1-) $h \in \mathbb{R}$ ve $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix}$ olmak üzere h nin hangi değerleri için $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır?

ÇÖZÜM:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 + hc_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + 2hc_3 &= 0 \\ -hc_2 + (3h+1)c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} [A \,\vdots\, 0] = \begin{bmatrix} 1 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 0 \\ 0 & -h & 3h+1 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}(-h), H_{32}(h)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-2h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2+3h+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sadece sıfır çözümünün olması için yani $r_A = 3 = n$ olması için $2h^2 + 3h + 1 \neq 0$ olmalıdır.

$2h^2 + 3h + 1 \neq 0 \Rightarrow h_1 \neq -1/2\,,\ h_2 \neq -1$ için S kümesi lineer bağımsızdır.

Başarılar...

Örnek: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ l. bğsız vektörleri veriliyor.

$\{\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{c}, 3\vec{b}+\vec{c}\}$ kümesinin L. bğsız olup olmadığını araştırınız.

$$\lambda_1(\vec{a}+\vec{b}) + \lambda_2(\vec{a}-2\vec{c}) + \lambda_3(3\vec{b}+\vec{c}) = \vec{0}$$

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{a} - 2\lambda_2\vec{c} + \lambda_3 3\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a}(\lambda_1+\lambda_2) + \vec{b}(\lambda_1+3\lambda_3) + \vec{c}(-2\lambda_2+\lambda_3) = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ l. bğsız. olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+3\lambda_3=0 \\ -2\lambda_2+\lambda_3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_1=-\lambda_2 \\ \lambda_3=2\lambda_2 \\ -\lambda_2+6\lambda_2=0 \\ \lambda_2=0 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l}\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \\ \text{olur.}\end{array}$$

$\{\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{c}, 3\vec{b}+c\}$ l. bğsızdır.

Örnek: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmi $5\,br^3$ olsun. $\{\vec{a}+b, \vec{a}-2\vec{c}, 3\vec{b}+\vec{c}\}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlü hacmi?

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=5$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{a}-2\vec{c})\wedge(3\vec{b}+\vec{c})] = (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{a}\wedge 3\vec{b}) + (\vec{a}\wedge\vec{c}) - (2\vec{c}\wedge 3\vec{b}) + (\underbrace{2\vec{c}\wedge\vec{c}}_{0})]$$

$$= \underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\wedge 3\vec{b})}_{0} + \underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\wedge\vec{c})}_{0} - \vec{a}(2\vec{c}\wedge 3\vec{b}) + \underbrace{\vec{b}.(\vec{a}\wedge 3\vec{b})}_{0} + \vec{b}(\vec{a}\wedge\vec{c}) - \underbrace{\vec{b}(2\vec{c}\wedge 3\vec{b})}_{0}$$

$$= -\vec{a}(2\vec{c}\wedge 3\vec{b}) + \vec{b}(\vec{a}\wedge\vec{c})$$

$$= 6\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

$$= 5\underbrace{\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c})}_{5} = 5.5 = \underline{\underline{25}}$$

Scanned with CamScanner

2, Hangi c değeri için $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlıdır? Bu vektörler arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm: $k_1\boldsymbol{x} + k_2\boldsymbol{y} + k_3\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ sisteminin $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ çözümünden farklı bir çözümü de olmalıdır.

$$2k_1 - k_2 + k_3 = 0$$
$$k_1 + k_3 = 0$$
$$2k_1 - k_2 + ck_3 = 0$$

sistemi için $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$ olmalıdır. Yani, $c - 1 = 0$ ve $c = 1$ olmalıdır.

$c = 1$ iken $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ olduğu açıktır.

$\underbrace{k_1 x + k_2 y + k_3 z = 0}$

$k_1 = 1$ için $\left.\begin{matrix} k_1 = k_2 \\ k_3 = -k_1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = -1 \end{matrix}\right\}$ $x + y - z = 0$

$\boxed{z = x + y}$