

## TD 6 AVEC RÉPONSES

### 1 Variables aléatoires uniformes

**Exercice 1** Soit  $X$  une variable aléatoire uniforme entre 5,5 et 9,5. Calculer la probabilité que  $X$  soit

1. supérieur à 5,4 ;
2. entre 7,5 et 8,5.
3. entre 2,7 et 4,9 ;
4. entre 2,2 et 8,3 ;

**RÉPONSE.** La densité de  $X$  est la fonction qui est égale à  $1/(9,5 - 5,5) = 0,25$  entre 5,5 et 9,5 et égale à 0 ailleurs.

1. L'intersection entre  $]5,4, +\infty[$  et  $[5,5, 9,5]$  est tout l'intervalle  $[5,5, 9,5]$ , donc la probabilité est égale à 1.
2. L'intersection entre  $[7,5, 8,5]$  et  $[5,5, 9,5]$  est  $[7,5, 8,5]$ , donc la probabilité est égale à  $0,25 \times (8,5 - 7,5) = 0,25$ .
3. L'intersection entre  $[2,7, 4,9]$  et  $[5,5, 9,5]$  est vide, donc la probabilité est 0.
4. L'intersection entre  $[2,2, 8,3]$  et  $[5,5, 9,5]$  est  $[5,5, 8,3]$ , donc la probabilité est égale à  $0,25 \times (8,3 - 5,5) = 0,7$ .

### 2 Variables aléatoires normales

**Exercice 2** Pour une variable aléatoire  $X$  normale de moyenne 100 et écart type 25 trouver :

1. la probabilité que  $X$  soit inférieure à 75 ;
2. la probabilité que  $X$  soit supérieure à 65 ;

3. la probabilité que  $X$  soit comprise entre 60 et 100 ;
4. la valeur  $\beta$  telle que  $P(X \leq \beta) = 0,55$  ;
5. la valeur  $\alpha$  telle que  $P(X \geq \alpha) = 0,60$  ;
6. les valeurs  $\gamma$  et  $\delta$  telles que  $[\gamma, \delta]$  est un intervalle centré en 100 et  $P(\gamma \leq X \leq \delta) = 0,15$ .

**RÉPONSE.**

1. 0,159.
2. 0,919.
3. 0,445.
4.  $\beta = 103,142$  ;
5.  $\alpha = 93,666$  ;
6.  $\gamma = 95,272$  ;  $\delta = 104,728$ .

### 3 Théorème de la limite centrale

**Exercice 3** Supposons que les prix des tickets d'avion Paris-Marseille à différentes dates soient normalement distribués avec une moyenne de 45 euros et un écart type de 12 euros.

- a Trouver la probabilité que le prix d'un billet soit supérieur à 60 euros.
- b Trouver la probabilité que le prix total de 4 billets de dates différentes soit supérieur à 240 euros.

**RÉPONSE.**

- a Pour une variable aléatoire normale  $X$  de moyenne 45 et écart type 12 la probabilité que  $X$  soit supérieure à 60 est 10,56%.
- b Si le total des prix est 240 euros, alors la moyenne des prix est 60 euros. La moyenne des prix de 4 billets est normale de moyenne 45 et écart type  $12/\sqrt{4} = 6$ . Pour une variable aléatoire  $X$  de moyenne 45 et écart type 6 la probabilité que  $X$  soit supérieure à 60 est 0,62%.