内　容

一．平面波解

二．TEM波-横电磁波

三．波的极化

四．有耗媒质中的传播

五．群速

电磁波的亥姆霍兹方程

假定无源空间:

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla\times\boxed{\nabla\times\vec{E}}=-j\omega\mu\boxed{\nabla\times\vec{H}}=-j\omega\mu\sigma\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon-j\omega\mu\sigma$$

$$=\omega^2\mu\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

$$=\omega^2\mu\varepsilon_e$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}-k^2\vec{E}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \text{同理可得:}\quad&\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{aligned}\right\}\text{矢量亥姆霍兹方程}$$

亥姆霍兹方程的解

直角坐标系中，电磁场复矢量各分量满足标量齐次亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 E_i + k^2 E_i = 0$$

$$\nabla^2 H_i + k^2 H_i = 0 \qquad i = x, y, z$$

以 x 分量为例，利用分离变量法求解，得:

$$E_x = E_{0x} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

将各电场分量矢量相加，就得到**电场强度的复矢量表达式**

$$\vec{E} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z = (\hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y} + \hat{z}E_{0z})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_e$$

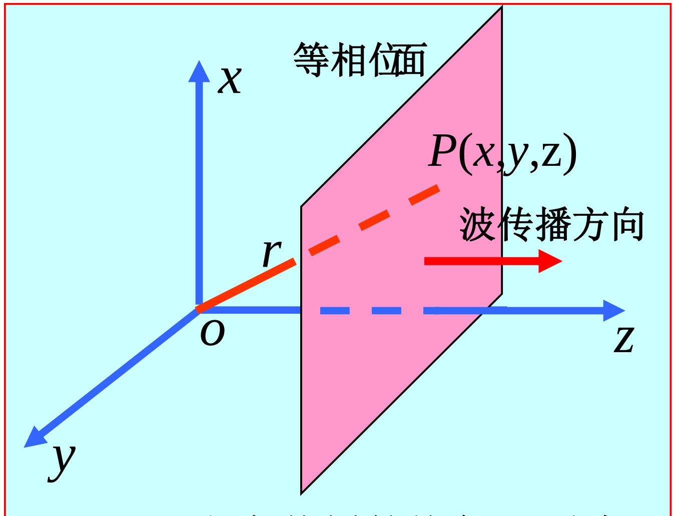
可见若 k 是实数，则 $\vec{k}$ 的方向就表示电磁波传播方向， $\vec{k}$ 称为**波矢量**。

$\vec{k}\cdot\vec{r} = C$ **等相位面为平面的电磁波称为平面波。**

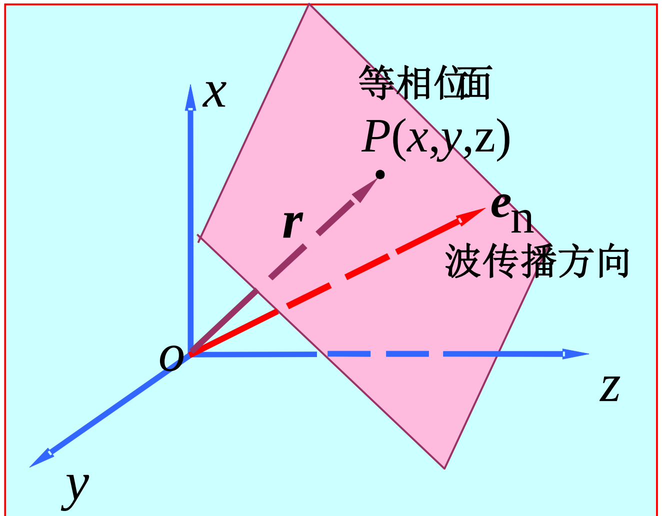
$\vec{k}\cdot\vec{r}=C$ 等相位面为平面的电磁波称为平面波。

$$zk_z=C$$

$$xk_x+yk_y+zk_z=C$$



沿＋z方向传播的均匀平面波



沿任意方向传播的均匀平面波

课堂练习：在空气中传播的均匀平面波的磁场强度的复数表示式为

$$\vec{H} = (-\vec{e}_x A + \vec{e}_y 2 + \vec{e}_z 4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(4x+3z)}$$

式中A为常数。求：（1）波矢量　；（2）波长和频率；（3）A的值

内　容

一．平面波解

二．TEM波-横电磁波

三．波的极化

四．有耗媒质中的传播

五．群速

电场与磁场之间的相互联系

已知电场求解磁场可以利用波动方程，也可以利用麦克斯韦方程。

由法拉第感应定律： $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$

$= 0$（与坐标无关）

其中 $\nabla\times\vec{E}=\nabla\times(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\boxed{\nabla\times\vec{E}_0}+(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0$

又因为 $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r}\right)=\nabla\left(-j(k_x x+k_y y+k_z z)\right)$

$$=(-jk_x\hat{x}-jk_y\hat{y}-jk_z\hat{z})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=-j\vec{k}\,e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

于是 $\nabla\times\vec{E}=(-j\vec{k}\,e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0=-j\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=-j\vec{k}\times\vec{E}$

所以磁场可以由电场求得 $\vec{k}\times\vec{E}=\omega\mu\vec{H}$

同理，根据安培-麦克斯韦定律： $\nabla\times\vec{H}=j\omega\vec{D}$

$$\Rightarrow -j\vec{k}\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$$

所以 $\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\varepsilon\vec{E}$

根据库伦定律： $\nabla\cdot\vec{E}=0$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})=e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\cdot\vec{E}_0+(\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})\cdot\vec{E}_0=-j\vec{k}\cdot\left(\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)=-j\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}\ \Longrightarrow\ \vec{k}\times\vec{H}=-\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\ \Longrightarrow\ \vec{k}\times\vec{E}=\omega\mu\vec{H}$$

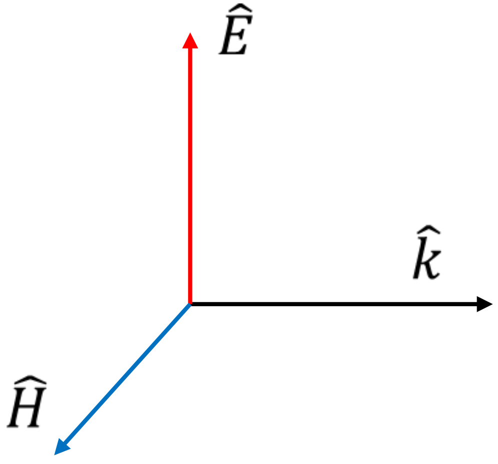
$$\nabla\cdot\vec{E}=0\ \Longrightarrow\ \vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0\ \Longrightarrow\ \vec{k}\cdot\vec{H}=0$$

$$\vec{H}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu}=\frac{\hat{k}\times\vec{E}}{\eta}\qquad \eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

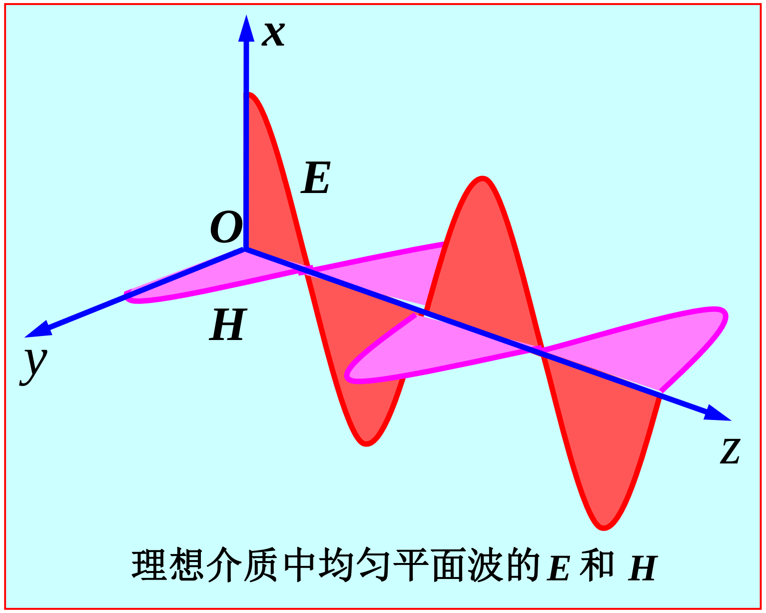
本征阻抗
（特征阻抗）

$$\hat{E}\times\hat{H}=\hat{k}\qquad \frac{|E|}{|H|}=\eta$$



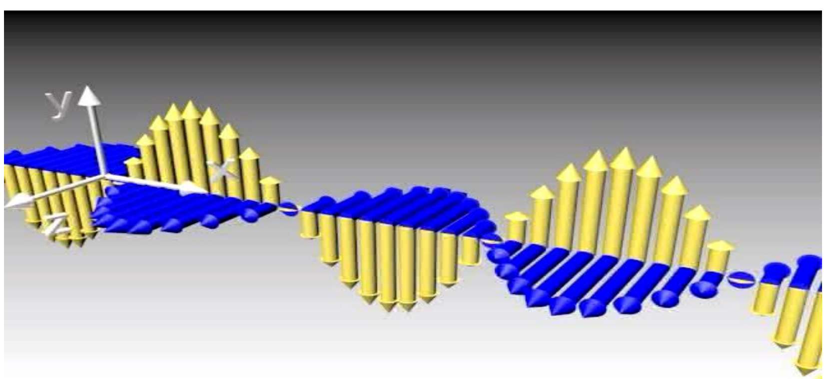
电磁波的电场矢量、磁场矢量与波矢量方向两两正交，且满足右手螺旋关系。电场和磁场只有垂直于传播方向的分量(称为横向分量)，而没有传播方向的分量（即纵向分量），因此又称为**横电磁波**，或简称**TEM波**。

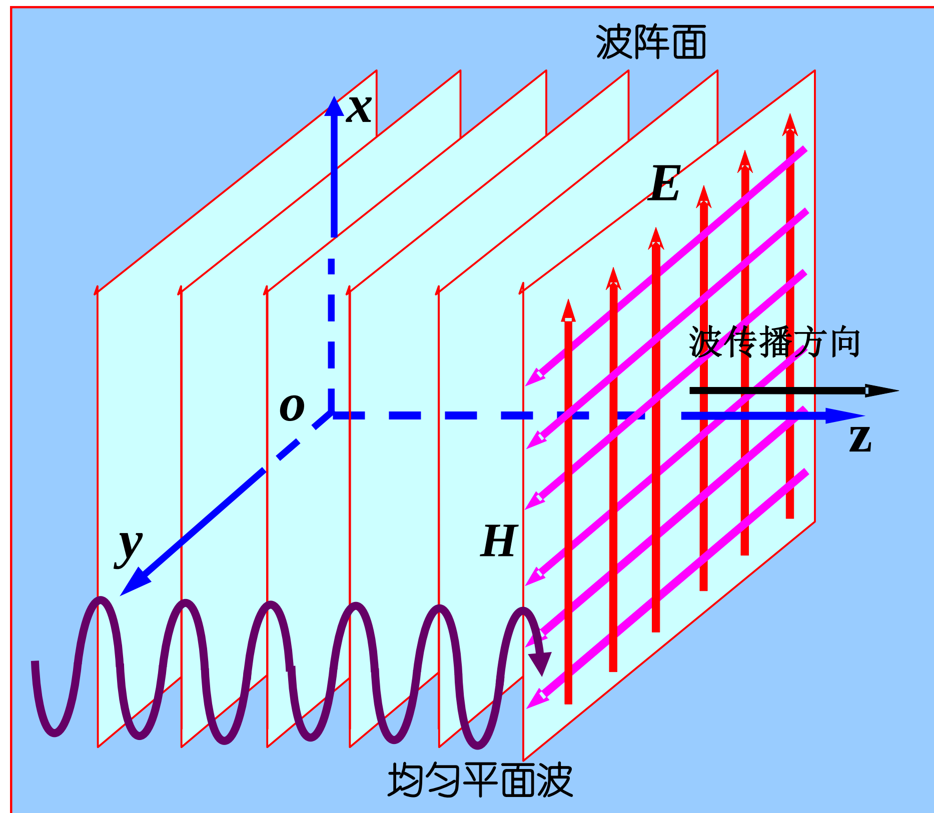
η数值等于电场强度与对应磁场强度的振幅之比，并且仅决定于媒质的电磁参数。真空中 $\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx 377\ (\Omega)$



$$\hat{E} \times \hat{H} = \hat{k} \qquad \frac{|E|}{|H|} = \eta$$

TEM波





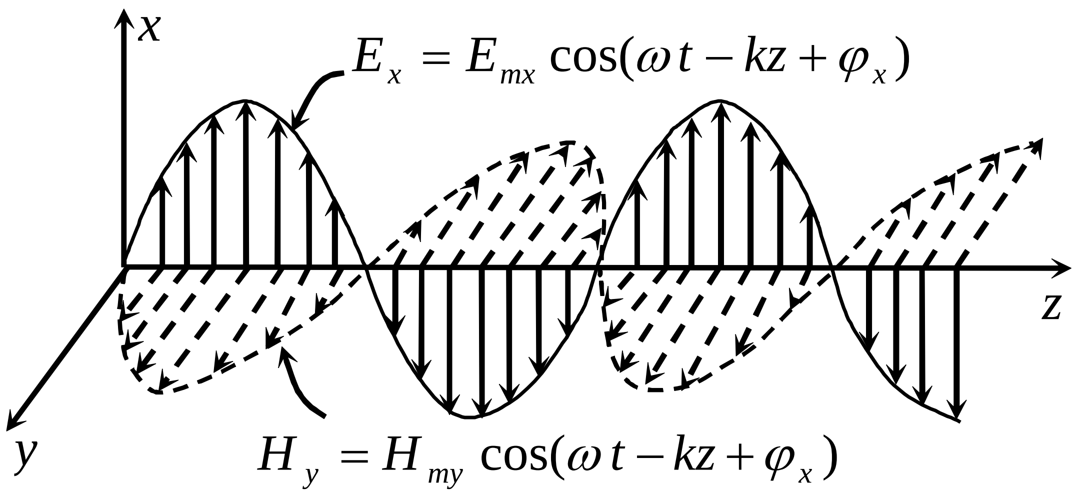
理想介质中的均匀平面电磁波

理想介质：没有极化损耗、磁化损耗和导电损耗的媒质

μ， ε是正实数， $\sigma=0$

$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是正实数，称为**相位常数**。

$\eta=\dfrac{\omega\mu}{k}=\dfrac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 是正实数，电场和磁场同相。 $\vec{H}=\dfrac{\hat{k}\times\vec{E}}{\eta}$



理想电介质中的均匀平面电磁波

相速

其曲线等值点（同相位点）的平移速度；**电磁波的等相位面在空间中的移动速度。**

$$E_x = E_{mx}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

由 $\omega t - kz = C$ ⇒ $\omega dt - k dz = 0$

故得到均匀平面波的相速为

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (m/s)$$

相速只与媒质参数有关，而与电磁波的频率无关

真空中：$v = c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\times 10^{-7}\times\dfrac{1}{36\pi}\times 10^{-9}}}$

$= 3\times 10^{8}\,(m/s)$ ★真空光速

电磁波的基本参数:

①相速度 $v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

②频率和角频率 f, $\omega=2\pi f$

③波长：传播方向上同一时刻的两个相邻等相位点之间的距离

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{2\pi}{k}$$

课堂练习： 设真空中一均匀平面电磁波的磁场瞬时矢量为

$$\vec{H}(\vec{r},t)=10^{-6}\left(\frac{3}{2}\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\right)\cos\left[\omega t+\pi\left(x-y-\frac{1}{2}z\right)-\frac{\pi}{4}\right]\quad (A/m)$$

求电磁波的传播方向 $\hat{n}$、频率f、电场$\vec{E}(\vec{r},t)$。

内　容

一．平面波解

二．TEM波-横电磁波

三．波的极化

四．有耗媒质中的传播

五．群速

电磁波的极化

电磁波的极化:

在电磁波的传播方向上任意一点，电场瞬时矢量尾端随时间的运动轨迹。

极化的形式:

①电场矢量尾端轨迹是**直线**，称为线极化波;

②电场矢量尾端轨迹是**圆**，　称为圆极化波;

③电场矢量尾端轨迹是**椭圆**，称为椭圆极化波;

以 $\hat{z}$ 方向的电磁波为例，将其电场分解为x，y两个方向的分量。

$$E_x(z,t) = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \phi_x) \qquad E_y(z,t) = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

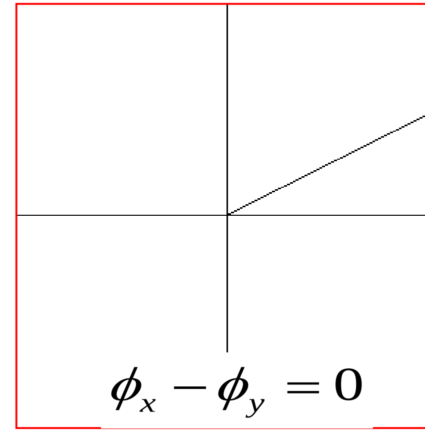
1-线极化波

- 条件: $\varphi_x - \varphi_y = 0$ 或 $\pm\pi$

- 合成波电场的模

随时间变化

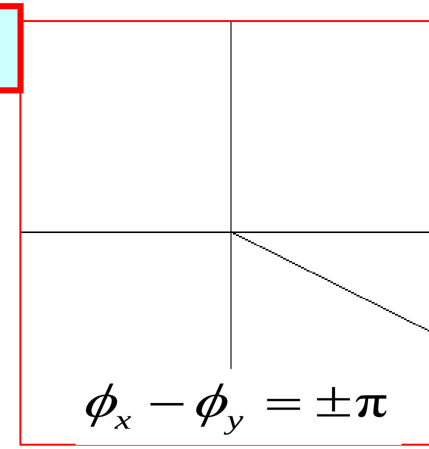
$$E = \sqrt{E_x^2(0,t) + E_y^2(0,t)} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos(\omega t + \phi_x)$$



- 合成波电场与+ x 轴的夹角

常数

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{E_y(0,t)}{E_x(0,t)} = \tan^{-1}\frac{\mathrm{E}_{ym}\cos(\omega t - \phi_x)}{\mathrm{E}_{xm}\cos(\omega t - \phi_y)} = \tan^{-1}\left(\pm\frac{\mathrm{E}_{ym}}{\mathrm{E}_{xm}}\right)$$



- 特点：合成波电场的大小随时间变化但其矢端，轨迹与x 轴的夹角始终保持不变。

- 结论：任何两个同频率、同传播方向且极化方向互相垂直的线极化波，当它们的相位相同或相差为 ± π 时，其合成波为线极化波。

2- 圆极化波

- 条件：$E_{xm}=E_{ym}=E_m; \phi_x-\phi_y=\pm\pi/2$

$$E_x(0,t)=E_m\cos(\omega t+\phi_x)$$

$$E_y(0,t)=E_m\cos(\omega t+\phi_x\mp\frac{\pi}{2})=\pm E_m\sin(\omega t+\phi_x)$$

常数

随时间变化

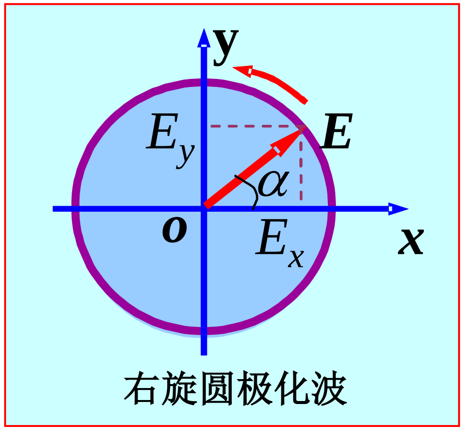
- 合成波电场的模 $E=\sqrt{E_x^2(0,t)+E_y^2(0,t)}=E_m$

- 合成波电场与$+x$轴的夹角 $\alpha=\arctan[\pm\tan(\omega t+\phi_x)]=\pm(\omega t+\phi_x)$

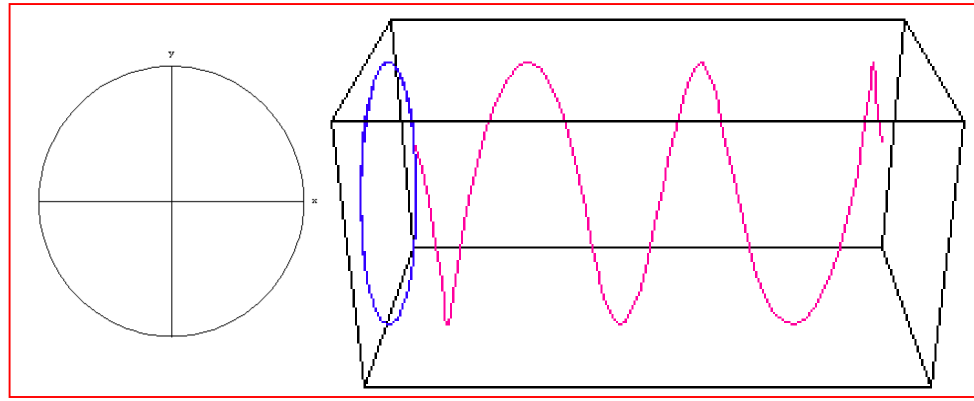
- 特点：合成波电场的大小不随时间改变，但方向却随时间变化，电场的矢端在一个圆上并以角速度ω旋转。

- 结论：任何两个同频率、同传播方向且极化方向互相垂直的线极化波，当它们的振幅相同、相位差为$\pm\pi/2$时，其合成波为圆极化波。

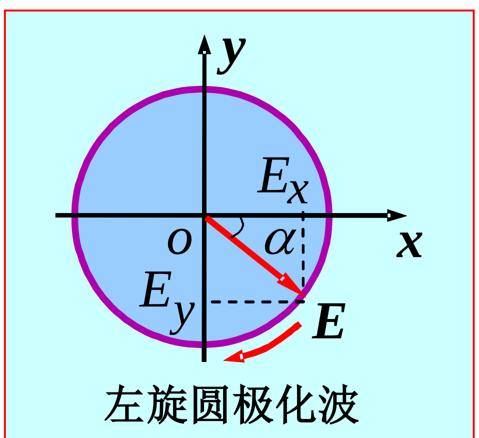
- 右旋圆极化波：若$\varphi_x - \varphi_y = \pi/2$，则电场矢端的旋转方向与电磁波传播方向成右手螺旋关系，称为右旋圆极化波



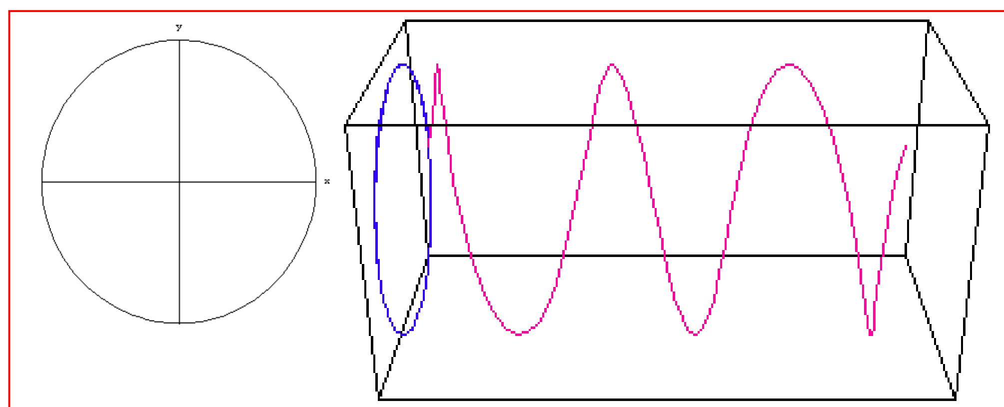
右旋圆极化波



- 左旋圆极化波：若$\varphi_x - \varphi_y = -\pi/2$，则电场矢端的旋转方向与电磁波传播方向成左手螺旋关系，称为左旋圆极化波



左旋圆极化波

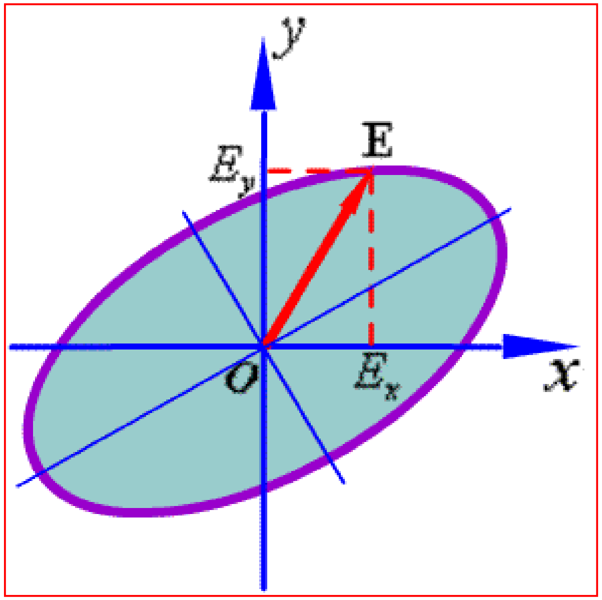


3- 椭圆极化波 $E_{xm} \neq E_{ym} \quad \varphi_x - \varphi_y = \varphi$

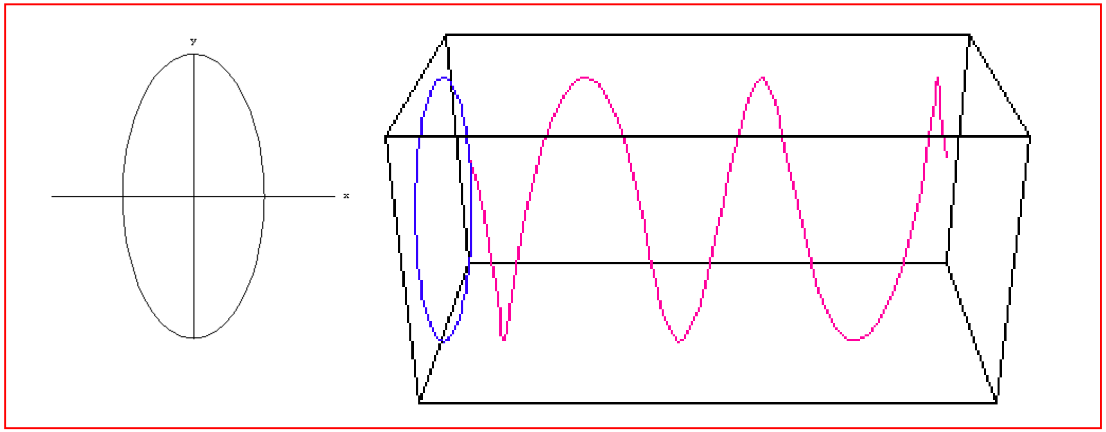
$$E_x(0,t) = E_{xm}\cos(\omega t + \phi_x)$$

$$E_y(0,t) = E_{ym}\cos(\omega t + \phi_x - \phi)$$

可得到 $$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} - \frac{2E_x\,E_y}{E_{xm}E_{ym}}\cos\phi = \sin^2\phi$$



- 特点：合成波电场的大小和方向都随时间改变，其端点在一个椭圆上旋转。



波极化方式小结

- 电磁波的极化状态取决于E_x和 E_y的振幅E_{xm}、E_{ym}和相位差 $\Delta\varphi=\varphi_x-\varphi_y$
- 对于沿$+z$方向传播的均匀平面波:

  - 线极化：$\Delta\varphi=0$、$\pm\pi$。

    $\Delta\varphi=0$，在1、3象限；$\Delta\varphi=\pm\pi$，在2、4象限。

  - 圆极化：$\Delta\varphi=\pm\pi/2$，$E_{xm}=E_{ym}$。

    取“+”，右旋圆极化；取“－”，左旋圆极化。

  - 椭圆极化：其它情况。

    $0<\Delta\varphi<\pi$，右旋；$-\pi<\Delta\varphi<0$，左旋。

例 说明下列均匀平面波的极化方式。

（1） $\vec{E} = \vec{e}_x E_m \sin(\omega t - kz) + \vec{e}_y E_m \cos(\omega t - kz)$

（2） $\vec{E} = \vec{e}_x E_m e^{-jkz} - \vec{e}_y j E_m e^{-jkz}$

（3） $\vec{E} = \vec{e}_x E_m \sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}) + \vec{e}_y E_m \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{4})$

（4） $\vec{E} = \vec{e}_x E_m \sin(\omega t - kz) + \vec{e}_y 2E_m \cos(\omega t - kz)$

例　说明下列均匀平面波的极化方式。

(1) $\vec{E}=E_0(\hat{x}+j\hat{z})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ky}$

(2) $\vec{E}=E_0(\hat{x}-2\sqrt{3}\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z})\cos\left(\omega t+x\sqrt{3}+2y+3z\right)$

(3) $\vec{E}=E_0(\hat{x}\left(1+j\right)+\hat{y}\left(1-j\right))\cos\left(\omega t-kz\right)$

(4) $\vec{E}=E_0(\hat{x}\left(2+3j\right)+4\hat{y}+3\hat{z})\mathrm{e}^{\left(-j\left(-1.8y+2.4z\right)\right)}$

极化波的分解

- 任何一个线极化波、圆极化波或椭圆极化波可分解成两个线极化波的叠加

- 任何一个线极化波都可以表示成旋向相反、振幅相等的两圆极化波的叠加，即

$$\vec{E}=\vec{e}_x E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\left(\vec{e}_x+\mathrm{j}\vec{e}_y\right)\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\left(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y\right)\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

- 任何一个椭圆极化波也可以表示成旋向相反、振幅不等的两圆极化波的叠加。

$$\begin{aligned}
\vec{E}&=(\vec{e}_x E_{xm}+j\vec{e}_y E_{ym})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\
&=\vec{e}_x\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\mathrm{j}\vec{e}_y\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\
&\quad+\vec{e}_x\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\mathrm{j}\vec{e}_y\frac{E_{xm}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\
&\quad+j\vec{e}_y\frac{E_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\vec{e}_x\frac{E_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\
&\quad+j\vec{e}_y\frac{E_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\vec{e}_x\frac{E_{ym}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\
&=(\vec{e}_x-\vec{e}_y\mathrm{j})\frac{\left(E_{xm}-E_{ym}\right)}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+(\vec{e}_x+\vec{e}_y\mathrm{j})\frac{\left(E_{xm}+E_{ym}\right)}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}
\end{aligned}$$

内　容

一．平面波解

二．TEM波-横电磁波

三．波的极化

四．有耗媒质中的传播

五．群速

有耗媒质中的均匀平面电磁波

本节讨论的介质为 μ 和 ε 是实常量，但 $\sigma \neq 0$ 的导电媒质 。

复传播常数 $k = \sqrt{\omega^2 \mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma} = \omega\sqrt{\mu}\sqrt{\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}} = \omega\sqrt{\mu}\sqrt{\varepsilon' - j\varepsilon''}$

相位常数和衰减常数 $k = \beta - j\alpha$

相位常数　　衰减常数

$$\beta^2 - \alpha^2 - j2\beta\alpha = \omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma$$

实部和虚部对应相等，可求出：

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2} \qquad \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2}$$

讨论最简单的情况：$\vec{k} = k\hat{z}$ ，并且只有E_x ，H_y分量

电场复矢量写成 $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x}E_x = \hat{x}E_{xm}e^{j\varphi_x}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

将 $k = \beta - j\alpha$ 代入上式，得

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x}E_{xm}e^{j\varphi_x}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

电场矢量的瞬时值是

衰减常数

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \hat{x}E_{xm}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_x)$$

相位常数

复特征阻抗

由于传播常数变为复数，所以特征阻抗也成为复数

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-j\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} \qquad \eta=\frac{\omega\mu}{k}=\frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}}=|\eta|e^{j\varphi}$$

模值 $$|\eta|=\sqrt{\mu/\varepsilon}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{-1/4}$$

辐角 $$\varphi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

电场和磁场不同相;
电场相位超前磁场相位φ

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{x}E_{xm}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)$$

磁场复矢量可以求得

$$\vec{H} = \frac{\hat{k}\times\vec{E}}{\eta}\hat{y}\frac{E_{xm}}{|\eta|}e^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{-j\beta z}\,\mathrm{e}^{j\phi_x}\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$$

磁场矢量的瞬时值

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \hat{y}\frac{E_{xm}}{|\eta|}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x - \varphi)$$

磁场在相位上比对应的电场有一个滞后角 φ 。$\varphi = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

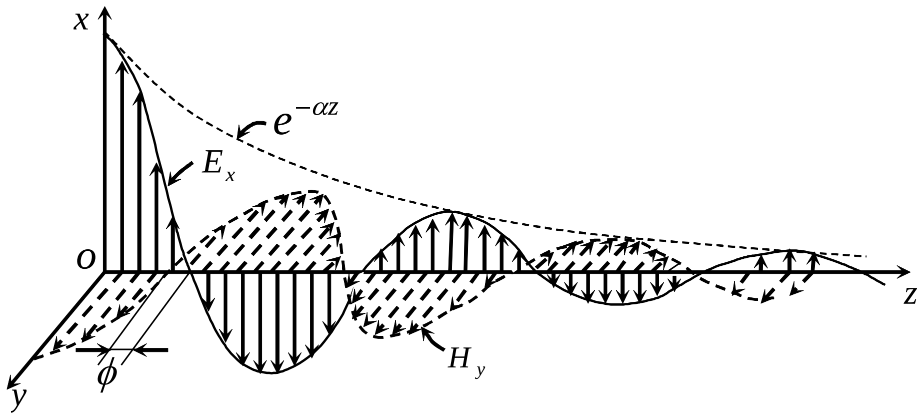
当频率一定时，随媒质电导率的增大而增大，最大可达π/4。

导电媒质中平面电磁波的特点：

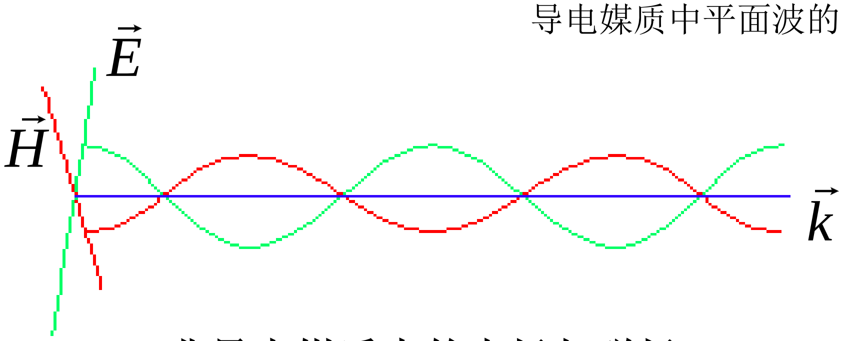
①正交关系 $\hat{E}\times\hat{H}=\hat{k}$

②幅度关系

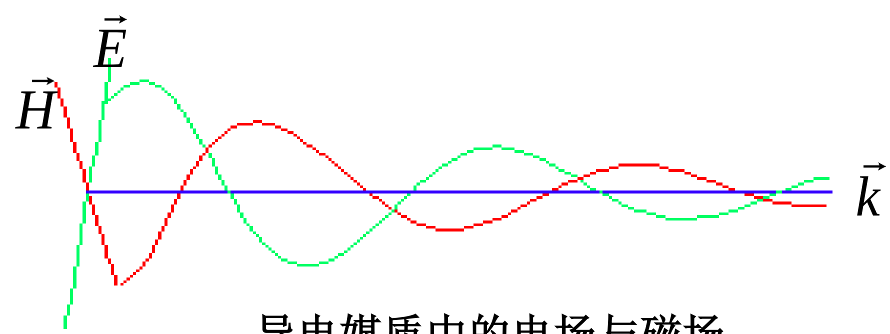
沿着电磁波的传播方向，例如$\hat{z}$方向，电场和磁场的幅度随z的增加按指数$e^{-\alpha z}$衰减。



导电媒质中平面波的电场和磁场



非导电媒质中的电场与磁场



导电媒质中的电场与磁场

媒质的分类:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2} \qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2}$$

令
$$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$$

则有
$$Q = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} = \frac{\omega\varepsilon E_x}{\sigma E_x} = \frac{J_{dx}}{J_{cx}}$$

可见: Q 值实际上是位移电流密度与传导电流密度的幅度比值，表示媒质的介质性与导电性的比例关系。

根据Q值的大小，可以将导电媒质分为 $\left\{\begin{array}{l}\text{低损耗媒质}\\ \text{一般导电媒质}\\ \text{良好导体}\end{array}\right.$ 三类

低损耗媒质中的均匀平面电磁波:

$Q >> 1$（通常取$Q > 100$）时，$J_{dx} >> J_{cx}$，接近理想电介质

低损耗媒质中平面波的性质:

① 电导率 σ 对相位常数 β 的影响可以忽略，β 与理想电介质时相同。

电磁波的相速度基本上与频率无关，可以近似为非色散媒质。

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{Q}\right)^2}+1\right]^{1/2} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

②衰减常数α比较小，因而电磁波幅度的衰减缓慢。

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{Q}\right)^{2}}-1\right]^{1/2}\approx\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[1+\frac{1}{2Q^{2}}-1\right]^{1/2}=\frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2Q}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

③特征阻抗近似为实数，$\phi\approx0$，电场与对应的磁场几乎同相位，与理想电介质中的情况近似。

$$\eta=\frac{\omega\mu}{k}=\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-j\frac{1}{Q}}}\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\qquad\phi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{Q}\approx0$$

良好导体内的均匀平面电磁波:

$Q<<1$（通常取$Q<0.1$）时， $J_{cx}>>J_{dx}$， 焦耳损耗很大

良好导体中平面波的特点:

①β很大，使良好导体内电磁波的传播速度v远小于真空电磁波速度c，并且与频率有关，是色散媒质。

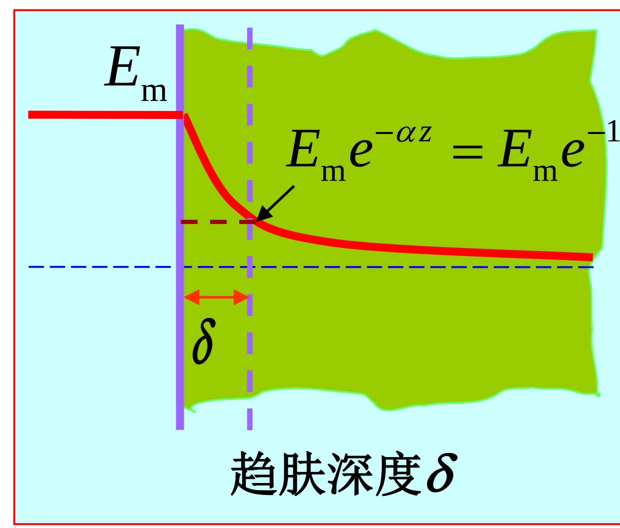
$$\left(\sqrt{1+\left(\frac{1}{Q}\right)^2}+1\right)^{0.5}\approx\left(\sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2}\right)^{0.5}=\frac{1}{\sqrt{Q}}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{Q}\right)^2}+1\right]^{1/2}\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2Q}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}}=\frac{1}{\delta}$$

② α很大使得电场和磁场的幅度衰减很快。

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{Q}\right)^2}-1\right]^{1/2}\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2Q}}=\beta=\frac{1}{\delta}$$

其中 $\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 称为**趋肤深度**。



铜： $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\sigma = 5.8 \times 10^{-7}\,\mathrm{S/m}$

$$f = 50\mathrm{Hz},\quad \delta = \frac{6.6\times 10^{-2}}{\sqrt{50}} = 9.33\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$f = 1\mathrm{MHz},\quad \delta = \frac{6.6\times 10^{-2}}{\sqrt{10^6}} = 6.6\times 10^{-5}\,\mathrm{m}$$

$$f = 10\mathrm{GHz},\quad \delta = \frac{6.6\times 10^{-2}}{\sqrt{10\times 10^9}} = 6.6\times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

③ η 的相角 $\phi \approx \pi/4$，表明磁场比对应电场的相位滞后约 $\pi/4$ 。

$$\eta = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - j\dfrac{1}{Q}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{-\frac{Q}{j}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

课堂练习：一沿 x 方向极化的线极化波在海水中传播，取+ z 轴方向为传播方向。已知海水的媒质参数为$\varepsilon_r = 81$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 4$ S/m，在 $z = 0$ 处的电场$E_x = 100\cos(10^7\pi t)$ V/m。求：

（1）衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及趋肤深度；

（2）电场强度幅值减小为$z = 0$ 处的 1/1000 时，波传播的距离

（3）$z = 0.8$ m 处的电场强度和磁场强度的瞬时表达式；

（4）$z = 0.8$ m 处穿过1m^2面积的平均功率。

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

内　容

一. 平面波解

二. TEM波-横电磁波

三. 波的极化

四. 有耗媒质中的传播

五. 群速

相速度与频率有关的现象也称为**电磁波的色散**。

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{2}}{[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2}+1]^{1/2}}$$

对于有耗媒质，存在电磁波色散现象。

对于宽带电磁波，相速与频率有关，频率越高相速约大，因此电磁波传播一段时间后波形是否会变化?

低频信号 $s(t)$ 调制到载频上 $s_0(t)=s(t)e^{j\omega_0 t}$

频域：$S_o(\omega,k)=S(\omega-\omega_0)$

考虑到在媒质中的传播距离，接收信号可表示：$S_o(\omega,k)=S(\omega-\omega_0)e^{-jkr}$

窄带时： $k(\omega)\approx k(\omega_0)+\left.\dfrac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}\cdot(\omega-\omega_0)=k_0+k'\cdot(\omega-\omega_0)$

$$S_o(\omega,k)=S(\omega-\omega_0)e^{-jk_0 r}e^{-j(\omega-\omega_0)k'r}$$

时域接收信号：
$$\begin{aligned}
s_o(t,k)&=F^{-1}\left[S_o(\omega,k)\right]\\
&=e^{-jk_0 r}\int S(\omega-\omega_0)e^{-j(\omega-\omega_0)k'r}e^{j\omega t}d\omega\\
&=e^{-jk_0 r}e^{j\omega_0 t}\int S(\omega-\omega_0)e^{-j(\omega-\omega_0)k'r}e^{j(\omega-\omega_0)t}d\omega\\
&=e^{-jk_0 r}e^{j\omega_0 t}\int S(\omega-\omega_0)e^{j(\omega-\omega_0)(t-k'r)}d(\omega-\omega_0)\\
&=e^{-jk_0 r}e^{j\omega_0 t}s(t-k'r)
\end{aligned}$$

群 速

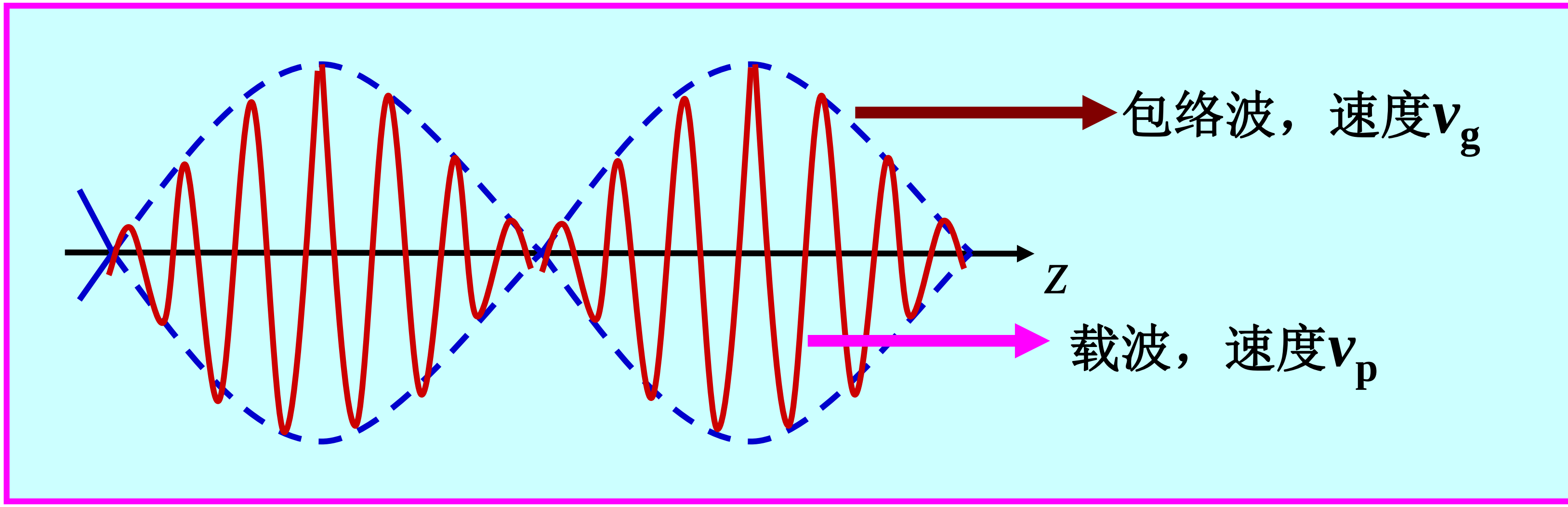
$$s_o(t,k) = e^{-jk_0 r} e^{j\omega_0 t} s(t - k'r)$$ 包络

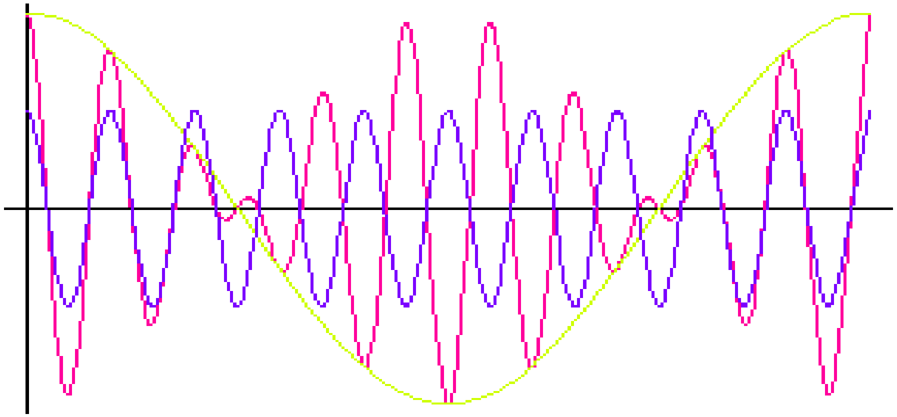
$$t - k'r = C$$

$$dt = k'dr \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{k'}$$

$$v_g = \frac{1}{k'} = \frac{d\omega}{dk}$$

群速：载有信息的电磁波通常是由一个高频载波和以载频为中心向两侧扩展的频带所构成的波包，波包包络传播的速度就是群速。


包络波，速度v_g
Z
载波，速度v_p



$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{k'(\omega)}$$

$$k'(\omega)\Big|_{\omega\in[\omega_0-\Delta\omega,\omega_0+\Delta\omega]} = C\,\mathrm{ons}.$$

$$v_g = Cons.$$

群速的概念**必须满足信号包络不产生严重畸变的基本条件**，即相位常数带宽内随频率的变换率为常数。或这说，信号为窄带信号，带宽内相位常数变化缓慢。