

Module LU2IN003 Graphes orientés 9

Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_0 = (V_0, A_0)$, avec

$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A_0 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 7)\}$.

On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |A_0|$.

Question 1

Dessiner le graphe G_0 . Que valent n_0 et m_0 ?

Question 2

Pour chaque sommet x de G_0 , donner l'ensemble des successeurs de x , l'ensemble de ses prédécesseurs, son demi-degré sortant et son demi-degré entrant. Que vaut la somme des demi-degrés sortants ? des demi-degrés entrants ?

Question 3

Donner un chemin élémentaire de G_0 et un circuit élémentaire de G_0 , ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arcs) respectives.

Question 4

Représenter le graphe non orienté G'_0 associé à G_0 en enlevant l'orientation des arcs. Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Question 5

Le graphe G_0 est-il fortement connexe ? Donner ses composantes fortement connexes.

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe orienté

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |A|$.

Question 1

Montrer que $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m$.

Question 2

Exprimer le nombre maximum d'arcs de G en fonction de n :

- si G est sans boucle
- si G est avec boucles.

Question 3

1. On suppose $n > 2$ et on pose $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Calculer $d^+(x)$ et $d^-(x)$ pour tout $x \in V$ dans chacun des cas suivants :

- (a) G est composé uniquement d'un chemin élémentaire (v_1, v_2, \dots, v_n) passant par tous les sommets
- (b) G est composé uniquement d'un circuit élémentaire $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ passant par tous les sommets
- (c) G est composé uniquement d'un chemin $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_j)$, avec $2 \leq j < n$ passant par tous les sommets.

2. Caractériser, sans preuve, les graphes orientés $G = (V, A)$ tels que $d^+(x) = d^-(x) = 1$ pour tout $x \in V$.

Facultatif : prouver le résultat trouvé.

Exercice 3 – Représentation d'un graphe orienté

Question 1

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes orientés sans arc double ni boucle.

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arc	Liste d'adjacence
$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4)\}$			
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	
			$-1 \rightarrow [4, 5]$ $-2 \rightarrow [3]$ $-3 \rightarrow [2]$ $-4 \rightarrow []$ $-5 \rightarrow []$

Question 2

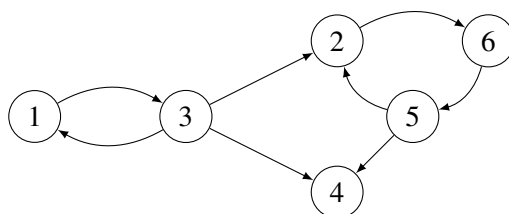
Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe orienté ? Même question pour une matrice R sommet-arc ou une liste d'adjacence L .

Exercice 4 – Forte connexité, relation d'équivalence et graphe réduit

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On définit la relation \mathcal{R}_{FC} sur V par : pour tout couple de sommets $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}_{FC}v$ si il existe un chemin dans G entre u et v et un chemin de v à u .

Question 1

On considère dans cette question le graphe orienté $G = (V, A)$ représenté par la figure suivante :



1. Donnez les composantes fortement connexes de G .

2. Que vaut \mathcal{R}_{FC} pour cet exemple. \mathcal{R}_{FC} peut être représentée par la matrice carrée R_{FC} tel que $R_{FC}[u, v] = 1$ si $u\mathcal{R}_{FC}v$, 0 sinon.
3. Vérifiez sur la matrice R_{FC} que \mathcal{R}_{FC} est une relation d'équivalence
4. Représentez \mathcal{R}_{FC} par un graphe non orienté G_R ? A quoi correspondent les composantes connexes de G_R ?

Question 2

On souhaite démontrer que les composantes fortement connexes de G coïncident avec les composantes connexes de G_R . On rappelle que les composantes fortement connexes de G_R correspondent aux classes d'équivalence de la relation R_{FC} .

1. Démontrez que si x et y sont dans une même composante fortement connexe de G , alors ils sont dans une même composante connexe de G_R .
2. Démontrez ensuite la réciproque.

Question 3

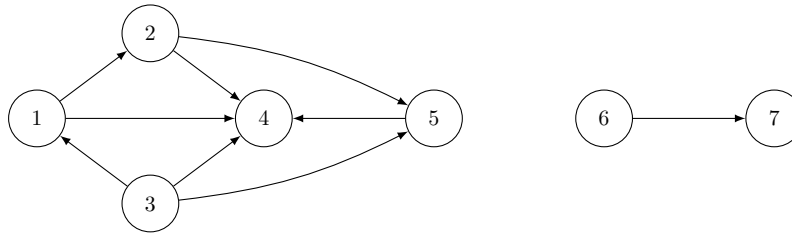
A tout graphe orienté $G = (V, A)$, on peut associer un graphe réduit $H_R = (V_H, A_H)$ qui est un graphe orienté défini de la manière suivante :

- Les sommets V_H sont les composantes fortement connexes de G ;
- A tout arc $(x, y) \in A$ avec x et y dans des composantes fortement connexes $C(x)$ et $C(y)$ différentes, on associe un arc $(C(x), C(y))$ dans A_H .

1. Construire le graphe réduit associé au graphe de la question 1.
2. Démontrez par l'absurde que, dans le cas général, H_R est un graphe sans circuit.

Exercice 5 – Tri topologique

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_5 = (V_5, A_5)$ suivant :



Question 1

Calculer (x) pour tout $x \in V_5$.

Question 2

En déduire un tri topologique de G_5 .

Question 3

Un tri topologique est-il nécessairement rangé en ordre croissant des rangs ?

On rappelle l'algorithme de calcul d'un tri topologique d'un graphe orienté sans circuit.

Algorithm 1 Calcul d'un tri topologique pour un graphe orienté sans circuit

Require: Un graphe orienté sans circuit $G = (V, A)$

Ensure: Un ordre topologique L

$L := (), T := V, \Delta(u) := d^-(u), \forall u \in V$

while $T \neq \emptyset$ **do**

 Choisir un sommet $u \in T$ tel que $\Delta(u) = 0$

$L := L + (u), T := T - \{u\}$

$\forall v \in \Gamma^+(u), \Delta(v) := \Delta(v) - 1$

end while

Question 4

Appliquer cet algorithme au graphe G_5 . Pour cela, vous préciserez à la fin de chaque itération les valeurs de u , L , T et Δ . Quand plusieurs sommets sont possibles pour u , vous sélectionnerez le sommet de numéro minimal.

Question 5

En supposant que les listes sont représentées par des listes circulaires doublement chaînées, calculer la complexité de cet algorithme lorsque les graphes sont représentés par :

- (a) des matrices sommets-arcs
- (b) des matrices sommets-sommets
- (c) des listes de successeurs.