Ör: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(1) = g'(1) = 4$ şartlarını sağlayan türevlenebilen bir fonksiyon olsun ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $f(x) = \frac{g(x^2)}{1+x^2}$ ile tanımlı olsun. Lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak $f(1.25)$'in yaklaşık değerini bulunuz

$$L(x) = f(1) + f'(1).(x-1) \quad , \quad f(1) = \frac{g(1)}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$L(x) = 2 + f'(1).(x-1)$$

$$L(x) = 2 + 2.(x-1)$$

$f(x) \approx L(x)$ dır.

$$f(x) \approx 2 + 2.(x-1)$$

$$f(1,25) \approx 2 + 2.(\underbrace{1,25-1}_{0,25})$$

$$f(1,25) \approx 2,5$$

---

* $f(x) = \frac{g(x^2)}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x^2).2x.(1+x^2) - g(x^2).2x}{(1+x^2)^2}$

$$f'(1) = \frac{g'(1).2.2 - g(1).2}{2.2}$$

$$f'(1) = \frac{4.4 - 4.2}{4} = 2$$

Ör: $0<x<1$ olmak üzere $f(x)=\arcsin x-\arccos\sqrt{1-x^2}$

ile tanımlı f fonksiyonunun türevini

bulup ortaya çıkan durumu yorumlayınız.

$$f(x)=\arcsin x-\arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=0$$

* $\forall x\in(0,1)$ için $f'(x)=0$ olduğu için $f(x)$ sabittir.

(Veya; $f(x)$ fonksiyonunun eğrisi bu aralıkta yatay teğete sahiptir)

Ör: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x$ limitini hesaplayınız.

I. yol: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x \to 1^\infty$. belirsizliği

(*)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^1$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^{x-1}}_{e^3} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^1}_{1}$$

$$= e^3 \cdot 1 = e^3$$

---

veya (*)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{3}} \right)^{\frac{x-1+1}{3} \cdot 3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{3}} \right)^{\frac{x-1}{3}} \right]^3}_{e^3} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{3}} \right)^1}_{1}$$

$$= e^3.$$

II. yol.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = ? \quad (1^\infty \text{ belirsizliği})$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = \lim_{x \to \infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right) \to \infty . 0$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)}{\frac{1}{x}} \to \frac{0}{0}.$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+2) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1-x-2}{x^2+x-2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2+x-2} = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = 3 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x = e^3 \checkmark$$

Örn: $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ limitini hesaplayınız.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \to \infty^0$ belirsizliği

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \cot x$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1 \cdot \sin x \cdot x}{\sin^2 x \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1}$$

$$= -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = -1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$$

Örn: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{\arctan x}$

fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(e^{\pi/3})$ değerini hesaplayınız.

$f(x) = e^{\arctan x}$

$f'(x) = (\arctan x)' . e^{\arctan x}$

$= \frac{1}{1+x^2} . e^{\arctan x} > 0$ olduğu için fonksiyon artandır ve tersi mevcuttur

$f(a) = e^{\pi/3} \Rightarrow f^{-1}(e^{\pi/3}) = a$.

$e^{\arctan a} = e^{\pi/3} \Rightarrow \arctan a = \frac{\pi}{3}$ ✓ $a = \sqrt{3}$

$$(f^{-1})'(e^{\pi/3}) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{1}{\frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} . e^{\arctan\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4} . e^{\pi/3}} = \frac{4}{e^{\pi/3}} = 4.e^{-\pi/3}$$