3) a) $A = [a_{ij}]_{21\times 5}$, $a_{ij} = \begin{cases} 3i+2j , & i \le j \\ 4i , & i > j \end{cases}$ ve $B = [b_{jk}]_{5\times 18}$, $b_{jk} = \begin{cases} 3j+2k , & j \le k \\ j-k , & j > k \end{cases}$

10

olarak tanımlanıyor . $C = A \cdot B$ matrisinin $c_{10,4}$ elemanını bulunuz. (10,4 : 10. Satır ve 4. Sütun elemanıdır)

$c_{10,4} = a_{10,1} b_{1,4} + a_{10,2} b_{2,4} + a_{10,3} b_{3,4} + a_{10,4} b_{4,4} + a_{10,5} b_{4,5}$. 3

$a_{10,1} = a_{10,2} = a_{10,3} = a_{10,4} = a_{10,5} = 40$. 2

$b_{1,4} = 3.1 + 2.4 = 11$

$b_{2,4} = 3.2 + 2.4 = 14$. 3

$b_{3,4} = 3.3 + 2.4 = 17$

$b_{4,4} = 3.4 + 2.4 = 20$

$b_{5,4} = 5 - 4 = 1$

$c_{10,4} = 40 \left[11 + 14 + 17 + 20 + 1 \right]$

$= 40.63$

$= 2520$. 2

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi verildiğine göre $AB = 0$ eşitliğini sağlayan ve sıfır olmayan 3×1

15

mertebeli B matrisini bulunuz.

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 3

$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 4c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 0 \end{array} \right\}$. 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$H_{21}(-1), H_{31}(-2)$ $\quad H_{12}(-2)\ H_{32}(-1)$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 3

$r = 2$ $n = 3$ $r < n$ olduğundan sıfırdan farklı çözüm vardır. . 2

$n - r = 1$ keyfi sabit seçilir

$c = k$ olsun.

$a + 8c = 0$

$b - 2c = 0$

1.

$a = -8k$

$b = 2k$

3

$B = \begin{bmatrix} -8k \\ 2k \\ k \end{bmatrix} (k \in \mathbb{R})$

Başarılar...

1

4-) $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 - mx_3 = 2 \\ x_1 - mx_2 - x_3 = 2 \\ mx_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{array}\right\}$ Lineer denklem sisteminin,

25

a) Çözümsüz olması için,
b) Tek çözümünün olması için,
c) Sonsuz çözümünün olması için m nin alacağı değerleri bulunuz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 1 & -m & -1 & 2 \\ m & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{H_{31}(-m)}{\overset{H_{21}(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 2-2m \end{array}\right]$$ (3)

$$\overset{H_{32}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -m & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{m^2+m-2}_{(m-1)(m+2)} & 2-2m \end{array}\right]$$ (4)

a) Çözümsüz olması için rang $[A] \neq$ rang $[A:B]$ olmalı. Bunun için (2)

$(m-1)(m+2) = 0$ $\qquad 2-2m \neq 0$

$m = 1 \quad m = -2$ (2) $\qquad m \neq 1 \Rightarrow \boxed{m=-2}$ için sistemin (2) çözümü yoktur.

b) Tek çözümün olması için rang $[A]$ = rang $[A:B] = n$

$n \to$ bilinmeyen sayısı (2)

$(m-1)(m+2) \neq 0$

$\boxed{m \neq 1 \quad m \neq -2}$ (2)

için sistemin tek çözümü vardır. (2)

c) Sonsuz çözümün olması için rang $[A]$ = rang $[A:B] = r <$ olmalıdır. (2)

$m^2+m-2=0 \qquad 2-2m=0$ (2) $\Rightarrow m=1,\ m=-2,\ \boxed{m=1}$ (2) için sistemin sonsuz çöz. var

Başarılar...

1-) a) A ve B $\boldsymbol{n \times n}$ tipinde değişmeli iki matris ve $AB = 0$ olsun. Bu durumda $\mathbf{iz}(A+B)^3 = \mathbf{iz}\, A^3 + \mathbf{iz} B^3$ olduğunu gösteriniz.

13

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \; , \quad AB = 0$$ 4

$$\Rightarrow (A+B)^3 = A^3 + 3A(\underbrace{AB}_{0}) + 3(\underbrace{AB}_{0})B + B^3$$ 3

$$\Rightarrow (A+B)^3 = A^3 + B^3$$ 3

$$\Rightarrow iz\,(A+B)^3 = iz\,(A^3 + B^3) = iz\,A^3 + iz\,B^3$$ 3

12 b) $AA^T = A^{-1}B$ verilsin. $|B|$ yi (B nin determinantını) $|A|$ (A nın determinantı) cinsinden ifade ediniz.

$$A \cdot A^T = A^{-1}B \Rightarrow AAA^T = AA^{-1}B = I.B = B$$ 4

$$\Rightarrow |A||A|.|A^T| = |B|$$ 2

$$|A| = |A^T| \Rightarrow |A|^3 = |B|$$ 4 2

CamScanner ile tarandı

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & k \end{bmatrix}$ matrisinin katlı özdeğeri olduğuna göre k değerini bulunuz. Bulduğunuz k değeri için $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ katlı özdeğerine karşılık gelen özvektörünü (özvektörlerini) bulunuz.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 5$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad |A-(2)I| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & k-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k-2 = 1$$

$$\Rightarrow k = 3 \quad 15$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ için

$$(A-(2)I)X = 0 \quad 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 1$, $n = 3$ $n-r = 2$ keyfi sabit 3

$x_3 = 2$, $x_2 = 0$ olsun.

$$x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 5$$

$x_3 = 0$, $x_2 = 1$ olsun.

$$x_1 - x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 5.$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$2c_1 = 0$$

Başarılar...

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

i) Cayley-Hamilton Teoreminden yararlanarak A^{-1} i bulunuz.

ii) Cayley-Hamilton Teoreminden yararlanarak A^5 i bulunuz.

i) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow A^2 - 5A + 6I = 0 \rightarrow A - 5I + 6A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)$

$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

ii) $A^2 - 5A + 6I = 0$

$A^2 = 5A - 6I$

$A^3 = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6I) - 6A = 19A - 30I$

$A^4 = 19A^2 - 30A = 19(5A - 6I) - 30A = 65A - 114I$

$A^5 = 65A^2 - 114A = 65(5A - 6I) - 114A = 211A - 390I$

$A^5 = 211\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 390\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 211 & -211 \\ 422 & 844 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 390 & 0 \\ 0 & 390 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -179 & -211 \\ 422 & 454 \end{bmatrix}$

Başarılar...

1-) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$ Lineer denklem sisteminin çözümünü A^{-1} (katsayılar matrisinin tersi) matrisini kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad EkA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{EkA}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 2$, $y = 0$, $z = -1$

) $a \in \mathbb{R}$ ve $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $V = \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde tanımlanan

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 - 1 \end{bmatrix}$ toplama ve $a \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + a - 1 \\ ax_2 - a + 1 \end{bmatrix}$ skalerle çarpma

işlemleri altında, $(V, \oplus, \odot)$ bir vektör uzayı olduğuna göre

***i*)** $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemanı bulunuz,

***ii*)** $\oplus$ işlemine göre $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ elemanının tersini bulunuz.

i) $\forall \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + e_1 + 1 \\ x_2 + e_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad 5 \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 + e_1 + 1 = x_1 \rightarrow e_1 = -1 \\ x_2 + e_2 - 1 = x_2 \Rightarrow e_2 = 1 \end{matrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad 2$$

ii) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{-1} \\ x_2^{-1} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_1^{-1} + 1 \\ x_2 + x_2^{-1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_1^{-1} + 1 = -1 \rightarrow x_1^{-1} = -2 - x_1$$

$$x_2 + x_2^{-1} - 1 = 1 \Rightarrow x_2^{-1} = 2 - x_2$$

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} -2 - x_1 \\ 2 - x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad 3$$

Başarılar...

3) **(a)** $AX = B$ lineer denklem sisteminin iki çözümü Y ve Z ise, 9Y-8Z' nin, bu sistemin bir çözümü olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜM:

2 2

$AX = B$ lineer denklem sisteminin iki çözümü Y ve Z ise $AY = B$ ve $AZ = B$ olur.

$$\begin{aligned} A(9Y - 8Z) &= A(9Y) - A(8Z) \quad 2 \\ &= 9(AY) - 8(AZ) \quad 2 \\ &= 9B - 8B \\ &= B \quad 2 \end{aligned}$$

olduğundan 9Y-8Z de bu sistemin bir çözümüdür. 2

(b) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi için $\operatorname{rank} C = ?$

I.yol:

13

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0$$ olduğundan $\operatorname{rank} C = 3$.

II.yol :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

olduğundan $\operatorname{rank} C = 3$.

4) $\begin{aligned} x-ky+z&=2 \\ -2x+k^2y-kz&=-2k \\ -kx+2ky+z&=-4 \end{aligned}$ lineer denklem sisteminin

a) tek çözümünün **b)** sonsuz çözümünün **c)** çözümsüz

olması için k 'nın alacağı değerler ne olmalıdır.

$$[A:B]=\begin{bmatrix} 1 & -k & 1 & 2 \\ -2 & k^2 & -k & -2k \\ -k & 2k & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \quad 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & 1 & 2 \\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k \\ 0 & 2k-k^2 & 1+k & 2k-4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 & 2 \\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 & 2 \\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 2-k & 4-2k \end{bmatrix} \sim \quad 3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k^2-2k & 0 & 4-2k \end{bmatrix} \quad 2 \qquad \left.\begin{aligned} k^2-2k=0 &\Rightarrow k=2,\ k=0 \\ 4-2k=0 &\Rightarrow k=2. \end{aligned}\right\} \quad 3$$

a) $k \neq 2$ ve $k \neq 0$ (2) için $r_A = r_{[A:B]} = 3$ (2) olacağından sistemin tek çözümü vardır.

b) $k = 2$ (2) için $r_A = r_{[A:B]} = 2$ (2) olacağından sistemin $3-2=1$ parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır.

c) $k = 0$ (2) için $r_A = 2$ ve $r_{[A:B]} = 3$ olacağından $r_A \neq r_{[A:B]}$ (2) bulunur. $k=0$ için sistemin çözümü yoktur.

4) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & k\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A matrisinin bir özvektörü $\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$ olduğuna göre, k sayısını bulunuz. Bulduğunuz k değeri için A matrisinin en küçük özdeğerine karşılık gelen özvektörünü(özvektörlerini) bulunuz.

Çözüm:

$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & k\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin bir özvektörü $X=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$ olduğundan $\boxed{AX=\lambda X}$ olacak şekilde bir λ vardır. 2

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & k\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\ 8+2k\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$$ eşitliğinden 3

5

$\left.\begin{matrix}2=2\lambda\\ 8+2k=-2\lambda\\ 2=2\lambda\end{matrix}\right\}$ olup, buradan $\lambda=1$ bulunur. Böylece $8+2k=-2 \Rightarrow k=-5$ 5

3 2

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & 5\\ 1 & -3-\lambda & -5\\ -1 & 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$$ 2

5

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -\lambda & 0\\ 1 & -3-\lambda & -5\\ 0 & -\lambda & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -3-\lambda & -5\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -4-\lambda & -5\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}-4-\lambda & -5\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$\lambda^2(-4-\lambda+5)=\lambda^2(1-\lambda)=0$

$\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=0$

8

$\lambda_{2,3}=0$ için $(A-\lambda I_3)X=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ 1

$$[A \vdots 0]=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5 & 0\\ 1 & -3 & -5 & 0\\ -1 & 3 & 5 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ 2

$r=1<n=3 \Rightarrow n-r=2$ keyfi sabit seçilir. 1

$x_1-3x_2-5x_3=0$, $x_2=a$, $x_3=b$ *olsun.* 1

$x_1-3x_2-5x_3=0 \Rightarrow x_1-3a-5b=0 \Rightarrow x_1=3a+5b$

$$X=\begin{bmatrix}3a+5b\\ a\\ b\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{özvektörler } X_1=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

1 1

$$\begin{aligned} x+2y+z&=m^2\\ x+y+3z&=m\\ 3x+4y+7z&=8\end{aligned}$$

2) lineer denklem sistemi veriliyor.

i) Sistemin çözümünün olmaması için m ne olmalıdır.

ii) Sistemin sonsuz çözümünün olması için m ne olmalıdır.

iii) Sistemin tek çözümünün olması için m ne olmalıdır.

Çözüm: 2 2 2

$$[A \vdots B]=\begin{bmatrix}1&2&1&m^2\\1&1&3&m\\3&4&7&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&m^2\\0&-1&2&m-m^2\\0&-2&4&8-3m^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&m^2\\0&1&-2&-m+m^2\\0&-2&4&8-3m^2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&5&2m-m^2\\0&1&-2&-m+m^2\\0&0&0&8-2m-m^2\end{bmatrix}\quad 2 \qquad 8-2m-m^2=0 \implies m=2, m=-4.$$

m^2+2m-8 2

2 3

5 ***i)*** Çözümsüz olması için $r_A \neq r_{AB} \implies m\neq -4\ \ ve\ \ m\neq 2$

2 3

5 ***ii)*** Sonsuz çözümünün olması için, $r_A = r_{AB} < n=3 \implies m=-4\ \ veya\ \ m=2$

5 ***iii)*** Tek çözümünün olması için $r_A = r_{AB} = n = 3$ olmalı. Ancak $r_A=3$ olamaz. Bu denklem sisteminin tek çözümü yoktur.

2 3

12

1) a) A bir idempotent matris ve $\det A = 1$ olsun. $\det\left(A^3.\text{ek}A + 5A^2.(\text{ek}A)^2 - 8I_3\right) = ?$

Çözüm: A bir idempotent matris olduğundan $A^2 = A$ olup, $A^3 = A^2.A = A.A = A^2 = A$ bulunur.
2 2

Ayrıca $A.\text{ek}A = \text{ek}A.A = \det A.I_3$

O halde

$$\det\left(A^3.\text{ek}A + 5A^2.(\text{ek}A)^2 - 8I_3\right) = \det\left(A.\text{ek}A + 5A.A.(\text{ek}A).(\text{ek}A) - 8I_3\right) \quad 1$$
$$= \det\left(\det A.I_3 + 5A.(\det A.I_3).(\text{ek}A) - 8I_3\right) \quad 3$$
$$= \det\left(I_3 + 5A.(\text{ek}A) - 8I_3\right) \quad 1$$
$$= \det\left(I_3 + 5\det A.I_3 - 8I_3\right) \quad 1$$
$$= \det\left(I_3 + 5I_3 - 8I_3\right)$$
$$= \cancel{\det(40I_3)} \ \det(-2I_3) = (-2)^3 \quad 2$$
$$= \cancel{40^3}$$

8

13

b) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ vektörlerinin belirttiği düzleme paralel olup, $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{k}$ vektörüne dik olan bir birim vektör bulunuz.

Çözüm:

Aranan vektör $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ olsun. 1

$$\vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \quad 3$$

$$\vec{r}.\vec{d} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 3z = 0 \quad 2$$

$$\vec{r}.\vec{c} = 0 \Rightarrow 3x - z = 0 \Rightarrow 3x = z \quad 2$$

$$3x + 3y - 3z = 0 \Rightarrow 3y = 2z \Rightarrow y = \frac{2}{3}z \quad 2$$

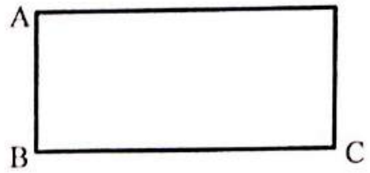
$z = 3$ alınırsa $x = 1, y = 2$ olup, $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ doğrultusu elde edilir. $|\vec{u}| = \sqrt{14}$ olduğundan
1 1

$$\vec{r} = \mp\frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}} \quad 1$$

CEVAP ANAHTARI

15

1-) a) Köşe noktalarından üçü $A=(1,x,-3)$, $B=(2,0,-5)$, $C=(3,-1,-6)$ olan $ABCD$ dikdörtgeninin alanını bulunuz (Pisagor bağıntısını kullanmayınız).



$A=(1,x,-3)$, $B(2,0,-5)$, $C(3,-1,-6)$

$\overrightarrow{AB}=(1,-x,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(1,-1,-1)$ 2

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1+x+2=0 \Rightarrow x=-3$ 4

O halde $\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$ bulunur.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-5\vec{\imath}-\vec{\jmath}-4\vec{k}$$ 4

A(ABCD)=$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-5)^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{42}\ br^2$ 3

10

b) $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenini içine alan düzlemin denklemini bulunuz.

Aranılan düzlem içinde herhangi bir nokta $X=(x,y,z)$ olsun.

<u>1. YOL:</u>

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(1,-1,-1)$, $\overrightarrow{AX}=(x-1,y+3,z+3)$ 2

$$\overrightarrow{AX}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=\begin{vmatrix}x-1 & y+3 & z+3\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$ 3

$(x-1)(-5)-(y+3)+(z+3)(-4)=0$ veya $-5x-y-4z-10=0$ bulunur. 5

$\boldsymbol{P}:\ \mathbf{5x+y+4z+10=0}$

<u>2.YOL:</u>

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,-3)$, $\overrightarrow{AX}=(x-1,y+3,z+3)$

$$\overrightarrow{AX}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}x-1 & y+3 & z+3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=0$$

$(x-1)(-5)-(y+3)+(z+3)(-4)=0$ veya $-5x-y-4z-10=0$ bulunur.

$\boldsymbol{P}:\ \mathbf{5x+y+4z+10=0}$

3- λ bir A matrisinin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörü X olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere A^k matrisini özdeğeri λ^k ve ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörün X olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

5 5 5

$$AX = \lambda X$$

$$A^kX = A^{k-1}(AX) = A^{k-1}(\lambda X) = \lambda A^{k-1}X$$

$$= \lambda A^{k-2}(AX) = \lambda A^{k-2}(\lambda X) = \lambda^2 A^{k-2}X$$

$$= \vdots$$

$$= \lambda^{k-1}(AX) = \lambda^{k-1}(\lambda X) = \lambda^k X$$

10

Başarılar...

CamScanner ile tarandı

4- $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini Cayley-Hamilton teoreminden yararlanarak bulunuz.

ÇÖZÜM :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 13 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 5

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$ 5

$$A^3 - A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow A^2 - A - I - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - A - I)$$ 5

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ -5 & 26 & -3 \end{bmatrix}$$ 5

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -3 & 13 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ -5 & 26 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 13 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 13 & -3 \end{bmatrix}$$

5

Başarılar...

CamScanner ile tarandı

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ olmak üzere, A matrisinin tüm özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2 = 0$ karakteristik denkleminden $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 1$ bulunur.

$\lambda_1 = 0$ için, $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sistemi ve buradan $x_2 = 0$ ve $x_1 = -2x_3$ elde edilir. Yani,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ilgili özvektörlerdir.

$\lambda_2 = 1$ için, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sistemi ve buradan $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ elde edilir. Yani,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ilgili özvektörlerdir.

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ **lineer bağımsız vektörleri veriliyor.**

a) $\left\{\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-2\vec{c},\ 3\vec{b}+\vec{c}\right\}$ **kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.**

12

$\lambda_1(\vec{a}+\vec{b})+\lambda_2(\vec{a}-2\vec{c})+\lambda_3(3\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$ 3

$\lambda_1\vec{a}+\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{a}-2\lambda_2\vec{c}+3\lambda_3\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{a}(\lambda_1+\lambda_2)+\vec{b}(\lambda_1+3\lambda_3)+\vec{c}(-2\lambda_2+\lambda_3)=\vec{0}$ 3

3

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lineer bağımsız olduklarından $\lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1+3\lambda_3=0,\ -2\lambda_2+\lambda_3=0$ dır. Burada $\lambda_1=-\lambda_2,\ \lambda_3=2\lambda_2$ *olup*, $\lambda_1+3\lambda_3=0 \Rightarrow -\lambda_2+6\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=0.$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ bulunur. $\{\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-2\vec{c},3\vec{b}+\vec{c}\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

b) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi 5br³ olsun.** $\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-2\vec{c},\ 3\vec{b}+\vec{c}$ **vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.**

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi 5 olduğundan $|\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})|=5.$ 2

$(\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{a}-2\vec{c})\wedge(3\vec{b}+\vec{c})]=(\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{a}\wedge 3\vec{b})+(\vec{a}\wedge\vec{c})-(2\vec{c}\wedge 3\vec{b})+\underbrace{(2\vec{c}\wedge\vec{c})}_{0}]$ 2

$=\underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\wedge 3\vec{b})}_{0}+\underbrace{\vec{a}.(\vec{a}\wedge\vec{c})}_{0}-\vec{a}.(2\vec{c}\wedge 3\vec{b})+\underbrace{\vec{b}.(\vec{a}\wedge 3\vec{b})}_{0}+\vec{b}.(\vec{a}\wedge\vec{c})-\underbrace{\vec{b}.(2\vec{c}\wedge 3\vec{b})}_{0}$ 3

$=-\vec{a}.(2\vec{c}\wedge 3\vec{b})+\vec{b}.(\vec{a}\wedge\vec{c})=2.3\ \vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})-\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=5\,\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ bulunur. 2

Böylece, $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-2\vec{c},3\vec{b}+\vec{c}$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi

$V=|5\,\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})|=5.5=25.$ 2

2.Yol:

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\quad \vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ *olsun.*

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),\ \vec{a}-2\vec{c}=(a_1-2c_1,a_2-2c_2,a_3-2c_3),$ 2

$3\vec{b}+\vec{c}=(3b_1+c_1,3b_2+c_2,3b_3+c_3)$

$$(\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{a}-2\vec{c})\wedge(3\vec{b}+\vec{c})]=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_1-2c_1 & a_2-2c_2 & a_3-2c_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \end{vmatrix}=$$ 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1-2c_1 & a_2-2c_2 & a_3-2c_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1-2c_1 & a_2-2c_2 & a_3-2c_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -2c_1 & -2c_2 & -2c_3 \\ 3b_1+c_1 & 3b_2+c_2 & 3b_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1-2c_1 & a_2-2c_2 & a_3-2c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ 4

$$=-2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=5.5=25$$

3 1

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ **matrisi veriliyor.**

12 **a)** A **matrisinin özdeğerlerini bulunuz.** (2)

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 2+\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$ (5)

$$= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(7-\lambda-3) = (2+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$ (2)

$\lambda_1, \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4$ (3)

$(\lambda^2+4\lambda+4) \cdot (4-\lambda)$

$4\lambda^2 + 16\lambda + 16 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda$

$\cancel{-\lambda^3 + \ldots + 20\lambda + 16}$

$-\lambda^3 + 12\lambda + 16 = 0$

13 **b) En küçük özdeğere karşılık gelen özvektörleri bulunuz.**

$(A - (-2)I_3)X = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 2

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (4)

$r = 1 < n = 3, \ n - r = 2 \ keyfi \ sabit$ (1)

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$ ise $x_1 = x_2 - x_3$

$x_1 + x_3 = x_2$

$$X = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ elde edilir. 2

$x_2 = 1, \ x_3 = 0$ alınırsa özvektör $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (3) 2

2

$x_2 = 0, \ x_3 = 1$ alınırsa özvektör $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3)

4

1) $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

13

a) Cayley-Hamilton teoreminden yararlanarak B^{207} matrisini bulunuz.

$P(\lambda) = |B - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0$ 5

Cayley Hamilton teoreminden yararlanırsak $B^2 - 4I_2 = 0 \Rightarrow B^2 = 4I_2$ elde edilir. 4

$B^{207} = (B^2)^{103}B = (4I_2)^{103}B = 4^{103}B = \underset{2^{206}}{4^{103}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 4

b) Eğer B matrisinin tersi varsa Cayley-Hamilton teoreminden yararlanarak bulunuz.

12

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = 0$

Cayley Hamilton teoreminden yararlanırsak $B^2 - 4I_2 = 0 \Rightarrow B^2 = 4I_2$ elde edilir. Eşitliğin her iki

tarafı B^{-1} ile çarpılırsa

$B^{-1}B^2 = 4B^{-1}$ veya $B^{-1} = (1/4)B \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$ 5

2 2

9/1

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{-1+3}_{-4} \neq 0$ 3

CamScanner ile tarandı

2) $B=\begin{bmatrix}7 & -13\\ 4 & -8\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) B^{-1} matrisini **Cayley-Hamilton Teoreminden** yararlanarak bulunuz. (13p)

b) B^5-28B matrisini **Cayley-Hamilton Teoreminden** yararlanarak bulunuz. (12p)

Çözüm: 2a) Cayley-Hamilton teoreminden her matris kendi özpolinomunun bir köküdür. Buradan

B matrisinin özpolinomu $|B-\lambda I_3|=\begin{bmatrix}7-\lambda & -13\\ 4 & -8-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+\lambda-4$ dır. O halde $\lambda=B$ için

$B^2+B-4I_2=0$ olup

$B^{-1}\left(B^2+B-4I_2\right)=0\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{4}\left(B+I_2\right)$ (det $B=-4$ olup B terslenebilir bir matristir)

$$B^{-1}=\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}7 & -13\\ 4 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & -\frac{13}{4}\\ 1 & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

2b) a şıkkından $B^2+B-4I_2=0$ olup $B^2=4I_2-B$ eşitliği gözönünde bulundurularak;

$B^3=5B-4I_2$

$B^4=20I_2-9B$

$B^5=29B-36I_2$

$$\Rightarrow B^5-28B=B-36I_2=\begin{bmatrix}7 & -13\\ 4 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}36 & 0\\ 0 & 36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-29 & -13\\ 4 & -44\end{bmatrix}$$

1) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & k \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinden biri "-1" olduğuna göre, bu matrisin **en büyük öz değerine karşılık gelen özvektörü** bulunuz. (25p)

Çözüm:

$|A-\lambda I_3|=0$ eşitliği $\lambda=-1$ için sağlanır. O halde

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & k \\ -12 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 20k+20=0 \Rightarrow k=-1$$

$k=-1$ olduğuna göre A matrisinin tüm özdeğerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -12 & -\lambda & 5 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=1,\ \lambda=2$$

$\lambda=2$ için

$$AX=2X \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ -12x-2y+5z=0 \\ 4x-2y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ $t\in\mathbb{R}$ olup $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda=2$ için özvektördür.

1) a) x ve y eksenlerinin pozitif yönleri ile yaptığı açılar sırasıyla $45°$ ve $60°$ olan ve de modülü 8 birim olan $\vec{v} \in R^3$ vektörünü bulunuz.

1. YOL: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektörünü bulalım.

$|\vec{r}| = 8$

$\vec{r} \cdot \vec{i} = |\vec{r}| \cdot 1 \cos 45° \implies x = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. (2)

$\vec{r} \cdot \vec{j} = |\vec{r}| \cdot 1 \cos 60° \implies y = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$. (2)

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 8 \implies \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2 + z^2} = 8$ (3)

$\sqrt{32+16+z^2} = 8$

$z^2 = 16 \implies z = \mp 4$. (3)

$\implies \vec{r} = 4\sqrt{2}\vec{i} + 4\vec{j} \mp 4\vec{k}$. (2)

2. YOL

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (3)

$\alpha = 45°$, $\beta = 60°$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 1 \implies z = \mp \frac{1}{2}$ (3) (3)

$\vec{r} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \mp \frac{1}{2}\vec{k}\right)$. (3)

$\vec{r} = 4\sqrt{2}\vec{i} + 4\vec{j} \mp 4\vec{k}$

2) $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir alt kümesi $S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$

olsun. k nın hangi değerleri için

$v = \begin{bmatrix}k^2\\-3k\\-2\end{bmatrix}$ vektörü $\langle S \rangle$ ye aittir.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix}k^2\\-3k\\-2\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} \cdot 4$$

$$\left.\begin{aligned} x + z &= k^2 \\ 2x + y + 3z &= -3k \\ 3x + y + 4z &= -2 \end{aligned}\right\} \cdot 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k^2 \\ 2 & 1 & 3 & -3k \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k^2 \\ 0 & 1 & 1 & -2k^2-3k \\ 0 & 1 & 1 & -3k^2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & k^2 \\ 0 & 1 & 1 & -2k^2-3k \\ 0 & 0 & 0 & -k^2+3k-2 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$ $\qquad$ $H_{32}(-1)$ $\qquad$ 10

$r_A = r_{AB}$ olması için $(r_A = 2)$ olduğundan $\cdot$ 3

$-k^2+3k-2=0$ olmalıdır. $\cdot$ 2

$\Longrightarrow k=1$ veya $k=2$ olmalıdır. $\cdot$ 2

4) V uzayında $v_1 = x^2+x$, $v_2 = x-3$, $v_3 = -2x^2-3x+9$, $v_4 = x^2-x+6$ vektörlerinin gerdiği alt uzayın bir bazını bularak boyutunu belirtiniz.

Çözüm: v_1, v_2, v_3, v_4 lineer bağımsız mıdır?

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$ (5)

$c_1(x^2+x) + c_2(x-3) + c_3(-2x^2-3x+9) + c_4(x^2-x+6) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - 2c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - 3c_3 - c_4 = 0 \\ -3c_2 + 9c_3 + 6c_4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-1)$ (1) $\quad H_{32}(3)$ (1)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_3(\frac{1}{6})$ (1) $\quad H_{13}(2)$, $H_{23}(1)$ (2)

$r=3$, $n=4$, $n-r=1$ vektör lineer bağımlıdır.

$c_4 = 1$ olsun. $\quad c_1 + c_4 = 0 \to c_1 = -1$ (4)

$c_2 - 2c_4 = 0 \to c_2 = 2$

$c_3 = 0$

$-v_1 + 2v_2 + 0v_3 + v_4 = 0 \Rightarrow v_4 = v_1 - 2v_2 + 0v_3$. (4)

alınırsa v_4 lineer bağımlıdır. Taban olarak $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ alınabilir. Boy$V = 3$ tür. (4) (2)

CamScanner ile tarandı

b) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ vektörlerinin belirttiği düzleme paralel olan ve $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektörüne dik olan bir birim vektör bulunuz

<u>1. YOL:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t} \perp \vec{a} \wedge \vec{b} \\ \vec{t} \perp \vec{c} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{t} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \cdot (3)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} \cdot (2)$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = \vec{t} \cdot (2)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \cdot (2)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} \cdot (2) = \frac{-4}{2\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{2\sqrt{6}}\vec{k} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k} \cdot (2)$$

<u>2. YOL:</u>

$\vec{t}$ vektörü $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ye diktir. $\vec{t} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ olsun.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} = \vec{d} \ (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t} \cdot \vec{d} = 0 \Rightarrow \quad -x - 2y - 4z = 0 \\ \vec{t} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \quad x + 2z = 0 \quad (4) \end{array}\right\} x = -2, \ y = -1, \ z = 1$$

$$\vec{t} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \ (2)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} \ (2) = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}} \ (2)$$

CamScanner ile tarandı

1) Aralarındaki açı $\gamma = \frac{\pi}{3}$ olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin uzunlukları $|\vec{a}| = 6$ ve $|\vec{b}| = 5$ olsun. $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}+2\vec{b}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a}+2\vec{b}$ olsun.

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$= |\vec{a}|^2 + 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 2|\vec{b}|^2$$

ve $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\operatorname{Cos}\gamma = 15$ olduğundan

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 36+45+50 = 131.$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}$$
$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2}$$
$$= \sqrt{36+30+25}$$
$$= \sqrt{91}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})}$$
$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 4|\vec{b}|^2}$$
$$= \sqrt{36+60+100}$$
$$= 14$$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{131}{14\sqrt{91}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arccos}\frac{131}{14\sqrt{91}}$$

2) $\begin{cases} 2x+(\cos\theta)y+(\sin\theta)z=0 \\ -2x-(\sin\theta)y+(\cos\theta)z=\sqrt{2} \\ 2x-y+z=-\sqrt{2} \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor.

a) Yukarıdaki sistemin **Cramer** yöntemi ile çözülebilmesi için θ hangi değerleri almalıdır. **(13 p.)**

Çözüm a): Sistemin Cramer yöntemine göre çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \cos\theta & \sin\theta \\ -2 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+4\cos\theta\neq 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta\neq-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \text{veya} \quad \theta\neq-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\square$$

b) Yukarıdaki denklem sisteminde $\theta=\frac{\pi}{4}$ için **Cramer** yöntemiyle "z" bilinmeyenini bulunuz.

Çözüm b): $\theta=\frac{\pi}{4}$ için $\begin{cases} 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z=0 \\ -2x-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}z=\sqrt{2} \\ 2x-y+z=-\sqrt{2} \end{cases}$ sistemi elde edilir. **(12 p.)**

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 2 & -1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=1$$

3) a) $y=3x-5$ doğrusunun $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı olup olmadığını gösteriniz. **(12 p.)**

Çözüm a) $W=\{(x,y)|\ y=3x-5,\ x\in\mathbb{R}\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı olup olmadığı araştırılmalıdır. O halde

Her (x_1,y_1) ve $(x_2,y_2)\in W$ için $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\in W$ mıdır? Gösterelim

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\Rightarrow y_1+y_2=3x_1-5+3x_2-5=3(x_1+x_2)-10$$

$3(x_1+x_2)-10\neq 3(x_1+x_2)-5$ $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\notin W$ dır. W kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı değildir.

Benzer biçimde W nın elemanları için skalerle çarpımın kapalılığı incelendiğinde de alt uzay olmadığı gösterilebilir.

b) V 3 – boyutlu bir vektör uzayı ve $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ kümesi V – nin bir bazı olsun.

$$\begin{cases} w_1=v_1+v_2+kv_3 \\ w_2=v_2-v_3 \\ w_3=kv_1+6v_3 \end{cases}$$

olmak üzere, $T=\{w_1,w_2,w_3\}$ altkümesi veriliyor. $\langle T\rangle$ alt uzayının boyutunun 2 olması için k ne olmalıdır? Bulunuz. **(13 p.)**

Çözüm b)

$T=\{w_1,w_2,w_3\}$ kümesi lineer bağımsız ise $\langle T\rangle$ nin boyutu 3 olacağından, T kümesi lineer bağımlı olmadır.

$$c_1w_1+c_2w_2+c_3w_3=0$$
$$c_1(v_1+v_2+kv_3)+c_2(v_2-v_3)+c_3(kv_1+6v_3)=0$$
$$(c_1+kc_3)v_1+(c_1+c_2)v_2+(kc_1-c_2+6c_3)v_3=0$$

$S=\{v_1,v_2,v_3\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} c_1+kc_3&=0 \\ c_1+c_2&=0 \\ kc_1-c_2+6c_3&=0 \end{aligned}$$ L.H.D. sistemi elde edilir. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ k & -1 & 6 \end{vmatrix}=6+k(-1-k)=k^2+k-6=0$ olmalı

Buradan $k=2$ ve $k=-3$ için $Boy\langle T\rangle<3$ dür.

Ayrıca k nın bu değerleri için

$$c_1w_1+c_2w_2=0$$
$$c_1(v_1+v_2+kv_3)+c_2(v_2-v_3)=0$$
$$c_1v_1+(c_1+c_2)v_2+(kc_1-c_2)v_3=0$$

ise $c_1=c_2=0$ olacağından $Boy\langle T\rangle=1$ olamaz. Şu halde $Boy\langle T\rangle=2$ için $k=2$ ve $k=-3$ olmalı.

13

2- a) $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız bir küme ve A bir involüt matris olsun. $\{Af_1, Af_2, Af_3\}$ kümesinin de lineer bağımsız olacağını gösteriniz.

2

$c_1 \cdot f_1 + c_2 f_2 + c_3 \cdot f_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

A involut $\Rightarrow A^2 = I$ 2

$\lambda_1 Af_1 + \lambda_2 Af_2 + \lambda_3 Af_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \overset{?}{=} \lambda_2 \overset{?}{=} \lambda_3 \overset{?}{=} 0$ 2

A ile çarpalım

$\lambda_1 A^2 f_1 + \lambda_2 A^2 f_2 + \lambda_3 A^2 f_3 = \cancel{A0}$ 2

$\lambda_1 I f_1 + \lambda_2 I f_2 + \lambda_3 I f_3 = A \cdot 0$ 2

$I \cdot (\underbrace{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3}_{0}) = A \cdot 0 = 0$ 2

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 1

3- a) $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ matrisi için Cayley-Hamilton teoreminden faydalanarak A^{-1} ve A^{24} matrislerini hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$-\cos^2\alpha+\lambda^2-\sin^2\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2-1=0}$$

$$A^2-I=0 \qquad I=A^2$$

$$A^{-1}=A^{-1}A^2=A$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$A^{24}=(A^2)^{12}=I^{12}=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) A matrisi ile A^t matrisinin aynı özdeğere sahip olduklarını gösteriniz. (Örnek verilmeyecektir.)

$$|A-\lambda_1 I|=0 \Rightarrow |A^t-\lambda_1 I| \stackrel{?}{=} 0$$

$$|A-\lambda_1 I|=|(A-\lambda_1 I)^t|=|A^t-(\lambda_1 I)^t|=0$$

$$=|A^t-\lambda_1 I|=0$$

Başarılar.

4- a) A, 2×2 mertebeden bir matris olsun. Eğer $İz(A)=8$ ve $\det(A)=12$ ise A matrisinin özdeğerlerini bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_{11}+a_{22}=8 \\ a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}=12 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+12=0$$

$$-6 \quad -2$$

$$\lambda_1=2 \; ; \; \lambda_2=6$$

b) $A=\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ k & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin bir özdeğeri $\lambda=2$ olduğuna göre $k=?$ ve $\lambda=2$ ye karşılık gelen bir özvektör bulunuz.

$$\begin{vmatrix} 5-2 & -6 \\ k & -4-2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ k & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{k=3}$$

$$\begin{bmatrix} 5-2 & -6 \\ 3 & -4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3u_1-6u_2=0$$

$$3u_1=6u_2 \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1=2u_2$$

1- a) P_2 uzayının $W=\{p(t)\,|\,p(t)=c+bt+at^2,\ a=-b+2c\}$ alt uzayı veriliyor. W nın bir tabanını bulunuz ve boyutunu belirleyiniz.

13

$p(t)=c+bt+at^2$

$p(t)=c+bt+(-b+2c)t^2$ 2

$p(t)=c(1+2t^2)+b(t-t^2)$ 2 $\Rightarrow p_1(t)=1+2t^2,\ p_2(t)=t-t^2$ 2

$\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2=0 \Rightarrow \lambda_1 \overset{?}{=} \lambda_2 \overset{?}{=} 0$

$\lambda_1(1+2t^2)+\lambda_2(t-t^2)=0t^2+0t+0$ 2

$(2\lambda_1-\lambda_2)t^2+\lambda_2 t+\lambda_1=0t^2+0t+0$ 1

$\lambda_1=0$; $\lambda_2=0$; $2\lambda_1-\lambda_2=0$ 2 lineer bağımsız

$\{1+2t^2,\ t-t^2\}$ Baz ; Boy $W=2$ 2

b) A ve B değişmeli matris olduğuna göre A^2 ve B^3 matrislerinin değişmeli olduklarını gösteriniz. (Örnek verilmeyecektir.)

12

$A\cdot B=B\cdot A$ 2 $\Rightarrow A^2 B^3 \overset{?}{=} B^3\cdot A^2$

$A^2\cdot B^3=A\cdot A\cdot B\cdot B^2=ABABB=BABAB$ 1

2 2 $=BABBA$ 1

$=BBABA$ 1

$=BBBAA$ 1

$=B^3\cdot A^2$ ✓ 1

$P=\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c-b\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 1.

$\begin{bmatrix} 2c-b\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2c\\ 0\\ c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -b\\ b\\ 0\end{bmatrix}$

1.

$P=\left\{\begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow$

$P=\{2t^2+1,\ -t^2+t\}$

Başarılar.

CamScanner ile tarandı

3-) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulunuz. Bulduğunuz bu özdeğer(ler) den en küçüğüne karşılık gelen özvektörü (özvektörleri) bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ 2

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

Yanlış, 5

10

13

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = -2$$

$\boxed{-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0}$

$\lambda_{2,3} = -2$ için; $(A-(-2)I_3)X = 0$

$$[A \vdots 0] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(1), H_{31}(-1)$ $\quad$ $H_1\left(\frac{1}{3}\right)$

$r = 1, n = 3, n-r = 2$ keyfi sabit seçilir. $x_2 = \alpha,\ \ x_3 = \beta$ olsun. 4

Yanlış 2

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + \alpha + \beta = 0 \Rightarrow x_1 = -\alpha - \beta$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 4

2.yol:

$x_2 = 1,\ \ x_3 = 0$ olsun.	$x_2 = 0,\ \ x_3 = 1$ olsun.
$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$	$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$
$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Başarılar...

4-) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

i) Cayley-Hamilton Teoreminden yararlanarak A^{-1} 'i bulunuz,
ii) Cayley-Hamilton Teoreminden yararlanarak A^5 'i bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 7 = 0$$

i) $A^2 + A + 7I_2 = 0 \Rightarrow A + I_2 + 7A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{7}(A + I_2)$

$$A^{-1} = \frac{-1}{7}\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 \\ -3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

ii)) $A^2 + A + 7I_2 = 0 \Rightarrow A^2 = -A - 7I_2$

$A^2 = -A - 7I_2$

$A^3 = -A^2 - 7A = -(-A - 7I_2) - 7A = -6A + 7I_2$

$A^4 = -6A^2 + 7A = -6(-A - 7I_2) + 7A = 13A + 42I_2$

$A^5 = 13A^2 + 42A = 13(-A - 7I_2) + 42A = 29A - 91I_2$

$$A^5 = 29\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - 91\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -87 \\ 87 & -58 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -91 & 0 \\ 0 & -91 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & -87 \\ 87 & -149 \end{bmatrix}$$

Başarılar...

1-) $h \in \mathbb{R}$ ve $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix}$ olmak üzere h nin hangi değerleri için $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır?

ÇÖZÜM:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ -h \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2h \\ 3h+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + hc_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2hc_3 = 0 \\ -hc_2 + (3h+1)c_3 = 0 \end{array}\right\} [A \,\vdots\, 0] = \begin{bmatrix} 1 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 0 \\ 0 & -h & 3h+1 & 0 \end{bmatrix} \underset{H_{12}(-h),\, H_{32}(h)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-2h^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2+3h+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sadece sıfır çözümünün olması için yani $r_A = 3 = n$ olması için $2h^2 + 3h + 1 \neq 0$ olmalıdır.

$2h^2 + 3h + 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; h_1 \neq -1/2\,,\; h_2 \neq -1$ için S kümesi lineer bağımsızdır.

Başarılar...