) 对于 $f(x)$ 的数据表

x_i	0	1	2
y_i	0	-1	-4
y_i'	0	-3	

，求至多四次 Hermite 插值多项式 $H(x)$，写出截断误差 $R(x)=f(x)-H(x)$ 的表达式.

6. (1) 已知数据组 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，对最小二乘拟合函数 $y=ax+\frac{b}{x}$ 写出 a, b (或者 a, b 的某种变换) 应满足的正则方程组；

(2) 已知数据组 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，对最小二乘拟合函数 $y=\frac{2}{3+ab^x}$ 写出 a, b (或者 a, b 的某种变换) 应满足的正则方程组.

7. (1) 求出过数据表

t_i	x	$x+h$	$x+2h$
y_i	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$

的二次 Lagrange 插值多项式 $L_2(t)$，用 $L_2'(x)$ 近似 $f'(x)$，给出截断误差 $f'(x)-L_2'(x)$ 的估计式；

(2) 假设 $f(x)\in C^2[-1,3]$. 根据 $f(x)$ 的数据表

x_i	-1	1	3
y_i	5	1	21

，用复化梯形公式近似计算 $I=\int_{-1}^{3}f(x)dx$ 得到 I_T，给出截断误差 $I-I_T$ 的估计式；

(3) 假设 $f(x)\in C^4[-1,3]$. 根据 $f(x)$ 的数据表

x_i	-1	1	3
y_i	5	1	21

，用 Simpson 公式近似计算 $I=\int_{-1}^{3}f(x)dx$ 得到 I_S，给出截断误差 $I-I_S$ 的估计式.

8. (1) 求出求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$，其中 $-1<x_1<x_2\le 1$，的待定参数，使其代数精度尽量高；

(2) 写出 Gauss-Lobatto 型求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f(-1)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+A_3f(1)$，其中 $-1<x_1<x_2<1$，需满足的非线性方程组，求出一组解，再用该公式求 $\int_{-1}^{1}75x^6dx$

的近似值，最后确定该公式的代数精度.

9. 考虑非线性方程 $f(x)=x^3-x^2-1=0$，记 $x_0=\dfrac{3}{2}$.　　X

(1) 对初始有根区间 $[1,2]$ 采用对分区间法 (bisection method) 求 $f(x)$ 在 x_0 附近的根，要求迭代 2 次；

$x^2 = \frac{1}{x-1}$

(2) 初值取为 x_0 的定点迭代 $x_{n+1}=g_1(x_n)$，$g_1(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$，计算迭代 1 次所得的 x_1，判断该迭代法的敛散性；

$x < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(3) 初值取为 x_0 的定点迭代 $x_{n+1}=g_2(x_n)$，$g_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，判断该迭代法的敛散性；

(4) 写出 Newton 法的迭代格式，初值取为 x_0，计算迭代 1 次所得的 x_1；证明存在 $\delta>0$ 使得对于属于区间 $\left(\dfrac{3}{2}-\delta,\dfrac{3}{2}+\delta\right)$ 的任意初值 x_0（$\frac{3}{2}$），Newton 迭代法都是收敛的.

(-2)

10. 考虑初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+3}{y}\\ y(0)=3\end{cases}$，$0\le x\le 1$.

(1) 取步长 $h=0.1$，计算用 Euler 法步进一次得到的 y_1；

(注意：只有本小题的 h 取具体的值，下面的其它小题中的 h 假定为足够小但不取具体的数值.)

(2) 先写出梯形法 (Trapezoidal Method) 的格式，后手动消除该格式中需要的“非线性方程求根”的迭代法，即把 y_{n+1} 用 x_n，x_{n+1} 和 y_n 表示出来；

(-4)

(3) 写出四阶 Runge-Kutta 法的格式.