МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное бюджетное образовательное государственное
учреждение высшего образования

**«МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)»**

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Дифференциальные уравнения» на тему
«Анализ систем дифференциальных уравнений»

Выполнил:
Учебная группа 2бПМ
Осада.В.В
Руководитель курсового проекта:
Старший преподаватель
Яшина М.В
Подпись _____

Курсовой проект защищен
с оценкой «_____»
«____» __________ 2023 г.

Москва 2023

Содержание

1 Введение

Дифференциальные уравнения являются важным инструментом в математике и широко применяются для моделирования и описания различных физических, биологических и экономических явлений. Они позволяют формализовать отношения между изменениями величин и их производными, и тем самым позволяют нам предсказывать поведение систем во времени.

2 Номера курсовой

2.1 Метод Эйлера(задание №1)

i	xi	yi	f(x,y)	hf(x,y)
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.1	0.0	0.1	0.01
2	0.2	0.0	0.1999	0.01999
3	0.3	0.02999	0.2991	0.02991
4	0.4	0.0599	0.3964119828131944	0.03964119828131944
5	0.5	0.09954125827131946	0.49009153790176246	0.04900915379017625

2.2 Решение системы дифференциальных уравнений методом Эйлера (задание №2)

$$20. \begin{cases} \dot{x} = 2x - z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{x} = -x + 2z. \end{cases}$$

2.2.1 1.Вычислим собственные значения λ_i матрицы A

$$\det(\text{A - }\lambda\text{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель по j=2, и получим следующие уравнение:

$$(1\text{-}\lambda)((2\text{-}\lambda)(2\text{-}\lambda)\text{-}1)=0$$

Решая данное уравнение получим следующие корни:

λ_1=1(k=2) и λ_2=3(k=1), где k-кратность корня

2.2.2 2.Найдем собственные вектора и компоненты векторного решения $\mathbf{X}_i$.

При λ_1=1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0$$

Решая это систему получим что α_1=γ_1=1, а по скольку от β_1 ничего не зависит, то пусть β_1=1, тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1=1, \\ \beta_1=1, \\ \gamma_1=1. \end{cases}$$

Подставляем в формулу:

$$X_i = C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

$$X_1 = \begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t, \\ z = C_1 e^t. \end{cases}$$

При λ_2=3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$$

Решая это систему получим что γ_2=-α_2 и α_2=β_2, пусть γ_2=1, тогда:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -1, \\ \beta_2 = -1, \\ \gamma_2 = 1. \end{cases}$$

Подставляем в формулу:

$$X_i = C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

$$X_2 = \begin{cases} x = -C_3 e^{3t}, \\ y = -C_3 e^{3t}, \\ z = C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

2.2.3 3.Общее решение системы

$$\overline{X} = X_1 + X_2$$

$$\overline{X} = \begin{cases} x = C_1 e^t - C_3 e^{3t}, \\ y = C_2 e^t - C_3 e^{3t}, \\ z = C_1 e^t + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

2.3 Решение системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных (задание №3)

$$22. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + 3y + \frac{e^t}{1+e^-t}. \end{cases}$$

2.3.1 1.Вычислим собственные значения λ_i матрицы A

$$\det(\text{A - }\lambda\text{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель и получим следующие уравнение:

$$-\lambda(3-\lambda)+2=0$$

Решая данное уравнение получим следующие корни:

λ_1=2(k=1) и λ_2=1(k=1), где k-кратность корня

2.3.2 2.Найдем собственные вектора и компоненты векторного решения $\mathbf{X}_i$.

При λ_1=2:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0$$

Решая это систему получим что 2α_1=β_1=1,пусть α_1=1, тогда:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \beta_1 = 2. \end{cases}$$

Подставляем в формулу:

$$X_i = C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

$$X_1 = \begin{cases} x = C_1 e^{2t}, \\ y = 2C_1 e^{2t}. \end{cases}$$

При λ_2=1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

Решая это систему получим что α_2=β_2, пусть α_2=1, тогда:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \text{-1}, \\ \beta_2 = 1. \end{cases}$$

Подставляем в формулу:

$$X_i = C_i e^{\lambda_i t} V_i$$

$$X_2 = \begin{cases} x = -C_2 e^{t}, \\ y = -C_2 e^{t}. \end{cases}$$

2.3.3 3.Общее решение системы

$$\overline{X} = \mathrm{X}_1 + X_2$$

$$\overline{X} = \begin{cases} x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$$

2.4 Исследование положения равновесия линейной однородной системы с постоянными коэффициентами №4

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases} \tag{1}$$

Запишем матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

2.4.1 1.Найдём определитель матрицы

$$\mid A - \lambda E \mid = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -5 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(-1-\lambda) - (-5 \cdot 5) = \lambda^2 - 8\lambda + 40$$

Решим квадратное уравнение, найдя его корни:

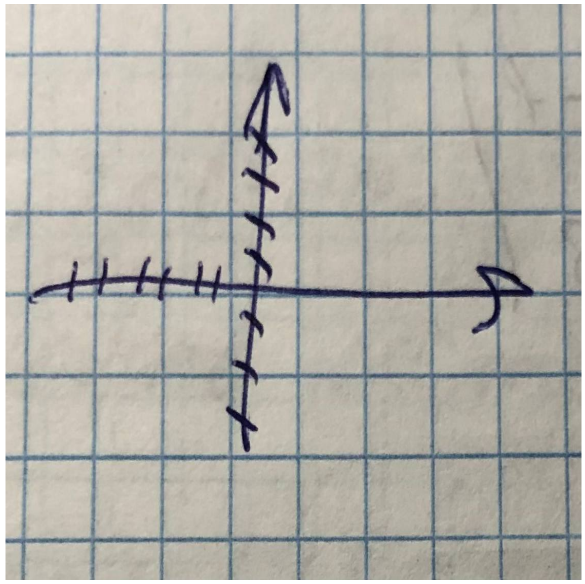
$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2} = 4 \pm 3i$$

Так как корни являются комплексными числами с отрицательной действительной частью, система имеет неустойчивый фокус.

2.4.2 2. Фазовые траектории на плоскости XOY

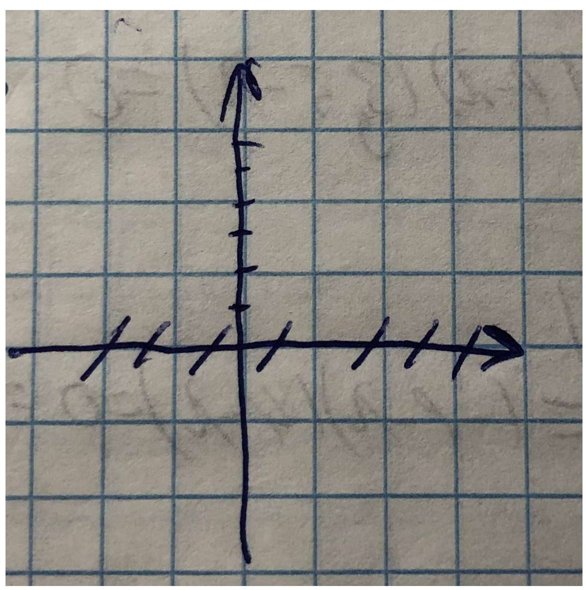
1. Пусть $x = 0$

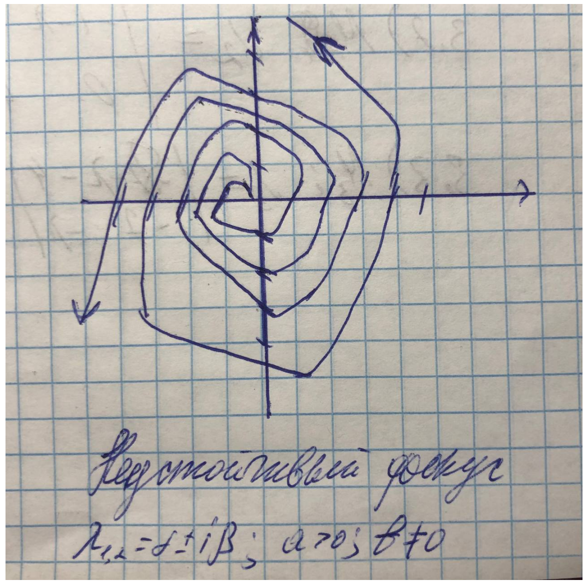
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$



2. Пусть $y = 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x \\ \frac{dy}{dt} = 5x \end{cases}$$





2.5 Исследование динамической системы

Мы рассматриваем динамическую систему с дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y^2 - 1$$
$$\frac{dy}{dt} = 6x - y^2 + 1$$

2.5.1 1.Особые точки

Для нахождения особых точек решим систему уравнений:

$$2x + y^2 - 1 = 0$$
$$6x - y^2 + 1 = 0$$

Из этой системы получаем три особые точки:

- $M_1 = (0, 1)$
- $M_2 = (0, -1)$

2.5.2 2.Анализ особых точек

Для каждой особой точки найдем якобиан системы:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2y \\ 6 & -2y \end{bmatrix}$$

Вычислим якобиан в каждой особой точке:

- $M_1 = (0,1)$:

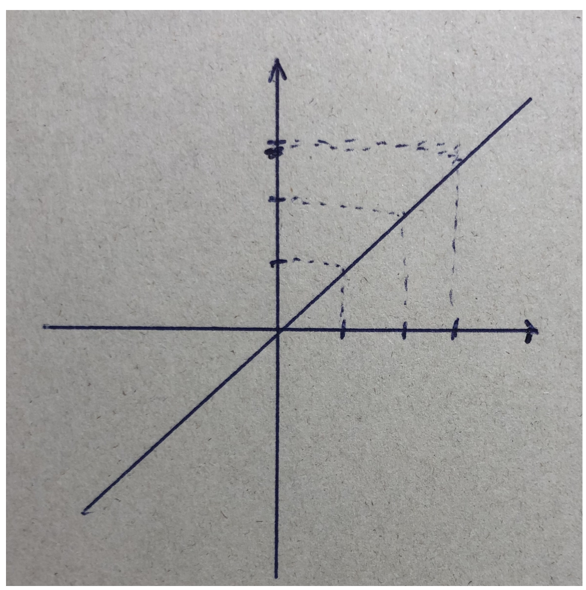
  Якобиан $J(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

  Определитель: $\det(J(0,1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$

  Собственные значения: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$

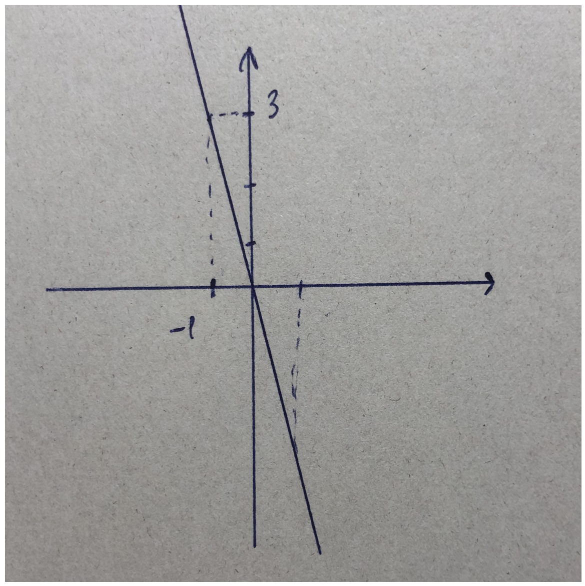
  - Найдем собственный вектор для ${}_1 = 4$:
    $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

    Получается собственный вектор: Вектор-столбец: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



– Найдем собственный вектор для $_2 = -4$:
$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

Получается собственный вектор: Вектор-столбец: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Сделаем замену :

$$\begin{cases} u = x - 0 \\ v = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v + 1 \end{cases}$$

Подставим в изначальную систему:

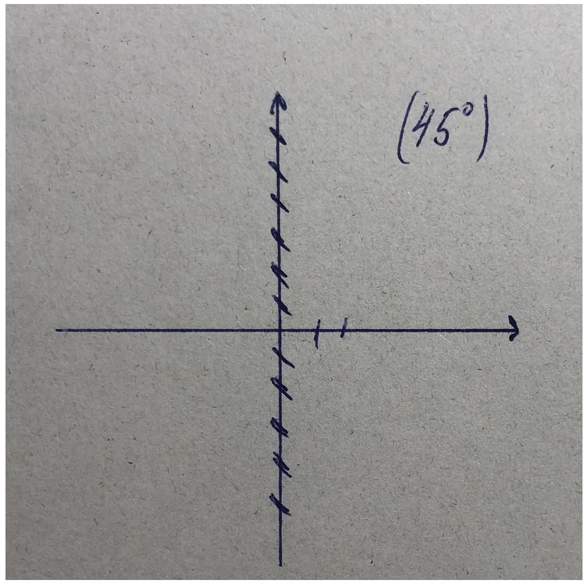
$$\dot{u} = v^2 + 2u + 2v$$
$$\dot{v} = -v^2 + 6u - 2v$$

Оставим только линейную часть:

$$\dot{u} = 2u + 2v$$
$$\dot{v} = 6u - 2v$$

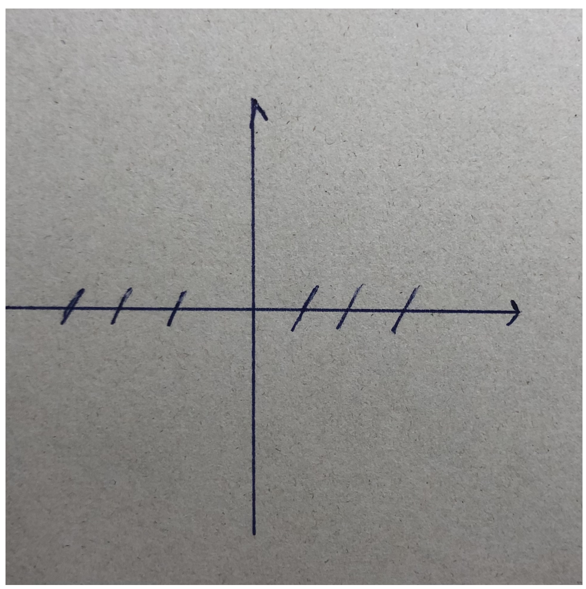
∗ Пусть $u = 0$

$$\begin{cases} \dot{u} = 2v \\ \dot{v} = -2v \end{cases}$$

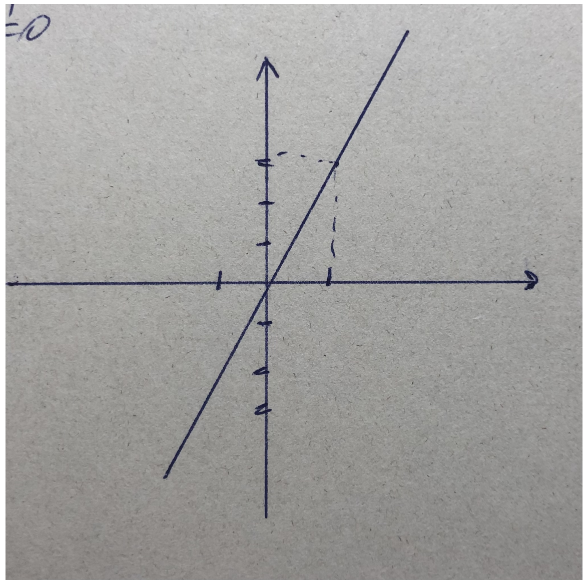


$*$ Пусть $v = 0$

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u \\ \dot{v} = 6u \end{cases}$$



$*$ Пусть $\dot{v} = 0 \Rightarrow 3u = v$



- $M_2 = (0, -1)$:

  Якобиан $J(0,-1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

  Определитель:

$$\det(J(0,-1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 12.$$

  Собственные значения: $\lambda_3 = 2 + \sqrt{3i}$, $\lambda_4 = 2 - \sqrt{3i}$

  Сделаем замену :

$$\begin{cases} u = x - 0 \\ v = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v - 1 \end{cases}$$

  Подставим в изначальную систему:

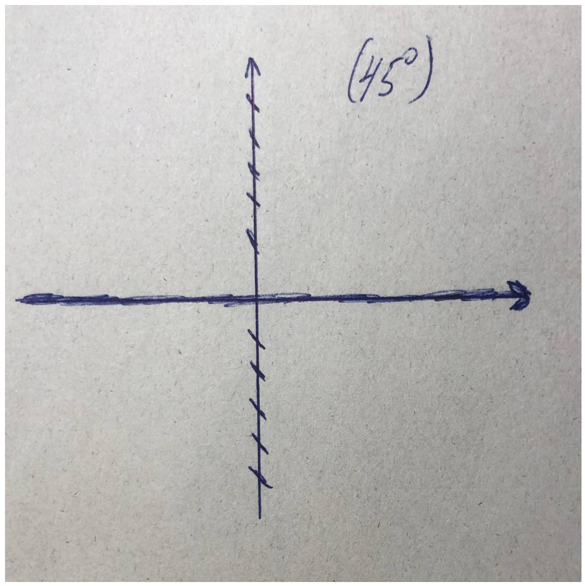
$$\dot{u} = v^2 + 2u - 2v$$
$$\dot{v} = -v^2 + 6u + 2v$$

  Оставим только линейную часть:

$$\dot{u} = 2u - 2v$$
$$\dot{v} = 6u + 2v$$

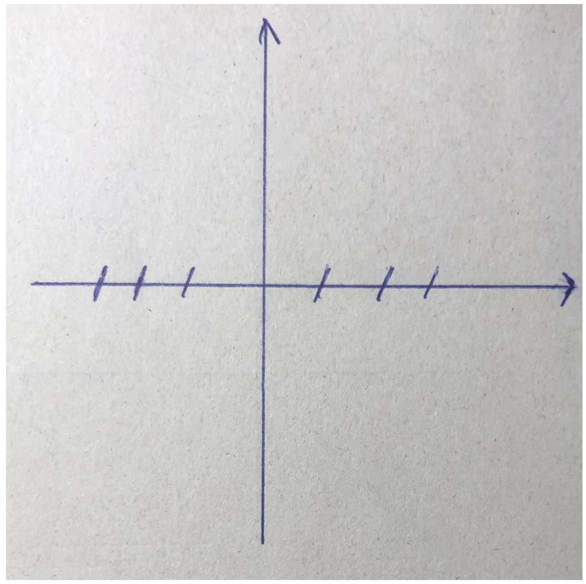
– Пусть $u = 0$

$$\begin{cases} \dot{u} = -2v \\ \dot{v} = 2v \end{cases}$$



– Пусть $v = 0$

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u \\ \dot{v} = 6u \end{cases}$$



2.5.3 3.Фазовый портрет

Построим фазовый портрет для каждой особой точки и общий фазовый портрет, объединяющий локальные особые точки.

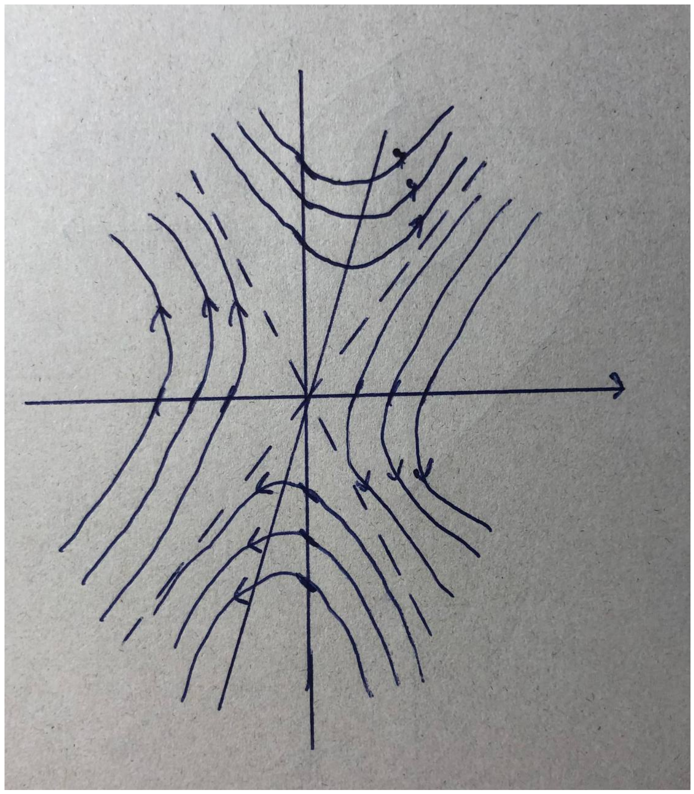


Рис. 1: Фазовый портрет в окрестности M_1 "седло"@

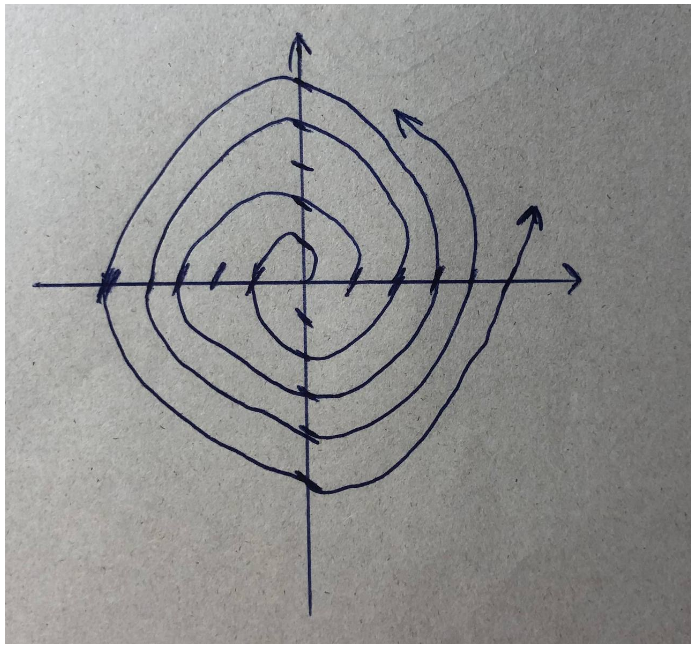


Рис. 2: Фазовый портрет в окрестности M_2 "неустойчивый узел"@

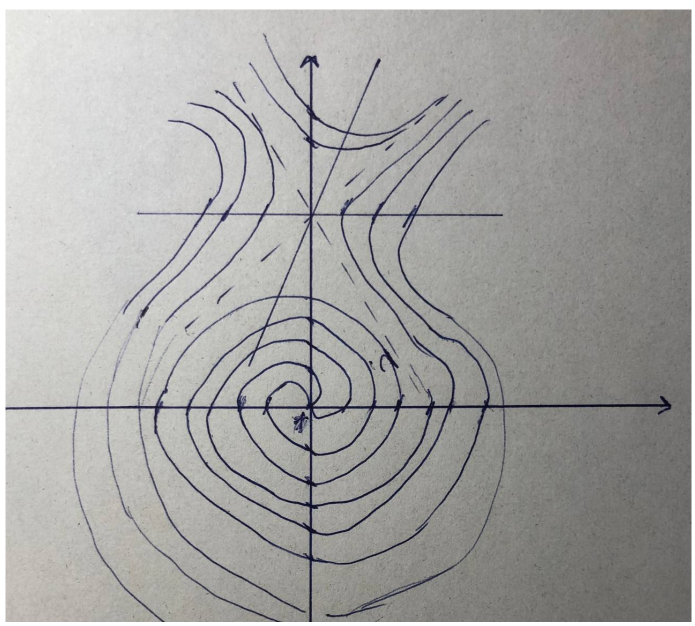


Рис. 3: Общий фазовый портрет, объединяющий M_1 и M_2