Dönel Cisimler: Disk Yöntemi

Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen katı cisme **dönel cisim** denir. Şekil 6.8'deki gibi katı cisimlerin hacimlerini bulmak için, sadece $A(x)$ dik-kesit alanının, $R(x)$ yarıçaplı diskin alanı olduğunu gözlemeliyiz; burada $R(x)$ düzlemsel bölgenin sınırının dönme eksenine uzaklığıdır. Bu durumda alan şöyledir;

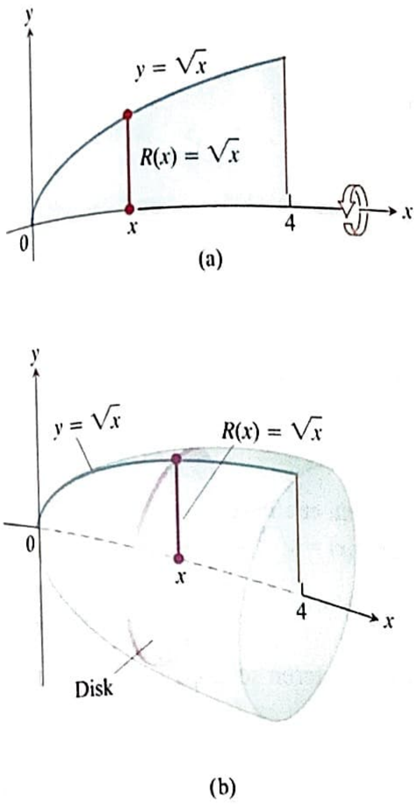
$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

O halde hacim tanımı;

x-ekseni etrafında dönen disk ile hacim

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$

Bir dönel katı cismin hacmini hesaplamanın bu yöntemine, dik-kesit $R(x)$ yarıçaplı bir dairesel disk olduğundan çoğunlukla **disk yöntemi** denir.



ŞEKİL 6.8 Örnek 4'teki bölge (a) ve dönel cisim (b).

ÖRNEK 4 $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ eğrisi ile x-ekseni arasındaki bölge, bir dönel cisim elde etmek için x-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bölgeyi, tipik yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren şekiller çizeriz (Şekil 6.8). Hacim şöyle bulunur;

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \qquad \text{x-ekseni etrafında dönerken yarıçap } R(x) = \sqrt{x}\text{'tir.} \\ &= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\bigg]_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

■

ÖRNEK 5 Aşağıdaki

$$x^2 + y^2 = a^2$$

çemberi bir küre elde etmek üzere x-ekseni etrafında döndürülüyor. Hacmini bulunuz.

Çözüm Kürenin x-eksenine dik düzlemlerle ince dilimlere kesildiğini düşünelim (Şekil 6.9). $-a$ ile a arasında tipik bir x noktasındaki dik-kesit alanı şöyledir;

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2). \qquad \text{x-ekseni etrafında dönerken } R(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\text{'dir.}$$

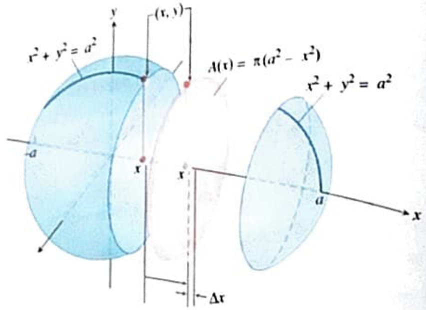
O halde hacim,

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

■

Aşağıdaki örnekteki dönme ekseni x-ekseni değildir, fakat hacmi hesaplama kuralı aynıdır: Uygun sınırlar arasında $\pi(\text{yarıçap})^2$'nin integralini hesaplayınız.

ÖRNEK 6 $y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasındaki bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.



ŞEKİL 6.9 $x^2+y^2=a^2$ çemberlerinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen küre. Yarıçap $R(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$'dir (Örnek 5).

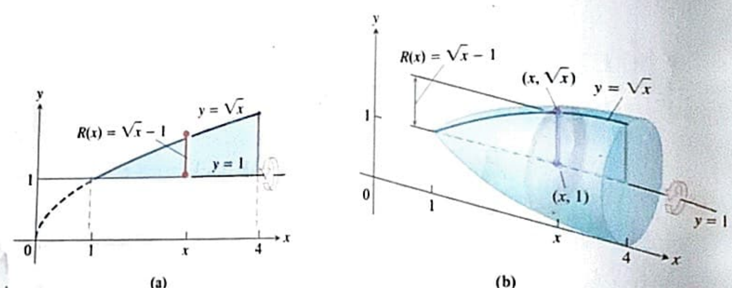
Çözüm Bölgeyi, tipik yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren şekil çizeriz (Şekil 6.10). Hacim şöyle bulunur;

$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \qquad \text{$y = 1$ etrafında dönmenin yarıçapı $R(x) = \sqrt{x}$ 'tir.}$$

$$= \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx \qquad \text{İntegrali genişletiniz.}$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \qquad \text{İntegral alınız.}$$

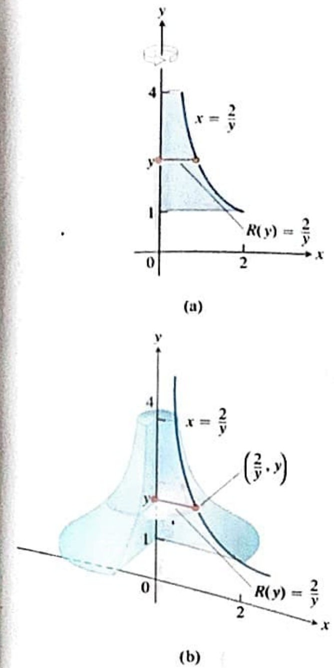


ŞEKİL 6.10 Örnek 6'daki bölge (a) ve dönel cisim (b).

y-ekseni ile bir $x = R(y)$, $c \le y \le d$ eğrisi arasında kalan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen bir dönel cismin hacmini bulmak için x yerine y yazarak aynı yöntemi kullanırız. Bu durumda, dairesel dik-kesit aşağıdaki gibidir;

$$A(y) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi[R(y)]^2.$$

Dolayısıyla hacim tanım şöyledir;



ŞEKİL 6.11 Örnek 7'deki bölge (a) ve dönel cisimin bir kısmı (b).

y-ekseni etrafında dönen disk ile hacim

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2\,dy.$$

ÖRNEK 7 y-ekseni ile $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$ eğrisi arasındaki bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bölgeyi, tipik yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren şekiller çizeriz (Şekil 6.11). Hacim şöyle bulunur;

$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,dy$$

$$= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \qquad \text{y-ekseni etrafında dönmenin yarıçapı $R(y) = \frac{2}{y}$'dır.}$$

$$= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi.$$

ÖRNEK 8 $x = y^2 + 1$ parabolü ile $x = 3$ doğrusu arasındaki bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle üretilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bölgeyi, tipik yarıçapı ve üretilen dönel cismi gösteren şekiller çizeriz (Şekil 6.12). Dik-kesitlerin $x = 3$ doğrusuna dik olduğuna dikkat ediniz. y-koordinatları $y = -\sqrt{2}$ 'den $y = \sqrt{2}$'ye değişir. Hacim aşağıdaki gibidir;

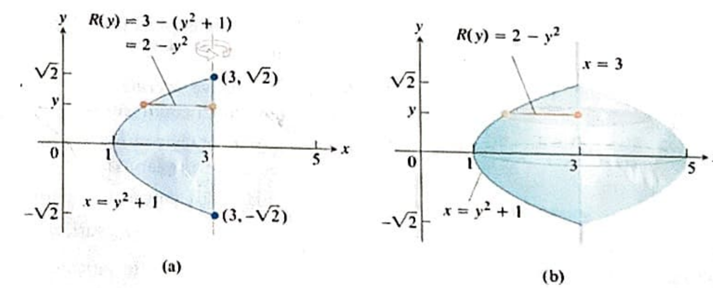
$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\,dy \qquad \text{$x = 3$ olduğunda $y = \pm\sqrt{2}$}$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\,dy \qquad \text{$x = 3$ ekseni etrafında dönmenin yarıçapı $R(y) = 3 - (y^2 + 1)$'dır.}$$

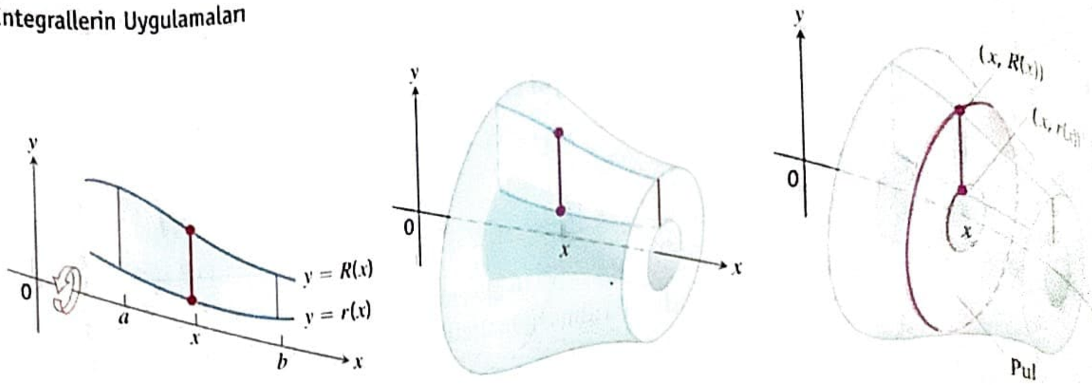
$$= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\,dy \qquad \text{İntegrali genişletiniz.}$$

$$= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \qquad \text{İntegral alınız.}$$

$$= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}.$$



ŞEKİL 6.12 Örnek 8'deki bölge (a) ve dönel cisim (b).



ŞEKİL 6.13 Burada üretilen dönel cisimlerin dik-kesitleri diskler değil pullardır, dolayısıyla $\int_a^b A(x)dx$ integrali biraz değişik bir formüle yol açar. .

Dönel Cisimler: Pul Yöntemi

Bir dönel cisim oluşturmak için döndürdüğümüz bölge dönme ekseninde bitmez veya dönme eksenini kesmezse dönel cismin içinde bir boşluk oluşur (Şekil 6.13). Dönme eksenine dik-kesitler disk yerine pul şeklindedir (Şekil 6.13'teki morumsu dairesel yüzeyler dir). Tipik pulun boyutları şöyledir;

Dış yarıçap: $R(x)$

İç yarıçap: $r(x)$

Pulun alanı aşağıdaki gibidir;

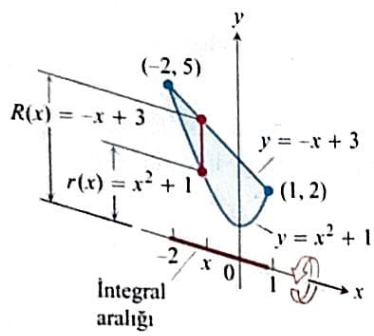
$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2.$$

Sonuç olarak, hacim tanımını aşağıdaki belirli integrali verir:

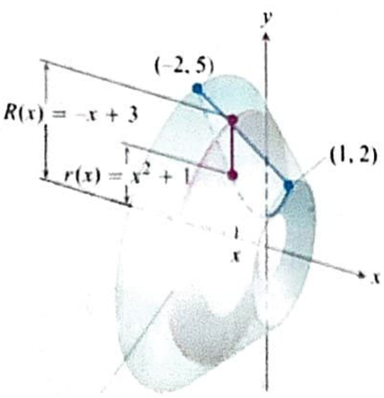
x-ekseni etrafında dönen pullar ile hacim

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$

Bir dönel cismin hacminin hesaplanması için kullanılan bu yönteme **pul yöntemi** denir çünkü ince dilim dış yarıçapı $R(x)$ ve iç yarıçapı $r(x)$ olan dairesel bir puldur.



(a)



Pul dik-kesiti
Dış yarıçap: $R(x) = -x + 3$
İç yarıçap: $r(x) = x^2 + 1$

(b)

ŞEKİL 6.14 (a) Örnek 9'da dönme eksenine dik bir doğru parçası tarafından taranan bölge. (b) Bölge x-ekseni etrafında döndürüldüğünde doğru parçası bir pul üretir.

ÖRNEK 9 $y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bu bölümün başında gördüğümüz gibi, katı bir cismin hacmini hesaplamak için dört adım kullanırız.

1. Bölgeyi çiziniz ve üzerine dönme eksenine dik bir doğru parçası ekleyiniz (Şekil 6.14a'daki kırmızı doğru parçası).
2. Doğru parçası bölgeyle birlikte x-ekseni etrafında döndürüldüğü durumda, taranan pulun iç ve dış yarıçaplarını bulunuz.

Bu yarıçaplar doğru parçasının uçlarının dönme eksenine uzaklıklarıdır (Şekil 6.14).

Dış yarıçap: $R(x) = -x + 3$

İç yarıçap: $r(x) = x^2 + 1$

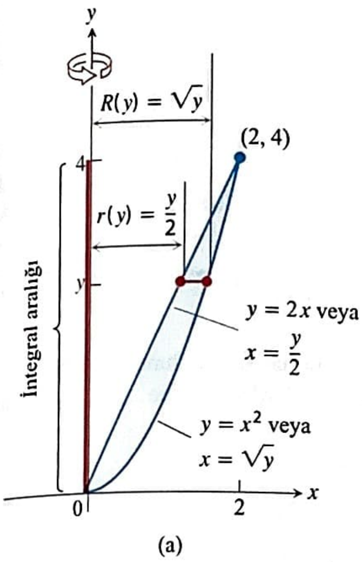
3. Şekil 6.14a'daki eğri ve doğrunun kesişim noktalarının x-koordinatlarını bularak integralin sınırlarını belirleyiniz.

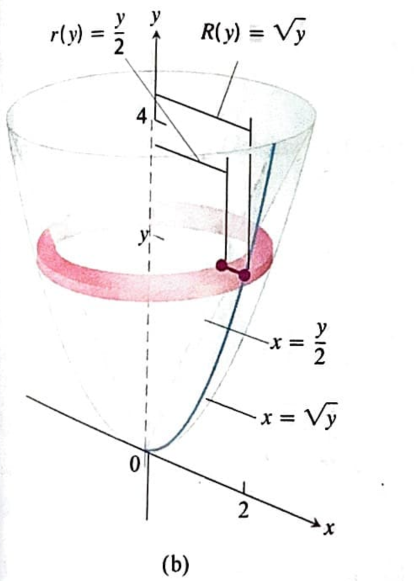
$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= -x + 3 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x + 2)(x - 1) &= 0 \\
x = -2, \quad x &= 1 \qquad \text{İntegralin sınırları}
\end{aligned}
$$

4. Hacim integralini hesaplayınız.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx && x\text{-ekseni etrafında dönme} \\
&= \int_{-2}^{1} \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2)\,dx && \text{Adım 2 ve 3'teki değerler} \\
&= \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx && \text{Cebirsel olarak sadeleştiriniz.} \\
&= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}
\end{aligned}
$$

■





ŞEKİL 6.15 (a) Örnek 10'daki y-ekseni etrafında döndürülen bölge, pulun yarıçapları ve integral sınırları. (b) (a)'daki doğru parçasının taradığı pul.

Bir bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşturulan katı bir cismin hacmini bulmak için Örnek 9'daki aynı işlemleri yaparız, ama x yerine y'ye göre integral alırız. Bu durumda tipik bir pulu tarayan doğru parçası y-eksenine (dönme ekseni) diktir ve pulun dış ve iç yarıçapları y'nin fonksiyonlarıdır.

ÖRNEK 10 Birinci dörtte bir bölgede $y = x^2$ parabolü ve $y = 2x$ doğrusuyla sınırlanan alan y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim oluşturuluyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Önce bölgeyi çiziniz ve bölge boyunca dönme eksenine (y-ekseni) dik bir doğru parçası ekleyiniz (Bkz. Şekil 6.15a).

Doğru parçasının taradığı pulun yarıçapları $R(y) = \sqrt{y}$ ve $r(y) = y/2$'dir (Şekil 6.15).

Doğru ve parabol $y = 0$ ve $y = 4$ noktasında kesişirler, dolayısıyla integralin sınırları $c = 0$ ve $d = 4$ olur. Hacmi bulmak için integral alırız:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy && y\text{-ekseni etrafında dönme} \\
&= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy && \text{İntegralin sınırlarını ve yarıçapları yerine yazınız.} \\
&= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

■

Kalınlık $\Delta x_k \to 0$ ve $n \to \infty$ için limit almak hacim integralini verir;

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x_k \\ &= \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)\, dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}. \end{aligned}$$

Şimdi Örnek 1'deki süreci genelleştirelim.

Kabuk Yöntemi

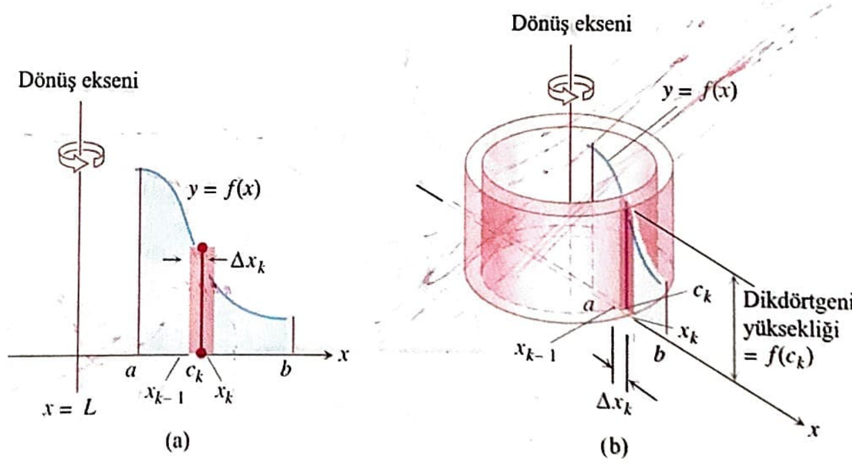
Negatif olmayan sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile sonlu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde x-ekseni tarafından sınırlı bölgenin $x = L$ dikey doğrusunun sağında kaldığını varsayalım (Şekil 6.19a). $a \geq L$ olduğunu kabul ediyoruz, dolayısıyla dikey doğru bölgeye dokunabilir fakat bölgenin içinden geçmez. Bu bölgeyi dikey L doğrusu etrafında döndürerek bir S cismi üretiriz.

P, $[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ noktaları ile bir bölünüşü ve c_k da $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının orta noktası olsun. Şekil 6.19a'daki bölgeye $[a, b]$ aralığının bu bölünüşü üzerine oturtulan dikdörtgenlerle yaklaşımda bulunuruz. Tipik bir yaklaşım dikdörtgeninin yüksekliği $f(c_k)$ ve genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$'dir. Bu dikdörtgen $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülürse Şekil 6.19b'deki gibi bir kabuğu süpürür. Geometriden bir formül dikdörtgen tarafından süpürülen kabuğun hacminin aşağıdaki gibi olduğunu söyler.

Dış yarıçapı R, iç yarıçapı r ve yüksekliği h olan silindirik kabuğun hacmi;

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = 2\pi\left(\frac{R + r}{2}\right)(h)(R - r)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= 2\pi \times \text{ortalama kabuk yarıçapı} \times \text{kabuk yüksekliği} \times \text{kalınlık} \\ &= 2\pi \, . \, (c_k - L) \, . \, f(c_k) \, . \, \Delta x_k \end{aligned}$$



ŞEKİL 6.19 (a)'da gösterilen bölge $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürüldüğünde silindirik kabuklara dilimlenebilen bir cisim üretilir. Tipik bir kabuk (b)'de gösterilmiştir.

P üzerinde oturtulan n tane dikdörtgenin süpürdüğü kabukların hacimlerini toplayarak S cisminin hacmine yaklaşırız:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k.$$

$\Delta x_k \to 0$ ve $n \to \infty$ iken bu Riemann toplamının limiti, cismin hacmini bir belirli integral olarak verir:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \int_a^b 2\pi \text{ (kabuk yarıçapı)(kabuk yüksekliği) } dx.$$

$$= \int_a^b 2\pi(x - L) f(x)\, dx.$$

İntegral değişkenini **kalınlık değişkeni** olarak ele alırız, burada x'tir. İntegrand için bir formül içeren ikinci integrali değil, kabuk *yönteminin* işleyişini vurgulamak için birinci integrali kullanırız. Bu, yatay bir L doğrusu etrafında döndürmelere de izin verir.

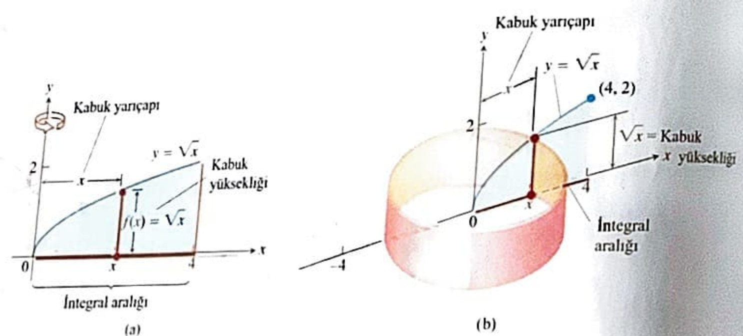
Dikey Bir Doğru Etrafında Dönme İçin Kabuk Formülü

Sürekli bir $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$ fonksiyonunun grafiği ile x-ekseni arasındaki bölgenin $x = L$ dikey doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi;

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dx.$$

ÖRNEK 2 $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge y-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bölgeyi çiziniz ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyiniz (Şekil 6.20a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme ekseninden uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyiniz. (Şekil 6.20b'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur).



ŞEKİL 6.20 (a) Örnek 2'deki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki düşey doğru parçasının süpürdüğü Δx genişliğindeki kabuk.

Kabuk kalınlığı değişkeni x'tir, dolayısıyla kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 4$'tür (Şekil 6.20). Bu durumda hacim şöyledir;

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}.$$

Şimdiye kadar dikey eksen etrafında dönmeyi kullandık. Yatay eksenler için x'ler ile y'lerin yerleri değiştirilir.

ÖRNEK 3 $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile çevrelenen bölge x-ekseni etrafında döndürülerek bir dönel cisim üretiliyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm Bu cisim Bölüm 6.1'deki Örnek 4'te disk yöntemi ile hacmi bulunan cisimdir. Hacmi şimdi kabuk yöntemiyle bulacağız. İlk olarak bölgeyi çiziniz ve bölge boyunca dönme eksenine *paralel* bir doğru parçası ekleyiniz (Şekil 6.21a). Doğru parçasının uzunluğunu (kabuk yüksekliği) ve dönme ekseninden uzaklığını (kabuk yarıçapı) belirleyiniz. (Şekil 6.21b'de kabuğu çizdik, fakat sizin bunu yapmanıza gerek yoktur)

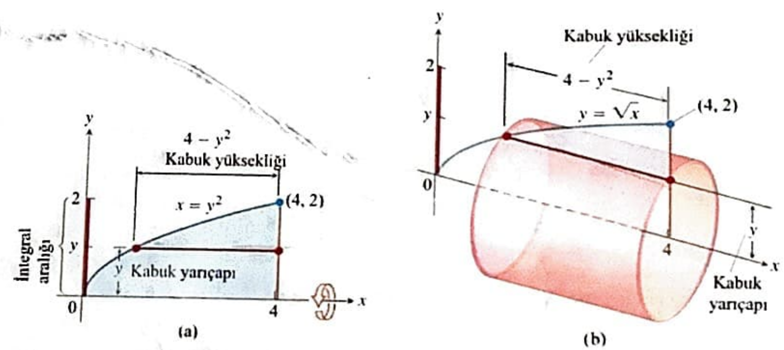
Bu durumda kabuk kalınlığı değişkeni y'dir, o halde kabuk formülünün integrasyon sınırları $a = 0$ ve $b = 2$'dir (Şekil 6.21'de y-ekseni üzerinde). Dönel cismin hacmi şöyledir;

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yarıçapı}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{kabuk}\\ \text{yüksekliği}\end{pmatrix} dy$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4y - y^3)\, dy$$

$$= 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$



ŞEKİL 6.21 (a) Örnek 3'deki bölge, kabuk boyutları ve integrasyon aralığı. (b) (a)'daki yatay doğru parçasının süpürdüğü Δy genişliğindeki kabuk.