

Döğal Logaritma ve Döğal Üstel Fonksiyon.

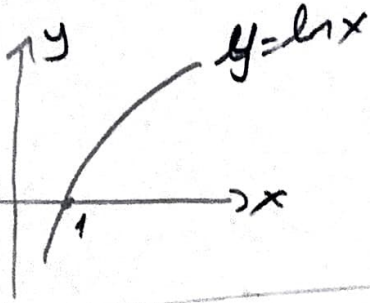
Tanımı: Döğal logaritma

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0.$$

formülüyle verilen bir fonksiyondur.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

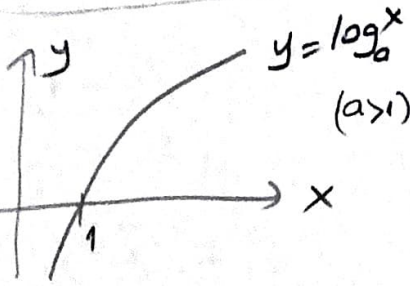
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



- * $x > 0$ için tanımlı.
- * fonksiyon artandır.
- * $f(x) = \ln x$ fonksiyonuna "Döğal Logaritma" denir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

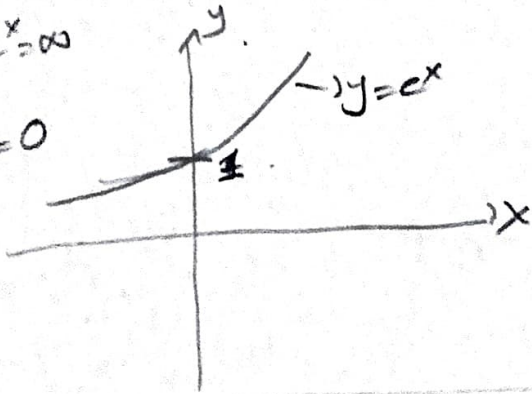
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$



- * $x > 0$ için tanımlı.
- * fonksiyon artandır.
- * $f(x) = \log_a x$ fonksiyonuna, "Genel logaritmik fonksiyon" denir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

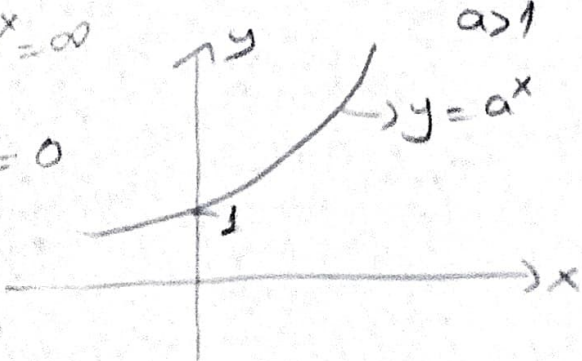
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



- * $\ln x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur yani $\ln^{-1} x = e^x$ dir.
- * $f(x) = e^x$ fonksiyonuna "Döğal üstel fonksiyon" denir.
- * fonksiyon artandır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



- * $\log_a x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur.
- * $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) fonksiyonuna "Genel üstel fonksiyon" denir.
- * fonksiyon artandır.

Özellikleri (Doğal Logaritma)

- ① $\ln e = 1$ ② $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ③ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
 ④ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ ⑤ $\ln x^r = r \ln x$ ⑥ $\ln e^x = x$
 ⑦ $\ln 1 = 0$

Teorim: $\frac{d}{dx} (\ln(u(x))) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Ör: Aşağıdaki fonksiyonların x 'e göre türevini hesaplayınız.

a.) $(\ln(x^2+3))' = \frac{2x}{x^2+3}$ b.) $(\ln 2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

Teorim: $\frac{d}{dx} (\ln|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

Ör: $\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \cdot \sin x)$

Ör: $\ln\left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \ln(x+1) - \ln(2x-3)$

Ör: $\ln \frac{1}{8} = \ln 1 - \ln 8 = -\ln 8 = -\ln 2^3 = -3 \ln 2$

Özellikleri: (Genel Logaritma)

- ① $\log_a a = 1$ ② $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ③ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
 ④ $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ ⑤ $\log_a x^r = r \log_a x$ ⑥ $\log_a a^x = x$ ⑦ $\log_a 1 = 0$
 ⑧ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Özellikler: (21stel Formüller)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} e^{\ln x} &= x \quad (x > 0) & \textcircled{3} x^n &= e^{n \ln x} \quad (x > 0) & \textcircled{5} \log_a x = y &\Rightarrow x = a^y \\ \textcircled{2} a^{\log_a x} &= x \quad (x > 0) & \textcircled{4} a^x &= e^{x \ln a} & \textcircled{6} \ln x = y &\Rightarrow x = e^y \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Ör: x için $e^{2x-6} = 4$ denklemini çözünüz

$$e^{2x-6} = 4 \Rightarrow \ln e^{2x-6} = \ln 4$$

$$2x - 6 = \ln 4 \quad \therefore$$

$$x = \frac{\ln 4 + 6}{2}$$

$$x = \frac{2 \ln 2 + 6}{2} = \ln 2 + 3$$

Deriveler:

$$\textcircled{1} (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \textcircled{2} (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \textcircled{3} (e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}$$

$$\textcircled{4} (e^x)' = e^x \quad \textcircled{5} (a^{f(x)})' = f'(x) a^{f(x)} \ln a$$

$$\textcircled{6} (\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

Ör: a.) $(5e^x)' = 5e^x$ b.) $(e^{\sin x})' = \cos x e^{\sin x}$
 c.) $(e^{-x})' = -e^{-x}$ d.) $(e^{\sqrt{3x+1}})' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} e^{\sqrt{3x+1}}$

** 07: $y = \frac{(x^2+1) \cdot (x+3)^{1/2}}{x-1}$, $x > 1$, $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\ln y = \ln \frac{(x^2+1) \cdot (x+3)^{1/2}}{(x-1)}$$

$$\ln y = \ln(x^2+1) \cdot (x+3)^{1/2} - \ln(x-1)$$

depotivieren

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \ln(x+3) - \ln(x-1)$$

$$\left(\frac{y'}{y} \right) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

$$y' = \frac{(x^2+1) \cdot (x+3)^{1/2}}{x-1} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2(x+3)} - \frac{1}{x-1} \right)$$

** 08: $f(x) = x^x$, $x > 0$, $f'(x) = ?$ ($y = f(x)$)

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

I. goal: $\ln y = x \ln x$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y \cdot (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

II. goal $y = x^x \Rightarrow y = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

$$y = e^{x \ln x} \Rightarrow y' = (x \ln x)' e^{x \ln x}$$

$$= \left(1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x}$$

$$= (\ln x + 1) \cdot \frac{e^{x \ln x}}{x^x} = x^x (\ln x + 1)$$

*** Bir Limit Olarak e sayısı

$$\textcircled{1} \quad e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

yada

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

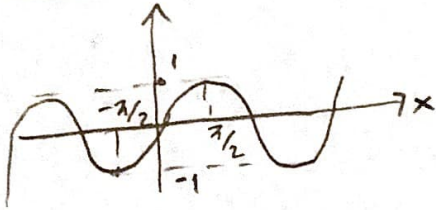
$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

yada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

* $y = \sin x$

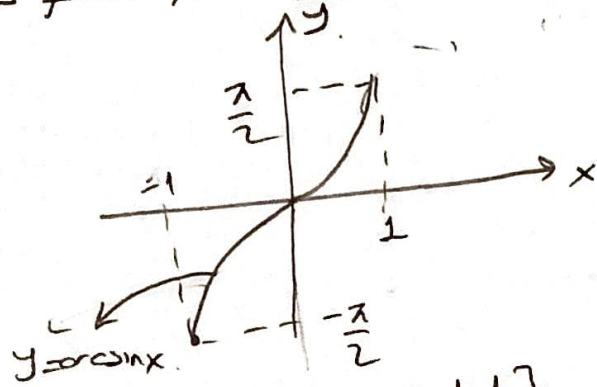


Tanım Kumesi: $(-\infty, \infty)$

Görüntü Kumesi: $-1 \leq y \leq 1$

* $y = \sin x$, bire-bir değildir.

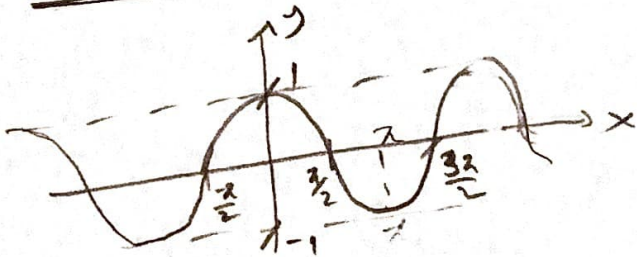
Eğer $y = \sin x$ fonksiyonunun, tanım kumesi: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alınrsa bire-bir olur ve ters fonksiyonu $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$ şeklindedir.



* Tanım Kumesi: $[-1, 1]$

* Görüntü Kumesi: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

* $y = \cos x$

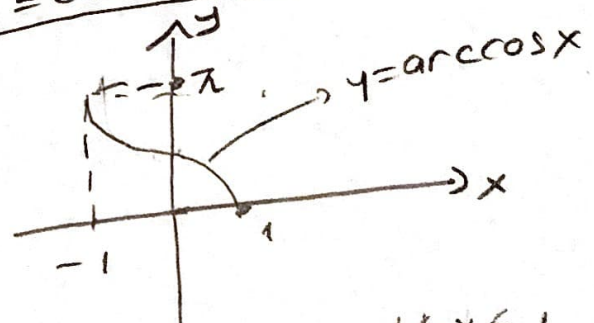


Tanım Kumesi: $(-\infty, \infty)$

Görüntü Kumesi: $[-1, 1]$

* $y = \cos x$, bire-bir değildir.

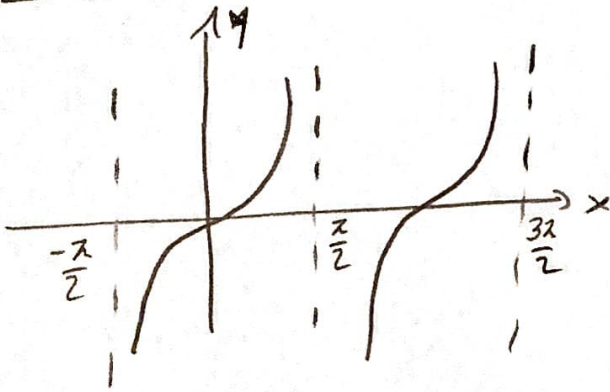
Eğer $y = \cos x$ fonksiyonunun, tanım kumesi: $[0, \pi]$ alınrsa, $y = \cos x$ fonksiyonu bire-bir olur ve ters fonksiyonu $y = \cos^{-1} x = \arccos x$ şeklindedir.



Tanım Kumesi: $-1 \leq x \leq 1$

Görüntü Kumesi: $0 \leq y \leq \pi$.

* $y = \tan x$

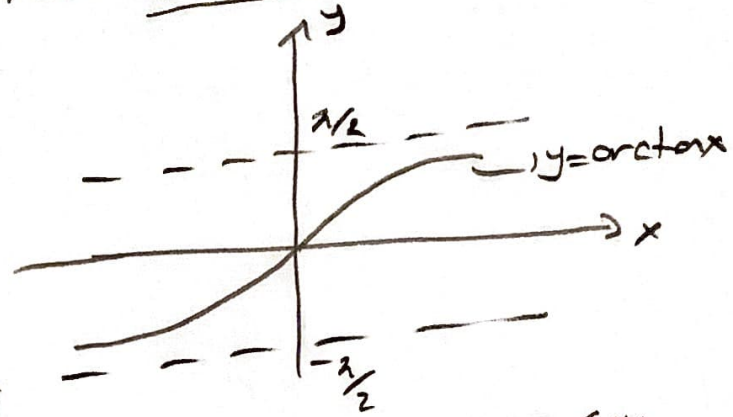


Tanım kumesi: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$

Görüntü kumesi: $(-\infty, \infty)$

$y = \tan x$ bire-bir değildir.

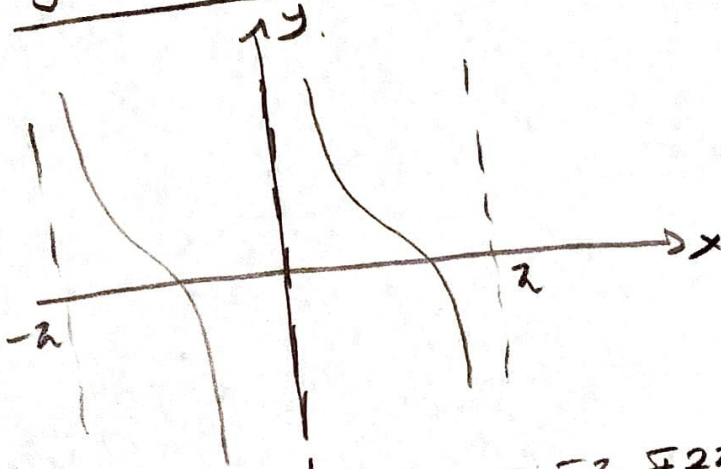
Eğer $y = \tan x$ fonksiyonunun tanım aralığı $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ alınırsa fonksiyon bire-bir olur ve tersi $y = \tan^{-1}x = \arctan x$ dir.



Tanım kumesi: $-\infty < x < \infty$

Görüntü kumesi: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

* $y = \cot x$

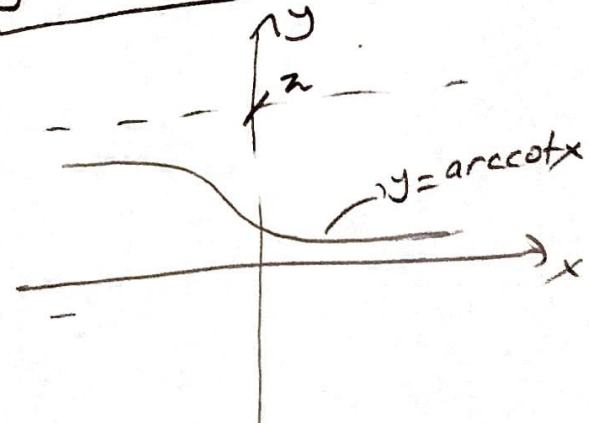


Tanım kumesi: $x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

Görüntü kumesi: $(-\infty, \infty)$

$y = \cot x$ bire-bir değildir.

Eğer $y = \cot x$ fonksiyonunun tanım aralığı $(0, \pi)$ alınırsa fonksiyon bire-bir olur ve ters fonksiyonu $y = \cot^{-1}x = \operatorname{arccot} x$ dir.



Tanım kumesi: $-\infty < x < \infty$

Görüntü kumesi: $0 < y < \pi$

NOT: * $y = \operatorname{arccosec} x$ fonksiyonunun tanım kümesi: $x \leq -1$ veya $x \geq 1$
 görüntü kümesi: $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

$y = \operatorname{arccosec} x$ fonksiyonunun tanım kümesi: $x \leq -1$ veya $x \geq 1$
 görüntü kümesi: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$ dir.

Tanım: * $y = \arcsin x$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin y = x$ olan sayıdır.

* $y = \arccos x$, $[0, \pi]$ aralığında $\cos y = x$ olan sayıdır.

Ör: $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\arccos(-\frac{1}{2})$ değerlerini hesaplayınız

$\arcsin x = y \Rightarrow \sin y = x$ dir

$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = a \Rightarrow \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$, $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = b \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$, $b \in [0, \pi]$

+

Ör:

x	y = arcsin x	y = arccos x
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$

x	y = arcsin x	y = arccos x
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Tanım: $y = \arctan x$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında $\tan y = x$ olan sayıdır.

* $y = \operatorname{arccot} x$, $(0, \pi)$ aralığında $\cot y = x$ olan sayıdır.

Ör: $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\arctan(-\sqrt{3})$ değerlerini bulunuz

$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = a \Rightarrow \tan a = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\arctan(-\sqrt{3}) = b \Rightarrow \tan b = -\sqrt{3} \rightarrow b = -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Ör:

x	y = arctan x
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$
0	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$

x	y = arctan x
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$

Özellikler:

i.) $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$

ii.) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

iii.) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

iv.) $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$$i.) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arcsin u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

$$ii.) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos u(x))' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$$

$$iii.) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arctan u(x))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

$$iv.) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} u(x))' = -\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

$$v.) (\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arcsec} u(x))' = \frac{u'(x)}{|u(x)| \cdot \sqrt{u^2(x)-1}}, \quad (|u| > 1)$$

$$vi.) (\operatorname{arccosec} x)' = \frac{-1}{|x| \cdot \sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arccosec} u(x))' = \frac{-u'(x)}{|u(x)| \cdot \sqrt{u^2(x)-1}}, \quad (|u| > 1)$$

Hiperbolik Fonksiyonlar

$$* \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, * \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Buradan } 2 \sinh x \cdot \cosh x = 2 \cdot \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \cdot \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$$

Hiperbolik Fonksiyonların Özellikleri:

$$* \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad * \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$* \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad * \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$* \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$* \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$* \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$* \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 2 \sinh^2 x + 1$$

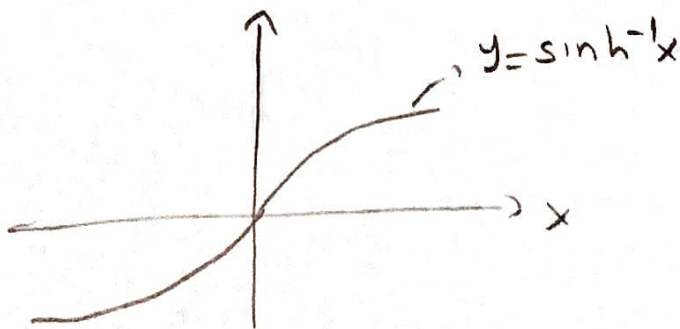
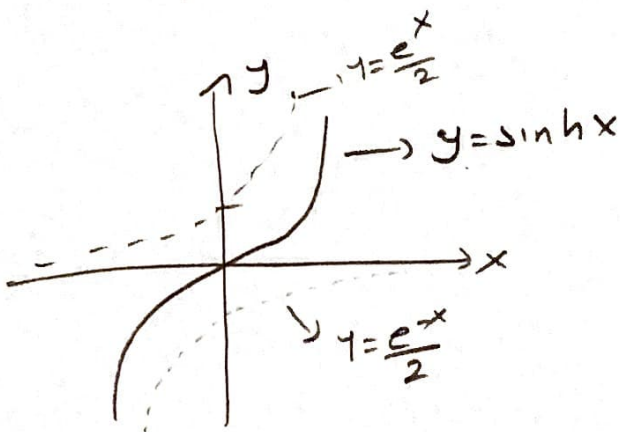
$$* \tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

$$* \coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$$

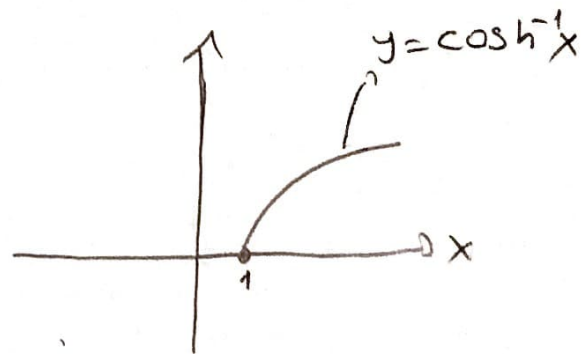
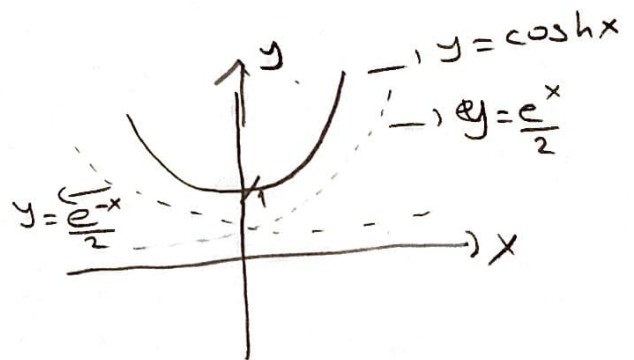
Hiperbolik Fonksiyonların Türetileri

$$\begin{aligned}
 (\sinh x)' &= \cosh x, & (\sinh u(x))' &= u'(x) \cosh u(x) \\
 (\cosh x)' &= \sinh x, & (\cosh u(x))' &= u'(x) \sinh u(x) \\
 (\tanh x)' &= \operatorname{sech}^2 x, & (\tanh u(x))' &= u'(x) \operatorname{sech}^2 u(x) \\
 (\coth x)' &= -\operatorname{cosech}^2 x, & (\coth u(x))' &= -u'(x) \operatorname{cosech}^2 u(x) \\
 (\operatorname{sech} x)' &= -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x \\
 (\operatorname{cosech} x)' &= -\operatorname{cosech} x \cdot \coth x
 \end{aligned}$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar



$$* y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y$$



$$* y = \cosh^{-1} x \Rightarrow x = \cosh y$$

$$* y = \tanh^{-1} x \Rightarrow x = \tanh y$$

$$* y = \coth^{-1} x \Rightarrow x = \coth y$$

$$* y = \operatorname{cosech}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{cosech} y$$

$$* y = \operatorname{sech}^{-1} x \Rightarrow x = \operatorname{sech} y$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonlar için İntegraller

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cosech}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri

$$i) (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\sinh^{-1} u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$$

$$ii) (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\cosh^{-1} u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$$

$$iii) (\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\tanh^{-1} u(x))' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}$$

$$iv) (\coth^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad (\coth^{-1} u(x))' = \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}$$

$$v) (\operatorname{sech}^{-1} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{sech}^{-1} u(x))' = \frac{-u'(x)}{u(x)\sqrt{1-u^2(x)}}$$

$$vi) (\operatorname{cosech}^{-1} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{cosech}^{-1} u(x))' = \frac{-u'(x)}{|u(x)|\sqrt{1+u^2(x)}}$$

Qn: $2 \cosh(\ln x) = ?$

$$2 \cosh(\ln x) = 2 \cdot \frac{(e^{\ln x} + e^{-\ln x})}{2}$$

$$= e^{\ln x} + e^{-\ln x}$$

$$= x + x^{-1}$$

$$= x + \frac{1}{x}$$

Qn: $y = \ln(\sinh x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{(\sinh x)'}{\sinh x}$$

$$y' = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$$

Qn: $y = \sinh(e^{\cosh x}) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \cosh(e^{\cosh x}) \cdot \sinh x \cdot e^{\cosh x}$$

Qn: $y = \operatorname{sech}(\ln(\cos x)) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = -\operatorname{sech}(\ln(\cos x)) \cdot \tanh(\ln(\cos x)) \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$\underline{\text{Ön:}} \tan(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{\text{Ön:}} \sec(\arccos\frac{1}{2}) = \sec(\frac{\pi}{3}) = 2$$

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\underline{\text{Ön:}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\text{Ön:}} \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{\text{Ön:}} \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccosec} x = 0$$

$$\underline{\text{Ön:}} y = \arcsin e^x \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$\underline{\text{Ön:}} y = \arccos(\ln \sin x) \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = \frac{-(\ln \sin x)'}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}} = \frac{-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}} = \frac{-\cot x}{\sqrt{1-\ln^2 \sin x}}$$

$$\underline{\text{Ön:}} y = \ln \arctan x \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = \frac{(\arctan x)'}{\arctan x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$$