Module LU2IN003 Graphes orientés 9

Alix Munier Kordon et Maryse Pelletier

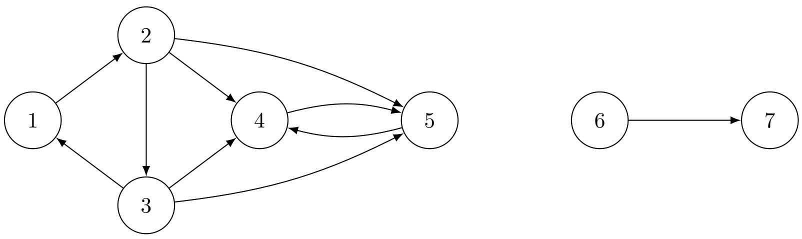
Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_0 = (V_0, A_0)$, avec
$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $A_0 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 7)\}$.
On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |A_0|$.

Question 1

Dessiner le graphe G_0. Que valent n_0 et m_0 ?

Solution:



$n_0 = 7$ et $m_0 = 10$.

Question 2

Pour chaque sommet x de G_0, donner l'ensemble des successeurs de x, l'ensemble de ses prédecesseurs, son demi-degré sortant et son demi-degré entrant. Que vaut la somme des demi-degrés sortants ? des demi-degrés entrants ?

Solution:

x	1	2	3	4	5	6	7
$\Gamma^+(x)$	$\{2\}$	$\{3,4,5\}$	$\{1,4,5\}$	$\{5\}$	$\{4\}$	$\{7\}$	$\emptyset$
$\Gamma^-(x)$	$\{3\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{2,3,5\}$	$\{2,3,4\}$	$\emptyset$	$\{6\}$
$d^+(x)$	1	3	3	1	1	1	0
$d^-(x)$	1	1	1	3	3	0	1

La somme des demi-degrés sortants et la somme des demi-degrés entrants sont toutes deux égales à 10.

Question 3

Donner un chemin élémentaire de G_0 et un circuit élémentaire de G_0, ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arcs) respectives.

Solution:

Un exemple chemin élémentaire : $(1, 2, 3, 5, 4)$, de longueur 4. Ou $()$, de longueur 0. Ou encore $(1, 2)$, de longueur 1.

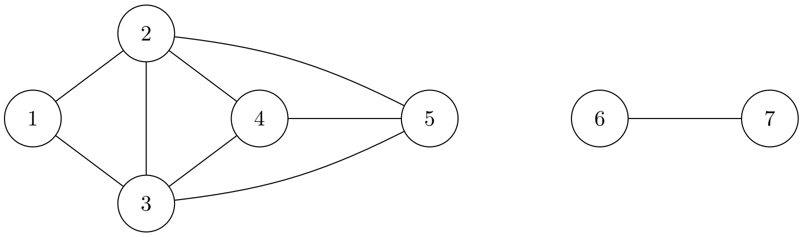
Un exemple de circuit élémentaire : $(1, 2, 3, 1)$, de longueur 3.

Question 4

Représenter le graphe non orienté G'_0 associé à G_0 en enlevant l'orientation des arcs. Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Solution:

Graphe G'_0 :



Le graphe G_0 n'est pas connexe car le graphe G'_0 n'est pas connexe (pas de chaîne entre 5 et 6).

Question 5

Le graphe G_0 est-il fortement connexe ? Donner ses composantes fortement connexes.

Solution:

Le graphe G_0 n'est pas fortement connexe, puisqu'il n'est pas connexe. Ses composantes fortement connexes sont $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6\}$ et $\{7\}$.

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe orienté

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |A|$.

Question 1

Montrer que $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m$.

Solution:

Par récurrence sur m.

Base Si $m = 0$ alors $d^+(v) = d^-(v) = 0$ pour tout $v \in V$ donc $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = 0$.

Induction Soit $m > 0$, on suppose que la propriété est vraie pour tout graphe orienté ayant $m - 1$ arcs. Soit G un graphe ayant m arcs, soit (x, y) un arc de G, soit $A' = A \setminus \{(x, y)\}$ et soit $G' = (V, A')$. Notons $d'^+(v)$, resp. $d'^-(v)$, le demi-degré sortant, resp. entrant, de v dans G'.
Alors $\sum_{v \in V} d'^+(v) = \sum_{v \in V} d'^-(v) = m - 1$, par hypothèse de récurrence.
$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V \setminus \{x\}} d^+(v) + d^+(x) = \sum_{v \in V \setminus \{x\}} d'^+(v) + (d'^+(x) + 1) = \sum_{v \in V} d'^+(v) + 1 = m - 1 + 1 = m$.
De même $\sum_{v \in V} d^-(v) = m$.

Conclusion La propriété pour tout graphe orienté.

Question 2

Exprimer le nombre maximum d'arcs de G en fonction de n :
– si G est sans boucle
– si G est avec boucles.

Solution:

Remarquons que le nombre d'arcs d'un graphe orienté est égal au nombre d'arcs sortants. Le nombre maximum d'arcs est le nombre d'arcs d'un graphe orienté *complet*.

Si G est sans boucle, il y a au maximum $n - 1$ arcs sortants par sommet. Au total $n(n - 1)$ arcs.

Si G est avec boucles, il y a au maximum n arcs sortants par sommet. Au total n^2 arcs.

Question 3

1. On suppose $n > 2$ et on pose $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
   Calculer $d^+(x)$ et $d^-(x)$ pour tout $x \in V$ dans chacun des cas suivants :
   (a) G est composé uniquement d'un chemin élémentaire $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ passant par tous les sommets
   (b) G est composé uniquement d'un circuit élémentaire $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ passant par tous les sommets
   (c) G est composé uniquement d'un chemin $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_j)$, avec $2 \leq j < n$ passant par tous les sommets.
2. Caractériser, sans preuve, les graphes orientés $G = (V, A)$ tels que $d^+(x) = d^-(x) = 1$ pour tout $x \in V$.
   Facultatif : prouver le résultat trouvé.

Solution:

1. (a) $d^+(v_n) = 0$ et $d^+(v_i) = 1$ pour les autres sommets, $d^-(v_1) = 0$ et $d^-(v_i) = 1$ pour les autres sommets.
   (b) $d^+(v_i) = 1$ pour tous les sommets, $d^-(v_i) = 1$ pour tous les sommets.
   (c) $d^+(v_i) = 1$ pour tous les sommets, $d^-(v_1) = 0$ et $d^-(v_j) = 2$ et $d^-(v_i) = 1$ pour les autres sommets.

2. G est composé de circuits élémentaires deux à deux disjoints.

   Facultatif

   On pose $n = |V|$. Soit $x \in V$. On construit un chemin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_0 = x$ (c'est possible puisque $d^+(y) = 1$ pour tout $y \in V$). Ce chemin a $n+1$ sommets donc il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $x_i = x_j$. Soit i_0 le plus petit indice tel qu'il existe $j > i_0$ tel que $x_{i_0} = x_j$. Si $i_0 > 0$ alors x_j a comme prédecesseurs x_{i_0-1} et x_{j_1} donc $x_{i_0-1} = x_{j_1}$ (car $d^-(x_j) = 1$), en contradiction avec la définition de i_0. Donc $i_0 = 0$.
   Soit j_0 le plus grand indice tel qu'il existe $i < j_0$ tel que $x_{j_0} = x_i$. On montre de même que $j_0 = n$.

   Ainsi on a prouvé que $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est un circuit et on prouve que ce circuit est élémentaire par un raisonnement analogue au précédent (laissé au lecteur).

   Supposons que deux circuits différents $C = (x_0, x_1, \ldots, x_p, x_1)$ et $C' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_q, x'_1)$ ont un sommet en commun. Soit i_0 le plus petit indice tel qu'il existe j tel que $x_{i_0} = x'_j$. Alors x'_j a exactement deux prédecesseurs : son prédecesseur dans C et son prédecesseur dans C'. En contradiction avec $d^-(x'_j) = 1$. Par conséquent les circuits sont deux à deux disjoints.

Exercice 3 – Représentation d'un graphe orienté

Question 1

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes orientés sans arc double ni boucle.

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arc	Liste d'adjacence
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{(1,2),(2,3),$ $(3,1),(2,4),(3,4)\}$			
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	
			$-1 \to$ $[4,5]$ $-2 \to$ $[3]$ $-3 \to$ $[2]$ $-4 \to$ $[]$ $-5 \to$ $[]$

Solution:

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arc	Liste d'adjacence
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{(1,2),(2,3),$ $(3,1),(2,4),(3,4)\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$-1 \to$ $[2]$ $-2 \to$ $[3,4]$ $-3 \to$ $[1,4]$ $-4 \to$ $[]$
$V = \{1,2,3,4\}$ $E = \{(1,2),(2,3),$ $(2,4),(3,4)\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$-1 \to$ $[2]$ $-2 \to$ $[3,4]$ $-3 \to$ $[4]$ $-4 \to$ $[]$
$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{(1,2),(1,4),$ $(2,1),(4,3),(4,5)$ $(5,1)\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$-1 \to$ $[2,4]$ $-2 \to$ $[1]$ $-3 \to$ $[]$ $-4 \to$ $[3,5]$ $-5 \to$ $[1]$
$V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{(1,4),(1,5)$ $\{2,3\},\{3,2\}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-1 \to$ $[4,5]$ $-2 \to$ $[3]$ $-3 \to$ $[2]$ $-4 \to$ $[]$ $-5 \to$ $[]$

Question 2

Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe orienté ? Même question pour une matrice R sommet-arc ou une liste d'adjacence L.

<u>**Solution**</u>:

Pour une matrice sommet-sommet M est à valeur dans $\{0, 1\}$. Comme il n'y a pas de boucle, il y a des 0 sur la première diagonale.

Pour la matrice sommet-arc M est à valeur dans $\{0, 1, -1\}$ et n'est pas carrée. Chaque arc est associé à une colonne avec exactement une valeur à 1, et une à -1 (pas de boucle). De plus, toutes les colonnes sont différentes car il n'y a pas d'arc multiple (*i.e.* arcs identiques).

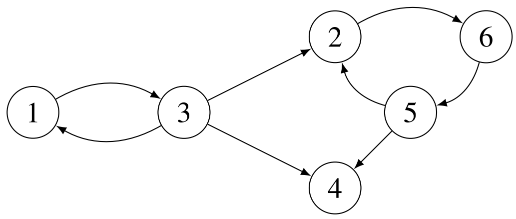
Pour les listes d'adjacence Il y a n listes, et les listes contiennent des sommets. Pour tout sommet x, x ne fait pas partie de la liste $L[x]$ car il n'y a pas de boucle.

Exercice 4 – Forte connexité, relation d'équivalence et graphe réduit

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. On définit la relation $\mathcal{R}_{FC}$ sur V par : pour tout couple de sommets $(u, v) \in V^2$, $u\mathcal{R}_C v$ si il existe un chemin dans G entre u et v et un chemin de v à u.

Question 1

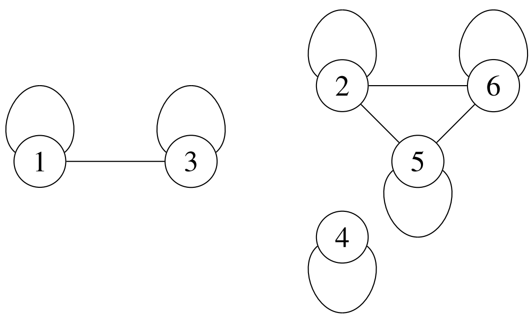
On considère dans cette question le graphe orienté $G = (V, A)$ représenté par la figure suivante :



1. Donnez les composantes fortement connexes de G.
2. Que vaut $\mathcal{R}_{FC}$ pour cet exemple. $\mathcal{R}_{FC}$ peut être représentée par la matrice carrée R_{FC} tel que $R_{FC}[u, v] = 1$ si $u\mathcal{R}_{FC}v$, 0 sinon.
3. Vérifiez sur la matrice R_{FC} que $\mathcal{R}_{FC}$ est une relation d'équivalence
4. Représentez $\mathcal{R}_{FC}$ par un graphe non orienté G_R ? A quoi correspondent les composantes connexes de G_R ?

<u>**Solution**</u>:

1. Les composantes fortement connexes de $G = (V, A)$ sont $\{1, 3\}$, $\{2, 5, 6\}$ et $\{4\}$
2. On obtient la matrice carrée $R_{FC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. La matrice possède des 1 sur la diagonale, on en conclut que $\mathcal{R}_{FC}$ est réflexive. La matrice est symétrique, donc la relation est symétrique. Enfin, on observe que les sommets en relations correspondent exactement aux ensembles $\{1, 3\}$, $\{2, 5, 6\}$ et $\{4\}$ dont les éléments sont tous adjacents deux à deux. On en déduit que R_{FC} est transitive.
4. Il s'agit d'une matrice carrée symétrique avec des 1 sur la diagonale, qui correspondent à des boucles. On peut donc lui associer un graphe non orienté G_R avec des boucles sur chaque sommet. On remarque que les composantes connexes de G_R coincident avec les composantes fortement connexes de G.



Question 2

On souhaite démontrer que les composantes fortement connexes de G coincident avec les composantes connexes de G_R. On rappelle que les composantes fortement connexes de G_R correspondent aux classes d'équivalence de la relation R_{FC}.

1. Démontrez que si x et y sont dans une même composante fortement connexe de G, alors ils sont dans une même composante connexe de G_R.

2. Démontrez ensuite la réciproque.

Solution:

1. Supposons que x et y sont dans une même composante fortement connexe de G, alors par définition de la relation R_{FC}, $xR_{FC}y$, donc il y a une arête $\{x, y\}$ dans G_R. x et y sont donc dans la même composante connexe de G_R.
2. Réciproquement, si x et y sont dans la même composante connexe de G_R, alors il existe une chaîne dans G_R entre x et y. Comme R_{FC} est transitive, il existe une arête $\{x, y\}$ dans G_R et $xR_{FC}y$. On en déduit que x et y sont dans la même composante fortement connexe de G.

Question 3

A tout graphe orienté $G = (V, A)$, on peut associer un graphe réduit $H_R = (V_H, A_H)$ qui est un graphe orienté défini de la manière suivante :

- Les sommets V_H sont les composantes fortement connexes de G ;
- A tout arc $(x, y) \in A$ avec x et y dans des composantes fortement connexes $C(x)$ et $C(y)$ différentes, on associe un arc $(C(x), C(y))$ dans A_H.

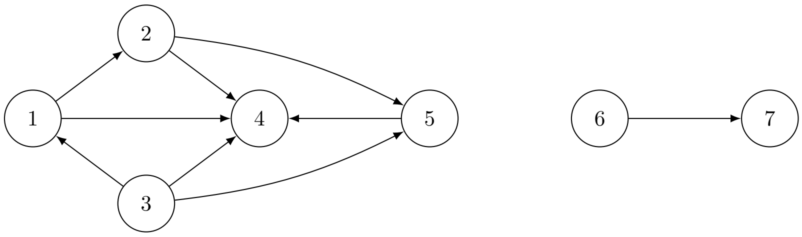
1. Construire le graphe réduit associé au graphe de la question 1.
2. Démontrez par l'absurde que, dans le cas général, H_R est un graphe sans circuit.

Solution:

1. En posant $c_1 = \{1, 3\}$, $c_2 = \{2, 5, 6\}$ et $c_3 = \{4\}$, on obtient $V_H = \{c_1, c_2, c_3\}$ et $A_H = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3)\}$.
2. Supposons par l'absurde qu'il y a un circuit $\nu = c_1, \ldots, c_p, c_1$ dans H_R. Alors pour tout arc (c_i, c_j) de ν, on peut associer un arc (x_i, y_j) dans G. Soient alors la suite de sommets (x_1, y_2), $(x_2, y_3), \ldots (x_p, y_1)$ obtenue. Les sommets x_α et y_α pour $\alpha \in \{1, \ldots p\}$ sont tous les deux dans une même composante fortement connexe de G, il y a donc un chemin de y_α à x_α dans G. On en déduit que ν est associé à un circuit de G et que tous les sommets x_α et y_α sont dans une seule et même composante fortement connexe de G, ce qui est impossible.

Exercice 5 – Tri topologique

Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_5 = (V_5, A_5)$ suivant :



Question 1

Calculer (x) pour tout $x \in V_5$.

Solution:

Comme 3 et 6 sont sans prédécesseur, $(3) = (6) = 0$. $(1) = (3) + 1 = 1$, $(7) = (6) + 1 = 1$, $(2) = (1) + 1 = 2$, $(5) = 1 + \max((2), (3)) = 3$ et $(4) = 1 + \max((5), (2), (3)) = 4$.

Question 2

En déduire un tri topologique de G_5.

Solution:

On fait un tri des sommets par rang croissant. Par exemple : $(3, 6, 1, 7, 2, 3, 4)$.

Question 3

Un tri topologique est-il nécessairement rangé en ordre croissant des rangs ?

Solution:

Non, par exemple : $(3, 1, 2, 5, 6, 4, 7)$ est un tri topologique de G_5.

On rappelle l'algorithme de calcul d'un tri topologique d'un graphe orienté sans circuit.

Algorithm 1 Calcul d'un tri topologique pour un graphe orienté sans circuit

Require: Un graphe orienté sans circuit $G = (V, A)$
Ensure: Un ordre topologique L
  $L := (), T := V, \Delta(u) := d^-(u), \forall u \in V$
  while $T \neq \emptyset$ **do**
    Choisir un sommet $u \in T$ tel que $\Delta(u) = 0$
    $L := L + (u), T := T - \{u\}$
    $\forall v \in \Gamma^+(u), \Delta(v) := \Delta(v) - 1$
  end while

Question 4

Appliquer cet algorithme au graphe G_5. Pour cela, vous préciserez à la fin de chaque itération les valeurs de u, L, T et Δ. Quand plusieurs sommets sont possibles pour u, vous sélectionnerez le sommet de numéro minimal.

Solution:

u	L	T	Δ
init.	()	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$	$(1,1,0,4,2,0,1)$
3	(3)	$\{1,2,4,5,6,7\}$	$(0,1,0,3,1,0,1)$
1	$(3,1)$	$\{2,4,5,6,7\}$	$(0,0,0,2,1,0,1)$
2	$(3,1,2)$	$\{4,5,6,7\}$	$(0,0,0,1,0,0,1)$
5	$(3,1,2,5)$	$\{4,6,7\}$	$(0,0,0,0,0,0,1)$
4	$(3,1,2,5,4)$	$\{6,7\}$	$(0,0,0,0,0,0,1)$
6	$(3,1,2,5,4,6)$	$\{7\}$	$(0,0,0,0,0,0,0)$
7	$(3,1,2,5,4,6,7)$	$\emptyset$	$(0,0,0,0,0,0,0)$

Question 5

En supposant que les listes sont représentées par des listes circulaires doublement chaînées, calculer la complexité de cet algorithme lorsque les graphes sont représentés par :
(a) des matrices sommets-arcs
(b) des matrices sommets-sommets
(c) des listes de successeurs.

Solution:
Pour calculer la complexité, il faut compter :
– le coût de l'initialisation :
—- calcul de L (en $\Theta(1)$)
—- calcul de T (en $\Theta(n)$)
—- calcul de Δ (dépend de la représentation du graphe)
– le coût du k-ème passage dans la boucle, pour k variant de 1 à n :
—- le choix de u (coûte $n-k$)
—- l'ajout à L (en $\Theta(1)$)
—- la mise à jour de Δ (dépend de la représentation du graphe)
—- la mise à jour de T (en $\Theta(1)$).
Pour le choix de u, on a donc du $\Theta(n^2)$ au total.

Matrices sommets-arcs :
– calcul de Δ en $\Theta(mn)$
– mise à jour de Δ en $\Theta(m)$, à chaque itération.
D'où un coût total en $\Theta(mn+n^2)$.

Matrices sommets-sommets :
– calcul de Δ en $\Theta(n^2)$
– mise à jour de Δ en $\Theta(n)$, à chaque itération.
D'où un coût total en $\Theta(n^2)$.

Listes de successeurs :
– calcul de Δ en $\Theta(n+m)$
– mise à jour de Δ en $\Theta(d^+(u))$, à chaque itération.
D'où un coût total en $\Theta(n^2)$.