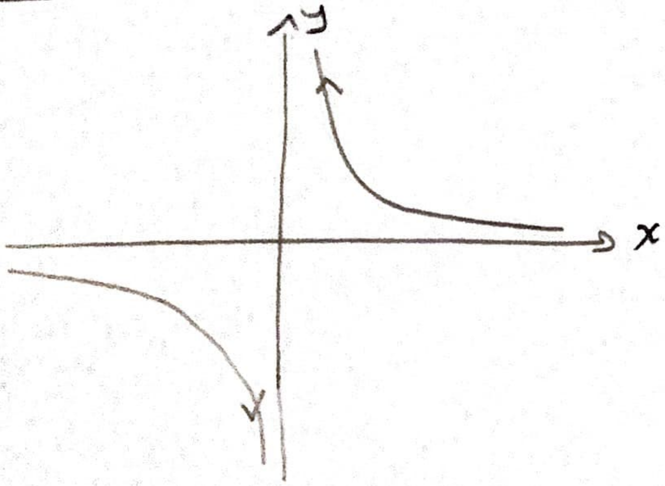
Sonsuz Limitler

* Ör: $y=f(x)$, $f(x)=\frac{1}{x}$



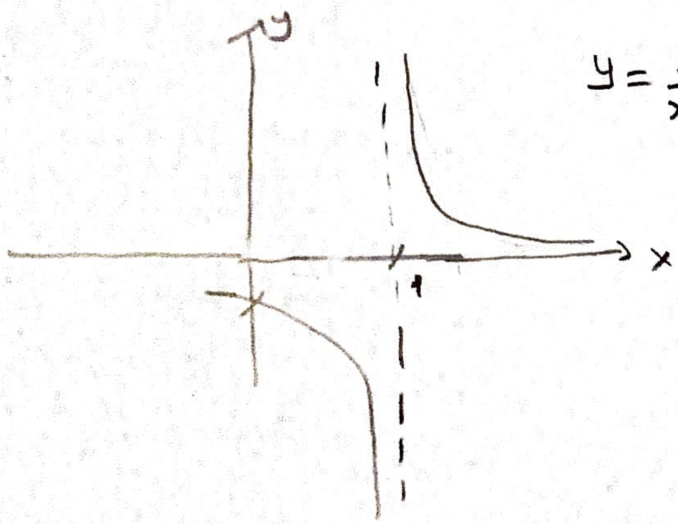
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

dolayısıyla

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

Ör:



$y=\frac{1}{x-1}$, $y=f(x)$

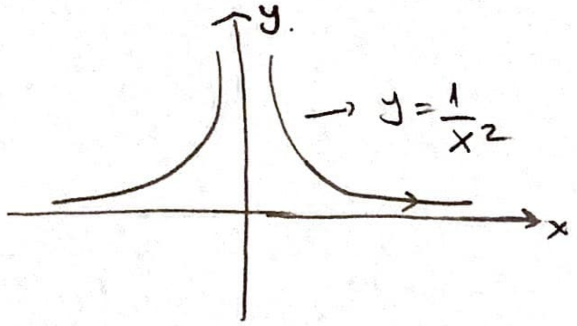
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

dolayısıyla

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ yoktur.

ör: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $y=f(x)$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

ör:

a.) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{(\cancel{x-2}).(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{0}{4}$

b.) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$

c.) $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{(x-2).(x+2)}=\lim_{x\to 2^+}\overbrace{\frac{1}{(x-2)}}^{+\infty}.\overbrace{\frac{x-3}{(x+2)}}^{-\frac{1}{4}}=-\infty$

d.) $\displaystyle \lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2^-}\overbrace{\frac{1}{(x-2)}}^{-\infty}.\overbrace{\frac{x-3}{(x+2)}}^{-\frac{1}{4}}=+\infty$

e.) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2).(x+2)}$ limit YOK

f.) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)^3}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

Süreklilik

* Bir Noktada Süreklilik

Tanım: (iç nokta) c noktası $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktası olmak üzere eğer

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

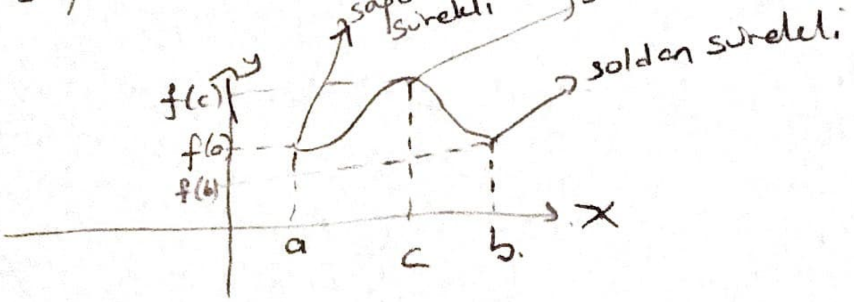
ise $f(x)$ fonksiyonu c iç noktasında süreklidir.

*NOT: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ →
- $f(x)$ $x=c$'de tanımlı
- $\lim_{x \to c} f(x)$ limiti mevcut
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Tanım: (uç nokta) Bir $y=f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşullarda tanım kümesinin bir sol uç noktası a'da süreklidir veya bir sağ uç noktası b'de süreklidir.

$$\underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)}_{\text{sağdan sürekli}} \quad \text{veya} \quad \underbrace{\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)}_{\text{soldan sürekli}}$$

*NOT



Süreklilik Testi

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa bir iç $x=c$ noktasında süreklidir

i.) $f(c)$ vardır. (c, f'in tanım kümesindedir.)

ii.) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ mevcut.

iii.) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

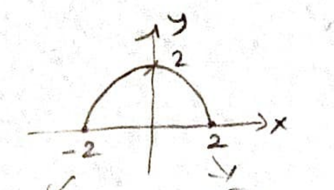
NOT: Eğer bir f fonksiyonu bir c noktasında sürekli değilse f fonksiyonu c'de süreksizdir denir

Eğer f fonksiyonu için

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow$ tanım aralığının $x=c$ noktasında sağdan süreklidir.

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c) \Rightarrow$ tanım aralığının $x=c$ noktasında soldan süreklidir.

Ör: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında sürekli midir?



* $\forall c \in (-2,2)$ için $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-c^2}$ olduğu için. $f(x)$ fonksiyonu tüm iç noktalarda süreklidir.

* $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2) \Rightarrow$ sağdan sürekli

* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2) \Rightarrow$ soldan sürekli

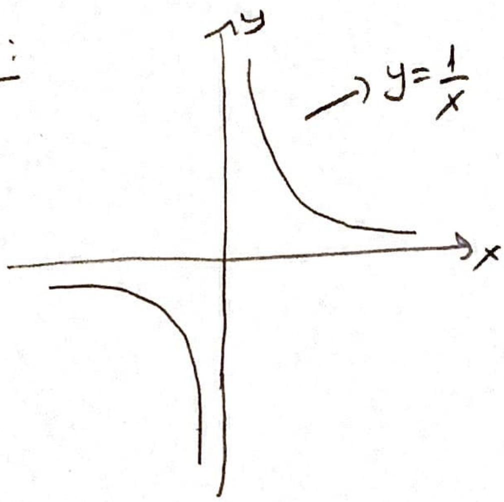
-2: sol uç nokta
2: sağ uç nokta
$(-2,2)$: iç noktalar

dolayısıyla $[-2,2]$ aralığında $f(x)$ süreklidir.

* Sürekli Fonksiyon

Bir fonksiyonun bir aralıkta sürekli olması için gerek ve yeter şart aralığın her noktasında sürekli olmasıdır.

* Ör:



fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur sadece $x=0$ noktasında süreksizdir.

* Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x=c$ de sürekli ise aşağıdaki işlemlerde $x=c$'de süreklidir.

i) $f(x) \mp g(x)$

ii.) $k.f(x)$, (k herhangi bir sayı)

iii) $f(x)/g(x)$

iv.) $f(x).g(x)$

v.) $[f(x)]^n$, $(n \in \mathbb{Z}^+)$

vi.) $\sqrt[n]{f(x)}$, $(n \in \mathbb{Z}^+$; c'yi içeren açık aralıkta tanımlı olmak koşuluyla)

* Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonu c'de sürekli ve g fonksiyonu $f(c)$ de sürekli ise o zaman gof de c'de süreklidir.

Ör: Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerinin tamamında sürekli olduklarını gösteriniz.

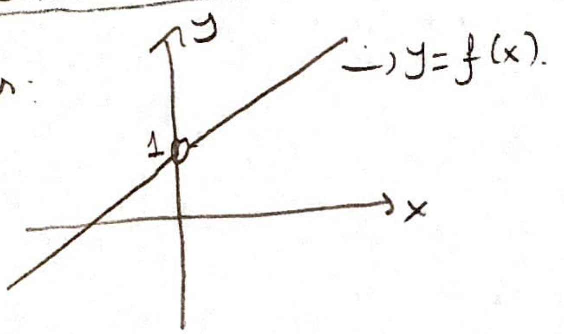
i.) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$, $f(x) = x^2 - 2x - 5$ ve $g(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonlarının bileşkesidir tanım kümesinde süreklidir.

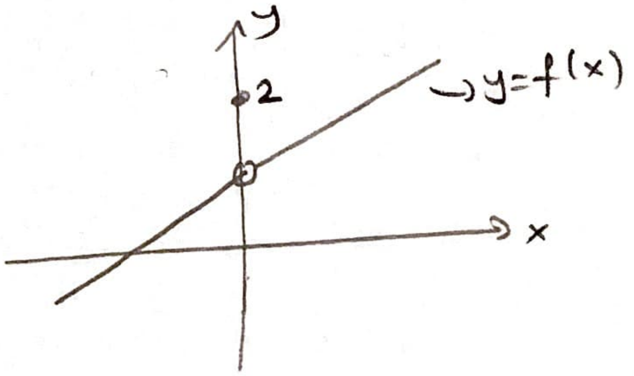
ii.) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$, $x \neq \mp\sqrt{2}$ için süreklidir. Mutlak değer ve bölüm fonksiyonunun bileşkesidir.

Süreksizlik Çeşitleri

A. * Kaldırılabilir Süreksizlik

Ör:



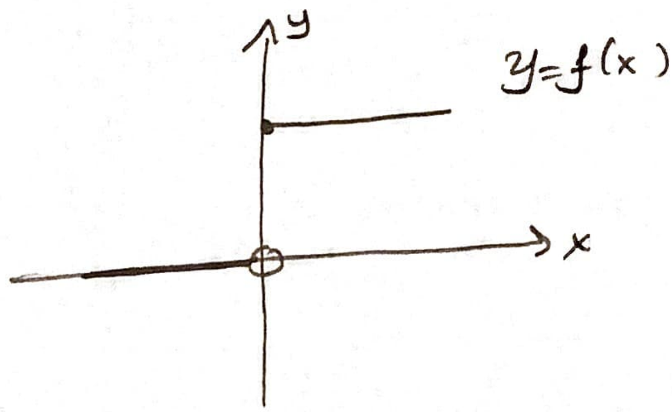


"x = 0 noktasında süreksiz kaldırılabilir süreksizlik"

A* Bir f(x) fonksiyonu bir x = a noktasında limiti mevcut fakat $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ veya f(a) tanımlanmamış ise f(x) fonksiyonu x = a noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir denir

* Sıçramalı Süreksizlik

Ör:



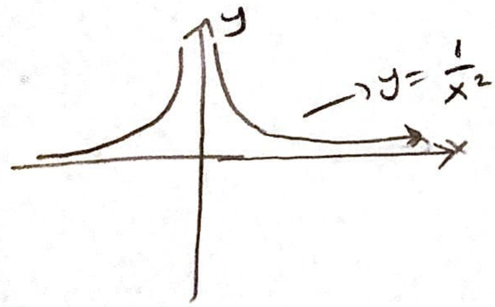
$\lim_{x \to 0} f(x)$ limit yok.

" $x=0$ noktasında fonksiyon sıçramalı süreksizliğe sahiptir "

** Bir fonksiyonun bir noktada tek taraflı limitleri var fakat değerleri birbirinden farklı ise fonksiyon o noktada sıçramalı süreksizdir. Bu türden süreksizliğe sıçramalı süreksizlik denir.

* Sonsuz Süreksizlik

Ör:



" $x=0$ noktasında fonksiyon sonsuz süreksizliğe sahiptir "

** Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti $+\infty$ veya $-\infty$ ise bu türden süreksizliğe sonsuz süreksizlik denir.

Ör:

$$f(x)=\begin{cases} 2+x, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli midir?

i.) $f(0)=2$ ✓

ii.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2+x=2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğu için

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ mevcut değil. dolayısıyla $x=0$ noktasında süreksizdir.

ör:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

x=0 noktasında sürekli midir? Süreksiz ise süreksizlik çeşidi?

i.) $f(0)=2$ ✓

ii.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

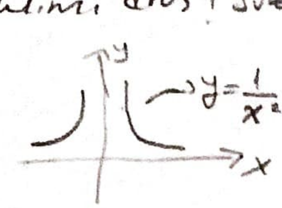
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\,\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$ ✓

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}\neq 2=f(0)$

dolayısıyla x=0 noktasında f(x) fonksiyonu süreksizdir. Kaldırılabilir süreksizlik var.

ör: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise çeşidi?



i) $f(0)$ da tanımsız

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$ $\Bigg\}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

x=0'da sonsuz = sonsuz süreksizlik var.

Bir Noktaya Doğru Sürekli Genişlemeler

Ör: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x=0$ noktası dışında her noktada sürekli bir fonksiyondur.

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{eğer } x,\ f\text{'in tanım kümesinde} \\ L, & \text{eğer } x=c \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer

$$F(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x)$, $x=0$'da sürekli olacaktır.

tanım kümesini genişletmek mümkün. $F(x)$'le $f(x)$'in $x=0$'da sürekli genişlemesi denir.

Ör: $$f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$, $x=0$ noktasında sürekli midir? süreksizse çeşidi? sürekli bir genişlemesi?

i.) $f(0)=2$, ✓

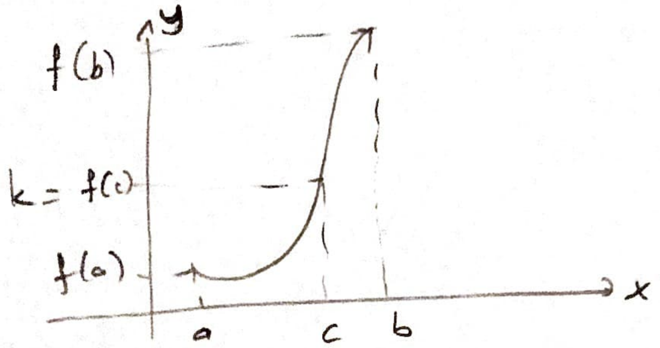
ii.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\cdot 2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$ ✓

iii.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0)$ $\Rightarrow$ süreksizdir (kaldırılabilir süreksizlik)

* $$F(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$$, $x=0$ da sürekli hale getirilir

Sürekli Fonksiyonlar İçin Ara Değer Teoremi

Eğer f, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ve k da $f(a)$ ve $f(b)$ arasında herhangi bir değer ise bu durumda $k=f(c)$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında bazı c'ler vardır.



* Kök bulmak için bir sonuçtur.

Ör: $x^3-x-1=0$ denkleminin 1 ve 2 arasında bir kökünün olduğunu gösteriniz.

* $f(x)=x^3-x-1$, $[1,2]$ aralığında sürekli

$f(1)=1-1-1=-1$, $f(2)=8-2-1=5$.

$k=0$, $f(1)$ ve $f(2)$ arasında kalan bir değerdir yani $f(1)=-1<0<f(2)=5$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $1<c<2$ olmak üzere $f(c)=0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.