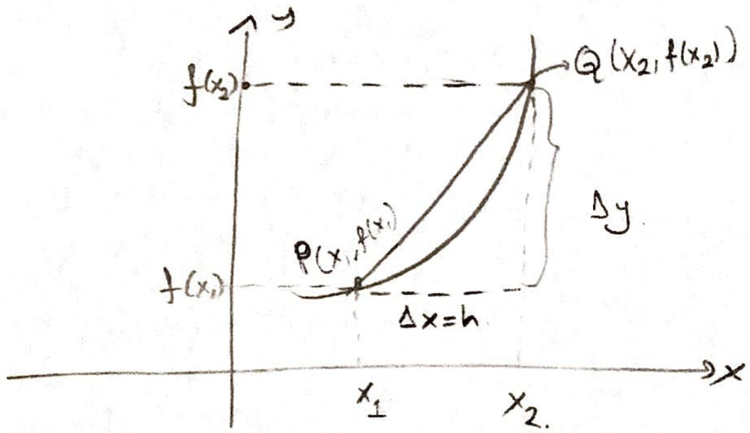
Değişim Oranları ve Eğrilerin Eğimleri

Herhangi bir $y=f(x)$ fonksiyonunda $[x_1, x_2]$ aralığında x'e bağlı olan y nin ortalama değişim oranı



$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta x = x_2 - x_1$

Δx yerine h ta kullanılır

Tanım: $y=f(x)$ fonksiyonunun, $[x_1, x_2]$ aralığında x'e göre ortalama değişim oranı şöyledir.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}, \quad h \neq 0$$

f'in $[x_1, x_2]$ aralığındaki değişim oranı, $P(x_1, f(x_1))$ ve $Q(x_2, f(x_2))$ noktasından geçen doğrunun eğimidir

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \Rightarrow \text{Eğrinin } P \text{'deki eğimidir.}$$

Teğetler ve Bir Noktadaki Türev

Bir $y=f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi aşağıdaki sayıya eşittir.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ (limitin varolması koşuluyla)

* Eğrinin P noktasında teğet doğrusu P noktasından geçen ve eğimi yukarıdaki limitten elde ettiğimiz sayı olan doğrudur.

Ör: $y=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun

a.) $x=a \neq 0$ noktasındaki eğimini bulunuz.

b.) $x=-1$ noktasında eğim nedir?

c.) Hangi noktada eğim $-\frac{1}{4}$ değerine eşittir?

a.) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow m=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-(a+h)}{a.(a+h).h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a}-\cancel{a}-h}{a.(a+h).h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{a(a+h).\cancel{h}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

$m=-\frac{1}{a^2}$ dir

b.) $x=-1$ noktası $m=-\frac{1}{(-1)^2}=-1$

c.) $-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\mp 2$, $(2, \frac{1}{2})$ ve $(-2, -\frac{1}{2})$ noktaları

Değişim Oranları: Bir Noktadaki Türev.

Tanım: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ ile gösterilir ve limitinin var olması koşulu ile

$$* \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

"Özet": $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ limiti.

1- $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki grafiğinin eğimi

2- $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi

3- $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki x değişkenine bağlı değişim oranı.

4- x_0 daki $f'(x_0)$ türevi

* **Ör:** $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun $(2,5)$ noktasındaki teğet doğru denklemi?

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + 1 - 5}{h} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 4 + h = 4$$

$m = 4 \Rightarrow y = 4x + b$, $5 = 8 + b \Rightarrow b = -3$

$y = 4x - 3 \Rightarrow$ teğet doğru denklemi

Bir Fonksiyon Olarak Türev

* **Tanım:** x değişkenine bağlı $f(x)$ fonksiyonunun türevi, limitin var olması koşulu ile f' fonksiyonudur ve x noktasındaki değeri

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olarak tanımlanır.

* Türev için Alternatif Formül:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Ön: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ fonksiyonunun türevi?

I. yol:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h).(x-1) - x.(x+h-1)}{(x+h-1).(x-1).h} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + \cancel{xh} - h - \cancel{x^2} - \cancel{xh} + \cancel{x}}{(x+h-1).(x-1).h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x+h-1).(x-1).h} \to \frac{0}{0} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1).(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

II. yol:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z \to x} \frac{\frac{z}{z-1} - \frac{x}{x-1}}{z-x} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{z.(x-1) - x.(z-1)}{(z-x).(z-1).(x-1)} = \lim_{z \to x} \frac{\cancel{zx} - z - \cancel{xz} + x}{(z-x).(z-1).(x-1)}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{\cancel{(x-z)}^{-1}}{\cancel{(z-x)}.(x-1).(z-1)} \to \frac{0}{0} = \lim_{z \to x} \frac{-1}{(x-1).(z-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Ör: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ fonksiyonunun türevi? (türev tanımından)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+(x+h)^2-(1+x^2)}{h\cdot\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}+h^2+2xh-\cancel{1}-\cancel{x^2}}{h\cdot\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h\cdot\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}\left(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h+2x}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ör: $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun

a.) $x>0$ için türevini alınız. (türev tanımından)

b.) $y=\sqrt{x}$ eğrisine $x=4$ noktasında teğet olan doğruyu bulunuz.

a.) $x>0$ için

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \overset{\frac{0}{0}}{\frown} =\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \frown \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b.) $x=4$ noktasında $m=f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ ✓

$y=\frac{1}{4}x+b \Rightarrow 2=\frac{1}{4}.4+b \Rightarrow b=2-1=1$

$\boxed{y=\frac{x}{4}+1}$ → teğet doğru denklemi

* **Notasyon:** $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin bir çok notasyonu vardır.

$$f'(x) = y'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x)$$

* $x=a$ sayısındaki türev notasyonları

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = y'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

* **Bir Aralıkta Türev; Tek-Taraflı Türevler**

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu aralığın (sonlu veya sonsuz) her noktasında bir türeve sahipse buna açık aralıkta türevlenebilen fonksiyon denir. Eğer bir fonksiyon (a,b) açık aralığında türevlenebilir ise

ve

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad \left(\begin{array}{l} f \text{ fonksiyonunun} \\ x=a \text{ noktasında sağdan} \\ \text{türevi} \end{array}\right)$$

$$f'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}, \quad \left(\begin{array}{l} f \text{ fonksiyonunun} \\ x=b \text{ noktasında soldan} \\ \text{türevi} \end{array}\right)$$

limitleri uç noktalarda varsa bu fonksiyona $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir denir.

* f fonksiyonunun $x=a$ noktasında türeve sahip olması için

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

olmalıdır.

Ör:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\leq 1 \\ 2x-3, & x>1 \end{cases}$$

, fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2.(1+h)-3-(-1)}{h}.$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{2}+2h-\cancel{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}$$

$$=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}.=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-2-(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0^-}h+2=2$$

$f'_+(1)=f'_-(1)=2$ olduğundan $f'(1)=2$.

Ör: $y=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ türevi varmıdır?

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(0+h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1 \Rightarrow \text{sağ türev}$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(0+h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1 \Rightarrow \text{sol türev}$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ olduğundan $x=0$ noktasında türev Yoktur.

Türev ve Süreklilik

* Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında türevi varsa $f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında süreklidir.

Fonksiyon türevli $\Rightarrow$ Fonksiyon süreklidir.

Tersi doğru değildir.

Ör: $y=|x|$ fonksiyonu $x=0$ da süreklidir fakat türevi yoktur.

Ör: $f(x)=|x^2-1|$ fonksiyonu a) $x=1$ noktasında sürekli mi?
b) $x=1$ " türevi var mı?

a.) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} -(x^2-1)=0$

$\Bigg\}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$ olduğu için $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$ ✓

ve $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ ✓

olduğundan $x=1$ de $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.

b.) $f'_+(1)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(1+h)^2-1-0}{h}$ $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h.(h+2)}{\cancel{h}}$ $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{h\to 0^+} h+2=2$ ✓

$f'_-(1)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-(1+h)^2+1-0}{h}$ $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h^2-2h-\cancel{1}+\cancel{1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-\cancel{h}.(h+2)}{\cancel{h}}=-2$

$f'_+(1)\neq f'_-(1)$ olduğundan $f'(1)$ yoktur ($x=1$ de türev yok) $\Big\}$ sonuç: $x=1$ de sürekli fakat türevlenemez

Türev Kuralları

1- $f(x)=c$ $(c=\text{sabit})$ ise $f'(x)=0$.

2- $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n x^{n-1}$

3- $h(x)=f(x)\mp g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)\mp g(x)$

4- $(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

5- $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x)\neq 0)$

Ör: $y=3x^2 \Rightarrow y'=6x$ (Burada $y'=\frac{dy}{dx}$)

Ör: $f(x)=x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+\frac{8}{3}x-5$

Ör: $f(x)=x^{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}.(x^{\sqrt{2}-1})$

Ör: $f(x)=x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{3}x^{-7/3}$

Ör: $f(x)=(x^2+1).(x^3+3) \Rightarrow f'(x)=2x.(x^3+3)+(x^2+1).3x^2$

Ör: $y(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3+1} \Rightarrow y'(t)=\dfrac{2t.(t^3+1)-(t^2-1).3t^2}{(t^3+1)^2}$

$$=\frac{2t^4+2t-3t^4+3t^2}{(t^3+1)^2}$$

$$=\frac{-t^4+3t^2+2t}{(t^3+1)^2}$$

Ön: $y=\dfrac{(x-1)\cdot(x^2-2x)}{x^4} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=?$

I. yol:

$$y=\frac{x^3-2x^2-x^2+2x}{x^4}=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x^2-6x+2)(x^4)-(x^3-3x^2+2x)\cdot 4x^3}{(x^4)^2}.$$

$$=\frac{3x^6-6x^5+2x^4-4x^6+12x^5-8x^4}{x^8}$$

$$=\frac{-x^6+6x^5-6x^4}{x^8}$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}.$$

İki ve Daha Yüksek Mertebeden Türevler.

2. mertebeden türev notasyonları:

$y=f(x)$ fonksiyonu için

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy'}{dx}=y''=D^2(f)(x)=D_x^2 f(x).$$

$y=f(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}(f(x))=D^n(f)(x)=D^ny$$

notasyonları ile gösterilir.

Ör: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?, \ \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

$y' = 12x - 10 + 10x^{-3}$, $y' = \frac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}$

$y'' = 12 - 30x^{-4}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

Ör: $y = (x^2+1).(x+5+\frac{1}{x})$, $y' = ?$

$y' = 2x.(x+5+\frac{1}{x}) + (x^2+1).(1-\frac{1}{x^2})$

$= 2x^2 + 10x + 2 + x^2 - 1 + 1 - \frac{1}{x^2}$

$= 3x^2 + 10x - \frac{1}{x^2} + 2.$

Ör: x değişkenine bağlı u ve v fonksiyonları $x=0$ noktasında türevlenebilir olsunlar ve $u(0)=5$, $u'(0)=-3$, $v(0)=-1$, $v'(0)=2$ ise.

a.) $\frac{d}{dx}(uv) = ?$ ($x=0$ noktasında)

$\left.\frac{d}{dx}(uv)\right|_{x=0} = u'(0).v(0) + u(0)v'(0) = -3.(-1) + 5.2 = 13$

b.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = ?$ ($x=0$ noktasında)

$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)\right|_{x=0} = \frac{u'(0).v(0) - u(0).v'(0)}{v^2(0)} = \frac{(-3).(-1) - 5.2}{(-1)^2}$

$= -7$

** x-ekseni boyunca hareket eden bir nesnenin t zamanın dahi pozisyonu $x=f(t)$ ise nesnenin o andahi

* hızı

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

ve o andaki ivmesi *

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

* Sürat: Hızın mutlak değeridir.

$$\text{Sürat}=|v(t)|=\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

* Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$f(x)=\tan x \rightarrow f'(x)=1+\tan^2x=\sec^2x=\frac{1}{\cos^2x}$$

$$f(x)=\cot x \rightarrow f'(x)=-(1+\cot^2x)=-\operatorname{cosec}^2x=-\frac{1}{\sin^2x}$$

$$f(x)=\sec x \rightarrow f'(x)=\sec x.\tan x$$

$$f(x)=\operatorname{cosec}x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec}x.\cot x.$$

örn: $y = x^2 - \sin x$, $y' = ?$

$$y' = 2x - \cos x$$

örn: $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$, $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x . (1 - \sin x) - \cos x . (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x - \sin x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{1 - \sin x}}{(1 - \sin x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

örn: $r = (1 + \sec\theta) . \sin\theta$, $\dfrac{dr}{d\theta} = ?$

$$\frac{dr}{d\theta} = \sec\theta . \tan\theta . \sin\theta + (1 + \sec\theta) . \cos\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\cos\theta} . \frac{\sin\theta}{\cos\theta} . \sin\theta + \left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \cos\theta + 1.$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \cos\theta$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta} + \cos\theta.$$

$$= \sec^2\theta + \cos\theta$$

Zincir Kuralı

Bir Bileşke Fonksiyonunun Türevi

$$(f\circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$$

Ör: $y=(3x^2+1)^2$, $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = 2.(3x^2+1).(6x)$$

Ör: $y=\left(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x}\right)^4$, $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = 4.\left(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x}\right)^3.\left(\frac{2x}{8}+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Ör: $y=\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-7}$, $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = -7\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-8}\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1-\frac{x}{7}\right)^{-8}$$

Ör: $y=\sin(x^2+x)$, $y'=?$

$$y' = \cos(x^2+x).(2x+1)$$

Ör: $g(t)=\tan(5-\sin 2t)$, $\frac{dg}{dt}=?$

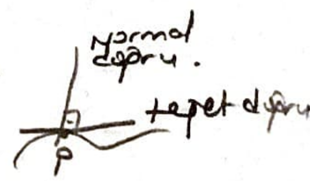
$$\frac{dg}{dt} = \sec^2(5-\sin 2t).(-2\cos 2t)$$

$$= -2\cos 2t \sec^2(5-\sin 2t)$$

Bir Eğrinin Teğet ve Normal Doğrusu

Bir $y=f(x)$ eğrisinin $P(x_0,y_0)$ noktasından geçen teğet doğrunun eğimi $m_T=f'(x_0)$ ve teğet doğru denklemi

$$\boxed{y-y_0=m_T(x-x_0)} \rightarrow \text{teğet doğru.}$$



dır.

Normal doğru denklemi

$$y-y_0=-\frac{1}{m_T}\cdot(x-x_0) \quad \text{yani} \quad y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

Ör: $y=\dfrac{1}{(1-2x)^3}$ eğrisine teğet her doğrunun eğiminin pozitif olduğunu bulunuz.

$$\frac{dy}{dx}=-3\cdot\frac{1}{(1-2x)^4}\cdot(-2)=\frac{6}{(1-2x)^4}>0 \quad \left(x\neq\frac{1}{2} \text{ için}\right)$$

Eğri üzerindeki her (x,y) noktasında teğet doğrunun eğimi pozitiftir.

Ör: $y=\tan\frac{\pi}{4}x$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$$y=\tan\frac{\pi}{4}x \Rightarrow y'=\left(\sec^2\frac{\pi}{4}x\right)\cdot\frac{\pi}{4}.$$

$$m_T = y'\big|_{(1,1)}=\left(\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$1+\tan^2\frac{\pi}{4}$

$$m_{T_1}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$(1,1)$ noktasında teğet doğru denklemi: $y-1=m_T(x-1)$

yani $\boxed{y-1=\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)}$ $\Rightarrow$ Teğet doğru denklemi

düzenlersek

$$y=\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi}{2}.$$

Normal doğru denklemi:

$(1,1)$ noktasındaki normal doğru

$$m_T=1 \Rightarrow m_T\cdot m_N=-1 \Rightarrow m_N=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

$$y-1=-\frac{2}{\pi}\cdot(x-1)$$

$\boxed{y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}+1.}$ $\rightarrow$ Normal doğru denklemi