Notes sur le cours 11 : parcours en profondeur

Le cours 11 est le dernier cours de l'année. La première partie de ce cours traite du parcours en profondeur d'un graphe non orienté, la seconde pour un graphe orienté.

Vous pouvez regarder les vidéos suivantes sur la chaîne YouTube de Christian Laforest qui sont une bonne introduction à ce cours :

- « Parcours en profondeur d'un graphe »qui présente le principe général du parcours en profondeur pour un graphe non orienté.
- « Retour sur le parcours en profondeur du graphe »qui étudie une implémentation. Cette vidéo est plus longue et technique que la précédente.

N'hésitez pas à mettre un commentaire positif à Christian Laforest si ses vidéos vous ont aidées dans la compréhension des cours sur les graphes. Vous pouvez également regarder toutes les autres vidéos, même si ce n'est pas au programme.

Transparent 6 On pourrai lui associer les parcours en profondeur $L = (2,4,6,1,3,6,7)$ et $L = (2,4,6,7,5,6,1,3)$.

Transparent 12

Theorem 1. *Pour tout couple de sommets* $(u,v) \in V^2 avec u \neq v$*, les intervalles* $[pre(u),post(u)]$ *et* $[pre(v),post(v)]$ *sont tels que :*

- $[pre(u),post(u)] \cap [pre(v),post(v)] = \emptyset$*, ou*
- $[pre(u),post(u)] \subset [pre(v),post(v)]$*, ou*
- $[pre(v),post(v)] \subset [pre(u),post(u)]$.

Démonstration. Soient u et v, deux sommets quelconques de G. On identifie 3 cas :

- Si DFS(G,u) est appelée (donc empilée) quand DFS(G,v) est en cours d'exécution, alors forcément $pre[u] > pre[v]$ et $post[u] < post[v]$. Donc, $[pre(u),post(u)] \subset [pre(v),post(v)]$;
- De manière symétrique, si DFS(G,v) est appelée quand DFS(G,u) est en cours d'exécution, alors $[pre(v),post(v)] \subset [pre(u),post(u)]$;
- sinon, l'appel DFS(G,u) est exécuté avant ou après DFS(G,v), donc

$$[pre(u),post(u)] \cap [pre(v),post(v)] = \emptyset.$$

□

Transparent 18 Cette partition des arcs en 4 ensembles peut paraître artificelle. Cependant, elle est importante car elle permet d'analyser la structure des graphes. Par exemple, elle va nous servir au transparent 20 pour étudier la présence d'un circuit dans un graphe orienté.

Transparent 19

Theorem 2. *Soit* $G = (V,A)$ *un graphe orienté et* L *un parcours en profondeur de* G*.* G *possède un circuit si et seulement si le parcours* L *possède au moins un arc arrière.*

Démonstration. On démontre $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$.

$B \Rightarrow A$ Si L possède un arc arrière (u,v), alors par définition, il y a un chemin de v à u dans le graphe de liaison $\mathcal{A}^\star(L)$, donc dans G. On a donc un cicuit dans G.

$A \Rightarrow B$ Supposons maintenant que G possède un circuit c. Soit alors v_1 le premier sommet de c visité par L. Il s'agit du sommet u de c de valeur $pre(u)$ minimale.

On pose alors $c = v_1,v_2,\dots,v_k,v_1$ avec $u = v_1$. Tous les autres sommets de c sont atteignables depuis v_1, ils seront donc descendants de v_1 dans le graphe de liaison $\mathcal{A}^\star(L)$. En particulier, il y a un chemin dans $\mathcal{A}^\star(L)$ de v_1 à v_k. On en déduit que (v_k,v_1) est un arc arrière.

□

Bon courage pour vos révisions !!!