Notes sur le cours 9 : Graphes orientés

Le cours 9 sur les graphes ne peut toujours pas avoir lieu. Dans ce document, vous trouverez quelques remarques et des démonstrations effectuées normalement dans en cours. La première partie est dédiée à la terminologie habituellement utilisée pour les graphes orientés.

Au préalable de ce cours, je vous suggère de regarder les vidéos suivantes sur la chaîne YouTube de Christian Laforest :

- « Graphes : ressources de ma chaîne pour étudiants confinés »qui présente des problèmatiques sur les graphes.
- « Stockage des graphes en mémoire »
- « Ordre topologique : dessiner un graphe orienté de la gauche vers la droite »

Attention la terminologie peut être différente. En cas de doute, il faut vous référer au cours.

Transparent 4 Le graphe orienté donné représente l'ensemble des tâches nécessaires le matin pour s'habiller. Chaque arc représente une contrainte de précédence entre deux tâches.

Oui, il suffit d'effectuer les tâches dans l'ordre suivant : lunettes, culotte, T-Shirt, Chemise, pantalon, chaussettes, chaussures, ceinture, cravate, pull, manteau, chapeau. Cette ordre n'est pas unique : par exemple, on peut intervertir chapeau et manteau.

C'est ce que l'on appelle un ordre (ou tri) topologique. La dernière partie de ce cours présente un algorithme simple pour calculer un ordre topologique pour un graphe orienté sans circuit.

Transparent 5 Quand on retire l'orientation des arcs, on obtient le graphe non orienté $G' = (V, E)$ avec $E\{\{1,4\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\}\}$. G' est connexe, donc G est connexe.

Transparent 8 Le théorème se démontre par récurrence sur le nombres d'arcs du graphe. La preuve sera à effectuer en TD.

Transparent 9, 10, 11 Ces 3 transparents rappellent comment on peut représenter un graphe orienté en mémoire.

Transparent 15 Le théorème a été démontré en TD de « Mathématiques Discrètes ».

Il y a 5 classes d'équivalence $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_5}(x) = \{x + 5k, k \in \mathrm{Z}\}$, pour $x \in \{0, \ldots, 4\}$.

Transparent 17

Theorem 1. *Pour tout graphe orienté $G = (V, A)$, $\mathcal{R}_{FC}$ est une relation d'équivalence sur G.*

Démonstration. On démontre que $\mathcal{R}_{FC}$ est réflexive, symétrique et transitive.

- Pour tout sommet $u \in V$, le chemin constitué uniquement de u est bien un chemin, donc $u\mathcal{R}_{FC}u$ et $\mathcal{R}_{FC}$ est réflexive.
- $\mathcal{R}_{FC}$ est de part sa définition symétrique.
- Si maintenant on a 3 sommets u, v et w tels que $u\mathcal{R}_{FC}v$ et $v\mathcal{R}_{FC}w$ il existe des chemins $\nu(u,v)$ et $\nu(v,u)$ respectivement de u à v et de v à u, ainsi que des chemins $\mu(v,w)$ et $\mu(w,v)$ respectivement de v à w et de w à v. On observe alors que le chemin $\nu(u,v).\mu(v,w)$ obtenu par la concacténation de $\nu(u,v)$ et $\mu(v,w)$ est un chemin de u à w. De même, $\mu(w,v).\nu(v,u)$ est un chemin de w à u, et donc $u\mathcal{R}_{FC}w$. La relation est transitive.

$\mathcal{R}_{FC}$ est donc bien une relation d'équivalence. $\square$

Transparent 18 Si on rajoute un arc à G d'un sommet de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{FC}}(4)$ vers un sommet de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{FC}}(1)$, par exemple $(4,3)$, le nouveau graphe $G' = (V, A \cup \{(4,3)\})$ possède les deux composantes fortement connexes $\mathcal{C}'_{\mathcal{R}_{FC}}(4) = \{1,2,3,4,5\}$ et $\mathcal{C}'_{\mathcal{R}_{FC}}(6) = \{6\}$. Pour obtenir un graphe fortement, il suffit de rajouter un arc sortant de 6, par exemple $(6,4)$.

Le graphe $G^{(2)} = (V, A \cup \{(4,3),(6,4)\})$ possède une seule composante fortement connexe, il est donc fortement connexe.

Transparent 19 Par exemple, sur $V = \mathrm{N}$, l'ordre naturel $\leq$ est un ordre total : pour tout couple d'entiers $(u,v) \in N^2$, $u \leq v$ ou $v \leq u$.

Transparent 21

Theorem 2. *Si $G = (V,A)$ est un graphe orienté sans circuit alors la relation $\leq$ est une relation d'ordre.*

Démonstration. On démontre que $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

— Pour tout sommet $u \in V$, le chemin constitué uniquement de u est bien un chemin, donc $u \leq u$ et $\leq$ est réflexive.
— Supposons maintenant que deux sommets u et v vérifient $u \leq v$ et $v \leq u$. Alors, il existe un chemin ν de u à v et un chemin μ de v à u. Si on suppose que $u \neq v$, on obtient alors un circuit en concaténant ces eux chemins, ce qui est contraire à l'hypothèse que G est sans circuit. On en déduit que $u = v$ et donc $\leq$ est antisymétrique.
— Supposons maintenant que u, v et w soient trois somments de V tels que $u \leq v$ et $v \leq w$. Il y a donc un chemin ν de u à v et un chemin μ de v à w. En concaténant ces chemins, on obtient un chemin de u à w, et donc $u \leq w$.

$\square$

Transparent 22 On observe que la contraposée de cette implication est : si il existe un chemin de u_j à u_i, alors $j \leq i$. Autrement dit, il s'agit ici de renuméroter les sommets du graphe de manière compatible avec l'ordre partiel $\leq$.

Le second ordre n'est pas un ordre topologique car 8 est avant 3 dans la liste malgrès l'arc $(3,8)$.

Transparent 25

Lemma 1. *Si G est un graphe orienté sans circuit ayant n sommets alors :*

— *il existe $u_1, \ldots, u_n$ tels que $rang(u_1) \leq \ldots \leq rang(u_n)$;*
— *si $rang(u_1) \leq \ldots \leq rang(u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est un tri topologique.*

Démonstration. Soit G un graphe orienté sans circuit.

— On peut calculer $rang(u)$ pour tout sommet $u \in V$. On peut alors facilement renuméroter ses sommets $u_1, \ldots, u_n$ de sorte que $rang(u_1) \leq \ldots \leq rang(u_n)$.
— Supposons maintenant que les sommets sont numérotés tels que $rang(u_1) \leq \ldots \leq rang(u_n)$. Soient alors deux sommets u_i et u_j tels que $u_i \neq u_j$ et il existe un chemin $\nu = v_0, \ldots, v_p$ de G avec $v_0 = u_i$ à $v_p = u_j$. Par définition du rang, $rang(v_0) < rang(v_1) < \ldots < rang(v_p)$. On en déduit que $rang(u_i) < rang(u_j)$, et donc $u_i < u_j$. On en déduit donc que la liste $(u_1, \ldots, u_n)$ est bien un tri topologique.

$\square$