Örnek: $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a+b-2c=0,\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

kümesinin R_2^2 uzayının bir alt uzayı olduğunu gösteriniz. i-) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ olup $W \neq \emptyset$

ii-) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in W \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in R_2^2$ olup $W \subset R_2^2$

iii-) $\forall A, B \in W$ için $A+B \in W$ olduğunu göst.

$A \in W \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_1+b_1-2c_1=0$

$B \in W \Rightarrow B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_2+b_2-2c_2=0$

$A+B = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-2(c_1+c_2) \stackrel{?}{=} 0$

$\underbrace{(a_1+b_1-2c_1)}_{0} + \underbrace{(a_2+b_2-2c_2)}_{0} \stackrel{?}{=} 0$

$= 0$

$A+B \in W$ dur.

$\lambda A \in W$?

iv-) $\forall A \in W$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$A \in W \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $a_1+b_1-2c_1=0$

$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\lambda a_1 + \lambda b_1 - 2\lambda c_1 \stackrel{?}{=} 0$

$\lambda \underbrace{(a_1+b_1-2c_1)}_{0} = \lambda . 0 = 0$

$\lambda A \in W$ dur.

$\Rightarrow W$, R_2^2 nin bir alt uzayıdır.

b-) W alt uzayının bir bazını (tabanını) bulunuz. Boy W = ?

$\forall A \in W$ için $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ ve $a+b-2c=0$ dır.

Burada $a = 2c-b$ olduğundan

$$A = \begin{bmatrix} 2c-b & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabileceğinden W alt uzayı

$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi tarafından gerilir.

$d_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow d_1 = d_2 = 0$ l. bağımsızdır.

O halde W alt uzayının bir bazı S kümesi olup boy(W) = 2 dir.

veya; $a = 2c - b \rightarrow c = \frac{a+b}{2}$ yazılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a+b}{2} & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabileceğinden W alt uzayı

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi tarafından gerilir.

$$d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$d_1 = d_2 = 0$ L. bağsız.

O halde W alt uzayının bir bazı S kümesi olup boy(W) = 2 dir.

CamScanner ile tarandı

Örnek: W, tüm 3x3 mertebeli ters simetrik matrislerin kümesi olsun. W nun $M_{3\times3}$ uzayının bir alt uzayı olup olmadığını araştırınız.

$W = \{ A \in M_{3\times3} \mid A^T = -A \}$

i-) $A, B \in W \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = -A^T \\ B = -B^T \end{matrix}\right\}$ $A+B \overset{?}{\in} W$ olduğu gösterilmeli

$A+B = -A^T - B^T = -(A^T + B^T) = -(A+B)^T$

$(A+B)^T = -(A+B)$ olduğundan $\in W$ dır.

ii-) $c \in R$ $\quad (cA)^T = -cA$ olmalı.

$(cA)^T = cA^T = c(-A) = -cA$ $\quad cA \in W$ dır.

$\Rightarrow$ W, $M_{3\times3}$ uzayının alt uzayıdır.

$0 \in W$ olduğundan $W \neq \emptyset$

$W \subset M_{3\times3}$

Eğer alt uzay ise bu alt uzayın bazını ve boyutunu (tabanını) bulunuz.

$\forall A \in W$ matrisi için $A^T = -A$ olduğundan

$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ yazılabilir. $A = a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

W alt uzayı $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi tarafından üretilir.

S kümesi L. bağımsız olduğundan W'nin bazıdır. (tabanıdır)
Boy W = 3 dür.

Örnek: $W = \{ p(x) \in P_2 \mid p(1) = 0 \}$ kümesinin P_2 polinomlar uzayının bir alt uzayı olduğunu göst. W alt uzayının bir bazını (taban) ve boyutunu bulunuz.

[illegible] göstermeli

1-) $p(x) = 0$ polinomu için $p(1) = 0$ olacağından $p(x) \in W$ olup $W \neq \emptyset$

2-) $\forall\, p(x) \in W$ için $p(x) \in P_2$ olup $W \subset P_2$ dir.

3-) $P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $P_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$ için

$P_1(x) + P_2(x) \in W$?

$P_1(x) \in W \Rightarrow P_1(1) = 0$ yani $a_1 + b_1 + c_1 = 0$

$P_2(x) \in W \Rightarrow P_2(1) = 0$ " $a_2 + b_2 + c_2 = 0$

$$P_1(x) + P_2(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2$$
$$= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \text{ olup.}$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2)$$
$= 0$ olup. $P_1(x) + P_2(x) \in W$

4-) $\forall\, p(x) \in W$ ve $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda p(x) \in W$?

$p(x) = ax^2 + bx + c \in W \Rightarrow$ $p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$\lambda p(x) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c \Longrightarrow \lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a + b + c)$
$= \lambda 0 = 0$

$\lambda p(x) \in W$ W, P_2 nin altuzayı.

$\forall\, p(x) = ax^2 + bx + c \in W \Rightarrow p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
$\Rightarrow c = -a - b$

$p(x) = ax^2 + bx - (a + b) = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ yazılabildiğinden

W alt uzayı $\{x^2 - 1, x - 1\}$ kümesi ile üretilir.

$\alpha(x^2-1)+\beta(x-1)=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$ olup

$(x^2-1,\ x-1)$ sistemi li. bğsızdır.

$(x^2-1,\ x-1)$ sistemi W nın bir tabanıdır.

Boy $W=2$ dir.

3. Aşağıda verilen vektör uzaylarındaki alt kümelerin bir alt uzay olup-olmadıklarını belirleyiniz. Eğer alt uzay iseler birer tabanlarını bulup boyutlarını belirleyiniz.

a) (8p) M_{22} de (2. mertebeden reel matrisler uzayı),

$$T=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad=0, bc=0 \text{ ve } a,b,c,d \text{ birer reel sayı}\right\}$$

b) (17p) $\mathbb{R}^3$ de, $S=\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : b=a+c \text{ ve } a,b,c \text{ reel sayı}\right\}$

Çözüm

a) T alt kümesindeki $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin T$ dir. Çünkü,

$ad=1.1=1\neq 0$ dır. Şu halde, T alt kümesi M_{22} uzayının bir alt uzayı değildir.

b) Her k skaleri ve her $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} (b_1=a_1+c_1, b_2=a_2+c_2)$ vektörleri için,

i) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_1+c_1+a_2+c_2 \\ c_1+c_2 \end{bmatrix}\in S$ ve

ii) $k\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ kb_1 \\ kc_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ k(a_1+c_1) \\ kc_1 \end{bmatrix}\in S$

olduğundan S , $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır.

$\begin{bmatrix} a \\ a+c \\ c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eşitliğinden $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ kümesinin S yi gerdiği görülür.

Bu küme lineer bağımsızdır: $a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=0$, $\Rightarrow a=c=0$ dır. Buradan S nin bir tabanı olarak

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ alınabilir ve $boyS=2$ bulunur.

3) 3a) $M_{4\times1}$ vektör uzayında U ve V altkümeleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$U=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\middle|\ a=2b,\ c=3d\right\},\qquad V=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\middle|\ a+b=20,\ c+d=30\right\}.$$

U ve V nin $M_{4\times1}$ in alt uzayı olup olmadıklarını araştırınız. Eğer alt uzayı iseler, bu altuzaylara ait bir taban bulunuz ve boyutlarını belirleyiniz. (18p)

3b) $\overline{\alpha}=2\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}$ ve $\overline{\beta}=\overline{i}+2\overline{j}+4\overline{k}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme dik doğrultuda bir birim vektör bulunuz. (7p)

18

Çözüm:

3a) U **,** $M_{4\times1}$ **in bir alt uzayıdır:**

$$\forall\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{bmatrix}\in U \text{ ve } k\in\mathbb{R} \text{ için } \textbf{i) } (0,0,0)\in U\Rightarrow U\neq\varnothing$$

1

$$\textbf{ii) }\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{bmatrix}\in U\Rightarrow a_1=2b_1,\ c_1=3d_1 \text{ ve } a_2=2b_2,\ c_2=3d_2 \text{ olup}$$

$$a_1+a_2=2(b_1+b_2) \text{ ve } c_1+c_2=3(d_1+d_2)\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\c_1+c_2\\d_1+d_2\end{bmatrix}\in U$$

3

$$\textbf{iii) }k\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_1\\kb_1\\kc_1\\kd_1\end{bmatrix}\Rightarrow ka_1=2kb_1,\ kc_1=3kd_1 \text{ olduğundan } k\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix}\in U$$

3

$$\begin{bmatrix}2b\\b\\3d\\d\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix} \text{ olup } T=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\3\\1\end{bmatrix}\right\} \text{ kümesi } U \text{ nun bir bazıdır.}$$

3

U , $M_{4\times1}$ in **iki boyutlu** bir alt uzayıdır.

5

V **,** $M_{4\times1}$ **in bir alt uzayı değildir:**

$$\begin{bmatrix}10\\10\\15\\15\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\15\\0\\30\end{bmatrix}\in V \text{ fakat}$$

$$\begin{bmatrix}10\\10\\15\\15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\15\\0\\30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\25\\15\\45\end{bmatrix}\to\ \boxed{40\neq20}\ \ \boxed{60\neq30}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{bmatrix}\in V$$

$a_1+b_1=20$ $c_1+d_1=30$

$$\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\c_1+c_2\\d_1+d_2\end{bmatrix}\overset{?}{\in}V$$

$a_1+a_2+b_1+b_2\overset{?}{=}20$

$\underbrace{a_1+b_1}_{20}+\underbrace{a_2+b_2}_{20}=40\notin V$

6

3b) $\alpha=(2,-3,-1)$ ve $\overline{\beta}=(1,2,4)$ olmak üzere aranılan birim vektör $\gamma=\dfrac{\alpha\times\beta}{\|\alpha\times\beta\|}$ vektörüdür. O halde

1

4

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&-3&-1\\1&2&4\end{vmatrix}=-10i-9j+7k\ ,\quad \|\alpha\times\beta\|=\sqrt{100+81+49}=\sqrt{230} \text{ olup } \gamma=\frac{1}{\sqrt{230}}(-10i-9j+7k) \text{ elde}$$

1 1 2 2

edilir.

3) $W=\left\{A \in M_{3\times3} \mid A^T=-A\right\}$ kümesinin $M_{3\times3}$ matris uzayının bir alt uzayı olup-olmadığını araştırınız. Eğer alt uzay ise bu alt uzayın bir bazını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm:

12

i) $0 \in W$ olduğundan $W \neq \emptyset$.

ii) $W \subset M_{3X3}$

iii) $\forall A, B \in W$ için $A+B \in W$ olmalıdır.

$A \in W \Rightarrow A^T = -A$ yazılabilir.

$B \in W \Rightarrow B^T = -B$ yazılabilir.

7

$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ olduğundan $A+B \in W$.

iv) $\forall A \in W$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda A \in W$ olmalıdır.

$A \in W \Rightarrow A^T = -A$ yazılabilir.

5

$(\lambda A)^T = \lambda (A)^T = \lambda(-A) = -\lambda A$ olduğundan $\lambda A \in W$.

$\Rightarrow$ O halde W bir alt uzaydır.

5

13

$\forall A \in W$ matrisi için $A^T = -A$ olduğundan $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ yazılabilir. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ 3

2

olduğundan W alt uzayı $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi tarafından üretilir.

S kümesi lineer bağımsız olduğundan W' nin bir bazıdır. Boy $W = 3$ tür.

3