Université de Paris-Saclay
Probabilités et Statistique
Enseignant : Carmelo Vaccaro

M1 - ISD par apprentissage
2022/23 : premier semestre

TD 4 avec réponses

1 Calcul de probabilités

Exercise 1 L'Assemblée nationale française comprend 362 députés hommes et 215 députées femmes. Si un député est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'une femme soit sélectionnée ?

Réponse. Le nombre total de membres de l'Assemblée nationaleu est de $362 + 215 = 577$. La probabilité de choisir une députée femme est de

$$\frac{215}{577} \approx 0{,}373,$$

soit 37,3%.

Exercise 2 Lorsque Mendel a mené ses célèbres expériences de génétique sur les petit pois, un échantillon de descendance était composé de 428 petits pois verts et 152 petits pois jaunes. Sur la base de ces résultats, estimez la probabilité d'obtenir une descendance de petits pois verts.

Réponse. Le nombre total de petits pois est de $428 + 152 = 580$, La probabilité d'obtenir un petit pois vert dans la descendance est de

$$\frac{428}{580} \approx 0{,}74.$$

2 Analyser et calculer des probabilité

Exercise 3 Les résultats possibles lorsqu'un couple a trois enfants sont les suivants

$$\{FFF, FFM, FMF, FMM, MFF, MFM, MMF, MMM\}.$$

Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants.

1. Il y a exactement une fille.

Réponse. Les événements sont $\{FMM, MFM, MMF\}$, il y a donc trois événements. Puisque l'espace d'échantillonnage a 8 événements, la probabilité qu'il y ait exactement une fille est de

$$\frac{3}{8} = 0{,}375.$$

2. Il y a exactement deux filles.

Réponse. Les événements sont $\{FFM, FMF, MFF\}$, il y a donc trois événements. Puisque l'espace d'échantillonnage a 8 événements, la probabilité qu'il y ait exactement une fille est de $$\frac{3}{8} = 0{,}375.$$

3. Il y a trois filles.

Réponse. Les événements sont $\{FFF\}$, donc il y a un événement. Puisque l'espace d'échantillonnage a 8 événements, la probabilité qu'il y ait exactement une fille est de $$\frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Exercise 4 Le tableau ci-dessous comprend les résultats d'une expérience visant à tester l'efficacité des *polygraphes*, outils permettant de détecter si un sujet ment ou non. Le tableau résume les résultats des tests polygraphiques pour 98 sujets différents. Dans chaque cas, on savait si le sujet mentait ou non. Le tableau indique donc quand le test polygraphique était correct.

	Le sujet a-t-il réellement menti ?	
	Non (N'a pas menti)	**Oui (A menti)**
Résultat du test positif (Le test polygraphique a indiqué que le sujet a *menti.*)	15 (**faux positif**)	42 (**vrai positif**)
Résultat du test négatif (Le test polygraphique a indiqué que le sujet n'a *pas menti.*)	32 (**vrai négatif**)	9 (**faux négatif**)

1. Si l'une des réponses est choisie au hasard, trouvez la probabilité qu'il s'agisse d'un résultat négatif.

Réponse. Il y a 98 événements. Le nombre de résultats négatifs est de $32 + 9 = 41$ événements, donc la probabilité est de $$\frac{41}{98} \approx 0{,}42.$$

2. Si l'une des réponses est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un mensonge ?

Réponse. Il y a 98 événements. Le sujet a menti dans $42 + 9 = 51$ événements, donc la probabilité est de $$\frac{51}{98} \approx 0{,}52.$$

3. Si l'une des réponses est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un faux positif ?

Réponse. Il y a 98 événements. Il y a 15 faux positifs, donc la probabilité est de

$$\frac{15}{98} \approx 0{,}15.$$

4. Si l'une des réponses est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un faux négatif ?

Réponse. Il y a 98 événements. Il y a 9 faux négatifs, donc la probabilité est de

$$\frac{9}{98} \approx 0{,}09.$$

3 Union et intersection d'événements

Exercise 5 Supposons qu'un couple ait quatre enfants. Étant donné les événements A et B précisés ci-dessous, trouver pour $A \cap B$ et $A \cup B$: 1) les événements simples en lesquels ils peuvent être décomposés (sauf quand c'est l'espace entier) ; 2) leur probabilité.

1. A = "avoir au moins deux mâles"; B = "avoir au moins deux femelles";

Réponse.
$A \cup B$ = l'espace entier ;

$A \cap B = \{\text{MMFF, MFMF, MFFM, FMMF, FMFM, FFMM}\}$;

$P(A \cap B) = \frac{6}{16} = 0{,}375$;

$P(A \cup B) = 1$.

2. A = "avoir au moins trois mâles"; B = "avoir au moins trois femelles";

Réponse. $A \cap B = \emptyset$;

$A \cup B = \{\text{MMMM, MMMF, MMFM, MFMM, FMMM, FFFM, FFMF, FMFF, MFFF, FFFF}\}$;

$P(A \cap B) = 0$;

$P(A \cup B) = \frac{10}{16} = 0{,}625$.

3. A = "avoir au moins trois mâles"; B = "les deux premiers sont des mâles".

Réponse.
$A \cap B = \{\text{MMMM, MMMF, MMFM}\}$;

$A \cup B = \{\text{MMMM, MMMF, MMFM, MFMM, FMMM, MMFF}\}$;

$P(A \cup B) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$

$P(A \cup B) = \frac{6}{16} = 0{,}375$.

4 Probabilité de l'union et du complémentaire

Exercise 6 1. Calculer $P(A \cup B)$ si $P(A) = 0{,}67$, $P(B) = 0{,}46$, $P(A \cap B) = 0{,}35$.

Réponse. On a que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}67 + 0{,}46 - 0{,}35 = 0{,}78.$$

2. Calculer $P(A \cap B)$ si $P(A) = 0{,}13$, $P(B) = 0{,}38$, $P(A \cup B) = 0{,}44$.

Réponse. On a que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

donc

$$0{,}44 = 0{,}13 + 0{,}38 - P(A \cap B) = 0{,}51 - P(A \cap B),$$

qui implique que $P(A \cap B) = 0{,}07$.

Exercise 7 Considérons le tableau de l'Exercice 4 :

1. si l'un des sujets est choisi au hasard, trouvez la probabilité que le sujet ait un résultat positif ou qu'il n'ait pas menti ;

Réponse. Cette probabilité est égale à la probabilité que le sujet ait un résultat positif au test plus la probabilité que le sujet n'ait pas menti moins la probabilité que le sujet ait un résultat positif au test et n'ait pas menti.

Comme il y a 98 sujets, 57 résultats positifs, 47 sujets qui n'ont pas menti et 15 résultats positifs qui n'ont pas menti, cette probabilité est égale à

$$\frac{57}{98} + \frac{47}{98} - \frac{15}{98} = \frac{89}{98} \approx 0{,}91.$$

2. Si l'un des sujets est choisi au hasard, trouvez la probabilité que le sujet ait eu un résultat négatif ou ait menti.

Réponse. Cette probabilité est égale à la probabilité que le sujet ait un résultat négatif plus la probabilité que le sujet ait menti moins la probabilité que le sujet ait un résultat négatif et ait menti.

Comme il y a 98 sujets, 41 résultats négatifs, 51 sujets qui ont menti et 9 résultats positifs qui ont menti, cette probabilité est égale à

$$\frac{41}{98} + \frac{51}{98} - \frac{9}{98} = \frac{83}{98} \approx 0{,}85.$$

5 Probabilité conditionnelle

Exercise 8 Considérons le tableau de l'Exercice 4. Si un sujet est choisi au hasard, trouvez la probabilité que le sujet ait réellement menti, étant donné qu'il a obtenu un résultat positif au test. Autrement dit, trouvez

$$P(\text{le sujet a menti} \mid \text{résultat positif du test}).$$

Réponse.
Première méthode. Si nous supposons que le sujet a eu un résultat positif, nous avons affaire aux 57 sujets de la première ligne du tableau. Parmi ces 57 sujets, 42 ont menti, nous obtenons donc ce résultat :

$$P(\text{le sujet a menti} \mid \text{résultat positif du test}) = \frac{42}{57} = 0{,}737.$$

Deuxième méthode.

$$P(\text{le sujet a menti} \mid \text{résultat positif du test}) =$$

$$P(\text{le sujet a menti} \cap \text{résultat positif du test}) \ / \ P(\text{résultat positif du test}) =$$

$$\frac{(\frac{42}{98})}{(\frac{57}{98})} = \frac{42}{57} = 0{,}737.$$

6 Événements indépendants

Exercise 9 Considérons le tableau de l'Exercice 4.

1. Si 2 sujets sont choisis au hasard sans remplacement, trouvez la probabilité qu'ils aient tous deux obtenu des résultats faussement positifs.

Réponse. La probabilité est

$$\frac{15}{98} \cdot \frac{14}{97} \approx 0{,}022.$$

2. Si 2 sujets sont choisis au hasard avec remplacement, trouvez la probabilité qu'ils aient tous deux des faux positifs ou tous deux faux négatifs.

Réponse. Soit A = "les deux faux positifs", B = "les deux faux négatifs". Nous devons calculer $P(A \cup B)$. On sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Puisque $A \cap B$ est vide, alors $P(A \cap B) = 0$. A et B sont faits par deux événements indépendants, donc

$$P(A) = \frac{15}{98} \cdot \frac{15}{98} \approx 0{,}023,$$

et

$$P(B) = \frac{9}{98} \cdot \frac{9}{98} \approx 0{,}008,$$

donc

$$P(A \cup B) \approx 0{,}023 + 0{,}008 = 0{,}031.$$

7 Probabilité d'au moins un

Exercise 10 Supposons que 24,9% des cambriolages sont résolus par des arrestations. Un nouvel inspecteur est affecté à 10 cambriolages différents. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit résolu par une arrestation ?

Réponse. Soit A l'événement "au moins un cambriolage est résolu avec une arrestation". Le complément de A est $\overline{A}$ = "aucun cambriolage n'est résolu par une arrestation". La probabilité que le cambriolage ne soit pas résolu par une arrestation est 1 - 0,249 = 0,751. Les événements sont indépendants, donc

$$P(\overline{A}) = 0{,}751^{10} \approx 0{,}057.$$

Donc

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 1 - 0{,}057 = 0{,}943.$$

8 Théorème de Bayes

Exercise 11 Supposons d'avoir un détecteur de fumée tel que :

- la probabilité que l'alarme sonne quand il y a un incendie est de 97% ;
- la probabilité que l'alarme sonne quand il n'y a pas d'incendie est de 1%.

  Supposons qu'il y a une chance sur mille qu'il y ait un incendie. Si l'alarme sonne, quelle est la probabilité qu'il y ait un incendie ? (Approximer le résultat final avec trois décimales et ne pas approximer les résultats intermédiaires)

Réponse. Soit A l'événement "l'alarme sonne", I l'événement "il y a un incendie". Il faut calculer $P(I|A)$
On a les données suivantes :

- $P(A|I) = 0{,}97$;
- $P(A|\overline{I}) = 0{,}01$;
- $P(I) = 0{,}001$, d'où $P(\overline{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

En utilisant le théorème de Bayes on a que

$$P(I|A) = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)} = \frac{0{,}97 \cdot 0{,}001}{P(A)} = \frac{0{,}97 \cdot 0{,}001}{P(A)} = \frac{0{,}00097}{P(A)}.$$

Il reste à calculer $P(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A|I)P(I) + P(A|\overline{I})P(\overline{I}) =$$

$$0{,}97 \cdot 0{,}001 + 0{,}01 \cdot 0{,}999 = 0{,}01096.$$

Donc

$$P(I|A) = \frac{0{,}00097}{0{,}01096} \approx 0.089,$$

soit environ 8,9%.