Numéro d'Anonymat :

Examen 2I003

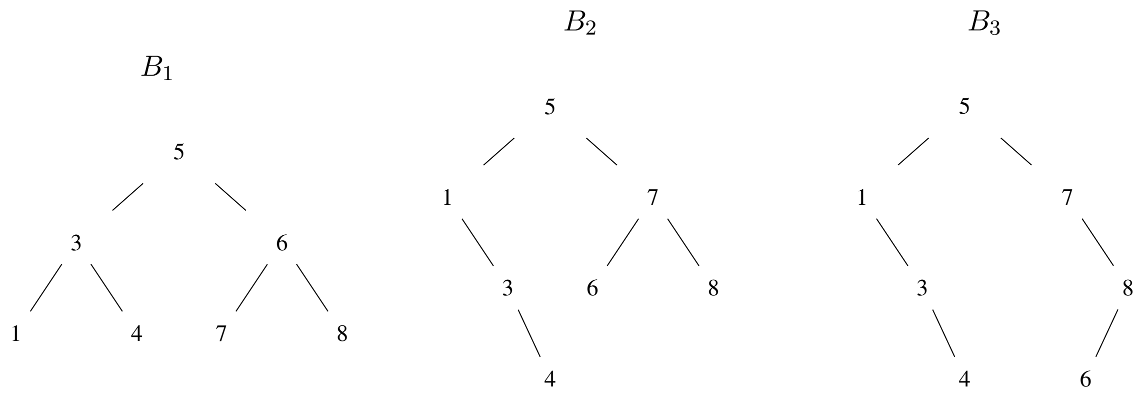
Mercredi 7 Juin 2017, 2 heures
aucun document autorisé

Exercice 1 – Recherche du k-ème plus petit élément - 12 points

Le *k-ème plus petit élément* d'un ensemble E de n nombres tous différents, avec $n \geq k$, est l'élément x de E tel qu'il y a exactement $k-1$ éléments de E strictement inférieurs à x.

Par exemple, le 3-ème plus petit élément de $\{8, 5, 3, 4, 1, 6, 7\}$ est 4.

Recherche dans un ABR



Question 1

1. Rappeler la définition d'un arbre binaire de recherche.
2. Pour chacun des arbres B_1, B_2, B_3, dire s'il est ou non un arbre binaire de recherche. Justifier les réponses négatives.

Question 2

On considère dans la suite de l'exercice la fonction `ABinfixe(B)` ainsi définie, pour B arbre binaire :

```
def ABinfixe(T):
    if estABvide(T):
        return []
    return ABinfixe(T.gauche) + [T.clef] + ABinfixe(T.droit)
```

Calculer sans justification les valeurs `ABinfixe(B1)`, `ABinfixe(B2)`, `ABinfixe(B3)`.

Question 3

Montrer par **induction structurelle** sur B que pour **tout** arbre binaire de **recherche** B, `ABinfixe(B)` est une liste rangée en ordre strictement croissant.

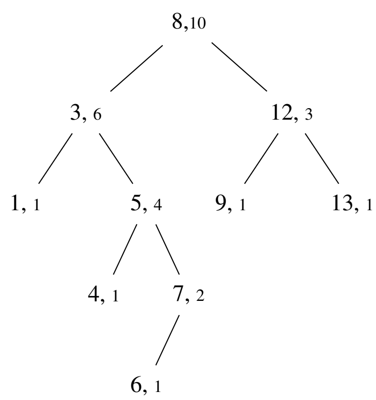
Question 4

1. En déduire un algorithme qui calcule la k-ème plus petite clef d'un arbre binaire de recherche B.
2. Calculer le nombre de concaténations de listes effectuées par l'appel `ABinfixe(B)`, pour un arbre binaire B de taille n. En supposant que la complexité de la concaténation de deux listes est en $\Theta(1)$, calculer la complexité de `ABinfixe(B)`, pour un arbre binaire B de taille n.
3. En déduire la complexité de la recherche de la k-ème plus petite clef d'un arbre binaire de recherche B de taille n.

Recherche dans un ABR dénombré

Un arbre binaire de recherche *dénombré* est un arbre binaire de recherche dont chaque nœud x contient deux informations :
— la *clef* (`B.clef`), sur laquelle est effectuée la recherche,
— la *taille* (`B.taille`), qui est égale au nombre de nœuds de l'arbre enraciné en x.

On considère l'arbre binaire de recherche dénombré Bex :



On définit une fonction `taille` sur les arbres binaires dénombrés, dont la complexité est en $\Theta(1)$:

```
def taille(T):
  if estABvide(T):
    return 0
  return T.taille
```

On définit une fonction `ABRD_k_eme(B, k)` sur les arbres binaires de recherche dénombrés :

```
def ABRD_k_eme(B, k):
    """hypothèse : k <= taille(T)"""
    print("appel avec k = ", k)
    t = taille(B.gauche)
    if k == t + 1 :
        res = B.clef
    elif k <= t:
        res = ABRD_k_eme(B.gauche, k)
    else:
        res = ABRD_k_eme(B.droit, k - (t + 1))
    print("retour : ", res)
    return res
```

Question 5

Exécuter l'appel de `ABRD_k_eme(Bex, 6)`, en donnant les affichages successifs et le résultat final.

Question 6

Montrer par **induction structurelle** sur B que pour **tout** arbre binaire de **recherche dénombré** B et pour tout k tel que $0 < k \leq taille(B)$, `ABRD_k_eme(B, k)` calcule la k-ème plus petite clef de B.

Question 7

1. Quelle est la complexité de la recherche de la k-ème plus petite clef dans un arbre de recherche dénombré de taille n dans le meilleur cas ? dans le pire cas ?
2. Mêmes questions pour un arbre de recherche dénombré H-équilibré.

Exercice 2 – Graphes non orientés - 8 points

Dans cet exercice, $G = (V, E)$ est un graphe non orienté. On pose $n = \mid V \mid$ et $m = \mid E \mid$.

Question 1

Dans cette question, on considère le graphe non orienté $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$. Que valent n et m ? Donnez la matrice sommet-sommet du graphe.

Question 2

Rappelez la définition du degré $d_G(x)$ pour $x \in V$. Quel est le degré des sommets du graphe de la question 1 ?

Question 3

Démontrez par récurrence sur le nombre m d'arêtes que, pour tout graphe non orienté $G = (V, E)$, $\sum_{x \in V} d_G(x) = 2m$..

Question 4

1. Qu'est ce qu'un graphe connexe ? Est-ce que le graphe de la question 1 est connexe ?
2. Rappelez la définition de la composante connexe C_x de x pour $x \in V$.
3. Quelles sont les composantes connexes du graphe G de la question 1 ?

Question 5

Supposons dans cette question que $H = (V, E)$ est un graphe non orienté connexe tel que, $\forall v \in V$, $d(v) \leq 2$. Montrez par récurrence forte sur le nombre de sommets que H est soit un cycle, soit un chaîne.