Ör: $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? Eğer uygulanabiliyor ise teoremi gerçekleyen c sayısını bulunuz

1.) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$, $x-x^2 \geq 0$ için tanımlı
$x.(1-x) \geq 0$ " "

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f		$-$		$+$		$-$	
				≥ 0			

$[0,1]$ aralığında tanımlı sürekidir.

2.) $f'(x)=\dfrac{(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$, $(0,1)$ aralığında türevlidir

1.) ve 2.) sağlandığından Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir. Dolayısıyla

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$ olacak şekilde $c\in(0,1)$ vardır.

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1-2c}{2\sqrt{c-c^2}}=\frac{0}{1}$$

$$1-2c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{2}, \quad \underline{\underline{c=\frac{1}{2}}}\in(0,1)$$

Ör: $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$ fonksiyonuna $[1,2]$ aralığında Rolle Teoremi uygulanabilir mi? Eğer uygulanabilirse teoremi gerçekleyen c sayısını bulunuz

$f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$, $-x^2+3x-2 \geq 0$ için tanımlı

$-x \quad 1$
$x \quad -2$ $\Big\}$ $x=1$, $x=2$

x		1		2	
f	$-$		$+$	0	$-$

≥ 0

ya da $(1-x).(x-2) \geq 0$
$[1,2]$'de $(1-x) \leq 0$, $[1,2]$'de $(x-2) \leq 0$

i.) $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$, $[1,2]$'de sürekli

ii) $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$, $(1,2)$ de türevli

iii.) $f(1)=f(2)=0$

i), ii) ve iii) koşulları sağlandığından Rolle Teoremi uygulanabilir

$f'(c)=0$ olacak şekilde $c \in (1,2)$ vardır

$$\frac{-2c+3}{2\sqrt{-c^2+3c-2}}=0 \Rightarrow -2c+3=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2} \in (1,2) \checkmark$$

Ör: Eğer $f(0)=-3$ ve her $x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\leq 5$

ise $f(2)$ nin alabileceği en büyük değeri

Ortalama Değer Teoreminden yararlanarak

bulunuz.

f, $[a,b]$'de sürekli

(a,b)'de türevli ise

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde $c\in(a,b)$ vardır.

Bina' gore

f, $\mathbb{R}$de türevlenebilir olduğundan $a,b\in\mathbb{R}$

olmak üzere $[a,b]\subset\mathbb{R}$ aralığında süreklidir.

$[a,b]=[0,2]$ alırsak Ortalama Değer Teoremi

Gereği

$* f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ olacak şekilde

bir $c\in(0,2)$ vardır

$* f'(c)=\dfrac{f(2)+3}{2} \Rightarrow 2f'(c)=f(2)+3$

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\leq 5$ ise $\Rightarrow \underbrace{2f'(c)}\leq \overset{2.5=10}{10}$ dır.

$f(2)+3\leq 10$

$f(2)\leq 7$

Ör: Ortalama Değer Teoremini kullanarak

her $a>0$ sayısı için

$$\frac{1}{3.(a+1)^{2/3}} < \sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} < \frac{1}{3a^{2/3}}$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a, a+1]$ seçelim.

1.) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $[a,a+1]$ 'de sürekli

2.) $f'(x)=\frac{1}{3.x^{2/3}}$, $(a, a+1)$ de türevli

Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$$f'(c)=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$ olacak şekilde $c\in(a,a+1)$ vardır.

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{3c^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a}}{1}$$

Ayrıca $c\in(a,a+1) \Rightarrow a<c<a+1$.

$$\frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{3(a+1)^{2/3}} < \frac{1}{3.c^{2/3}} < \frac{1}{3.a^{2/3}}$$

$$\frac{1}{3.(a+1)^{2/3}} < \frac{\sqrt[3]{a+1}-\sqrt[3]{a}}{1} < \frac{1}{3a^{2/3}}$$

bulunur.

Ör: Ortalama Değer Teoremini Kullanarak her $a>0$ sayısı için

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} < \ln(a+\sqrt{1+a^2}) < a$$ eşitsizliğinin sağlandığını ispatlayınız.

$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ $[0,a]$ olsun

i.) $f(x)$; $[0,a]$ sürekli

ii.) $$f'(x)=\frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}}{(\sqrt{1+x^2}).\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$(0,a)$ da tanımlı olduğundan $f(x)$, $(0,a)$ da türevlidir. i.) ve ii) sağlandığı için $f(x)$ fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$$ olacak şekilde $c\in(0,a)$ vardır.

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a}.$$ dır. Ayrıca $c\in(0,a) \Rightarrow 0<c<a$ dır.

$0<c<a \Rightarrow 0<\sqrt{1+c^2}<\sqrt{1+a^2}$ dir.

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}<1 \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}<\frac{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}{a}<1 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}<\ln(a+\sqrt{1+a^2})<a$$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+4}$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında

Rolle Teoremi uygulanabilir mi? Eğer uygulanabilirse

teoremi sağlayan c değerlerini bulunuz.

i.) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+4} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0$ için tanımlı

$x^2 \leq 1$ için tanımlı. $[-1,1]$ tanımlı

$[-1,1]$ aralığında sürekli

ii.) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(x^2+4)-\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2x^3-8x-\cancel{2}4x\cdot(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2x^3-12x}{2\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}=\dfrac{x^3-6x}{\sqrt{1-x^2}\cdot(x^2+4)^2}$; $(-1,1)$ de türevlenebilir.

iii.) $f(-1)=0$, $f(1)=0 \Rightarrow f(-1)=f(1)=0$

i.), ii.) ve iii.) koşulları sağlandığından Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=0$ olacak şekilde $c\in(-1,1)$ vardır.

$\dfrac{c^3-6c}{\sqrt{1-c^2}\cdot(c^2+4)^2}=0 \Rightarrow c^3-6c=0 \Rightarrow c\cdot(c^2-6)=0$

$c_1=0$ $c_2=\sqrt{6}$ $c_3=-\sqrt{6}$

$c_2=\sqrt{6}\notin(-1,1)$

$c_3=-\sqrt{6}\notin(-1,1)$

$c_1=0\in(-1,1)$ dir.

$f(x) = x\sqrt{x-x^2}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki mutlak maximum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$f'(x) = \sqrt{x-x^2} + x\,\frac{(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \frac{2(x-x^2)+(x-2x^2)}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= \frac{3x-4x^2}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$f' = 0 \Longrightarrow 3x-4x^2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow x.(3-4x)=0$, $x=0$, $x=\frac{3}{4}$

f' tanımsız $\Rightarrow x-x^2 \overset{?}{=} 0 \Rightarrow x.(1-x)=0$, $x=0$, $x=1$

$f(0)=0 \Rightarrow$ mutlak min değeri 0

$f(1)=0 \Rightarrow$ 〃 〃 〃 0

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}. \Rightarrow$ 〃 max değeri $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Ör: $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$ fonksiyonunun yerel ve mutlak extremum değerlerini bulunuz.

$D(f): [-4,4]$, $\left(\begin{array}{l} 16-x^2 \geq 0 \text{ için tanımlı} \\ x^2 \leq 16 \text{ , } [-4,4] \text{ tanımlı} \end{array} \right)$

f nin tanım kümesi

$$f'(x)=\sqrt{16-x^2}+x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-x^2-x^2}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$f'=0 \Rightarrow 16-2x^2=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\mp 2\sqrt{2}$

f' tanımsız $\Rightarrow 16-x^2=0 \Rightarrow x=\mp 4$

x		-4		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		4	
f'		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	
f			$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		
		$x=-4$ yerel max		$x=-2\sqrt{2}$ yerel min mutlak (min)		$x=2\sqrt{2}$ yerel max. (mutlak max)		$x=4$ yerel min.	

$f(2\sqrt{2})=8$, $x=2\sqrt{2}$ mutlak max nokta, 8 mutlak max değer.

$f(-2\sqrt{2})=-8$, $x=-2\sqrt{2}$ mutlak min nokta, -8 mutlak min değer.

$f(-4)=0$, $x=-4$ yerel max nokta, 0 yerel max değer

$f(4)=0$, $x=4$ yerel max nokta, 0 " min değer

Ör: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x}$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x \to 1.} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2\tan(x^3-1)}{3x^2-4x} \to \frac{0}{0}$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6x\tan(x^3-1)+3x^2.3x^2.\sec^2(x^3-1)}{6x-4.}$$

$$= \frac{0+9.1}{2} = \frac{9}{2}$$

Ör: $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı $f(x)=3+\int_0^x \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt$

fonksiyonu verilsin

$f(0)=p(0)$, $f'(0)=p'(0)$ ve $f''(0)=p''(0)$ şartlarını

sağlayan $p(x)=ax^2+bx+c$ polinomunu bulunuz.

$f(0)=3+\underbrace{\int_0^0 \frac{1+\sin t}{2+t^2}\,dt}_{0}=3$, $\underbrace{p(0)=f(0) \Rightarrow p(0)=3}$

$\Downarrow$

$c=3$

$f'(x)=0+1.\dfrac{(1+\sin x)}{2+x^2} \Rightarrow f'(0)=\dfrac{1+\sin 0}{2+0}=\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{b=\frac{1}{2}}$,

$p'(0)=f'(0) \Rightarrow p'(0)=\frac{1}{2}.$

$f''(x)=\dfrac{\cos x.(2+x^2)-(1+\sin x).2x}{(2+x^2)^2}$, $f''(0)=\dfrac{2-0}{4}=\dfrac{1}{2}$

$p(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow p(0)=c$, $p'(x)=2ax+b \Rightarrow p'(0)=b$

$p''(x)=2a \to p''(0)=2a.$ | $c=3$, $b=\frac{1}{2}$, $2a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$p(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+3$

Örn: $t \geq 1$ için f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere; F fonksiyonu

$$F(x) = \int_1^x \frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}\,dt$$ ile tanımlansın.

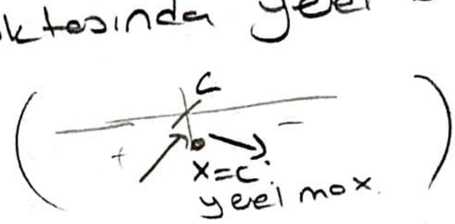
F, $x=c$ de bir maksimuma sahip ise f fonksiyonunun da $x=c$ de bir maksimuma sahip olduğunu gösteriniz.

$$[F(x)]' = \left[\int_1^x \frac{f'(t)}{1+[f(t)]^2}\,dt \right]'$$

$\star$ $F'(x) = 1 \cdot \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$ olup $x=c$ noktası F için bir kritik sayıdır ve $F'(c)=0$ dır.

$F'(c)=0$ olduğundan $\star$dan $f'(c)=0$ dır.

Diğer taraftan f c noktasında yerel bir maksimuma sahipse



$x<c$ iken $F'(x)>0$

$x>c$ iken $F'(x)<0$ dır.

Yani $F'(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

$F'(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$ dır.

o halde f fonksiyonu da $x=c$ de bir yerel maksimuma sahiptir

Ön: $y=x+\sin x$ fonksiyonunun yerel extremum değerlerinin olup olmadığını araştırınız.

$y=x+\sin x$

$y'=1+\cos x$

$y'=0 \Rightarrow \quad 1+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-1$

$x=\mp\pi, \mp3\pi, \mp5\pi, \ldots$
kritik noktalar

$y''=-\sin x$

$y''\big|_{\mp\pi, \mp3\pi, \mp5\pi, \ldots}=0$ olduğu için ikinci türev testi yanıt vermez.

Ancak $y'=1+\cos x>0 \quad (x\neq\mp\pi, \mp3\pi, \mp5\pi, \ldots)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur dolayısıyla yerel extremum değerleri mevcut değildir.

$F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ olsun $F(x)$ fonksiyonunun artan, azalan, yukarı ve aşağı konkav olduğu aralıkları bulunuz $F(x)$ in yerel ekstremum değerlerini belirleyiniz

$$F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$$

$$F'(x)=2x\cdot e^{-x^4}-0=2xe^{-x^4}$$

$$F'=0 \Rightarrow 2xe^{-x^4}=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		∞
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

$x=0$ yerel min nok.

$F(0)=0$, yerel min değer.

$$F''(x)=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}=2e^{-x^4}(1-4x^4)$$

$$F''=0 \Rightarrow 1-4x^4=0 \Rightarrow x^4=\frac{1}{4}\ ,\ x=\mp\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$		∞
F''		$-$	0	$+$	0	$-$	
F		aşağı konkav		yukarı konkav		aşağı konkav	

1.) $\int \ln\sqrt{x+1}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\ln\sqrt{x+1} = u$ $\qquad\qquad dx = dv$

$\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx = du$ $\qquad\qquad x = v$

$\dfrac{1}{2\cdot(x+1)}\,dx = du$

$$\int \ln\sqrt{x+1}\,dx = x\ln\sqrt{x+1} - \int \frac{x}{2(x+1)}\,dx$$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \quad *$$

$$= x\ln\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

*NOT: $x+1=t$

$dx = dt$

$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t}$

$= \ln|t|$

$= \ln|x+1|$

II. yol

$$\int \ln\sqrt{x+1}\,dx = \int \ln t\, 2t\,dt = 2\int \ln t\cdot t\,dt = 2\cdot\left[\frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t}{2}\cdot dt\right]$$

$\sqrt{x+1}=t$

$x+1=t^2$

$dx = 2t\,dt$

$\ln t = u \qquad t\,dt = dv$

$\frac{1}{t}\cdot dt = du \qquad \frac{t^2}{2} = v$

$$= t^2\ln t - \frac{t^2}{2} + c$$

$$= (\sqrt{x+1})^2\ln\sqrt{x+1} - \frac{(\sqrt{x+1})^2}{2} + c$$

$$= (x+1)\ln\sqrt{x+1} - \frac{(x+1)}{2} + c$$

Ör: $\int \sec^2\sqrt{x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\sqrt{x} = t.$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$

$dx = 2\sqrt{x}dt.$

$$\int \sec^2\sqrt{x}.dx = \int \sec^2 t \, 2\sqrt{x}\,dt$$

$$= 2\int \sec^2 t . t . dt$$

$$= 2\underbrace{\int t\sec^2 t\,dt}_{I_1}.$$

$I_1 = \int t\sec^2 t\,dt$ için kısmi integrasyon.

$t = u$ $\quad \sec^2 t dt = dv.$

$dt = du$ $\quad \tan t = v.$

$$I_1 = \int t\sec^2 t\,dt = t\tan t - \int \tan t\,dt$$

$$= t\tan t - \int \frac{\sin t}{\cos t}dt.$$

$$= t\tan t + \ln|\cos t| + c.$$

NOT:
$\cos t = u$
$-\sin t dt = du$

$$\int \frac{\sin t}{\cos t}dt = \int -\frac{du}{u}$$
$$= -\ln|u| + c$$
$$= -\ln|\cos t| + c$$

$$\int \sec^2\sqrt{x}\,dx = 2\int t\sec^2 t\,dt$$

$$= 2.(t\tan t + \ln|\cos t|) + c$$

$$= 2(\sqrt{x}\tan\sqrt{x} + \ln|\cos\sqrt{x}|) + c$$

Ör: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(\tan x - 2\ln\cos x)} dx$ integralini hesaplayınız.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x - 2\ln\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} \cdot e^{-2\ln(\cos x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\tan x} \cdot e^{\ln(\cos x)^{-2}} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$\tan x = u$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = du$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} = u.$

$1 = u$

$x = 0 \Rightarrow \tan 0 = u$

$0 = u$

$$= \int_0^1 e^u du.$$

$$= e^u \Big|_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$= e - 1$$

Ör[1]: $\int x^2 \arctan x\,dx$ integralini hesaplayınız.

$\arctan x = u$ $\qquad$ $x^2 dx = dv$

$\frac{1}{1+x^2}dx = du$ $\qquad$ $\frac{x^3}{3} = v$

$$\int x^2 \arctan x\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot \arctan x - \int \frac{x^3}{3\cdot(1+x^2)}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\cdot\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln|1+x^2| + C$$

NOT: $\int \frac{x}{1+x^2} = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

$1+x^2 = u$

$2x\,dx = du$

Ör: $\underbrace{\int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}}}_{I}$ integralini hesaplayınız.

$$x = \sin\theta \quad dx = \cos\theta\, d\theta \left.\right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{array}$$

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta \cos\theta\, d\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)^5}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta \cos\theta . d\theta}{\cos^5\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta.$$

$$= \int_0^{\pi/6} \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \left. \frac{\tan^3\theta}{3} \right|_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\tan^3 \frac{\pi}{6}}{3} - \frac{\tan^3 0}{3}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{3} - 0$$

$$= \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

NOT: $\tan\theta = u$. $\sec^2\theta . d\theta = du$

$$\int \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta =$$

$$= \int u^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{\tan^3\theta}{3} + c$$

Ör: $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$ integralini hesaplayınız.

$$\left.\begin{aligned} \ln x &= u \\ \frac{1}{x}dx &= du. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow u=\ln 1=0 \\ x=e^{\pi/4} &\Rightarrow u=\ln e^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 u\,du$$

$$= \tan u \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1-0$$

$$=1.$$

Ör: $x \geq 1$ olmak üzere $f(x) = \int_1^x (2t)^t dt$ ise.

$f''(1)$ değerini bulunuz.

$$[f(x)]' = \left[\int_1^x (2t)^t dt \right]'$$

$$f'(x) = 1.(2x)^x$$

$$\ln f'(x) = \ln (2x)^x$$

$$\ln f'(x) = x \ln (2x)$$

$$[\ln f'(x)]' = [x \ln(2x)]'$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln 2x + \cancel{x} . \frac{2}{2\cancel{x}}$$

$$f''(x) = (\ln 2x + 1) f'(x)$$

$$f''(x) = (\ln 2x + 1).(2x)^x$$

$$f''(1) = (\ln 2 + 1) . 2$$

$$f''(1) = 2(\ln 2 + 1)$$

$x>0$ için

Ör: $f(x)=(1+\ln x)^x$, $g(x)=\int_x^{f(x)} \cosh^2 t\,dt$

fonksiyonları için $f'(1)$ ve $g'(1)$ değerlerini hesaplayınız.

$$f(x)=(1+\ln x)^x \Rightarrow \ln(f(x))=\ln(1+\ln x)^x$$

$$\ln(f(x))=x\ln(1+\ln x)$$

$$[\ln(f(x))]'=[x\ln(1+\ln x)]'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(1+\ln x)+x.\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(1+\ln x)+\cancel{x}.\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{1+\ln x}$$

$$f'(x)=\left[\ln(1+\ln x)+\frac{1}{1+\ln x}\right]f(x)$$

$$f'(1)=\left(\ln(1+\underbrace{\ln 1}_{0})+\frac{1}{1+\ln 1}\right)\underbrace{f(1)}_{1} \quad , \quad f(1)=(1+\ln 1)^1=1$$

$$f'(1)=1$$

$$g'(x)=\left[\int_x^{f(x)} \cosh^2 t\,dt\right]'$$

$$g'(x)=f'(x)\cosh^2(f(x))-1.\cosh^2 x$$

$$g'(1)=\underbrace{f'(1)}_{1}.\cosh^2(1)-\cosh^2 1$$

$$g'(1)=\cosh^2 1-\cosh^2 1=0$$

Ör: Kalkülüsün Temel Teoremini kullanarak sürekli bir f fonksiyonu için $x>0$ olmak üzere eğer

$$\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\arctan x$$ ise $f(1)$ değerini bulunuz

$$\left[\int_0^{x^2} f(t)\,dt\right]' = \left[x\arctan x\right]'$$

$$2x\,f(x^2) = \arctan x + x\,\frac{1}{1+x^2}$$

$x=1$ için ($x>0$ olduğu için $x=-1$ olmaz)

$$2\cdot f(1) = \underbrace{\arctan 1}_{} + \frac{1}{2}$$

$$2f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

$$f(1) = \frac{\pi+2}{8}$$

22) Sürekli türevlenebilir bir F fonksiyonu, $x \geq 1$

olmak üzere $F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt$

denklemini sağlıyorsa $F'(1)$ değerini bulunuz.

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt$$

$$\left[F(x)\right]' = \left[\frac{1}{x} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt\right]'$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt + \frac{1}{x} \cdot \left(2x \cdot \left(e^{1-\sqrt{x^2}} - F'(\sqrt{x^2})\right) - 0\right)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{x^2} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt + 2e^{1-x} - \frac{2}{x} F'(x)$$

$$F'(1) = -1 \cdot \underbrace{\int_1^{1} \left[e^{1-\sqrt{t}} - F'(\sqrt{t})\right] dt}_{0} + 2\underbrace{e^{1-1}}_{e^0 = 1} - 2F'(1)$$

$$F'(1) = 2 - 2F'(1)$$

$$3F'(1) = 2$$

$$F'(1) = \frac{2}{3}$$

ör: $f(x) = -|x|$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

$$\text{ort}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{1-(-2)} \int_{-2}^{1} -|x|\,dx$$

$$= \frac{-1}{3} \int_{-2}^{1} |x|\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left[-\left(0-\frac{4}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-0\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}.$$

Ör: $f(x)=x^3+x$ eğrisinin altında x-ekseninin üzerinde ve $x=0$, $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını Üst Riemann Toplamı ile hesaplayınız.

I. yol: $f'(x)=3x^2+1$ artan fonksiyon

Üst Riemann Toplamı için sağ uç noktalar alınır.

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ (n eşit parçaya böldük)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\Delta x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(0+k.\frac{2}{n}\right).\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right).\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{2k}{n}\right)^3+\left(\frac{2k}{n}\right)\right].\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8k^3}{n^3}+\frac{2k}{n}\right).\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{16k^3}{n^4}+\frac{4k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{16k^3}{n^4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n^2}$$

$$= \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

$$= \frac{16}{n^4}.\left[\frac{\overbrace{n.(n+1)}^{n^2+n}}{2}\right]^2+\frac{4}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{4(n^4+2n^3+n^2)}{n^4}+\frac{2n^2+2n}{n^2}$$

$$\text{Alan}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 4\frac{(n^4+2n^3+n^2)}{n^4}+\frac{2n^2+2n}{n^2}=4+2=6$$