Université de Paris-Saclay
Probabilités et Statistique
Enseignant : Carmelo Vaccaro

M1 - ISD par apprentissage
2022/23 : premier semestre

TD 5 AVEC RÉPONSES

1 Distributions de probabilité

Exercise 1 Vérifiez si les fonctions $P : S \to [0,1]$ suivantes déterminent une distribution de probabilité discrète :

1. $S = \{a, b, c, d\}$ et $P(a) = 0{,}3$, $P(b) = 0{,}45$, $P(c) = 0{,}1$, $P(d) = 0{,}15$.

   Réponse. On a que $0.3 + 0.45 + 0.1 + 0.15 = 1$, donc c'est une distribution de probabilité.

2. $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $P(a) = 0{,}15$, $P(b) = 0{,}35$, $P(c) = 0{,}2$, $P(d) = 0{,}1$, $P(e) = 0{,}1$.

   Réponse. On a que $0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}9 \neq 1$, donc ce n'est pas une distribution de probabilité.

3. $S = \{a, b, c, d, e\}$ and $P(a) = 0{,}3$, $P(b) = 0{,}25$, $P(c) = 0{,}4$, $P(d) = 0{,}05$, $P(e) = 0{,}05$.

   Réponse. On a que $0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}05 + 0{,}05 = 1{,}05 \neq 1$, donc ce n'est pas une distribution de probabilité.

4. $S = \{a, b, c, d, e\}$ and $P(a) = 0{,}55$, $P(b) = 0{,}25$, $P(c) = 0{,}07$, $P(d) = 0{,}07$, $P(e) = 0{,}06$.

   Réponse. On a que $0{,}55+0{,}25+0{,}07+0{,}07+0{,}06 = 1$, donc c'est une distribution de probabilité.

Exercise 2 Calculez la moyenne, la variance et l'écart-type des distributions de probabilité suivantes :

1. $S = \{2{,}5,\ 5,\ 7\}$ et $P(2{,}5) = 0{,}1$, $P(5) = 0{,}2$, $P(7) = 0{,}7$,

   Réponse. On a que

   $$\mu = 2{,}5 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}7 = 0{,}25 + 1 + 4{,}9 = 6{,}15.$$

   $$\sigma^2 = (2{,}5 - 6{,}15)^2 \cdot 0{,}1 + (5 - 6{,}15)^2 \cdot 0{,}2 + (7 - 6{,}15)^2 \cdot 0{,}7 = 2{,}1025.$$

   $$\sigma = 1{,}45.$$

2. $S = \{3, 5, 8, 10\}$ et $P(3) = \frac{1}{2}$, $P(5) = \frac{1}{10}$, $P(8) = \frac{1}{4}$, $P(10) = \frac{3}{20}$.

Réponse. On a que

$$\mu = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

$$\sigma^2 = \left(3 - \frac{11}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(5 - \frac{11}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(8 - \frac{11}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(10 - \frac{11}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{20} = 7{,}75.$$

$$\sigma \approx 2{,}78.$$

2 Distributions de probabilité binomiales

Exercise 3 Aux États-Unis, 35% de la population a les yeux bleus. Trouvez la probabilité d'obtenir exactement 2 personnes aux yeux bleus lorsque 6 personnes sont choisies au hasard (arrondissez le résultat final avec 3 décimales).

Réponse. La formule,

$$P(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}\, p^k (1-p)^{n-k},$$

avec les valeurs $n = 6$, $k = 2$ et $p = 0{,}35$ donne

$$P(2) = \frac{6!}{4!2!}\, 0{,}35^2\, 0{,}65^4 \approx 15 \cdot 0{,}1225 \cdot 0{,}1785 \approx 0{,}328.$$

Exercise 4 Un test de psychologie consiste en des questions à choix multiples, chacune ayant 4 réponses possibles (a, b, c, d), dont 1 est correcte. En supposant que vous deviniez les réponses à 6 de ces questions, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 réponses correctes lorsque 6 suppositions sont faites ? (arrondissez le résultat final avec 3 décimales).

Réponse. La formule,

$$P(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}\, p^k (1-p)^{n-k},$$

avec les valeurs $n = 6$, $k = 4$ et $p = 0{,}25$ donne

$$P(4) = \frac{6!}{2!4!}\, 0{,}25^4\, 0{,}75^2 \approx 15 \cdot 0{,}0039 \cdot 0{,}5625 \approx 0{,}033.$$

Exercise 5 Trouvez la moyenne, la variance et l'écart-type de la distribution binomiale des Exercices 3 and 4.

Answer.

1. $$\mu = np = 6 \cdot 0.35 = 2.1,$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = 6 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 1{,}365$$
et
$$\sigma = \sqrt{1{,}365} \approx 1{,}168.$$

2. $$\mu = np = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5,$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}125$$
et
$$\sigma = \sqrt{1{,}125} \approx 1{,}061.$$

3 Distributions de probabilité de Poisson

Exercise 6 Trouvez la probabilité requise pour une distribution de Poisson avec le λ donné.

1. $\lambda = 0{,}3$, trouver $P(1)$.

Réponse. La formule
$$P(x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$
avec $k = 1$ et $\lambda = 0{,}3$ donne
$$P(1) = \frac{0{,}3^1 e^{-0{,}3}}{1!} \approx 0{,}222.$$

2. $\lambda = 3/4$, trouver $P(3)$.

Réponse. La formule
$$P(x) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$
avec $k = 3$ et $\lambda = 3/4$ donne
$$P(3) = \frac{0{,}75^3 e^{-0{,}75}}{3!} \approx 0{,}033.$$

3. $\lambda = 1/6$, trouver $P(0)$.

Réponse. La formule

$$P(x) = \frac{\lambda^k \, e^{-\lambda}}{k!}.$$

avec $k = 0$ et $\lambda = 1/6$ donne

$$P(0) = \frac{\frac{1}{6}^0 \, e^{-1/6}}{0!} \approx 0{,}846.$$