Module LU2IN003 Graphes non orientés
Exercices de Base semaine 8

Alix Munier Kordon et Maryse Pelletier

Exercice(s)

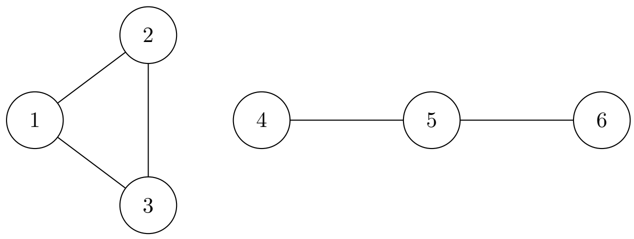
Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |E_0|$.

Question 1

Dessiner le graphe G_0. Que valent n_0 et m_0 ?

Solution:



$n_0 = 6$ et $m_0 = 5$.

Question 2

Quels sont les sommets adjacents au sommet 3 ? les arêtes incidentes au sommet 3 ?

Solution:

Les sommets adjacents au sommet 3 sont les sommets 1 et 2.

Les arêtes incidentes au sommet 3 sonl les arêtes $\{2, 3\}$ et $\{3, 1\}$.

Question 3

Quel est le degré de chacun des sommets de G_0 ? Que vaut la somme des degrés ?

Solution:

$d(1) = d(2) = d(3) = d(5) = 2$, $d(4) = d(6) = 1$.

$\sum_{v \in V_0} d(v) = 10$. On remarque que cette somme est égale à $2m_0$.

Question 4

Donner une chaîne élémentaire de G_0 et un cycle élémentaire de G_0, ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arêtes) respectives.

Solution:

Nous écrirons les chaînes en ne donnant que leurs sommets : il n'y a pas d'ambiguïté car nos graphes sont simples (il n'y a pas de multi-arêtes).

Un exemple de chaîne élémentaire : $(1,2,3)$, de longueur 2. Ou $()$, de longueur 0. Ou encore $(1,2)$, de longueur 1.

Un exemple de cycle élémentaire : $(1,2,3,1)$, de longueur 3. Remarque : $(1,2,3,1,2,3,1)$ est un cycle qui n'est pas élémentaire.

Question 5

Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Solution:

Le graphe G_0 n'est pas connexe : il n'y a pas de chaîne entre 1 et 4.

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Montrer que $\sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E|$, où $d(v)$ désigne le degré du sommet v dans le graphe G.

Solution:

Voir les notes de cours du cours 8.

Question 2

Exprimer le nombre maximum d'arêtes de G en fonction de n.

Solution:

Le nombre maximum d'arêtes est le nombre d'arêtes d'un graphe *complet*, c'est-à-dire tel que pour tous sommets x et y distincts, il existe une arête $\{x, y\}$.

Dans un tel graphe, il y a $n-1$ arêtes incidentes au 1er sommet, $n-2$ nouvelles arêtes incidentes au 2ème sommet, $n-3$ nouvelles arêtes incidentes au 3ème sommet, etc.

Au total, il y a $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

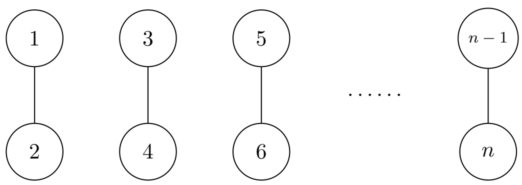
Question 3

1. Démontrer que tout graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair.
2. Si tous les sommets de G sont de degré 1, que peut-on dire de n ? Caractériser un tel graphe.

Solution:

1. On a $\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V, d(v) pair} d(v) + \sum_{v \in V, d(v) impair} d(v) = 2.|E|$. Donc, la somme des degrés impairs est pair ; on en déduit que l'on a un nombre pair de sommets de degré impair.
2. Si tous les sommets de G sont de degré 1 alors n est pair, puisque tout graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair.

   Un tel graphe est de la forme :



Question 4

Montrer par l'absurde que tout graphe à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux sommets de même degré.

Solution:

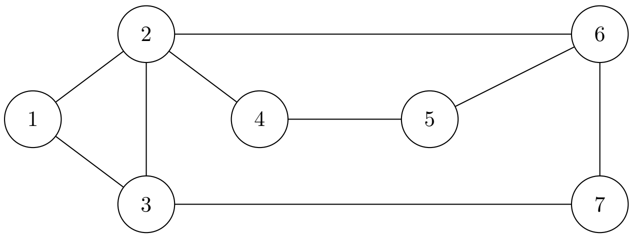
Cette propriété est vérifiée dans le cas d'un graphe simple (sans boucle, ni arête double). Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté de n sommets. Par l'absurde, supposons que tous les sommets sont de degré différent. On a alors deux cas :

1. Si G possède un sommet isolé, alors ce sommet a un degré 0. Les $n - 1$ autres sommets ont alors au minimum un degré de 1 à $n-1$. Ainsi, le dernier sommet est adjacent à tous les autres sommets de V, ce qui est impossible puisque il y a un sommet isolé.
2. Si G ne possède pas de sommet isolé, alors les degrés vont au minimum de 1 à n. Or, on ne peut avoir un degré de n sans boucle ni arête double, donc, c'est également impossible.

On en déduit que l'on a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 3 – Sous-graphe, graphe induit

On considère le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$:



Question 1

Dessiner trois sous-graphes de G_1 différents les uns des autres. Pour chacun d'entre eux, dire s'il est le graphe induit par un sous-ensemble de sommets.

Solution:

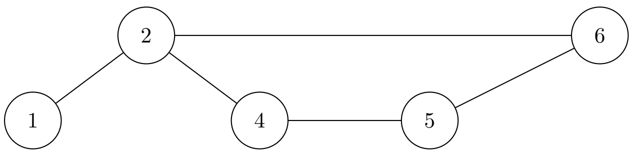
A chacun sa solution... Un exemple de sous-graphe qui n'est pas un graphe induit (il manque l'arête $\{2, 3\}$) :

Question 2

Dessiner le graphe induit par $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 5, 7\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 3, 4, 7\}$. Quel est le graphe induit par V_1 ?

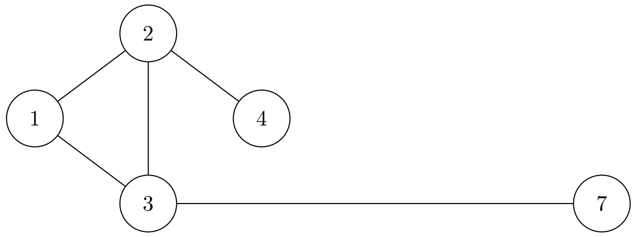
Solution:

Graphe induit par $\{1, 2, 4, 5, 6\}$:



Graphe induit par $\{1, 2, 5, 7\}$:

Graphe induit par $\{1, 2, 3, 4, 7\}$:



Le graphe induit par V_1 est égal à G_1.

Exercice 4 – Chaînes et cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Montrer que si il existe une chaîne entre deux sommets u et v, alors il existe une chaîne élémentaire entre u et v (Lemme de Koenig).

Solution:

Si il existe une chaîne μ de u à v qui n'est pas élémentaire, alors c'est qu'il existe un sommet w et des chaînes ν_1, ν_2 et ν_3 telles que $\mu = u.\nu_1.w.\nu_2.w.\nu_3.v$ et ν_2 est non vide. La chaîne $\mu' = u.\nu_1.w.\nu_3.v$ est également définie de u à v et est plus courte strictement que μ. En re-itérant ce processus, on peut éliminer tous les cycles et construire une chaîne élémentaire entre u et v.

Question 2

On suppose que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V$. Montrer par une preuve directe et constructive que G contient un cycle élémentaire.

Solution:

On construit un cycle élémentaire de la manière suivante :

1. On part d'un sommet $u_0 \in V$ quelconque ;
2. Si $(u_0, \cdots, u_i)$, $i \geq 0$ est une chaîne élémentaire, alors choisir un sommet u_{i+1} adjacent à u_i et différent de u_{i-1}. Ce sommet existe car, pour tout $x \in V$, $d(x) \geq 2$.
3. Sinon, $(u_0, \cdots, u_i)$, $i \geq 0$ n'est pas une chaîne élémentaire : cela arrivera forcément car le nombre de sommets de G est borné. Il existe donc les indices $i < j$ avec $u_i = u_j$. $u_i, u_{i+1}, \cdots, u_j$ est alors un cycle.

Question 3

Soit $k \leq n - 1$. On suppose que $d(v) \geq k$ pour tout $v \in V$. Montrer que G contient une chaîne élémentaire de longueur k.

indication : faire une récurrence sur k.

Solution:

Par récurrence faible sur k.

Base $k = 0$: il existe une chaîne élémentaire de longueur 0 (la chaîne vide).

Induction Soit $k \geq 0$, supposons que la propriété est vérifiée pour k. Soit alors G un graphe non orienté tel que Supposons que $d(v) \geq k+1$ pour tout $v \in V$. Alors $d(v) \geq k$ pour tout $v \in V$. Par hypothèse de récurrence, il existe une chaîne élémentaire de longueur k. Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ cette chaîne élémentaire. Puisque $d(x_k) \geq k+1$, x_k est adjacent à au moins $k+1$ sommets. Or $|\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}| = k < k+1$ donc il existe un sommet x_{k+1} adjacent à x_k et différent de $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$. Par conséquent $(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$ forme une chaîne qui est élémentaire et de longueur $k+1$.

Conclusion La propriété est vérifiée pour tout k (inférieur ou égal à $n-1$).

Question 4

On suppose que G contient exactement deux sommets x et y de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G entre x et y.

indication : faire une récurrence sur m.

Solution:

Par récurrence sur m.

Base $m = 1$: dans ce cas $E = \{\{x, y\}\}$ et la propriété est vraie.

Induction Soit $m \geq 1$, supposons que la propriété est vérifiée pour m. Soit G un graphe ayant $m+1$ arêtes et contenant exactement deux sommets x et y de degré impair. Si $\{x, y\}$ est une arête de G alors il existe une chaîne dans G entre x et y. Sinon, il existe dans G au moins une arête $\{x, z\}$ (avec $z \neq y$). Posons $E' = E \setminus \{\{x, z\}\}$ et notons $d'(u)$ le degré dans G' d'un sommet u. Alors $d'(x) = d(x) - 1$, $d'(z) = d(z) - 1$, $d'(u) = d(u)$ pour les autres sommets u. Par conséquent G' est un graphe ayant m arêtes et contenant exactement deux sommets de degré impair : z et y. Par hyp. de réc., il existe une chaîne γ dans G' entre z et y. Cette chaîne γ est aussi une chaîne dans G. La chaîne composée de $\{x, z\}$ et de γ est une chaîne dans G entre x et y.

Conclusion La propriété est vérifiée pour tout tout graphe contenant exactement deux sommets x et y de degré impair.

Exercice 5 – Connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

On suppose que G contient un sommet de degré $n-1$. Montrer que G est connexe.

Solution:

Soit x un sommet de degré $n-1$ dans G, alors x est adjacent à tous les autres sommets. Pour tous sommets y et z distincts :

— si $y = x$ ou $z = x$ alors il existe une arête entre y et z ;

— sinon (y, x, z) est une chaîne entre y et z.

Le graphe G est donc connexe.

Question 2

Montrer que si G est connexe et contient un cycle élémentaire $\mathcal{C}$ et si e est une arête de $\mathcal{C}$ alors le sous-graphe $G' = (V, E \setminus \{e\})$ est connexe.

Solution:

Soit x et y les extrémités de l'arête e. Le cycle élémentaire $\mathcal{C}$ est composé de l'arête e et d'une chaîne élémentaire γ entre x et y. La chaîne γ ne contient pas e.

Soit u et v deux sommets distincts de G. Comme G est connexe, il existe, dans G, une chaîne élémentaire entre u et v. Si cette chaîne ne contient pas e alors c'est une chaîne de G'. Sinon on remplace, dans cette chaîne, l'arête e par la chaîne γ et on obtient ainsi une chaîne dans G'.

G' est donc connexe.

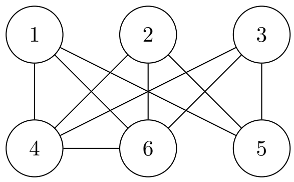
Exercice 6 – Complémentaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.
Le *complémentaire* du graphe G est le graphe $G_C = (V, E_C)$, avec $E_C = \{\{x, y\} \mid x \in V, y \in V$ et $\{x, y\} \notin E\}$.
Deux graphes sont *isomorphes* s'ils sont identiques, à une renumérotation près des sommets.
Un graphe est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complémentaire.

Question 1

On considère le graphe G_0 de l'exercice 1 : $G_0 = (V_0, E_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.
Représenter le complémentaire de G_0. Le graphe G_0 est-il auto-complémenaire ?

Solution:



Le graphe complémentaire de G_0 a 10 arêtes, alors que G_0 n'en a que 5. Ces deux graphes ne peuvent donc pas être isomorphes. G_0 n'est pas auto-complémentaire.

Question 2

On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

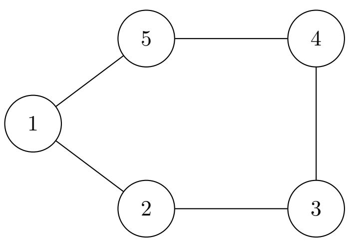
1. Combien G_C a-t-il d'arêtes ?
2. En déduire que, si G est auto-complémentaire alors n ou $n - 1$ est un multiple de 4 et $m = n(n - 1)/4$.

Solution:

1. G_C a $\dfrac{n(n-1)}{2} - m$ arêtes.
2. Si G est auto-complémentaire alors $\dfrac{n(n-1)}{2} - m = m$ donc $2m = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Par conséquent $n(n - 1)$ est un multiple de 4. Comme n ou $n - 1$ est impair, il faut donc que n ou $n - 1$ soit un multiple de 4. Dans ce cas, on a bien $m = n(n - 1)/4$.

Question 3

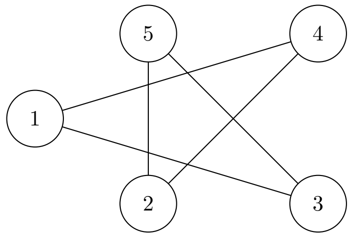
On considère le graphe G_2 :



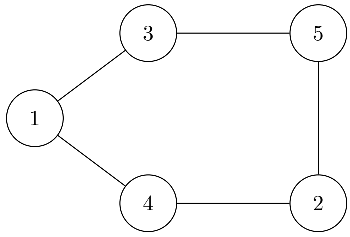
Le graphe G_2 est-il auto-complémentaire ?

Solution:

Voici le graphe compémentaire de G_2 :



On peut aussi le représenter ainsi :

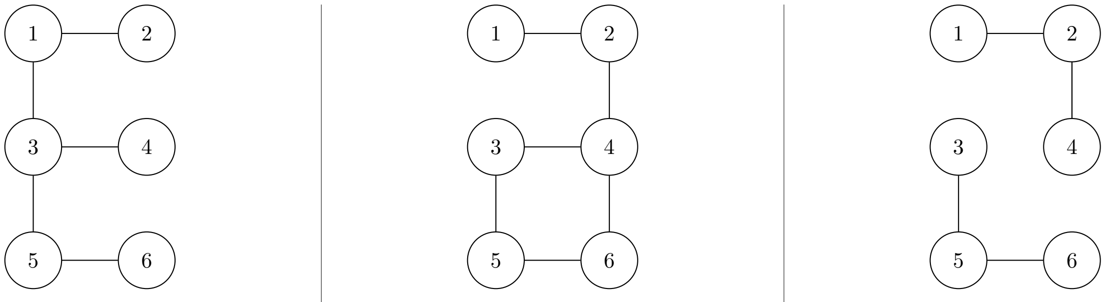


Le graphe G_2 et son complémentaires sont isomorphes. G_2 est auto-complémentaire.

Exercice 7 – Quelques exemples et propriétés autour des arbres

Question 1

Est-ce que les graphes non orientés suivants sont des arbres ? Justifiez vos réponses. Dans la négative, quelle(s) arête(s) doit on enlever/rajouter pour obtenir un arbre ?



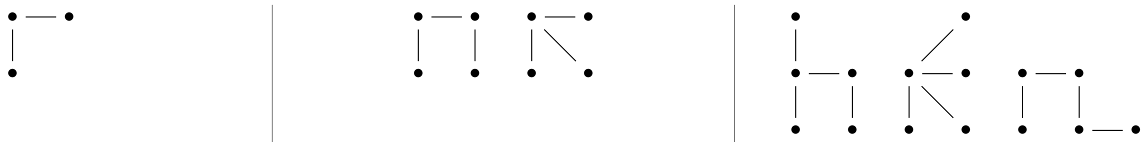
G_1 G_2 G_3

Solution:
- Le graphe G_1 est connexe et sans cycle élémentaire, c'est donc un arbre ;
- Le graphe G_2 possède un cycle élémentaire $3, 4, 6, 5, 3$ ce n'est donc pas un arbre. Il suffit d'enlever un arête du cycle par exemple $\{3, 4\}$ et on obtient un arbre ;
- Le graphe G_3 est sans cycle mais n'est pas connexe, il suffit de rajouter une arête qui connecte les deux composantes, par exemple $\{3, 4\}$.

Question 2

Donnez tous les arbres différents à 1, 2, 3, 4 ou 5 sommets.

Solution:
- Pour un nombre de sommets $n \in \{1, 2, 3\}$, le seul arbre de n sommets est la chaîne élémentaire de n sommets et $n - 1$ arêtes.
- Pour $n = 4$, il y a deux arbres. pour $n = 5$, il y en a trois.



$n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

Question 3

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est connexe sans être minimal connexe. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est connexe mais qui n'est pas minimal connexe contient au moins un cycle élémentaire.

Solution:
- Le graphe non orienté $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\})$ est connexe. De plus, si on enlève l'arête $\{1, 2\}$, il est toujours connexe. Donc, il n'est pas minimal connexe.
- Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe simple connexe mais non maximal connexe. Alors, il existe une arête $e = \{x, y\} \in E$ avec $x \neq y$ telle que le sous-graphe $G' = (V, E - \{e\})$ est connexe. Ainsi, il existe une chaîne élémentaire ν de y à x dans G'. En concaténant ν à e, on obtient un cycle élémentaire, ce qui démontre le résultat.

Question 4

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique n'est pas connexe.

<u>Solution</u>:

- Le graphe non orienté $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$ est sans cycle élémentaire. De plus, si rajoute l'arête $\{2, 3\}$, il est toujours acyclique.
- Supposons que $G = (V, E)$ est graphe simple sans cycle élémentaire mais qui n'est pas maximal acyclique. Alors, il existe une arête $e = \{x, y\} \in E$ avec $x \neq y$ telle que le sous-graphe $G' = (V, E \cup \{e\})$ est toujours acyclique. Autrement dit, il n'y a pas dans G de chaîne de x à y. Ces deux sommets sont donc dans deux composantes connexes différentes de G. On en déduit que G n'est pas connexe.

Exercice 8 – Propriétés sur les arbres

Le but de cet exercice est de démontrer des propriétés classiques sur les arbres.

Question 1

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe G connexe.
2. Montrez par l'absurde que si T est connexe avec $m = n - 1$, alors T est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que T n'est pas minimal connexe.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

<u>Solution</u>:

1. D'après le cours, si G est connexe, alors $m \geq n - 1$.
2. Par l'absurde, supposons que T est un graphe connexe tel que $m = n - 1$ et que T n'est pas un arbre. Par hypothèse, T est connexe. On en déduit que T n'est pas minimal connexe (sinon ce serai un arbre). Il existe donc une arête $e = \{x, y\} \in E$ telle que $T' = (V, E - \{e\})$ est connexe. Le nombre d'arêtes de T' est $m' = n - 2$. D'après la contraposée de la question précédente, T' n'est pas connexe, ce qui est contradictoire.
3. La réciproque est vérifiée (il s'agit d'un résultat du cours).

Question 2

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe G sans cycle élémentaire.
2. Montrez par l'absurde que si T est sans cycle élémentaire avec $m = n - 1$, alors T est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que T n'est pas maximal acyclique.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

<u>Solution</u>:

1. D'après le cours, si G est sans cycle élémentaire alors $m \leq n - 1$.
2. Par l'absurde, supposons que T est un graphe sans cycle élémentaire avec $m = n - 1$ et que T n'est pas un arbre. Par hypothèse, T est sans cycle élémentaire. On en déduit que T n'est pas maximal acyclique (sinon ce serai un arbre). Il existe donc une arête $e = \{x, y\} \in E$ telle que $T' = (V, E \cup \{e\})$ est sans cycle élémentaire. Le nombre d'arêtes de T' est $m' = n$. D'après la contraposé de la question précédente, T' possède un cycle élémentaire ce qui est contradictoire.

3. La réciproque est vérifiée (il s'agit d'un résultat du cours).

Question 3

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si T est maximal acyclique, alors entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique (il s'agit de l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème général sur les arbres).

Solution:

On montre la contraposée : supposons qu'il existe deux sommets x et y pour lequels il n'existe pas de chaîne élémentaire unique de x à y. On a alors deux cas :

1. Si il n'y a pas de chaîne élémentaire de x à y, c'est que x et y sont dans deux composantes connexes différentes. Si on rajoute l'arête $\{x, y\}$, on réunit alors ces deux composantes connexes, sans créer de cycle. Donc, T n'est pas maximal acyclique.
2. Si il y au moins deux chaînes élémentaires de x à y, il y a alors un cycle. Donc, T n'est pas acyclique.

Question 4

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique, alors T est un arbre (il s'agit de l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème général sur les arbres).

Solution:

Par contraposée, si T n'est pas un arbre, alors T n'est pas connexe ou T contient un cycle élémentaire.

1. Si T n'est pas connexe, alors il existe au moins deux sommets x et y (un dans chaque composante) tel que il n'y a pas de chaîne de x à y.
2. Si T contient un cycle élémentaire, alors en prenant deux sommets quelconques x et y de ce cycle avec $x \neq y$, on obtient deux chaînes élémentaires différentes.

Dans tous les cas, il n'existe pas de chaîne élémentaire unique de x à y. Donc, la contraposée est vérifiée.

Exercice 9 – Représentation d'un graphe non orienté simple

Question 1

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes non orientés simples.

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arête	Liste d'adjacence
$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\},$ $\{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$			
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	
			$-1 \rightarrow$ $[2]$ $-2 \rightarrow$ $[1, 3]$ $-3 \rightarrow$ $[2, 4, 5]$ $-4 \rightarrow$ $[3]$ $-5 \rightarrow$ $[3]$

Solution:

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arête	Liste d'adjacence
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{\{1,2\},\{2,3\},$ $\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\}\}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$	$-1 \to [2,3,4]$ $-2 \to [1,3]$ $-3 \to [1,2,4]$ $-4 \to [1,3]$
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{\{1,2\},\{1,3\},$ $\{1,4\},\{4,3\}\}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$	$-1 \to [2,3,4]$ $-2 \to [1]$ $-3 \to [1,4]$ $-4 \to [1,3]$
$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{\{1,2\},\{1,3\},$ $\{1,4\},\{2,3\},\{3,5\},$ $\{4,5\}\}$	$\begin{pmatrix} 0&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$	$-1 \to [2,3,4]$ $-2 \to [1,3]$ $-3 \to [1,2,5]$ $-4 \to [1,5]$ $-5 \to [3,4]$
$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{\{1,2\},\{2,3\},$ $\{3,4\},\{3,5\}\}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$-1 \to [2]$ $-2 \to [1,3]$ $-3 \to [2,4,5]$ $-4 \to [3]$ $-5 \to [3]$

Question 2

Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe non orienté ? Même question pour une matrice R sommet-arête ou une liste d'adjacence L.

Solution:

Pour une matrice sommet-sommet M est à valeur dans $\{0,1\}$. M est symétrique par rapport à sa première diagonale car toute arête est représentée deux fois ($M[i,j] = M[j,i]$ pour tout couple $(i,j) \in V^2$). Comme il n'y a pas de boucle, il y a des 0 sur la première diagonale.

Pour la matrice sommet-arête M est à valeur dans $\{0,1\}$ et n'est pas carrée. Chaque arête est associée à une colonne avec deux valeurs à 1 exactement (pas de boucle). De plus, toutes les colonnes sont différentes car il n'y a pas d'arête multiple (*i.e.* arêtes identiques).

Pour les listes d'adjacence Il y a n listes, et les listes contiennent des sommets. Pour tout sommet x, x ne fait pas partie de la liste $L[x]$ car il n'y a pas de boucle. Pour tout couple de sommets $(x,y) \in V^2$ si $y \in L[x]$ alors $x \in L[y]$. De plus, il y a au plus une occurence de y dans la liste $L[x]$.

Exercice 10 – Primitives d'un graphe non orienté

Le but de cet exercice est d'évaluer la complexité de primitives sur des graphes non orientés simples en fonction de leur représentation en mémoire (matrice sommet-sommet, matrice sommet-arête ou listes d'adjacence). Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté simple. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Décrire en une ou deux phrases le principe d'un algorithme qui, pour tout sommet x en paramètre, renvoie le degré $d(x)$ en fonction de la représentation. Evaluez sa complexité.

Solution:

1. Si le graphe est représenté par une matrice sommet-sommet M, il faut compter le nombre de 1 sur la ligne correspondant à x, l'algorithme est donc en $\Theta(n)$.
2. Si le graphe est représenté par une matrice sommet-arête R, il faut compter le nombre de 1 dans R sur la ligne associée à x, c'est donc du $\Theta(m)$.

3. Si le graphe est représenté par des listes d'adjacence, il faut compter le nombre d'éléments de $L[x]$, se sera donc en $\Theta(d(x))$.

Question 2

Décrire en deux phrases le principe d'un algorithme qui construit la liste des arêtes d'un graphe en fonction de la représentation utilisée. La liste obtenue est stockée dans une liste doublement chaînée, ce qui permet d'insérer en fin de liste en $\Theta(1)$.

Solution:

1. Si le graphe est représenté par une matrice sommet-sommet M, il faut parcourir la $\frac{1}{2}$ diagonale de la matrice pour générer toutes les arêtes, ce sera donc en $\Theta(n^2)$.
2. Si le graphe est représenté par une matrice sommet-arête R, il faut parcourir les colonnes une à une. Dans le pire des cas, on parcourt chaque colonne avant de tomber sur les sommets adjacents, on obtient donc une complexité en $\mathcal{O}(n \times m)$. Dans le meileur des cas, ce sera du $\Omega(m)$, les sommets adjacents sont sur les premières lignes.
3. Si le graphe est représenté par des listes d'adjacence, il faut parcourir les listes pour $x \in V$ et si $y \in L[x]$, rajouter l'arête $\{x, y\}$ si $x < y$. La complexité est donc en $\Theta(\max(n, 2m)) = \Theta(n + m)$.