

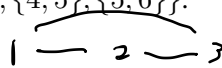
Module LU2IN003 Graphes non orientés

Exercices de Base semaine 8

Exercice(s)

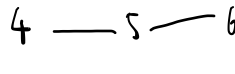
Exercice 1 – Terminologie de base

Dans cet exercice, on considère le graphe non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$, avec $V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$. On pose $n_0 = |V_0|$ et $m_0 = |E_0|$.



Question 1

Dessiner le graphe G_0 . Que valent n_0 et m_0 ?



Question 2

Quels sont les sommets adjacents au sommet 3? les arêtes incidentes au sommet 3?

1, 2 $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$

Question 3

Quel est le degré de chacun des sommets de G_0 ? Que vaut la somme des degrés?

1 : 2 2 : 2 3 : 2 4 : 1 5 : 2 6 : 1 $\sum = 10$

Question 4

Donner une chaîne élémentaire de G_0 et un cycle élémentaire de G_0 , ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arêtes) respectives.

1 - 2 - 3 1 - 2 - 3 - 1

Question 5

Le graphe G_0 est-il connexe? Justifier la réponse.

X, 1 \rightarrow 4 X

Exercice 2 – Propriétés autour des degrés pour un graphe non orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Montrer que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, où $d(v)$ désigne le degré du sommet v dans le graphe G .

Question 2

Exprimer le nombre maximum d'arêtes de G en fonction de n .

$(n-1)^2$

Question 3

- Démontrer que tout graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair.
- Si tous les sommets de G sont de degré 1, que peut-on dire de n ? Caractériser un tel graphe.

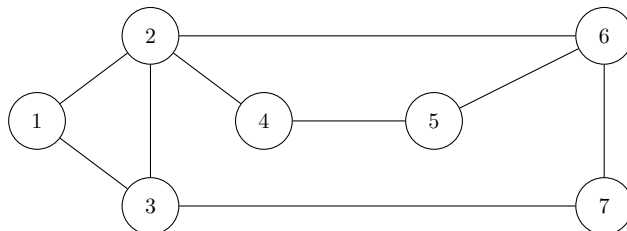
$n \geq 2$ 1 1 — 2

Question 4

Montrer par l'absurde que tout graphe à $n \geq 2$ sommets possède au moins deux sommets de même degré.

Exercice 3 – Sous-graphe, graphe induit

On considère le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$:

**Question 1**

Dessiner trois sous-graphes de G_1 différents les uns des autres. Pour chacun d'entre eux, dire s'il est le graphe induit par un sous-ensemble de sommets. $\tau o u s$

Question 2

Dessiner le graphe induit par $\{1, 2, 4, 5, 6\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 5, 7\}$, le graphe induit par $\{1, 2, 3, 4, 7\}$. Quel est le graphe induit par V_1 ?

Exercice 4 – Chaînes et cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Montrer que si il existe une chaîne entre deux sommets u et v , alors il existe une chaîne élémentaire entre u et v (Lemme de Koenig).

Question 2

On suppose que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V$. Montrer par une preuve directe et constructive que G contient un cycle élémentaire.

Question 3

Soit $k \leq n - 1$. On suppose que $d(v) \geq k$ pour tout $v \in V$. Montrer que G contient une chaîne élémentaire de longueur k .

indication : faire une récurrence sur k .

Question 4

On suppose que G contient exactement deux sommets x et y de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans G entre x et y .

indication : faire une récurrence sur m .

Exercice 5 – Connexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

On suppose que G contient un sommet de degré $n - 1$. Montrer que G est connexe.

Question 2

Montrer que si G est connexe et contient un cycle élémentaire \mathcal{C} et si e est une arête de \mathcal{C} alors le sous-graphe $G' = (V, E \setminus \{e\})$ est connexe.

Exercice 6 – Complémentaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Le *complémentaire* du graphe G est le graphe $G_C = (V, E_C)$, avec $E_C = \{\{x, y\} \mid x \in V, y \in V \text{ et } \{x, y\} \notin E\}$.

Deux graphes sont *isomorphes* s'ils sont identiques, à une renumérotation près des sommets.

Un graphe est *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complémentaire.

Question 1

On considère le graphe G_0 de l'exercice 1 : $G_0 = (V_0, E_0)$, avec

$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$.

Représenter le complémentaire de G_0 . Le graphe G_0 est-il auto-complémentaire ?

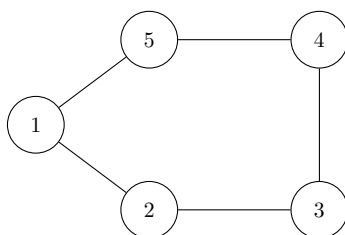
Question 2

On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

1. Combien G_C a-t-il d'arêtes ?
2. En déduire que, si G est auto-complémentaire alors n ou $n - 1$ est un multiple de 4 et $m = n(n - 1)/4$.

Question 3

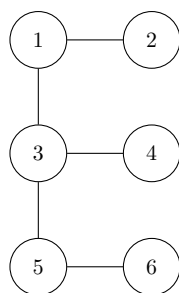
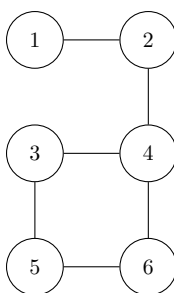
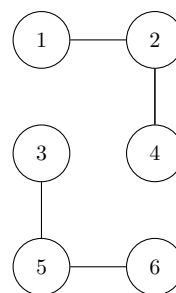
On considère le graphe G_2 :



Le graphe G_2 est-il auto-complémentaire ?

Exercice 7 – Quelques exemples et propriétés autour des arbres**Question 1**

Est-ce que les graphes non orientés suivants sont des arbres ? Justifiez vos réponses. Dans la négative, quelle(s) arête(s) doit on enlever/rajouter pour obtenir un arbre ?

 G_1  G_2  G_3

Question 2

Donnez tous les arbres différents à 1, 2, 3, 4 ou 5 sommets.

Question 3

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est connexe sans être minimal connexe. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est connexe mais qui n'est pas minimal connexe contient au moins un cycle élémentaire.

Question 4

- Donnez un exemple d'un graphe simple à 4 sommets qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique. Justifiez votre réponse.
- Montrez par un raisonnement direct que tout graphe simple $G = (V, E)$ qui est sans cycle élémentaire sans être maximal acyclique n'est pas connexe.

Exercice 8 – Propriétés sur les arbres

Le but de cet exercice est de démontrer des propriétés classiques sur les arbres.

Question 1

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe G connexe.
2. Montrez par l'absurde que si T est connexe avec $m = n - 1$, alors T est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que T n'est pas minimal connexe.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

Question 2

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté.

1. Rappelez sans démonstration la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe G sans cycle élémentaire.
2. Montrez par l'absurde que si T est sans cycle élémentaire avec $m = n - 1$, alors T est un arbre. Pour cela, on pourra supposer que T n'est pas maximal acyclique.
3. Que pensez-vous de la réciproque ?

Question 3

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si T est maximal acyclique, alors entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique (il s'agit de l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème général sur les arbres).

Question 4

Soit $T = (V, E)$ un graphe non orienté. Montrer que si entre deux sommets quelconques il existe une chaîne élémentaire unique, alors T est un arbre (il s'agit de l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème général sur les arbres).

Exercice 9 – Représentation d'un graphe non orienté simple**Question 1**

Complétez le tableau suivant. Les graphes considérés sont des graphes non orientés simples.

Définition ensembliste	Matrice sommet-sommet	Matrice sommet-arête	Liste d'adjacence
$V = \{1, 2, 3, 4\}$ $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$			
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		
		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	
			$-1 \rightarrow [2]$ $-2 \rightarrow [1, 3]$ $-3 \rightarrow [2, 4, 5]$ $-4 \rightarrow [3]$ $-5 \rightarrow [3]$

Question 2

Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe non orienté ? Même question pour une matrice R sommet-arête ou une liste d'adjacence L .

Exercice 10 – Primitives d'un graphe non orienté

Le but de cet exercice est d'évaluer la complexité de primitives sur des graphes non orientés simples en fonction de leur représentation en mémoire (matrice sommet-sommet, matrice sommet-arête ou listes d'adjacence). Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté simple. On pose $n = |V|$ et $m = |E|$.

Question 1

Décrire en une ou deux phrases le principe d'un algorithme qui, pour tout sommet x en paramètre, renvoie le degré $d(x)$ en fonction de la représentation. Évaluez sa complexité.

Question 2

Décrire en deux phrases le principe d'un algorithme qui construit la liste des arêtes d'un graphe en fonction de la représentation utilisée. La liste obtenue est stockée dans une liste doublement chaînée, ce qui permet d'insérer en fin de liste en $\Theta(1)$.