

Ör: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ fonksiyonunun kritik noktalarını

bulunuz. Fonksiyonun artan / azalan aralıklarını

belirleyiniz, ve extremum değerlerini bulunuz.

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow \text{Tanım kümesi: } \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

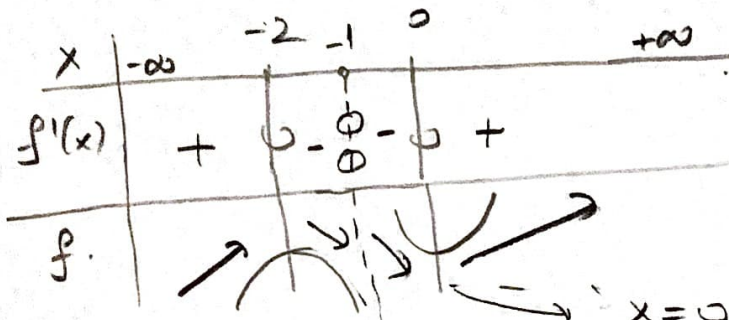
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0, \quad f'(x) \text{ tanımsız} \Rightarrow x = -1$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $x = 0 \quad x = -2$

çift kat kök.

fakat \notin Tanım kümesi
dolayısıyla kritik
nokta değil.

Kritik Noktalar: $x = 0, x = -2$.



$x = -2$
yerel
max nokta

$x = 0$ yerel min nokta.

$f(0) = 0$ yerel min değer.

$f(-2) = -4$
yerel max değer.

$(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$ aralığında fonksiyon artan.

$[-2, -1) \cup (-1, 0]$ aralığında " azalıyor.

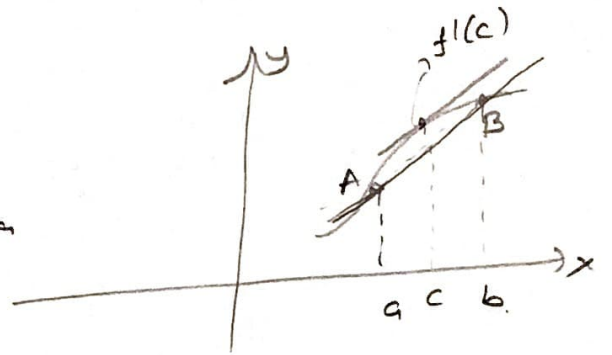
* Ortalama Değer Teoremi.

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ise

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

Geometrik olarak Ortalama Değer Teoremi a ve b arasında AB kordonuna paralel en az bir teğetinin bulunduğunu söyler.



Örn: $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $[0,2]$ aralığında Ortalama Değer Teoremini gerçekleştiriniz.

$f(x) = x^2 \rightarrow [0,2]$ aralığında süreklidir
 $f'(x) = 2x \rightarrow (0,2)$ " " türevlenebilir

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$2c = 2 \Rightarrow c = 1. \quad c = 1 \in (0,2) \text{ vardır.}$$

Ön: $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$ fonksiyonu için $[0,3]$ aralığında

Ortalama Değer Teoremini gerçekleştiriniz

$f(x) = \frac{x^2-x}{x+1} \rightarrow [0,3]$ aralığında sürekli

$$f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot (x+1) - (x^2-x) \cdot (1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} \rightarrow (0,3) \text{ aralığında tanımlenebilir}$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\frac{6}{4} - 0}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c^2 + 2c - 1}{(c+1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c^2 + 4c - 2 = c^2 + 2c + 1$$
$$c^2 + 2c - 3 = 0$$
$$\begin{array}{c} \in \\ \in \end{array} \quad \begin{array}{c} +3 \\ -1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} +3 \\ -1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} c_1 = -3 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

$$c_1 = -3 \notin (0,3)$$

$$c_2 = 1 \in (0,3)$$

ör: $0 < a < b$ için $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) < \sqrt{b}$

eşitsizliğin sağlandığını Ortalama Değer Teoremini kullanarak gösteriniz.

$f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b]$ alalım.

$f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b]$ aralığında sürekli.

($x > 0$ için sürekli $0 < a < b$ olduğu için).

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ için tanımlenebilir. $0 < a < b$ olduğu için (a, b) aralığında tanımlenebilir.

Dolayısıyla $[a, b]$ de sürekli (a, b) de tanımlenebilir. O halde Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir.

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olarak noktada $c \in (a, b)$ var.

$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a}$ den $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(b - a)} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$

* $c > a$ olduğu için $\sqrt{c} > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$

$\frac{1}{2\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{a} > 2\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{b} + \sqrt{a}) > \sqrt{a} \quad (1)$

* $c < b$ olduğu için $\sqrt{c} < \sqrt{b} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} > \frac{1}{2\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > \frac{1}{2\sqrt{b}}$

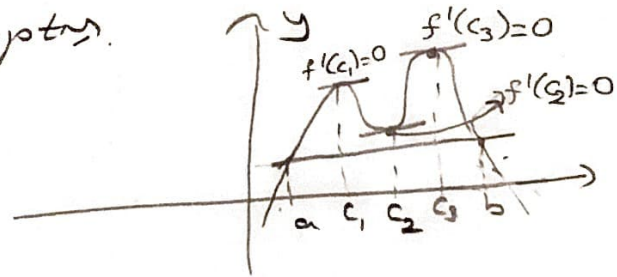
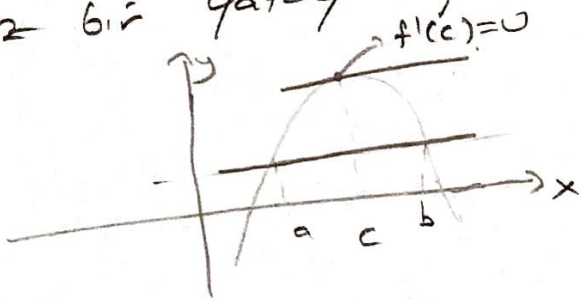
$2\sqrt{b} > \sqrt{b} + \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{b} > \frac{1}{2}(\sqrt{b} + \sqrt{a}) \quad (2)$

(1) ve (2) den $\sqrt{a} < \frac{1}{2}(\sqrt{b} + \sqrt{a}) < \sqrt{b}$ bulunur.

Rolle Teoremi

$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığının her noktesinde sürekli, (a,b) açık aralığının her noktesinde türelenelir ve $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ vardır.

Geometrik olarak Rolle Teoremi bir eğrinin yatay bir doğruyu kestiği iki noktadan en az bir yatay teğete sahiptir.



Örn: $f(x)=x^2-2x+3$ fonksiyonuna $[0,2]$ de

Rolle Teoremi uygulayınız

$f(x)=x^2-2x+3 \rightarrow [0,2]$ de sürekli,

$f'(x)=2x-2 \rightarrow (0,2)$ de türelenelir ve

$f(0)=3$, $f(2)=4-4+3=3$, $f(0)=f(2)=3$ dir.

Rolle Teoremi uygulanabilir.

$f'(c)=0 \Rightarrow 2c-2=0$ $c=1 \in (0,2)$ vardır.