

Örn: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini türev tanımından hesaplayınız.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \sinh \cdot \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cosh - 1) + \sinh \cdot \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\cosh - 1}{\frac{h}{0}} + \underbrace{\frac{\sinh}{1}}_1 \cdot \cos x$$

$$= \cos x$$

Örn: $y = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini

hesaplayınız.

$$y = \frac{1}{1+x} \Rightarrow y = (1+x)^{-1} \quad y' = -1 \cdot (1+x)^{-2} \quad y'' = 2 \cdot (1+x)^{-3}$$

$$y''' = -2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4} \quad y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (1+x)^{-5}$$

$$\dots y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}$$

Kapalı Torkiyonlarda Türev

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \quad x^2 + xy^3 + y = 0, \quad y^2 - x = 0$$

$F(x, y) = 0$ şeklindeki bir fonksiyon için

$y = f(x)$ şeklinde yazamayabiliriz

Örn: $y^2 = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$(\frac{dy}{dx} =)$ y fonksiyon x 'e göre türev)

$$y^2 = x \Rightarrow 2y y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ve } y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. yol

$$y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ve } y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Örn: $(3, -4)$ noktasında $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin eğimini

bulunuz

I. yol $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x}{y}}$

$$m = y' \big|_{(3, -4)} = -\frac{3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

II. yol: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25-x^2} \rightarrow y = \sqrt{25-x^2} \times$
 $\rightarrow y = -\sqrt{25-x^2} \checkmark$

$$y' = -\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{3}{4}$$

Ün: $y^2 = x^2 + \sin(xy) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$ ($\frac{dy}{dx} = y'$)
 \downarrow
 y funktion
 x e pare treu.

$$2yy' = 2x + (xy)' \cdot \cos(xy).$$

$$2yy' = 2x + (y + xy') \cdot \cos(xy)$$

$$2yy' = 2x + y \cos(xy) + xy' \cos(xy).$$

$$2yy' - xy' \cos(xy) = 2x + y \cos(xy).$$

$$y' \cdot (2y - x \cos(xy)) = 2x + y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}.$$

Ün: $y^6 - y - x^3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$ ($\frac{dy}{dx} = y'$)

$$6y^5y' - y' - 3x^2 = 0.$$

$$y' \cdot (6y^5 - 1) - 3x^2 = 0$$

$$y' \cdot (6y^5 - 1) = 3x^2$$

$$y' = \frac{3x^2}{6y^5 - 1}.$$

0n: $x^2y - xy^3 + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$ $\left(\frac{dy}{dx} = y'\right)$
 (fonksiyon x'e göre turev)

+e göre turev
 $x^2y - xy^3 + \sin(x+y) = 0$

$2x \cdot y + x^2y' - y^3 - x \cdot 3y^2y' + (x+y)' \cdot \cos(x+y) = 0$

$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + (1+y') \cdot \cos(x+y) = 0$

$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + \cos(x+y) + y' \cos(x+y) = 0$

$2xy - y^3 + \cos(x+y) + (x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y))y' = 0$

$y' = - \frac{2xy - y^3 + \cos(x+y)}{x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y)}$

0n: $y = \sin(x+y) \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

+e göre turev
 $y = \sin(x+y)$

$y' = (x+y)' \cos(x+y)$

$y' = (1+y') \cos(x+y)$

+e göre turev
 $y'' = y'' \cos(x+y) + (1+y') \cdot (x+y)' \cdot (-\sin(x+y))$

$y'' = y'' \cos(x+y) - (1+y')^2 \sin(x+y)$

$y'' = \frac{(1+y')^2 \sin(x+y)}{-1 + \cos(x+y)}$

Ön: $x + \tan(xy) = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$x + \tan(xy) = 0$$

$$1 + (xy)' \cdot (1 + \tan^2(xy)) = 0$$

$$1 + (y + xy') \cdot \underbrace{(1 + \tan^2(xy))}_{\sec^2(xy)} = 0$$

$$1 + (y + xy') \cdot \sec^2(xy) = 0$$

$$1 + y \sec^2(xy) + xy' \sec^2(xy) = 0$$

$$xy' \sec^2(xy) = -(1 + y \sec^2(xy))$$

$$y' = - \frac{(1 + y \sec^2(xy))}{x \sec^2(xy)}$$

$$y' = - \frac{(\cos^2(xy) + y)}{x}$$

* Normal doğruları: Teğet doğrusuna dik doğrulardır.

Ör: $(2,4)$ noktasının $x^3+y^3-9xy=0$ eğrisi üzerinde bulunduğunu gösteriniz. Eğrinin teğet ve normal doğrusunu bulunuz.

$$8 + 64 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 0 \rightarrow (2,4) \text{ noktası eğri üzerinde}$$

teğet için

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 9y - 9xy' = 0$$

$$(3y^2 - 9x)y' = 9y - 3x^2$$

$$y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

$$m_T = y'|_{(2,4)} = \frac{3 \cdot 4 - 2^2}{4^2 - 3 \cdot 2} = \frac{12 - 4}{16 - 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{5}{4}$$

Teğet doğru denklemi: $(2,4)$ noktasından geçen eğimi $m_T = \frac{4}{5}$ olan doğru.

$$y - 4 = \frac{4}{5} \cdot (x - 2)$$

$$\boxed{y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}}$$

Normal doğru denklemi: $(2,4)$ noktasından geçen eğimi $m_N = -\frac{5}{4}$ olan doğru

$$y - 4 = -\frac{5}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}}$$

Lineerleştirme: Eğer f fonksiyonu $x=a$ noktasında türevlenebilir ise o noktadaki yaklaşımlar fonksiyonu

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirilmesi olarak tanımlanır. f in L ile

$$f(x) \approx L(x)$$

yaklaşımına f fonksiyonunun a noktasındaki lineer yaklaşımı denir. $x=a$ noktasına da bu yaklaşımın merkezi denir.

Örn: $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonunun $x=0$ daki

lineerleştirmesini bulunuz.

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0)$$

$$L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

Örn: $(1,001)^5 - 3 \cdot (1,001)^{3/2} + 2$ değerini lineerleştirme yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2.$$

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2}, \quad f'(1) = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

$$L(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x-1)$$

$$L(x) = 0 + \frac{1}{2} \cdot (x-1)$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-1)$$

$$f(x) \approx L(x).$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} (x-1)$$

$$f(1,001) \approx \frac{1}{2} \cdot (1,001 - 1)$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot (0,001)$$

$$\approx 0,0005$$

Diyelimiz; $y=f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir, ve dy diferansiyeli

$$dy = f'(x)dx$$

ile tanımlanır.

Ön: $y = x^5 + 37x$ için a) dy diferansiyelini hesaplayınız

$$dy = f'(x)dx, \quad f'(x) = 5x^4 + 37.$$

$$dy = (5x^4 + 37)dx$$

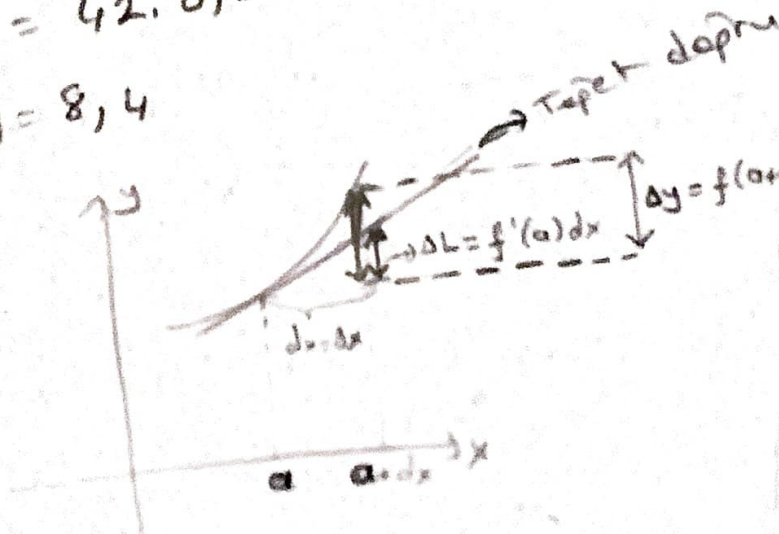
b.) $x=1$ ve $dx=0,2$ için $dy=?$

$$dy = (5 + 37) \cdot (0,2)$$

$$dy = 42 \cdot 0,2$$

$$dy = 8,4$$

* NOT



* Geometrik olarak $x=a$ noktasının $dx=\Delta x$ kadar değişmesi durumunda $f(x)$ 'in lineerleşmesi de meydana gelen ΔL değişimi dy diferansiyeldir.

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\Delta L = L(a+dx) - L(a) = f(a) + f'(a)(a+dx-a) - f(a) = f'(a)dx$$

Ön: $(1,001)^5 - 3 \cdot (1,001)^{3/2} + 2$ değerini diferansiyel ile yaklaşık olarak hesaplayınız

$$f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2, \quad f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2}, \quad f'(1) = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\Delta f \approx df} \quad (\Delta y \approx dy)$$

$$\boxed{f(x+dx) - f(x) \approx df.}$$

$$f(x+dx) \approx f(x) + df$$

$$(df = f'(x)dx)$$

$$(dy = y' \cdot dx.)$$

$$f(\underbrace{1}_{x} + \underbrace{0,001}_{dx}) \approx f(1) + df$$

$$(df = f'(1) \cdot 0,001)$$

$$df = \frac{1}{2} \cdot 0,001$$

$$= 0,0005$$

$$f(1,001) \approx 0 + 0,0005$$

$$f(1,001) \approx 0,0005$$

Artan/Azalan Fonksiyonlar

$f(x)$, $[a, b]$ de sürekli, (a, b) de türevli olsun.

- * $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$, $[a, b]$ de artandır.
- * $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$, $[a, b]$ de azalandır.

Ör: $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$ fonksiyonunun artan/azalan olduğunu aralıklarla bulunuz

$$f'(x) = 12x - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 3x - x^3 = 0$$

$$(3 - x^2) \cdot x = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x = \pm\sqrt{3} & x = 0 \end{matrix}$$

x	-√3	0	√3
f'(x)	+	-	+
	↗	↘	↗

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}] \Rightarrow$ artan

$[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty) \Rightarrow$ azalan

Ör: $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$ fonksiyonunun artan/azalan olduğunu aralıklarla bulunuz.

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 0$$

$$x^2 - 4x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x=0 & x=3 & x=1 \end{matrix}$$

x	0	1	3
f'(x)	+	+	-
	↗	↗	↘

artan artan azal artan

$$x^2(x-3)(x-1) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x=0 & x=3 & x=1 \end{matrix}$$

(0,1) artan
(1,3) azal
(3,∞) artan

Test Fonksiyonları ve Testleri

Test: D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonu D tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur deriz.

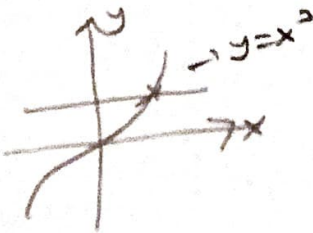
Örn: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu negatif olmayan sayılardan oluşan herhangi bir tanım kümesi üzerinde bire-bir dir çünkü

$$x_1 \neq x_2 \text{ iken } \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} \text{ olur.}$$

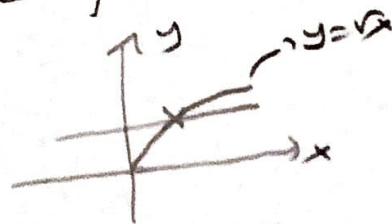
Örn: $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında bire-bir değildir çünkü $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ dur.

* Bire-bir fonksiyonları test için yatay doğru testi

* $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere keerse bire-bir dir



bire-bir dir



bire-bir değildir



bire-bir değildir



bire-bir değildir

** Bir fonksiyon bir I aralığında biye-biye ise.
 O aralığa astar veya azalandır.

Ters Fonksiyon: f 'nin D tanım kümesi
 üzerinde görüntü kümesi R olan biye-biye
 bir fonksiyon olduğunu varsayalım ters
 fonksiyon f^{-1} şöyle tanımların

Eğer $f(b)=a$ ise $f^{-1}(a)=b$ dir
 f^{-1} 'in tanım kümesi R ve görüntü kümesi: D dir

Ters Fonksiyonu Bulma

Örn. $y = \frac{x}{2} + 1$ fonksiyonunun tersini x in bir
 fonksiyonu olarak bulunuz

1. adım: x 'i y cinsinden göz

$$x = 2y - 2.$$

2. adım: x ' ve y 'i y e değiştir

$$y = 2x - 2.$$

Buna göre $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(x) = 2x - 2 \text{ dir.}$$

$$\text{NOT: } \left. \begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x \\ (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(2x - 2) = \frac{2x - 2}{2} + 1 = x \end{aligned} \right\} \checkmark$$

Çes Türevlerler için Çes Kuralı

Eğer f nin tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ varsa ve hiç sıfır olmuyorsa, f^{-1} tanım kümesinin (f nin görüntü kümesi) her noktasında türevlenebilir ve türevi

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dir.

* f^{-1} in tanım kümesindeki bir b noktasındaki $(f^{-1})'$ değeri: ($f^{-1}(b) = a$ olmak üzere)

$$f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$$

$$** (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$$

dir.

Örn: $f(x) = x^2$ ($x > 0$) $\Rightarrow f'(x) = ?$

I. yol: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y = \sqrt{x}$
 \downarrow
 $f(x) = x^2$ \downarrow $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. yol: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

($f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.)

Ör: $f(x) = x^3 - 2$ için $f^{-1}(x)$ için formül bulma-
da $(f^{-1})'(6)$ değeri bulunuz.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(b)}_a)} = \frac{1}{f'(a)} \quad \begin{cases} \text{Buradan} \\ f(a) = b \\ f^{-1}(b) = a \text{ dir} \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \begin{aligned} 6 &= x^3 - 2 \\ 8 &= x^3 \\ \boxed{+2 = x} \end{aligned}$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)},$$

$$f(x) = x^3 - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{12}.$$