Ör: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x}\right)=?$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x}\right) \to \infty-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x+\sqrt{4x^2+3x}\right).\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)}{\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+3x)}{2x-\sqrt{4x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2x-\sqrt{4x^2+3x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2x-|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2x+x\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}.\left(2+\sqrt{4+\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{2+2}=\frac{-3}{4}$$

Ör: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(\sin x)}{2x^2} = ?$ (L'Hopital kullanılmayacak)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(\sin x)}{2x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(\sin x)).(1+\cos(\sin x))}{2x^2.(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2(\sin x)}{2x^2.(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{2x^2} \cdot \frac{1}{(1+\cos(\sin x))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin^2(\sin x)}{\sin^2 x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 x}{2x^2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(\sin x)}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

NOT: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(\sin x)}{\sin^2 x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin^2 t}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0} \underbrace{\dfrac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \underbrace{\dfrac{\sin t}{t}}_{1} = 1$

$\sin x = t$ diyelim.

ör: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2}, & -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre

i.) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ limitlerini hesaplayınız.

ii.) $x=-2$ ve $x=1$ noktalarındaki süreksizlik tiplerini belirleyiniz.

i.) $\lim\limits_{x \to -2^-} x = -2$, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ olduğu için $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ limit YOK.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x}).(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}}_{1} . \underbrace{\frac{-1}{1+\sqrt{x}}}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2}$ $\Big\}$ olduğu için $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ limiti YOK.

ii.) $f(x)$, $x=-2$ de sonsuz süreksizliğe sahip

$f(x)$, $x=1$ de sıçramalı süreksizliğe sahip

Ön: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} &, x<0 \\ a - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) &, 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{b} + \arctan \sqrt{3}\, x &, x \geq 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ olmak üzere hangi a ve b değerleri için

f(x) fonksiyonu süreklidir.

$\lim_{x \to 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x^2} \leq x^2$

$\lim_{x \to 0^-} -x^2 = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

sandviç teoremi gereği

$\lim_{x \to 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$ dır.

$\lim_{x \to 0^+} a - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) = a - \arcsin \frac{1}{2} = a - \frac{\pi}{6}$

$\lim_{x \to 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$

$a - \frac{\pi}{6} = 0$

$a = \frac{\pi}{6}$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{\pi}{6} - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{\pi}{6b} + \arctan \sqrt{3}\, x = \frac{\pi}{6b} + \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{6b} + \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6b} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6b} = \frac{-2\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{-1}{4}$

Ör: $x>0$ olmak üzere $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ile verilen

f fonksiyonunun türevini, türevin tanımını

kullanarak bulunuz

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}.(\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x}.(\sqrt{x+h}).(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}.2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{-1}{2x^{3/2}}$$

Ör: $f(x)=\begin{cases} \tan(\sin x), & x\leq 0 \\ \frac{1}{x}\sin x^2, & x>0. \end{cases}$

ile tanımlı f fonksiyonunun $x=0$ noktasında türeve sahip olup olmadığını belirleyiniz.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\sin x^2=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\tan(\sin x)=0, \quad f(0)=0.$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, $x=0$ noktasında süreklidir.

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}\sin h^2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h^2}{h^2}=1.$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\tan(\sin h)-0}{h}.$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\tan(\sin h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\underbrace{\frac{\tan(\sin h)}{\sin h}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}=1$$

$f_+'(0)=f_-'(0)$ olduğundan

$x=0$ noktasında $f(x)$ türevlenebilirdir ve $f'(0)=1$

Ör: g fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli fakat türevlenemez bir fonksiyon ve $g(0)=8$ ise. $f(x)=x.g(x)$ fonksiyonu için $f'(0)$ değerini hesaplayınız.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h.g(h)-\overbrace{0.g(0)}^{0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}g(h)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}g(h)$$

$$=g(0)$$

$$=8$$

Ör: $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (1+\ln x)^x$ ise f fonksiyonunun türevini bulunuz..

$$f(x) = (1+\ln x)^x$$

$$\ln(f(x)) = \ln(1+\ln x)^x$$

$$\ln(f(x)) = x \ln(1+\ln x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 . \ln(1+\ln x) + x . \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x . \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}$$

$$f'(x) = (1+\ln x)^x \left[\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right]$$

Ör: $|x|<1$

$f(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}$ ise $f'(0)$ değerini hesaplayınız.

$f(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}$

$\ln(f(x))=\ln(2+\arcsin x)^{\tan x}$

$\ln(f(x))=\tan x\ln(2+\arcsin x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sec^2 x\ln(2+\arcsin x)+\tan x\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2+\arcsin x}$$

$$f'(x)=(2+\arcsin x)^{\tan x}\left[\sec^2 x\ln(2+\arcsin x)+\tan x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(2+\arcsin x)}\right]$$

$$f'(0)=(2+\underbrace{\arcsin 0}_{0})^{\tan 0}\left[\underbrace{\sec^2 0}_{1}\ln(2+\underbrace{\arcsin 0}_{0})+\tan 0\cdot\frac{1}{1\cdot(2+\arcsin 0)}\right]$$

$=(2+0)^0\cdot(1\cdot\ln 2+0)$

$=\ln 2.$

$f'(0)=\ln 2$

Ör 1: g ve h fonksiyonları $g(1)=h'(1)=1$, $g'(1)=h(1)=2$ şartlarını sağlayan pozitif değerli ve türevlenebilen birer fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu da

$f(x)=[g(x^2)]^{h(x)}$ ile tanımlı olsun.

Buna göre $f'(1)$ değerini bulunuz.

$$f(x)=[g(x^2)]^{h(x)} \quad , \quad f(1)=[g(1)]^{h(1)}=1^2=1$$

$$\ln[f(x)] = \ln[g(x^2)]^{h(x)}$$

$$\ln[f(x)] = h(x)\ln[g(x^2)]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x)\ln[g(x^2)]+h(x)\cdot\frac{2x\, g'(x^2)}{g(x^2)}$$

$$f'(1)=f(1)\cdot\left[h'(1)\ln[\underbrace{g(1)}_{1}]+h(1)\cdot\frac{2g'(1)}{g(1)}\right]$$

$$f'(1)=1\cdot\left[1\cdot 0+2\cdot\frac{2\cdot 2}{1}\right]$$

$$f'(1)=8$$

Ön: $\sqrt[3]{x-1} - 3x = 0$ denkleminin $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ aralığında bir kökünün var olup olmadığını araştırınız.

$f(x) = \sqrt[3]{x-1} - 3x$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ aralığında sürekli *

$f(0) = -1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^{1/3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = a > 0$

Dolayısıyla f, $[-1, a]$ aralığında da her değeri alır. O halde $0 \in [-1, a]$ olduğu için 0 değerini de alır yani $f(c) = 0$ olacak şekilde $c \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ vardır.

<u>veya</u>

$f(0) = -1 < f(c) = 0 < f\left(-\frac{1}{2}\right) = a.$

olduğundan Ara Değer Teoremine göre $c \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ $f(c) = 0$ olacak şekilde vardır.

Ör: $y - 2\cos(\pi y - x) = 2x+3$ eğrisinin $P(0,1)$ noktasındaki teğet doğru denklemini bulunuz.

($y' = -\frac{F_x}{F_y}$ formülü kullanılmayacak)

$$y - 2\cos(\pi y - x) = 2x+3$$

$$y' + (\pi y - x)' . 2 . \sin(\pi y - x) = 2.$$

$$y' + (\pi y' - 1) . 2 . \sin(\pi y - x) = 2.$$

$$y'|_P + (\pi y'|_P - 1) . 2 . \underbrace{\sin(\pi - 0)}_{0} = 2.$$

$$y'|_P = 2 \quad , m = y'|_P = 2.$$

Teğet doğru: $m = 2$, $P = (0,1)$

$$y - 1 = 2.(x - 0)$$

$$y = 2x + 1.$$

Ör: $\sin(xy)=1-x^2-y^2+x^2y^3$ eğrisinin x-eksenini kestiği noktaları bulunuz ve eğrinin bu noktalardaki teğet doğrularının birbirine paralel olup olmadığını belirleyiniz.

$y=0$ için $\quad 0=1-x^2 \Rightarrow x=\mp 1$ de x eksenini keser

$x=1$ $\quad x=-1 \Rightarrow$ Noktalar $(1,0)$ ve $(-1,0)$.

I. yol: $\quad \sin(xy)=1-x^2-y^2+x^2y^3$

$(xy)'\cos(xy)=-2x-2yy'+2xy^3+3x^2y^2y'$

$* \quad (y+xy')\cos(xy)=-2x-2yy'+2xy^3+3x^2y^2y'$

$m_1=y'|_{(1,0)}$ için $*$ denkleminden

$(0+y')\underbrace{\cos 0}_{1}=-2 \Rightarrow y'=-2 \Rightarrow m_1=-2.$

$m_2=y'|_{(-1,0)}$ için $*$ denkleminden.

$(0-y')\cos 0=+2 \Rightarrow -y'=2 \Rightarrow y'=-2,\ m_2=-2$

$m_1=m_2$ olduğundan teğetler paraleldir.

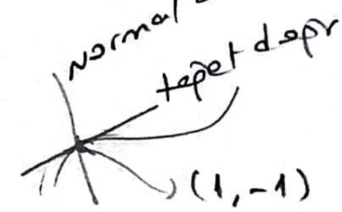
II. yol: $\quad y'=-\dfrac{F_x}{F_y}$, $\quad F=1-x^2-y^2+x^2y^3-\sin(xy)$

$y'=-\dfrac{-2x+2xy^3-y\cos(xy)}{-2y+3x^2y^2-x\cos(xy)}$, $\quad m_1=y'|_{(1,0)}=-\dfrac{-2}{-1}=-2$

$m_2=y'|_{(-1,0)}=-\dfrac{2}{1}=-2$

$m_1=m_2$ olduğu için teğetler paraleldir

Ör: $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki normal doğru denklemi $2x+y-1=0$ dır. $x=-1$ noktasında $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu vardır. buna göre $(f^{-1})'(-1)=?$



$f(a)=-1 \Rightarrow f^{-1}(-1)=a$ dır.

$2a-1=+1 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$

$2x+y-1=0 \Rightarrow y=\underset{\sim}{-2}x+1$, $m_N=-2$ ise.

$m_N=-2$.

teğet doğrunun eğimi

$m_N\cdot m_T=-1 \Rightarrow m_T=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ dır. $\underbrace{y'\big|_{(1,-1)}}_{f'(1)}=m_T=\frac{1}{2}$.

$$(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

Ör: Diferansiyel hesap yada lineer yaklaşım kullanarak $\sqrt[3]{28}$'in yaklaşık değerini hesaplayınız

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f'(x)=\frac{1}{3}.x^{-2/3}$

$a=27$ için $f(27)=\sqrt[3]{27}=3$, $f'(27)=\frac{1}{3}.(27)^{-2/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$.

I.yol
Lineer yaklaşım ile.

$L(x)=f(a)+f'(a).(x-a)$

$L(x)=f(27)+f'(27).(x-27)$

$L(x)=3+\frac{1}{27}.(x-27)$

$f(x)\approx L(x) \Rightarrow f(x)\approx 3+\frac{1}{27}.(x-27)$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}.(\underbrace{28-27}_{1})$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}$

$f(28)\approx \frac{82}{27}$

II.yol Diferansiyel hesap ile

$\Delta f\approx df \Rightarrow f(x+dx)-f(x)\approx df$.

$f(x+dx)\approx f(x)+df$, $df=f'(x)dx$

a noktasında
$a=27$ ve $dx=1$

$f(a+dx)\approx f(a)+df$, $df=f'(a).dx$

$f(27+1)\approx f(27)+df$, $df=f'(27).1$

$f(28)\approx 3+\frac{1}{27}$. , $df=\frac{1}{27}\cdot 1=\frac{1}{27}$

$f(28)\approx \frac{82}{27}$

Ör: $f(x)=\dfrac{\ln(18-2x^2)}{|2x-5|}+\arcsin(x-3)$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$18-2x^2>0$, $2x-5\neq 0$, $-1\leq x-3\leq 1$

$18>2x^2$ $\quad x\neq \frac{5}{2}$ $\quad 2\leq x\leq 4$

$x^2<9$ $\quad [2,4]$

$(-3,3)$

Tanım kümesi $[2,\frac{5}{2})\cup(\frac{5}{2},3)$

Ör: $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sec x$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(\frac{2\pi}{3})$ değerini bulunuz.

$f'(x)=\sec x+x\sec x.\tan x>0 \quad \forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

olduğundan $f(x)$ artandır $\Rightarrow f$, 1-1 dir f in tersi vardır

$f(a)=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow a\sec a=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow a=\frac{\pi}{3}$ bulunur.

$$(f^{-1})'(\frac{2\pi}{3})=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}}=\frac{3}{6+2\sqrt{3}\pi}$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=\sec\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{3}=2+\frac{\pi}{3}.2.\sqrt{3}=\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Ör: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}} + \ln\left(\dfrac{9-x^2}{x^2+x}\right)$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$|x|-x > 0$ için tanımlı $\Rightarrow |x| > x \Rightarrow \underbrace{x < 0}_{(-\infty, 0)}$

$\dfrac{9-x^2}{x^2+x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(3-x)\cdot(3+x)}{x\cdot(x+1)} > 0$

		-3		-1		0		3	
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x.(x+1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{9-x^2}{x.(x+1)}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

$(-3,-1) \cup (0,3)$

$(-\infty, 0)$ ve $(-3,-1) \cup (0,3)$

Buradan Tanım kümesi: $(-3,-1)$

Ör: $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin(x+\frac{1}{x})$ limitini hesaplayınız

(L'Hopital kullanılmayacak)

$\forall \theta$ için $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ olduğundan.

$-1 \leq \sin(x+\frac{1}{x}) \leq 1$ dır.

$-x^2 \leq x^2 \sin(x+\frac{1}{x}) \leq x^2$.

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0.$

$\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ olduğundan. Sandviç (sıkıştırma)

Teoremi gereği $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin(x+\frac{1}{x}) = 0$ dır.

Ör: $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ ile verilen f fonksiyonunun

her x için tersinin mevcudiyetini araştırınız.

Tersi varsa. $(f^{-1})'(2)$ değerini hesaplayınız.

$$f'(x) = \sqrt{x^2+3} + x \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}} = \sqrt{x^2+3} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

$f'(x) = \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} > 0$; f, her x için artan olduğu için tüm reel sayılarda tersi vardır.

$f(a) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = a$

$\Downarrow$

$a\sqrt{a^2+3} = 2$

$\Downarrow$

$a = 1$ dir

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$