

第四章 恒定磁场

电荷的规则运动形成电流，同时在周围的空间产生磁场。恒定电流所产生的磁场不随时间变化，称为**恒定磁场**或**静磁场**。本章将讨论恒定磁场的基本性质和简单问题的计算方法。

§ 4.1 磁力和磁感应强度

人类对磁现象的初步感知起源于天然磁石。很早以前，人们就发现有一种奇特的石头（其主要成分是 Fe_3O_4 ）能够吸引铁片和铁钉等物体。如我国公元前三百年战国时期的著作《吕氏春秋》中就有“慈石召铁”的记载。这种奇特的石头被称为**磁石**或**磁铁**，它的这种特殊的性质称为**磁性**。此后，人们又发现做成条状或针状的磁石在两端处有最强的磁性，并且用尖针支撑或细丝悬挂的磁针（或磁棒）总是沿着南北方向取向。所以就把磁针指北的一端称为**北极**，简称**北极**，用N表示，亦称**N极**；指南的一端称为**南极**，简称**南极**，用S表示，亦称**S极**。根据磁石同名极相斥、异名极相吸的性质容易推知，地球也是一个大磁石，它的N极在指南磁针S极所指的方向，而S极为指南磁针N极所指的方向。经现代测定，地磁的N极在地理南极的附近，S极在地理北极附近，但并不与地理极点完全重合。我国古代四大发明之一的指南针，正是利用磁针与地磁的这种关系而工作的。

到了18世纪末期，人们已经对电场现象的起源有了比较正确的认识，但对磁现象本质的认识还是不清楚的。例如，人们把磁石两极的吸引和排斥与电荷之间的库仑力相比较，认为磁现象是由“正、负磁荷”产生的，并且还导出了与电荷库仑定律类似的“磁库仑定律”。直到1820年，丹麦科学家奥斯特发现了电流的磁效应，才将磁与电正确地联系起来，使电磁学研究进入了一个迅速发展的阶段。在其后的短短几年内，人们就发现了恒定电流与磁场作用的所有定律。

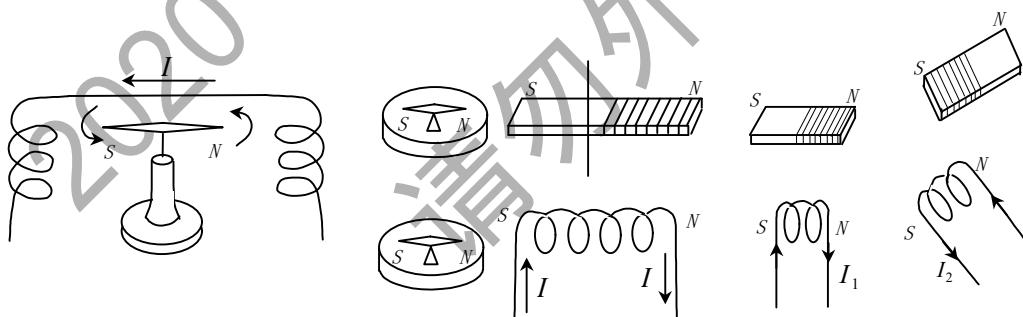


图4-1 奥斯特实验

图4-2 载流线圈与磁棒等效

图4-3. 载流线圈的作用

上面图示的几个实验都说明了磁现象是与电流或电荷的运动有关。在图4-1所示的奥斯特实验中，电流使小磁针发生偏转，转向与电流的流向有关，表明电流对周围的磁体有磁力作用；在图4-2的实验中，载有电流的线圈对小磁针有类似磁棒的磁力作用，表明电流可以产生与磁棒相同的磁场效应；图4-3所示的实验表明，两个载流线圈之间有类似于两块磁铁间的磁作用力。

此外，为了解释永磁体和磁化的本质，安培提出了分子电流假说。安培认为，任何物质的分子都存在着圆形电流，称为**分子电流**。每个分子电流都相当于一个**基本磁元体**，有

一对S、N极，如图4-4所示。在没有外磁场时，绝大多数物质内的分子电流无序排列，它们所产生的磁效应相互抵消，整个物体并不显磁性。但也有部分物质，由于相邻分子内的电子自旋交换力的作用，使分子电流呈有序排列，各基本磁元体的磁效应相叠加，对外表现出宏观的磁场作用，这就是永磁体的本质。对于非永磁物质，当其被放入外磁场后，基本磁元体受磁场力作用而转向，产生一定的宏观附加磁场，这就是物质磁化的本质。安培假说还解释了磁石的两极不能单独存在的原因，这是因为基本磁元体的两个极对应着圆形电流的两个面，所以磁单极不能单独存在。

以上的实验和分析表明，所有磁现象的实质都是运动电荷（即电流）的一种场效应，即运动的电荷在其周围空间激励出了磁场这种特殊的物质，两永磁体之间、电流与永磁体之间、电流与电流之间的磁效应都是磁场与运动电荷作用的结果，它们之间的磁作用力都是通过磁场来传递的。

自然界中是否存在独立的磁单极（或称磁荷），这是近一个世纪以来物理学界一直未能定论的一个学术问题。尽管电荷运动是磁场唯一根源的现行理论（即磁单极不能单独存在的理论）到目前为止尚未发现与实验不符之处，但按照量子力学的观点却可以得到一些不同的结论。英国物理学家狄拉克（Dirac）在1931年通过分析计算后提出，磁单极的存在与量子力学和电动力学的原理并不矛盾，是可能在自然界中存在的。此后的一些理论则提出了更进一步的推断和假说，例如：这种磁单极可以在宇宙大爆炸时的高温和高压条件下产生；在目前的每 10000 m^2 的截面内，每年可能有一个磁单极穿过等等。这些磁单极存在的假说虽然在理论上有一些依据，但到目前为止未能获得令人信服的实验验证结果，因此只能被视为一种预言或假设。即使有朝一日真的证明了磁单极的存在，那也是宇宙空间的“凤毛麟角”，不会否定现行的电流磁理论，也不会影响现有磁场理论的一般工程应用。

为了描述磁场的空间分布情况，我们引入磁感应强度矢量 \bar{B} 这个物理量。 \bar{B} 是一个矢量点函数，它的模值表示一点上磁场的强弱， \bar{B} 的方向就定义为该点磁场的方向。与静电力场中用静止电荷受力来定义电场强度 \bar{E} 相似， \bar{B} 用运动电荷在磁场中受力来定义。图4-5是一个利用运动电荷测试磁力性质的实验装置示意图，一对载有恒定电流的平行线圈（称为亥姆霍兹线圈）在轴线附近产生近似均匀的恒定磁场 \bar{B} ，可旋转的电子枪能射出与 \bar{B} 成任意夹角 θ 的电荷 q 。当具有一定速度 \bar{v} 的电荷从枪内发射出后，电荷使玻璃泡内的氢气电离而发光。借助辉光可观察到运动电荷的轨迹和速度，并由此计算出电荷所受磁场力的大小和方向。利用该实验可以得到如下结论：

- 正电荷 q 所受磁力的方向 \hat{F} 、运动的方向 \hat{v} 和线圈轴的方向 \hat{x} 三者满足如下叉积关系

$$\hat{F} = \hat{v} \times \hat{B}$$

可见，不论 q 的运动方向如何，它所受磁力的方向 \hat{F} 总是既与运动方向 \hat{v} 垂直又与亥姆霍兹线圈的轴线 \hat{x} 垂直。

- 运动电荷受力的大小和 \hat{v} 与 \hat{x} 的夹角 θ 的正弦成正比，即

$$F \propto \sin \theta$$

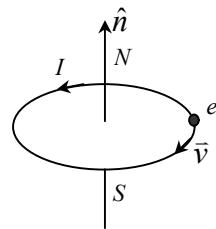


图4-4 分子电流

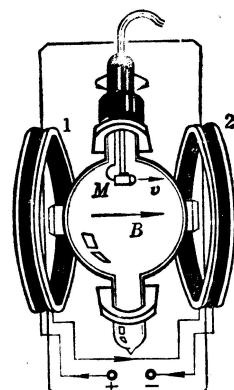


图4-5 亥姆霍兹线圈

由上式可知，当 q 的运动方向 \hat{v} 与线圈轴线方向 \hat{x} 垂直时，受到最大的磁力； \hat{v} 与 \hat{x} 平行时，受力为零。

3. 当磁场 \bar{B} 不变（线圈的电流不变）时，运动电荷的受力与其电量和速度的乘积成正比，即

$$F \propto qv$$

综合上述三点，运动电荷在磁场中所受的磁力可以用下面的矢量式表达

$$\bar{F} = k(q\bar{v} \times \bar{B})$$

从上面的表达式可以看出， \bar{F} 为运动电荷所受到的磁力， qv 是仅与运动电荷相关的量，而 $k\bar{B}$ 则是反映亥姆霍兹线圈在空间一点处产生的磁场的量。我们就将 $k\bar{B}$ 定义为该点的磁感应强度矢量 \bar{B} 。此时上式可以写成

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} \quad (4-1)$$

其标量形式为

$$F = qvB \sin \theta \quad (4-2)$$

虽然上面的表达式是针对亥姆霍兹线圈产生的特殊磁场分析而得到的，但这个结论对于所有的磁场都成立。由上面的公式，我们可以对磁感应强度矢量 \bar{B} 的物理意义和运动电荷在磁场中的受力作进一步的讨论：

1. 当运动电荷的速度矢量 \bar{v} 与该点的磁感应强度矢量 \bar{B} 垂直时，受到最大的磁力 $F_{\max} = qvB$ 。如果取运动电荷的电量与速度的乘积为1，我们暂且称其为单位运动电荷，则有

$$F_{\max} \Big|_{qv=1} = B \quad (4-3)$$

这表明，空间一点磁感应强度矢量的模值等于单位运动电荷在该点所受到的最大磁力，此时， \bar{B} 、 \bar{v} 和 \bar{F}_{\max} 是相互垂直的，方向满足下面的右手螺旋关系

$$\hat{B} = \hat{F}_{\max} \times \hat{v} \quad (4-4)$$

如图4-6所示。上面这两个式子可以做为磁感应强度 \bar{B} 的定义。

2. 运动电荷所受的磁力通常称为洛伦兹力。由洛伦兹力表达式(4-1)的叉积关系可知， \bar{F} 总是与 \bar{v} 垂直的，即

$$\bar{F} \cdot \bar{v} = 0 \quad (4-5)$$

这表明洛伦兹力对电荷的运动不做功，它只改变电荷的运动方向，而不改变其运动速度。

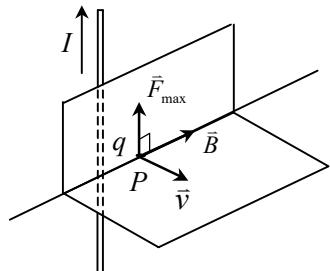


图4-6 \bar{B} 的方向定义

3. 当空间除了磁场 \bar{B} 外还存在电场 \bar{E} 时，运动电荷 q 所受到的合力满足下面的洛伦兹力方程

$$\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \quad (4-6)$$

此合力包含了电场力 $q\bar{E}$ 和磁场力 $q\bar{v} \times \bar{B}$ 两部分。

在SI单位制中， \bar{B} 的单位为特斯拉(T)

$$1 \text{ 特斯拉} = 1 \text{ (牛顿} \cdot \text{秒}) / (\text{库仑} \cdot \text{米})$$

在磁场的实际应用中， \bar{B} 的单位经常采用高斯单位制中的高斯 (Gs)，两种单位的换算关系为

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gs}$$

为了形象地描述磁场的分布，可以类比电场中引入电力线的方法引入磁感应线，简称为 \bar{B} 线，其规定如下：

1. 磁感应线上任一点的切线方向为该点磁感应强度 \bar{B} 的方向；
2. 通过垂直于 \bar{B} 的单位面积上的磁感应线的条数正比于该点 \bar{B} 值的大小。

要用实验显示 \bar{B} 线，可以在穿有载流导线的玻璃板（或硬纸板）上面撒上铁屑，铁屑被电流线产生的磁场磁化，形成了一个个小磁针，轻轻敲动玻璃板，小磁针即沿着 \bar{B} 线方向排列起来。图4-7为长直电流、圆形电流和条形磁铁的 \bar{B} 线的铁屑显示和 \bar{B} 线分布示意。

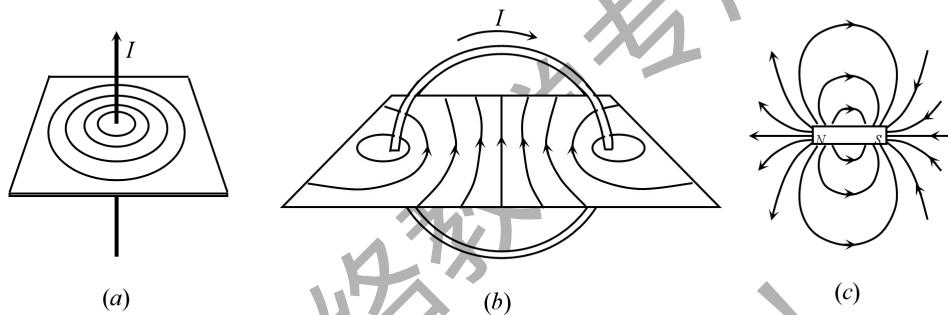


图4-7 几种常见磁场的 \bar{B} 线

§ 4.2 带电粒子在磁场中的运动

带电的运动粒子在磁场中受到洛伦兹力的作用，随着初始运动方向和磁场分布的不同，其运动轨迹会发生不同的变化，下面介绍其中的几种简单情况。

一、垂直磁场的圆周运动

设一质量为 m ，电量为 q 的粒子以速度 \vec{v} 沿垂直磁场的方向进入一均匀磁场 \bar{B} ，如图4-8所示，图中的“ \times ”表示磁场方向垂直指向纸内。此带电运动粒子受到的洛伦兹力为 $\bar{F} = q\vec{v} \times \bar{B}$ ，由该式的叉积关系可知， \bar{F} 垂直于 \vec{v} ，是一个使粒子在垂直于磁场的平面内作匀速圆周运动的向心力。又因 \vec{v} 与 \bar{B} 垂直，有

$$F = qvB$$

利用牛顿第二定律和匀速圆周运动的加速度公式，有

$$F = ma = m \frac{v^2}{R}$$

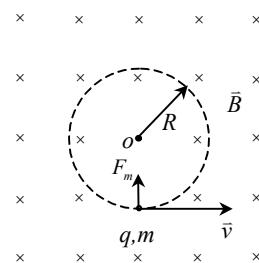


图4-8 均匀磁场中带电粒子的运动

所以

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

得

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (4-7)$$

R 为粒子作圆周运动的半径。由上式不难得到该匀速圆周运动的频率 f 、角速度 ω 和回旋周期 T

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{B}{2\pi} \frac{q}{m} \quad (4-8)$$

$$\omega = 2\pi f = B \frac{q}{m} \quad (4-9)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{B q} \quad (4-10)$$

q/m 为带电粒子的电量与其质量之比，叫做荷质比。由以上各式可以看到，荷质比一定的带电粒子在均匀磁场中作圆运动时，其角速度、频率和回旋周期都是一定的，与它的运动速度 v 的大小无关。这是因为粒子的速度增大时，其圆运动的半径 R 也成正比地增大，两者之比不变。

例4.1 动能为10 eV的一个电子，在垂直于均匀磁场的平面上作圆周运动，磁场为 $B=1.0 \times 10^{-4}$ 特斯拉。试求：(1) 电子轨道半径；(2) 圆周运动的回旋周期和频率。

解： (1) 由动能公式 $W = \frac{1}{2}mv^2$ ，可得到电子的运动速度

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 1.9 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

代入式(4-7)，得到电子圆运动的轨道半径

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 1.9 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-4}} = 0.11 \text{ (m)}$$

(2) 由式(4-10)，可得圆运动的回旋周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \times 9.1 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-4}} = 3.6 \times 10^{-7} \text{ (s)}$$

频率为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3.6 \times 10^{-7}} = 2.8 \times 10^6 \text{ (Hz)}$$

二. 沿磁场方向的螺旋运动

如果带电粒子进入均匀磁场的初速度矢量 \vec{v} 与磁场 \vec{B} 有一个夹角 θ ，将 \vec{v} 分解为与 \vec{B} 垂直的分量 $v_{\perp} = v \sin \theta$ 和与 \vec{B} 平行的分量 $\vec{v}_{\parallel} = v \cos \theta$ ，如图4-9所示。 \vec{v}_{\parallel} 不受磁场所影响，使粒子沿 \vec{B} 的方向运动；而按照前面的分析， v_{\perp} 所受磁场所将使带电粒子在与 \vec{B} 垂直的平面内作圆周运动。两者的合成运动的轨迹为一条沿磁场方向（当 $\theta > \pi/2$ 时，为逆磁场方向）的螺旋线，如图4-10所示。螺旋线的半径由式(4-7)决定，为

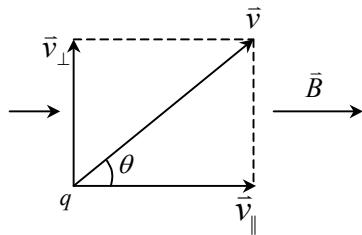


图4-9 速度的分解

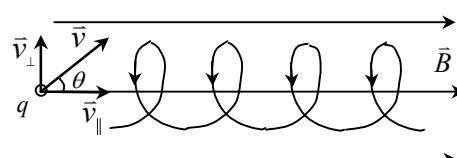


图4-10 粒子的运动轨迹

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mvsin\theta}{qB} \quad (4-11)$$

螺旋线的螺距为 $h = \bar{v}_{\parallel} T$, T 是由式(4-10)所决定的回旋周期,故螺距为

$$h = \bar{v}_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \theta \quad (4-12)$$

如果在均匀磁场中某点A处(如图4-11所示)引入一发散角 θ 不太大的带电粒子束,并使束中粒子的速度 v 大致相同,则有

$$\bar{v}_{\parallel} = v \cos \theta \approx v$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta \approx v \theta$$

将上面的两个近似式分别代入式(4-10)和(4-12),可以看出:对于以不同的入射角 θ 进入磁场的粒子,它们作螺旋运动的圆半径 R 是不同的,但由于它们的 \bar{v}_{\parallel} 近似相

等,使得这些螺旋圆运动的螺距都近似相等。这样,经过一个回旋周期后,这些粒子将重新会聚穿过另一点 A' 上。这种利用磁场将发散的带电粒子束重新会聚到一点上的现象叫做**磁聚焦**,它的作用与光学中利用透镜将光束聚焦相似,所以又称为**磁透镜**,在各种电真空器件和电子显微镜技术中有着广泛的应用。

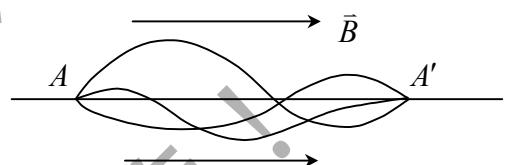


图4-11 磁聚焦

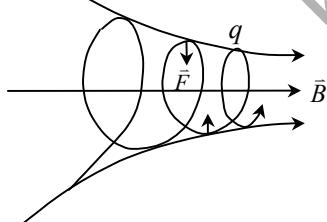


图4-12 磁镜

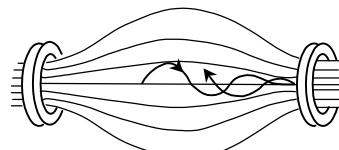


图4-13 磁瓶

在非均匀磁场中,速度方向和磁场方向不同的带电粒子也要作螺旋运动,但半径和螺距都将不断发生变化。特别是当粒子从弱磁场区向强磁场区运动时,它受到的磁力有一个与前进方向相反的分量,如图4-12所示。这个分量有可能最终使粒子的前进速度减小到零,并且进而使其作反向运动。强度逐渐增加的磁场能使运动粒子发生反射,因此把这种磁场分布叫做**磁镜**。

可以用两个电流方向相同的线圈产生一个中间弱两端强的磁场，如图4—13所示。这一磁场区域构成了两个相对的磁镜，运动速度与磁场方向近似平行的带电粒子将在两个磁镜之间来回反射而不能逃脱，这种能将运动带电粒子约束在某一区域内的装置称为**磁瓶**。在现代研究受控热核反应的实验中，常需要把温度很高的等离子体限制在一定的空间区域内，在所要求的极高温度下，所有的固体材料都将被熔化为气体，利用磁瓶原理的**磁约束**技术就成为实现这一目的的常用手段之一。

三. 回旋加速器

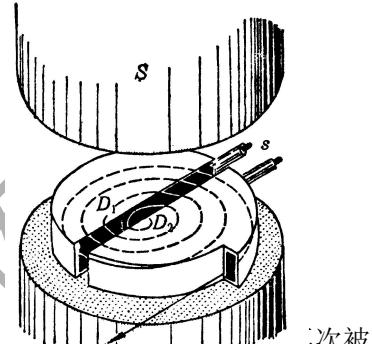
回旋加速器利用带电粒子在电场和磁场中受力而获得高能量，是加速质子、氘核、 α 粒子等基本粒子的重要工具。图4—14为回旋加速器示意图。 D_1 ， D_2 为装于同一水平面上的半圆形中空铜盒(又称**D形盒**)。两盒之间有一定宽度的空隙，置于真空中。由大型电磁铁产生的均匀磁场 \bar{B} 垂直于铜盒。由高频振荡器产生的交变电压加于两D盒之间，这个电压将在两盒空隙间产生电场以加速带电粒子，而盒内由于电屏蔽效应其电场强度近于零。

在加速器极间空隙的中心有一离子源。例如氘的分子受到能量足够高的电子的轰击，成为带正电的氘核。这些氘核通过离子源壁上的小孔而进入回旋加速器中。设此时 D_2 正好处于高电位，则氘核将被两D形盒间的电场加速而进入 D_1 盒中。 D_1 盒中不存在电场，但却存在由电磁铁产生的匀强磁场，因而氘核以不变速率在 D_1 盒中作匀速圆周运动。由式(4—10)可知，当荷质比和 \bar{B} 一定时，该圆运动的周期 T 为确定值，它与速率 v 和半径 R 的数值无关。因而经过 $T/2$ 后，氘核绕过半个圆周从 D_1 穿出。若设计使得振荡电源的周期 $T_0 = T$ ，这时两D盒的电位差的方向与前者相反， D_1 处于高电位状态。加速获得新的能量。按相同原理，氘核经过 $T/2$ 后又从 D_2 穿出，如此循环往复，使氘核的速度不断加大。由式(4—7)可知，氘核圆运动速率随其运动速度 v 的增大而增大，最后当被加速的离子趋于 D 盒的边缘时，借助于特殊装置将其引出。

回旋加速器的优点在于以不很高的振荡电压对离子不断加速而使其获极高的动能。设D形盒的半径为 R_0 ，则 R_0 就是离子作圆运动所能具有的最大半径，在此处离子具有最大的速率 v_{\max} 和动能 W_k ，由式(4—7)和动能公式得

$$v_{\max} = \frac{qR_0 B}{m}$$

$$W_k = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2 R_0^2 B^2}{m}$$



如果换成一次加速形式的直线加速器，此动能应等于氘核在加速器两端的电位能差，即

$$W_k = qU_{AB}$$

比较两式可得

$$U_{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)R_0^2 B^2$$

已知氘核的荷质比为 $q/m = 4.8 \times 10^7$ (C/kg)，设回旋加速器的半径 $R_0 = 0.48$ m，

$B = 1.8 \text{ T}$ ，则可算得

$$U_{AB} = \frac{1}{2} \times 4.8 \times 10^7 \times (0.48)^2 \times (1.8)^2 \\ \approx 1.8 \times 10^7 (\text{V})$$

可见，利用常规磁场且体积很小的回旋加速器所获得的氘核动能，与具有一千八百万伏加速电压的庞大直线加速器的效果相同。

四. 霍耳效应

将一块导电材料板放在垂直于它的磁场中，如图4-15所示，当板内有电流 I 通过时，在导电板的两个侧面 A 、 C 间会产生一个电位差 U_{AC} ，这种现象称为霍耳效应。电位差 U_{AC} 称为霍耳电压，一般记作 V_H ，它与电流强度 I 及磁感应强度 B 成正比，与板的厚度 d 成反比，即

$$V_H = k \frac{IB}{d} \quad (4-13)$$

式中的 k 称为霍耳系数，仅与导电板的材料性质有关。

霍耳效应可以用洛伦兹力来说明。当导电板中通有电流时，载流子（即运动电荷）受到外加磁场的洛伦兹力的作用

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} = q(\hat{v}\hat{z}) \times (\hat{j}B) = -\hat{x}qvB$$

在此力的作用下，载流子将向板的一侧偏移，并在该侧面附近形成电荷积聚。若载流子为正电荷（如半导体材料中的空穴），则所示洛伦兹力是 $-\hat{x}$ 方向的，结果在 A 侧面上积聚正电荷，而 C 侧面因正电荷缺少而出现负电荷层。两侧面上的正负电荷会产生一个 \hat{x} 方向的库仑电场 \bar{E} ，这个电场将对载流子正电荷产生一个 \hat{x} 方向电场力，与载流子所受的洛伦兹力方向相反。当 \bar{E} 的强度达到与 vB 相等时，载流子所受到的电场力和洛伦兹力相平衡，达到稳定状态。此时， A 、 C 两侧面之间的电位差为

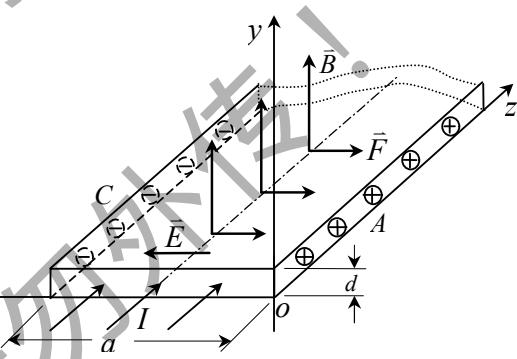


图4-15 霍耳效应

$$U_{AC} = Ea = vBa$$

其中 a 为导电板的宽度。由 $I = JS = Jad$ 和 $J = \rho v = Nqv$ (N 是导电材料板内的载流子密度) 可得

$$v = \frac{J}{Nq} = \frac{I}{Nqd}$$

代入前式得

$$V_H = U_{AC} = \frac{IB}{Nqd}$$

令 $k = 1/Nq$ ，则得到式(4-13)。

当材料的载流子为负电荷（如自由电子）时，若电流 I 的方向仍为 \hat{z} ，则载流子的运动方向为 $-\hat{z}$ ，受到的洛伦兹力为

$$\vec{F} = -|q| \vec{v} \times \vec{B} = -|q| (-v\hat{z}) \times (\hat{y}B) = -\hat{x}|q|vB$$

此时载流子的负电荷仍向A面聚积，使A面出现负电荷层而C面出现正电荷层。霍耳电压可表示为

$$V_H = U_{AC} = -\frac{IB}{N|q|d} \quad (4-14)$$

电压的极性与正电荷载流子的情况相反。

霍耳效应广泛应用于半导体材料的测试和研究中。例如，用霍耳电压的极性可以确定一种半导体材料是电子型（n型---多数载流子为自由电子）还是“空穴”型（p型---多数载流子为空穴）。半导体材料内载流子的浓度受温度、杂质以及其它因素的影响很大，因此霍耳效应为研究半导体载流子浓度的变化提供了重要的方法。

应用霍耳效应还可以方便地进行磁场强度测量，利用霍耳系数已知的材料，根据给定的I和d，及测量出的霍耳电压 V_H ，由公式(4-13)就可以求得B的数值。除此之外，利用霍耳效应制成的霍耳元件在直流和交流电流的测量、转换、调制和放大等许多方面也有着广泛的用途。

§ 4.3 安培磁力定律和毕奥---沙伐定律

通有恒定电流的导线或线圈是产生恒定磁场最常用的源，以两个载流线圈磁力作用的实验定律为基础，可以得到磁场计算的基本公式。图4-16表示真空中的两个细导线回路 I_1 和 I_2 ，两个回路上分别流有恒定电流 I_1 和 I_2 。实验指出，回路 I_2 所受的磁力由下式决定：

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_2} \int_{l_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} \quad (4-15)$$

该式称为安培磁力定律，是静磁学的基本实验定律之一。 $I_1 d\vec{l}_1$ 和 $I_2 d\vec{l}_2$ 分别代表 I_1 和 I_2 上的电流元； \vec{R}_{21} 是自 $I_1 d\vec{l}_1$ 到 $I_2 d\vec{l}_2$ 的相对位置矢量， $R_{21} = |\vec{R}_{21}|$ ； $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 亨利/米 (H/m)是表征真空磁性质的常数，称为真空磁导率。

将式(4-15)中 $I_1 d\vec{l}_1$ 和 $I_2 d\vec{l}_2$ 的位置互换，令 \vec{R}_{12} 从 $d\vec{l}_2$ 指向 $d\vec{l}_1$ ，就得到回路 I_1 所受的磁力 \vec{F}_{12} 。容易证明 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ，即两个电流回路的相互作用力符合牛顿第三定律。

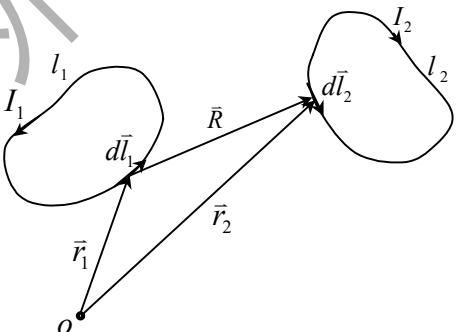


图4-16 两个载流回路的作用力

两个电流回路间的作用力是通过磁场传递的。 I_1 对 I_2 作用力的本质是回路 I_1 上电流所产生的空间磁场与回路 I_2 上电流的作用。若将式(4-15)改写成

$$\vec{F}_{21} = \int_{l_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} \frac{(I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{21})}{R_{21}^3} \right] \quad (4-16)$$

括号内的表达式是一个只与回路 I_1 及场点有关的量。与运动电荷的洛伦兹力公式相比较不难

看出，这是回路电流 I_1 在回路 l_2 的电流元 $I_2 d\bar{l}_2$ 点处所产生的一个磁感应量。实质上，这个磁感应量就是 $d\bar{l}_2$ 处的磁感应强度 \bar{B} 。为具有普遍性，将上面的 I_1 、 l_1 和 $d\bar{l}_1$ 分别记作 I 、 l' 和 $d\bar{l}'$ ，则电流回路 l' 在空间一点处产生的磁感应强度为

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{Id\bar{l}' \times \bar{R}}{R^3} \quad (4-17)$$

其中的 \bar{R} 是从回路电流元 $Id\bar{l}'$ 指向场点 P 的相对位置矢量。因为式(4-17)表示整个电流回路 l' 在场点产生的 \bar{B} ，故其中的被积函数应为电流元 $Id\bar{l}'$ 在场点处产生的磁感应强度矢量元 $d\bar{B}$ ，即

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\bar{l}' \times \bar{R}}{R^3} \quad (4-18)$$

上面两式称为**毕奥——沙伐定律**，它给出了电流回路和电流元在空间一点所产生的磁感应强度的计算表达式，是研究静磁场的一组基础公式。

对于电流以体密度 \bar{J} 分布在区域 τ' 内的一般情况，只需将前两式的电流元改写成 $Id\bar{l}' = \bar{J}d\tau'$ ，线积分变为电流区域 τ' 的体积分，则毕奥——沙伐定律表示为

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\bar{J} \times \bar{R}}{R^3} d\tau' \quad (4-19)$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{R}}{R^3} d\tau' \quad (4-20)$$

同样，当电流以面密度分布在某曲面上时，毕奥——沙伐定律表示为

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s'} \frac{\bar{J}_s \times \bar{R}}{R^3} ds' \quad (4-21)$$

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J}_s \times \bar{R}}{R^3} ds' \quad (4-22)$$

将式(4-17)代回式(4-16)，略去 I_2 、 l_2 和 $d\bar{l}_2$ 的下标，得到电流回路 l 在磁感应强度为 \bar{B} 的磁场中所受的磁力

$$\bar{F} = \oint_l Id\bar{l} \times \bar{B} \quad (4-23)$$

被积函数为回路上电流元 $Id\bar{l}$ 受到的磁力，即

$$dF = |Id\bar{l} \times \bar{B}| = I d\bar{l} \sin \theta B \quad (4-24)$$

θ 是 $d\bar{l}$ 与 \bar{B} 的夹角。上式说明，只要电流元与所在点处的磁场不平行，此电流元就会受到磁场力的作用。

矢量 $Id\bar{l}$ 、 \bar{B} 和 $d\bar{F}$ 三者的方向符合右手定则， $d\bar{F}$ 分别与 $Id\bar{l}$ 和 \bar{B} 垂直，如图4-17所示。若取 $|Id\bar{l}|=1$ 并使 $d\bar{l}$ 与 \bar{B} 垂直，则 $|d\bar{F}|$ 有最大值且等于 $|\bar{B}|$ 。因此， \bar{B} 又可以定义为磁场中一点上单位电流元所受到的最大磁力。

实质上，电流回路所受磁力可以归结为回路中运动电荷受力的结果。将

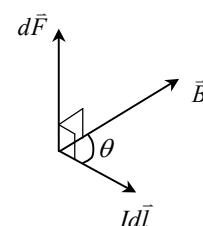


图4-17 电流元受到的磁场所力

$$Id\vec{l} = \bar{J}dsdl = \rho\bar{v}dsdl = dQ\bar{v}$$

代入式(4-24), 得到电荷元 dQ 受到的磁力

$$d\vec{F} = dQ(\bar{v} \times \bar{B}) \quad (4-25)$$

若将 dQ 记作 q , 则上式就是运动电荷的洛伦兹力公式 (4-8)。

在磁场分析时, 除了使用磁感应强度 \bar{B} 外, 还经常用磁场强度矢量 \bar{H} 。真空中 \bar{H} 的定义为

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} \quad (4-26)$$

\bar{H} 的单位是安培/米 (A/m)。

例4.2 计算通过电流 I 的一段直导线在空间任意点产生的磁感应强度 \bar{B} 。

解: 采用圆柱坐标, 使 z 轴与线电流 I 重合, 原点放在 l 的中点上。由对称关系看出, 场值与 φ 无关, 因此将所求场点选在 $\varphi=0$ 的平面上并不失普遍性。设场点坐标为 $(r, 0, z)$, 源点(电流元)的坐标 $(0, 0, z')$, 由图4-18所示关系可得

$$z' = z - r \tan \theta$$

$$dz' = r \csc^2 \theta d\theta$$

$$dl' = \hat{z} dz' = \hat{z} r \csc^2 \theta d\theta$$

$$R = r \csc \theta$$

$$\hat{R} = \hat{r} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$$

$$dl' \times \hat{R} = r \csc^2 \theta d\theta \hat{z} \times (\hat{r} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta) = \hat{\phi} r \csc \theta d\theta$$

代入式 (4-19), 得

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_r^R \frac{dl' \times \hat{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{\phi} \frac{r \csc \theta}{(r \csc \theta)^2} d\theta \\ &= \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (4-27)$$

其中

$$\cos \theta_1 = \frac{z + l/2}{\sqrt{r^2 + (z + l/2)^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{z - l/2}{\sqrt{r^2 + (z - l/2)^2}}$$

对于无限长的直线电流情况, $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = \pi$, 得到

$$\bar{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4-28)$$

可见, 直线电流段产生的磁场与电流成右手螺旋关系, 在本题中只有 $\hat{\phi}$ 分量, 但 B 值与

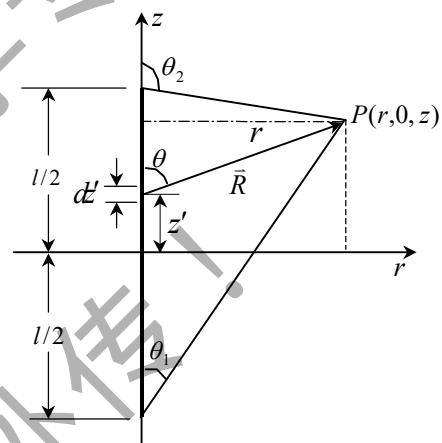


图4-18 载流直导线的磁场

场点坐标 φ 无关, 只是 r 和 z 的函数; 而对无限长直线电流, B 也只有 $\hat{\varphi}$ 分量, 并且仅是场点坐标 r 的函数。

例4.3 一圆形载流回路的半径为 a , 电流强度为 I , 求回路轴线上的磁感应强度 \vec{B} 。

解: 如图4-19所示, 令回路轴线与 z 轴重合, 并使圆心在坐标系原点上。在回路上任取一电流元 $Id\bar{l}'$, 对于 z 轴上的任意场点 $P(0,0,z)$, $d\bar{l}'$ 与 \bar{R} 相互垂直, 由毕奥—沙伐定律(4-10)式, 可得到该电流元在 P 点处产生的磁场 $d\bar{B}$ 的模值为

$$dB = \frac{\mu_0 I dl'}{4\pi R^2}$$

$d\bar{B}$ 的方向与 dl' 及 \bar{R} 垂直。

将 $d\bar{B}$ 分解为与 \hat{z} 平行的分量 $d\bar{B}_{\parallel}$ 和与 \hat{z} 垂直的分量 $d\bar{B}_{\perp}$ 两部分, 它们的模值分别为

$$d\bar{B}_{\parallel} = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I a}{4\pi R^3} dl'$$

$$d\bar{B}_{\perp} = dB \cos \theta$$

式中的 θ 是 \bar{R} 与 \hat{z} 的夹角, 因此有 $\sin \theta = a/R$ 。

在与电流元 $Id\bar{l}'$ 圆对称处再取一个电流元 $Id\bar{l}''$, 可以看出 $Id\bar{l}''$ 在 P 点产生的磁场垂直分量与 $d\bar{B}_{\perp}$ 等值反向, 相互抵消, 而其磁场平行分量与 $d\bar{B}_{\parallel}$ 同向叠加。因此, 整个电流回路的磁场只有平行方向分量, 即

$$\bar{B} = \hat{z} \oint_{l'} \frac{\mu_0 a I}{4\pi R^3} dl' = \hat{z} \frac{\mu_0 a I}{4\pi R^3} 2\pi a = \hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

可见, 圆电流在回路轴线上所产生的磁场与回路平面垂直, 且成右手螺旋关系。

例4.4 分析半径为 r_0 的圆形细导线载流回路在均匀外磁场 $\bar{B}_0 = \hat{x}B_x + \hat{z}B_z$ 中所受的磁场力。

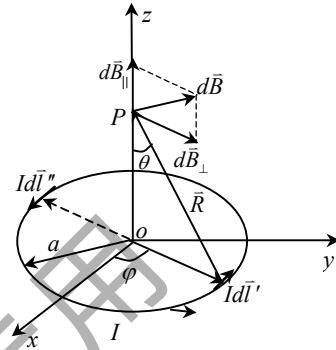
解: 设回路的中心在坐标系原点并且它的法线方向与 z 轴正方向一致, 回路中的电流为 I 。由安培磁力定律, 此回路所受磁力为 $\oint_I Id\bar{l} \times \bar{B}_0$ 。因 I 和 \bar{B}_0 均为常量, 故可以提出到积分号外, 并考虑到 $\oint_I Id\bar{l}$ 是一个首尾相接的闭合矢量, 结果为零。因此有

$$\bar{F} = \oint_I Id\bar{l} \times \bar{B}_0 = I \left(\oint_I dl \right) \times \bar{B}_0 = 0 \quad (4-29)$$

上式表明均匀磁场中的闭合电流回路所受的总磁力为零。但此力为零只说明回路不受使其产生位移的力, 由于回路各部分所受磁力的方向不同, 它将受到转矩作用而发生旋转。

按照图4-20(a) 所示, $B_x = B_0 \sin \theta$, $B_z = B_0 \cos \theta$ 。 B_z 使回路受到张力, B_x 使回路绕 y 轴作反时针旋转。从图4-20(b)可以看出, 在 B_x 的作用下, 电流元 $Id\bar{l}$ 和 $Id\bar{l}'$ 共同产生的转矩为

$$dT_y = (r_0 \sin \alpha) dF + (r_0 \sin \alpha) dF'$$



$$=2r_0 \sin \alpha Ir_0 d\alpha B_x \sin \alpha \\ =2Ir_0^2 B_0 \sin \theta \sin^2 \alpha d\alpha$$

回路所受的总转矩为

$$T_y = \int_0^\pi dT_y = \int_0^\pi 2Ir_0^2 B_0 \sin \theta \sin^2 \alpha d\alpha \\ = I(\pi r_0^2) B_0 \sin \theta = ISB_0 \sin \theta$$

式中的 S 表示电流回路的面积。我们将回路电流按右手定则所确定的法线方向 \hat{z} 与回路电流及面积的乘积 $\bar{m} = \hat{z}IS$ 称为此电流回路的**磁矩**。因上式中的 θ 是 \bar{m} 与 \vec{B}_0 的交角，故回路转矩可以用矢量表达为

$$\vec{T} = \bar{m} \times \vec{B}_0 \quad (4-30)$$

从上式可以得到，电流回路受到的转矩总是企图使回路的磁矩转向外磁场方向。

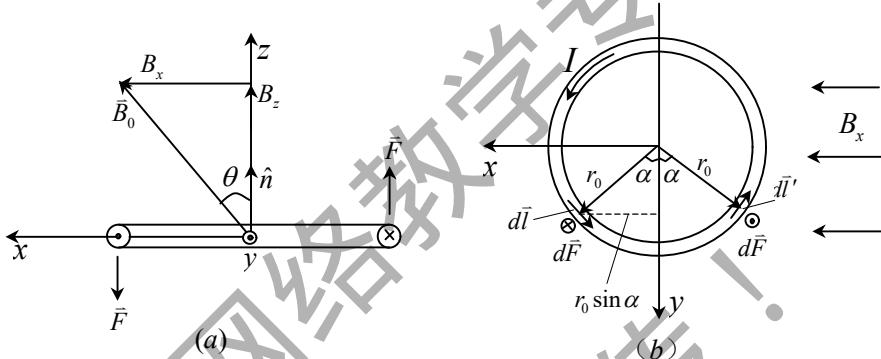


图4-20 外磁场中电流回路的转矩

§ 4.4 恒定磁场的基本定律

从毕奥——沙伐定律出发，通过计算 \vec{H} 的闭合回路线积分和 \vec{B} 的闭合曲面积分，可以得到反映恒定磁场本质属性的两个基本定律。

首先讨论磁场强度矢量 \vec{H} 的闭合线积分性质。在电流回路 l' 所产生的磁场中，我们任取一闭合回路 l ，如图4-21所示。设 $P(x, y, z)$ 是 l 上的一点，则电流回路 l' 在 P 点产生的磁场为

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \quad (4-31)$$

计算 \vec{H} 在回路 l 上的闭合线积分，有

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_l \left[\frac{I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3} \right] \cdot d\vec{l} \\ = \frac{I}{4\pi} \oint_l \left[\oint_{l'} \frac{-\vec{R}}{R^3} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}') \right] \quad (4-32)$$

上面的第二步推导运用了矢量混合积恒等式 $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$ 。

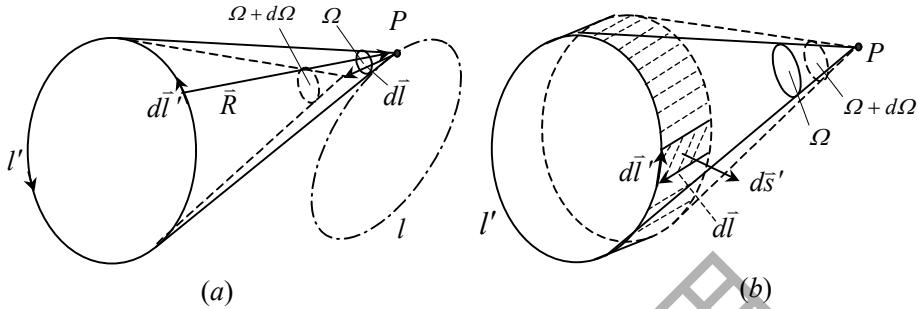


图4-21 立体角的增量

电流回路 l' 所包围的面积对 P 点构成一个立体角 Ω ，当 P 点沿回路 l 位移 $d\vec{l}$ 时，立体角将增加 $d\Omega$ ，如图4-21(a)所示。这个 $d\Omega$ 与假设 P 点固定不动而让回路 l' 平移 $-d\vec{l}$ 所引起的立体角改变量是相同的，如图4-21(b)所示。在(b)图中，立体角增量 $d\Omega$ 对应的面积为 l' 位移所成的环带面积。取此环带上的矢量面元 $d\vec{s}' = -d\vec{l} \times d\vec{l}'$ ， $d\vec{s}'$ 对 P 点所张立体角为

$$\frac{-\bar{R} \cdot d\vec{s}'}{R^3} = \frac{-\bar{R} \cdot (-d\vec{l} \times d\vec{l}')}{R^3}$$

其中 \bar{R} 前面的负号是由于立体角定义中的位置矢量应从顶点指向面元，而此处 \bar{R} 的定义为由面元 $d\vec{s}'$ 指向顶点 P 之故。环带所张立体角 $d\Omega$ 为 $d\vec{s}'$ 所张立体角的积分，即

$$d\Omega = \int_{l'} \frac{-\bar{R}}{R^3} (-d\vec{l} \times d\vec{l}') \quad (4-33)$$

上式右边恰为式(4-32)的括号部分，故式(4-32)可以写成

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{4\pi} \int_l d\Omega = \frac{I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (4-34)$$

$\Delta\Omega$ 表示 P 点沿 l 运动一周所引起的立体角的总改变量，其数值分下面两种情况讨论：

1. 积分回路 l 与电流回路 l' 相交链，即 l 穿过 l' 所围面积 s' 的情况，如图4-22(a)示。

如果我们取积分路径的起点是 s' 曲面的法线矢量 \hat{n}' 一侧的 A 点，而终点为另一侧的对称点 B ，由于立体角的顶点和曲面法线在曲面两侧时其值为正，在同侧时为负，并且曲面上

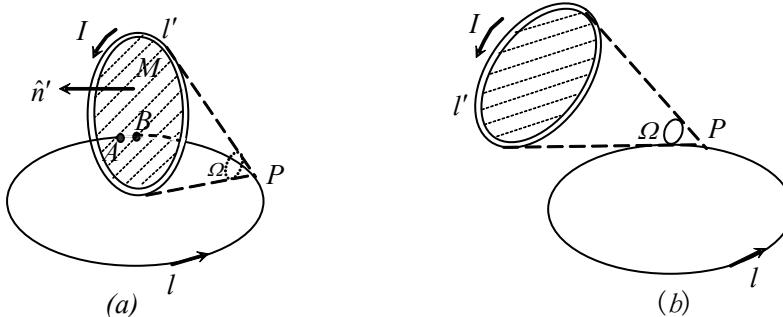


图4-22 积分回路与电流回路的关系

的点对该曲面所张立体角的绝对值为 2π ，所以动点 P 在位置 A 时的立体角为 -2π ，运动到终点 B 时 Ω 增大到 2π ，因此有

$$\Delta\Omega = (2\pi) - (-2\pi) = 4\pi$$

式 (4-34) 变成

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = I \quad (4-35)$$

由于两个回路是相交链的， I 也就是穿过积分路径 l 所围面 S 的电流，故上式说明 \bar{H} 沿 l 的闭合回路积分恰等于 l 所围面积上所通过的电流。在上述的推导过程中，我们已经规定了回路 l 的方向与源电流方向满足右手螺旋关系。也就是说，当回路的积分方向与穿过其截面的电流 I 符合右手定则时， I 取正值；反之， I 取负值。

2. 积分回路 l 不与电流回路 l' 交链，如图4-22 (b) 所示。此时 P 点沿 l 位移则立体角一直连续改变，当 P 点位移一周回到原来位置时，立体角也回复到原值，有

$$\Delta\Omega = 0$$

此时式 (4-34) 变为

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = 0 \quad (4-36)$$

这表明，当积分回路所围面积上无电流穿过时，磁场沿回路的闭合线积分为零。

应当明确，所谓电流 I 与回路 l 交链，是指该电流必须穿过以 l 为边界的任意曲面。图4-23画出了不交链、交链一次和交链多次的几种情况。

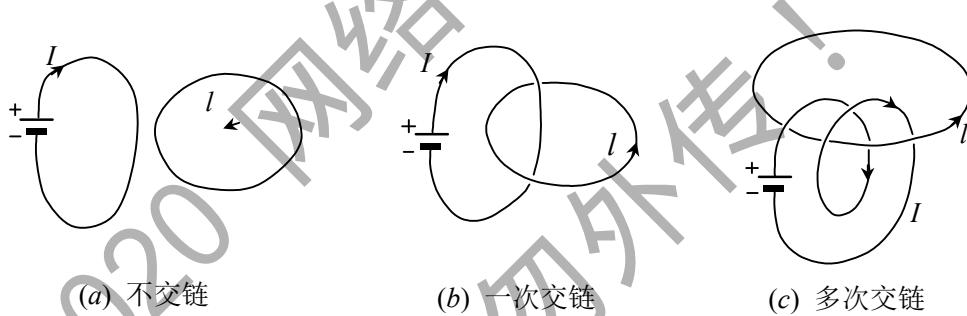


图4-23 积分回路与电流回路的关系

以上的分析可以推广到积分回路 l 与 N 个电流回路相交链的情况。图4-24表示 N 个电流回路的电流分别为 I_1, I_2, \dots, I_n 。假设电流 I_i 所产生的磁场强度为 \bar{H}_i ，则空间总磁场强度 \bar{H} 在 l 上的闭合线积分为

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum_{i=1}^N \oint_l \bar{H}_i \cdot d\bar{l} = \sum_{i=1}^N I_i \quad (4-37)$$

对于一个电流 N 次与 l 交链的情况，即图4-23 (c) 所示的情况，由上式可得到

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = NI \quad (4-38)$$

如果回路 l 所围面积 S 上通过体分布电流，则式 (4-37) 的右边可以写成

$$\sum_{i=1}^N I_i = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

则得到

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \bar{J} \cdot d\bar{s} \quad (4-39)$$

由于线电流 I 和面电流 \bar{J}_s 都可以用 δ 函数表示成体电流 \bar{J} 的形式，所以式 (4-39) 实际上包括了 S 上有各种电流通过的情况，我们将其称为**安培回路定律的积分形式**。该定律说明磁场强度矢量沿一闭合回路的线积分等于此回路所限定的面积上通过的总电流。

利用斯托克斯定理将式(4-39)的左边变为 S 的面积分

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \nabla \times \bar{H} \cdot d\bar{s} = \int_s \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

因回路 l 是任意的，因此有

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (4-40)$$

上式称为**安培回路定律的微分形式**。它反映了磁场空间一点上的磁场强度矢量与该点电流密度的关系，表明了电流是磁场的“漩涡源”。从上面两式可以看出，在包含场源电流的区域内， \bar{H} 的旋度和闭合回路线积分不恒等于零，所以磁场是一个有旋场和非保守场。式(4-39)和式(4-40)构成了恒定磁场的第一基本定律

下面讨论恒定磁场的另一个基本定律。设磁场 \bar{B} 由 τ' 域内的体分布电流 \bar{J} 产生（线电流和面电流都是体电流的特例），由毕奥---沙伐定律可得到电流元 $\bar{J}d\tau'$ 在任意场点 P 处产生的磁感应强度

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{R}}{R^3} d\tau'$$

上式两边对场点 P 的坐标求散度，得

$$\nabla \cdot (d\bar{B}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\bar{J} \times \bar{R}}{R^3} d\tau' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\tau' \nabla \cdot \left(\bar{J} \times \frac{\bar{R}}{R^3} \right)$$

利用恒等式 $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \bar{A} \cdot \nabla \times \bar{B}$ 、 $-\bar{R}/R^3 = \nabla(1/R)$ 和 $\nabla \times \nabla f = 0$ ，并注意 \bar{J} 与场点 P 的坐标无关，则得到

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (d\bar{B}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} d\tau' \left(\frac{\bar{R}}{R^3} \nabla \times \bar{J} - \bar{J} \cdot \nabla \times \frac{\bar{R}}{R^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} d\tau' \left(\bar{J} \cdot \nabla \times \nabla \frac{1}{R} \right) = 0 \end{aligned}$$

由恒定磁场与电流的线性关系，场点 P 处的总磁感应强度是所有电流元磁场的叠加，即

$$\bar{B} = \sum d\bar{B} = \int_{\tau'} d\bar{B}$$

两边对场点坐标取散度并利用上式的结果，有

$$\nabla \cdot \bar{B} = \sum \nabla \cdot d\bar{B} = \int_{\tau'} \nabla \cdot d\bar{B} = 0$$

即

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4-41)$$

上式表明恒定磁场是一个无散场。

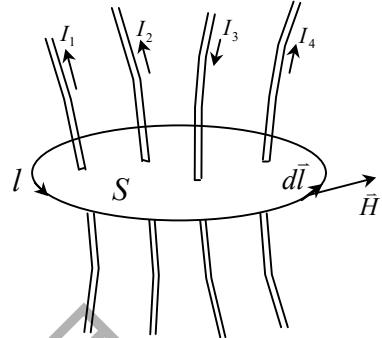


图4-24 回路 l 与 N 个电流交链

磁感应强度 \vec{B} 在某曲面 S 上的面积分称为该曲面所通过的磁通量，用 Φ_m 表示

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (4-42)$$

Φ_m 的单位是韦伯(Wb)。因 \vec{B} 的曲面积分是磁通量，所以 \vec{B} 也称为磁通量密度，它的单位特斯拉(T)也记作韦伯/米²(Wb/m²)。

将式(4-41)对任意体积 τ 积分，并应用散度定理 $\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F} d\tau = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ，得到

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4-43)$$

上式表明，任何一个封闭曲面上的磁通量恒等于零，因此 \vec{B} 是管形场。

式(4-41)和(4-43)称为磁通连续方程或叫做磁场“高斯定律”，它们构成了恒定磁场的第二基本定律。该定律说明磁场是无源场(即管形场)，磁通量线一定为闭合曲线。磁场的无源性与自然界中尚未发现磁单极的现象是一致的。

由亥姆霍兹定理可知，一个矢量场的基本性质取决于它的旋度和散度如何，因此安培回路定律和磁场高斯定律构成了反映恒定磁场性质的基本方程组。

例4.5 半径为 a 的无限长导体圆柱上流有恒定电流 I ，求空间任意点的磁场强度。

解：本题可利用毕奥——沙伐定律(4-19)式求解，但由于电流分布具有特殊对称性，采用安培回路定律积分形式求解可使计算更为简单。令圆柱体的轴线与圆柱坐标系 z 轴重合，如图4-25所示。很明显，磁场强度只有 H_φ 分量而且只是 r 的函数。过所求任意点 P 作一个中心在轴线上的圆形回路 l ， l 所围平面与 z 轴垂直。将安培回路定律应用在此回路上，由于 \vec{H} 与 $d\vec{l}$ 的方向均为 $\hat{\varphi}$ ，并且 l 上各点的 H 值相同，故有

$$H_\varphi (2\pi r) = I'$$

其中的 I' 为 l 所围面积上通过的电流。

当 $r \geq a$ 时， $I' = I$ ，得到

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

或 $\vec{H} = \hat{\varphi} \frac{I}{2\pi r} \quad (r \geq a)$

其结果与例4.2的无限长线电流产生的磁场相同。

当 $r \leq a$ 时， $I' = I\pi r^2 / (\pi a^2)$ ，得

$$H_\varphi = \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad \text{或} \quad \vec{H} = \hat{\varphi} \frac{Ir}{2\pi a^2} \quad (r \leq a)$$

例4.6 如图4-26所示的环状螺线管叫做螺绕环，设环管的轴线半径为 R ，环上均匀密绕 N 匝线圈，线圈内通有恒定电流 I 。求螺绕环内外的磁场。

解：根据电流分布的对称性，与螺绕环同轴的圆周上各点 \vec{H} 的模值相等、方向沿圆周的方向，与电流成右手螺旋关系。若此圆周在螺线管内，设其半径为 r ，应用安培回路定

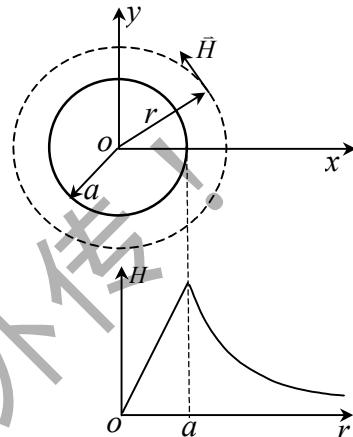


图4-25 长圆柱导线电流的磁场

律，有

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = NI$$

由此可得 $H = \frac{NI}{2\pi r}$ (在环管内)

当环管截面半径远小于环半径 R 时，可近似取 $r = R$ ，此时有

$$H = \frac{NI}{2\pi R} = nI \quad (4-44)$$

其中的 $n = N / 2\pi R$ 为螺绕环单位长度的线圈匝数。

对于管外的场点，过该点作一个与螺绕环共轴的圆形回路，由于与此回路交链的总电流为零，所以有

$$H = 0 \quad (\text{在环管外})$$

上面的结果可以推广到长直螺线管的情况。长直螺线管可以看成是 $R \rightarrow \infty$ 的螺绕环，当螺线管的长度远大于管半径时，管外磁场近似为零，而管内磁场可近似用式 (4-44) 计算。

例4.7 计算面密度为 J_s 的无限大均匀电流平面的磁场。

解：无限大平面电流可以看成是由无限多根平行排列的长直线电流组成。首先分析电流面外任意一点 P 处的磁场方向。如图 4-27 所示，以 OP 为对称轴，取一对横向宽度相等的长直电流 $I' = J_s dl'$ 和 $I'' = J_s dl''$ ，它们在 P 点产生的磁场分别为 $d\vec{B}'$ 和 $d\vec{B}''$ 。这两部分磁场的 \hat{y} 分量相互抵消，而 \hat{x} 分量相叠加，合成磁场的方向平行于电流平面。由此可推知，无数对对称长直电流产生的总磁场也一定平行于电流平面。由电流面无限大的已知条件及磁场与电流的右手定则关系可以看出，与电流面等距离的场点上的磁场模值相等，平面两侧的磁场方向相反。

根据以上所述的磁场分布特点，可以作一个矩形回路 $abcd$ ，其中 ab 、 cd 两边与电流平面平行，而 bc 和 da 两边被电流平面等分。该回路所包围电流为 $J_s l$ ，由安培回路定律

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2lH = J_s l$$

因此得

$$H = \frac{1}{2} J_s \quad (4-45)$$

或写成矢量形式

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{J}_s \times \hat{n} \quad \hat{n} \text{ 为电流平面单位法向矢量}$$

这个结果说明，在无限大均匀平面电流的两侧的磁场是与平面平行的均匀磁场，与场点到电流平面的距离无关，但平面两侧的磁场方向相反。

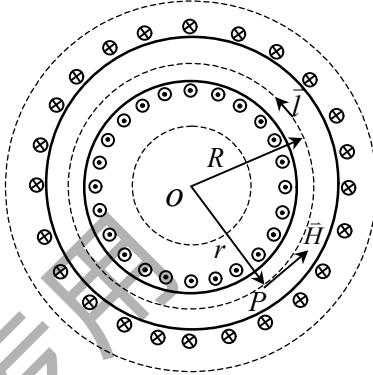


图4-26 螺绕环的磁场

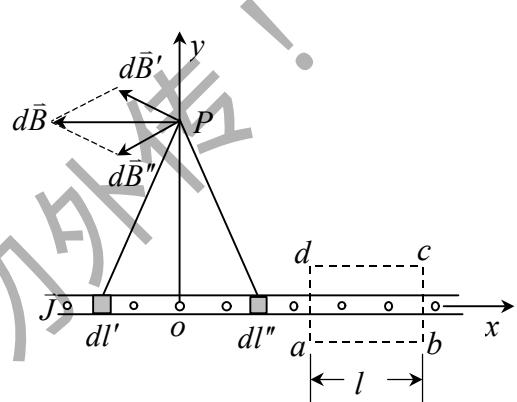


图4-27 无限大电流平面的磁场

§ 4.5 矢量磁位和标量磁位

在静电场和恒定电场的讨论中，我们都曾引入电位 U 做为分析和计算电场的辅助函数，使许多问题的求解得到了简化。在研究磁场时，也可以引入类似的磁场辅助函数。下面分别介绍恒定磁场的两个辅助位函数----矢量磁位和标量磁位。

一. 矢量磁位

由矢量分析与场论基础知道，散度恒等于零的矢量场（即管形场）可以在整个场空间被表示成另一个矢量场的旋度。磁场高斯定律表示了磁通量密度 \bar{B} 在场空间任意点上的散度恒为零，因此我们可以引入一个矢量 \bar{A} 做为 \bar{B} 的辅助函数，令

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (4-46)$$

\bar{A} 称为**矢量磁位**或**磁矢位**，单位是韦伯/米（Wb/m）。

定义式(4-46)给出了 \bar{A} 的旋度方程，利用此式可以由已知的 \bar{A} 计算出 \bar{B} 。但仅由此方程我们却无法根据已知的 \bar{B} 来确定出 \bar{A} ，因为如果 \bar{A}_1 是满足方程(4-46)的一个解，

令

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_1 + \nabla \phi$$

ϕ 可以是任意标量函数，上式两边取旋度，得

$$\nabla \times \bar{A}_2 = \nabla \times \bar{A}_1 + \nabla \times \nabla \phi$$

由于 $\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$ ，所以有

$$\nabla \times \bar{A}_2 = \nabla \times \bar{A}_1 = \bar{B}$$

可见 \bar{A}_2 也是满足方程(4-46)的解。因为 ϕ 是任意的，故对一个给定的 \bar{B} 将有无穷多个 \bar{A} 与之对应，它们都能满足式(4-46)。

为了避免 \bar{A} 的这种随意性，必须再对其附加另外的限制，这个限制就是给定 \bar{A} 的散度。亥姆霍兹定理指出：某区域内的一个矢量场函数可以通过给定它的旋度函数和散度函数以及它在区域边界上的边界条件来唯一确定。给定旋度和给定散度是相互独立的，给定不同的散度将使该矢量的解不同，但不影响解的旋度，其旋度只由给定的旋度条件决定；同样，如何给定旋度也不影响该矢量的散度。由于我们引入 \bar{A} 的目的只是为了由(4-46)式计算 \bar{B} ，而不必考虑 \bar{A} 值本身的物理意义，因此我们可以根据计算方便的需要来任意给定 $\nabla \cdot \bar{A}$ 。对于恒定磁场，我们一般选择

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad (4-47)$$

上式称为 \bar{A} 的**库仑规范**。恒定磁场中的磁矢位 \bar{A} 由式(4-46)和式(4-47)所共同定义。

将 $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ 两边除以 μ_0 ，并将安培回路定律微分形式代入，得

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu_0 \bar{J}$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla \nabla \cdot \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$ 和式(4-47)，上式变为

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad (4-48)$$

上式表明磁矢位 \bar{A} 满足矢量泊松方程。对 $\bar{J} = 0$ 的区域

$$\nabla^2 \bar{A} = 0 \quad (4-49)$$

\vec{A} 满足矢量拉普拉斯方程。

矢量的拉普拉斯运算由 $(\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times)$ 所确定。在直角坐标系中， $\nabla^2 \vec{A}$ 具有如下简单形式

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \\ &= \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z\end{aligned}$$

代入式(4-48)，可以得到 \vec{A} 的三个分量所满足的方程

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad (4-50a)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad (4-50b)$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (4-50c)$$

这是三个标量泊松方程，它们与静电位 U 所满足的方程有相同的形式。如果我们讨论的是无界空间情况，且场源电流分布在有限区域内，可以断定它们的解亦应与 U 的无界空间解 (2-42) 式有同样形式，即

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{J_x}{R} d\tau' \quad (4-51a)$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{J_y}{R} d\tau' \quad (4-51b)$$

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{J_z}{R} d\tau' \quad (4-51c)$$

其中 τ' 是产生磁场的电流区域。将以上三式矢量相加，就得到矢量泊松方程 (4-48) 在无界空间内的解

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\bar{J}}{R} d\tau' \quad (4-52a)$$

电流元 $\bar{J}d\tau'$ 所产生的磁矢位为

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \bar{J}}{4\pi R} d\tau' \quad (4-52b)$$

如果磁场的源是面电流 \bar{J}_s 或线电流 I ，不难写出

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{s'} \frac{\bar{J}_s}{R} ds' \quad (4-53a)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \bar{J}_s}{4\pi R} ds' \quad (4-53b)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{l'} \frac{d\bar{l}'}{R} \quad (4-54a)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\bar{l}' \quad (4-54b)$$

利用磁矢位解决磁场问题，一般是先用式 (4-52) ~ (4-54) 求出分布电流所产生的 \vec{A} [边值问题往往要结合边界条件求解微分方程 (4-48) 或 (4-49) 得到 \vec{A}]，然后再通过 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 计算出对应的 \vec{B} 。从表面上看，求 \vec{A} 仍是矢量积分运算并且要再次运算才能得到

\bar{B} ，这似乎比直接求 \bar{B} 更加复杂。但实际上，由于求 \bar{A} 的积分运算要比用毕奥--沙伐定律直接求 \bar{B} 简单。尤其是对最常遇到的直线电流和圆环电流的源分布情况，通过合理地选择坐标，有可能使 \bar{A} 只有一个分量， \bar{A} 的求解变成标量运算。而由 \bar{A} 求 \bar{B} 又只是一个十分简单的微分运算，因此对于一些复杂的磁场问题，特别是边值问题，使用磁矢位的确可以达到简化运算的目的。

二. 标量磁位

在讨论静电场时，我们曾引入了一个标量位函数 U 做为求解电场的辅助函数。对于恒定磁场，是否也可以作类似的引入呢？由场论基础的讨论可知，要用一个标量函数 φ 来表示一个矢量场 \bar{F} ，应定义 $\bar{F} = \nabla \varphi$ （或 $\bar{F} = -\nabla \varphi$ ）。并且由于 $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ ，要求矢量场 \bar{F} 必须是无旋场（即有势场）。对于静电场，因有 $\nabla \times \bar{E} = 0$ ，故在整个电场空间定义 $\bar{E} = -\nabla U$ 是成立的。但对于恒定磁场，安培回路定律 $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ 表明了磁场是一个有旋场，有电流处磁场的旋度不为零。因此，在整个磁场空间内使用一个标量函数的梯度来表达磁场是不成立的。

但在许多磁场问题中，我们求解的空间只局限在没有电流的区域，此区域可以保证 $\nabla \times \bar{H} = 0$ 成立，这时我们就可以引入一个标量位函数来表示磁场。令

$$\bar{H} = -\nabla U_m \quad (4-55)$$

U_m 称为标量磁位或磁标位，单位是安培（A）。

由前面小节的讨论已知，磁矢位 \bar{A} 的适用范围已经包括了 $\bar{J} \neq 0$ 和 $\bar{J} = 0$ 的任意磁场空间，这似乎没有必要再引入磁标位 U_m 了。其实不然，在许多问题中，使用磁标位 U_m 要比用磁矢位 \bar{A} 更为方便。因为按照式(4-55)有

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} = -\mu_0 \nabla U_m$$

对上式取散度，并由磁场高斯定律可得到

$$\nabla^2 U_m = 0 \quad (4-56)$$

上式表明磁标位 U_m 满足拉普拉斯方程。很明显，求解标量的拉普拉斯方程要比求解 \bar{A} 的矢量微分方程更为容易。

从式(4-55)的定义可知， U_m 是 \bar{H} 的势函数。由势函数与有势场的对应关系，可得到空间一点 P 处的磁标位与磁场强度的积分关系为

$$U_{mP} = \int_P^{P_0} \bar{H} \cdot d\bar{l} \quad (4-57)$$

P_0 是磁标位的参考点。当场源电流分布在有限区域内时，一般将参考点选在无穷远处，此时 P 点的磁标位为

$$U_{mP} = \int_P^{\infty} \bar{H} \cdot d\bar{l} \quad (4-58)$$

从前面的定义看到， U_m 与 \bar{H} 之间的微分和积分关系与电场中 U 与 \bar{E} 的关系是完全对应的。但必须注意， U_m 只能用在无电流的有限区域内，并且式(4-57)的积分路径一般也不与电流回路交链，否则会使 U_m 出现多值性。

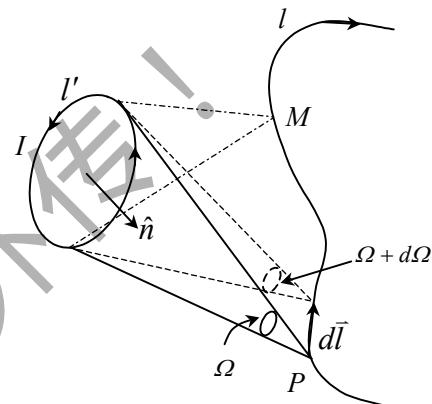


图4-28 电流回路的磁标位

闭合电流回路是磁场源的最常见形式，根据磁标位的定义，不难计算出其产生的 U_m 。图4-28中的 I' 是一个流有恒定电流 I 的细导线回路，下面求该电流回路在任意点 P 处产生的 U_m 。当场点 P 沿着某曲线 l 位移 $d\vec{l}$ 时，设该位移使 P 点对 I' 的立体角产生一个增量 $d\Omega$ 。利用安培回路定律的推导过程式(4-34)，有

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{4\pi} d\Omega$$

代入式(4-58)，得到任意点 P 的磁标位为

$$U_m = \frac{I}{4\pi} \int_P^\infty d\Omega = \frac{I}{4\pi} (0 - \Omega) = -\frac{I}{4\pi} \Omega \quad (4-59)$$

其中的 Ω 是点 P 对回路 I' 所张的立体角。

在一般情况下，求任意点 P 对回路面积的立体角并不很容易。但当 P 点与回路 I' 的距离比回路的尺寸大得多时，即远区场的情况，则立体角可以近似写成

$$\Omega = -\frac{S \hat{n} \cdot \bar{R}}{R^3}$$

其中 \bar{R} 是自回路中心到 P 点的相对位置矢量， S 为电流回路所围面积， \hat{n} 是 S 的法矢，与 I' 的方向成右手定则关系，如图4-29所示。将上式的近似值代入式(4-59)，即得到电流回路产生的远区磁标位

$$U_m = \frac{IS \hat{n} \cdot \bar{R}}{4\pi R^3} = \frac{IS \cos\theta}{4\pi R^2} \quad (4-60)$$

其中的 θ 是 \hat{n} 与 \bar{R} 的夹角。

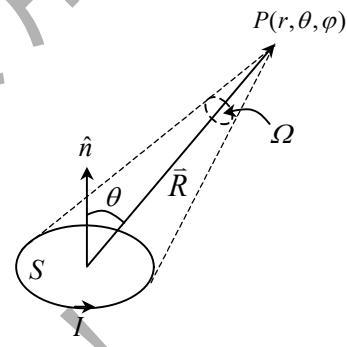


图4-29 直线电流的磁矢位

例4.8 计算无限长直线电流产生的磁矢量位 \vec{A} 和磁通量密度 \vec{B} 。

解：首先计算一段长度为 l 的直线电流段产生的磁矢位，如图4-30所示。利用式(4-54)可以得到

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[(z' - z) + \sqrt{(z' - z)^2 + r^2} \right] \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\left(\frac{l}{2} - z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} - z\right)^2 + r^2}}{-\left(\frac{l}{2} + z\right) + \sqrt{\left(\frac{l}{2} + z\right)^2 + r^2}} \end{aligned}$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}}{-\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}}$$

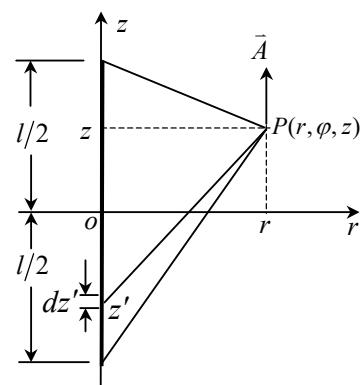


图4-30 直线电流的磁矢位

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\left(\frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}\right)^2}{r^2} \approx \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l}{r} \quad (4-61)$$

可见,由上式得到无限长直线电流产生的 \vec{A} 趋于无穷大。产生无穷大的原因在于表达式(4-54)是在源电流只限于有界区域的情况下得到的,该式满足 \vec{A} 的泊松方程的条件是 $\vec{A}_\infty = 0$,即 \vec{A} 以无限远处为零参考点。而对本题这种源电流分布于无限区域的情况,如果再以无限远为磁矢位参考点,就会导致场点的 \vec{A} 值发散。我们在讨论无限长线电荷的电位时也出现了类似的问题。考虑到 \vec{A} 的数值只具有相对意义,此时可以将 \vec{A} 的零参考点选择在非无限远的某点上。为此,我们可以构造一个新的磁矢位 \vec{A}'_r ,令

$$\vec{A}'_r = \vec{A}_r - \vec{A}_{r_0}$$

上式中的 \vec{A}_r 和 \vec{A}_{r_0} 分别是按(4-54)式计算的场点 \vec{r} 处的磁矢位和所定参考点 \vec{r}_0 处的磁矢位。将 \vec{A}_r 和 \vec{A}_{r_0} 的结果表达式(4-61)代入上式,并省略 \vec{A}'_r 的上下标,得

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{l}{r} - \ln \frac{l}{r_0} \right] \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0 \end{aligned} \quad (4-62)$$

很明显,此时的 \vec{A} 以 r_0 点为零参考点。选择不同的 r_0 使 \vec{A} 的表达式附带一个不同的常矢,但这对由 \vec{A} 求 \vec{B} 的微分运算结果没有影响,此时的磁通量密度为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\hat{\varphi} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

与安培回路定律或毕奥--沙伐定律所求出的结果完全相同。

例4.9 双导线传输线可以视为通过反方向电流的无限长平行直线电流,设线间距离为 $2a$,如图4-31所示。求它所产生的 \vec{A} 和 \vec{B} 。

解:本例也是源分布无界的情况,求解时可以利用式(4-62)的结果进行叠加。但由于本题的两电流线方向相反,即使利用式(4-54)直接计算叠加,也可以使场点的总磁矢位为有限值,如利用上例中的(4-61)式的结果,可以得到

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{l}{r_1} - \ln \frac{l}{r_2} \right] \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi}{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \hat{r} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \hat{\varphi} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

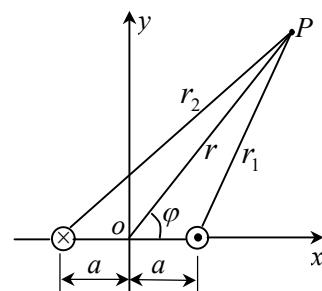


图4-31 双线传输线的磁场

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi r_1^2 r_2^2} [\hat{r}(a^2 + r^2) \sin \varphi + \hat{\varphi}(r^2 - a^2) \cos \varphi]$$

例4.10 一半径为 a 的圆形细导线回路上流有恒定电流 I , 求回路中心上方任意点 P 处的 U_m 和 \bar{B} 。

解: 以场点 $P(0,0,z)$ 为球心, R 为半径做一球面, 如图4-32所示。圆形回路 l 在球面上截出的球冠面积为

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

S 对 P 点所张的立体角为

$$\Omega = \frac{S}{4\pi R^2} \cdot 4\pi = 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)$$

将上式代入(4-59)式, 得

$$U_m = -\frac{I}{4\pi} \Omega = \frac{I}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 1\right)$$

上式的 U_m 只是圆环轴线上场点的磁标位, 从原则上讲, 只有当所求场点为空间任意点时, 才可利用公式 (4-55) 计算 \bar{H} 及 \bar{B} 。但由本题的对称关系可以看出, 回路上各电流元在轴线上点产生的 dB_r 分量相互抵消而 dB_z 分量同向叠加, P 点处的 \bar{B} 只有 \hat{z} 分量, 故式 (4-55) 中的 \bar{B} 只由 $\partial U_m / \partial z$ 项决定, 因此只需场点坐标 z 为任意就可以了。由此可解得轴线上场点的磁通量密度为

$$\begin{aligned} \bar{B} &= -\mu_0 \nabla U_m = -\hat{z} \mu_0 \frac{\partial U_m}{\partial z} \\ &= \hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

§ 4.6 磁偶极子

若一个平面电流回路的尺寸远远小于场点到该回路的距离, 此电流回路可以视为一个矢量点源, 称为磁偶极子。在上一节的讨论中, 已经得到了磁偶极子的磁标位表达式

$$U_m = \frac{IS \hat{n} \cdot \bar{R}}{4\pi R^3}$$

式中的 \bar{R} 是自回路到场点 P 的相对位置矢量, S 为电流回路所围面积, \hat{n} 是 S 的法矢, 与 l 的方向成右手定则关系, 如图4-33所示。为了书写方便, 我们记

$$\bar{m} = IS \hat{n} = m \hat{n} \quad (4-63)$$

\bar{m} 称作磁偶极子的磁矩, 单位是安培·米² ($A \cdot m^2$)。代入式 (4-60) 得

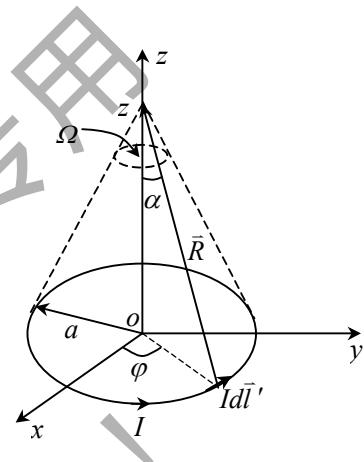


图4-32 圆形电流轴线上的磁场

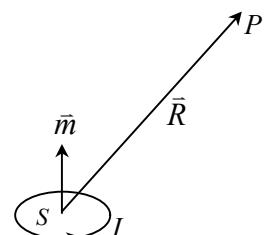


图4-33 磁偶极子

$$U_m = \frac{\bar{m} \cdot \bar{R}}{4\pi R^3} \quad (4-64)$$

将 U_m 表达式代入式 (4-55)，得

$$\vec{H} = -\nabla U_m = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\bar{m} \cdot \bar{R}}{R^3} \quad (4-65)$$

整理后得到

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\bar{m} \cdot \bar{R}}{R^5} \bar{R} - \frac{\bar{m}}{R^3} \right)$$

下面再讨论磁偶极子产生的磁矢位 \vec{A} 。根据例1.2结果 $-\frac{\bar{R}}{R^3} = \nabla \frac{1}{R}$ ，(4-65) 变为

$$\vec{H} = -\nabla U_m = -\frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\bar{m} \cdot \bar{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\bar{m} \cdot \nabla \frac{1}{R} \right) \quad (4-66)$$

利用矢量恒等式有 $\bar{m} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \bar{m} \right) - \frac{1}{R} \nabla \cdot \bar{m}$

上式中的 ∇ 是对场点坐标运算， \bar{m} 只是源点坐标的函数，故 $\nabla \cdot \bar{m} = 0$ ，因此有

$$\bar{m} \cdot \nabla \frac{1}{R} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{R} \bar{m} \right)$$

代入式 (4-66)，得

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\bar{m}}{R} \right)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ ，上式变成

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \nabla \times \frac{\bar{m}}{R} + \nabla^2 \frac{\bar{m}}{R} \right) \\ &= \nabla \times \frac{\bar{m}}{4\pi R} + \nabla^2 \frac{\bar{m}}{4\pi R} \end{aligned} \quad (4-67)$$

\bar{m} 是源点坐标的函数，可以提到场点坐标算子 ∇^2 之外，上式的后一项为

$$\nabla^2 \frac{\bar{m}}{4\pi R} = -\bar{m} \nabla^2 \frac{-1}{4\pi R} = -\bar{m} \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

对远区场有 $\bar{r} \neq \bar{r}'$ ，因此 $\delta(\bar{r} - \bar{r}') = 0$ ，式 (4-67) 变成

$$\vec{H} = \nabla \times \frac{\bar{m}}{4\pi R}$$

由此得到

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mu_0 \bar{m}}{4\pi R} \right) \quad (4-68)$$

与定义式 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 比较，得到磁偶极的矢量磁位

$$\vec{A} = \nabla \times \frac{\mu_0 \bar{m}}{4\pi R} \quad (4-69)$$

并由矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$ 得知，上式也一定满足 \vec{A} 的另一定义式 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 。

利用矢量恒定式并考虑 \vec{m} 仅是源点坐标的函数，式 (4-69) 又可以表示成

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \frac{1}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3} \quad (4-70)$$

做为特例，若 $\vec{m} = I S \hat{z} = m \hat{z}$ ，且位于坐标系原点。则远区场点 $P(r, \theta, \varphi)$ 处的场位表达式分别为

2020 网络数学专用
请勿外传！

$$U_m = \frac{m\hat{z} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (4-71)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m\hat{z} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \times \hat{r} \quad (4-72)$$

$$= \hat{\phi} \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3m\hat{z} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{m\hat{z}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3m \cos \theta}{r^3} \hat{r} - \frac{m(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)}{r^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} [2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}] \end{aligned} \quad (4-73)$$

上述的 U_m 、 \vec{B} 表达式与电偶极子的 U 和 \vec{E} 表达式完全类似，因此，在讨论平面电流回路的远区场时将其称为磁偶极子。

§ 4.7 磁介质的磁化

除真空以外，任何媒质在磁场的作用下都要发生变化并反过来影响磁场，这种现象称为**磁化**，此时的媒质叫做**磁介质**。介质的磁化产生于磁场对电子公转运动和自旋运动的作用。电子的这两种运动都可以等效为小电流回路形式的磁偶极子，具有电子公转磁矩 \vec{m}_r 和电子自旋磁矩 \vec{m}_s 。无外磁场作用时，众多的电子磁矩因方向随机而统计平均值为零，故一般的介质不显示宏观磁性。当外磁场存在时，随介质的微观结构不同可能出现以下几种磁化效应：

1. 外磁场使电子的公转状态发生改变

按经典的电子理论，电子所具有的动能和电子与原子核之间的库仑力作用使得电子作绕核的圆周运动。这种圆周运动形成一个圆形电流。假设一个电子的运动速度为 v ，轨道半径为 r ，则其轨道运动的周期为

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

由于每个周期内通过轨道任意截面的电量是一个电子的电量 e ，故圆形电流的强度为

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

电子的公转磁矩为

$$m_r = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

以氢原子为例，常态下 $r = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ ， $v = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ ，代入上式得

$$m_r = \frac{evr}{2} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2.2 \times 10^6 \times 0.53 \times 10^{-10}}{2} = 0.93 \times 10^{-23} (\text{A} \cdot \text{m}^2)$$

按照运动学原理，电子作轨道圆周运动时，具有一个角动量 \vec{L} 。 \vec{L} 的方向与质点的运动方向 \vec{v} 成右手螺旋关系，可见， \vec{L} 与 \vec{m}_r 的方向正好相反。

当此公转电子处于外磁场 \vec{B} 内时，由例题4-4的分析结果知道，其等效的电流环要受到一个使其转向的力矩 $\vec{T} = \vec{m}_r \times \vec{B}$ 。因 \vec{L} 与 \vec{m}_r 反向，故 \vec{T} 与 \vec{L} 垂直，如图4-34所示。在力矩 \vec{T}

的作用下，将使 \vec{L} 绕着 \vec{B} 的方向作逆时针进动，如同陀螺的旋转摆动一样。此时的电子轨道运动可以分解为两部分的叠加：一部分是无外磁场时电子的原有公转运动；另一部分是由 \vec{T} 的作用所产生的绕 \vec{B} 圆周运动，运动方向与 \vec{B} 的方向成右手螺旋关系。后一部分电子圆周运动亦相当于一个小电流环，产生一个与 \vec{B} 方向相反的附加磁场 $-\Delta\vec{B}$ ，使该点的外磁场被减弱。这种因外磁场与电子公转运动的相互作用而使介质内磁场被削弱的现象称为抗磁效应。用类似的方法可以分析证明，电子和原子核的自旋运动也会产生抗磁效应。抗磁效应存在于所有介质之中，但其反向附加场的强度与外磁场相比是非常微弱的，一般只有 10^{-5} 以下量级。如果某种磁介质只存在抗磁效应，而没有后面介绍的其它磁化效应，我们就称其为抗磁性磁介质。如金、银、铜、石墨、氧化铝等物质都是抗磁介质。

2. 磁场使分子固有磁矩转向。

与电介质分子可以分类为极性分子和非极性分子的情况类似，磁介质分子也可分为两类：一类分子其内部的各电子和原子核的自旋磁矩及公转磁矩是成对存在的，在没有外磁场时，磁矩相互抵消，整个分子的总磁矩为零。当施加外磁场后，这类磁介质只出现抗磁效应，这就是前面所说的抗磁性磁介质。另一类分子其内部的电子磁矩并不完全抵消，整个分子存在着一个固有磁矩。无外磁场时，各分子的固有磁矩因无序排列而使其统计平均值为零，故对外并不显宏观磁性。施加外磁场后，分子的固有磁矩将受到转矩作用而转向外磁场方向，大量分子磁矩的规则转向使介质内的磁场增强，这种现象称为顺磁效应。顺磁效应产生的附加磁场与外施磁场相比也是十分微弱的(10^{-3})，但一般要强于它的抗磁效应，所以将氧、氮、铝、 F_2SO_4 等一类具有顺磁效应的物质称为顺磁性磁介质。

3. 外磁场使磁畴发生变化。

对铁、镍、钴等金属及它们的部分氧化物这一类特殊的顺磁介质，由于原子之间相互交换力的作用，将介质空间分成了许多小区域。在每个小区域内，所有分子的固有磁矩都呈平行排列，这些小区域被称为磁畴，这种现象叫做自发磁化。磁畴的形状和大小不一，典型的线度约为 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ m 量级，相邻磁畴之间以一层称为磁畴壁的磁矩渐变薄层分隔。无外磁场时，因不同磁畴的磁矩指向各异，故宏观磁效应是相互抵消的(永磁体除外)。在外磁场的作用下，磁畴将发生变化，此变化分为两步：外磁场较弱时，磁矩方向与外磁场相同或相近的磁畴会将其磁畴壁向外推移，扩大自己的体积；外磁场达到一定强度后，每个磁畴的磁矩方向都要不同程度地向外磁场方向转向。磁畴的这两种变化都会使介质内的磁场 \vec{B} 剧烈增大，甚至超过外施场几个数量级，表现出非常强的顺磁效应。此时的顺磁效应称为铁磁效应，这类物质称为铁磁性磁介质。

由以上分析可以看出，不论是哪种磁化效应，其最终结果都是在磁介质空间产生了大量的分子磁矩平均值不再为零的小磁偶极子。很明显，介质磁化效应的强弱与磁偶极子群的磁矩矢量和有关。为此，我们引入一个矢量点函数——磁化强度矢量 \vec{M} 来描述磁介质内各点的磁化程度。假设磁介质内点 $P'(x', y', z')$ 处的体积元 $\Delta\tau$ 内的分子磁矩总和为 $\sum\vec{m}$ ，则定义为

$$\vec{M}(x', y', z') = \lim_{\Delta\tau} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta\tau} \quad (4-74)$$

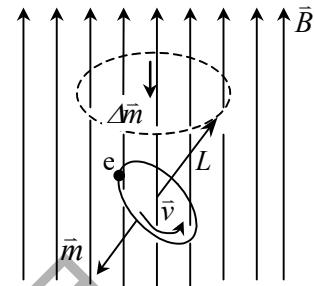


图4-34 电子在磁场的进动

\bar{M} 的物理意义为磁化磁介质某点上单位体积内分子磁矩矢量和，单位是安培/米（A/m）。

磁化后的磁介质将产生一个附加磁场叠加在外源所产生的原磁场上，此附加场可以由磁化强度 \bar{M} 计算得到。由前面的分析已知，从产生场的角度讲，磁化后的磁介质就相当于真空中的一群微小磁偶极子，因此它所产生的附加磁场实际上也就是这群磁偶极子在真空中所产生的磁场。图4-35表示一块体积为 τ' 的磁化磁介质，我们来计算它在空间某点 $P(x, y, z)$ 处所产生的磁矢位。磁介质内部点 $P'(x', y', z')$ 上的体积元 $d\tau'$ 中的磁偶极子群，可以被看成一个磁矩为 $\bar{M}(x', y', z')d\tau'$ 的基本磁偶极子，根据式(4-70)，此基本磁偶极子在场点 $P(x, y, z)$ 处所产生的磁矢位为

$$d\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{M} \times \frac{\bar{R}}{R^3} d\tau'$$

整个磁介质区域产生的磁矢位是上式的体积分

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \bar{M} \times \frac{\bar{R}}{R^3} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \bar{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\tau' \end{aligned} \quad (4-75)$$

利用矢量恒等式

$$\bar{M} \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times \bar{M} - \nabla' \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right)$$

式 (4-75) 可以写成

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla' \times \left(\frac{\bar{M}}{R} \right) d\tau'$$

再利用矢量恒等式

$$\int_{\tau'} \nabla' \times \bar{F} d\tau' = - \oint_{S'} \bar{F} \times \hat{n} ds'$$

变换上式右边第二项，得到

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \bar{M}}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\bar{M} \times \hat{n}}{R} ds' \quad (4-76)$$

式中的 S' 是磁介质区域 τ' 的表面， \hat{n} 是 S' 的外法矢。如果记

$$\bar{J}_m = \nabla' \times \bar{M} \quad (4-77)$$

$$\bar{J}_{ms} = \bar{M} \times \hat{n} \quad (4-78)$$

则式 (4-76) 可以写成

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\bar{J}_m}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\bar{J}_{ms}}{R} ds' \quad (4-79)$$

上式右边第一项与体分布的自由电流所产生的磁矢位公式(4-52)形式相同，而第二项与表面分布的自由电流的磁矢位公式(4-53)形式相同。这表明，一块磁化磁介质的附加磁场贡献，可以等效成磁介质内部和磁介质表面上的两种等效电流所产生的磁场。等效电流密度 \bar{J}_m 称为**体磁化电流密度或体束缚电流密度**，单位是安培/米² (A/m²)，与体自由电流密度的单位一致；等效电流密度 \bar{J}_{ms} 称为**面磁化电流密度或面束缚电流密度**，它仅存在于磁化介质的表面，单位是安培/米 (A/m)，与面自由电流密度的单位一致。

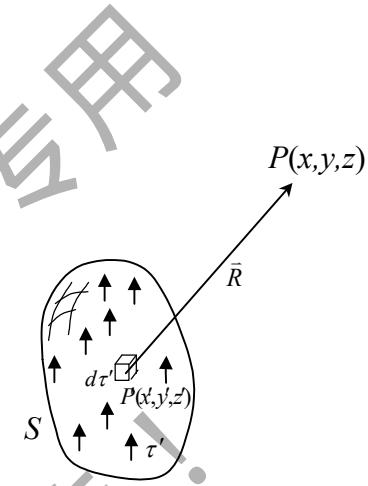


图4-35 磁化磁介质产生的磁场

应该明确，磁化电流是磁化磁介质内的分子电流对磁场贡献的一种等效，它们与自由电流 \bar{J} 和 \bar{J}_s 有本质的区别。磁化电流并不产生电荷的宏观位移，它只是众多分子电流作用的一种宏观等效。但在产生磁场方面，磁化电流和自由电流又都遵循相同的规律和计算公式。

磁化磁介质的附加磁场也可以通过计算磁标位得到。根据式(4—64)，磁介质内部 $P'(x',y',z')$ 点处体积元 $d\tau'$ 中的基本磁偶极子 $\bar{M}(x',y',z')d\tau'$ 在场点 $P(x,y,z)$ 处产生的磁标位为

$$dU_m = \frac{1}{4\pi} \bar{M} \cdot \frac{\bar{R}}{R^3} d\tau' = \frac{1}{4\pi} \bar{M} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\tau'$$

对上式体积分，得到整个磁化介质在 $P(x,y,z)$ 点产生的磁标位

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \bar{M} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} -\nabla' \cdot \bar{M} \frac{1}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \nabla' \cdot \left(\frac{\bar{M}}{R} \right) d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} -\nabla' \cdot \bar{M} \frac{1}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\bar{M} \cdot \hat{n}}{R} ds' \end{aligned} \quad (4-80)$$

若记

$$\rho_m = -\nabla' \cdot \bar{M} \quad (4-81)$$

$$\rho_{ms} = \bar{M} \cdot \hat{n} \quad (4-82)$$

则式(4—80)写成

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\rho_m}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_{s'} \frac{\rho_{ms}}{R} ds' \quad (4-83)$$

上式的第一项与由体电荷计算静电位的公式相似，而第二项与由面电荷计算静电位的公式相似，故分别称 ρ_m 和 ρ_{ms} 为等效磁荷体密度和等效磁荷面密度，单位也是 (A/m^2) 和 (A/m) 。上式表明，一块磁化磁介质贡献的附加磁场，也可以等效成磁介质内部和和磁介质表面上的两种等效磁荷所产生的磁场。应该明确，这里给出的磁荷只是为了方便介质磁场分析所引入的一个等效概念，并不表明在自然界中真有独立磁荷(即磁单极)存在。

磁化电流和等效磁荷都可以表示磁介质的磁化效应，具体采用哪种形式，应根据具体问题的方便而决定。

§ 4.8 磁介质中恒定磁场的基本定律

磁化介质中的磁化强度 \bar{M} 决定于介质中的实际磁场(即外源磁场与附加磁场之和)以及介质材料的自身特性。在实际磁场尚未求出时， \bar{M} 亦为未知量，所以通常并不能利用式(4—76)或式(4—80)来计算出磁化介质的附加场。但由上面小节的分析却看到，磁化介质对磁场的附加影响可以被归结为等效磁化电流(或磁荷)在真空中的作用，并且磁化电流与真空中的自由电流按照相同的规律激发磁场。因此，有磁介质存在的实际磁场可以认为是自由电流和磁化电流这两种源在真空中共同产生的，从而将一个有介质的磁场问题转化为两种源的真空场问题。下面按这个思路推导磁介质中磁场的基本定律。

在真空中，安培回路定律的积分表达式可以写成如下形式

$$\oint_I \frac{\bar{B}}{\mu_0} \cdot d\bar{l} = I$$

其中 I 为回路 I 所围面积上通过的电流。有磁介质存在时，任意点处的实际磁场 \bar{B} 是自由电

流和磁化电流在真空中共同激励的结果，故安培回路定律仍然成立，并具有如下形式

$$\oint_l \frac{\bar{B}}{\mu_0} \cdot d\bar{l} = I + I_m \quad (4-84)$$

其中的 I 和 I_m 分别代表回路 l 所围面积上通过的自由电流和磁化电流。如果磁介质充满整个空间，则这两种电流都是体分布，上式可以写成

$$\oint_l \frac{\bar{B}}{\mu_0} \cdot d\bar{l} = \int_s (\bar{J} + \bar{J}_m) \cdot d\bar{s} \quad (4-85)$$

将斯托克斯定理应用到上式的左边，得

$$\int_s \nabla \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\bar{s} = \int_s (\bar{J} + \bar{J}_m) \cdot d\bar{s} \quad (4-86)$$

上式对任意 S 都成立，必有

$$\nabla \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} \right) = \bar{J} + \bar{J}_m$$

把 $\bar{J}_m = \nabla' \times \bar{M}$ 代入上式，并注意此时的 ∇ 和 ∇' 都是对同一点坐标运算而相同，得到

$$\nabla \times \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{J} \quad (4-87)$$

令

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \quad (4-88)$$

\bar{H} 称为磁介质中的**磁场强度**，单位仍为安培/米（A/m），与真空中的磁场强度相比，多了表示介质磁化效应的一项 $-\bar{M}$ 。

将式 (4-88) 代回式 (4-87)，得到

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \quad (4-89)$$

这就是磁介质中的安培回路定律的微分形式，它与真空中的安培回路定律有完全相同的形式，等式右边的 \bar{J} 也只表示自由电流密度。

对一般抗磁性介质和顺磁性介质，磁场强度 \bar{H} 与磁化强度 \bar{M} 成正比关系，记作

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H} \quad (4-90)$$

χ_m 是一个无量纲的数，称为**磁化率**，随介质材料的不同而各异。对一般的顺磁性物质， χ_m 是 10^{-3} 左右的正数；对抗磁性物质为 10^{-5} 左右的负数。把式 (4-90) 代入式 (4-88)，得

$$\bar{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu \bar{H} \quad (4-91)$$

上式称为**磁场的本构方程**，反映了磁介质中两个磁场基本量的联系。

\bar{B} 和 \bar{H} 的比例系数 μ 称为**磁介质的磁导率**，单位是亨利/米（H/m）。 μ_r 称为**相对磁导率**，是无量纲数。

磁介质中恒定磁场的第二基本定律是**磁场高斯定律**，即

$$\oint_s \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (4-92)$$

和

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (4-93)$$

因磁介质中的实际磁场可以分解成自由电流真空场和磁化电流真空场两部分，由前面的讨论

可知，真空磁场必为无散源场，故它们的叠加也一定是无散源场。

磁介质中恒定磁场的基本方程和本构关系归纳如下：

$$\text{微分形式: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{积分形式: } \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = I \quad , \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{本构关系: } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中的两个微分方程只能用在磁导率连续的区域内，而两个积分形式可用于包括不同磁介质分界面在内的任意区域。

在讨论磁介质中的磁场时，仍然经常使用辅助函数磁矢位 \vec{A} 和磁标位 U_m ，它们的定义与真空磁场中的定义相同，即

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (4-94)$$

和

$$\vec{H} = -\nabla U_m \quad (4-95)$$

仿照真空场中的方法可以证明，在均匀磁介质中，两位函数分别满足下面的微分方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (4-96)$$

$$\nabla^2 U_m = 0 \quad (4-97)$$

特别是在无限均匀磁介质中，式(4-96)的解与真空场的解的形式完全对应，即

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{J}}{R} d\tau' \quad (4-98)$$

其中的 τ' 是场源自由电流所在的区域。

由于磁介质中恒定磁场的基本方程、本构关系以及辅助位方程都与真空场的对应方程有相同的形式，唯一区别是将 μ_0 换成了 μ 。因此，当我们遇到均匀无界磁介质内的磁场问题时，也只需将真空场相同源分布问题的解拿来，把其中的 μ_0 换成 μ ，即可得到了磁介质问题的解。对于分区均匀磁介质的问题，除了一些具有对称性的问题可使用安培回路定律求解外，一般要结合边界条件求解各区域内的场函数或位函数的微分方程。

§ 4.9 铁磁介质

抗磁介质和顺磁介质的 μ_r 都接近于1，这表明它们的磁化效应很弱，在相同的场源电流激励下，这些磁介质外的磁场与真空场几乎没有区别。在工程问题中 μ_r 常近似取成1，并称之为非磁性介质。

严格地讲，式(4-91)对于铁磁介质并不成立。铁磁介质的 \vec{B} 与 \vec{H} 并不成简单的线性关系，甚至不是单值关系。铁磁介质的 \vec{B} 与 \vec{H} 关系可以通过实验测定，如图4-36所示的一个被测铁磁材料环，上面绕有激磁线圈和测量环内 \vec{B} 值的感应线圈。由电流表A指

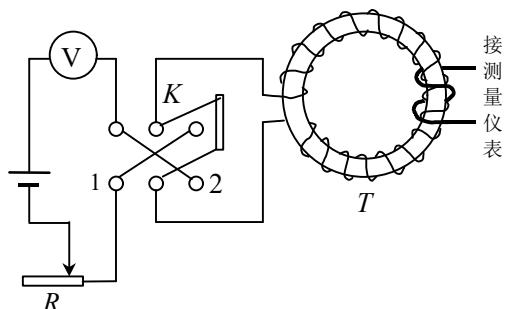


图4-36 铁磁介质测量装置

示的电流 I , 可用安培回路定律计算出环内的磁场强度 \bar{H}

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = NI$$

若磁介质环的周长为 l , 则有

$$H = NI / l = nI$$

n 为激磁线圈单位长度上的匝数。经测试, 得到如下结果:

1. 如果此铁磁介质环从未加过磁场或经过“去磁”处理, 则当 $H=0$ 时, $B=0$ 。当开关 K 合上, 并从零开始逐渐增大电流 I 时, 环内的 $B-H$ 关系如图4-37的 OP 线所示, 此线称为起始磁化曲线。在此过程中, B 随 H 的增大而增大, 但不是线性关系。当 H 增大到一定值(H_s)后, B 值将不再增加, 此时称为磁饱和状态, 这是因为此时介质磁畴的方向已经完全转到了 \bar{H} 方向, 故 B 值不再增加。

2. 当从饱和状态逐渐减小 H (即减小 I)时, $B-H$ 的关系不再服从 OP 曲线, 而是从饱和点 S 沿另一条曲线 $S \rightarrow B_r \rightarrow -H_c \rightarrow S'$ 向下变化。将此时的曲线与起始磁化曲线比较可知, 虽然 H 减小时 B 也在减小, 但 B 的减小“跟不上” H 的减小, 即 B 的变化与 H 的变化相比存在着一定的滞后, 这种现象叫做磁滞效应。当 H 减小到零时, B 并不等于零而是等于 B_r , 这说明铁磁介质在没有传导电流时也可以有磁性, 这种磁性称为剩磁。永磁铁就是利用铁磁质的剩磁制成的。

3. 改变激磁电流的方向(也就是改变环内 \bar{H} 的方向)并使 H 的绝对值从零逐渐增大, 此时的 B 由 B_r 继续减小。当 $H=-H_c$ 时, $B=0$, 铁磁介质中的 B 完全消失, H_c 称为铁磁质的矫顽力。这表明要消除铁磁质的剩磁必须对其施加一个反向的磁场 H_c 。

4. 当 H 向负方向继续增大至 $-H_s$ 时, B 达到反向饱和。如此时逐渐减小 H 的绝对值, 则 $B-H$ 将沿曲线 $S' \rightarrow -B_r \rightarrow H_c \rightarrow S$ 变化, 此曲线与 $S \rightarrow B_r \rightarrow -H_c \rightarrow S'$ 曲线原点对称, 构成一个闭合曲线, 称之为磁滞回线。

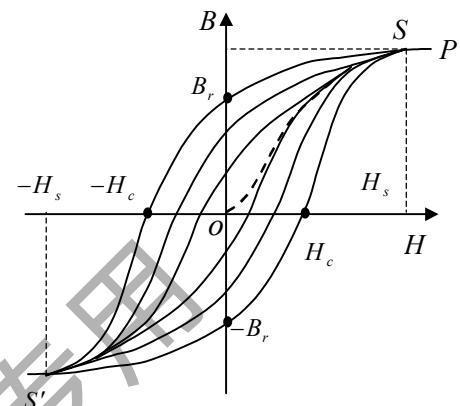


图4-37 铁磁介质的磁化曲线

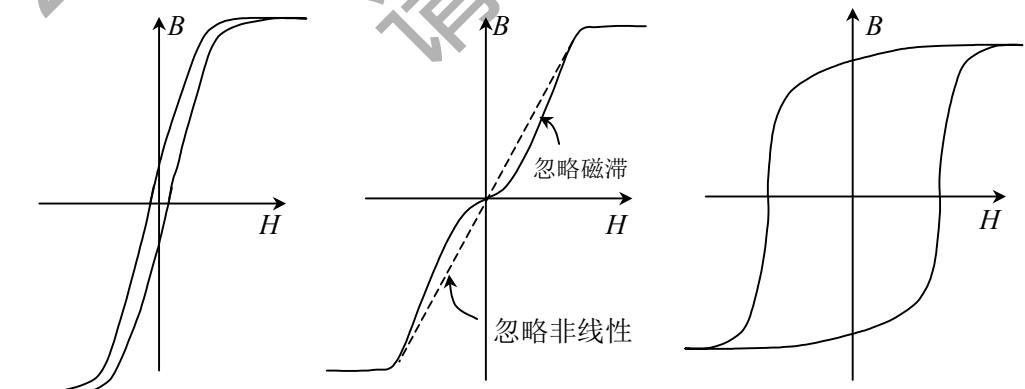


图4-38 软磁材料
磁滞回线

图4-39 软磁材料近
似磁化曲线

图4-40 硬磁材料
磁滞回线

5. 上述的磁滞回线是磁场 H 的变化范围大于 $\pm H_s$ 而得到的磁化曲线，即 B 达到正、反向饱和时的磁化曲线，因此又称为**饱和磁滞回线**。若 B 尚未达到饱和就减小 $|H|$ ，则 $B-H$ 会服从图4-37所示的不同的磁滞回线。这表明在给定了 H 值后，对应的 B 值与磁化的历史有关， $B-H$ 并不是简单的单值对应关系。

从以上的实验分析可见，铁磁介质的 $B-H$ 间的关系是非单值和非线性的。这种复杂的关系给铁磁质的分析和计算带来困难。因此在工程应用时，对于矫顽力 H_c 很小的**软磁材料**，如纯铁、硅钢和坡莫合金等，由于其磁滞回线很瘦，如图4-38所示，在计算时往往忽略它们的磁滞效应，用起始磁化曲线来近似表示 B 与 H 间的关系。在这种近似下， B 与 H 之间是单值关系，式(4-91)成立。但必须注意，此时的 B 和 H 仍是非线性的， μ_r 是一个随 H 值变化的量，如同图4-39所示。这与一般顺磁和抗磁介质 μ_r 为常量的情况是不同的。

一般铁磁介质的相对磁导率 μ_r 都是很大的，可以达到几万甚至几十万。因此，在希望以较小的电流（即较小的 H ）激励较强的磁场（即较大的 B ）的设备上一般都采用铁磁材料，如各种电机和变压器中放置铁心就是最常见的例子。此外，碳钢、钨钢、铁钴镍合金和 γ -氧化铁等材料具有较大的矫顽力 H_c ，磁滞回线较宽甚至近似呈矩形。如图4-40所示。它们一但磁化后对外磁场有较大的抵抗力，或者说它们对于其磁化状态有一定的“记忆能力”，这类材料称为**硬磁材料**，常用来作永久磁体和磁记录材料。

实验指出，当温度超过某一临界值时，铁磁材料的上述特性将消失而成为普通的顺磁介质。这个温度叫做**居里温度**。不同铁磁质有不同的居里温度，如铁为 770°C ，镍为 358°C ，钴为 1127°C 等。把一块有剩磁的铁磁材料加热至居里温度以上再冷却，其剩磁会完全消失。

磁介质也有各向同性与各向异性之分。各向异性介质的 \bar{B} 与 \bar{H} 不同方向， \bar{B} 的每个分量都可能与 \bar{H} 的三个分量有关。 \bar{B} 与 \bar{H} 的关系可表达为

$$B_i = \sum_j \mu_{ij} H_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

此时的磁导率是一个张量， μ_{ij} 称为张量磁导率的元素。本书只涉及各向同性磁介质。

例4.11 磁导率为 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 的铁质无限长圆管中通过均匀恒定电流 I ，管的内、外半径分别为 a 和 b ，截面如图4-41所示。求空间任意点的 \bar{H} 、 \bar{B} 、 \bar{M} 和磁化电流。

解：由安培回路定律容易证明， $r < a$ 区域内的磁场为零。在 $a \leq r \leq b$ 的管壁内，对半径为 r 的积分回路有

$$\oint_L \bar{H}_1 \cdot d\bar{l} = H_1 2\pi r = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2)$$

因此有

$$\bar{H}_1 = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

$$\bar{B}_1 = \hat{\phi} \frac{\mu I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

在 $r > b$ 的管外真空中，对半径为 r 的积分回路有

$$\oint_L \bar{H}_2 \cdot d\bar{l} = H_2 2\pi r = I$$

由此可得

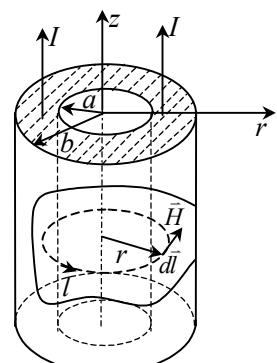


图4-41 通有电流的铁管

$$\bar{H}_2 = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi r} \quad , \quad \bar{B}_2 = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r < a$ 和 $r > b$ 两个区域为真空，磁化强度等于零，而 $a \leq r \leq b$ 管壁内的磁化强度为

$$\bar{M}_1 = \chi_m \bar{H}_1 = \hat{\phi} (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$$

管壁内的磁化电流密度和总磁化电流为

$$\bar{J}_{m1} = \nabla \times \bar{M}_1 = \hat{z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r M_1) = \hat{z} (\mu_r - 1) \frac{I}{\pi (b^2 - a^2)}$$

$$\bar{I}_{m1} = \bar{J}_{m1} \cdot \pi (b^2 - a^2) = \hat{z} (\mu_r - 1) I$$

管壁内侧面上的磁化电流面密度为

$$\bar{J}_{msa} = -\hat{n}_a \times \bar{M}_1 \Big|_{r=a} = -(-\hat{r}) \times \hat{\phi} (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi a} \left(\frac{a^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) = 0$$

管壁外侧面上的磁化电流面密度和总磁化面电流为

$$\bar{J}_{msb} = -\hat{n}_b \times \bar{M}_1 \Big|_{r=b} = -\hat{r} \times \hat{\phi} (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi b} \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right) = -\hat{z} (\mu_r - 1) \frac{I}{2\pi b}$$

$$\bar{I}_{msb} = \bar{J}_{msb} \cdot 2\pi b = -\hat{z} (\mu_r - 1) I$$

从上面结果看到：管壁中的总磁化体电流为 $\hat{z} (\mu_r - 1) I$ ，方向与自由电流 I 相同；而管壁外侧面上的总磁化面电流为 $-\hat{z} (\mu_r - 1) I$ ，方向与自由电流 I 相反。两部分磁化电流在 $r > b$ 空间产生的磁场相互抵消，故 $r > b$ 区域的磁场 \bar{B}_2 与 μ_r 无关。在 $a \leq r \leq b$ 的管壁内部，若 $\mu_r \gg 1$ ，则磁化电流对 \bar{B}_1 的贡献就远大于自由电流的贡献。

§ 4.10 磁介质分界面上的边界条件

将恒定磁场两个基本方程的积分形式分别应用在两种不同磁介质的分界面上，可以得到磁场的边界条件。

图4-42表示磁导率为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质分界面，法线单位矢量 \hat{n} 由2区指向1区。在分界面上作一个圆柱状的小闭合面，令它的顶面和底面分别在分界面的两侧且与分界面平行，面积均为 ΔS ，柱高为 Δh 。设分界面两侧的磁通量密度分别为 \bar{B}_1 和 \bar{B}_2 。将磁场高斯定律的积分形式应用在此闭合面上，然后令柱高 h 趋于零。对有限值的 \bar{B}_1 和 \bar{B}_2 ，圆柱侧面上通过的磁通量随柱高 Δh 趋于零而趋于零，于是得到

$$\oint_s \bar{B} \cdot d\bar{s} = \bar{B}_1 \cdot \hat{n} \Delta S + \bar{B}_2 \cdot (-\hat{n}) \Delta S = 0$$

所以有

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \quad (4-99)$$

或写成

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (4-100)$$

上式称为磁通量密度的法向边界条件，它说明磁通量密度的法向分量在分界面上是连续的。

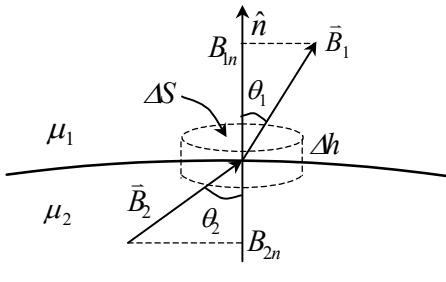


图4-42 磁通量密度的法向边界条件

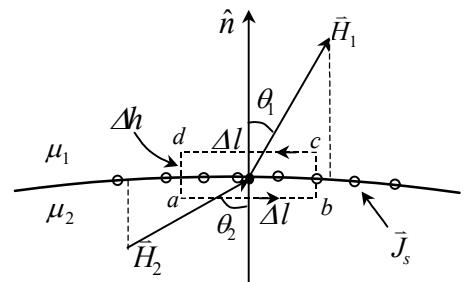


图4-43 磁场强度的切向边界条件

为了推导磁场的另一个边界条件，我们在分界面上作一个矩形小回路 $abcd$ ，如图4-43所示。回路两长边 ab 和 cd 的长为 Δl ，位于分界面两侧且与分界面平行，并设回路法线方向单位矢量 \hat{e} 自纸面向外。将安培回路定律积分形式用在此回路上，然后令回路窄边 Δh 趋于零。对有限值的 \bar{H}_1 和 \bar{H}_2 ，窄边上的积分随窄边长度 Δh 趋于零而趋于零。并且，因此时回路的面积趋于零，穿过此面积的体电流为零，回路仅包围界面上的面电流 \bar{J}_s ，于是有

$$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \bar{H}_1 \cdot (-\hat{n} \times \hat{e}) \Delta l + \bar{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{e}) \Delta l = \hat{e} \cdot \bar{J}_s \Delta l$$

对上式左边的两项使用矢量混合积恒等式，得到

$$\hat{e} \cdot (\hat{n} \times \bar{H}_1) - \hat{e} \cdot (\hat{n} \times \bar{H}_2) = \hat{e} \cdot \bar{J}_s$$

上式对任意的 \hat{e} 都成立，必定有

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (4-101)$$

上式称为磁场强度的**切向边界条件**，它说明当分界面上有表面自由电流时，磁场强度切向分量在界面上是不连续的。在实际问题中，一般都有 $\bar{J}_s = 0$ ，上式变成

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0 \quad (4-102)$$

或记

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (4-103)$$

若记 \bar{H}_1 与法线 \hat{n} 的交角为 θ_1 ， \bar{H}_2 与法线 \hat{n} 的交角为 θ_2 ，当分界面上无自由面电流时，式(4-100)和式(4-103)可以分别写成

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2$$

以上两式相除，并考虑到 $B_1 = \mu_1 H_1$ ， $B_2 = \mu_2 H_2$ ，得到

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4-104)$$

利用上式可以判断磁力线在经过两种磁介质的分界面时，方向是如何改变的。如果1区为空气或一般抗磁、顺磁性磁介质，2区是高 μ_r 的铁磁物质，由于 $\mu_1 \ll \mu_2$ ，此时只要1区的磁场矢量不与界面垂直（即 $\theta_1 \neq 0$ ），则铁磁介质中的磁场矢量就几乎与分界面相平行（即 $\theta_2 \approx \pi/2$ ）。

利用有限值磁场相邻点磁标位差趋于零的概念和式(4—99)的结果,可以分别得到磁标位在分界面上有两个边界条件

$$U_{m1} = U_{m2} \quad (4-105)$$

$$\mu_1 \frac{\partial U_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial U_{m2}}{\partial n} \quad (4-106)$$

这组边界条件在求解无源区域的磁标位方程时经常用到。

磁场的边界条件也可以用矢量磁位 \vec{A} 来表达。在真空或磁导率连续的磁介质中,我们可以推导出如下关系式

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi_m \quad (4-107)$$

上式表明,磁矢位的闭合回路积分等于回路限定面积上所通过的磁通量。这个结论对跨越磁介质分界面的回路依然成立,原因是此时的 \vec{A} 可以看成是自由电流和磁化电流在真空中分别产生的磁矢位之和。这两个真空场都满足式(4—107),当然它们的和亦满足此式。

将式(4—107)应用在图4—43所示的矩形回路上,当窄边趋于零时,磁通量 Φ_m 随回路所围的面积趋于零而为零,即

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

仿磁场切向边界条件的推导过程,由上式可以得到

$$A_{1t} = A_{2t} \quad (4-108)$$

采用类似的分析方法,由 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 可以得到

$$\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4-109)$$

将上式应用在图4—42所示的闭合柱面上,得到

$$A_{1n} = A_{2n} \quad (4-110)$$

由式(4—108)和式(4—110)得

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad (4-111)$$

上式是磁矢位的第一个边界条件,第二个边界条件可以由式(4—101)得出,即

$$\hat{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) = \vec{J}_s \quad (4-112a)$$

或写成 $\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \vec{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \vec{A}_2)_t = \vec{J}_s \quad (4-112b)$

其中 $(\nabla \times \vec{A}_i)_t$ 表示 $\nabla \times \vec{A}_i$ 的切向矢量。

例4.12 真空中一通有恒定电流的无限长直导线,导线半径为 a ,磁导率为 μ 。试求导线内外的磁矢位 \vec{A} 和磁通量密度 \vec{B} 。

解:令载流直导线的轴线与圆柱坐标系的 z 轴重合,电流沿 \hat{z} 方向为正。由于自由电流 \vec{J} 和磁化电流 \vec{J}_m 、 \vec{J}_{ms} 均只有 \hat{z} 分量,由真空场公式

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}}{R} d\tau'$$

可知，各种电流产生的 \vec{A} 的叠加也只有 \hat{z} 分量，即

$$\vec{A} = \hat{z} A_z$$

将上式代入式(4-96)，在 $r < a$ 的区域内， \vec{A} 满足如下方程

$$\nabla^2 A_{1z} = -\mu J$$

由对称性可知， A_{1z} 与坐标 φ 和 z 无关，上式可写成

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{1z}}{dr} \right) = -\mu \frac{I}{\pi a^2}$$

两次积分，可得

$$A_{1z} = -\frac{\mu I}{4\pi a^2} r^2 + C_1 \ln r + D_1$$

在 $r > a$ 的导线外区域， $\vec{J} = 0$ ，因此有

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{2z}}{dr} \right) = 0$$

两次积分，得

$$A_{2z} = C_2 \ln r + D_2$$

积分常数 C_1, D_1, C_2, D_2 可利用边界条件确定。因为当 $r = 0$ 时， A_{1z} 应为有限值，故令 $C_1 = 0$ 。将 A_{1z} 和 A_{2z} 的表达式代入边界条件式(4-111)和(4-112)，并注意到 $\vec{J}_s = 0$ ，令 $r = a$ 得到

$$\begin{aligned} -\frac{\mu I}{4\pi} + D_1 &= C_2 \ln a + D_2 \\ \frac{I}{2\pi} &= -\frac{1}{\mu_0} C_2 \end{aligned}$$

由上面两式解得

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \\ D_2 &= -\frac{\mu I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + D_1 \end{aligned}$$

代入到 A_{1z} 和 A_{2z} 的表达式中，得到导线内、外的磁矢位分别为

$$\vec{A}_1 = \hat{z} \left(-\frac{\mu I}{4\pi a^2} r^2 + D_1 \right)$$

$$\vec{A}_2 = \hat{z} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} - \frac{\mu I}{4\pi} + D_1 \right)$$

式中的 D_1 可以取任意常数。

载流导线内、外的磁通量密度 \vec{B} 分别为

$$\vec{B}_1 = \nabla \times \vec{A}_1 = -\hat{\varphi} \frac{dA_{1z}}{dr} = \hat{\varphi} \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \quad (r < a)$$

$$\bar{B}_2 = \nabla \times \bar{A}_2 = -\hat{\phi} \frac{dA_{2z}}{dr} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > a)$$

上面结果也可由安培回路定律直接求得。

例4.13 如图4-44所示一个有气隙环形铁芯，环的半径为 r_0 ，铁芯的半径为 a ，气隙的宽度为 d ，其中 $a \ll r_0$, $d \ll a$ ，并且 $\mu \gg \mu_0$ 。铁芯上绕 N 匝线圈，线圈内通过直流 I 。分别求铁芯内和气隙内的磁场强度。

解：由边界条件式(4-101)可知，在 $J_s = 0$ 的实际问题中，磁芯内部点和外面附近点的磁场强度 H_i 近似相等，至少是同数量级的。但由于 $\mu \gg \mu_0$ ，可知铁芯内部的磁通量密度 B 要远大于外部，场空间的磁通量几乎全部集中在由铁芯和气隙所构成的回路中。又因为 $d \ll a$ ，故可以略去气隙附近的漏磁通，并由磁通量的连续性可知，铁芯内和气隙内的磁通量和磁通量密度都相同，作为近似计算，可以将铁芯内和气隙内的磁场都看作均匀分布，即

$$\Phi_m = \mu HS = \mu_0 H_0 S$$

(4-113)

其中 $S = \pi a^2$, H 和 H_0 各代表铁芯内和气隙内的磁场强度。根据安培回路定律

$$H(2\pi r_0 - d) + H_0 d \approx H(2\pi r_0) + \mu_r H d = NI$$

由上式可以求出

$$H = \frac{NI}{2\pi r_0 + \mu_r d}, \quad H_0 = \frac{\mu_r NI}{2\pi r_0 + \mu_r d}$$

若将上面的结果代入式(4-113)，得到

$$\Phi_m \frac{2\pi r_0 + \mu_r d}{\mu S} = NI \quad (4-114)$$

环形铁芯及气隙构成了一个磁通量的通路，通常称为**磁路**，上式为**磁路方程**。记

$$R_m = \frac{2\pi r_0 + \mu_r d}{\mu S} \quad (4-115)$$

R_m 称为**磁阻**。将上式代入式(4-114)，磁路方程可表示为

$$\Phi_m R_m = NI \quad (4-116)$$

磁路的许多概念可以和电路相类比：如磁路中的磁通量 Φ_m 相当于电路中的电流 I ，一段磁路上的 $\Phi_m R_m$ （或 $\int_l \bar{H} \cdot d\bar{l}$ ）相当于电路中的电压 U ，磁路中的 NI 相当于电路中的电动势 \mathcal{E} ，记作 \mathcal{E}_m ，称为**磁动势**。代入式(4-116)，得

$$\mathcal{E}_m = \Phi_m R_m \quad (4-117)$$

上式称为无分支闭合**磁路的欧姆定律**。

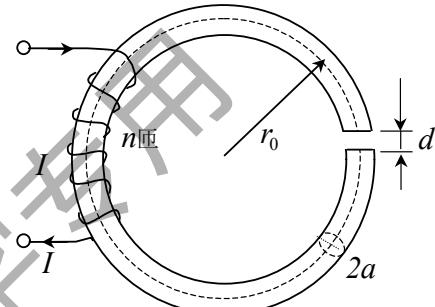


图4-44 有气隙的环形铁心

此外，一段均匀磁介质的磁阻与电路中的电阻也有完全对应的表达式

$$R_m = \int_l \frac{dl}{\mu S} \quad (4-118)$$

并且与电阻遵循相同的串、并联计算法则。电路中的基尔霍夫第一和第二定律对磁路也成立，可以用来解决复杂的磁路问题。

磁路的计算在电机、变压器、电磁铁和仪表设计中都有广泛的应用。但必须明确，磁路的概念是建立在忽略漏磁的基础上的，只有当磁路介质的磁导率足够高时，才可以获得较高的近似精度，这与电路的严格理论是不同的。

习题四

4.1 如图4-45所示，一电子经过A点时，具有速度 $v_0 = 1 \times 10^7 \text{ m/s}$ ，试求：

- (1) 欲使这电子沿半圆自A至C运动，所需的磁场大小和方向；
- (2) 电子自A运动到C所需的时间。

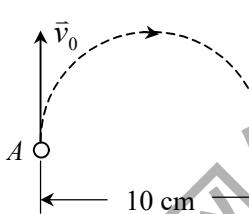


图4-45 题4.1图

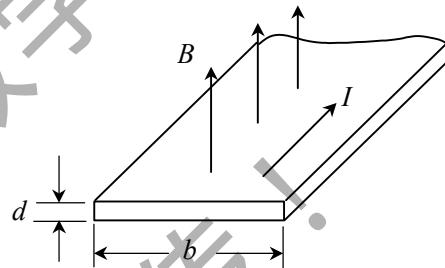


图4-46 题4.3图

4.2 把一个 $2.0 \times 10^3 \text{ eV}$ 的正电子入射到 $B = 0.1 \text{ T}$ 的匀强磁场中，其速度矢量与 \bar{B} 成 89° 角，路径成螺旋线，其轴在 \bar{B} 方向。试求该螺旋线运动的周期 T 、螺距 h 和半径 r 。

4.3 如图4-46所示，一铜片厚为 $d = 1.0 \text{ mm}$ ，放在 $B = 1.5 \text{ T}$ 的磁场中，磁场方向与铜片表面垂直。已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子，当铜片中有 $I = 200 \text{ A}$ 的电流流过时，

- (1) 求铜片两侧的电位差 U'_{aa} ；
- (2) 铜片宽度 b 对 U'_{aa} 有无影响？为什么？

4.4 假设两同性点电荷沿着相距 d 的平行路径向相反方向运动，两电荷的速度都等于 v ， $t = 0$ 时电荷的联线与运动方向相垂直。试比较 $t = 0$ 时刻两电荷间的库仑力和磁力。

4.5 假设真空中的一对平行导线之间距离为 d ，两导线上的电流分别为 I_1 和 I_2 ，试计算长为 L 的两导线之间作用力。

4.6 求图4-47中各个电流回路在P点的 B 。

4.7 假设真空中有一N边的等边多角形导线回路，回路的中心在原点并且回路平面与 z 轴相垂直，回路的顶点与中心的距离为 R ，回路通过电流 I 。（1）计算 z 轴上任意点的磁通量密度 \bar{B} ；（2）求 $N=3$ 和 $N=4$ 时的 B 值；（3）求 $N \rightarrow \infty$ 时 B 的极限值；（4）求 $z \gg R$ 时的 B 值。

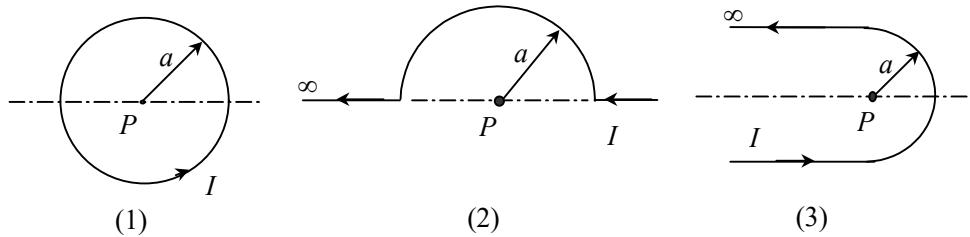


图4-47 题4.6

4.8 一圆形导线回路的电流与一正方形导线回路的电流相同，它们的中心点上的 B 也相同。假设正方形回路的边长为 $2a$ ，求圆形回路的半径。

4.9 一长螺线管，半径为 a ，长度 $L \gg a$ ，匝数为 N ，通过电流 I 。求轴线中段上任意点的 B 。

4.10 一环形密绕螺线管的截面为半径等于 a 的圆，环的中心线的半径为 R ，线圈匝数为 N ，通有电流 I 。试求

- (1) 环的截面上任意点的 B ；
- (2) 通过环截面的磁通量 Φ_m ；
- (3) 截面上磁通量密度的平均值 B_{av} 。

4.11 真空中一半径为 a 的圆形导线回路与一长直导线在同一平面里，回路的中心与直导线的距离为 d ($d > a$)，直导线上的电流为 I_1 ，而回路上的电流为 I_2 ，如图4-48所示。计算直导线与圆导线回路的相互作用力。

4.12 某一电流分布 $\bar{J} = \hat{z}rJ_o$ ($r \leq a$)，求任意点的磁矢位 \bar{A} 和磁通量密度 \bar{B} 。

4.13 证明磁偶极子的磁矢位表达式(4-72)满足 $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ 的条件。

4.14 证明磁偶极子所产生的矢量 \bar{B} 可以写成如下形式

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\bar{m} \cdot \bar{r})\bar{r}}{r^5} - \frac{\bar{m}}{r^3} \right]$$

4.15 两个正方形单匝线圈，边长分别为 a 和 $2a$ ，电流为 I 和 I' 。它们的磁矩指向相同。若要求两者的远区场 \bar{B} 相同，试确定 I 和 I' 的关系。

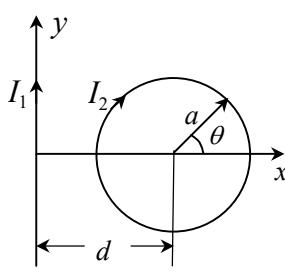


图4-48 题4.11

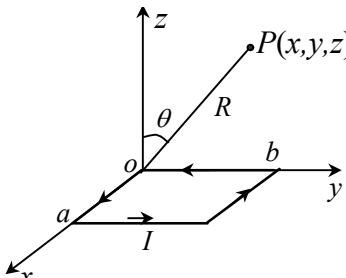


图4-49 题4.16

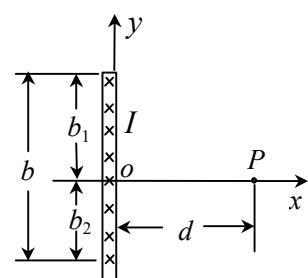


图4-50 题4.18

4.16 如图4-49所示，边长为 a 和 b ，载有电流 I 的小矩形回路，

- (1) 求远区点 $P(x, y, z)$ 的 \bar{A} ，并证明它可以写成式(4—72)的形式；
- (2) 由 \bar{A} 求 \bar{B} ，并证明它可以写成式 (4—73) 的形式。

4.17 通过均匀电流密度 $\bar{J} = \hat{z}J_0$ 的长圆柱导体中有一平行的长圆柱形空腔，导体柱和空腔柱的半径分别为 a 和 b ，两柱轴线距离为 d ，计算任意点的 \bar{B} ，并证明空腔内的磁场是均匀的。

4.18 真空中一宽度为 b 的带状导体通过电流 I ，假设电流均匀分布，点 P 的位置如图4—50所示，求 P 点上的磁场强度。

4.19 一小圆线圈半径 r_1 通有电流 I_1 ，放在一个半径 r_2 的大圆线圈内，二圆圈同心， $r_2 \gg r_1$ ，大圆线圈通有电流 I_2 ，两线圈面的法线分别用 \hat{n}_1 和 \hat{n}_2 单位矢量表示。证明小圆线圈受到的转矩为

$$\bar{T} = (\hat{n}_1 \times \hat{n}_2) \frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_1 I_2}{2r_2}$$

4.20 一半径为 a 的磁介质球被均匀磁化，磁化强度为 $\bar{M} = \hat{z}M_0$ ，求球内和球表面的磁化电流密度。

4.21 半径为 a 的磁介质球，具有磁化强度为 $\bar{M} = \hat{z}(Az^2 + B)$ ，求磁化电流和磁荷。

4.22 一同轴圆柱导线的内外导体都是用磁导率为 μ 的铁磁材料制成，导体之间绝缘材料的磁导率为 μ_0 。假设内导体的半径为 a ，外导体的内表面和外表面的半径分别为 b 和 c ，内导体通有电流 I 而外导体上无电流。试计算任意点 \bar{H} 、 \bar{B} 、 \bar{M} 和 \bar{J}_{ms} 。

4.23 假设上题中的内导体和外导体分别通过方向相反的电流 I 。计算任意点的 \bar{H} 、 \bar{B} 、 \bar{M} 和 \bar{J}_{ms} 。

4.24 假设 $\mu_r = 1000$ 的铁磁材料平表面外侧空气里的磁场强度为 60 A/m ，磁场强度矢量与表面法线之间的交角为 5° 。试求：

- (1) 铁磁材料内部的磁场强度大小和方向；
- (2) 铁磁材料内部的磁通量密度。

4.25 一铁制的螺线环，其平均周长为 30 cm ，截面积为 1 cm^2 ，在环上均匀绕以 300 匝导线，当绕组内的电流为 0.032 A 时，环内磁通量为 $2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ 。试计算：

- (1) 环内的磁通量密度；
- (2) 磁场强度；
- (3) 磁化面电流密度；
- (4) 环内材料的磁导率和相对磁导率；
- (5) 磁心内的磁化强度。

4.26 铁棒中一个铁原子的磁偶极矩为 $1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ，设长 5 cm ，截面积为 1 cm^2 的铁棒中所有铁原子的磁矩都整齐排列，则

- (1) 铁棒的磁偶极矩多大？
- (2) 如果要使这铁棒与磁感应强度为 1.5 T 的外场正交，需要多大的力矩？设铁的密度为 7.8 g/cm^3 ，铁的原子量是 55.85 。

4.27 一个利用空气隙获得强磁场的电磁铁如图4-44所示。铁芯中心线的长度 $l_1 = 500 \text{ mm}$ ，空气隙长度 $l_2 = 20 \text{ mm}$ ，铁芯是相对磁导率 $\mu_r = 5000$ 的硅钢。要在空气隙中得到 $B = 3000 \text{ 高斯}$ 的磁场，求绕在铁芯上的线圈的安匝数 NI 。

4.28 一个截面积为 3 cm^2 ，长为 20 cm 的圆柱状磁介质，沿轴线方向均匀磁化，磁化强度为 2 A/m ，试计算它的磁矩。

4.29 一半径为 a 的球形磁铁均匀磁化，磁化强度为 \bar{M} 。求磁铁内部和外部的磁矢位及磁场强度。

4.30 试求上题中球内、外任意点的磁标位，并由此求出磁场强度。

4.31 原点上有一均匀磁化的圆柱状小磁铁，磁化强度为 $\bar{M} = \hat{z}M_0$ ，磁铁的截面半径为 a ，长为 l ，它的轴线与 z 轴相重合。求远区任意点 $P(\bar{r})$ 处的磁标位和磁场强度。

4.32 有一均匀带电荷的薄导体球壳，其半径为 a ，总电荷为 Q ，令球壳绕其直径以角速度 ω 转动，求球内外的磁场 \bar{B} 。

4.33 在 $x < 0$ 的半空间充满磁导率为 μ 的磁介质， $x > 0$ 的半空间为真空，一线电流 I 沿 z 轴流动。求磁通量密度 \bar{B} 和磁场强度 \bar{H} 。

4.34 证明在磁化强度分别为 \bar{M}_1 和 \bar{M}_2 的两种不同磁性材料的分界面上，等效电流密度为

$$\bar{J}_{ms} = (\bar{M}_2 - \bar{M}_1) \times \hat{n}$$

其中 \hat{n} 由材料2指向材料1。

4.35 一半径为 a ，厚度为 h 的圆盘磁铁均匀磁化，磁化强度为 $\bar{M} = \hat{z}M$ ，求 z 轴上任意点的磁标位和轴线上的磁场强度。

4.36 在原点上有一磁矩为 \bar{m}_1 的固定磁针，在 $P(\bar{r})$ 上有另一磁矩为 \bar{m}_2 的可旋转磁针，设它们与矢经的交角为 θ_1 和 θ_2 ，求：

- (1) 磁针2 所受的转矩；
- (2) 此系统达到平衡的条件。

4.37 真空中一环形螺线管的截面为一长方形，环的内、外半径分别我 a 和 b ，高度为 h ，假设螺线管均匀地绕 N 匝线圈，通有直流 I 。若螺线管内充满磁导率为 μ 的磁性材料，计算它的磁阻。