Örnek: $a \in \mathbb{R}$ ve $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $V = \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde tanımlanan $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 - 1 \end{bmatrix}$ toplama ve $a \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + a - 1 \\ ax_2 - a - 1 \end{bmatrix}$ skalerle çarpma işlemi altında $(V, \oplus, \odot)$ bir vektör uzayı olduğuna göre

1-) $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemanı bulunuz.

2-) $\oplus$ " " $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ elemanının tersini bulunuz.

1-) $\forall\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + e_1 + 1 \\ x_2 + e_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 + e_1 + 1 = x_1 \rightarrow e_1 = -1$

$x_2 + e_2 - 1 = x_2 \rightarrow e_2 = 1$

2-) $\forall\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x^{-1} = \begin{bmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{bmatrix}$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_1^{-1} + 1 \\ x_2 + x_2^{-1} - 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_1^{-1} + 1 = -1 \rightarrow x_1^{-1} = -2 - x_1$

$x_2 + x_2^{-1} - 1 = 1 \rightarrow x_2^{-1} = 2 - x_2$

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} -2 - x_1 \\ 2 - x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Örnek: $W = \{ A \in M_{m\times n} \mid A^2 = A \}$ kümesinin $M_{m\times n}$ matris ~~uzayın~~ uzayının bir alt uzayı olup olmadığını araştırınız.

- $0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$
- $W \subset M_{m\times n}$
- $A, B \in W \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A^2 = A \\ B^2 = B \end{array}\right\} A+B \in W?$

$$(A+B)^2 \stackrel{?}{=} A+B$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$= A + AB + BA + B \neq A+B$$

olduğundan W, $M_{m\times n}$ nin alt uzayı değildir.

Örnek: $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a+b-2c=0,\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

kümesinin $\mathbb{R}_2^2$ uzayının bir alt uzayı olduğunu

gösteriniz. i-) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ olup $W \neq \emptyset$

ii-) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in W \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ olup $W \subset \mathbb{R}_2^2$

iii-) $\forall A, B \in W$ için $A+B \in W$ olduğu göst.

$A \in W \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_1+b_1-2c_1=0$

$B \in W \Rightarrow B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_2+b_2-2c_2=0$

$A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-2(c_1+c_2) \stackrel{?}{=} 0$

$\underbrace{(a_1+b_1-2c_1)}_{0} + \underbrace{(a_2+b_2-2c_2)}_{0} \stackrel{?}{=} 0$

$= 0$

$A+B \in W$ dur.

$\lambda A \in W$?

iv-) $\forall A \in W$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$A \in W \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_1+b_1-2c_1=0$

$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\underbrace{\lambda a_1+\lambda b_1-2\lambda c_1}_{} \stackrel{?}{=} 0$

$\lambda \underbrace{(a_1+b_1-2c_1)}_{0} = \lambda . 0 = 0$

$\lambda A \in W$ dur.

$\Rightarrow W$, $\mathbb{R}_2^2$ nin bir alt uzayıdır.

Örnek: W, tüm 3x3 mertebeli ters simetrik matrislerin kümesi olsun. W nun $M_{3\times3}$ uzayının bir alt uzayı olup olmadığını araştırınız.

$$W = \{ A \in M_{3\times3} \mid A^T = -A \}$$

i-) $A, B \in W \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = -A^T \\ B = -B^T \end{matrix}\right\}$ $A+B \overset{?}{\in} W$ olduğu gösterilmeli

$$A+B = -A^T - B^T = -(A^T + B^T) = -(A+B)^T$$

$(A+B)^T = -(A+B)$ olduğundan $\in W$ dur.

ii-) $c \in \mathbb{R}$ $(cA)^T = -cA$ olmalı.

$(cA)^T = cA^T = c(-A) = -cA$ $cA \in W$ dur.

$\Rightarrow$ W, $M_{3\times3}$ uzayının alt uzayıdır.

$0 \in W$ olduğundan $W \neq \emptyset$

$W \subset M_{3\times3}$