Yay Uzunluğu

Eğer $f'(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, $y=f(x)$ eğrisinin $A=(a,f(a))$ noktasından $B=(b,f(b))$ noktasına kadar olan uzunluğu (yay uzunluğu) aşağıdaki integralin değeridir

$$L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Ör: $f(x)=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2}-1$, $0\leq x\leq 1$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}x^{1/2}=2\sqrt{2}x^{1/2}$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{1+(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 \sqrt{1+8x}\,dx$$

$1+8x=u$

$8\,dx=du$

$$=\frac{1}{8}\int_1^9 \sqrt{u}\,du=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^9\right]$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 27-\frac{2}{3}\right]=\frac{52}{8\cdot 3}=\frac{13}{6}$$

ör: $f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$, $1\le x\le 4$.

eğrisinin uzunluğunu bulunuz

$$f'(x)=\frac{3x^2}{12}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$$

$$1+[f'(x)]^2=1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2=1+\frac{x^4}{16}-\frac{2\cdot\cancel{x^2}}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}+\frac{1}{x^4}$$

$$=1+\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x^4}{16}+\frac{1}{x^4}$$

$$=\frac{x^4}{16}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$L=\int_1^4\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\Big|_1^4=\frac{64}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+1$$

$$=\frac{72}{12}=6$$

* Eğer $g'(y)$ fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üzerinde sürekli olarak türevlenebiliyorsa, $x=g(y)$ eğrisinin $A=(g(c),c)$ den $B=(g(d),d)$ ye kadar uzunluğu

$$L=\int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

* Ör: $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ eğrisinin $x=0$ dan $x=2$ ye kadar olan uzunluğunu bulunuz.

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$ burada $x=0$ da türev tanımlı değildir. Bundan dolayı eğrinin uzunluğunu (*) dan bulacağız yani uzunluğu

$$L=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$ den bulacağız

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \Rightarrow y^{3/2}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y^{3/2} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot y^{1/2}=3\sqrt{y}$$

$x=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$, $x=2 \Rightarrow y=\left(\frac{2}{2}\right)^{2/3}=1 \Rightarrow y=1$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+(3\sqrt{y})^2}\,dy=\int_0^1\sqrt{1+9y}\,dy=\frac{1}{9}\int_1^{10}\sqrt{u}\,du=\frac{2u^{3/2}}{27}\Bigg|_1^{10}$$

$1+9y=u$, $y=1 \Rightarrow u=10$
$9.dy=du$, $y=0 \Rightarrow u=1$

$$=\frac{2}{27}\cdot(10\sqrt{10}-1)$$

Dönel Yüzeylerin Alanları

Tanım: Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $y=f(x)$ in grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanı aşağıdaki gibidir.

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Ör: $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle üretilen yüzeyin alanını bulunuz.

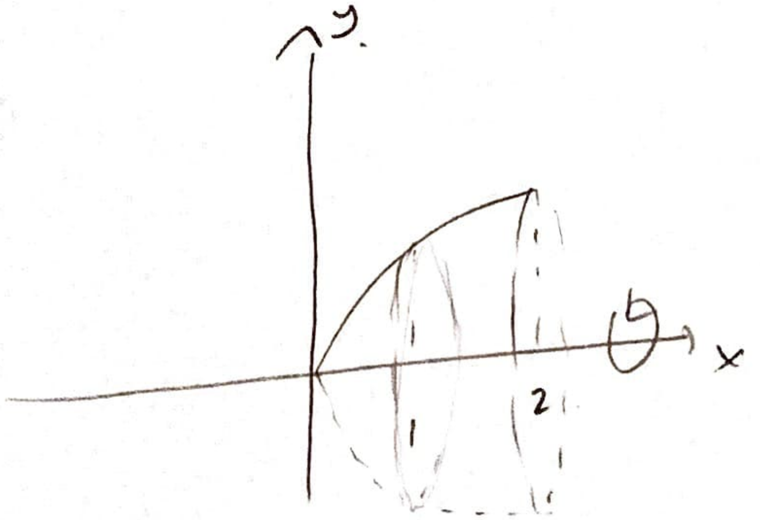
$$S = \int_1^2 2\pi . 2\sqrt{x} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = 4\pi . \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_1^2 \sqrt{1+x}\, dx$$

$$= 4\pi . \frac{2}{3} . (1+x)^{3/2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{8\pi}{3} . \left[(3)^{3/2} - (2^{3/2})\right]$$

$$= \frac{8\pi}{3} . \left[3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right]$$

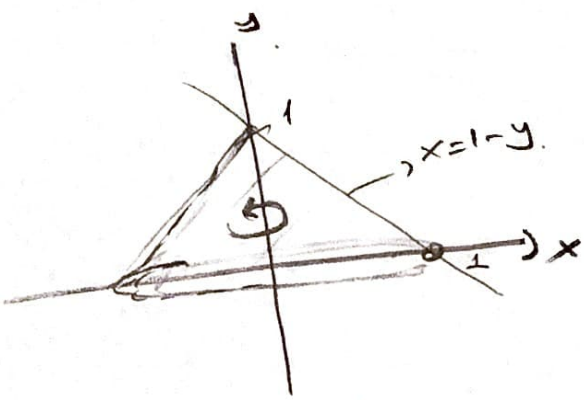


y-ekseni etrafında dönme

Eğer $x=g(y)\geq 0$, $[c,d]$ de sürekli olarak diferansiyellenebiliyorsa $x=g(y)$ eğrisinin y-ekseni etrafında döndürerek oluşan yüzeyin alanı.

$$S=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy.$$

Örnek: $x=1-y$, $0\leq y\leq 1$ doğru parçası y-ekseni etrafında döndürülerek koni üretiliyor. Yanal yüzey alanını bulunuz



$$S=\int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{1+(-1)^2}\,dy$$

$$=2\pi\sqrt{2}\cdot\int_0^1(1-y)\,dy=2\sqrt{2}\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$=2\sqrt{2}\pi\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\pi\sqrt{2}$$

Genelleştirilmiş İntegraller

Tanım: Sonsuz sınırlı integrallere I. tip Genelleştirilmiş integraller denir.

1. Eğer $f(x)$, $[a,\infty)$ aralığında sürekli ise, o halde

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

2. Eğer $f(x)$, $(-\infty, b]$ aralığında sürekli ise, o halde

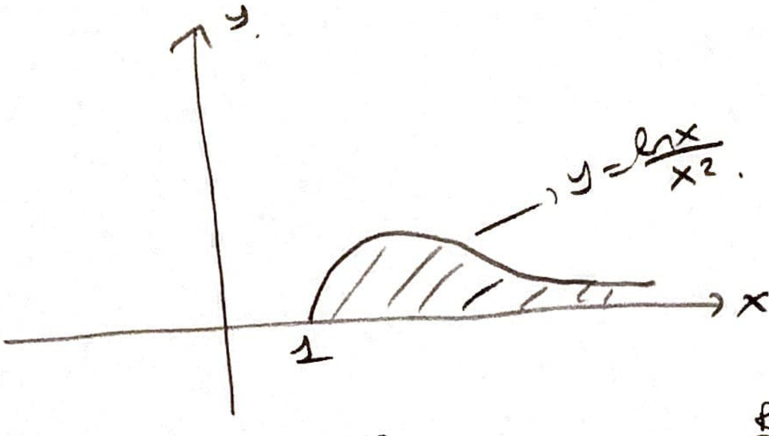
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx$$

3. Eğer $f(x)$, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ise, c herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

Her durumda limit sonlu bir genelleştirilmiş integrale yakınsaktır ve limit değeri genelleştirilmiş integralin genelleştirilmiş integral değeridir. Eğer limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır.

Ör: $y=\frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x=1$'den $x=\infty$'a kadar olan alan sonlu mudur? Sonlu ise değeri nedir?



$\ln x = u \;,\; \frac{1}{x^2}dx = dv$

$\frac{1}{x}dx = du \;,\; -\frac{1}{x} = v$

$$\text{Alan} = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R + \int_1^R \frac{1}{x^2}dx \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^R - \frac{1}{x}\Big|_1^R \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{\ln R}{R} + 0 - \left(\frac{1}{R} - 1\right) \right]$$

$$\frac{\infty}{\infty} \overset{LH}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{1/R}{1} = 0$$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{-\frac{\ln R}{R}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{R}}_{0} + 1$$

$$= 1$$

ör: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}}_{I_2.}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left[\arctan x \Big|_R^0\right]$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left[\underbrace{\arctan 0}_{0} - \arctan R\right]$$

$$= 0 - \arctan(-\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \left[\arctan x \Big|_0^R\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\arctan R - \underbrace{\arctan 0}_{0}\right]$$

$$= \arctan \infty$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ör: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ integrali yakınsarmı? yakınsarsa.

yakınsadığı değer nedir?

p nin herhangi bir değeri için

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p} \Big|_1^R \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(1-p)} \cdot \left[R^{1-p} - 1 \right]$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-p} \cdot \left[\frac{1}{R^{p-1}} - 1 \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

NOT

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p>1 \\ \infty, & p<1 \end{cases}$$

p>1 ise integral $\frac{1}{1-p}$ değerine yakınsar p<1 ise integral ıraksar. p=1 olduğunda integral ıraksar

⇓

NOT p=1

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \left[\ln|x| \Big|_1^R \right] = \lim_{R\to\infty} \left[\ln|R| - \ln 1 \right]$$

$$= \infty - 0$$

$$= \infty$$

Tanım: İntegrasyon aralığında bir noktada sonsuz olan fonksiyon integrallerine II. tip genelleştirilmiş integral adı verilir.

1.) Eğer $f(x)$, $(a,b]$ aralığında sürekli ve a'da süreksizse, o halde.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to a^+} \int_R^b f(x)\,dx$$

2.) Eğer $f(x)$, $[a,b)$ aralığında sürekli ve b'de süreksizse, o halde.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$$

3.) Eğer $f(x)$, $a<c<b$ iken c de süreksiz ve. $[a,c) \cup (c,b]$ de sürekli ise, o halde.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Her bir durumda eğer limit sonlu ise genelleştirilmiş integral yakınsar ve limit değeri genelleştirilmiş integralin değeridir. Eğer limit yoksa integral ıraksaktır.

Ör: $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ integrali yakınsak mıdır.

$[0,1)$ aralığında sürekli ve $x=1$ de süreksiz.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{dx}{1-x}$$

$$= \lim_{R\to 1^-} \left[-\ln|1-x| \Big|_0^R \right]$$

$$= \lim_{R\to 1^-} \left[-\ln|1-R| + \underbrace{\ln|1|}_{0} \right]$$

$$= \lim_{R\to 1^-} -\ln|1-R|$$

$$= -(-\infty)$$

$$= +\infty$$

limit sonsuz dur. Dolayısıyla integral ıraksaktır.

Ör: $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = ?$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{R \to 1^-} \int_0^R \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{R \to 1^-} \left[3(x-1)^{1/3} \Big|_0^R \right]$$

$$= \lim_{R \to 1^-} \left[\underbrace{3(R-1)^{1/3}}_{0} + 3 \right]$$

$$= 3$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{R \to 1^+} \int_R^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \left[3(x-1)^{1/3} \Big|_R^3 \right]$$

$$= \lim_{R \to 1^+} \left[3 \cdot 2^{1/3} - 3(R-1)^{1/3} \right] = 3\,2^{1/3}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$$