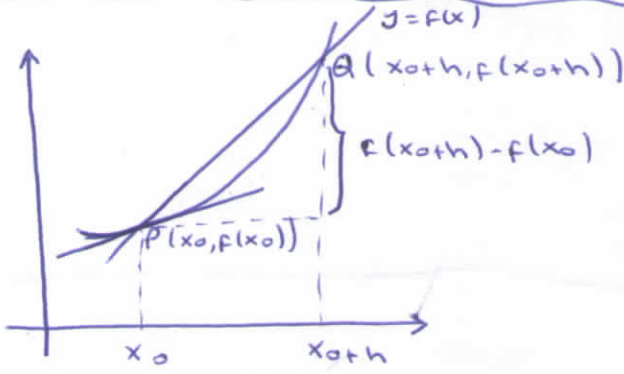


(Ortalama) Değişim Oranları ve Bir Eğrinin Eğimi

$y=f(x)$ fonksiyonunun $[x_0, x_0+h]$ aralığında, x 'e göre (ortalama) değişim oranı:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ dir.}$$

f 'in $[x_0, x_0+h]$ daki değişim oranı geometrik olarak, P ve Q 'den geçen doğrunun eğimidir. PA kısıtın. Eğer Q 'yu eğri boyunca P 'ye yaklaştıran ve limite geçerseniz eğrinin P noktasındaki eğimini buluruz. Eğrinin P deki teğeti bu eğim ile P 'den geçen doğrudur.

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow \text{Eğrinin } P \text{ deki eğimi}$$

Tanım: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 daki ~~türevi~~ $f'(x_0)$ ile gösterilir ve limitin var olması koşulu ile

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ olarak tanımlanır. Bu durumda}$$

f fonksiyonunun x_0 da türevlenebilir olduğu söylenir.

Genel olarak ; $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi, limitin var olması koşulu ile $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x)$ fonksiyonudur.

* $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin birçok notasyonu vardır:

$$f'(x) = y'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df$$

* $x=x_0$ daki türev notasyonları:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$



* $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ limiti:

- ① $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki grafiğinin eğimi
- ② " " " " teğetinin "
- ③ $f(x)$ in $x=x_0$ noktasında x değişkenine bağlı değişim oranı
- ④ x_0 daki $f'(x_0)$ türevi

anlamlarına getir.

* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ise $f'(x)$ 'i tanımı kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} - \sqrt{1+x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+(x+h)^2 - (1+x^2)}{h(\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(h+2x)}{h(\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2})} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Sağdan - Soldan Türevler:

Bir f fonksiyonunun $x=a$ daki sağdan türevi, eğer limit mevcutsa:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ olarak tanımlanır.}$$

$x=a$ 'daki

Bir f fonksiyonunun $x=a$ 'daki soldan türevi, eğer limit mevcutsa

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

* f fonksiyonunun $x=a$ da türeğe sahip olması için

$$f'_+(a) = f'_-(a) \quad \text{olmalıdır.}$$

* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=1$ deki türevini hesaplayınız.

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h+2) = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h) - 3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = \underline{\underline{2}}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \quad \checkmark$$

Kapalı Aralıkta Türevlenebilirlik:

* $y=f(x)$ fonksiyonu bir açık aralığın her noktasında bir türeğe sahipse "açık aralıkta türevlenebilirdir".

* Bir $f(x)$ fonksiyonu, (a,b) açık aralığında türevlenebilir

ve $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ($x=a$ noktasında sağ türev) ve

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ ($x=b$ de sol türev) limitleri mevcutsa

bu fonksiyon $[a,b]$ de türevlenebilirdir.

Türev ve Süreklilik

T4

* Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $x=x_0$ da türevlenebilir bir fonksiyon ise $x=x_0$ da süreklidir.

Fonk. Türevli \Rightarrow fonk. Sürekli \checkmark

Fonk. Süreksiz \Rightarrow Fonk. Türevsiz \checkmark

* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 1 \\ 2x - 4, & x > 1 \end{cases}$

Fonksiyonunun $x=1$ deki türevlenebilirliğini araştırın.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

$\neq \Rightarrow$ fonk. $x=1$ de süreksiz $\Rightarrow x=1$ de Türevlenemez

* $f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonu $x=1$ de türevlenemez ancak bu noktada süreklidir. Gösteriniz.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 = f(1)$$

Fonk.

$x=1$ de sürekli \checkmark

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = -2$$

\neq $x=1$ de Türevlenemez

Türev Alma Kuralları

$$① f(x) = c \quad (c: \text{sabit}) \quad \text{ise} \quad f'(x) = 0$$

$$② f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$③ f(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow f'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$④ [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$⑤ \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$⑥ f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x$$

$$f(x) = \operatorname{cosec} x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

⑦ Bileşke fonk. Türevi:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$* y = \tan(5 - \sin 2t) \Rightarrow y' = ?$$

$$y' = \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2$$

$$⑧ r = \sin(f(t)) \quad f(0) = \frac{\pi}{3}, \quad f'(0) = 4$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{t=0} = ?$$

$$\frac{dr}{dt} = \cos(f(t)) \cdot f'(t)$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_{t=0} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{f'(0)}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{2}$$

$$⑨ f'(3) = -1 \quad g'(2) = 5 \quad g(2) = 3 \quad y = f(g(x)) \Rightarrow$$

$$y'(2) = ?$$

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow y'(2) = \underbrace{f'(g(2))}_{-1} \cdot \underbrace{g'(2)}_5 = -5$$

Bir Eğrinin Teğet ve Normal Doğrusu

$y=f(x)$ bir eğri ve $P(x_0, y_0)$ eğri üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda $x=x_0$ dan geçen teğet doğrunun eğimi $m_T = f'(x_0)$ ve teğet doğrunun denklemi $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ dir.

Normal doğrunun denklemi ise:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_T} (x - x_0) \quad \text{yani} \quad \boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0)} \quad \text{dir.}$$

$$(m_N = -\frac{1}{m_T})$$

* $y = \frac{1}{(1-2x)^3}$ eğrisine teğet olan her doğrunun eğiminin pozitif olduğunu gösteriniz.

$$y = (1-2x)^{-3} \quad y' = -3 \cdot (1-2x)^{-4} \cdot (-2) = \frac{6}{(1-2x)^4} > 0 \quad (x \neq \frac{1}{2} \text{ için})$$

Eğri üzerindeki her (x, y) noktasında teğet doğrunun eğimi pozitiftir.

* $y = \tan \frac{\pi x}{4}$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki teğet ve normal doğrularının denklemlerini bulunuz.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1)} = \left(1 + \tan^2 \frac{\pi x}{4} \right) \cdot \frac{\pi}{4} \Big|_{(1,1)} = (1+1) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m_T = \frac{\pi}{2} \quad m_N = -\frac{2}{\pi}$$

$$\text{Teğet denklemi} \Rightarrow y - 1 = \frac{\pi}{2} (x - 1) \rightarrow y = \frac{\pi}{2} x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Normal denklemi} \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{\pi} (x - 1) \rightarrow y = -\frac{2}{\pi} x + \frac{2}{\pi} + 1$$

* $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevinin $f'(x) = \cos x$ olduğunu gösteriniz.

$$\sin(x+h) = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$= \cos x$$

Yüksek Basamaktan Türevler

Eğer $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ fonksiyonu da türevlenebilir ise bu fonksiyona $f(x)$ in 2. türevi denir ve $y'' = f''(x)$ ile gösterilir.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = D^2 f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Genel olarak, bir fonksiyonun n . mertebeye türevi:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D^n f(x) \quad \text{notasyonlarıyla gösterilir. } (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$f^{(0)}(x) = f(x) \text{ dir.}$$

NOT: x -ekseni boyunca hareket eden bir nesnenin t zamanındaki pozisyonu $x = f(t)$ ise nesnenin t andaki hızı $v(t) = \frac{dx}{dt} = f'(t)$ ve t andaki ivmesi $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = f''(t)$ dir.

Sırat hızın mutlak değeridir: $\text{Sırat} = |v(t)| = \left| \frac{dx}{dt} \right|$

* $y = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonunun n . merteye türevi için bir formül bulunuz.

$$y = (1+x)^{-1} \quad y' = -(1+x)^{-2} \quad y'' = 2(1+x)^{-3} \quad y''' = -3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-4}$$

$$y^{(4)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-5} \dots \dots y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (1+x)^{-(1+n)}$$

* $f(x) = \sin(ax+b)$ ise $f^{(n)}(x)$ için bir formül bulunuz.

$$f'(x) = a \cdot \cos(ax+b)$$

$$f''(x) = -a^2 \sin(ax+b)$$

$$f'''(x) = -a^3 \cos(ax+b)$$

$$f^{(4)}(x) = a^4 \sin(ax+b)$$

$$f^{(5)}(x) = a^5 \cos(ax+b)$$

$$f^{(6)}(x) = -a^6 \sin(ax+b)$$

⋮

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot a^{2k} \cdot \sin(ax+b)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cdot a^{2k+1} \cdot \cos(ax+b)$$

Kapalı Fonksiyonun Türevi / Kapalı Türetme Yöntemi

$F(x,y)=0$ şeklindeki bir fonksiyon y 'yi x 'in bir kapalı fonksiyonu olarak tanımlar. Bu fonksiyonun türevini alırken:

① y fonksiyonunu x 'e göre türevi alınabilir bir fonk. olduğu kabul edilerek denklemin x 'e göre türevi alınır

② Elde edilen türev denkleminde y' çekilir.

Bu yöntem "kapalı türetme yöntemi" denir.

$$⑧ y^6 - y - x^3 = 0 \Rightarrow y' = ?$$

↓ x'e göre türev

$$6 \cdot y^5 \cdot y' - y' - 3x^2 = 0 \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{6y^5 - 1}$$

$$⑧ x^2y - xy^3 + \sin(x+y) = 0 \Rightarrow y' = ?$$

↓ x'e göre türev

$$2xy + x^2y' - y^3 - 3xy^2y' + (1+y')\cos(x+y) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y' = - \frac{2xy - y^3 + \cos(x+y)}{x^2 - 3xy^2 + \cos(x+y)}$$

$$⑧ y = \sin(x+y) \Rightarrow y'' = ?$$

↓ x'e göre türev

$$y' = (1+y')\cos(x+y)$$

↓ x'e göre türev

$$y'' = (1+y')^2(-\sin(x+y)) + y'' \cdot \cos(x+y)$$

$$y'' = \frac{(1+y')^2 \cdot (-\sin(x+y))}{1 - \cos(x+y)}$$

$$⑧ x^3 + y^3 - 9xy = 0 \quad \text{eğrisinin } (2,4) \text{ noktasındaki teğet ve normal doğrusu?}$$

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0 \rightarrow 3x^2 + 3y^2y' - 9y - 9xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 9x}$$

$$y' \Big|_{(2,4)} = m_T = \frac{4}{5} \Rightarrow m_N = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Teğet} \Rightarrow y - 4 = \frac{4}{5} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$\text{Normal} \Rightarrow y - 4 = -\frac{5}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$$

Lineerleştirme: Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da türevlenebilir ise aşağıdaki yaklaşım fonksiyonu

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirilmesi olarak tanımlanır. f in L ile $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımına f fonksiyonunun a noktasındaki lineer yaklaşımı denir. $x=a$ bu yaklaşımın merkezidir.

*) $f(x) = \sqrt{1+x}$ in $x=0$ daki lineerleştirmesini bulunuz.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad f(0) = 1 \Rightarrow L(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

*) $(1,001)^5 + 3(1,001)^{3/2} + 2$ değerini lineerleştirme kullanarak yaklaşık olarak hesaplayın.

$$a=1 \quad f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2 \quad \text{olsun.}$$

$$f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2} \quad f'(1) = \frac{1}{2} \quad f(1) = 0$$

$$L(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow f(x) \approx L(x)$$

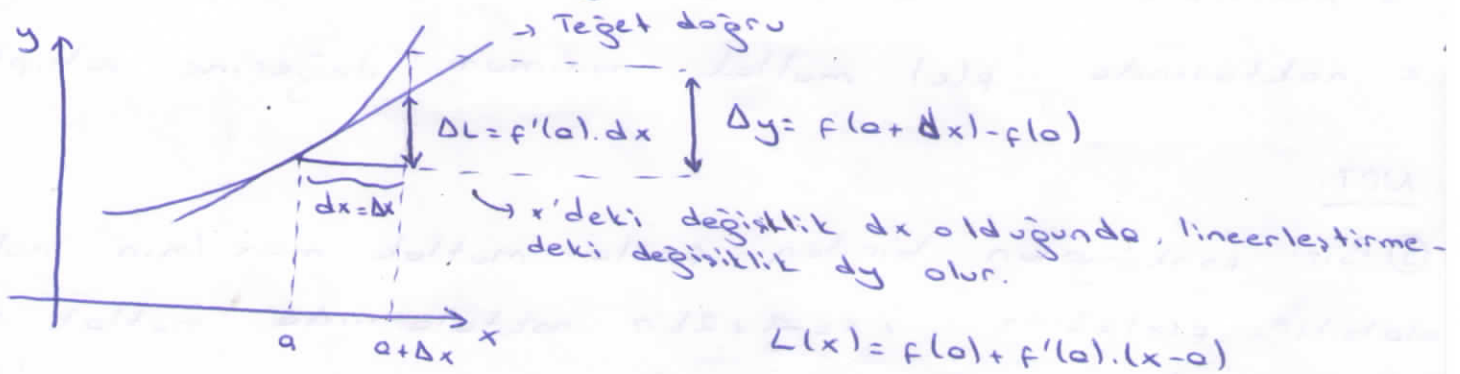
$$\Rightarrow f(1,001) \approx L(1,001) = \frac{1}{2}(1,001-1) = \underline{\underline{0,0005}}$$

Diferansiyel:

$y=f(x)$ türetilenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir ve dy diferansiyeli:

$dy=f'(x)dx$ ile tanımlanır.

* Geometrik olarak; $x=a$ noktasının $dx=\Delta x$ kadar değişimi durumunda $f(x)$ in lineerleşmesinde meydana gelen ΔL değişimi dy diferansiyelidir.



$$\Delta y = \Delta L = L(a + dx) - L(a) = f(a) + f'(a) \cdot (a + dx - a) - f(a) = f'(a) \cdot dx$$

Gösterim:

$$dy = df$$

$$* d(\cos x) = -\sin x \cdot dx$$

$$d(\tan 2x) = +2 \sec^2 2x \cdot dx$$

$$* y = x^5 + 5x^4 - 2x \Rightarrow dy = (5x^4 + 20x^3 - 2) dx$$

* $(1,001)^5 - 3(1,001)^{3/2} + 2$ değerini diferansiyel ile yaklaşıkt olarak hesaplayın. $a=1$ $f(x) = x^5 - 3x^{3/2} + 2$ $f'(x) = 5x^4 - \frac{9}{2}x^{1/2}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$ $f(1) = 0$

$$dy = f'(1) \cdot dx$$

$$dy = f(1,001) - \underbrace{f(1)}_0 = f(1,001) \quad dx = \Delta x = 1,001 - 1 = 0,001$$

$$dy = f'(1) \cdot dx \Rightarrow f(1,001) = \frac{1}{2} \cdot 0,001 = \underline{\underline{0,0005}}$$