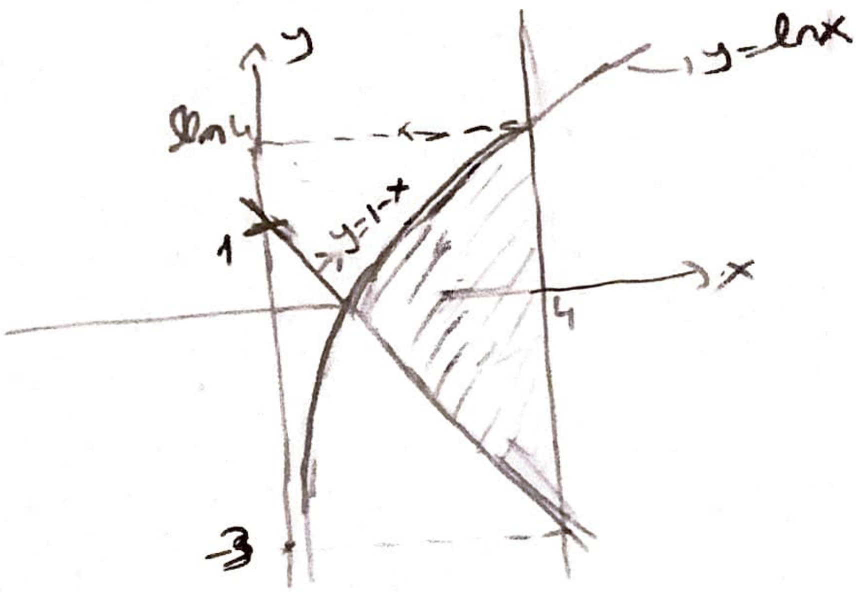
Ör: $y=\ln x$ eğrisi ve $y=1-x$, $x=4$ doğruları

ile sınırlı bölgenin alanını veren integrali

i.) x'e göre integral ile

ii) y'ye göre integral ile yazınız (integral hesaplama yapılmayacak)

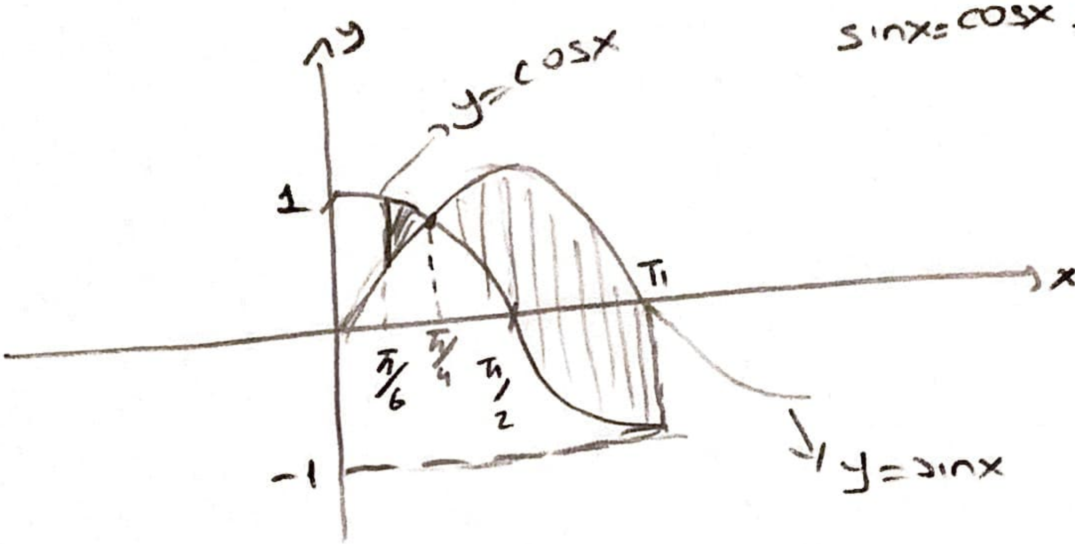


i.) $\text{Alan} = \int_1^4 \left[\ln x - (1-x)\right] dx$

ii.) $\text{Alan} = \int_0^{\ln 4} (4-e^y)\,dy + \int_{-3}^{0} \left[4-(1-y)\right] dy$

Ör: $\frac{\pi}{6} \le x \le \pi$ olmak üzere $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arasındaki bölgenin alanını hesaplayınız.

$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4$.



$$\text{Alan} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} - \cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi - \sin\pi + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{(1+\sqrt{3})}{2}$$

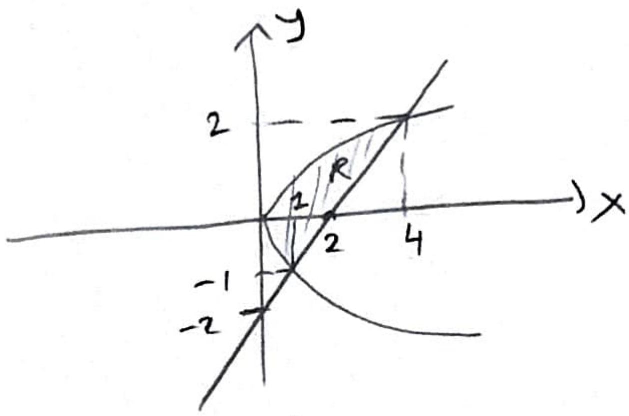
Ör: R : $x=y^2$ eğrisi ve $y-x=-2$ doğrusu ile sınırlı bölge olsun.

i.) R bölgesini çiziniz ve R nin alanını veren belirli integrali x'e göre integral ile yazınız

ii.) R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali pul yöntemini kullanarak yazınız integrali hesaplamayınız.

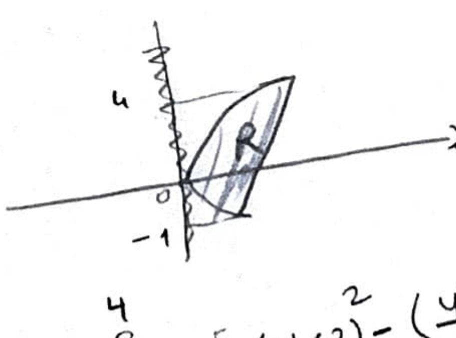
$$\left.\begin{array}{l} y=x-2 \\ x=y^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=y^2-2 \\ y^2-y-2=0 \\ y \quad -2 \\ y \quad +1 \\ y=2 \\ y=-1 \end{array}$$

i.)



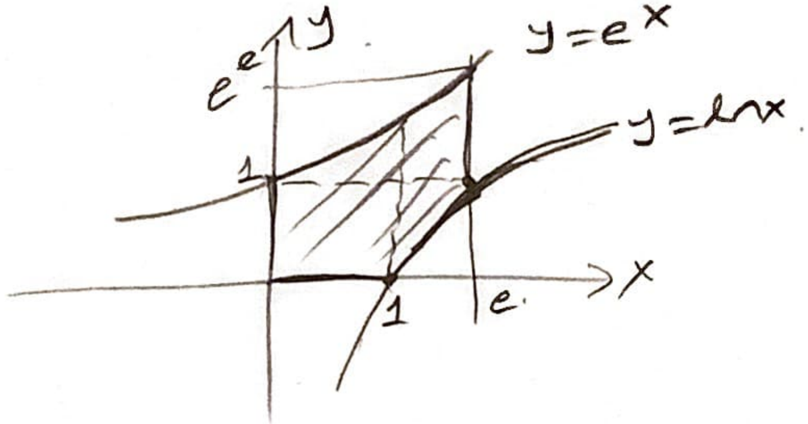
$$V=\int_0^1\left(\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\right)dx+\int_1^4\left(\sqrt{x}-(x-2)\right)dx$$

ii.)



$$V=\int_{-1}^{4}\pi.\left[(y+2)^2-(y^2)^2\right]dy$$

Ör: $y=\ln x$, $y=e^x$ eğrilerinin $x=0$, $y=0$ ve $x=e$ doğrularıyla sınırladığı bölgenin alanını x'e bağlı belirli integral ile ifade ediniz integrali hesaplamayınız



$$\text{Alan}=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^e \left(e^x-\ln x\right)dx$$

y-ye bağlı integral ile

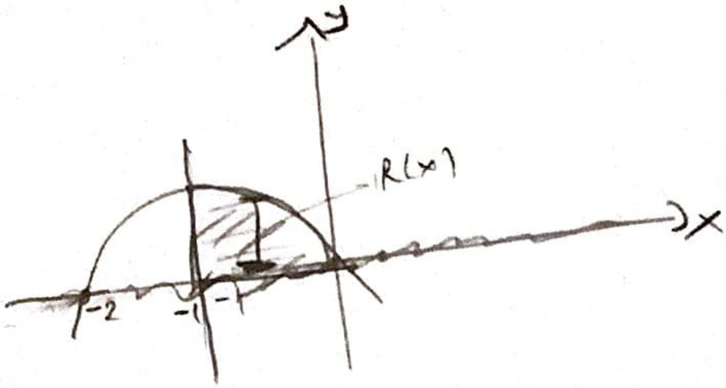
$$\text{Alan}=\int_0^1 e^y\,dy+\int_1^{e^e}\left(e-\ln y\right)dy$$

Ön: $y=-x^2-2x$, $x\geq -1$ ve $y=0$ ile sınırlı bölgenin

i.) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini Disk yöntemiyle bulunuz.
(İntegrali hesaplamayınız)

$$[R(x)]^2$$

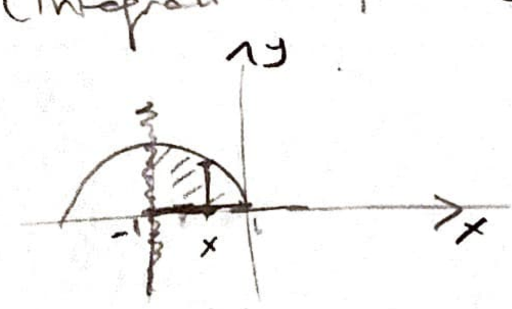
$$V=\int_{-1}^{0}\pi.\left[(-x^2-2x)^2\right]dx$$



ii.) x=-1 ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini silindirik kabuk metoduyla bulunuz
(İntegrali hesaplamayınız)

$$V=\int_{-1}^{0}2\pi.(x-(-1)).(-x^2-2x)\,dx$$

$$V=\int_{-1}^{0}2\pi.(x+1).(-x^2-2x)\,dx$$

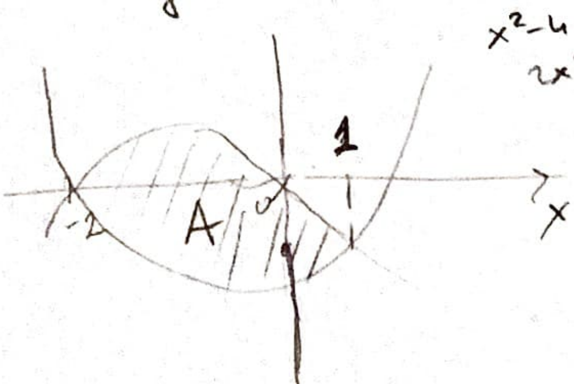


iii.) $y=x^2-4$ ve $y=-x^2-2x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını veren integrali yazınız hesaplamayınız.

$x^2-4=-x^2-2x$

$2x^2+2x-4=0$

$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2, x=1$

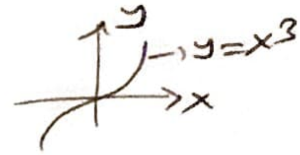


$$\text{Alan}=A=\int_{-2}^{1}\left[(-x^2-2x)-(x^2-4)\right]dx$$

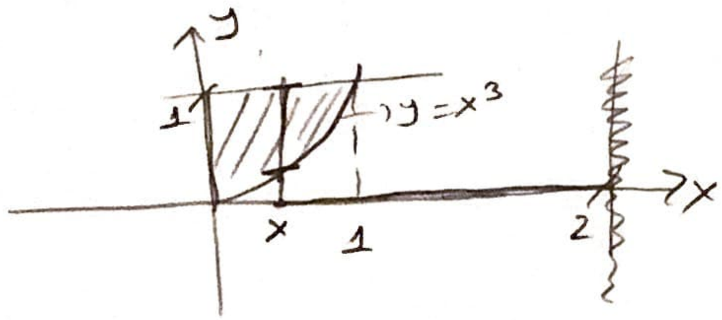
Ör: $y=x^3$ eğrisi, $y=1$ doğrusu ve $x=0$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini

a.) Silindirik kabuk yöntemi ile.

b.) Pul yöntemiyle hesaplayınız



a.)



$$V=\int_0^1 2\pi\cdot(2-x)\cdot(1-x^3)\,dx$$

$$=\int_0^1 2\pi\cdot(2-2x^3-x+x^4)\,dx=2\pi\left[2x-\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right]=\frac{12\pi}{5}$$

b.) $$V=\int_0^1 \pi\cdot\left[(2)^2-(2-\sqrt[3]{y})^2\right]dy=\int_0^1 \pi\cdot\left(4-(4+y^{2/3}-4y^{1/3})\right)dy$$

$$=\pi\cdot\int_0^1\left(4y^{1/3}-y^{2/3}\right)dy=\pi\left[\frac{\cancel{4}\,3y^{4/3}}{\cancel{4}}-\frac{3y^{5/3}}{5}\Big|_0^1\right]$$

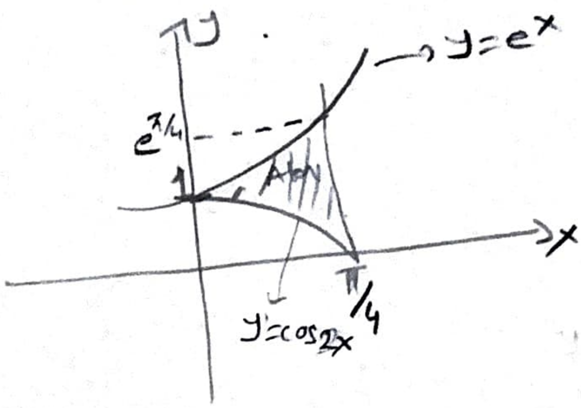
$$=\pi\cdot\left[3-\frac{3}{5}\right]$$

$$=\frac{12\pi}{5}$$

Ör: R bölgesi $y=e^x$, $y=\cos 2x$ eğrileri ve $x=\frac{\pi}{4}$ doğrusu ile sınırlı bir bölge olsun.

a.) R bölgesinin alanını veren belirli integrali "y'ye göre integral" ile belirleyiniz (integrali hesaplamayınız)

Bölgeyi çiziniz.



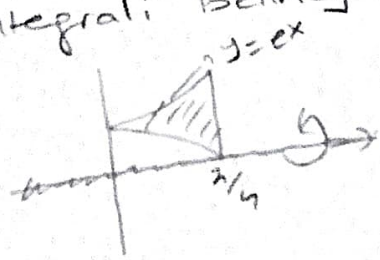
$y=\cos 2x \Rightarrow 2x=\arccos y$

$x=\frac{\arccos y}{2}$

$y=e^x \Rightarrow x=\ln y$

$$\text{Alan}=\int_0^1\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\arccos y}{2}\right)dy+\int_1^{e^{\pi/4}}\left(\frac{\pi}{4}-\ln y\right)dy$$

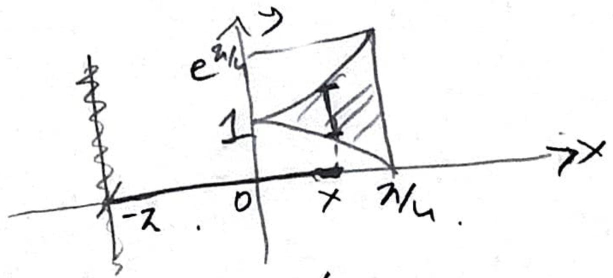
b.) Pul yöntemi kullanarak R bölgesinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (integrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)



$$V=\int_0^{\pi/4}\pi.\left[(e^x)^2-(\cos 2x)^2\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\pi\left[e^{2x}-\cos^2 2x\right]dx$$

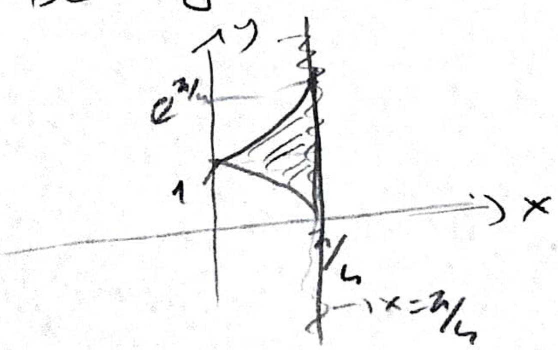
c.) Kabuk yöntemini kullanarak R bölgesinin $x=-\pi$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (İntegrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)



$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x-(-\pi)).(e^x - \cos 2x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} (x+\pi).(e^x - \cos 2x)\,dx$$

d.) Disk yöntemini kullanarak R bölgesinin $x=\frac{\pi}{4}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren belirli integrali belirleyiniz (İntegrali hesaplamayınız) (Bölgeyi çiziniz)

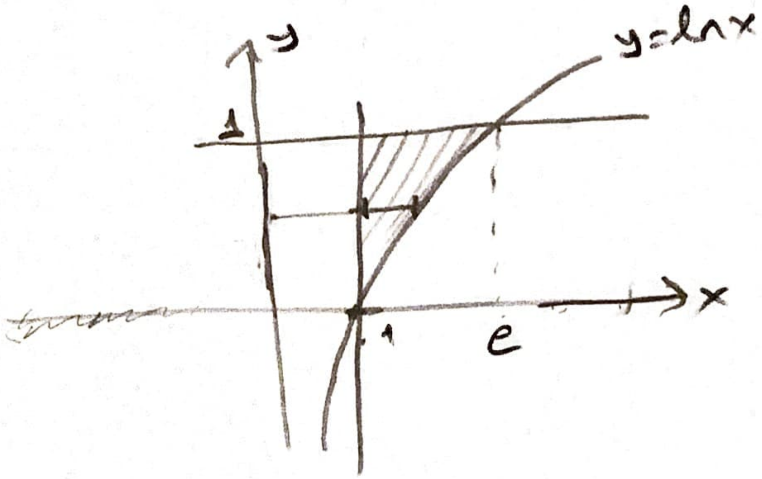


$$V = \int_0^1 \pi . \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\arccos y}{2}\right]^2 dy + \int_1^{e^{\pi/4}} \pi . \left[\frac{\pi}{4} - \ln y\right]^2 dy$$

Ör: $y=\ln x$ eğrisi $x=1$ ve $y=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin

a.) alanını

b.) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.



a.) Alan $= \int_1^e (1-\ln x)\,dx = x-(x\ln x - x)\Big|_1^e$

$= 2x - x\ln x \Big|_1^e$

$= 2e - e\underbrace{\ln e}_{1} - 2 + 1\underbrace{\ln 1}_{0}$

$= e-2$

b.) Hacim: $V = 2\pi \int_0^1 y\cdot(e^y-1)\,dy$

Türev	integral
y	$+e^y$
1	$-e^y$
0	$+e^y$

$= 2\pi \int_0^1 (ye^y - y)\,dy$

$= 2\pi \left[ye^y - e^y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right] = 2\pi\left[\left(\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{2}\right)-(-1)\right]$

$= 2\pi \cdot 1/2 = \pi$

Ön: $\int \frac{\cos^3 t \cdot dt}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6\sin t}$ integralini hesaplayınız.

$\sin t = u \Rightarrow \cos t \cdot dt = du$

$$I = \int \frac{\cos^3 t \cdot dt}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6\sin t} = \int \frac{\overbrace{\cos^2 t}^{(1-\sin^2 t)} \cdot \overbrace{\cos t \cdot dt}^{du}}{u^3 - u^2 - 6u}$$

$$= \int \frac{(1-u^2) \cdot du}{u^3 - u^2 - 6u}$$

$$\frac{1-u^2}{\underbrace{u^3-u^2-6u}_{u \cdot (u^2-u-6)}} = \frac{1-u^2}{u \cdot (u-3) \cdot (u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3} + \frac{C}{u+2}$$

$u \cdot (u^2 - u - 6)$
$u \quad -3$
$u \quad +2$

Kapama yöntemiyle $A = \frac{1}{-3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$

$B = \frac{1-9}{3 \cdot 5} = -\frac{8}{15}$

$C = \frac{1-4}{-2 \cdot -5} = -\frac{3}{10}$

$$\frac{1-u^2}{u^3-u^2-6u} = \frac{-1}{6u} - \frac{8}{15 \cdot (u-3)} - \frac{3}{10 \cdot (u+2)}$$

$$\int \frac{(1-u^2) \cdot du}{u^3-u^2-6u} = \int \left[\frac{-1}{6u} - \frac{8}{15(u-3)} - \frac{3}{10 \cdot (u+2)} \right] du$$

$$= -\frac{1}{6} \ln|u| - \frac{8}{15} \ln|u-3| - \frac{3}{10} \ln|u+2| + c.$$

* $\sin t = u$ olduğundan

$$I = -\frac{1}{6} \ln|\sin t| - \frac{8}{15} \ln|\sin t - 3| - \frac{3}{10} \ln|\sin t + 2| + c$$

Sr: $\int \frac{e^t}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2} dt$ integralini hesaplayınız.

$e^t = u \Rightarrow e^t dt = du$.

$$I = \int \frac{e^t dt}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2} = \int \frac{du}{\underbrace{u^3-u^2+2u-2}_{u^2.(u-1)+2.(u-1)}}$$

$$= \int \frac{du}{(u-1).(u^2+2)}$$

$$\frac{1}{(u-1).(u^2+2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+2} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A.(u^2+2)+(Bu+C).(u-1) \\ 1 = Au^2+2A+Bu^2-Bu+Cu-C \\ 1 = (A+B)u^2+(C-B)u+2A-C \\ \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C-B=0 \\ 2A-C=1 \end{array}\right\} 3A=1 \quad A=1/3 \\ \qquad B=-1/3,\ C=-1/3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(u-1).(u^2+2)} = \frac{1}{3.(u-1)} + \frac{-u-1}{3.(u^2+2)}$$

$$\int \frac{du}{(u-1).(u^2+2)} = \int \left[\frac{1}{3.(u-1)} - \frac{1}{3}.\frac{(u+1)}{u^2+2}\right] du = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{3}\int \frac{(u+1)du}{u^2+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u-1| - \frac{1}{3}\int \frac{u\,du}{u^2+2} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u-1| - \frac{1}{6}\ln|u^2+2| - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C$$

* $e^t = u$ olduğundan

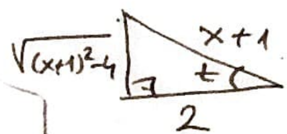
$$I = \int \frac{e^t dt}{e^{3t}-e^{2t}+2e^t-2} = \frac{1}{3}\ln|e^t-1| - \frac{1}{6}\ln|e^{2t}+2| - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{e^t}{\sqrt{2}} + C$$

ör: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$ $(x>1)$ integralini hesaplayınız

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}} = \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-4}}$$

$x+1 = 2\sec t$

$dx = 2\sec t \cdot \tan t\, dt$



$x+1 = 2\sec t$

$\sec t = \frac{x+1}{2}$

$t = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$$= \int \frac{2\sec t \tan t\, dt}{(2\sec t)^3 \underbrace{\sqrt{4\sec^2 t - 4}}_{\underbrace{4.(\sec^2 t - 1)}_{\tan^2 t}}}$$

$$= \int \frac{\cancel{2}\cancel{\sec t}.\cancel{\tan t}\,dt}{8\sec^{\cancel{3}} t . \cancel{2}\cancel{\tan t}}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sec^2 t}$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right] + c.$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{32}.2.\sin t.\cos t$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{16}\cdot\frac{\overset{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{(x+1)^2-4}}}{x+1}\cdot\frac{2}{x+1} + c$$

Ör: $y=\ln(\sin x)$ eğrisinin $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında

kalan yayının uzunluğunu hesaplayınız

$$L = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$(y')^2$

$y=\ln(\sin x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$L = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\csc x}\, dx$$

$$= -\ln|\csc x+\cot x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -\ln\left|\csc\frac{\pi}{2}+\cot\frac{\pi}{2}\right| + \ln\left|\csc\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right|$$

$$= \underbrace{-\ln|1+0|}_{0} + \ln|\sqrt{2}+1|$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1)$$

Ör: $x = \int_0^y \tan t\,dt$ ile tanımlı $x = f(y)$ eğrisinin

$-\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{3}$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

$$x = \int_0^y \tan t\,dt \quad , \left(x' = \frac{dx}{dy}\right)$$

$$x' = 1.\tan y - 0.$$

$$x' = \tan y \rightarrow (x')^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \tan^2 y$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sqrt{\underbrace{1+\tan^2 y}_{\sec^2 y}}\,dy$$

secy pozitif.

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3} \sec y\,dy$$

$$= \ln|\sec y + \tan y| \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi/3}$$

*

$$\boxed{\begin{aligned} \sec(-\tfrac{\pi}{3}) &= \sec(\tfrac{\pi}{3}) = 2 \\ \tan(-\tfrac{\pi}{3}) &= -\tan\tfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}}$$

$$= \ln|\sec\tfrac{\pi}{3} + \tan\tfrac{\pi}{3}| - \ln|\sec(-\tfrac{\pi}{3}) + \tan(-\tfrac{\pi}{3})|$$

$$= \ln|2 + \sqrt{3}| - \ln|+2 - \sqrt{3}|.$$

Ör: $\int_1^e \frac{dx}{\ln x^x}$ integralini hesaplayınız, sonucunu yorumlayınız.

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}dx = du$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+c = \ln|\ln x|+c$$

$$\int_1^e \frac{dx}{\ln x^x} = \lim_{R\to 1^+} \int_R^e \frac{dx}{\ln x^x}$$

$$= \lim_{R\to 1^+} \int_R^e \frac{dx}{x\ln x}$$

$$= \lim_{R\to 1^+} \left[\ln|\ln x| \Big|_R^e \right]$$

$$= \lim_{R\to 1^+} \left[\underbrace{\ln|\underbrace{\ln e}_{1}|}_{0} - \ln|\ln R| \right]$$

$$= \lim_{R\to 1^+} \left[0 - \ln|\underbrace{\ln R}_{0}| \right]$$

$$= -(-\infty)$$

$$= +\infty$$

limit sonsuz olduğundan genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Ör: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$ integralni hesoplayınız.

$$\textcircled{*} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-|x|} dx}_{I_2.} = 1+1 = 2$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} e^{x} dx$$

$$= \lim_{R \to -\infty} \left(e^{x} \Big|_{R}^{0} \right)$$

$$= \lim_{R \to -\infty} \left(e^{0} - e^{R} \right)$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} e^{-|x|} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} e^{-x} dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-e^{-x} \Big|_{0}^{R} \right)$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-e^{-R} + \frac{e^{0}}{1} \right)$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

$\textcircled{*}$ Sonuç $= I_1 + I_2 = 1 + 1 = 2$

Ör: $\int_0^1 \frac{dx}{x.(1+\ln^2 x)}$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x.(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}.dx = du$

$x=1 \Rightarrow u=0$

$x=R \Rightarrow u=\ln R$

$$= \lim_{R\to 0^+} \int_{\ln R}^{0} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left(\arctan u \Big|_{\ln R}^{0}\right)$$

$$= \lim_{R\to 0^+} (\underbrace{\arctan 0}_{0} - \arctan(\ln R))$$

$$= 0 - \arctan(-\infty)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Ör: $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$$

$1+\sqrt{x}=u$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$x=R \Rightarrow u=1+\sqrt{R}$

$$= \lim_{R\to 0^+} \int_{1+\sqrt{R}}^{2} 2\sqrt{u}\,du$$

$$= \lim_{R\to 0^+} 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{1+\sqrt{R}}^{2}$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left(\frac{4}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_{1+\sqrt{R}}^{2}\right)$$

$$= \lim_{R\to 0^+} \left[\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\cdot(1+\sqrt{R})^{3/2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\cdot(2\sqrt{2}-1)$$