

* Belirsizlikler ve L'Hopital Kuralı

* $\frac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ için $f(a) = g(a) = 0$ ise.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x}{1} = \frac{3-1}{1} = 2.$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}.$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &\xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty$$

ör: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \xrightarrow{\frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} \xrightarrow{\frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x}$$

$$= \frac{-2 + 8}{2}$$

$$= 3$$

* $\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \left(f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ ve } g(x) \rightarrow \pm\infty \text{ iken} \right)$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\sec x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x$$

$$= 1$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

$\infty \cdot 0$ Belirsizliği

* $\infty \cdot 0$ Belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüş-
türülerek çözülür.

Ör: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \rightarrow \infty \cdot 0$ belirsizliği
 $x = \frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{\infty \cdot 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x \rightarrow 0 \cdot \infty$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \cdot \sqrt{x} = 0.$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \rightarrow \infty \cdot 0$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{\infty \cdot 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{-2 \cdot x^{-3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2}}_1 \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

* $\infty - \infty$ Belirsizliği

Örn: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \infty - \infty$ belirsizliği

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{\infty - \infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \xrightarrow{0/0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \xrightarrow{0/0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

Belirsiz Kuvvetler $(1^\infty, 0^0, \infty^0)$

Ör.

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = L \text{ ise.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e^L \text{ dir.}$$

(a sonlu
ya da sonsuz
olabilir)

Ör: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty^0$ belirsizliği

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \quad \begin{matrix} \nearrow 0, \infty \\ \nearrow \frac{\infty}{\infty} \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 0 \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1^\infty$ belirsizlik

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(1+x) \xrightarrow{\infty \cdot 0} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

Ör: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \rightarrow \infty^0$ belirsizlik

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \frac{1}{x} \xrightarrow{0 \cdot \infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \xrightarrow{\frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cdot \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x \cdot \sin x}{x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \xrightarrow{\frac{0}{0}}$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\text{yani } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1 \checkmark$$

* Fonksiyonların Ekstremleri Değerleri

Tanım: $f(x)$ in tanım kümesi D olsun. Eğer

$f(x) \leq f(c)$ (D deki her x için) ise
 f fonksiyonu D üzerindeki bir c noktesinde bir mutlak maksimum değere sahiptir.

ve.

$f(x) \geq f(c)$ (D deki her x için) ise.
 f fonksiyonu D üzerindeki bir c noktesinde bir mutlak minimum değere sahiptir.

* Bir fonksiyonun maksimum minimum değerlerine ekstremum değerleri denir.

| Ör: | Fonksiyon | Tanım Kümesi | Mutlak max-min |
|-----|-----------|---------------------|---|
| | $y = x^2$ | $(-\infty, \infty)$ | mutlak max. yok $x=0$ da mutlak min |
| | $y = x^2$ | $[0, 2]$ | $x=2$ mutlak max ve mutlak max değeri $f(2)=4$ $x=0$ mutlak min. ve mutlak min değeri $f(0)=0$ |
| | $y = x^2$ | $(0, 2]$ | $x=2$ mutlak max ve mutlak max değeri $f(2)=4$ mutlak min yok. |
| | $y = x^2$ | $(0, 2)$ | mutlak max ve mutlak min YOK |

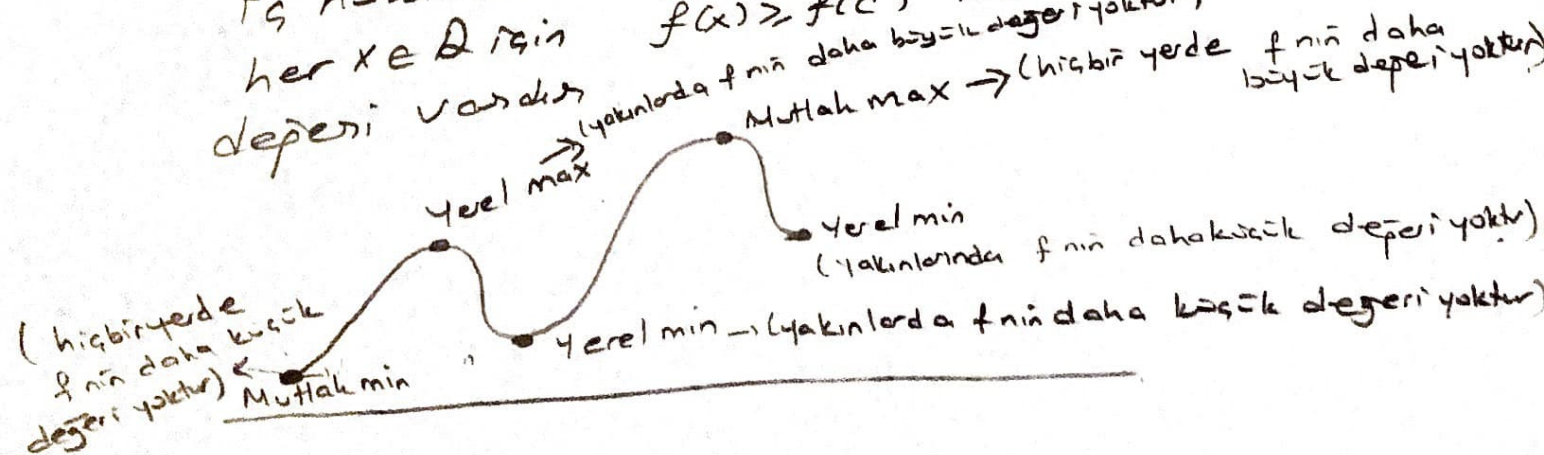
Ekstremum Değer Teoremi

Eğer f kapalı $[a, b]$ aralığının her noktasında sürekli ise $[a, b]$ aralığında bir mutlak max değer M 'ye ve bir mutlak min değer m 'ye ulaşır. Yani $[a, b]$ aralığında $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$ olacak şekilde x_1 ve x_2 sayıları vardır. ve $[a, b]$ aralığındaki diğer her x için $m \leq f(x) \leq M$ dir.

Yerel Bâil Ekstremum Değerleri

Tanım: * Bir f fonksiyonunun D tanım aralığının bir c iç noktasında eğer c yi içeren bir açık aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ ise bir yerel max değeri vardır.

* Bir f fonksiyonunun D tanım aralığının bir c iç noktasında eğer c yi içeren bir açık aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ ise bir yerel minimum değeri vardır.



* Yerel Ekstremum Değerleri

Bir f fonksiyonu D tanım bölgesinin bir iç noktasında
eğer c 'yi içeren bir açık aralıkta

$f(x) \geq f(c) \Rightarrow c$ 'de bir yerel minimumu

$f(x) \leq f(c) \Rightarrow c$ 'de bir yerel maksimumu vardır

* Kritik Nokta

Bir f fonksiyonunun tanım aralığının bir
iç noktasında. f' türevi sıfır veya tanımsız
ise. bu noktaya f fonksiyonunun kritik noktası
denir

Yani;

* $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ tanımsız ise c bir
kritik noktadır.

* Bir fonksiyonun (yerel veya mutlak) bir ekstremum
değerinin bulunabileceği tek yer aşağıdaki noktalardır.

1- $f'(x) = 0$ olduğu iç noktalar.

2- $f'(x)$ değerinin tanımlı olmadığı iç noktalar

} Kritik Noktalar

3- f in tanım kümesinin uç noktaları.

Teorem: Bir I aralığında tanımlı f fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktasında yerel max
yada yerel min değere sahipse o zaman x_0 noktası ya f in bir kritik
noktasıdır ya da I nin bir uç noktasıdır.

* Sonlu Kapsak Bir Aralıktan Bir Sınırlı

Fonksiyonun Mutlak Extremumlarını Bulmak

1 - f fonksiyonunun bütün kritik ve uç noktaları hesaplanır.

2 - Bu değerlerin en büyüğü mutlak max, en küçüğü mutlak minimumdur.

Ör: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[-2, 1]$ aralığındaki mutlak max ve min değerlerini hesaplayınız.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ kritik nokta.}$$

son noktalar

$$\begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow \text{kritik nokta değeri} \\ f(1) = 1 \\ f(-2) = 4. \rightarrow x = -2 \text{ noktesinde mutlak max} \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ noktesinde mutlak min.}$$

mutlak max değeri 4, mutlak max noktesi -2.

mutlak min değeri 0, mutlak minimum noktesi 0

Ör: $g(t) = 8t - t^4$, $[-2, 1]$ aralığında mutlak max ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$g(t) = 8t - t^4$$

$$g'(t) = 8 - 4t^3 \Rightarrow g'(t) = 0 \Rightarrow 8 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 2 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

uç noktalar

$$g(1) = 8 - 1 = 7$$

$$g(-2) = -16 - 16 = -32$$

$t = \sqrt[3]{2}$ kritik nokta
olmaz
Çünkü
tanım kümesinde
yok. Dolayısıyla
sadece uç noktalar
incelenir

$g(1) = 7 \Rightarrow t = 1$ noktası mutlak max noktadır ve
7, mutlak max değeridir

$g(-2) = -32 \Rightarrow t = -2$ noktası mutlak min nokta ve
-32, mutlak min değeridir

Ör: $f(x) = x^{2/3}$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ aralığında mutlak max ve mutlak min değerlerini bulunuz.

$f(x) = x^{2/3} \rightarrow$ tanım aralığı $(-\infty, \infty)$

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} \rightarrow x = 0$ için $f'(x)$ tanımsız
dolayısıyla $x = 0 \Rightarrow$ kritik nokta.

uç noktalar

$$f(-2) = (-2)^{2/3} = 4^{1/3}$$

$$f(3) = 3^{2/3} = 9^{1/3} \rightarrow x = 3 \text{ noktasında mutlak max'dir ve değeri } f(3) = 9^{1/3} \text{ dir.}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ noktasında mutlak minimumdur ve değeri } f(0) = 0 \text{ dir.}$$

Artan / Azalan Fonksiyonlar.

$f(x)$ in $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türetilen bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

- * Her $x \in (a, b)$ noktesinde $f'(x) > 0$ ise $f, [a, b]$ aralığında artandır.
- * Her $x \in (a, b)$ noktesinde $f'(x) < 0$ ise $f, [a, b]$ aralığında azalandır.

Örn: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ kritik noktalarını bulunuz ve f nin arttığı ve azaldığı aralıkları belirleyiniz.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Kritik Noktalar.

| x | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ | | |
|------|-----------|------------|------------|------------|---|---|
| f' | | + | 0 | - | 0 | + |
| f | | \nearrow | \searrow | \nearrow | | |

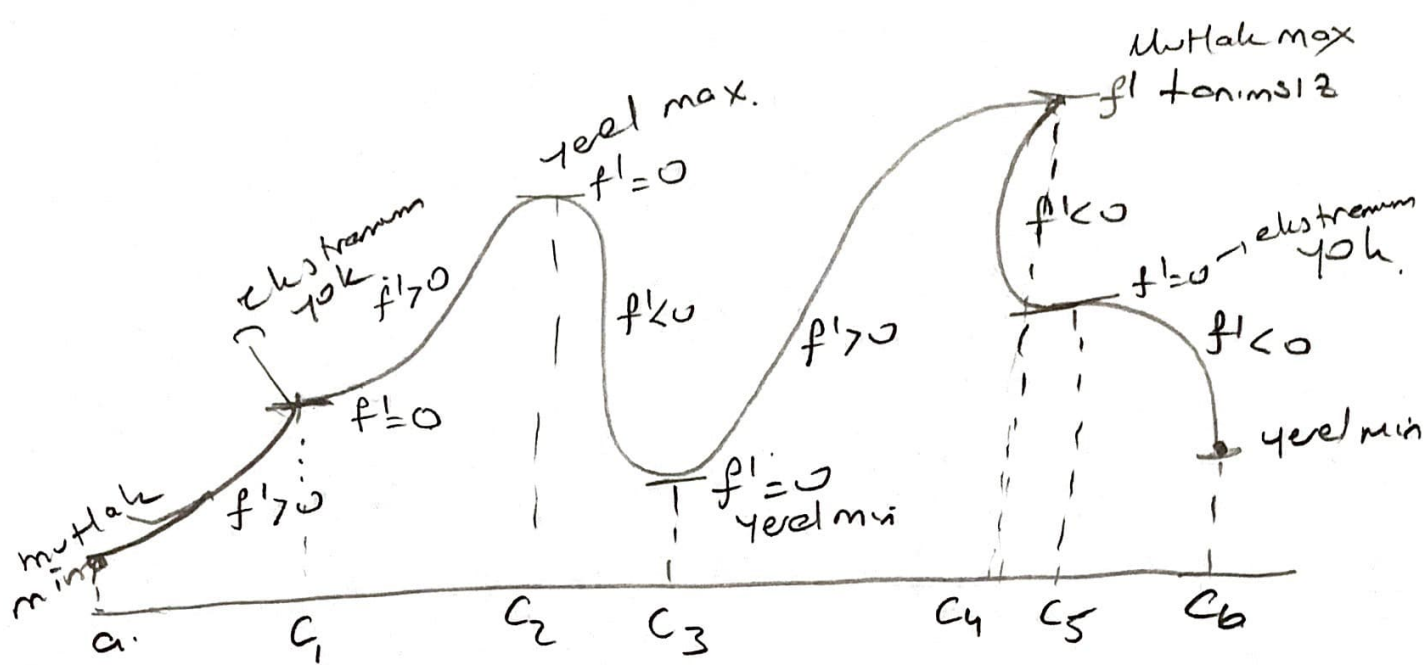
$$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

Yerel Ekstremler Depeler için Birinci

Testi

Bir süreli f fonksiyonunun kritik noktasının c olduğunu ve c 'yi içeren bir aralığın her noktasında $(C$ nin kendisi hariç olabilir) f' nin tanımlenebilir olduğunu varsayalım. Bu aralıkta soldan sağa ilerlerken

- 1- Eğer f' , c de negatiften pozitif'e değişiyorsa f nin c de yerel bir minimumu vardır.
- 2- Eğer f' , c de pozitiften negatif'e değişiyorsa f nin c de yerel bir maximumu vardır.
- 3- Eğer f' c de işaret değiştirmiyorsa (yani f' nin her iki tarafında pozitif veya her iki tarafında negatif ise f nin c de bir yerel ekstremumu yoktur.



Örn: $f(x) = x^{1/3} \cdot (x-4)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. fonksiyonun artan ve azalan aralıklarını belirleyiniz. Fonksiyonun yerel ve mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

$$f(x) = x^{1/3} \cdot (x-4) \rightarrow \text{Tanım kümesi: } (-\infty, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} - \frac{4}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} x^{-2/3} (x - 4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (x^{1/3} - x^{-2/3})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^{1/3} - \frac{1}{x^{2/3}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x^{2/3}} \right)$$

$x=1$ ve $x=0$ a.f.t kat

| | | | | |
|----|-----------|-----------------------------------|-------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| f' | | - | + | |
| f | | ↓ x=0 da extremum değeri | ↓ yerel min | |

$$f(1) = 1 \cdot (-3) = -3$$

$x=1$ noktası yerel min noktasıdır. $f(1) = -3$ yerel minimum değeridir.

$x=1$ noktası aynı zamanda mutlak min noktasıdır.