

数字图像处理

第五次作业

摘要

本次报告主要记录第五次作业中的各项任务完成情况。本次作业以 Matlab 为平台，结合 Matlab 函数编程实现对所给图像文件的相关处理：1. 频域低通滤波器：设计低通滤波器包括 butterworth and Gaussian（选择合适的半径，计算功率谱比），平滑测试图像 test1 和 2；2. 频域高通滤波器：设计高通滤波器包括 butterworth and Gaussian，在频域增强边缘。选择半径和计算功率谱比，测试图像 test3, 4；3. 其他高通滤波器：拉普拉斯和 Unmask，对测试图像 test3, 4 滤波；4. 比较并讨论空域低通高通滤波 (Project4) 与频域低通和高通的关系。以上任务完成后均得到了预期的结果，并对结果进行了分析。

姓 名：魏佳利

班 级：自动化 63

学 号：2160504076

提交日期：2019 年 4 月 2 日

1、频域低通滤波器：设计低通滤波器包括 butterworth and Gaussian (选择合适的半径，计算功率谱比), 平滑测试图像 test1 和 2; 分析各自优缺点;

(1) 问题分析:

低通滤波是要保留图像中的低频分量而除去高频分量。图像中的边缘和噪声都对应图像傅里叶频谱中的高频部分，所以低通滤波可以除去或削弱噪声的影响并模糊边缘轮廓。理想低通滤波器具有传递函数：

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 D_0 为非负数， $D(u, v)$ 为点 (u, v) 到滤波器中心的距离。

功率谱定义为：

$$P_f(u, v) = |F(u, v)|^2 \quad P_g(u, v) = |G(u, v)|^2$$

$P_f(u, v)$ 为滤波前图像的功率谱， $P_g(u, v)$ 为滤波后图像的功率谱。

滤波器的功率谱比为：

$$Pb = \frac{P_g(u, v)}{P_f(u, v)}$$

1). Butterworth

n 阶 Butterworth 低通滤波器 (BLPF) 的传递函数 (截止频率距原点的距离为 D_0) 定义为：

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

$$\text{其中, } D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}。$$

BLPF 变换函数在通带与被滤除的频率之间没有明显的截断。对于有平滑传递函数的滤波器，定义一个截止频率的位置并使 $H(u, v)$ 幅度降到其最大值的一部分。在上式中，当 $D(u, v) = D_0$ 时， $H(u, v) = 0.5$ (从最大值降到它的 50%)。

一阶的巴特沃斯滤波器没有振铃，在二阶中振铃通常很微小，这是因为与理想低通滤波器相比，它的通带与阻带之间没有明显的跳跃，在高低频率间的过渡比较光滑。巴特沃斯低通滤波器的处理结果比理想滤波器的要好，但阶数增高时振铃便成为一个重要因素。本次实验中设计实现了二阶巴特沃斯滤波器。

2). Gaussian

二维高斯低通滤波器，其传递函数的形式为：

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

其中， $D(u,v) = \sqrt{(u - \frac{M}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2}$ 。 σ 表示高斯曲线扩展的程度。令

$\sigma = D_0$ ，可将滤波器表示为：

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

其中， D_0 是截止频率。当 $D(u,v) = D_0$ 时，滤波器下降到它最大值的 0.607 倍处。由于高斯低通滤波器的傅里叶反变换也是高斯的，所以得到的空间高斯滤波器将没有振铃。

(2) 实验过程：

```
f=fft2(a);
```

```
f=fftshift(f);
```

这是 MATLAB 中从空域到频域的 FFT 变换。频域上的操作如下：

```
for i=1:m
```

```
    for j=1:n
```

```
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
```

```
        h(i,j)=1/(1+(b(i,j)/r)^(2*n_butterworth));
```

```
        g(i,j)=h(i,j)*f(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

其中， $h(i,j)$ 为 butterworth 低通滤波器， $f(i,j)$ 为原始图像频谱，得到的 $g(i,j)$ 为变换后图像的频谱。经过如下的 FFT 逆变换，得到空域图像：

```
g1=ifftshift(g);
```

```
g1=ifft2(g1);
```

若使用 Gaussian 低通滤波器，频域上的操作如下：

```
for i=1:m
```

```
    for j=1:n
```

```
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
```

```
        h(i,j)=exp(-b(i,j)^2/(2*r^2));
```

```
        g(i,j)=h(i,j)*f(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

其中， $h(i,j)$ 为 Gaussian 低通滤波器， $f(i,j)$ 为原始图像频谱，得到的 $g(i,j)$ 为变换后图像的频谱。

(3) 实验结果：

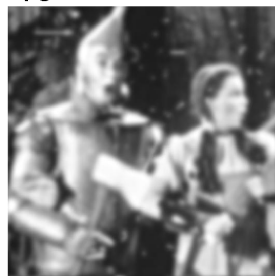
如下图所示，对 test1，butterworth 低通滤波，当滤波器半径 r (即 D_0) 为 25 时，功率谱比 $P_b=0.9741$ ；滤波器半径 r (即 D_0) 为 75 时，功率谱

比 $P_b = 0.9957$ 。对 test2, butterworth 低通滤波, 当滤波器半径 r (即 D_0) 为 25 时, 功率谱比 $P_b = 0.9804$; 滤波器半径 r (即 D_0) 为 75 时, 功率谱比 $P_b = 0.9916$ 。

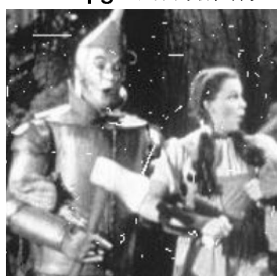
test1.pgm 的原始图像



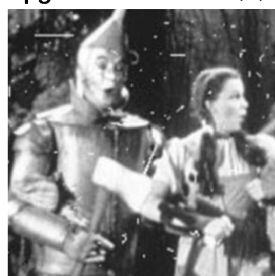
test1.pgm butterworth 半径 $r=25$



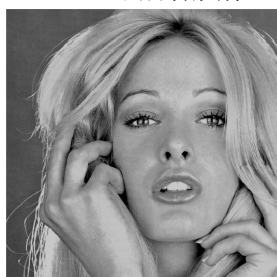
test1.pgm 的原始图像



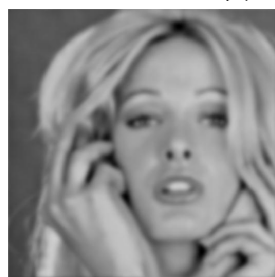
test1.pgm butterworth 半径 $r=75$



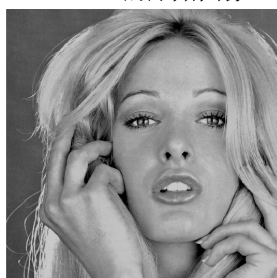
test2.tif 的原始图像



test2.tif butterworth 半径 $r=25$



test2.tif 的原始图像



test2.tif butterworth 半径 $r=75$



如下图所示, 对 test1, Gaussian 低通滤波, 当滤波器半径 r (即 D_0)

为 25 时，功率谱比 $P_b=0.9657$ ；滤波器半径 r (即 D_0) 为 75 时，功率谱比 $P_b=0.9925$ 。对 test2, Gaussian 低通滤波，当滤波器半径 r (即 D_0) 为 25 时，功率谱比 $P_b=0.9754$ ；滤波器半径 r (即 D_0) 为 75 时，功率谱比 $P_b=0.9902$ 。

test1.pgm 的原始图像



test1.pgm Gaussian 半径r=25



test1.pgm 的原始图像



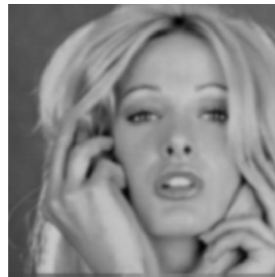
test1.pgm Gaussian 半径r=75



test2.tif 的原始图像



test2.tif Gaussian 半径r=25



test2.tif 的原始图像



test2.tif Gaussian 半径r=75



(4) 结果分析:

1) 对比每组图像处理结果中的原始图像和低通滤波后的图像, 可以清晰看到低通滤波器的平滑效果(模糊效果)。

2) 当滤波器的半径不同时, 对应的滤波效果也不同。半径越小, 平滑效果越明显, 但半径过小, 会使得图像变得模糊不清: 对于 test1, 2 分别选取 $D_0=25$ 、75 的二阶 butterworth 低通滤波器进行低通滤波。对比不同的 D_0 值得到的结果知, 随着截止频率 D_0 的减小, 滤波后的图像越来越模糊, 滤波器功率谱比越来越小, 即滤波后包含的低频分量越来越少。对于 test1, 2 分别选取 $D_0=25$ 、75 的二阶 Gaussian 低通滤波器进行低通滤波。对比不同的 D_0 值得到的结果知, 随着截止频率 D_0 的减小, 滤波后的图像越来越模糊, 滤波器功率谱比越来越小, 即滤波后包含的低频分量越来越少。

3) 对比二阶 butterworth 低通滤波器和 Gaussian 低通滤波器的效果可知, 两种滤波器达到的基本效果是一致的, 即平滑图像, 滤除高频分量, 保留低频分量。但两者在相同截止频率 D_0 时, 得到的滤波器功率谱比却不同, 主要原因是两个滤波器在过渡带处的差异。

4) 相同 D_0 条件下, Gaussian 低通滤波器的效果较好, 滤得的图像更清晰, 得到图像的细节更丰富。

2. 频域高通滤波器: 设计高通滤波器包括 butterworth and Gaussian, 在频域增强边缘。选择半径和计算功率谱比, 测试图像 test3, 4: 分析各自优缺点;

(1) 问题分析:

高通滤波是要保留图像中的高频分量而除去低频分量。理想高通滤波器传递函数表示为:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 D_0 为非负数, $D(u, v)$ 为点 (u, v) 到滤波器中心的距离。

功率谱定义为:

$$P_f(u, v) = |F(u, v)|^2 \quad P_g(u, v) = |G(u, v)|^2$$

$P_f(u, v)$ 为滤波前图像的功率谱, $P_g(u, v)$ 为滤波后图像的功率谱。

滤波器的功率谱比为:

$$Pb = \frac{P_g(u, v)}{P_f(u, v)}$$

1). Butterworth

n 阶 Butterworth 高通滤波器 (BHPF) 的传递函数 (截止频率距原点的距离

为 D_0) 定义为:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

$$\text{其中, } D(u, v) = \sqrt{(u - \frac{M}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2}。$$

BHPF 变换函数在通带与被滤除的频率之间没有明显的截断。对于有平滑传递函数的滤波器, 定义一个截止频率的位置并使 $H(u, v)$ 幅度降到其最大值的一部分。在上式中, 当 $D(u, v) = D_0$ 时, $H(u, v) = 0.5$ (从最大值降到它的 50%)。

2). Gaussian

二维高斯高通滤波器, 其传递函数的形式为:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2\sigma^2}$$

$$\text{其中, } D(u, v) = \sqrt{(u - \frac{M}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2}。 \sigma \text{ 表示高斯曲线扩展的程度。令}$$

$\sigma = D_0$, 可将滤波器表示为:

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

其中, D_0 是截止频率。当 $D(u, v) = D_0$ 时, 滤波器下降到它最大值的 0.607 倍处。由于高斯高通滤波器的傅里叶反变换也是高斯的, 所以得到的空间高斯滤波器将没有振铃。

(2) 实验过程:

```
f=fft2(a);
```

```
f=fftshift(f);
```

这是 MATLAB 中从空域到频域的 FFT 变换。频域上的操作如下:

```
for i=1:m
```

```
    for j=1:n
```

```
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
```

```
        h(i,j)=1/(1+(r/b(i,j))^(2*n_butterworth));
```

```
        g(i,j)=h(i,j)*f(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

其中, $h(i, j)$ 为 butterworth 高通滤波器, $f(i, j)$ 为原始图像频谱, 得到的 $g(i, j)$ 为变换后图像的频谱。经过如下的 FFT 逆变换, 得到空域图像:

```
g1=ifftshift(g);
```

```
g1=ifft2(g1);
```

若使用 Gaussian 高通滤波器, 频域上的操作如下:

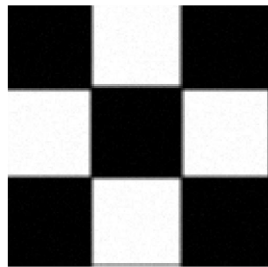
```
for i=1:m
    for j=1:n
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
        h(i,j)=1-exp(-b(i,j)^2/(2*r^2));
        g(i,j)=h(i,j)*f(i,j);
    end
end
```

其中, $h(i, j)$ 为 Gaussian 高通滤波器, $f(i, j)$ 为原始图像频谱, 得到的 $g(i, j)$ 为变换后图像的频谱。

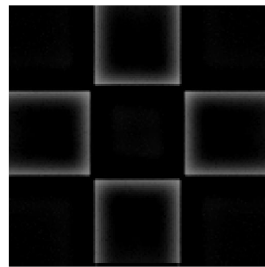
(3) 实验结果:

如下图所示, 对 test1, butterworth 高通滤波, 当滤波器半径 r (即 D_0) 为 5 时, 功率谱比 $P_b=0.0603$; 滤波器半径 r (即 D_0) 为 15 时, 功率谱比 $P_b=0.0082$ 。对 test2, butterworth 高通滤波, 当滤波器半径 r (即 D_0) 为 5 时, 功率谱比 $P_b=0.0458$; 滤波器半径 r (即 D_0) 为 15 时, 功率谱比 $P_b=0.0154$ 。

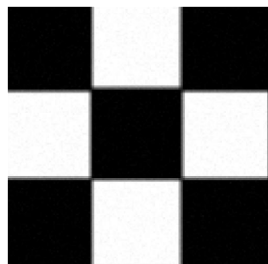
test3_corrupt的原始图像



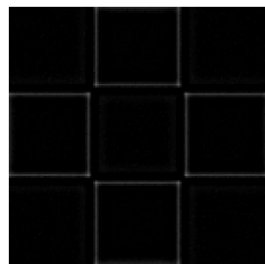
test3_corrupt butterworth 半径r=5



test3_corrupt的原始图像



test3_corrupt butterworth 半径r=15



test4 copy 的原始图像



test4 copy butterworth 半径r=5



test4 copy 的原始图像

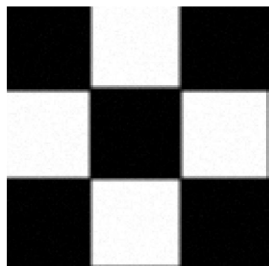


test4 copy butterworth 半径r=15

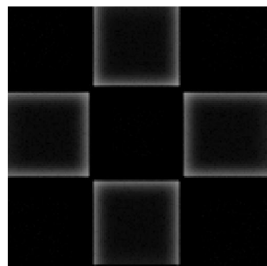


如下图所示，对 test1, Gaussian 高通滤波，当滤波器半径 r (即 D_0) 为 5 时，功率谱比 $P_b=0.0520$ ；滤波器半径 r (即 D_0) 为 15 时，功率谱比 $P_b=0.0066$ 。对 test2, Gaussian 高通滤波，当滤波器半径 r (即 D_0) 为 5 时，功率谱比 $P_b=0.0422$ ；滤波器半径 r (即 D_0) 为 15 时，功率谱比 $P_b=0.0126$ 。

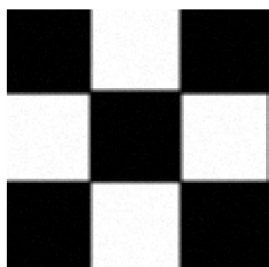
test3_corrupt 的原始图像



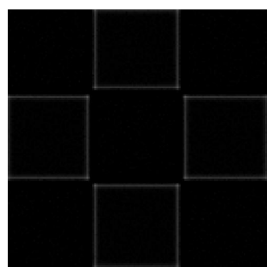
test3_corrupt Gaussian 半径r=5



test3_corrupt 的原始图像



test3_corrupt Gaussian 半径r=15



test4 copy 的原始图像



test4 copy Gaussian 半径r=5



test4 copy 的原始图像



test4 copy Gaussian 半径r=15



(4) 结果分析:

1) 对比每组图像处理结果中的原始图像和高通滤波后的图像, 可以清晰看到高通滤波器的边缘增强效果, 对于低频分量的滤除和对于高频分量的保留作用及截断效果。

2) 当滤波器的半径不同时, 对应的滤波效果也不同。半径越小, 边缘效果越明显。对于 test3, 4 分别选取 $D_0=5$ 、15 的二阶 butterworth 高通滤波器进行高通滤波。对比不同的 D_0 值得到的结果知, 随着截止频率 D_0 的增加, 滤波后的图像边缘应该越来越清晰, 滤波器功率谱比越来越小, 即滤波后包含的高频分量越来越少。但当 D_0 增大到一定程度时, 边缘将不见, 主要是因为滤除的能量过多, 图像全部变成了黑色。对于 test3, 4 分别选取 $D_0=5$ 、15 的二阶 Gaussian 高通滤波器进行高通滤波。对比不同的 D_0 值得到的结果知, 随着截止频率 D_0 的增加, 滤波后的图像边缘应该越来越清晰, 滤波器功率谱比越来越小, 即滤波后包含的高频分量越来越少。但当 D_0 增大到一定程度时, 边缘将不见, 主要是因为滤除的能量过多, 图像全部变成了黑色。

3) 对比二阶 butterworth 高通滤波器和 Gaussian 高通滤波器的效果知, 两种滤波器达到的基本效果是一致的, 即增强图像边缘, 滤除低频分量, 保留高频分量。但两者在相同截止频率 D_0 时, 得到的滤波器功率谱比却不同, 主要原因是两个滤波器在过渡带处的差异。

4) 一般图像中的大部分能量集中在低频分量里, 对比高通滤波器和低通滤波器知, 高通滤波器在滤波的时候会将很多低频分量滤除, 导致图中边缘得到加强但光滑区域灰度减弱变暗甚至接近黑色。当 D_0 增大到一定程度时, 边缘将不见, 整个图像变为黑色。为解决这个问题, 可对频域里的高通滤波器的转移函数加一个常数以将一些低频分量加回去, 获得既保持光滑区域又改善边缘区域对比度的效果。这样得到的滤波器称为高频增强滤波器。

3. 其他高通滤波器：拉普拉斯和 Unmask，对测试图像 test3, 4 滤波；

分析各自优缺点；

(1) 问题分析：

1). 拉普拉斯

频域的拉普拉斯算子由如下公式实现：

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

前提是 $F(u, v)$ 的在进行图像变换之前已通过执行运算 $f(x, y)(-1)^{x+y}$ 中心化了，使得变换中心 $(u, v) = (0, 0)$ 就是频域矩形的中点 $(M/2, N/2)$ 。否则

2). Unmask

$$H(u, v) = -4\pi^2\left(\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2\right)$$

钝化模板有下式给出：

$$g_{\max}(x, y) = f(x, y) - f_{LP}(x, y)$$

与

$$f_{LP}(x, y) = \xi^{-1}[H_{LP}(x, y)F(x, y)]$$

最后图像由下式给出：

$$g(x, y) = f(x, y) + k \times g_{\max}(x, y)$$

当 $k=1$ 时，为钝化模板； $k>1$ 时，为高频提升滤波器。

(2) 实验过程：

```
f=fft2(a);
```

```
f=fftshift(f);
```

这是 MATLAB 中从空域到频域的 FFT 变换。频域上的操作如下：

```
for i=1:m
```

```
    for j=1:n
```

```
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
```

```
        h(i,j)=1+k*4*pi^2*b(i,j)^2;
```

```
        g(i,j)=h(i,j)*f(i,j);
```

```
    end
```

```
end
```

其中， $h(i, j)$ 为拉普拉斯高通滤波器， $f(i, j)$ 为原始图像频谱，得到的 $g(i, j)$ 为变换后图像的频谱。经过如下的 FFT 逆变换，得到空域图像：

```
g1=ifftshift(g);
```

```
g1=ifft2(g1);
```

若使用 Unmask 高通滤波器, 频域上的操作如下:

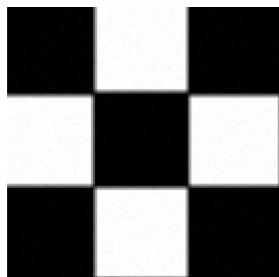
```
for i=1:m
    for j=1:n
        b(i,j)=sqrt((i-fix(m/2))^2+(j-fix(n/2))^2);
        h(i,j)=1-exp(-b(i,j)^2/(2*r^2));
        g(i,j)=(k+k1*h(i,j))*f(i,j);
    end
end
```

其中, $h(i, j)$ 为 Unmask 高通滤波器, $f(i, j)$ 为原始图像频谱, 得到的 $g(i, j)$ 为变换后图像的频谱。

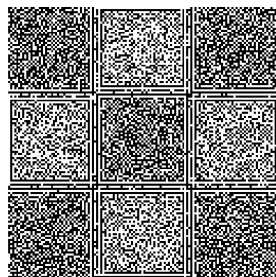
(3) 实验结果:

如下图所示, 对 test3 和 test4 分别进行拉普拉斯滤波和 Unmask 滤波。对 test3 进行拉普拉斯滤波时, 所得到的功率谱比 $P_b=1.6861e+07$; 对 test4 进行拉普拉斯滤波时, 所得到的功率谱比 $P_b=8.4623e+08$; 对 test3 进行 Unmask 滤波时, 所得到的功率谱比 $P_b=1.6983$; 对 test4 进行 Unmask 滤波时, 所得到的功率谱比 $P_b=1.5270$;

test3_corrupt的原始图像



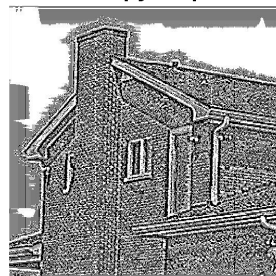
test3_corrupt Laplace



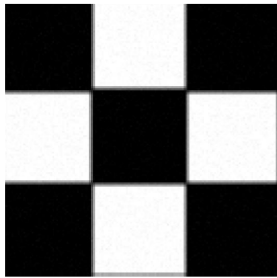
test4 copy 的原始图像



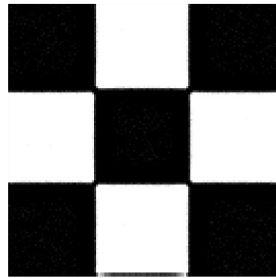
test4 copy Laplace



test3_corrupt的原始图像



test3_corrupt Unmask



test4 copy 的原始图像



test4 copy Unmask



(4) 结果分析:

1) 对比每组图像处理结果中的原始图像和滤波后的图像, 可以隐约看到滤波器的边缘增强效果。

2) 由于拉普拉斯高通滤波器将原始图像完全加回到滤波后的结果中, 因此解决了 Butterworth 滤波器和 Gaussian 滤波器除去了傅里叶变换的零频率成分的问题, 从而使得滤波后的图像其背景的平均强度增加、变亮。但同时引入了噪声干扰, 使得滤波后的图像有一定程度的失真。可见, unmask 的图像边缘信息更加清晰, 但同时带来了过度锐化的问题, 出现了多重轮廓。

4. 比较并讨论空域低通高通滤波(Project3)与频域低通和高通的关系。

空间域和频域滤波间的纽带是卷积定理。空间域的滤波器和频率域的滤波器互为傅里叶变换。空间域中的滤波定义为滤波函数 $h(x, y)$ 与输入图像 $f(x, y)$ 进行卷积; 频率域中的滤波定义为滤波函数 $H(u, v)$ 与输入图像傅里叶变换 $F(u, v)$ 进行相乘。频域增强技术与空域增强技术有密切的联系。一方面, 许多空域增强技术可借助频域概念来分析和帮助设计; 另一方面, 许多空域增强技术可转化到频域实现, 而许多频域增强技术可转化到空域实现。

空域滤波主要包括平滑滤波和锐化滤波。平滑滤波是要滤除不规则的噪声或干扰的影响, 从频域的角度看, 不规则的噪声具有较高的频率, 所以可用具有低通能力的频域滤波器来滤除。由此可见空域的平滑滤波对应频域的低通滤波。锐化滤波是要增强边缘和轮廓处的强度, 从频域的角度看, 边缘和轮廓处都具有较高的频率, 所以可用具有高通能力的频域滤波器来增强。由此可见, 空域的锐化

滤波对应频域的高通滤波。频域里低通滤波器的转移函数应该对应空域里平滑滤波器的模板函数的傅里叶变换, 频域里高通滤波器的转移函数应该对应空域里锐化滤波器的模板函数的傅里叶变换。即空域和频域的滤波器组成傅里叶变换对。给定一个域内的滤波器, 通过傅里叶变换或反变换得到在另一个域内对应的滤波器。空域的锐化滤波或频域的高通滤波可用两个空域的平滑滤波器或两个频域的低通滤波器实现。在频域中分析图像的频率成分与图像的视觉效果间的对应关系比较直观。空域滤波在具体实现上和硬件设计上有一定优点。

区别: 空域技术中无论使用点操作还是模板操作, 每次都只是基于部分像素的性质, 而频域技术每次都利用图像中所有像素的数据, 具有全局性, 有可能更好地体现图像的整体特性, 如整体对比度和平均灰度值等。