~ GENEL UYGULAMA ~

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos\pi x}{1-x} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$u = 1-x \Rightarrow x\to 1 \Rightarrow u\to 0$ $\qquad \cos(\pi - \pi u) = -\cos\pi u$

$$\lim_{u\to 0} \frac{1+\cos\pi(1-u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos\pi u}{u}\cdot\frac{\pi}{\pi} = \lim_{u\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos\pi u}{\pi u}}_{0}\cdot\pi = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-\sqrt{2-x^2}} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-\sqrt{2-x^2}}\cdot\frac{(\sqrt{2x^2-1}+1)}{(\sqrt{2x^2-1}+1)}\cdot\frac{(x+\sqrt{2-x^2})}{(x+\sqrt{2-x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(2x^2-2)}(x+\sqrt{2-x^2})}{\cancel{(2x^2-2)}(\sqrt{2x^2-1}+1)} = \frac{2}{2} = 1 \;//$$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x-\sqrt{x}} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}-1}}_{0} = 0 \;//$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$\sqrt[4]{1+x^2} = u \Rightarrow 1+x^2 = u^4 \Rightarrow x^2 = u^4-1$ $\quad , x\to 0 \Rightarrow u\to 1$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^4-1} = \lim_{u\to 1} \frac{\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)} = \frac{1}{4} \;//$$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$\sqrt{1-x} = u \Rightarrow 1-x = u^2 \Rightarrow x\to 0^+ \Rightarrow u\to 1^-$

$$\lim_{u\to 1^-} \frac{(1-u)(1+u)}{\sqrt{1-u}} = \lim_{u\to 1^-} (1+u)\sqrt{1-u} = 0 \;//$$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ limitinin varlığını araştırınız.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|\sin x|} \cdot \sqrt{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|\sin x|} \cdot \sqrt{1+\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{-x}{\sin x}}_{1} \cdot \sqrt{1+\cos x} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|\sin x|} \cdot \sqrt{1+\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \sqrt{1+\cos x} = 2$$

$\neq$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ mevcut değildir.

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{4x-\pi} = ?$ $\left(\frac{0}{0} \text{ bl.}\right)$

$4x-\pi = u \Rightarrow x = \frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}$, $x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow u\to 0$, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\tan\left(\frac{u}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{\tan\frac{u}{4}+1}{1-\tan\frac{u}{4}}-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan\frac{u}{4}}{\frac{u}{4}} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{1-\tan\frac{u}{4}} = \frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x-e} = ?$ $\left(\frac{0}{0} \text{ bl.}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} * \lim\limits_{n\to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e \quad , \quad \lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\ln(1+n)}{n} = 1 \\ * \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \end{array}\right]$$

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}$$

$\frac{x}{e} - 1 = t \Rightarrow x\to e \Rightarrow t\to 0$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{e.t} = \frac{1}{e} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = \frac{1}{e} \lim_{t\to 0} \ln(t+1)^{1/t}$$

$$= \frac{1}{e} \ln\Big(\underbrace{\lim_{t\to 0} (t+1)^{1/t}}_{e}\Big)$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \ln e = \frac{1}{e}$$

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan x)}{1-\cot x} = ?$ ($\frac{0}{0}$ bl.)

$\ln(\tan x) = u \Rightarrow \tan x = e^{u} \Rightarrow \cot x = e^{-u}$

$x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{1-e^{-u}} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{e^{u}-1} \cdot e^{u}$$

$e^{u}-1 = t$, $e^{u} = t+1$; $u \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot (t+1) = \lim_{t\to 0} \ln(t+1)^{1/t} \cdot \underbrace{(t+1)}_{1}$$

$$= \ln\Big(\underbrace{\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t}}_{e}\Big) = 1 \;//$$

10) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}} = ?$ ($\frac{0}{0}$ bl.)

$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$

$\arccos x = t$ $\quad x \to -1 \Rightarrow t \to \pi$

$x = \cos t$

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{t}}{\sqrt{\cos t + 1}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{t}}{\sqrt{\pi} + \sqrt{t}} = \lim_{t\to\pi} \frac{\pi - t}{\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to\pi} \frac{\pi - t}{\sqrt{2}.\cos\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}+\sqrt{t}}$$

$\pi - t = u$

$t \to \pi \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi - u}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi + u}} = \lim_{u\to 0} \underbrace{\frac{u/2}{\sin\frac{u}{2}}}_{1} \cdot \frac{2.1}{\sqrt{2}(\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi - u})}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(\sqrt{2\pi})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;//$$

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2^{x}-1} = ?$ ($\frac{0}{0}$ bl.)

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} \cdot \frac{x}{2^{x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2^{x}-1}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\frac{\ln(u+1)}{\ln 2}}{u} = \lim_{u\to 0} \underbrace{\frac{\ln(u+1)}{u}}_{1} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$2^{x} - 1 = u \Rightarrow 2^{x} = u+1$

$x\ln 2 = \ln(u+1)$

$x = \dfrac{\ln(u+1)}{\ln 2}$

$$= \frac{1}{\ln 2} \;//$$

$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$

12) $\lim_{x\to 0^+} (e^x + \sin x)^{\frac{1}{2x}} = ?$ $(1^\infty$ bl.$)$

$y = (e^x + \sin x)^{\frac{1}{2x}}$

$\ln y = \frac{1}{2x} \ln(e^x + \sin x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x+\sin x)}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} y\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (e^x+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = e \quad //$$

13) $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) = ?$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\quad -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1 \le \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) \le 1 \quad (x \neq 0)$

$$\Rightarrow -x^2 \le x^2 . \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) \le x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} -x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) \le \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) \le 0$$

Sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(x+\frac{1}{x^3}\right) = 0 \quad //$$

14) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{\tan x}$ fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $f(0)$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} \cdot \underbrace{\frac{x}{\tan x}}_{1}$$

$e^{2x}-1 = u \Rightarrow e^{2x} = u+1 \Rightarrow 2x = \ln(u+1) \Rightarrow x = \frac{\ln(u+1)}{2}$

$x \to 0 \Rightarrow u \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{2u}{\ln(u+1)} = \lim_{u\to 0} \frac{2}{\underbrace{\ln(u+1)^{1/u}}_{1}} = \frac{2}{1} = 2 \quad //$$

15) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}, & x\neq \frac{\pi}{2}\\ -1/2, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $x=\frac{\pi}{2}$ de sürekli midir?

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1-\cos^2 x)^{1/2}}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\frac{\ln(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$\cos^2 x=-t$

$x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow t\to 0$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t)}{-t}=\lim_{t\to 0}-\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t)^{1/t}}{1}=-\frac{1}{2}$$ //

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}=-\dfrac{1}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan süreklidir.

16) $f(x)=\begin{cases}\arcsin\frac{1-x}{2}, & 0<x<3\\ \pi/2, & x=3\\ \arctan\frac{x}{3-x}, & x>0\end{cases}$ $x=3$ de sürekli midir?

$f(3)=\frac{\pi}{2}$ tanımlı.

$\lim\limits_{x\to 3^-}\arcsin\dfrac{1-x}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\arctan\dfrac{x}{3-x}=-\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\frac{\pi}{2}\neq f(3)=\frac{\pi}{2}$ olduğundan sürekli değildir.

17) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{3+2^{\frac{1}{1-x}}}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ $x=1$ de sürekli midir?

$f(1)=0$ tanımlı

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{3+2^{\frac{1}{1-x}}}=\dfrac{0}{+\infty}=0$ ($\frac{1}{1-x}\to+\infty$)

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{3+2^{\frac{1}{1-x}}}=\dfrac{0}{3+0}=0$ ($\frac{1}{1-x}\to-\infty$)

$=$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ olduğundan $x=1$ de süreklidir.

18) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & , x<0 \\ 3-x & , 0\leq x<3 \\ (x-3)^2 & , x\geqslant 3 \end{cases}$ $x=0$ ve $x=3$ deki sürekliliğini inceleyiniz, değilse süreksizlik tipini belirleyiniz.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{-x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (3-x)=3 \end{array}\right] \neq$$

$x=0$ da sürekli değildir. sıçramalı süreksizlik

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} (3-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} (x-3)^2=0=f(3) \end{array}\right]$$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=0$ olduğundan $x=3$ de süreklidir.

19) $f(x)=\frac{x^3}{2}-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4$ fonksiyonu için $[-2,2]$ aralığında $f(c)=3$ denklemini sağlayan bir c sayısının varlığını araştırınız.

$f(x)$, $[-2,2]$ aralığında süreklidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=0 \\ f(2)=8 \end{array}\right\}$$

$f(-2)=0<f(c)=3<f(2)=8$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $f(c)=3$ olacak şekilde en az bir $c\in(-2,2)$ sayısı vardır.

20) $\cos x=x$ denkleminin $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bir çözüme sahip olduğunu ispatlayınız.

$f(x)=x-\cos x$ olsun. f, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ de sürekli.

$f(0)=-1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

$f(0)=-1<f(c)=c-\cos c=0<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

Ara Değer Teoremine göre,

$c-\cos c=0$ olacak şekilde en az bir $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ vardır.

$\underline{c=\cos c}$

21) Türevin tanımını kullanarak $f(x)=\ln(1+x)$ ise $f'(e-1)$ değerini bulunuz.

$$f'(e-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(e-1+h)-f(e-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+e-1+h)-\ln(1+e-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(e+h)-\ln(e)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{e+h}{e}\right)$$

$$\left(*\ \lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n}=e\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)^{1/h}$$

$$=\ln\Big(\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{e}\right)^{e/h}}_{e}\Big)^{1/e}=\ln e^{1/e}=\frac{1}{e}\ //$$

22) $f(x)=\dfrac{1-\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-2x}}$ tanım kümesini bulunuz.

$\arcsin x \rightarrow$ T.K. $[-1,1]$ $\Rightarrow$ $-1\leq 2-x\leq 1$ $\Rightarrow$ $-3\leq -x\leq -1$

$\Rightarrow$ $\boxed{1\leq x\leq 3}$

$x^2-2x>0 \Rightarrow x(x-2)>0$

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$		$-$		$+$

$x<0$, $x>2$

$D(f)=(2,3]$ //

23) $f(x)=\underbrace{\arccos\frac{x-5}{2}}_{f_1}+\underbrace{\log(6-x)}_{f_2}+\underbrace{\sin\sqrt[3]{x-2}}_{f_3}$ tanım kümesini bulunuz.

$D(f_1)=[-1,1] \Rightarrow -1\leq \frac{x-5}{2}\leq 1 \Rightarrow -2\leq x-5\leq 2 \Rightarrow \boxed{3\leq x\leq 7}$

$D(f_2)=(0,\infty) \Rightarrow 0<6-x \Rightarrow \boxed{x<6}$

$D(f_3)=\mathbb{R}$

$D(f)=[3,6)$ //

24) $f(x)=\arcsin(1-x)+\ln(\ln x)$ tanım kümesini bulunuz.

$-1\leq 1-x\leq 1$

$\boxed{0\leq x\leq 2}$

$\ln x>0$, $\boxed{x>0}$

$\Downarrow$

$\boxed{x>1}$

$D(f)=(1,2]$ //

25) $f(x) = \arccos\left(\log \frac{x}{10}\right)$ tanım kümesini bulunuz.

$$-1 \leq \log \frac{x}{10} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \frac{x}{10} > 0$$

$$10^{-1} \leq \frac{x}{10} \leq 10$$

$$\boxed{1 \leq x \leq 100} \quad \text{ve} \quad \boxed{x > 0} \qquad D(f) = [1, 100] \quad //$$

26) Türevin tanımını kullanarak $f(x) = \cos(3x-2)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(3x+3h-2) - \cos(3x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(3x-2).\cos 3h - \sin(3x-2).\sin 3h - \cos(3x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3.\cos(3x-2) \underbrace{\frac{[\cos 3h - 1]}{3h}}_{0} - \lim_{h \to 0} 3. \underbrace{\frac{\sin 3h}{3h}}_{1} .\sin(3x-2)$$

$$= -3 \sin(3x-2) \quad //$$

27) $y = \ln(\sin x)$, $x = \sqrt{\arccos 2^{-3t}}$ ise $\frac{dy}{dt} = ?$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{+2^{-3t}.3.\ln 2}{\sqrt{1-2^{-6t}}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} = \frac{3.\ln 2 \tan x . 2^{-3t}}{\sqrt{1-2^{-6t}}} \quad //$$

28) $\lim_{h \to 1} \frac{f(2h-1) - f(h)}{h^2 - 1} = ?$

$h - 1 = u \Rightarrow h = u + 1$

$h \to 1 \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{f(2u+2-1) - f(u+1)}{u.(u+2)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{f(u+1+u) - f(u+1)}{u\,(u+2)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \left[\frac{f[(u+1)+u] - f(u+1)}{u} . \frac{1}{u+2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} f'(u+1) = \frac{1}{2} f'(h) \quad //$$

29) $f(x) = \begin{cases} \tan(\sin x) & , x \geq 0 \\ \frac{1}{x} \sin x^2 & , x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da türevlenebilir mi?

a) $f(x)$, $x=0$ da sürekli mi?

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \tan(\sin 0) = 0 \quad \text{tanımlı} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \tan(\sin x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \sin x^2 = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = 0 \end{array}\right\} \; x=0 \text{ da sürekli.}$$

b)
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tan(\sin h) - 0}{h} \cdot \frac{\sin h}{\sin h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h} \cdot \sin h^2 - 0}{h} = 1$$

$f'_+(0) = f'_-(0)$ olduğundan $x=0$ da türevlidir.

30) $f(x) = e^{\pi x} - \pi x$ eğrisine teğet olan yatay doğruları bulunuz.

$f'(x) = \pi e^{\pi x} - \pi$

Yatay doğrunun eğimi 0 olduğundan $\pi e^{\pi x} - \pi = 0$

$e^{\pi x} = 1 \Rightarrow \pi x = 0$

$\boxed{x=0}$

$x=0$ için $f(0) = 1$

$\Rightarrow \underline{y=1}$ doğrusudur.

31) $y = x^2 - 2x$ eğrisinin $x + 2y = 1$ doğrusuna dik olan teğetini bulunuz.

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_N = \frac{-1}{2}$ $\quad m_N \cdot m_T = -1 \Rightarrow \underline{m_T = 2}$

$y' = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$

$y - 0 = m_T \cdot (x-2)$

$y = 2(x-2)$

$y = 2x - 4$ //

32) $y=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ fonksiyonunun $x=\frac{\pi}{2}$ apsisli noktadaki teğetinin ve normalinin denklemini bulunuz.

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow y=0$$

$$y'=\frac{\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}}-\frac{(-\sin^3 x-\cos^2 x\cdot 2\sin x)}{\sin^4 x}$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{1/4}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

T.D.D. $y-0=\frac{5}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ //

N.D.D. $y-0=\frac{-4}{5}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ //

33) $f(x)=\frac{3+2x}{1+x}$ ile verilen eğrinin hangi noktalarında teğetlerin $y=-\frac{x}{4}$ doğrusuna paralel olduğunu belirleyiniz.

$$f'(x)=\frac{2(1+x)-(3+2x)}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$y=-\frac{x}{4} \Rightarrow m=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow 1+x=\pm 2$$

$$\underbrace{x=1}, \quad \underbrace{x=-3}$$

$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{5}{2} \Rightarrow \left(1,\frac{5}{2}\right)$

$x=-3 \Rightarrow f(-3)=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(-3,\frac{3}{2}\right)$

noktalarındaki teğetler $y=\frac{-x}{4}$ 'le paraleldir.

34) $\cos(3x+y)+\sin(x+3y)=-1$ eğrisinin $A\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ noktasındaki teğet, normal doğru denklemlerini bulunuz.

$$-(3+y')\sin(3x+y)+(1+3y')\underbrace{\cos(x+3y)}_{0}=0$$

$$-(3+y'|_A)=0 \Rightarrow \underline{y'|_A=-3}$$

T.D.D. : $y-\frac{\pi}{2}=-3(x-0) \Rightarrow y=-3x+\frac{\pi}{2}$ //

N.D.D : $y-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}$ //

35) Sin(46°) nın yaklaşık değerini bulunuz.

$f(x) = \sin x$, $a = 45°$ $f'(x) = \cos x$, $f'(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$\sin 46° \approx L(46) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{0,708} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{180}}_{0,017} = 0,72$ //

36) $(1,002)^3 - 2\sqrt{1,002} + 3$ yaklaşık değerini lineerleştirme ve diferansiyel yardımıyla bulunuz.

$f(x) = x^3 - 2x^{1/2} + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - x^{-1/2}$, $a = 1$

$f(1) = 2$, $f'(1) = 3 - 1 = 2$

a) $f(x) \approx L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 2.(x-1)$

$f(1,002) \approx L(1,002) = 2 + 2(1,002 - 1) = 2,004$

b) $dy \approx \Delta y$ $\Delta x = 0,002 = dx$

$dy = f'(x)dx = f'(x).\Delta x = f'(1).(0,002) = 0,004$

$\Delta y = f(1,002) - f(1) = f(1,002) - 2$

$dy \approx \Delta y \Rightarrow f(1,002) \approx 2 + 0,004 = 2,004$

37) $f(x) = \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{x \arcsin 2x} \Rightarrow f'(x) = ?$

$\ln f(x) = x.\arcsin 2x . \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\arcsin 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right).\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + x.\arcsin 2x . \frac{\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x} \cdot \left[\left(\arcsin 2x + \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right).\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + x.\arcsin 2x \, \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\right]$$ //

38) g ve h fonksiyonları $g(1)=h'(1)=1$, $g'(1)=h(1)=2$ şartlarını sağlayan pozitif değerli ve türevlenebilen birer fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu da $f(x)=\left[g(x^2)\right]^{h(x)}$ ile tanımlı olsun. $f'(1)$ değerini bulunuz.

$$f(x)=\left[g(x^2)\right]^{h(x)} \qquad f(1)=(g(1))^{h(1)}=1^2=1$$

$$\ln f(x)=h(x).\ln g(x^2)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=h'(x).\ln g(x^2)+h(x).\frac{2x.g'(x^2)}{g(x^2)}$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)}=\underbrace{h'(1)}_{1}\underbrace{\ln g(1)}_{0}+h(1).\frac{2.g'(1)}{g(1)}$$

$$f'(1)=2.\frac{2.2}{1}=8 \quad //$$

39) $f(x)=2^{x^2+\cos x}+3^{x\ln(x+1)} \Rightarrow f'(x)=?$

$$f'(x)=(2x-\sin x).2^{x^2+\cos x}.\ln 2+\left(\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right).3^{x\ln(x+1)}.\ln 3 \quad //$$

40) $y=\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}} \Rightarrow y'=?$

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x(x-2)}{x^2+1}\right)=\frac{1}{3}\left[\ln x+\ln(x-2)-\ln(x^2+1)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2+1}\right] \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}.\left[\ln x+\ln(x-2)-\ln(x^2+1)\right] \quad //$$

41) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{8+x^2}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösterin ve $(f^{-1})'(3)$ değerini bulunuz.

$$f'(x)=\sqrt{8+x^2}+x.\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{8+x^2}}=\frac{2x^2+8}{\sqrt{8+x^2}}>0$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)>0$
$\Rightarrow f$ artan
$\Rightarrow f$ 1-1
$\Rightarrow$ tersi mevcuttur.

$$x\sqrt{8+x^2}=3 \Rightarrow x=1$$

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{2+8}=\frac{3}{10} \quad //$$

42) $\lim_{x\to 4}\left[\frac{4}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{\tan\left(\frac{\pi x}{8}\right)} = ?$ (1^∞ bl.)

$y=\left[\frac{4}{\pi}\arctan\frac{x}{4}\right]^{\tan\frac{\pi x}{8}}$

$\ln y = \tan\frac{\pi x}{8}\,\ln\left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{x}{4}\right)$

$\lim_{x\to 4}\ln y = \lim_{x\to 4}\frac{\ln\left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{x}{4}\right)}{\cot\frac{\pi x}{8}}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{\cancel{\frac{4}{\pi}}\cdot\frac{1/4}{1+\frac{x^2}{16}}}{\cancel{\frac{4}{\pi}}\arctan\frac{x}{4}}}{-\frac{\pi}{8}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)} = \frac{-4}{\pi^2} \Rightarrow \lim_{x\to 4} y = e^{-4/\pi^2}$ //

43) $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{1/\ln x} = ?$ (∞^0)

$y=(\cot x)^{1/\ln x}$

$\ln y = \frac{1}{\ln x}\ln\cot x$

$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ bl}\right)}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{-x}{\sin x}}_{1}\cdot\frac{1}{\cos x} = -1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{1/\ln x} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ //

44) $\lim_{x\to\infty}\left(1+2^x+3^x\right)^{1/x} = ?$ (∞^0 bl.)

$y=(1+2^x+3^x)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln(1+2^x+3^x)$

$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x+3^x)}{x}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{ bl}\right)$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x.\ln 2+3^x.\ln 3}{1+2^x+3^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{3^x}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x.\ln 2+\ln 3\right]}{\cancel{3^x}\left(\frac{1}{3^x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right)} = \ln 3$

$\lim_{x\to\infty}\ln y = \ln 3$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^{\ln 3} = 3$ //

45) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\arctan x} - x}{\ln(1+x^2)+x} = ? \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ bl.}\right)$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\overset{0}{\frac{1}{1+x^2}} \cdot 2^{\arctan x} \cdot \ln 2 - 1}{\underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{0} + 1} = -1 \;//$$