

EXERCICE 7

Devoir2

Montrons que

quel que soit le prédicat F ,

$$((\exists x, \neg (F(x))) \Leftrightarrow \neg (\forall x, F(x)))$$

$$\text{Montrons } (\exists x, \neg (F(x))) \Leftrightarrow \neg (\forall x, F(x)) \quad (1)$$

$(\Leftrightarrow I)$

Supposons que $\exists x, \neg (F(x))$ (h1)

Montrons $\neg (\forall x, F(x))$ (2)

$(\neg I)$

Supposons que $\forall x, F(x)$ (h2)

Montrons \perp (3)

$(\exists E)$

Montrons $\exists x, \neg (F(x))$ (4)

d'après (h1)

Soit l'élément a

Supposons que $\neg (F(a))$ (h3)

Montrons \perp (5)

$(\neg E)$

Montrons $F(a)$ (6)

$(\forall E)$

Montrons $\forall x, F(x)$ (7)

d'après (h2)

Montrons $\neg (F(a))$ (8)

d'après (h3)

Supposons que $\neg (\forall x, F(x))$ (h4)

Montrons $\exists x, \neg (F(x))$ (9)

(A)

Supposons que $\neg (\exists x, \neg (F(x)))$ (h5)

Montrons \perp (10)

$(\neg E)$

Soit l'élément a

Montrons $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ (11)

(A)

Supposons que $\neg(\mathbf{F}(\mathbf{a}))$ (h6)

Montrons \perp (12)

($\neg E$)

Montrons $\exists \mathbf{x}, \neg(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ (13)

($\exists I$)

Montrons $\neg(\mathbf{F}(\mathbf{a}))$ (14)

d'après (h6)

Montrons $\neg(\exists \mathbf{x}, \neg(\mathbf{F}(\mathbf{x})))$ (15)

d'après (h5)

Montrons $\neg(\forall \mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ (16)

d'après (h4)