Artan / Azalan fonksiyonlar

T12

$f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevli olsun.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ $[a,b]$ de artandır.

* $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ " $f(x)$ $[a,b]$ de azalandır.

---

* $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıklar?

$f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \qquad x = 0 \quad x = \mp\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}] \rightarrow$ artan

$[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, \infty) \rightarrow$ azalan

(Not: Aralıkları açık aralık olarak da yazabiliriz!)

---

* $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$ artan/azalan old. aralıklar?

$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 15x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \qquad \boxed{x=0}$ Ç.K.K. $\boxed{\begin{matrix} x=3 \\ x=1 \end{matrix}}$

x	$-\infty$		0		1		3	
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$(-\infty, 1) \cup (3, \infty) \rightarrow$ Artan

$(1, 3) \rightarrow$ Azalan

(Not

Ters fonksiyonlar ve Türevleri:

Bire-bir fonksiyon:

D tanım kümesinde $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonu D tanım kümesinde bire-bir fonksiyondur denir.

* $y=f(x)$ in grafiği her yatay doğruyu ancak ve ancak en fazla bir kere keserse bire-birdir.

* Bir fonksiyon bir I aralığında bire-bir ise o aralıkta artan veya azalandır.

Ters fonksiyon:

f, D tanım kümesi üzerinde görüntü kümesi R olan bire-bir bir fonk. olsun. Ters fonksiyon f^{-1} şöyle tanımlanır:

eğer $f(b)=a$ ise $f^{-1}(a)=b$ dir.

f^{-1} nin tanım kümesi R, görüntü kümesi D dir.

Özellikler:

① $y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$

② f^{-1} nin tanım kümesi, f in değer kümesidir.

③ " " değer " , " " tanım "

④ $f^{-1}(f(x))=x$, $f(f^{-1}(x))=x$ dir.

⑤ $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ dir.

⑥ f ve f^{-1} nin grafikleri $x=y$ doğrusuna göre simetriktirler.

Ters fonksiyonu Bulma:

$f(x)$ den $f^{-1}(x)$ i bulmak için:

① $y=f(x)$ den x çözülür. Yani $x=f^{-1}(y)$ bulunur.

② y ile x yer değiştirilir, $y=f^{-1}(x)$ oluşturulur.

Ters fonksiyonun Türevi:

Eğer f in tanım kümesi I ise ve I üzerinde $f'(x)$ varsa ve hiç 0 olmuyorsa, f^{-1} tanım kümesinin her noktasında (f in görüntü kümesinde) türevlenebilirdir; ve türevi

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ dir.}$$

☆ $a = f^{-1}(b)$ için $(f(a) = b)$

☆ $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$ ☆

İspat:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x)).(f^{-1}(x))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

⊛ $f(x) = x^2 \quad (x>0) \Rightarrow (f^{-1}(x))' = ?$

I. Yol

$$x^2 = y \to x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. Yol

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 2x$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

⊛ $f(x) = x^3 - 2$ olsun. $f^{-1}(x)$ için formül bulmadan $(f^{-1})'(\underset{b}{6})$ değerini bulunuz.

$$6 = x^3 - 2 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \to a$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}$$

$f'(x) = 3x^2$

Logaritmik Türev

① Çarpım, bölüm, kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri; türev almadan önce iki tarafın doğal logaritması alınarak daha kolay bulunur.

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)$

$\ln f(x) = \ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \cdots + \ln f_n(x)$

$\downarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

---

② $f(x) = (g(x))^{h(x)} \Rightarrow \ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$

$\downarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\downarrow$

$$f'(x) = f(x)\left[h'(x) \cdot \ln g(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}\right]$$

(*) $f(x) = \dfrac{(x^2+1) \cdot (x-1)^2}{x^4+4}$ $(x \neq 1)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ türevini logaritmik türev ile bulunuz.

$$\ln f(x) = \ln(x^2+1) + \underbrace{\ln(x-1)^2}_{2\ln(x-1)} - \ln(x^4+4)$$

$\downarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x^4+4} \cdot \left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+4}\right]$$

✱ $f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = ?$

$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$

↓ Türev

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x \left[\ln x + 1 \right]$$

✱ $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \ln (\ln x)^x - \ln (x)^{\ln x}$

$\ln y = x \ln(\ln x) - \dfrac{\ln x \cdot \ln x}{(\ln x)^2}$

↓ Türev

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left[\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \right] \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

Belirsiz Şekiller

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ şeklindeki ifadeler belirsizdirler (aritmetik olarak bir anlamları yoktur).

Belirsizlik Tipi	Örnek	
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$	① Cebirsel işlemler ② L'Hopital ile çözülür
∞/∞	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot x^2}$	
$0.\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$	Cebirsel işlemler ile $0/0$, ∞/∞ haline dönüştürülür
$\infty-\infty$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\tan x - \frac{1}{\pi-2x}\right)$	
0^0	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$	Logaritmik limit ile çözülür
∞^0	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$	
1^∞	$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	

L'Hopital Kuralı:

① $x \to a$ için $f(x) \to 0, g(x) \to 0$
② $x \to a$ için $f(x) \to \mp\infty$, $g(x) \to \mp\infty$ } ise $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

✻ $x \to a$ notasyonunda a sonlu veya sonsuz olabilir.

✻ $x \to a$ ifadesi $x \to a^+$, $x \to a^-$ ifadeleri ile değiştirilebilir.

✻ $$\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{0}$$

✻ $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\frac{\sec x}{1 + \tan x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \underline{1}$$

✻ $$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x}}_{0/0} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2}}_{0/0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x} = \frac{-2+8}{2} = \underline{3}$$

✻ $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x - x}{x \sin x}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$= \underline{0}$$

✻ $$\lim_{x \to \infty} \underbrace{x^2 \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)}_{\infty \cdot 0} = \lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{1 - \cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}_{\frac{0}{0}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \frac{1}{2}$$

Logaritmik Limit

T19

1^∞, 0^0, ∞^0 belirsizliklerini veren limitleri çözmek için kullanılır.

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = ?$ ∞^0 belirsizliği

$$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \sin x . \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{\ln x^{-1} = -\ln x} = -\sin x . \ln x$$

$$\ln y = -\sin x . \ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\underset{0.\infty}{(-\sin x.\ln x)} = \lim_{x\to 0^+} - \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x\to 0^+} - \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} . \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = 0 \Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = \underline{\underline{1}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\cot x} = ?$ 1^∞ belirsizliği

$$y = (\cos x)^{\cot x} \Rightarrow \ln y = \cot x . \ln\cos x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\underset{\infty.0}{\cot x.\ln\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{\underline{\frac{1}{\cot x}}_{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+}\underset{\frac{0}{0}\to L'H.}{\frac{\ln\cos x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} . \cos^{\cancel{2}} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = 0 \Rightarrow \ln\underbrace{\left(\lim_{x\to 0^+} y\right)}_{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = \underline{\underline{1}}$$