3) a) $I = \int \dfrac{2x^3 - 8x^2 + 9x + 1}{x^2 - 4x + 4} dx = ?$ integralini hesaplayınız

*

Ç: $2x^3 - 8x^2 + 9x + 1 \;\big|\; x^2 - 4x + 4$

$\mp 2x^3 \pm 8x^2 \mp 8x \qquad 2x$

$x + 1$

$$I = \int \left[2x + \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} \right] dx$$

$$\frac{x+1}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Rightarrow x + 1 = A(x-2) + B$$

$x - 2$

$\boxed{A = 1}$ $\qquad -2A + B = 1$ $\qquad \boxed{B = 3}$

$$I = \int \left[2x + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right] dx$$

$$= x^2 + \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + c \;//$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = ?$ integralini hesaplayınız.

*

Ç: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ int. $x = 1$ için imp. int.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \to 1^-} -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^c$$

$$= -2 \lim_{c \to 1^-} \underbrace{\sqrt{1-c}}_{0} - \sqrt{1} = -2 \cdot -1 = 2 \;//$$

S 3.a) $y = \ln(\cos x)$ eğrisinin $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız. **(15p)**

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad 2$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/3} |\sec x|\, dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\, dx$$

$4 \qquad 2$

$$L = \ln|\sec x + \tan x|\,\Big|_0^{\pi/3} = \ln\left|\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right| - \ln|\sec 0 - \tan 0|$$

5

$$= \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 \quad 2$$

$$= \ln(2+\sqrt{3}) \text{ br}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x = 0$ daki sürekliliğini araştırınız.

(10p)

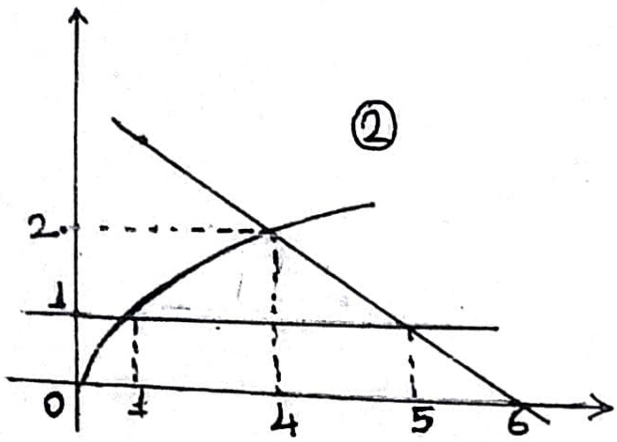
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1 \quad \text{olmalı.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2 \neq 1 = f(0)$$

$3 \qquad 3 \qquad 2$

olduğundan f, $x=0$ da sürekli değildir 2

S2. a) $y=\sqrt{x}$ eğrisi, $y=1$ ve $y=6-x$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını belirli integral ile hesaplayınız. (Şekil çiziniz). **(12p)**



$$\sqrt{x}=6-x$$

$$x^2-13x+36=0 \Rightarrow x=4, 9$$

$$1=6-x \Rightarrow x=5$$

$$1=\sqrt{x} \Rightarrow x=1$$

$$A=\int_1^4(\sqrt{x}-1)\,dx+\int_4^5(6-x-1)\,dx \quad 3 \quad 3$$

$$A=\left(\frac{2}{3}x^{3/2}-x\right|_1^4+\left(5x-\frac{x^2}{2}\right|_4^5 \quad 1 \quad 1$$

$$A=\left(\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+1\right)+\left(25-\frac{25}{2}-20+\frac{16}{2}\right)$$

$$A=\frac{13}{6}\ \text{br}^2 \quad 2$$

Veya

$$A=\int_1^2(6-y-y^2)\,dy$$

$$=6y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_1^2$$

$$=\left(12-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)-\left(6+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{13}{6}\ \text{br}^2$$

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ integralini hesaplayınız. **(13p)**

Verilen integral $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}=+\infty$ olduğundan improperdir

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \quad 3$$

2

$$=\lim_{a\to 0^+}\arcsin\frac{x-2}{2}\Big|_a^1 \quad 5$$

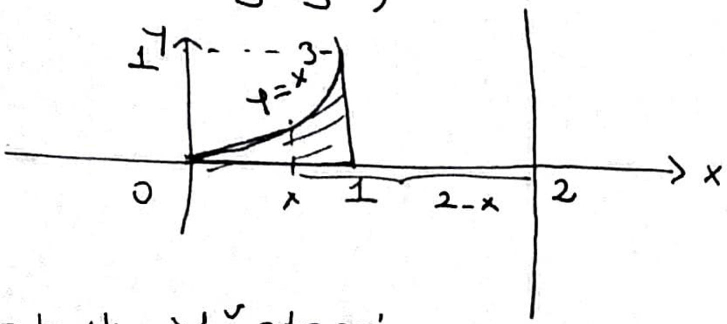
$$=\lim_{a\to 0^+}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{a-2}{2}\right) \quad 3$$

$$=-\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

- = -1-1. : eşitsizliğin

3) $y=x^3$ eğrisi, $x=1$, $y=0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz (Şekil çiziniz.)

Ç:



Kabuk Yöntemi

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)\cdot x^3\,dx = 2\pi \int_0^1 (2x^3 - x^4)\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \boxed{\frac{3\pi}{5}}\ br^3$$

Disk Yöntemi

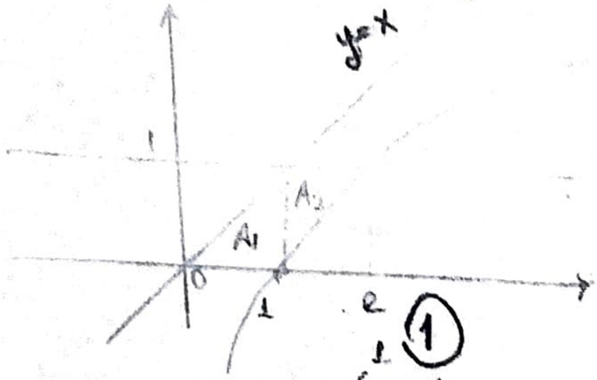
$$V_y = \pi \int_0^1 (2 - \sqrt[3]{y})^2\,dy - \pi\int_0^1 (2-1)\,dy$$

$$= \pi \int_0^1 (4 - 4\sqrt[3]{y} + y^{2/3})\,dy - \pi$$

$$= \pi\left[4y - \frac{4\cdot y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right]_0^1 - \pi = \pi\left[\frac{4}{1} - 3 + \frac{3}{5}\right] - \pi$$

$$= \frac{8\pi}{5} - \pi = \boxed{\frac{3\pi}{5}}\ br^3$$

a) $y=\ln x$ $y=0$ $y=x$ $y=1$ sınırladığı bölgenin alanını hesaplayınız



1.yol $A = \int_{y=0}^{1} (e^y - y)\,dy = \left(e^y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - e^0 = e - \frac{3}{2}$

1 1 3 4 3

2.yol : $A_2 = \int_{x=1}^{e} (1-\ln x)\,dx = \left[x - (x\ln x - x)\right]\Big|_1^e = e - \cancel{e\ln e} + \cancel{e} - 1 - 1$

1 1 3 3 2

$A_2 = e-2$

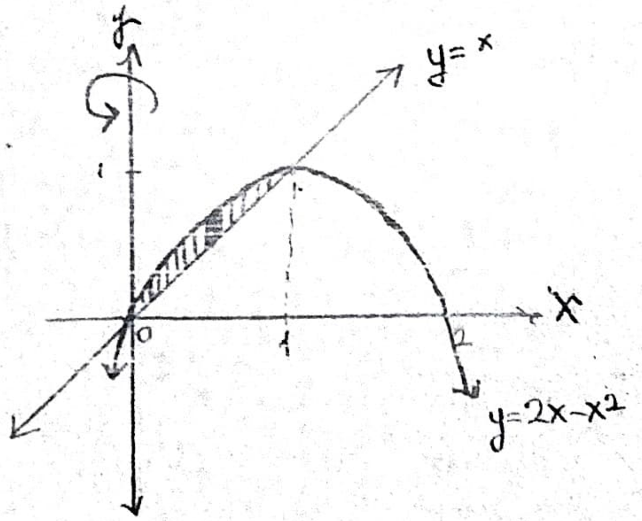
$A_1 = \frac{1}{2}$

$A = A_1 + A_2 = e - \frac{3}{2}$

2

---

b) $y = 2x - x^2$ eğrisi ile $y=x$ doğrusunun sınırladığı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini kabuk yöntemiyle hesaplayınız.



$V = 2\pi \int_0^1 x(2x - x^2 - x)\,dx$ 4

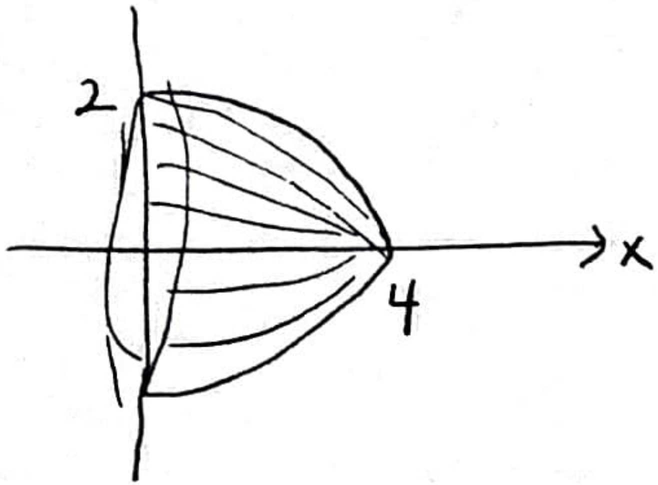
$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$ 4

$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$ 4

$= \frac{\pi}{6}$ 1

a) $y^2 = 4 - x$ parabolünün 1. bölgede kalan kısmının x_ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz (Şekil çiziniz)

Ç:



$$S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{\frac{17-4x}{4(4-x)}}\, dx$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^4 \cancel{\sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{17-4x}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{4-x}}}\, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^4 \sqrt{17-4x}\, dx$$

$$= \frac{-\pi}{6} \left[\sqrt{(17-4x)^3} \right]_0^4$$

$$= \frac{-\pi}{6}\left(1 - 17\sqrt{17}\right) = \frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{6}$$

$$y^2 = 4 - x \Rightarrow 2yy' = -1 \Rightarrow y' = -1/2y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \quad \Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{4(4-x)}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4(4-x)} = \frac{17-4x}{4(4-x)}$$

a) $\int \sqrt{1+e^x}\, dx = ?$

Ç: $\sqrt{1+e^x} = u^2 \Rightarrow e^x = u^2 - 1$

$e^x dx = 2u\, du$

$$I = \int \frac{\sqrt{u^2} \cdot 2u\, du}{u^2-1} = 2\int \frac{u^2}{u^2-1} du = 2\int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow A = 1/2 \quad B = -1/2$$

$$I = \int \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c$$

$$= 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c$$

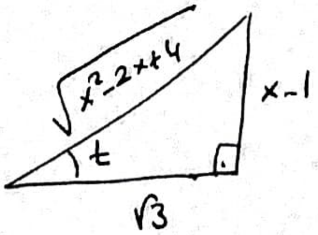
b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}} = ?$

Ç: $x^2-2x+4 = (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x-1 = \sqrt{3}\, tg\, t$

$dx = \sqrt{3} \sec^2 t\, dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t\, dt}{[3tg^2 t + 3]^{3/2}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3\cancel{\sqrt{3}}} \int \frac{\sec^{\cancel{2}} t\, dt}{\sec^{\cancel{3}} t} = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} + c \;//$$



YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU				
			1. S	2. S	3. S	4. S	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci Numarası		Grup No					
Bölümü	Matematik Bölümü		Sınav Tarihi	04/08/2013			
Dersin Adı	0251321 Matematik I Yıliçi Final Sınavı		Sınav Süresi	75 dk.	Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza				

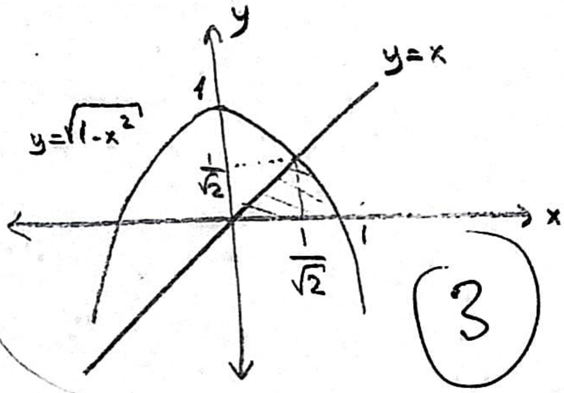
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

<u>Soru 1</u> $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi, $y=x$ ve $y=0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Ox ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz (Şekil çizilecek).

$x=\sqrt{1-x^2}$

$2x^2=1$ 4

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4



bak

3

+11

$$V=\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}(x)^2\,dx+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$ 15

$$=\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/\sqrt{2}}+\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$ 04

$$=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}=\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ 3

$$\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

Başarılar dilerim.

3-) $\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Cevap $u = 1+e^{x^2}$ dön. yap. $du = 2x.e^{x^2}dx$ veya

$\frac{du}{u-1} = 2x\,dx$ olup,

$$\int \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}} = \int \frac{du}{u(u-1)}$$

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

$$(A+B)u - A \equiv 1$$

$$A=-1,\ B=1$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= \ln|u-1| - \ln|u| + C$$

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{2x\,dx}{1+e^{x^2}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln(e^{x^2}) - \ln(1+e^{x^2})\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}} + \ln 2$$

$$= 0 + \ln 2 //$$