**Tanım 5.35 :** $V$ bir vektör uzayı $T$ 'de $V$ 'nin bir alt kümesi olsun. Eğer

***i*-)** $T$ , $V$ 'nin bir lineer bağımsız alt kümesi

***ii*-)** $\langle T \rangle = V$

şartları sağlanıyorsa $T$ 'ye $V$ 'nin bir ***tabanı*** veya ***bazı*** denir.

**Örnek 5.36:** $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi $R^n$ ' nin bir tabanıdır.

Bu tabana $R^n$ ' nin ***standart tabanı*** denir.

**Örnek:** $B=\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$ kümesi $R^3$ ün bir tabanıdır. Gösteriniz.

**Çözüm:** $B$'nin $R^3$ ü gerdiğini gösterelim. $\langle B\rangle = R^3$
$B$ nin ürettiği alt uzay $R^3$ e eşittir.

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \qquad (\forall\, a,b,c \in R \text{ için})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a\\1&1&1&b\\0&1&-1&c\end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2a-b-c\\0&1&0&-a+b+c\\0&0&1&-a+b\end{array}\right]$$

$c_1=2a-b-c \qquad c_2=-a+b+c \qquad c_3=-a+b$

$v=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ olduğunu düşünelim. O zaman

$c_1=2(1)-2-3=-3$
$c_2=-1+2+3=4$
$c_3=-1+2=1$

$$-3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

keyfi $\forall\, a,b,c$ için $\langle B\rangle = R^3$ dür.

(*) $B$'nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim

$|A|\neq 0 \Rightarrow$ Lineer bağımsız.

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

**Örnek 5.39:** $T = \{ x^2 + 1,\ x + 2,\ -x^2 + x \}$ nin $V = P_2$ için bir taban olduğunu gösteriniz.

$T$ kümesinin $P_2$ yi gerdiğini gösterelim. $P_2$ de keyfi bir polinom $ax^2 + bx + c$ olsun.

$$c_1(x^2+1) + c_2(x+2) + c_3(-x^2+x) = ax^2 + bx + c$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $c_1, c_2, c_3$ sayılarını bulmak için polinom eşitliğinden yararlanırız.

$$(c_1 - c_3)x^2 + (c_2 + c_3)x + (c_1 + 2c_2) = ax^2 + bx + c$$

Buradan $\left.\begin{aligned} c_1 - c_3 &= a \\ c_2 + c_3 &= b \\ c_1 + 2c_2 &= c \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu sistem çözülürse,

$c_1 = 2a + 2b - c, \quad c_2 = c - a - b, \quad c_3 = a + 2b - c$ tek çözümü elde edilir. Şu halde, $\langle T \rangle = P_2$ dir.

Lineer bağımsızlığı göstermek için

$$c_1(x^2+1) + c_2(x+2) + c_3(-x^2+x) = 0x^2 + 0x + 0 \text{ dan}$$
$$(c_1 - c_3)x^2 + (c_2 + c_3)x + (c_1 + 2c_2) = 0x^2 + 0x + 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan $\left.\begin{aligned} c_1 - c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu sistem çözülürse, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. $T$ kümesi lineer bağımsızdır ve $T$, $P_2$ için bir tabandır.

**Teorem 5.42:** $V$ vektör uzayı, $n$ tane vektörden oluşan bir tabana sahip ise
$V$ 'nin her tabanında $n$ vektör bulunur.

**Tanım 5.43:** $V$ vektör uzayı olsun. $V$ 'nin herhangi bir tabanındaki vektör sayısına $V$ 'nin ***boyutu*** denir ve $boy(V)$ ile gösterilir.

**Örnek 5.44 :** Daha önce verilen Örnek 5.38 daki vektör uzayının boyutu $boy(W) = 3$ dür . Örnek 5.39 daki vektör uzayı için de $boy(V) = 3$ dür.

**Teorem 5. 45:** $V$, $n$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

***i.)*** Eğer $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ lineer bağımsız ise $\langle T \rangle = V$ dir ve $T$, $V$ 'nin bir tabanıdır.

***ii.)*** $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $\langle T \rangle = V$ ise $T$, lineer bağımsızdır ve
$V$ 'nin bir tabanıdır.

**Örnek 5.46:** $R^3$ 'de $a=(-1,1,1)$, $b=(0,2,3)$, $c=(1,-1,0)$ olmak üzere $T=\{a,b,c\}$ kümesi veriliyor. $T$ 'nin $R^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

$boy(R^3)=3$ ve $T$ 'de üç vektör vardır. Teorem 5. 45 a göre $T$ 'nin taban olduğunu göstermek için lineer bağımsız olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$k_1a+k_2b+k_3c=0$ dan $k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=0$ ve $\left.\begin{aligned}-k_1+k_3&=0\\k_1+2k_2-k_3&=0\\k_1+3k_2&=0\end{aligned}\right\}$ lineer

homojen sistemi elde edilir. Bu sistemi

çözersek $k_1=k_2=k_3=0$ buluruz. Buradan $T$ lineer bağımsızdır ve $R^3$ 'ün bir tabanıdır.

**Örnek 5.47:** $V=R^3$ 'de $u_1=(2,0,0)$, $u_2=(4,0,-6)$, $u_3=(0,2,0)$ olmak üzere $T=\{u_1,u_2,u_3\}$ kümesi veriliyor. $T$ 'nin $R^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

$\langle T\rangle=V$ ise $T$, $V$ 'nin bir tabanı olacağından $a$, $b$, $c$ reel sayılar olmak üzere $u_1,u_2,u_3$ vektörlerinin $V$ 'yi gerip germediğini görmek için $V$ 'den herhangi bir $u=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ vektörü alınır ve $k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=u$ dan

$\left.\begin{aligned}2k_1+4k_2&=a\\2k_3&=b\\-6k_2&=c\end{aligned}\right\}$ lineer denklem sistemi elde edilir. Bu eşitliği sağlayan $k_1,k_2,k_3$ sabitlerini bulmak için denklem sistemi çözülürse

$k_1=\dfrac{3a+2c}{2}$ , $k_2=-\dfrac{c}{6}$ , $k_3=\dfrac{b}{2}$ bulunur ve $u_1,u_2,u_3$ vektörleri $V$ 'yi gerer. Yani, $\langle T\rangle=V$

dir ve böylece $T$, $V$ 'nin bir tabanıdır ve $boy(V)=3$ dür.

**Teorem 5. 48:** $V$, $n$ boyutlu bir vektör uzayı ve $T=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, $V$'nin bir tabanı olsun. $V$'nin her $v$ vektörü

$$v=c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n$$

biçiminde tek türlü yazılabilir.

**İspat:** $\langle T\rangle=V$ olduğundan $V$'nin her vektörü $v_1,v_2,\dots,v_n$ vektörlerinin bir lineer kombinezonu olarak yazılabilir. Şimdi bu yazılışın tek türlü olduğunu görelim.

$$v=c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n \quad \text{ve} \quad v=d_1v_1+d_2v_2+\dots+d_nv_n$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(c_1-d_1)v_1+(c_2-d_2)v_2+\dots+(c_n-d_n)v_n=0$$

elde edilir. $T$, lineer bağımsız olduğundan

$$\forall i=1,2,\dots,n \text{ için } c_i-d_i=0 \text{ ve böylece } c_i=d_i \text{ elde edilir.}$$