

Université de Toulouse – Faculté Sciences et Ingénierie

Master EEA

Électronique, Énergie électrique et Automatique

Parcours ISTR

Ingénierie des Systèmes Temps Réel

Rapport de stage de fin d'étude

ÉVALUATION DE LOIS DE COMMANDE D'ATTITUDE DANS UN ENVIRONNEMENT TEMPS RÉEL

Auteur:

Loup BESSARD

Encadrants:

Christophe LOUEMBET

Dimitri PEAUCELLE

Année scolaire 2024-2025

Table des matières

Table des matières	2
1 Introduction	4
1.1 Organisme d'accueil	4
1.2 Contexte	4
1.3 Objectifs du stage	4
2 Référentiels	6
3 Modélisation d'état	10
3.1 Tenseur d'inertie	10
3.2 Représentation de l'attitude	11
3.2.1 Angle de Cardan	11
3.2.2 Quaternions d'attitude et équation de la cinématique	12
3.2.3 Conversion entre les quaternion et les angles de Cardan	13
3.3 Équations de la dynamique	14
4 Roue à réaction	15
4.1 Modèle	15
4.2 Loi de commande avec roue à réaction	18
4.2.1 Switching PD	18
4.2.2 PD adaptatif	19
4.3 Mode glissant au premier ordre	20
4.4 Mode glissant au premier ordre avec une surface adaptative	20
4.5 Conclusion	21
5 Magnéto-coupleur	22
5.1 Principe de fonctionnement	22
5.2 Orbite	25
5.2.1 Paramètres orbitaux	25
5.3 Champs magnétique terrestre	26
5.3.1 Modèle IGRF	26
5.3.2 NED à ECEF	27
5.3.3 ECEF à ECI	27
5.3.4 ECI à BRF	27
5.3.5 Simulation et analyse du champ magnétique	27
5.4 Modèle	28
6 Analyse du modèle	30
6.1 Le modèle du satellite	30
6.1.1 Points de fonctionnement	30
6.2 Linéarisation	30
6.3 Commandabilité	31
7 Loi de commande avec magnéto-coupleur	32
7.1 Correcteur PD	32
7.2 Commande Linéaire Quadratique (LQ)	33
7.3 Propositions de lois de commande	34

8	Conclusion	37
8.1	Conclusion	37
8.2	Pour la suite	37
8.3	Mes ressentis	38
9	Annexe	39
9.1	Constantes et opérateurs	39
9.2	Modèle	40
9.2.1	Centre de masse	40
9.2.2	Le tenseur inertiel	40
9.3	Les roues à réaction	41
9.3.1	Valeurs numériques des coefficients pour la commande avec les 3 RWs	41
9.3.2	Switching PD	41
9.3.3	PD adaptatif	42
9.3.4	Mode glissant au premier ordre	44
9.4	Représentation de l'orbite	45
9.4.1	Vitesse angulaire moyenne	46
9.4.2	Demi-côté droit	46
9.4.3	L'anomalie excentrique initiale	46
9.4.4	L'instant de passage au périhélie	47
9.4.5	L'anomalie moyenne	47
9.4.6	L'anomalie excentrique	47
9.4.7	L'anomalie vraie	48
9.4.8	Le rayon de l'orbite	48
9.4.9	Passage aux coordonnées géocentriques	48
9.5	Analyse du modèle	49
9.5.1	Points de fonctionnement	49
9.6	Théorie de Floquet	50
	Bibliography	52

1. Introduction

1.1. Organisme d'accueil

Mon stage s'est déroulé au LAAS-CNRS (Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes membre du Centre National de la Recherche Scientifique) à Toulouse, dans l'équipe MAC (Méthodes et Algorithmes en Commande) qui étudie la théorie du contrôle et l'automatique. J'étais sous la supervision de Christophe Louembet, spécialisé dans le domaine spatial sur l'étude des satellites.

1.2. Contexte

Ce stage s'insère dans le projet NIMPH (Nanosatellite to Investigate Microwave Photonics Hardware) qui sera envoyé en orbite en fin d'année 2026. Il s'agit d'un nanosatellite¹ positionné sur une orbite héliosynchrone² à 650 km d'altitude. Sa mission, d'une durée de 2 ans, vise à tester la fiabilité des systèmes opto-micro-ondes en milieu spatial. Cette technologie est une avancée majeure pour les satellites de télécommunication qui permet d'augmenter leurs performances en réduisant leur taille, leur poids ainsi que les perturbations électromagnétiques. Plusieurs acteurs contribuent à ce projet:

- CSUT: Centre Spatial Universitaire de Toulouse
- CNES: Centre National d'Études Spatiales
- INP-ENSEEIH: Institut Nationale Polytechnique de Toulouse - École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications
- Université de Toulouse (anciennement université Paul Sabatier)

Quand la mission scientifique finira, le satellite restera en orbite le temps que sa trajectoire et les frottements atmosphériques le fassent retomber sur Terre. Pendant ce laps de temps, il sera possible de tester différents contrôles du satellite, d'où l'intérêt de ce stage.

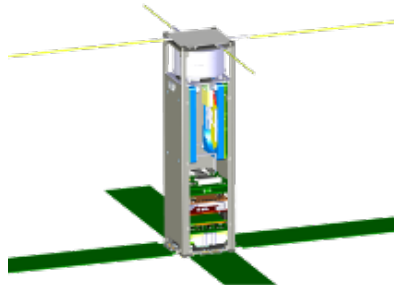


Figure 1.1: Modélisation 3D assistée par ordinateur du satellite NIMPH

Image tirée de Plateforme systèmes embarqués pour le spatial, LAAS-CNRS
<https://www.laas.fr/fr/plateformes/space-platform-embedded-system-nanosatellite/>

Le satellite NIMPH est en forme de parallélépipède rectangle, et est pourvu de quatre panneaux photovoltaïques fixés à l'une de ces bases carrées. Il n'est pas équipé de moyens de propulsion, qui lui permettraient de modifier son mouvement de translation, mais possède des actionneurs pour influencer sur son attitude. L'attitude est l'orientation du satellite par rapport à un référentiel donné. Les actionneurs en question sont: une roue à réaction et trois magnéto-coupleurs sur une carte *iMTQ*. Le détail de ces actionneurs est donné dans le corps du rapport. Il dispose également d'un capteur de luminosité sur la face où sont fixés les panneaux photovoltaïques et de trois magnétomètres sur une carte *NINANO*.

1.3. Objectifs du stage

Le contrôle d'attitude pour le satellite NIMPH se divise en trois grandes parties: le développement du modèle et d'une loi de commande, l'implantation de la loi de commande dans le système réel et enfin, la validation de l'implantation qui doit respecter les contraintes numériques du satellite.

¹Satellite de très petite dimension, de l'ordre de quelques dizaines de centimètre.

²Plan d'orbite orthogonale à l'axe Terre-Soleil.

Ce stage se positionne dans la première partie, le développement du modèle du satellite et le développement d'une loi de commande. Le modèle décrit l'attitude du satellite par des équations dynamiques en tenant compte des différents actionneurs. Ce modèle est utilisé pour créer un simulateur spécifique satellite NIMPH avec l'environnement Matlab.

Tout d'abord, une présentation des différents référentiels et systèmes de coordonnées est faite. Puis l'attitude du corps du satellite est modélisée en commençant par sa matrice d'inertie, suivie de son orientation par l'usage des angles de Cardan et des quaternions, enfin sa dynamique. Les roues à réaction et leurs saturations sont présentées comme si le satellite possédait uniquement ce type d'actionneur. Des lois de commande provenant d'un article donné en référence à ce stage sont testées. Cette croyance qu'il n'y avait que des roues à réaction était une erreur donnant lieu à l'étude des magnéto-coupleurs. Les magnéto-coupleurs ne suffisent pas à eux seuls pour modifier l'attitude du satellite. Ils nécessitent de connaître le champ magnétique terrestre à chaque instant sur l'orbite. Ainsi, l'orbite et le champ magnétique terrestre sont modélisés. Une analyse du modèle est faite pour statuer sur certaines performances du système. Enfin, des lois de commande pour le modèle complet du satellite sont proposées.

2. Référentiels

Les référentiels sont centraux dans l'étude spatiale. En effet, observer une orientation, une position, un mouvement s'effectue toujours par rapport à une référence. Un objet possédant un mouvement quelconque dans un référentiel donné est fixe par rapport à son propre référentiel¹. Ainsi, tout objet peut être modélisé par un référentiel qui lui est propre. Les référentiels utilisés pour cette étude sont des repères orthonormés, comme ci-dessous:

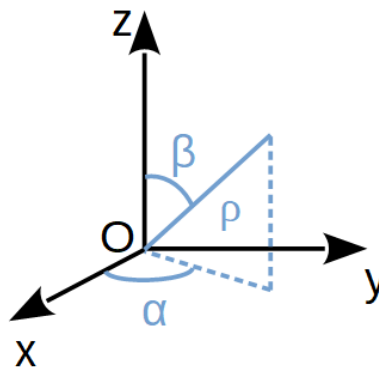


Figure 2.1: Schéma d'un repère orthonormé (en noir) et de coordonnées sphériques (en bleu)

Le repère est composé d'une origine "O" et de trois axes "x", "y" et "z", suivant les trois dimensions spatiales. Un point peut être repéré par des coordonnées cartésiennes qui sont trois valeurs réelles suivant chaque axe. Une manière de repérer un point est d'utiliser les coordonnées sphériques qui font appel à deux angles α et β pour donner une direction et une distance ρ pour connaître l'éloignement du point par rapport à l'origine. Les axes doivent suivre la règle de la **main droite** qui consiste à associer l'axe x au pouce de la main droite, l'axe y à l'index et l'axe z au majeur.

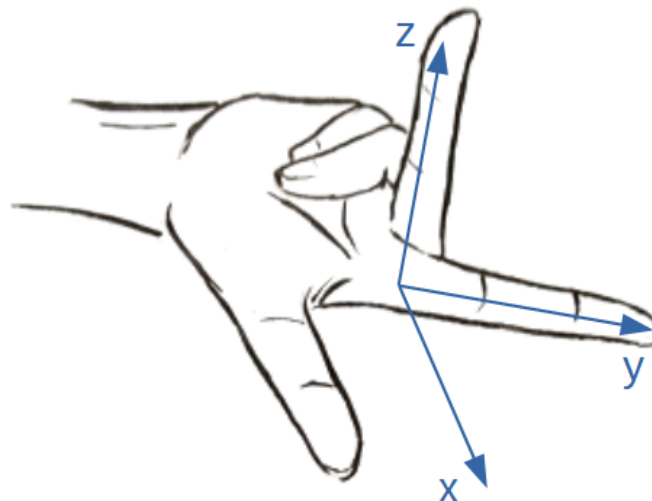


Figure 2.2: Illustration de la règle de la main droite

Repère BRF (Body Reference Frame):

Le BRF est associé au corps du satellite, il permet de définir l'orientation du satellite.

- Origine: centre de masse du satellite
- Axe x: à définir selon la mission
- Axe y: à définir selon la mission
- Axe z: à définir selon la mission

¹Dans ce cas, le terme "référentiel propre" signifie que l'origine du repère est un point de l'objet, et les axes ont un mouvement synchroniser avec l'objet.

Par abus de langage dans ce rapport, parler des axes du satellite renvoie aux axes du BRF. Ainsi, pour satisfaire aux exigences de la mission, nous posons la convention suivante sur les axes du satellite:

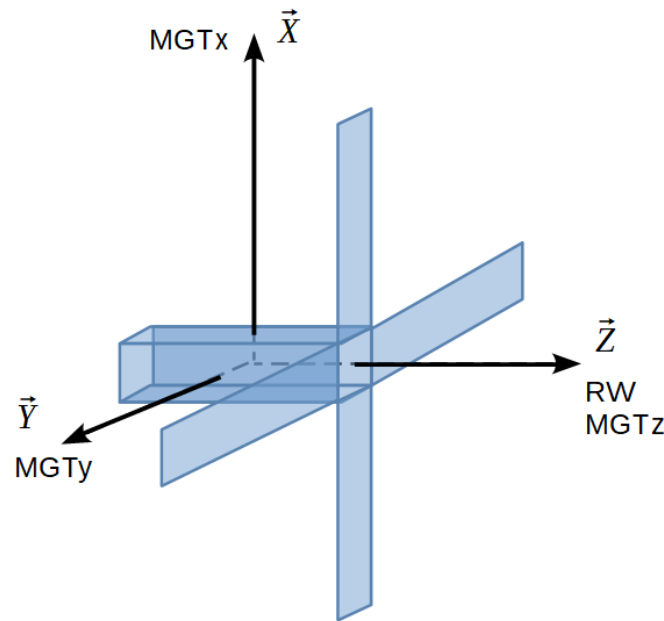


Figure 2.3: Schéma satellite NIMPH et convention sur les axes

NIMPH doit pointer le Soleil pour capter un maximum de lumière et donc d'énergie. L'axe z est celui qui doit pointer le Soleil. Les axes x et y sont choisis de manière à respecter la règle de la main droite et en étant alignés avec les actionneurs. L'acronyme MGT signifie "magnéto-coupleur" (magnetorquer en anglais) et RW signifie "roue à réaction" (reaction wheel en anglais), ces actionneurs sont détaillés dans les chapitres 4 et 5. Le BRF est étudié par rapport au référentiel ECI.

Repère LVLH (Local-Vertical, Local-Horizontal):

Ce repère, également appelé ORF (Orbital Reference Frame), permet de définir une orientation de référence suivant la position du satellite sur l'orbite.

- Origine: centre de masse du satellite
- Axe x: sens de déplacement du satellite sur l'orbite
- Axe y: complète le trièdre
- Axe z: pointe le centre de masse de la Terre

Repère NED (North East Down):

Le repère NED utilise les points cardinaux de la Terre.

- Origine: centre de masse du satellite
- Axe x: pointe le nord géographique²
- Axe y: pointe l'Est
- Axe z: pointe le centre de masse de la Terre

²Nous faisons la différence entre le nord géographique sur l'axe de rotation de la Terre et le nord magnétique pointé par les boussoles.

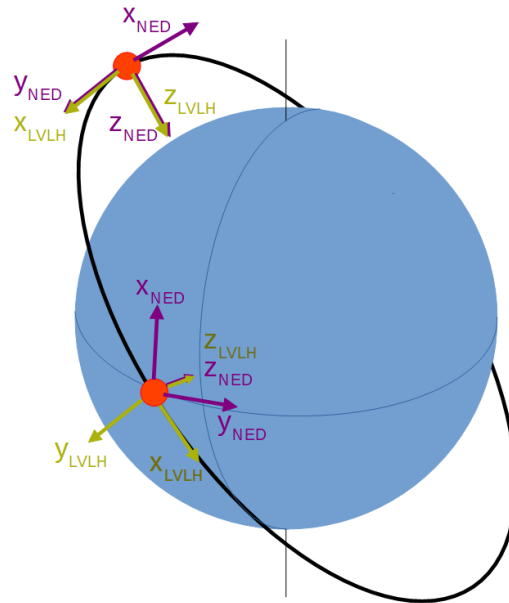


Figure 2.4: Schéma des référentiels LVLH et NED

Repère ECI (Earth Centered Inertial):

Le repère ECI est utilisé dans le domaine spatial notamment dans l'étude des orbites autour de la Terre car il s'agit d'un repère galiléen (inertiel) centré sur la Terre.

- Origine: Centre de masse de la Terre
- Axe x: pointe le point vernal³
- Axe y: complète le trièdre
- Axe z: pointe le nord géographique

Repère ECEF (Earth-Centered, Earth-Fixed):

Le repère ECEF est aussi utilisé pour l'étude des orbites car il est fixe par rapport à la Terre.

- Origine: centre de masse de la Terre
- Axe x: pointe le méridien de Greenwich⁴
- Axe y: complète le trièdre
- Axe z: pointe le nord géographique

³Point d'intersection entre l'écliptique (plan d'orbite de la Terre autour du Soleil) et le plan équatorial où la projection du Soleil sur la Terre passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord, le jour de l'équinoxe de printemps.

⁴Méridien passant par Londres.

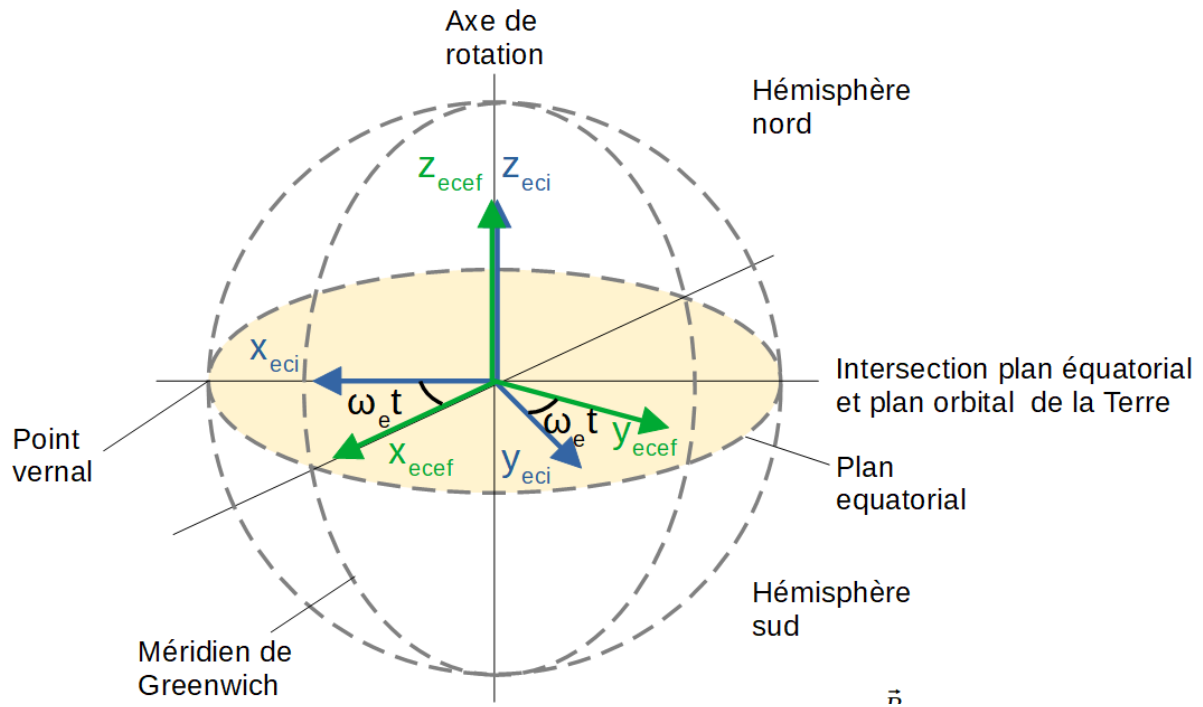


Figure 2.5: Schéma des référentiels ECI et ECEF

Le schéma précédent montre que les repères ECI et ECEF sont en rotation l'un par rapport à l'autre suivant l'axe z , d'un angle $\omega_e t$ où ω_e est la vitesse de rotation de la Terre.

Coordonnées géocentriques sphériques:

Comme leur nom l'indique, les coordonnées géocentriques sont un ensemble de paramètres qui repèrent un point par rapport à la Terre, donc exprimées dans le repère ECEF.

- Origine: centre de masse de la Terre
- Latitude: angle entre l'équateur et le point à repérer ($latitude = 90^\circ - \beta$ sur la figure (2.1))
- Longitude: angle entre le méridien de Greenwich et le plan formé par l'axe de rotation de la Terre et l'axe reliant le centre de la Terre au point à repérer
- Hauteur: la distance séparant le centre de la Terre au point repéré

La latitude est comprise entre -90° et 90° quant à la longitude entre -180° et 180° .

Remarque:

Les coordonnées géocentriques sphériques sont très proches des coordonnées géodésiques (ou géographiques) utilisées dans les GPS, la navigation maritime,... Cependant, elles diffèrent par le paramètre de distance qui, dans le système géocentrique, est la hauteur prise depuis le centre de la Terre, alors que le système géodésique utilise l'altitude prise depuis la surface de la mer:

$$hauteur = altitude + rayon \text{ de la Terre}$$

3. Modélisation d'état

Le satellite NIMPH est un nanosatellite dont la forme est un parallélépipède rectangle à base carrée, avec des panneaux solaires attachés au corps central par les arêtes de l'une des bases (voir fig (2.3)). Il dispose de 4 actionneurs, 3 magnéto-coupleurs (MGT) et 1 roue à réaction (RW). Les magnéto-coupleurs sont ainsi répartis sur chaque axe du satellite afin de couvrir l'ensemble des axes de rotation. La roue à réaction est sur l'axe de pointage (l'axe z) afin de "rigidifier" cet axe par effet gyroscopique.

Concernant les capteurs, le satellite possède 3 magnétomètres qui mesurent l'intensité du champ magnétique sur chaque axe et un capteur de luminosité sur la face orientée vers le Soleil.

Hypothèses:

- Le satellite est un corps rigide, cette hypothèse s'applique principalement sur les panneaux qui sont supposés ne pas apporter de modes souples¹. Il est possible de formuler cette hypothèse car les panneaux solaires sont des blocs de petite taille, équipés de rigidifications.
- Le satellite est assimilé à un parallélépipède rectangle de masse uniformément répartie: il s'agit d'une hypothèse simplificatrice en l'absence des données techniques.
- Les perturbations orbitales sont négligées, elles peuvent être le frottement atmosphérique, le rayonnement solaire, l'attraction des différents corps célestes, etc. Ces perturbations bien que présentes, ont des effets négligeables sur le contrôle d'attitude, mais doivent être prises en compte sur l'étude approfondie de la trajectoire orbitale qui s'effectue sur toute la durée de vie du satellite.

Ce chapitre aborde dans un premier temps le tenseur d'inertie lié au corps du satellite, puis la représentation de l'attitude par les angles de Cardan. Une seconde représentation utilisant les quaternions est donnée, permettant d'écrire la cinématique du satellite. Ensuite, des relations de conversion sont données pour pouvoir passer d'une représentation à l'autre. Enfin, la dynamique du satellite est posée.

3.1. Tenseur d'inertie

Le tenseur (ou matrice) d'inertie représente la répartition spatiale de la masse suivant les axes de rotation. D'un point de vue physique, le tenseur d'inertie signifie que si un corps possède un mouvement de rotation, ce mouvement sera conservé à moins qu'une force ne vienne le modifier. Exemple: la Terre a une rotation sur elle-même depuis sa formation sans s'être arrêtée, mais ralentit progressivement par l'effet des marées. Nous parlons de moment cinétique:

$$\vec{L}_I = I \cdot \vec{\omega} \quad (3.1)$$

Où \vec{L}_I est le moment cinétique, I le tenseur inertiel et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire.

Le cas de la Terre est un exemple simple car elle peut être apparentée à une sphère de masse quasiment uniforme conservant le même axe de rotation². Cependant, l'axe de rotation peut changer comme par exemple avec l'effet Djanibekov. Cela se produit lorsque l'axe de rotation du mouvement inculqué au système ne passe pas par le centre de masse du système. Des éléments non-diagonaux sont alors observables sur le tenseur d'inertie.

Le centre de masse G est bien expliqué dans [1] où il est déterminé expérimentalement et par les relations suivantes:

$$G_x = \frac{1}{m_{tot}} \int x \, dm \quad G_y = \frac{1}{m_{tot}} \int y \, dm \quad G_z = \frac{1}{m_{tot}} \int z \, dm \quad (3.2)$$

L'hypothèse sur la forme du satellite et sa répartition de la masse permet d'obtenir:

$$G = \left(\frac{L}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2} \right)^T \quad (3.3)$$

Où L est la longueur, l la largeur et h la hauteur.

¹Les modes souples sont des propriétés du systèmes quand celui-ci comporte des éléments flexibles, sujet à se déformer.

²Il peut varier de quelques degrés.

Maintenant que le centre de masse est connu, nous calculons la matrice d'inertie ([2]) de la forme:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_2 & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Où $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ et $I_{yz} = I_{zy}$.

Sous l'hypothèse d'une masse uniformément répartie, les éléments diagonaux sont de la forme:

$$I_{xx} = \int_{L^-}^{L^+} \int_{l^-}^{l^+} \int_{h^-}^{h^+} \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) dx dy dz \quad (3.5)$$

$\rho(x, y, z)$ est la densité volumique.

Ce qui donne:

$$I_{xx} = m_{tot} \left(\frac{l^2 + h^2}{4} \right) \quad (3.6)$$

Toujours sous l'hypothèse de la masse uniformément répartie et en prenant (3.3) les éléments non diagonaux sont de la forme:

$$I_{xy} = \int_{L^-}^{L^+} \int_{l^-}^{l^+} \int_{h^-}^{h^+} \rho(x, y, z)(xy) dx dy dz \quad (3.7)$$

L'expression précédente donne un résultat nul, ce qui correspond au fait que nous nous plaçons sur le centre de masse. Une rotation sur un axe du parallélépipède rectangle ne générera pas de rotation suivant un autre axe.

Plus de détails sont apportés dans les annexes (9.2.1) et (9.2.2).

3.2. Représentation de l'attitude

L'attitude est l'orientation du satellite par rapport à un référentiel donné. Comme énoncé précédemment, le satellite est associé au repère BRF qui est en mouvement par rapport au repère ECI. Il faut faire attention au fait que les deux repères ont une origine différente. L'attitude ne tient pas compte du mouvement de translation du satellite par rapport à la Terre. Donc l'étude du BRF par rapport à l'ECI signifie que seule l'orientation des axes est observée.

L'orientation d'un objet dans l'espace se traduit par des rotations suivant chaque axe du repère de référence. Deux représentations sont utilisées. La première se compose des angles de Cardan qui ont l'avantage d'être intuitifs. La seconde est une représentation par les quaternions. Les quaternions sont numériquement plus efficaces et pratiques à utiliser que les angles de Cardan. Enfin, nous proposons la conversion entre ces deux représentations.

3.2.1. Angle de Cardan

Les angles d'Euler permettent une visualisation immédiate, en effet, ils consistent en 3 angles suivant les 3 axes du repère du satellite. Les angles de Cardan définissent une convention d'usage dans le domaine spatial, aérospatial, maritime,...

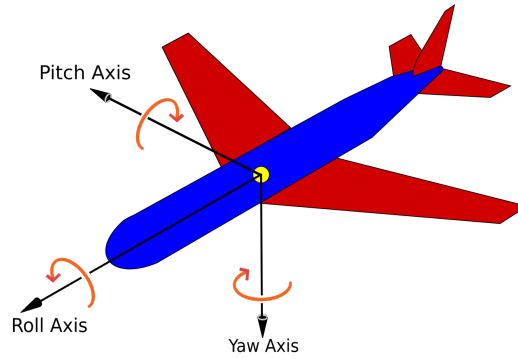


Figure 3.1: Schéma des angles de Cardan

Image tirée de Wikipedia "Pitch, yaw, and roll"
https://simple.wikipedia.org/wiki/Pitch,_yaw,_and_roll

Ces angles sont mis en relation avec la convention utilisée (2.3) dans ce rapport:

- Roll (roulis) (ϕ): suivant l'axe de pointage Z.
- Pitch (tangage) (γ): suivant l'axe X.
- Yaw (lacet) (ψ): suivant l'axe Y.

Les angles de Cardan sont indépendants et doivent être appliqués de manière séquentielle.

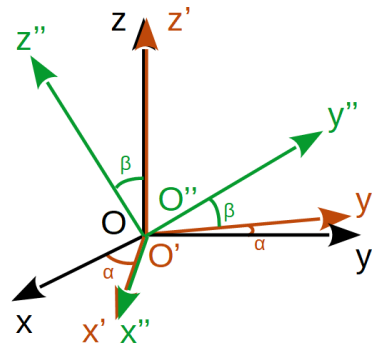


Figure 3.2: Schéma de rotation par les angles d'Euler

Sur le schéma précédent, une rotation est effectuée par deux angles: α suivant l'axe z puis β suivant l'axe x' . Ainsi, la première rotation se fait dans le repère (O, x, y, z) qui donne le repère (O', x', y', z') . La seconde rotation se fait par rapport à (O', x', y', z') pour obtenir (O'', x'', y'', z'') . Cette représentation pose problème car le repère résultant peut être obtenu par différentes séquences, il faut comprendre par séquence le fait de faire un choix sur l'ordre dans lequel sont faites les rotations. Il existe 12 séquences possibles, 6 en faisant intervenir chaque axe: XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX et 6 autres en ne faisant intervenir que 2 axes: XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ, ZYZ. Une convention souvent utilisée est la 313, soit ZXZ.

3.2.2. Quaternions d'attitude et équation de la cinématique

Les quaternions sont des objets mathématiques permettant de représenter une orientation en 3 dimensions avec 4 paramètres (1 réel et 3 imaginaires). Ils appartiennent donc à un espace de 4 dimensions, ce qui les rend difficiles à appréhender pour un observateur humain.

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (\eta, \epsilon^T)^T \quad (3.8)$$

Où $\eta \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^3$ comme présenté dans [3] à la section 3.4.3.

Néanmoins, ils permettent de s'affranchir du problème de séquençage des angles de Cardan. En simulation, ils n'utilisent que des additions et des multiplications, là où les angles de Cardan font appel aux fonctions trigonométriques coûteuses en temps de calcul.

Les quaternions sont soumis à une contrainte qui permet d'assurer qu'ils représentent toujours une orientation.

$$q^T q = 1 \quad (3.9)$$

Ils offrent 2 avantages, chaque orientation est représentée de manière unique et il existe une unique rotation pour passer d'une orientation à une autre. Le site [4] propose une série de vidéos interactives pour mieux comprendre comment évoluent les quaternions ainsi que l'importance de la contrainte (3.9). La cinématique est définie par l'ensemble des équations représentant l'évolution de l'attitude. Ainsi, la dérivée des quaternions est présentée dans [5] à la section 2.3.1.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\epsilon^T \omega \\ \dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(\eta \omega + \epsilon \wedge \omega) \end{cases} \quad (3.10)$$

ω est la vitesse angulaire du satellite par rapport à l'ECI. Cette expression peut aussi s'écrire de la manière suivante:

$$\dot{q} = N(q)\omega \quad (3.11)$$

Avec

$$N(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Conversion entre les quaternion et les angles de Cardan

Comme il a été dit précédemment, les quaternions sont très efficaces pour représenter l'attitude d'un point de vue mathématique, mais sont difficiles à interpréter pour un observateur humain, de même que certaines applications faisant appel à l'orientation nécessitent les angles d'Euler. Dans ce contexte, il faut pouvoir basculer d'une représentation à l'autre. La conversion dans les deux sens est faite dans [6] en suivant la convention 321.

Des quaternions vers les angles de Cardan:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \gamma \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}\right) \\ -\frac{\pi}{2} + 2\arctan\left(\frac{\sqrt{1 + 2(q_0 q_2 - q_1 q_3)}}{\sqrt{1 - 2(q_0 q_2 - q_1 q_3)}}\right) \\ \arctan\left(\frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)}\right) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Des angles de Cardan vers les quaternions:

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Enfin, les quaternions permettent également de donner une matrice de passage pour les angles d'Euler en leur appliquant une rotation choisie. En reprenant la figure (3.2), il existe une matrice $M_{O \rightarrow O''}$ telle que:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = M_{O \rightarrow O''} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il est à remarquer que le repère intermédiaire (O', x', y', z') n'intervient pas. L'expression de la matrice est la suivante:

$$M_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 + q_0q_2) & 2(q_3q_2 - q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A et B sont des repères quelconques. Cette matrice ne dépend pas d'une convention sur les angles d'Euler. Ainsi, en connaissant la rotation d'angle que nous voulons appliquer aux angles d'Euler, il est possible de calculer le quaternion correspondant à cette rotation, puis de calculer la matrice de passage pour s'affranchir des repères intermédiaires.

3.3. Équations de la dynamique

La dynamique est l'ensemble des équations différentielles régissant l'évolution de la vitesse angulaire. Pour ce faire, nous utilisons le principe fondamental de la dynamique en rotation:

$$\sum T_i = I\dot{\omega}_{[ECI]} \quad (3.15)$$

Cette expression signifie que la somme des couples T_i , l'équivalent des forces appliquées aux rotations, est proportionnelle à l'accélération angulaire dans un repère inertiel. Ensuite, l'équation (3.15) est transformée par l'équation d'Euler liée à la composition des vecteurs comme présentée dans [7], section 4.1 pour s'appliquer dans le repère du satellite:

$$\dot{\omega} = \frac{\sum T_i - \omega \wedge I\omega}{I} \quad (3.16)$$

Remarques:

- ω est ici la vitesse angulaire dans le repère BRF, pour alléger l'écriture, la mention du repère par un indice n'est pas faite.
- Pour la suite de ce rapport, la somme des couples est notée T .

À partir des équations (3.10) et (3.16), il est possible de décrire l'évolution de l'attitude d'un objet quel qu'il soit dans l'espace. NIMPH dispose de 4 actionneurs (voir schéma 2.3), ce qui peut être spécifié dans le modèle suivant. D'après la section (3.1), la matrice d'inertie est supposée diagonale:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 3} \\ R & I^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_w \\ T_m \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$T_w \in \mathbb{R}$ est le couple associé à la RW, $T_m \in \mathbb{R}^3$ sont les couples associés aux MGTs.

$S(\omega)$ est la matrice antisymétrique du vecteur ω , il s'agit de l'écriture matricielle du produit vectoriel.

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Enfin, le vecteur R permet d'associer le couple de la roue à réaction à l'axe z du satellite:

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_3} \end{pmatrix}$$

Le modèle obtenu est donc non linéaire. En cherchant les points d'équilibres, le seul possible est celui où $\omega = 0$ et q sont quelconques. Ce résultat est cohérent avec la réalité puisqu'en l'absence de perturbations, dans l'espace, un objet sans vitesse angulaire initiale ne peut pas changer d'orientation.

4. Roue à réaction

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle des roues à réaction en posant leurs dynamiques et les saturations auxquelles elles sont exposées. Puis, des simulations utilisant 3 roues à réactions sont proposées avec les lois de commandes de [8].

Les RWs sont un type d'actionneur répandu dans le domaine spatial, elles reposent sur le principe d'action-réaction, ou troisième loi de Newton. Ces roues sont généralement positionnées suivant chaque axe du satellite, elles ne peuvent que tourner dans un sens ou dans l'autre. Ce qui est intéressant, c'est quand les roues accélèrent ou décélèrent, leurs moments cinétiques varient, ce qui crée un couple dans le sens opposé à la variation. Ce procédé fonctionne bien en impesanteur car les frottements sont considérablement réduits. Ainsi, le satellite et les roues partagent le même moment cinétique.

4.1. Modèle

Le modèle des roues à réaction est accessible dans [5] (cf. section 3.7.3).

$$-diag(I_w)\dot{\omega}_w - \omega \wedge diag(I_w)\omega_w = T_w \quad (4.1)$$

Où $diag(I_w)\omega_w = L_{Iw}$ le moment cinétique des roues, nous rappelons que ω est la vitesse angulaire du satellite.

$diag(I_w)$ signifie simplement que le vecteur des inerties des roues à réaction I_w , est mis sous forme matricielle telle que:

$$diag(I_w) = \begin{pmatrix} I_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{w2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{w3} \end{pmatrix}$$

Cette expression fait intervenir de nouveaux états qui sont les vitesses angulaires des roues. Plusieurs éléments sont à voir dans cette équation, tout d'abord, le signe "moins" présent uniquement sur le premier membre correspond directement au principe d'action-réaction. Un couple positif est généré par une variation négative de la vitesse angulaire de la roue. Ensuite, le terme $\omega \wedge I_w\omega_w$ fait référence aux propriétés du produit vectoriel dans le cas des rotations. Si un objet est animé d'un mouvement rotatif selon un de ces axes principaux, une variation de cet axe crée un mouvement orthogonal à ce dernier. Ce phénomène est facilement observable avec l'expérience de la roue de vélo¹.

Le modèle dynamique (3.17) devient dans le cas où il n'y a que trois roues à réaction:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\omega}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & -diag(I_w)^{-1}.S(\omega).diag(I_w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \\ \omega_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 3} \\ I^{-1} \\ -diag(I_w)^{-1} \end{pmatrix} T_w \quad (4.2)$$

Remarque:

Il est à noter que le contrôle d'attitude ne cherche pas à faire converger la vitesse angulaire des roues vers une valeur de consigne. Ces états servent à connaître la vitesse actuelle des roues et quelle quantité de moment cinétique il est possible d'échanger avec le satellite avant d'atteindre la saturation. Autrement dit, les roues accélèrent ou décélèrent jusqu'à ce que l'attitude désirée soit atteinte, mais une fois atteinte, les roues conservent leurs vitesses angulaires tant qu'aucune autre consigne ou correction n'est donnée.

Nous introduisons l'expression de la dynamique des roues dans le cas où nous ne nous intéressons qu'à une seule roue, ω_w , T_w et I_w sont scalaires, l'expression (4.1) devient:

$$-I_{wi}\dot{\omega}_{wi} = T_{wi} \quad (4.3)$$

Nous nous intéressons maintenant aux saturations s'appliquant aux roues. Il s'agit de l'un des problèmes majeurs de l'utilisation des roues. En effet, si elles saturent, le satellite peut se retrouver dans l'impossibilité de

¹En faisant tourner une roue de vélo suivant l'axe de son moyeu, puis en faisant varier cet axe dans le plan horizontal, par exemple, un mouvement orthogonal au deux premiers est observé

contrôler son orientation en conservant une vitesse angulaire non nulle. La première saturation est celle sur la vitesse de rotation maximale des roues:

$$T_w := \begin{cases} -\frac{I_w}{h} (\text{sign}(-T_{com}) \cdot \omega_{w,max} - \omega_w) & \text{Si } \left| \omega_w - \frac{hT_{com}}{I_w} \right| > \omega_{w,max} \\ T_{com} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec $\omega_{w,max}$ la vitesse angulaire maximale des roues en supposant qu'elle est la même dans les deux sens de rotation. h est le pas d'intégration lié à la simulation et T_{com} est le couple calculé par la commande. Cette contrainte s'appuie sur l'aspect itératif des simulations des systèmes continus par l'intermédiaire de l'équation de l'intégration d'Euler ci-dessous. À partir de la connaissance des états et de la commande à un instant t , la vitesse angulaire des roues à l'instant $t + h$ est calculée. Pour ce faire, nous remplaçons la dérivée de la vitesse angulaire des roues par l'expression (4.3). Si la vitesse des roues à $t + h$ est supérieure à la vitesse maximale, le couple est recalculé pour que le couple reçu soit exactement celui que peut fournir la roue avant de saturer.

$$\omega_w(t) + h \cdot \dot{\omega}_w(t) = \omega_w(t + h)$$

En remplaçant $\dot{\omega}_w$ par l'équation (4.3), les fonctions "signe" et "valeur absolue" permettent de réduire l'expression pour satisfaire le cas où la borne atteinte est positive ou négative.

La seconde saturation s'applique aux couples générés par les roues. En effet, elles ne peuvent pas échanger n'importe quelle quantité de moment cinétique en un temps donné. Sinon, cela se traduirait par une variation possiblement instantanée de la vitesse angulaire des roues.

$$T_w := \begin{cases} \text{sign}(T_{com}) \cdot T_{w,max} & \text{Si } |T_{com}| > T_{w,max} \\ T_{com} & \text{Sinon} \end{cases} \quad (4.5)$$

$T_{w,max}$ la valeur du couple maximal admissible par les roues.

Cette contrainte impose à l'accélération angulaire des roues de rester dans l'intervalle de variation prédéfini.

Les deux saturations agissant sur les roues à réaction sont illustrées au travers d'une simulation.

Le satellite est composé de 3 RWs sur chaque axe, elles possèdent toutes une inertie de $I_w = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$. Le satellite a une matrice d'inertie $I = \text{diag}(10.4167, 18.75, 21.6667)$. Le couple maximum applicable est de $5 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}$ et la vitesse angulaire maximale est de 150 rad/s . Les conditions initiales sur les états sont:

- $\theta_0 = [0.001, 0, 0]$ les valeurs initiales des angles de Cardan.
- $\omega_0 = [0, 0, 0]$ les vitesses angulaires initiales du satellite.
- $\omega_{w0} = [0, 0, 0]$ les vitesses angulaires initiales des roues.

Enfin, le satellite est soumis à une entrée constante supérieure au couple maximal sur une seule roue, $u = [0.5, 0, 0]$.

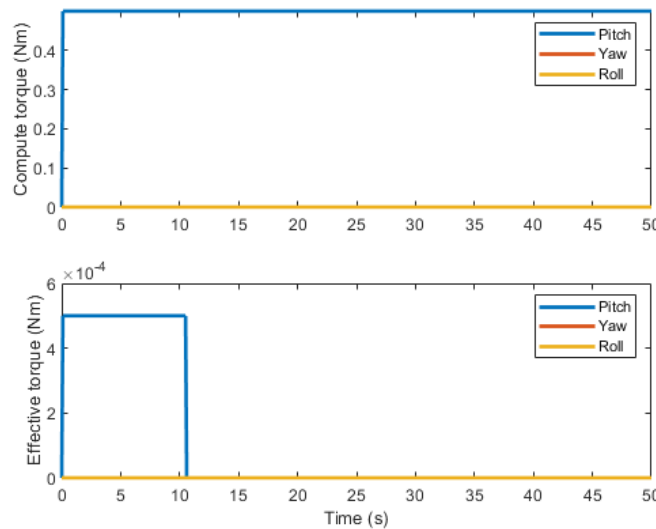


Figure 4.1: Réponse temporelle de la commande des roues à réaction pour entrée constante en saturation

Sur le tracé du haut, le couple envoyé est bien de 0.5 N.m sur la première roue et nul sur les deux autres. Le tracé du bas correspond aux couples perçus par le satellite après les saturations. Les commandes nulles

précédemment sont restées nulles, la commande sur la première roue est saturée à $5 \cdot 10^{-4} \text{ N.m}$ et s'annule peu après 10 s.

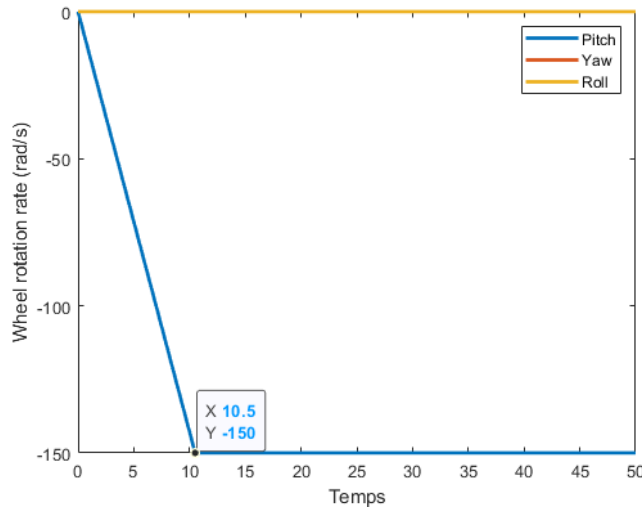


Figure 4.2: Réponse temporelle des vitesses angulaires des roues à réaction pour une entrée constante en saturation

La figure précédente montre l'évolution des vitesses angulaires des roues en rad/s . Plusieurs éléments sont à remarquer.

- Seule la roue ayant reçue une commande (figure 4.1) a vu sa vitesse varier. De plus, la commande est positive alors la variation de vitesse est négative ce qui correspond au principe d'action-réaction.
- La vitesse angulaire de la roue a arrêté de décroître à -150 rad/s grâce à la saturation.
- L'instant où la roue sature semble être le même que celui où la commande perçue s'annule, donc la roue a un impact sur la commande admissible au satellite.
- La roue atteint 150 rad/s en 10.5 s , ce qui se confirme par l'équation (4.3):

$$\dot{\omega}_w = -\frac{T_w}{I_w} = \frac{-150}{10.5}$$

$$\Leftrightarrow T_w = \frac{150}{10.5} I_w = 5 \cdot 10^{-4}$$

La pente de variation de la vitesse angulaire de la roue correspond au couple maximum divisé par l'inertie de la roue.

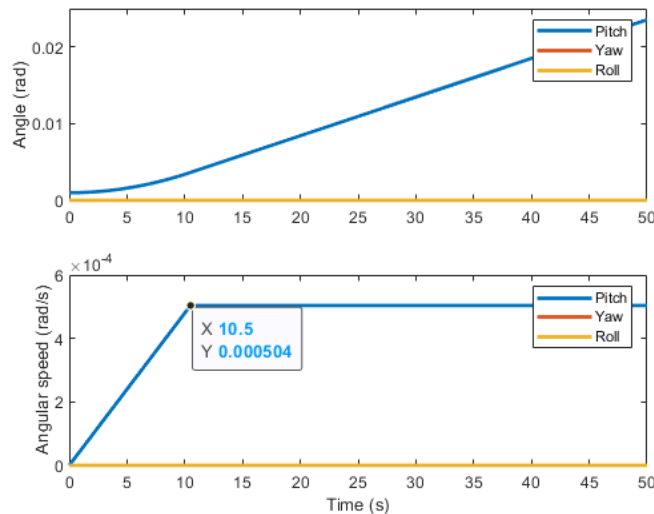


Figure 4.3: Réponse temporelle de l'attitude et de la vitesse angulaire du satellite pour une entrée constante en saturation

Sur cette dernière figure, nous pouvons voir en haut, la variation des angles de Cardan et en bas la variation des vitesses angulaires du satellite.

- La seule variation observable est sur l'axe partagé avec la roue ayant reçu une commande.
- La vitesse angulaire augmente linéairement jusqu'à l'instant 10.5 s, quand la roue sature et la commande s'annule.
- En appliquant le même raisonnement que pour la roue mais en l'adaptant au satellite.:

$$T = \frac{0.000504}{10.5} I_{xx} = 5.10^{-4}$$

Le couple reçu par le satellite est égal à celui de la roue, ce qui montre que les deux s'échangent du moment cinétique.

- Le pitch a une variation qui accélère puis à partir de la saturation augmente linéairement puisque la vitesse angulaire est constante.

Ainsi, le schéma bloc associé au modèle (4.2) et aux saturations (4.4) et (4.5) est le suivant:

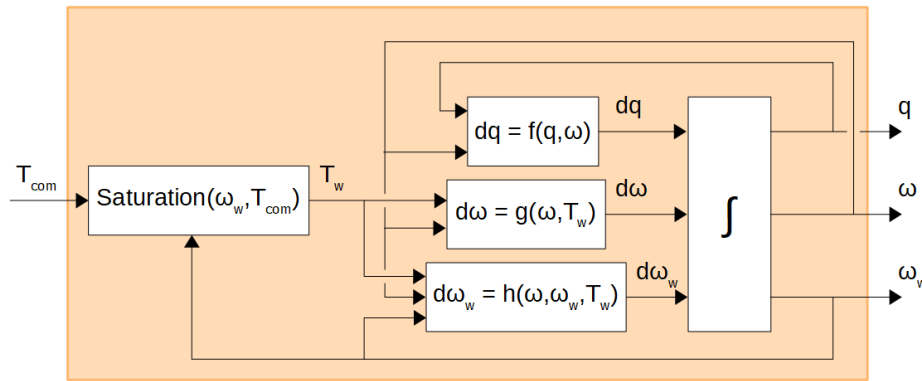


Figure 4.4: Schéma bloc du modèle avec 3 roues à réaction

Ce schéma bloc résume l'agencement des différents éléments du modèle.

4.2. Loi de commande avec roue à réaction

Les lois de commande proposées pour un satellite à 3 RWs proviennent toutes de l'article [8]. Elles étaient initialement au cœur du stage, cependant, comme vu avec la figure (2.3) et la section (3), le satellite ne possède pas 3 roues à réaction.

Ces lois de commande s'appuient toutes sur un correcteur proportionnel dérivé (PD) en découplant les axes (matrice d'inertie diagonale).

$$u_i(t) = -K_{\theta,i} \tilde{\theta}_i(t) - K_{\omega,i} \tilde{\omega}_i(t) \quad (4.6)$$

$i = \{1, 2, 3\}$ est l'indice désignant chaque axe, $\tilde{\theta}$ est le vecteur d'erreur d'angles de Cardan, $\tilde{\omega}$ est le vecteur d'erreur de la vitesse angulaire du satellite, K_{θ} et K_{ω} sont les gains de correction.

Nous remarquons que le correcteur s'effectue sur des angles et non des quaternions, ce qui montre l'importance de pouvoir passer d'une représentation à l'autre rapidement.

Pour les simulations suivantes, les conditions initiales sont toujours:

$$\theta_0 = [0.01, 0, 0] \quad \omega_0 = [0, 0, 0] \quad \omega_{w0} = [0, 0, 0]$$

La matrice d'inertie du satellite est $I = \text{diag}(10.4167, 18.75, 21.6667)$. Les trois roues à réaction ont la même inertie, $I_{w,i} = 3.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^2$. Le couple maximum est de 0.005 N.m et la vitesse angulaire maximale des roues est de 293 rad/s .

4.2.1. Switching PD

Le switching PD reprend le correcteur PD sur de petits angles², et change ("switch") de correction quand il s'en éloigne.

$$\begin{cases} u_i = -b_i \cdot \text{sign}(\tilde{\theta}_i) - \tilde{\omega}_i & \text{Si } |\tilde{\theta}_i| \geq \theta_{t,i} \\ u_i = -K_{p,i} \tilde{\theta}_i - K_{d,i} \tilde{\omega}_i & \text{Sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

²Les petits angles signifient être proche de la consigne et donc du point d'équilibre souhaité.

$\theta_{t,i}$ est une valeur seuil, b_i est un biais de vitesse.

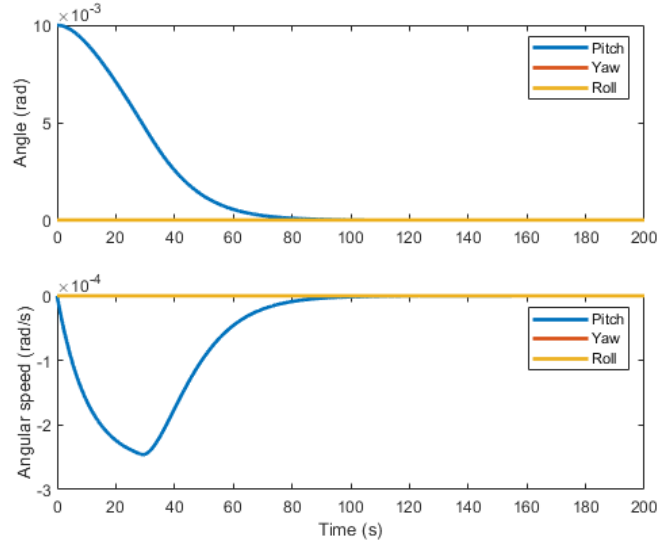


Figure 4.5: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la commande switching PD

Comme le montre la figure (4.5), l'attitude du satellite converge en 80 s. Nous remarquons aussi une discontinuité dans l'évolution de la vitesse angulaire à $t \approx 30$ s. Cet instant correspond au passage du seuil de l'angle (voir (9.4)), ainsi les deux modes de correction du switching PD sont utilisés.

4.2.2. PD adaptatif

Le correcteur PD adaptatif reprend le correcteur PD simple (4.6) en donnant une dynamique aux gains de correction. Cette nouvelle dynamique fait intervenir de nouveaux états, mais permet d'avoir une correction importante quand nous nous éloignons de la consigne et une correction plus fine quand nous nous en approchons.

$$\begin{cases} \dot{K}_{\theta,i}(t) = Proj_{K_{\theta,i}}(-G_{\theta,i}\tilde{\theta}_i^2(t) - c_{\theta,i}(K_{\theta,i}(t) - K_{p,i})) \\ \dot{K}_{\omega,i}(t) = Proj_{K_{\omega,i}}(-G_{\omega,i}\tilde{\theta}_i^2(t) - c_{\omega,i}(K_{\omega,i}(t) - K_{d,i})) \end{cases} \quad (4.8)$$

La fonction $Proj_{\alpha}(x)$ agit comme une saturation pour les états tels que, $\alpha_{min} \leq x \leq \alpha_{max}$. Cette saturation peut être réalisée de la même façon que celle sur la vitesse angulaire des roues (4.4). Les conditions initiales sur les états de la commande sont $K_{\theta 0} = [0.01, 0.01, 0.01]^T$ et $K_{\omega 0} = [1.5, 1.5, 1.5]^T$.

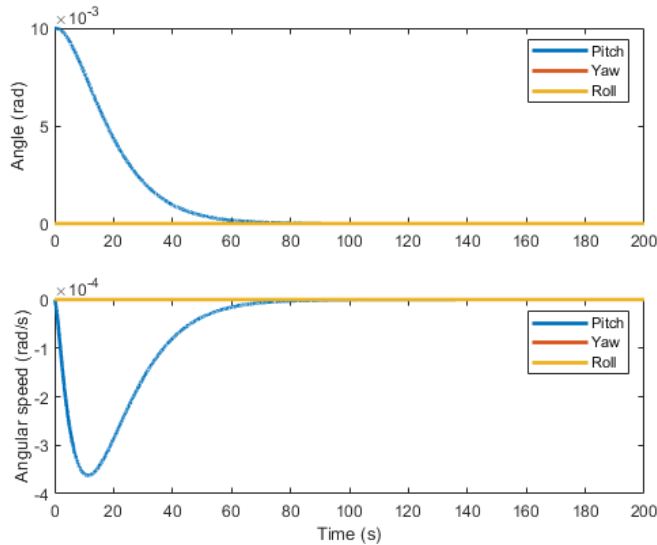


Figure 4.6: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la commande PD adaptatif

La réponse temporelle est similaire à celle obtenue avec le switching PD. Cependant, la convergence est légèrement plus rapide et la vitesse angulaire ne présente pas de discontinuités.

4.3. Mode glissant au premier ordre

Le mode glissant consiste à définir une surface, ici σ , sur laquelle les états "glissent" jusqu'à atteindre un espace où nous connaissons une trajectoire stabilisante.

$$u_i(t) = -K_i \cdot \text{sat}_{S_i}(\sigma_i(t)) \quad (4.9)$$

Où

$$\text{sat}_S(\sigma) = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| \geq S \\ \frac{\sigma}{S} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.10)$$

Avec

$$\sigma_i(t) = \tilde{\omega}_i(t) + \lambda_i \tilde{\theta}_i(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (4.11)$$

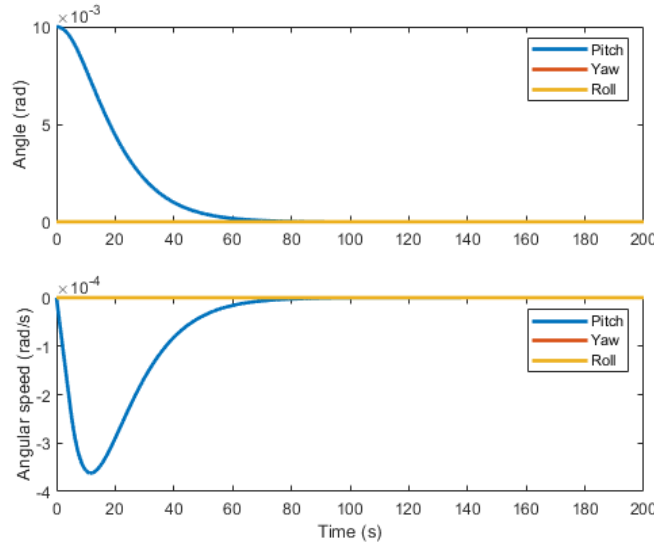


Figure 4.7: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la commande des modes glissant

La figure obtenue est similaire aux deux précédentes, cependant, la figure liée aux couples est intéressante car elle montre la saturation appliquée à la commande.

4.4. Mode glissant au premier ordre avec une surface adaptative

Cette commande reprend la commande des modes glissant précédente, cependant, la surface glissante est adaptative. Ce qui introduit de nouveaux états tels que la nouvelle surface est:

$$\sigma_i(t) = \tilde{\omega}_i(t) + \lambda_{a,i}(t) \tilde{\theta}_i(t) \quad (4.12)$$

La dynamique introduite est la suivante:

$$\dot{\lambda}_{a,j}(t) = \text{Proj}_{\Lambda_i}(-G_i \tilde{\theta}_i^2(t) - c_i(\lambda_{a,i}(t) - \lambda_i)) \quad (4.13)$$

Les conditions initiales des nouveaux états sont $\lambda_0 = [0.01, 0.01, 0.01]$.

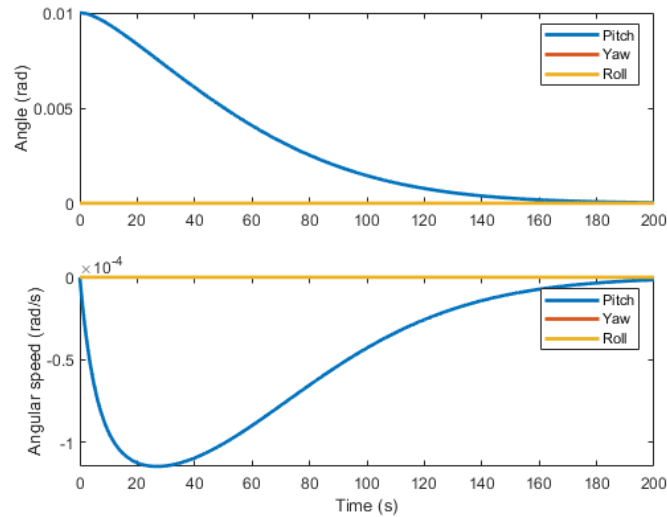


Figure 4.8: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la commande adaptative des modes glissant

Le satellite converge en 2 fois plus de temps que les autres lois de commande. Ce temps supplémentaire est dû visible au travers de la vitesse angulaire dont l'amplitude est au maximum 3 fois plus petite que les autres lois de commande. Si la vitesse est plus faible, cela signifie que les roues échangent moins de moment cinétique avec le satellite. En effet, la figure (9.9) montre que les roues atteignent au maximum environ 34 rad/s contre 70 rad/s précédemment dans le meilleur cas.

4.5. Conclusion

Ainsi, les lois de commande proposées font converger l'attitude du satellite relativement rapidement. Il convient ensuite de choisir une loi de commande qui s'adapte au mieux aux objectifs. Le switching PD, le PD adaptatif et les modes glissants au premier ordre ont un temps de réponse d'environ 60 s , alors que les modes glissants au premier ordre avec une surface adaptative ont un temps de réponse plus long avec une vitesse plus faible. Mais une vitesse angulaire plus faible signifie que les roues ont une vitesse angulaire plus faible et donc, moins de risques de saturer. Les simulations de la commande calculée et de l'évolution de la vitesse angulaire des roues sont données en annexe (cf. section 9.3) pour chaque loi de commande.

Cependant, le satellite n'a pas 3 RWs comme ce que nous pensions en commençant la modélisation. Il ne possède qu'une roue à réaction et trois magnéto-coupleurs.

5. Magnéto-coupleur

5.1. Principe de fonctionnement

Les magnéto-coupleurs sont des actionneurs interagissant avec le champ magnétique. Un magnéto-coupleur est une bobine électrique à laquelle nous appliquons un courant électrique. Le courant passant à travers la bobine génère un champ magnétique mais aussi et surtout, un moment magnétique noté \vec{M} .

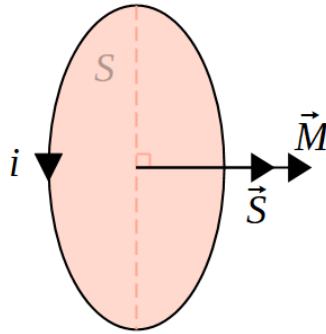


Figure 5.1: Schéma du moment magnétique créé par un courant électrique sur une surface

Ainsi, un courant électrique i parcourant une surface S crée un moment magnétique¹ \vec{M} orthogonal à S en suivant l'équation (14.33) de [9], la relation est:

$$\vec{M} = i \cdot \vec{S} \quad (5.1)$$

Une bobine est une succession de spires qui peuvent chacune être considérées comme une surface en disque. Les effets des différentes spires s'additionnent, de sorte que si la bobine a N spires, la relation (5.1) devient:

$$\vec{M} = N \cdot i \cdot \vec{S} \quad (5.2)$$

Cette relation est présentée dans [10] avec des termes supplémentaires qui ne sont pas pris en compte dans ce rapport.

Remarque:

Le courant électrique traversant une bobine fait aussi l'objet de l'équation différentielle $L_{bobine} \frac{di}{dt} = V_{bobine}$ où le courant électrique devient un état. Cependant, il a une dynamique bien plus rapide que le satellite et est supposé négligeable.

Pour la suite, nous ne nous intéressons qu'au moment magnétique. Le moment magnétique entre en interaction avec le champ magnétique terrestre \vec{B} , créant des couples:

$$\vec{T}_m = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (5.3)$$

Pour mieux se représenter cette équation, un exemple simple est la boussole:

¹Le sens du moment magnétique peut être déterminé par la règle de la main droite appliquée au bobine. Les doigts, hors mis le pouce, s'enroule dans le sens du courant autour de la bobine, le sens de \vec{M} est ainsi donné par le pouce.

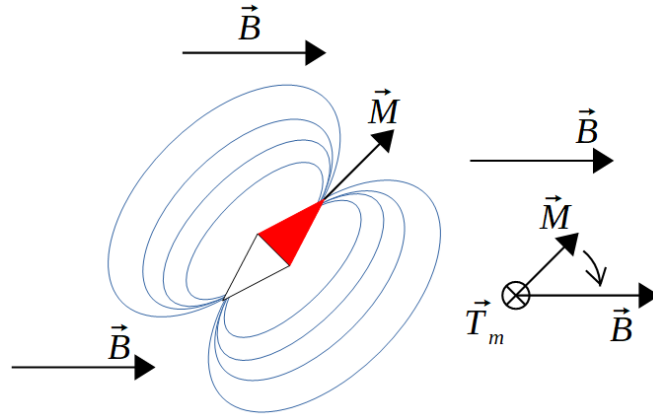


Figure 5.2: Schéma des couples magnétique par l'exemple de la boussole

La boussole est une aiguille magnétisée en rotation libre, quand elle reçoit un champ magnétique, cela crée un couple qui la fait bouger pour s'aligner avec ce dernier. Ainsi, les couples créés sont à leur maximum quand \vec{M} est orthogonal à \vec{B} et nuls quand ils sont alignés.

Les magnéto-coupleurs fonctionnent de la même manière, avec une bobine sur chaque axe du satellite, il est possible d'avoir un moment magnétique sur chaque axe. La résultante de ces trois axes est un moment magnétique pouvant varier dans l'espace en modifiant l'intensité du courant sur chaque bobine. Nous pouvons donc créer une boussole virtuelle à l'intérieur du satellite suivant les 3 dimensions de l'espace.

Nous nous intéressons maintenant au calcul du moment magnétique. Les couples magnétiques sont obtenus à partir de \vec{M} et \vec{B} . Le moment magnétique, lui, est obtenu en faisant circuler un courant électrique dans des bobines. Or, la commande calculée fournit un couple désiré T_{req} . Il faut donc convertir T_{req} en un moment magnétique désiré M_{req} , qui est ensuite converti en un courant électrique désiré i_{req} . Nous parlons de valeurs désirées car les bobines ont une capacité limitée à recevoir du courant de même que le courant disponible est aussi limité. Il y a donc une saturation:

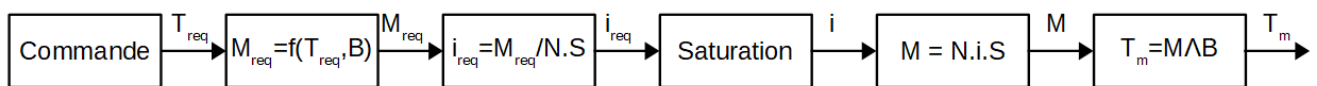


Figure 5.3: Schéma bloc de la chaîne du calcul du couple magnétique reçu par le satellite

Si nous connaissons la valeur maximale de courant que peut recevoir chaque bobine, nous connaissons aussi le moment magnétique maximum que chaque bobine peut produire:



Figure 5.4: Schéma bloc de la chaîne simplifié du calcul du couple magnétique reçu par le satellite

Il reste la fonction permettant de convertir le couple requis en un moment magnétique requis. Il faudrait reprendre l'équation (5.3) et isoler M , cependant, cela demande d'inverser le produit vectoriel qui est une opération non inversible. Ce problème est présenté dans [10] avec le schéma suivant:

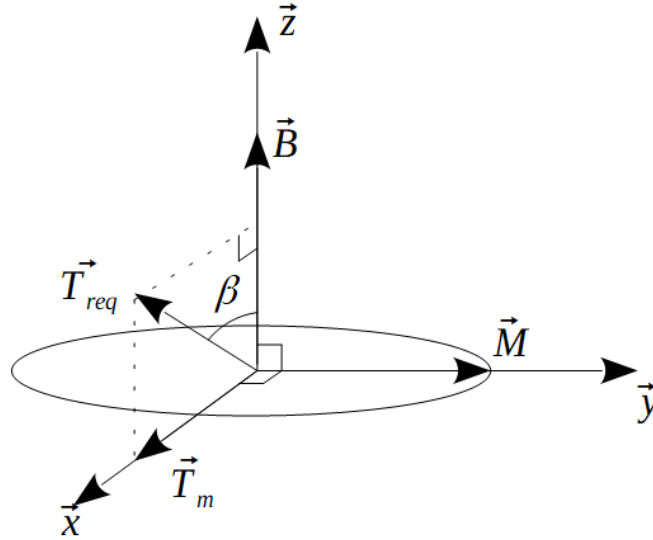


Figure 5.5: Schéma illustrant le champ magnétique, les couples magnétiques désirés et effectifs ainsi que le moment magnétique

Schéma copié de [10]

Le schéma montre que les couples requis possèdent un angle β quelconque² avec le champ magnétique. L'information de cet angle est perdue par l'expression (5.3) qui oblige \vec{T}_m à être orthogonal à \vec{M} et \vec{B} .

Les auteurs posent le point de départ, connaissant l'équation (5.3), T_m est maximal quand \vec{B} et \vec{M} sont orthogonaux. L'objectif est de minimiser l'angle entre \vec{T}_{req} et \vec{T}_m , ainsi, \vec{T}_m appartient au plan formé par \vec{T}_{req} et \vec{B} .

Le vecteur \vec{T}_{req} est repéré par:

$$\vec{T}_{req} = T_{req}(\cos(\beta)\vec{e}_z + \sin(\beta)\vec{e}_x) \quad (5.4)$$

Avec \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires des axes x , y et z .

Nous posons $\vec{B} \wedge \vec{T}_m$ dont la résultante est un vecteur aligné avec \vec{M} :

$$\vec{B} \wedge \vec{T}_m = \vec{B} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{B}) = \|\vec{B}\|^2 \vec{M}$$

Ce résultat fait appel à une propriété³ du produit vectoriel. Nous pouvons exprimer le moment magnétique comme:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{T}_m}{\|\vec{B}\|^2} \quad (5.5)$$

Cependant, le moment dépend des couples que nous cherchons. Nous remarquons que \vec{T}_m est la projection de \vec{T}_{req} sur l'axe x .

$$\vec{T}_m = T_{req} \cdot \sin(\beta) \vec{e}_x = \vec{T}_{req} - T_{req} \cdot \cos(\beta) \vec{e}_z$$

En injectant l'expression précédente et en utilisant la propriété de distributivité du produit vectoriel:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{T}_{req} - \vec{B} \wedge T_{req} \cdot \cos(\beta) \vec{e}_z}{\|\vec{B}\|^2}$$

Le champ magnétique étant aligné avec l'axe z , le moment magnétique devient:

$$\vec{M} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{T}_{req}}{\|\vec{B}\|^2} \quad (5.6)$$

L'équation (5.6) est admise dans la littérature autour des magnéto-coupleurs, néanmoins, \vec{T}_m n'est que la projection des couples désirés dans le plan orthogonal au champ magnétique. Ce qui signifie que la commande

²Le fait que β soit quelconque est le cœur du problème, car dans le cas où T_{req} est orthogonal à B , le produit vectoriel n'est pas inversible mais ses propriétés cycliques permettent de facilement passer d'un vecteur à l'autre sans perte d'information.

³Utilisation de la propriété: $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$ faisant intervenir le terme $\langle \vec{B}, \vec{M} \rangle$ qui est nul.

calculée n'est pas la même que la commande s'appliquant réellement. Un second problème avec les magnéto-coupleurs est que, si une bobine voit son moment magnétique être aligné avec le champ magnétique, le couple généré est nul. Le satellite peut se retrouver dans l'impossibilité de changer son attitude suivant un de ses axes. Enfin, le couple généré dépend du champ magnétique terrestre. Ces actionneurs ne peuvent donc être utilisés qu'à proximité d'un objet céleste possédant un champ magnétique suffisamment puissant. Dans un contexte de simulation, il faut pouvoir calculer le champ magnétique à chaque point de l'espace et du temps.

Les saturations sont appliquées indépendamment sur chaque axe telles que:

$$M_d := \text{sign}(M_d) \cdot M_{max} \quad \text{Si } |M_d| > M_{max} \quad (5.7)$$

Avec M_{max} le moment magnétique maximum que peuvent produire les bobines.

5.2. Orbite

Pour pouvoir calculer le champ magnétique en un point de l'espace, il faut savoir en quel point de l'espace nous voulons le déterminer. Dans le cas de NIMPH, il s'agit de connaître sa position à chaque instant sur son orbite. Nous devons donc définir son orbite.

Hypothèse:

Le mouvement est supposé képlérien, ce qui signifie que le satellite n'est soumis à aucune perturbation venant influencer sur son orbite. Ces perturbations peuvent être l'attraction des différents astres à commencer par la Lune, le rayonnement solaire, etc. Cette hypothèse est très proche de la troisième hypothèse formulée dans la section du modèle du satellite, elle n'entre cependant pas en contradiction avec celle-ci car cette section ne cherche par une représentation la plus exacte possible de l'orbite. Il suffit de modéliser une trajectoire du satellite cohérente avec la réalité.

5.2.1. Paramètres orbitaux

Une orbite est définie par 5 paramètres:

- Ω : Right Ascension of the Ascending Node (RAAN), est l'angle entre la ligne des nœuds et l'axe x_{ECI} suivant l'axe z_{ECI} .
- i : L'inclinaison est l'angle entre l'axe normal au plan d'orbite du satellite et l'axe z_{ECI} suivant l'axe x' du repère obtenu après rotation de Ω .
- ω : L'argument du périégée est l'angle entre la ligne des nœuds⁴ et le périégée⁵ suivant l'axe z'' du repère obtenu après rotation de i .
- a : Le demi-grand axe est la distance entre le centre de l'orbite et le point à l'apogée⁶.
- e : L'excentricité est un coefficient décrivant la déformation de l'orbite en la rendant plus ou moins elliptique (pour certaines valeurs d'excentricité, la trajectoire peut devenir hyperbolique ou parabolique ce qui n'est plus une orbite).

Remarque:

Les rotations Ω , i et ω suivent une configuration ZXX.

⁴La ligne des nœuds est une ligne imaginaire définie par l'intersection de l'écliptique et du plan d'orbite du satellite.

⁵Le périégée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre (dans le cas d'un objet orbitant autour d'un autre astre, nous parlons de périastre).

⁶L'apogée est le point de l'orbite le plus éloigné de la Terre (pour une orbite autour d'un autre astre, nous parlons d'apoastre ou d'apoapside).

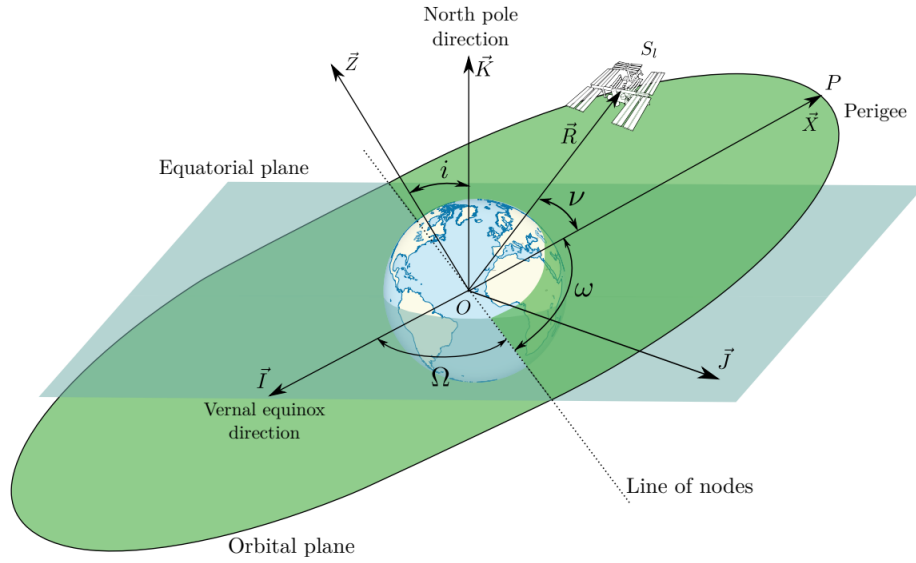


Figure 5.6: Schéma d'une orbite autour de la Terre

Image tirée de "Embedded and validated control algorithms for the spacecraft rendezvous",
Paulo Ricardo Arantes Gilz.

Il existe un dernier paramètre qui n'intervient pas dans la modélisation de l'orbite, mais permet de positionner le satellite sur celle-ci. Ce paramètre est l'anomalie vraie ν , elle est définie par l'angle entre l'axe Terre-satellite et l'axe Terre-périgée. Les paramètres orbitaux liés aux rotations sont schématisés sur la figure (5.6). Le détail de la modélisation de l'orbite est donné dans l'annexe (9.4).

Toutes les simulations présentées dans ce rapport utilisent les paramètres donnés dans le tableau (9.3).

5.3. Champs magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre trouve son origine dans le noyau de la Terre par effet dynamo [11]. Cet effet est dû aux mouvements de fluides composés de métaux en fusion dans le noyau terrestre. Ces mouvements sont générés par convection thermique et solutale⁷.

5.3.1. Modèle IGRF

Il est possible de représenter le champ magnétique terrestre comme un aimant, modèle dipolaire, ce qui donne une image approchée pour des simulations rapides. Cependant, le champ magnétique est soumis à certaines variations qui peuvent le rendre irrégulier. Un modèle répandu est l'International Geomagnetic Reference Field (IGRF [12]). Ce modèle décrit le champ magnétique terrestre B comme la dérivée d'un potentiel:

$$B(r, \theta, \phi, t) = -\nabla V(r, \theta, \phi, t) \quad (5.8)$$

Le champ magnétique dépend de l'endroit où il est observé, ainsi, $r = \text{rayon}$, $\theta = \text{colatitude}$ et $\phi = \text{longitude}$ sont les coordonnées géocentriques. t est le temps car le champ magnétique fluctue aussi en fonction du temps. Il y a une notion de date, présente aussi pour le calcul du GHA (9.19). Cette date est donnée par l'année, le mois, le jour, l'heure, la minute et la seconde.

Le potentiel est décrit par la fonction:

$$V(r, \theta, \phi, t) = r_e \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_e}{r} \right)^{n+1} (g_n^m(t) \cos(m\phi) + h_n^m(t) \sin(m\phi)) P_n^m(\cos(\theta)) \quad (5.9)$$

r_e est le rayon de la Terre, P est un polynôme de Legendre, N est le nombre d'harmoniques maximum, enfin g et h sont des coefficients de Gauss tels que:

$$g_n^m(t) = g_n^m(T_t) + (t - T_t) \dot{g}_n^m(T_t) \quad (5.10)$$

$$h_n^m(t) = h_n^m(T_t) + (t - T_t) \dot{h}_n^m(T_t)$$

⁷Les éléments plus lourds tombent et les plus légers montent.

T_t est une époque, une époque est une année du calendrier grégorien et multiple de 5, $T_t \leq t \leq T_t + 5$.

Dans cette étude, une fonction déjà implémentée calculant le champ magnétique est utilisée [13]. Cette fonction prend en paramètres les coordonnées géocentriques et la date initiale. Elle retourne ensuite les valeurs du champ magnétique suivant les axes du repère NED. Il faut donc reconvertir les coordonnées NED dans le système de coordonnées du satellite.



Figure 5.7: Schéma conversion du repère NED au repère BRF

5.3.2. NED à ECEF

Le passage du repère NED au repère ECEF est obtenu par:

$$ECEF = \begin{pmatrix} -\cos(lon).\sin(lat) & -\sin(lon) & -\cos(lon).\cos(lat) \\ -\sin(lon).\sin(lat) & \cos(lon) & -\sin(lon).\cos(lat) \\ \cos(lat) & 0 & -\sin(lat) \end{pmatrix} NED \quad (5.11)$$

lat est la latitude et lon la longitude. Cette transformation est présentée dans [14] de même que la transformation suivante.

5.3.3. ECEF à ECI

Ces deux repères partagent le même axe z mais le premier suit le mouvement de la Terre quand le second est fixe par rapport à des étoiles éloignées. Ils diffèrent d'une rotation suivant l'axe z en fonction de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même (voir (2.5)). La Terre tourne d'Ouest en Est, ce qui signifie que l'ECEF tourne dans le sens trigonométrique par rapport à l'ECI. Ainsi, l'ECI tourne dans le sens horaire par rapport à l'ECEF.

$$ECI = \begin{pmatrix} \cos(\omega_e.t) & -\sin(\omega_e.t) & 0 \\ \sin(\omega_e.t) & \cos(\omega_e.t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ECEF \quad (5.12)$$

5.3.4. ECI à BRF

La dernière transformation est donnée par l'équation (3.14). En connaissant l'attitude du satellite par rapport au repère ECI , il suffit d'injecter cette attitude dans la matrice de rotation.

5.3.5. Simulation et analyse du champ magnétique

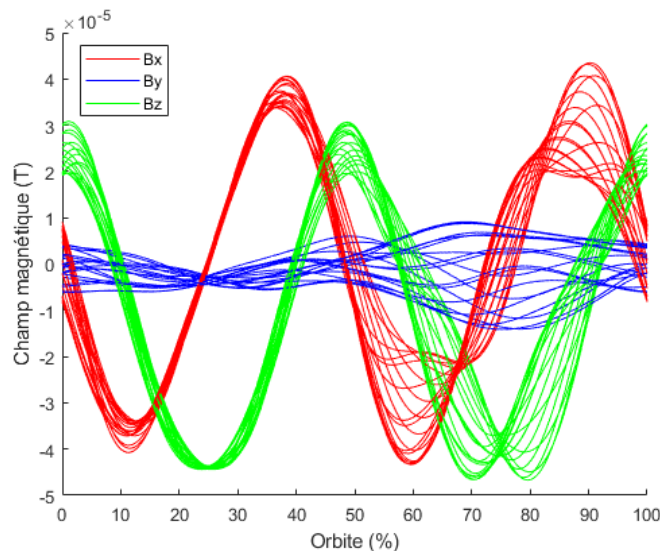


Figure 5.8: Intensité du champ magnétique en fonction de la position sur l'orbite dans le repère ECI

La figure (5.8) montre l'évolution du champ magnétique en tesla le long d'une orbite héliosynchrone dans le repère ECI. Nous remarquons sur la figure 5.8, que les composantes du champ magnétique suivant les axes x et z sont quasiment sinusoïdales et déphasées d'environ 45° l'une par rapport à l'autre. Tandis que celle suivant l'axe y semble rester autour de 0 *tesla*. Ces observations sont normales car, du fait des conditions initiales, l'axe x dans le repère ECI est dans le plan d'orbite.

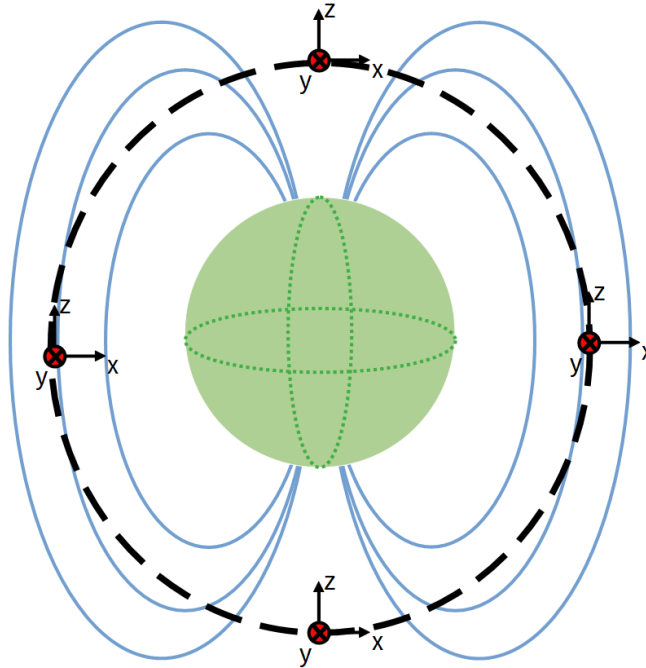


Figure 5.9: Schéma du repère ECI centré sur le satellite décrivant une orbite circulaire

Sur la figure (5.8), la composante B_x s'annule tous les quarts d'orbite. Ces positions correspondent aux 4 repères sur la figure (5.9), les positions "gauche" et "droite" montrent que l'axe x est orthogonal au champ magnétique (bleu). Les positions "haute" et "basse" montrent que le champ magnétique n'y circule pas, il s'agit d'une erreur de schématisation pour avoir plus de lisibilité, le champ magnétique y circule en suivant l'axe nord-sud qui est également orthogonal à l'axe x . La projection du champ magnétique sur l'axe x par produit scalaire est donc nulle sur ces 4 points. Le même raisonnement s'applique à l'axe z en faisant tourner les positions de 45° . Dans ce plan d'orbite, l'axe y est toujours orthogonal au champ magnétique ce qui explique qu'il est proche de zéro. Les composantes du champ magnétique évoluent différemment à chaque orbite car la Terre tourne sur elle-même. En choisissant des conditions initiales différentes, il est possible d'échanger les évolutions de B_x et B_y . Par exemple, en modifiant Ω pour que le plan d'orbite initial soit orthogonal à l'axe x .

Remarque:

Le plan d'orbite lié à Ω doit évoluer pour pouvoir être constamment orthogonal à l'axe Terre-Soleil (orbite héliosynchrone). Cependant, les simulations n'en tiennent pas compte car le contrôle d'attitude s'effectue sur des durées négligeables devant la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil.

5.4. Modèle

Le modèle du satellite avec uniquement les magnéto-coupleurs peut être schématisé de la façon suivante:

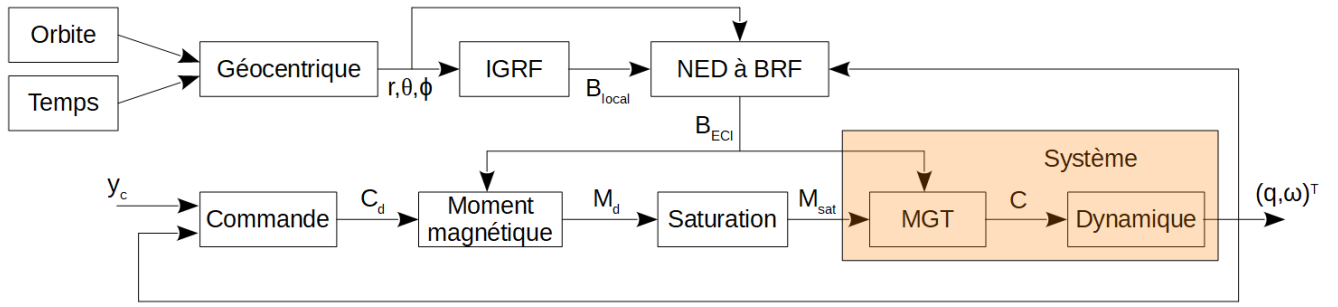


Figure 5.10: Schéma bloc de l'asservissement d'un satellite avec uniquement des magnéto-coupleurs

En résumant le schéma, les paramètres orbitaux et le temps permettent de calculer la position du satellite sur son orbite. Sa position est convertie en coordonnées géocentriques. Ces nouvelles coordonnées sont utilisées pour déterminer le champ magnétique local au satellite. Le champ magnétique est alors converti dans le système BRF pour correspondre aux axes du satellite.

Avec la consigne d'attitude et l'attitude mesurée du système, nous calculons les couples désirés. Les couples désirés sont combinés au champ magnétique pour calculer les moments magnétiques désirés. Ces moments sont soumis à des saturations liées aux bobines. Les moments magnétiques disponibles entrent ensuite en interaction avec le champ magnétique perçu par le satellite pour créer des couples réels. Les couples obtenus sont les entrées du modèle dynamique suivant:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 3} \\ I^{-1} \end{pmatrix} T_m \quad (5.13)$$

Du point de vue du bloc commande (5.10), l'allocation du moment magnétique, sa saturation et l'interaction du moment magnétique avec le champ magnétique font partie du système. Il faut donc les intégrer au modèle dynamique. Cependant, le calcul de la position sur l'orbite, du champ magnétique et de sa conversion dans le repère BRF ne fait pas partie du système à asservir, ils agissent uniquement comme source d'informations.

Les équations (5.3) et (5.6) sont utilisées pour calculer l'expression des couples réellement appliqués au satellite.

$$T_m = -\frac{1}{\|B\|^2} S(B).S(B).T_{req} \quad (5.14)$$

Remarque:

Cette expression ne tient pas compte des saturations.

Le modèle (5.13) devient:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 3} \\ -\frac{I^{-1}}{\|B\|^2} S(B).S(B) \end{pmatrix} T_{req} \quad (5.15)$$

Ce nouveau modèle est non linéaire ainsi qu'à temps variant.

6. Analyse du modèle

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés du modèle complet du satellite. Le modèle complet, faisant intervenir les magnéto-coupleurs et la roue à réaction, est donné puis linéarisé autour d'un point d'équilibre. Nous pouvons ainsi statuer sur la stabilité du modèle. Puis la commandabilité du modèle linéarisé est abordée.

6.1. Le modèle du satellite

Nous commençons tout d'abord par écrire le modèle du satellite qui fait suite à (3.17) en utilisant cette fois les connaissances sur les roues et les magnéto-coupleurs.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\omega}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) & 0_{4 \times 1} \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \\ \omega_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 3} \\ R & -\frac{I^{-1}}{\|B\|^2} S(B) \cdot S(B) \\ \frac{1}{I_w} & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_w \\ T_{m,req} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

6.1.1. Points de fonctionnement

Nous cherchons le ou les points de fonctionnement du modèle (6.1) avec $\dot{q} = 0$, $\dot{\omega} = 0$ et $\dot{\omega}_w = 0$.

Les points de fonctionnement possibles sont:

$$q = \text{quelconque}, \omega = 0, \omega_w = \text{quelconque}, T_w = 0 \text{ et } T_{m,req} = 0 \quad (6.2)$$

Le détail des explications est donné en annexe 9.5.1.

Ces points de fonctionnement sont cohérents avec la réalité puisque, pour que l'attitude n'évolue plus, la vitesse doit être nulle. En l'absence de perturbations constantes, tout couple génère un mouvement car il y a peu de frottements dans l'espace. Les entrées doivent aussi être nulles. Les points de fonctionnement sont aussi les points d'équilibre.

6.2. Linéarisation

Afin de déterminer si les points de fonctionnement sont stables, nous linéarisons le modèle autour de ceux-ci. En posant $B = (b_1, b_2, b_3)^T$ le champ magnétique dans le repère du satellite et en choisissant le point d'équilibre associé à $q = (1, 0, 0, 0)^T$, le modèle linéarisé devient:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{\omega}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_2^2 + b_3^2}{\|B\|^2 I_1} & \frac{-b_1 b_2}{\|B\|^2 I_1} & \frac{-b_1 b_3}{\|B\|^2 I_1} \\ 0 & \frac{-b_1 b_2}{\|B\|^2 I_2} & \frac{b_1^2 + b_3^2}{\|B\|^2 I_2} & \frac{-b_2 b_3}{\|B\|^2 I_2} \\ \frac{1}{I_3} & \frac{-b_1 b_3}{\|B\|^2 I_3} & \frac{-b_2 b_3}{\|B\|^2 I_3} & \frac{b_1^2 + b_2^2}{\|B\|^2 I_3} \\ \frac{1}{I_w} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_w \\ T_{m1,req} \\ T_{m2,req} \\ T_{m3,req} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Les valeurs propres de la matrice dynamique sont toutes nulles, le système n'est pas localement asymptotiquement stable. Cela correspond au fait que si aucune commande n'est envoyée, le satellite conserve son moment cinétique initial et donc une vitesse non nulle. Si la vitesse est non nulle, la position évolue constamment.

Remarque:

Le quaternion $q = (1, 0, 0, 0)^T$ correspond aux angles de Cardan $\theta = (0, 0, 0)^T$. De plus, la linéarisation permet d'approximer $\dot{E} = \omega$.

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\omega}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbb{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \omega_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ R & -\frac{I^{-1}}{\|B\|^2} S(B)^2 \\ I_w^{-1} & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_w \\ T_{m,req} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Ce modèle est celui qui est utilisé pour la suite de l'analyse et de la commande.

Remarque:

Il y a une subtilité que le modèle (6.1) ne montre pas. Le champ magnétique B (dans le repère ECI) est obtenu par une transformation utilisant les quaternions (voir section 5.3.3). Ces quaternions doivent être pris en compte dans la linéarisation.

$$\left. \frac{\partial S(B) \cdot S(B) \cdot T_{m,req}}{\partial q_i} \right|_{eq} = 0 \quad i = 0 \dots 3$$

Au point d'équilibre (6.2) et en dérivant par rapport à chaque composante du quaternion, le résultat est nul. La norme du champ magnétique est la même quelle que soit le repère d'étude.

6.3. Commandabilité

Le système est à temps variable du fait que le champ magnétique perçu par le satellite varie en fonction du temps, de la position sur l'orbite et de l'attitude du satellite. Ainsi, le critère de Kalman pour la commandabilité ne peut s'appliquer. Il reste possible d'utiliser ce critère à un instant donné. Cette approche ne permet pas de statuer sur la commandabilité mais met en avant un problème de la commande uniquement par magnéto-coupleur. Avec seulement des magnéto-coupleurs, le satellite n'est pas commandable à un instant donné, quel que soit sa position sur l'orbite.

Une solution est donnée dans [3] à la section 4.2.3. Nous introduisons la matrice Γ telle que:

$$\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(B(t)) S^T(B(t)) dt \quad (6.5)$$

T est une période temporelle.

Théorème:

Si la matrice $\Gamma \succ 0$ sur une période $T > 0$, alors le système est commandable sur cette période.

Ce théorème peut être reformulé comme suit:

Si sur une période $T > 0$, chaque axe du satellite est excité par le champ magnétique. Alors le système est commandable. Donc, si au cours d'un tour d'orbite, chaque magnéto-coupleur n'est pas aligné avec le champ magnétique, le satellite est contrôlable sur ce tour d'orbite.

En appliquant ce nouvel élément de commandabilité, le satellite utilisant uniquement des magnéto-coupleurs est commandable.

Le modèle (6.4) faisant intervenir la roue à réaction est commandable à chaque instant, tant que l'axe sur lequel se trouve la roue n'est pas orthogonal au champ magnétique. En effet, si l'axe de la roue est parfaitement orthogonal au champ magnétique, le satellite ne peut plus effectuer de rotation suivant l'axe du champ magnétique.

En utilisant l'expression (6.5), la matrice résultante est définie positive. Le système est commandable.

L'observabilité n'est pas étudiée car tous les états sont supposés connus à chaque instant.

7. Loi de commande avec magnéto-coupleur

La commande par magnéto-coupleurs fait l'objet de nombreuses recherches. Les magnéto-coupleurs sont utilisés majoritairement dans deux cas: le premier est la commande de satellites de petite taille [15]. Le second est la désaturation d'actionneurs tels que les roues à réaction [3]. Étant donné l'architecture du satellite NIMPH, les magnéto-coupleurs servent à commander directement l'attitude. La roue à réaction permet d'avantage de rigidifier l'axe de pointage par effet gyroscopique.

7.1. Correcteur PD

Dans un premier temps, nous nous intéressons au correcteur proportionnel dérivé qui est à la base des lois de commande pour les roues à réaction (4.2). Les gains de correction sont les mêmes que ceux des roues. Les conditions initiales sont aussi les mêmes et aucune saturation n'est appliquée.

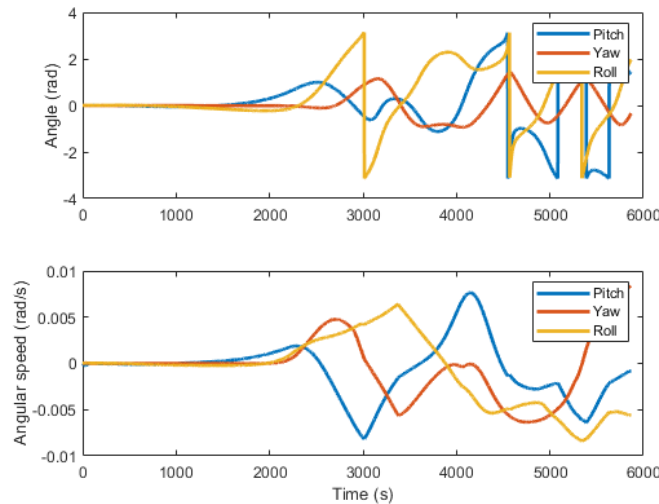


Figure 7.1: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec un correcteur PD sur les magnéto-coupleurs

Nous remarquons que sur un intervalle de temps beaucoup plus important que celui des roues à réaction, l'attitude du satellite ne converge pas. Le fait que les angles restent compris entre $[-3, 3]$ est lié à la conversion des quaternions en angles de Cardan. La commande par proportionnel dérivé telle qu'utilisée par les roues ne peut pas s'appliquer aux MGT. Cela ne veut pas dire que ce type de correcteur ne permet pas de faire converger l'attitude du satellite, les gains de correction sont peut-être mal choisis.

Une autre option pour le correcteur PD est de l'appliquer non pas sur les angles de Cardan, mais sur les quaternions [16]. Dans [15], la loi de commande suivante est donnée:

$$u = -(\alpha^2 K_p \tilde{\epsilon} + \alpha K_v I \dot{\tilde{\omega}}) \quad (7.1)$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{\epsilon}$ est le vecteur d'erreur des parties imaginaires du quaternion, le choix de α , K_p et K_v fait l'objet de contraintes qui ne sont pas détaillées dans ce rapport.

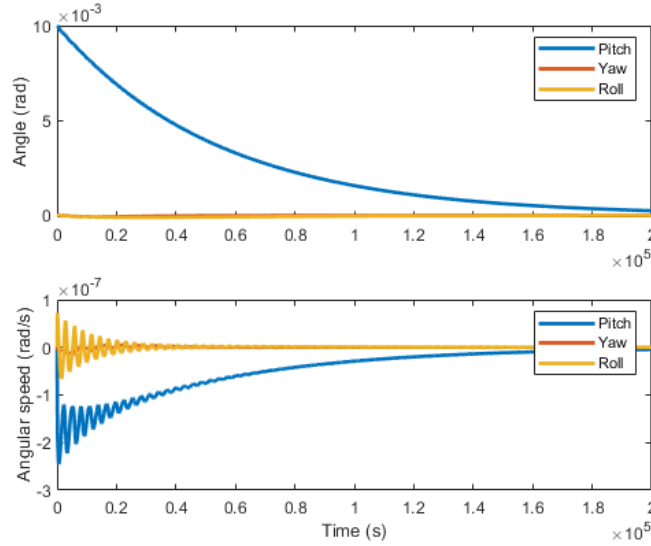


Figure 7.2: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la loi de commande (7.1)

Pour cette simulation, les conditions initiales sont les mêmes que celles des roues à réaction. Pour correspondre aux gains donnés dans l'article, $K_p = K_v = 50$, $\alpha = 0.001$ et $I = \text{diag}(25, 17, 27)$. Le seuil de saturation des MGT est arbitrairement choisi à 5 A.m^2 .

La loi de commande semble faire converger le système, cependant, la simulation s'étend sur $2 \cdot 10^4 \text{ s}$. Ce temps de réponse montre que le système n'a pas convergé en un temps bien supérieur à ce qui est acceptable pour la commande d'attitude. Cette commande n'est pas intéressante car elle n'est pas suffisamment rapide.

7.2. Commande Linéaire Quadratique (LQ)

La commande LQ est répandue dans le contrôle d'attitude de satellite. Il s'agit d'une branche de la commande optimale qui cherche à asservir un système minimisant un point quadratique par l'état et la commande en utilisant les meilleurs gains de correction [17]. L'objectif est de minimiser l'équation suivante:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (7.2)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ la commande, Q et R sont des matrices de pondération. La solution qui minimise l'équation précédente est:

$$u(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (7.3)$$

La matrice P est symétrique, définie positive et est solution de l'équation de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = -Q \quad (7.4)$$

Dans le cas où le système étudié est à temps variant [18], la commande est:

$$u(t) = -R^{-1}B^T(t)P(t)x(t) \quad (7.5)$$

Et l'équation de Riccati devient:

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q + P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) \quad (7.6)$$

Il suffit de résoudre numériquement ou analytiquement l'équation de Riccati, selon le système, pour obtenir la loi de commande. Dans [18], une commande LQ est donnée en formulant l'hypothèse suivante présente aussi dans [3].

Hypothèse:

Le système est périodique par évolution du champ magnétique d'un tour d'orbite à l'autre. Le modèle du satellite est de la forme:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_c(t)u(t) \quad \text{avec } B_c(t+T) = B_c(t) \quad (7.7)$$

Cette hypothèse n'est pas exacte, le modèle est quasi-périodique (voir fig (5.8)).

Avec cette hypothèse, l'auteur cherche une matrice P constante bien que le système soit variant. Il pose ensuite un théorème avec des conditions à remplir pour utiliser cette commande. Cependant, l'une d'elles exige que la matrice dynamique A n'ait pas de valeurs propres de multiplicité supérieure à 1. Le système linéarisé (6.4) présente une matrice dynamique dont toutes les valeurs propres sont nulles. La commande LQ proposée ne peut pas s'appliquer.

La différence avec le modèle de [18] est que celui-ci s'adapte pour une mission de pointage de la Terre. Ce qui permet d'avoir un modèle linéarisé faisant apparaître des termes dans la matrice dynamique. La même observation est faite dans [16] et [10].

7.3. Propositions de lois de commande

Dans cette section, deux lois de commande sont proposées. Utilisant la correction proportionnelle dérivée. Elles font suite à des intuitions en connaissance de l'environnement.

La première utilise l'objectif de la mission, le satellite doit pointer en direction du Soleil. Donc l'axe z (voir fig 2.3) doit pointer le Soleil. Le plan décrit par les axes x et y doit être orthogonal à l'axe Soleil-satellite. Il suffit que les axes x et y convergent vers la référence choisie pour avoir le pointage désiré. Ainsi:

$$\begin{cases} T_{m1} = -K_{\theta 1}\tilde{\theta}_1 - K_{\omega 1}\tilde{\omega}_1 \\ T_{m2} = -K_{\theta 2}\tilde{\theta}_2 - K_{\omega 2}\tilde{\omega}_2 \\ T_{w3} = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Il est à noter qu'aucune preuve de convergence n'est donnée pour la commande (7.8).

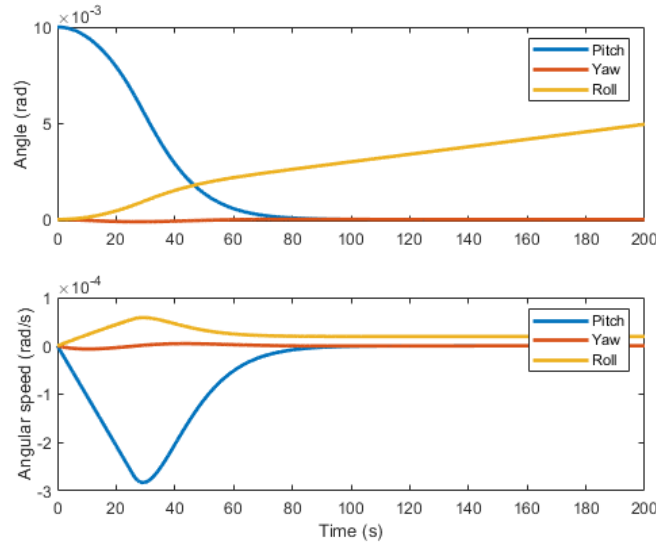


Figure 7.3: Réponse temporelle de l'attitude du satellite avec la commande (7.8)

Les conditions initiales sont $\theta_0 = (0.01, 0, 0)^T$ et $\omega_0 = (0, 0, 0)^T$. Les gains de correction sont $K_{\theta} = (2, 2, 0)^T$ et $K_{\omega} = (0.1, 0.1, 0)^T$. Les magnéto-coupleurs sont saturés à $\pm 5 \text{ A.m}^2$, la roue a une vitesse angulaire maximale de 293 rad/s et peut produire un couple maximum de 0.005 Nm .

Nous remarquons que le *pitch* et le *yaw*, associés respectivement aux axes x et y convergent vers 0. La vitesse angulaire du *roll* se stabilise à une valeur différente de 0 rad/s après que le *pitch* et le *yaw* aient convergé. L'angle suivant l'axe de pointage évolue linéairement. Ainsi, le satellite pointe toujours suivant la même direction, mais une rotation est laissée libre d'évoluer.

Remarque:

L'axe en rotation libre est celui sur lequel la roue à réaction est positionnée.

La deuxième loi de commande découle directement de la remarque ci-dessus. L'idée est d'utiliser deux magnéto-coupleurs comme précédemment, puis de faire intervenir la roue pour contrôler le dernier axe. En réalisant des essais, les trois MGTs et la RW peuvent être utilisés ensemble avec un correcteur PD.

$$\begin{cases} T_w = -K_{\theta}\tilde{\theta}_3 - K_{\omega}\tilde{\omega}_3 \\ T_{mi} = -K_{\theta}\tilde{\theta}_i - K_{\omega}\tilde{\omega}_i \quad i = \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (7.9)$$

Les conditions initiales et les saturations sont les mêmes que précédemment, nous ajoutons $\omega_{w0} = 0 \text{ rad/s}$.

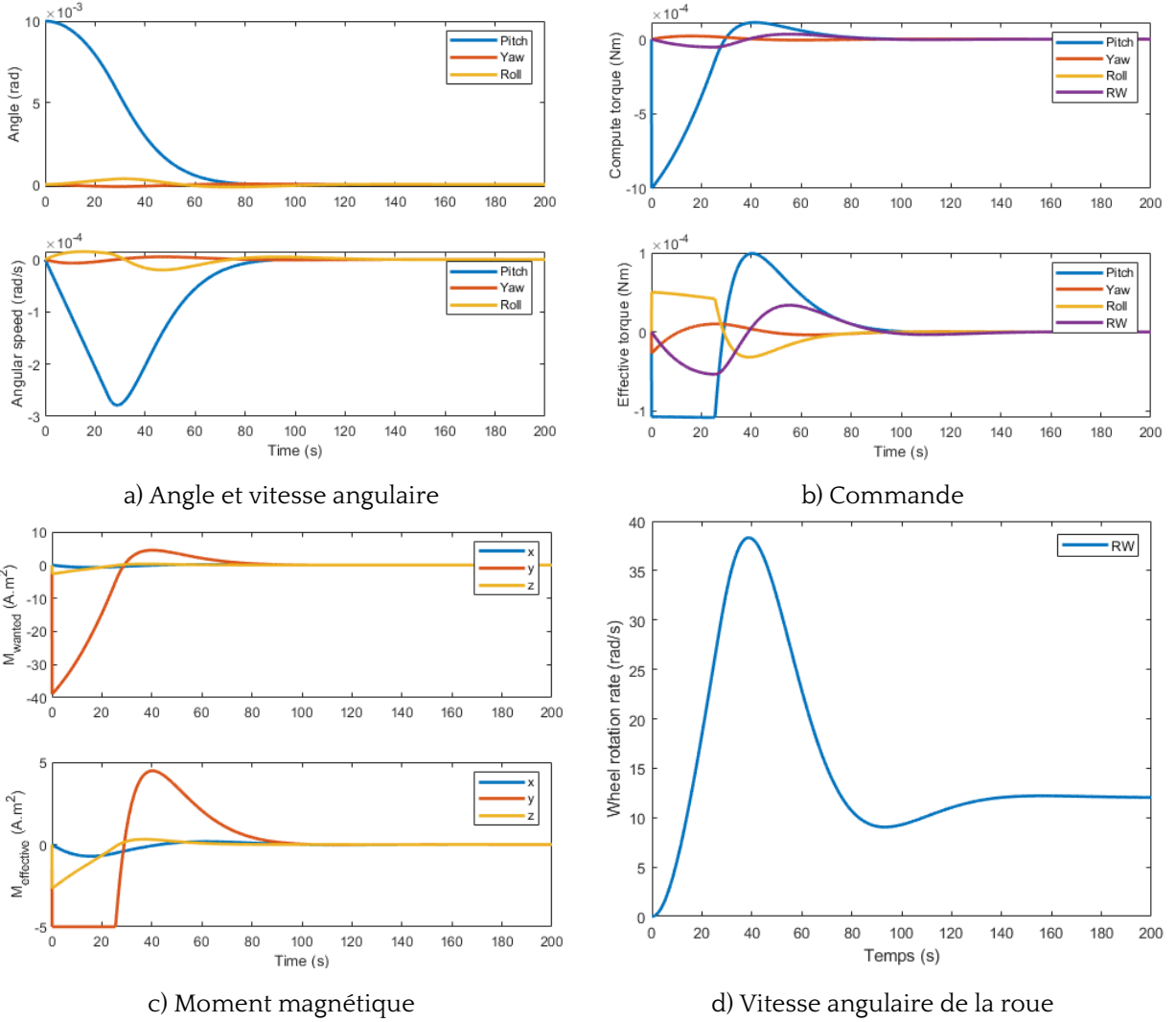


Table 7.1: Réponse temporelle du satellite avec la loi de commande (7.9)

Nous remarquons que l'attitude du satellite (figure (a)) converge vers 0 comme attendu. La vitesse angulaire du satellite sur le *pitch* augmente linéairement car le moment magnétique est saturé (figure (c)). La commande effective reçue par le satellite est saturée (figure (b)), mais elle est surtout constante, ce qui explique cette croissance linéaire. La vitesse angulaire de la roue (figure (d)) évolue pour faire reconverger l'axe *roll* vers 0, là où dans la loi de commande précédente, il diverge.

Éléments de convergence:

La preuve donnée fait appel à la théorie de Floquet présentée dans [19] et dont les éléments utilisés sont détaillés en annexe 9.6. Contexte de la preuve:

- La théorie de Floquet s'intéresse aux systèmes périodique. Or, le champ magnétique terrestre est quasi-périodique d'un tour d'orbite à l'autre.
- Les saturations ne sont pas prises en compte.
- La dynamique de la roue n'est pas prise en compte car la loi de commande ne cherche pas à la faire converger. Nous conservons ses effets induits par la commande.

La théorie de Floquet s'applique aux systèmes de la forme:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{avec } A(t+T) = A(t)$$

Nous remplaçons T_m et T_w dans le modèle linéarisé (6.4) et nous supprimons la dernière ligne et la dernière

colonne qui sont liées à la dynamique de la roue. La matrice $A(t)$ devient:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(b_2^2 + b_3^2)}{I_1} K_{\theta 1} & \frac{b_1 b_2}{I_1} K_{\theta 2} & \frac{b_1 b_3}{I_1} K_{\theta 3} & -\frac{(b_2^2 + b_3^2)}{I_1} K_{\omega 1} & \frac{b_1 b_2}{I_1} K_{\omega 2} & \frac{b_1 b_3}{I_1} K_{\omega 3} \\ \frac{b_1 b_2}{I_2} K_{\theta 1} & -\frac{(b_1^2 + b_3^2)}{I_2} K_{\theta 2} & \frac{b_2 b_3}{I_2} K_{\theta 3} & \frac{b_1 b_2}{I_2} K_{\omega 1} & -\frac{(b_1^2 + b_3^2)}{I_2} K_{\omega 2} & \frac{b_2 b_3}{I_2} K_{\omega 3} \\ \frac{b_1 b_3}{I_3} K_{\theta 1} & \frac{b_2 b_3}{I_3} K_{\theta 2} & -\frac{(b_1^2 + b_2^2) K_{\theta 3} + K_{\theta w}}{I_3} & \frac{b_1 b_3}{I_3} K_{\omega 1} & \frac{b_2 b_3}{I_3} K_{\omega 2} & -\frac{(b_1^2 + b_2^2) K_{\omega 3} + K_{\omega w}}{I_3} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

La période étudiée et celle de l'orbite, d'après l'équation (9.1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \approx 5802 \text{ s}$$

Nous calculons numériquement la matrice de monodromie $\psi_A(t)$ avec les mêmes paramètres que la simulation précédente sur toute la période T . Nous choisissons de poser la matrice $S(\tau) = \mathbb{I}_{6 \times 6}$ pour se rapporter à l'équation (9.32). Nous utilisons ensuite la fonction $\log m()$ de Matlab qui calcule le logarithme népérien d'une matrice. Les valeurs propres de la matrice $\hat{A}T$:

$$\begin{aligned} & -3,79.10^{-9} \pm 1,48.10^{-3}i \\ & -3,64.10^{-9} \pm 1,45.10^{-3}i \\ & -1,51.10^{-9} \pm 0,93.10^{-3}i \end{aligned}$$

T est positive, donc elle ne modifie pas le signe des valeurs propres de \hat{A} . D'après le théorème de la stabilité de Floquet-Lyapunov, si toutes les valeurs propres de la matrice \hat{A} sont à partie réelle négative, alors le système périodique est asymptotiquement stable.

8. Conclusion

8.1. Conclusion

Plusieurs points liés à l'étude spatiale ont été abordés, à commencer par les référentiels. Ils jouent un rôle central dans la modélisation de la mécanique spatiale car chaque position, orientation, etc..., est décrite par rapport à une référence. C'est le point de départ de l'application des lois de la mécanique.

Le satellite est modélisé par son attitude et sa vitesse angulaire, l'attitude est l'orientation de celui-ci par rapport à un repère donné. Cette modélisation fait intervenir plusieurs points qui dictent toute l'étude qui suit. Tout d'abord, la forme du satellite fait l'objet de plusieurs hypothèses en l'absence des données techniques du satellite NIMPH. Ces hypothèses permettent d'avoir une matrice d'inertie diagonale, cette diagonalité est un cas idéal où tous les axes du satellite sont indépendants. Ainsi, l'application d'un couple sur un axe n'entraîne pas de mouvement sur les autres axes. Les couples sont l'équivalent des forces pour les mouvements de translation, fondamentaux dans le contrôle d'attitude, ils constituent les entrées du système. L'attitude est représentée par les quaternions dans le modèle simulé. Les quaternions sont utilisés car une orientation possède une représentation unique qui lui est propre. Cependant, de par leur nature à être en quatre dimensions, ils ne sont pas intuitifs à manipuler. C'est pourquoi les angles de Cardan sont aussi utilisés. Ces angles sont présents dans le spatial et l'aérospatial. Dans ce rapport, ils servent d'interface avec les quaternions et à tracer l'évolution de l'attitude du satellite lors des simulations.

Le satellite dispose de quatre actionneurs, trois magnéto-coupleurs et une roue à réaction. Les roues à réaction sont étudiées en premier pour tester des lois de commande données en référence au sujet du stage. Le problème de ces actionneurs est qu'ils peuvent saturer, ce qui mène à une perte de contrôle de l'attitude du satellite. Ensuite, les magnéto-coupleurs sont étudiés. Ces actionneurs interagissent avec le champ magnétique terrestre, nécessitant de connaître l'intensité du champ magnétique terrestre pour chaque position du satellite. Il faut donc calculer la position du satellite à chaque instant sur son orbite. Son orbite est modélisée en utilisant l'hypothèse du mouvement képlérien. Le champ magnétique est calculé en utilisant le modèle IGRF. Le champ magnétique obtenu est ensuite converti dans le repère du satellite.

Après l'élaboration du modèle, des lois de commande provenant de la littérature sont étudiées. Cependant, les résultats obtenus ne sont pas concluants, car ils ne font pas converger l'attitude du satellite ou la font converger en un temps trop grand pour être acceptable. Ainsi, deux lois de commande utilisant le proportionnel dérivé sont proposées.

8.2. Pour la suite

Cette section aborde l'implantation d'une loi de commande dans le dispositif réel.

L'ordinateur de bord est commandé par un SoC (System-on-Chip) qui se base sur le ZINQZ7030. Elle est programmée en langage C. Le programme à réaliser est l'acquisition des données des capteurs, le calcul de la commande à envoyer et enfin l'envoi de la commande aux actionneurs.

L'ordinateur de bord du satellite doit réaliser différentes tâches en parallèle, faisant l'objet d'un partitionnement.

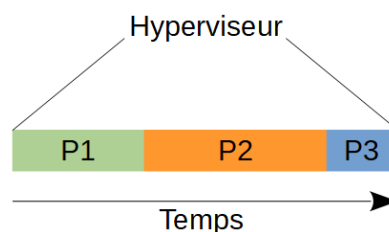


Figure 8.1: Schéma de la hiérarchie d'ordonnancement

Une partition est une, ou un ensemble de tâches. Chaque partition prend en charge une action du satellite (contrôle d'attitude, expérience scientifique, etc). L'hyperviseur fait état d'autorité sur toute la partie logicielle du satellite. Il donne un ordre d'exécution des différentes partitions à exécuter. Il lance et arrête les partitions sans regarder si elles ont fini ou non de réaliser leurs tâches. L'hyperviseur joue un rôle de sécurité pour le satellite. En effet, il garantit qu'une partition possède un temps d'exécution qui lui est alloué. De ce fait, si une partition prend du retard ou tombe en erreur, elle n'affecte pas les autres partitions. Ainsi, il gère l'isolation temporelle des partitions, mais aussi l'isolation spatiale, car une partition ne peut pas écrire dans la mémoire d'une autre.

Dans ce cas (fig. 8.1), l'hyperviseur exécute les partitions P_1 , P_2 , P_3 en boucle et toujours dans le même ordre. Une partition peut avoir plusieurs actions qui ont des échéances, nécessité de se terminer dans un temps donné. Les échéances sont calculées en fonction du pire temps d'exécution de chaque tâche. Ces pires temps d'exécution sont définis par une étude statistique de la moyenne du temps d'exécution à laquelle nous ajoutons un certain pourcentage de cette moyenne.

Le satellite est composé de plusieurs éléments (RW, MGTs, expérience scientifique, etc.), chacun d'eux doit pouvoir envoyer ou recevoir des informations au micro-contrôleur. Un réseau de communication I2C est intégré au satellite avec un maître pour donner le droit d'émettre de l'information.

Les magnéto-coupleurs sont fournis avec une carte électronique *iMTQ* de la société *ISIS - Inonvative Solutions In Space*.

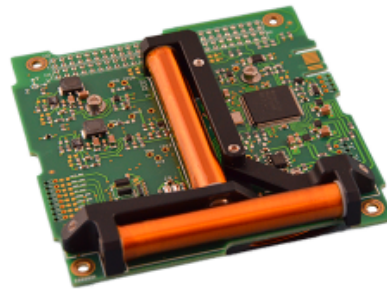


Figure 8.2: Image de l'iMTQ

Image tirée de "<https://satsearch.co/products/isis-isis-magnetorquer-board-i-mtq>"

Trois bobines sont fixées à l'iMTQ, deux ont un noyau de fer (visible sur la figure (8.2) qui amplifie le champ magnétique qu'elles produisent. Nous remarquons que leurs axes d'enroulement¹ sont orthogonaux pour couvrir deux axes de l'espace. Une troisième bobine sans noyau de fer, mais dont la section est plus importante, est placée sur l'autre face de la carte. Son axe est donc orthogonal à ceux des deux premières bobines. Les magnétomètres sont sur une carte *NINANO*. Enfin, la documentation technique pour les magnéto-coupleurs qui m'a été fournie par un ingénieur du LAAS-CNRS n'est pas en libre accès. Il faut directement contacter l'entreprise *ISIS* pour avoir la documentation complète associée.

8.3. Mes ressentis

Ce stage a été une très bonne expérience pour moi. La recherche m'attire pour son côté à vouloir apporter des réponses qui s'intéressent au cœur du problème. L'objectif n'est pas de produire le plus vite possible, mais de prendre le temps de comprendre ce que nous faisons. J'aime utiliser l'outil mathématique pour trouver, prouver ou simplement analyser les propriétés et les interactions de systèmes, quelle que soit leur nature, avec le monde qui nous entoure.

La recherche, c'est avant tout, des femmes et des hommes venant de partout dans le monde qui partagent la même passion. Qui prennent plaisir à parler de leurs travaux et à vouloir transmettre leurs savoirs.

Cependant, il y a certains points moins bien que les autres. Au début du stage, je me réjouissais d'être à cheval sur la recherche et l'industrie, par la réalisation de tests unitaires et l'implantation sur le système réel. Mais l'aspect développement a finalement pris trop de place, ralentissant la recherche du modèle et des lois de commande. Ensuite, l'objectif d'implantation m'a mis une certaine pression qui s'avérait plus bloquante qu'autre chose lorsque la recherche ne donnait pas de résultats directs. Enfin, l'offre de stage se basait sur des roues à réactions uniquement pour les actionneurs du satellite. Or, après 1 mois de stage, en allant voir l'un des ingénieurs travaillant sur l'architecture physique du satellite, nous avons appris qu'il n'y a qu'une seule roue et trois magnéto-coupleurs. Cela représentait une bonne et une mauvaise nouvelle: la bonne est que j'adore l'espace, donc ce sont des connaissances supplémentaires notamment en mécanique orbitale. Le problème, c'est que l'élaboration du modèle a été beaucoup plus compliquée, nécessitant environ 3 mois de recherche là où le modèle avec les roues uniquement aurait pu être plus approfondi.

En résumé, j'ai adoré ce stage en acquérant des connaissances dans le domaine où j'aimerais travailler, mais ne pas avoir pu réaliser tous les objectifs me laisse un petit goût amer.

Restant indécis sur mon avenir dans la vie active, à la suite de cette expérience, je veux réaliser une thèse dans le domaine de la commande des systèmes continus.

¹Fait référence à la forme cylindrique des bobines. L'axe d'enroulement désigne ici, l'axe orthogonale à la base du cylindre.

9. Annexe

9.1. Constantes et opérateurs

Les constantes:

Notation	Signification	Unité	Valeur numérique
ω_e	Vitesse de rotation de la Terre sur elle-même	rad/s	$\frac{2\pi}{86164}$
μ	Paramètre gravitationnel standard de la Terre	$km^3.s^{-2}$	398600.44
r_e	Rayon de la Terre	km	6378

Table 9.1: Tableau des constante utilisées

Les opérateurs:

Symbole	Description
\dot{x}	Dérivée de x par rapport au temps
$u \wedge v$	Produit vectoriel de u et v
x^T	Transposé de la matrice ou du vecteur x
$diag(x)$	Met le vecteur x sous forme d'une matrice diagonale
$sign(x)$	Fonction signe de x
$ x $	Valeur absolue de x
x_0	Condition initiale de la variable x
$u > v$	Le scalaire u est supérieur au scalaire v
$x \succ 0$	La matrice x est définie positive, ses valeurs propre son à partie réelle strictement positive
$Proj_\alpha(x)$	Projection de x sur l'intervalle α
$sat_\alpha(x)$	Saturation de x par α
$arctan(x)$	Arctangente de x

Table 9.2: Tableau des opérateurs utilisés

Les paramètres orbitaux utilisés sont donnés dans le tableau suivant:

Ω	0°
i	87°
ω	0°
a	$6978 km$
e	0.001
ν	0°
GHA_0	0°
Date initiale	10 juin 2025, 10h 16min 23s

Table 9.3: Tableau des paramètres orbitaux

Ces paramètres sont les mêmes pour toutes les simulations présentées.

9.2. Modèle

9.2.1. Centre de masse

Le calcul du centre de masse suivant un axe est donné par:

$$G_x = \frac{1}{m_{tot}} \int x \, dm$$

Où dm est égale à la densité linéique de masse $\lambda(x)$ multiplié par dx une petite variation de x . Ainsi:

$$G_x = \frac{1}{m_{tot}} \int_0^L x \cdot \lambda(x) \, dx$$

Dans le cas d'une masse uniformément répartie, $\lambda(x) = \lambda_0$ une constante.

$$G_x = \frac{\lambda_0}{m_{tot}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L$$

En sachant que $\lambda_0 \cdot L = m_{tot}$, le résultat est:

$$G_x = \frac{L}{2}$$

9.2.2. Le tenseur inertiel

Le calcul des éléments diagonaux, par exemple I_{xx} , est:

$$I_{xx} = \int_{L^-}^{L^+} \int_{l^-}^{l^+} \int_{h^-}^{h^+} \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

La triple intégrale donne:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho_0 \left[\left[\left[\frac{y^3 z + y z^3}{3} x \right]_{L^-}^{L^+} \right]_{l^-}^{l^+} \right]_{h^-}^{h^+} \\ &= \frac{\rho_0 L}{3} (h((l^+)^3 - (l^-)^3) + l((h^+)^3 - (h^-)^3)) \end{aligned}$$

Nous posons:

$$\begin{aligned} L^- &= -aL & L^+ &= (1-a)L & 0 &\leq a \leq 1 \\ l^- &= -bl & l^+ &= (1-b)l & 0 &\leq b \leq 1 \\ h^- &= -ch & h^+ &= (1-c)h & 0 &\leq c \leq 1 \end{aligned}$$

L'expression devient:

$$I_{xx} = \frac{m_{tot}}{3} (h^2(1-3c+3c^2) + l^2(1-3b+3b^2))$$

Le polynôme $\mathcal{P}(\alpha) = 3\alpha^2 - 3\alpha + 1$ est positif sur $[-1; 1]$ ce qui signifie que les coefficients diagonaux sont toujours positifs et dépendent du positionnement du centre de masse.

Le calcul des éléments non diagonaux est:

$$I_{xy} = \int_{L^-}^{L^+} \int_{l^-}^{l^+} \int_{h^-}^{h^+} \rho(x, y, z) (xy) \, dx \, dy \, dz$$

La triple intégrale donne:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \rho_0 \left[\left[\left[\frac{x^2 y^2 z}{4} \right]_{L^-}^{L^+} \right]_{l^-}^{l^+} \right]_{h^-}^{h^+} \\ &= \frac{\rho_0 h}{4} ((L^+)^2 - (L^-)^2)((l^+)^2 - (l^-)^2) \end{aligned}$$

En remplaçant:

$$I_{xy} = \frac{m_{tot} \cdot L \cdot l}{4} (1 - 2a)(1 - 2b)$$

Cette expression est très intéressante car elle montre l'importance de se placer sur le centre de masse. Si a et b , ou a et b , ou b et c sont différents de 0.5, des termes non diagonaux apparaissent dans la matrice d'inertie. Les axes de rotation ne sont plus indépendants.

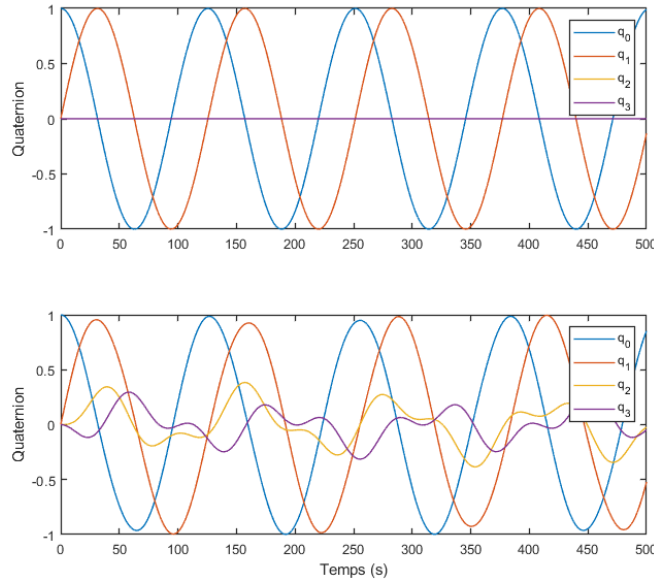


Figure 9.1: Simulation de l'orientation du satellite en fonction du tenseur inertiel

Ces réponses temporelles représentent l'attitude d'un objet soumis à une vitesse angulaire de 0.1 rad/s sur son premier axe de rotation, les autres axes n'ont pas de vitesse initiale. Le quaternion initial est $(1, 0, 0, 0)^T$ et aucune force ne s'applique sur l'objet.

La première simulation montre la réponse temporelle pour une matrice d'inertie diagonale en mettant a , b et c égaux à 0.5. Deux éléments du quaternion évoluent sous l'effet de la vitesse initiale quand les deux autres restent nuls.

La seconde montre la réponse temporelle pour une matrice non diagonale, $a = 0.25$, $b = 0.25$ et $c = 0.5$. Cette fois, q_0 et q_1 ont une forme similaire à la précédente mais légèrement retardée et atténuée. Quant à q_2 et q_3 , ils ne sont plus identiquement nuls, ce qui signifie que la rotation suivant le premier axe a été en partie transmise à l'un ou aux deux autres axes.

9.3. Les roues à réaction

9.3.1. Valeurs numériques des coefficients pour la commande avec les 3 RWs

K_p	[0.1, 0.1, 0.1]	$c_\theta = c_\omega$	[1.0966, 3.0462, 1.0966]
K_d	[2, 2, 2]	G	$10^{-2}[-4.54, -2.72, -4.54]$
b	$10^{-4}[2.618, 4.363, 2.618]$	K	$10^{-4}[5, 5, 5]$
θ_t	$10^{-3}[5.2, 8.7, 2.5]$	S	$10^{-4}[2.5, 2.5, 2.5]$
G_θ	[39.92, 39.92, 39.92]	λ	[0.05, 0.05, 0.05]
G_ω	[798.4, 798.4, 798.4]	c	$10^{-3}[5, 5, 5]$

Table 9.4: Valeurs des coefficients utilisés pour les lois de commande avec des roues à réaction

9.3.2. Switching PD

Les courbes ci-dessous font partie de la même simulation présentée dans la section (4.2.1) avec les mêmes conditions initiales et coefficients.

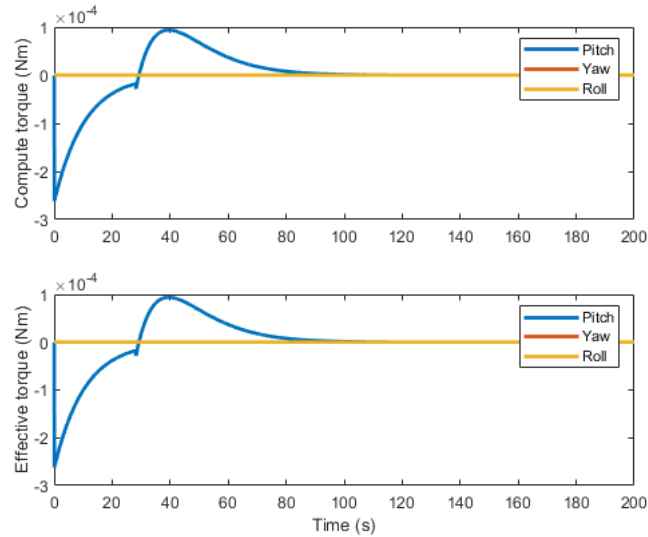


Figure 9.2: Réponse temporelle des couples avec la commande switching PD

Les couples calculés ne sont pas saturés, cela peut s'expliquer par les conditions initiales relativement faibles qui ne forcent pas les roues à fournir une accélération supérieure aux limites du satellite. Une chose que nous remarquons immédiatement, c'est la discontinuité de la commande. Là où la vitesse angulaire du satellite (4.5) montre un changement rapide dans son évolution, la commande a une cassure au niveau du changement de mode de correction.

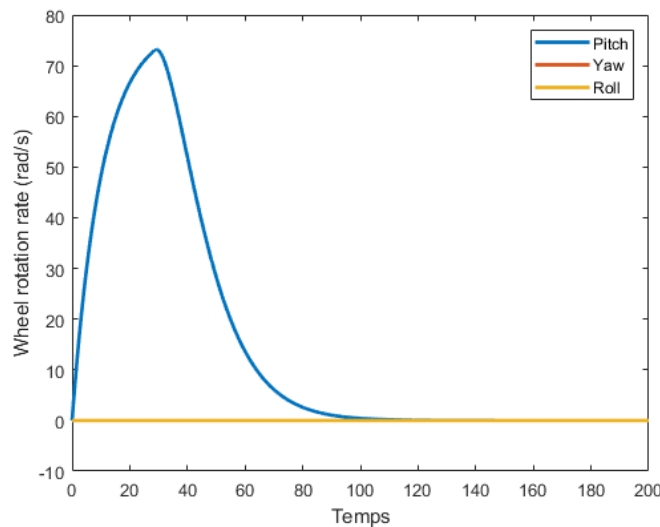


Figure 9.3: Réponse temporelle des vitesses angulaires des roues à réaction avec la commande switching PD

La roue à réaction a aussi un changement d'évolution rapide au passage du seuil, ce qui est intéressant, c'est qu'elle converge vers 0 rad/s . Cela s'explique par l'échange de couples, les deux ayant le même axe de rotation, leurs moments cinétiques sont égaux. Donc, pour stabiliser le satellite ($\omega = 0$), la vitesse de la roue doit être nulle.

9.3.3. PD adaptatif

Les figures ci-dessous complètent simplement la simulation (4.6), les conditions initiales et les valeurs des coefficients sont donc les mêmes.

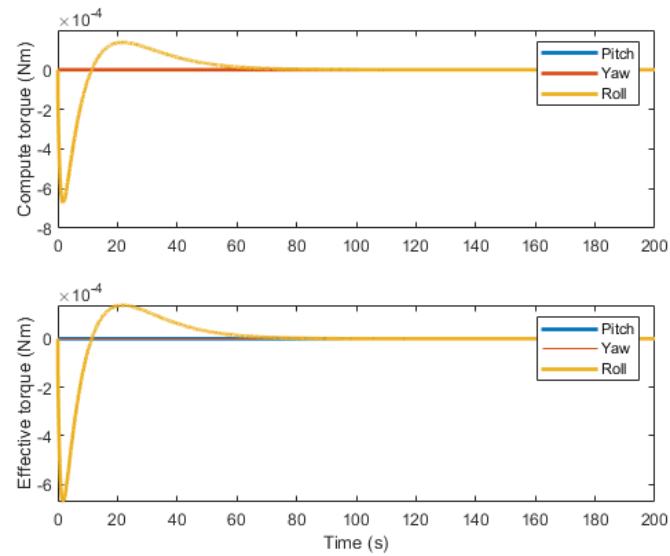


Figure 9.4: Réponse temporelle des couples avec le correcteur PD adaptatif

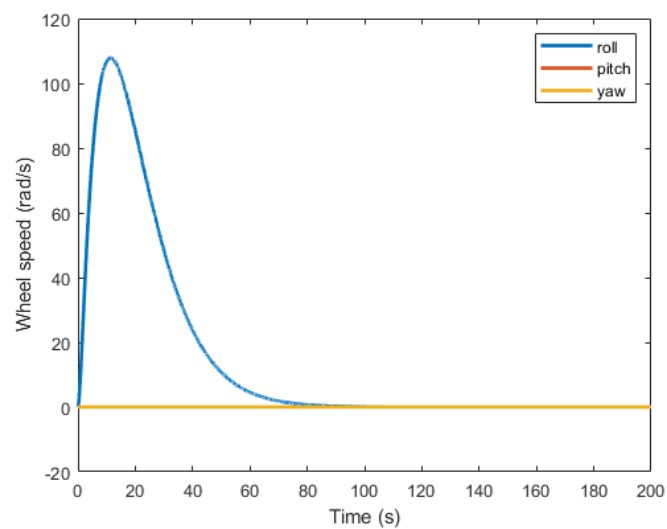


Figure 9.5: Réponse temporelle des vitesses angulaires des roues à réaction avec le correcteur PD adaptatif

9.3.4. Mode glissant au premier ordre

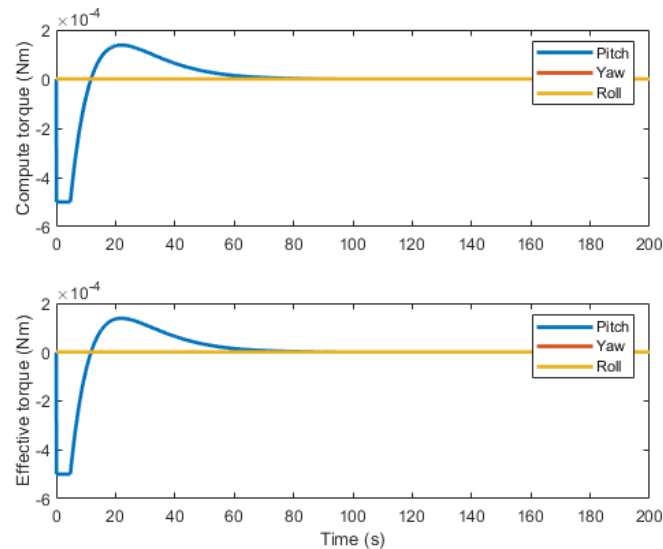


Figure 9.6: Réponse temporelle des couples avec la commande des modes glissant

Nous pouvons observer une saturation du couple calculé qui correspond à la saturation imposée par la commande. Puis, la saturation laisse place à une courbe signifiant que la correction a changé et est un correcteur PD.

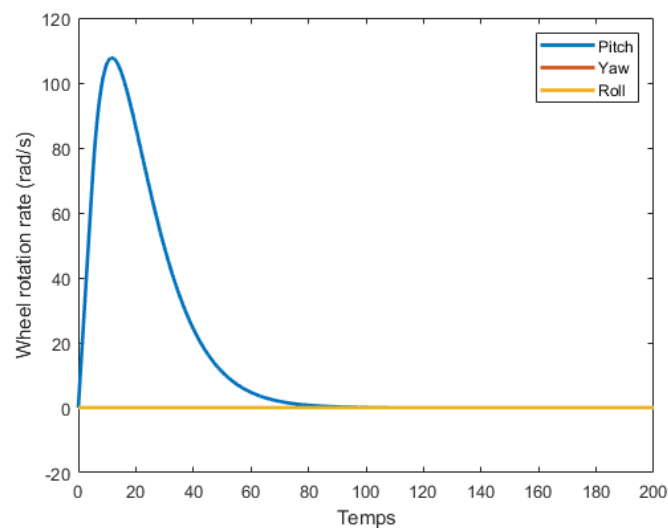


Figure 9.7: Réponse temporelle des vitesses angulaires des roues à réaction avec la commande des modes glissant

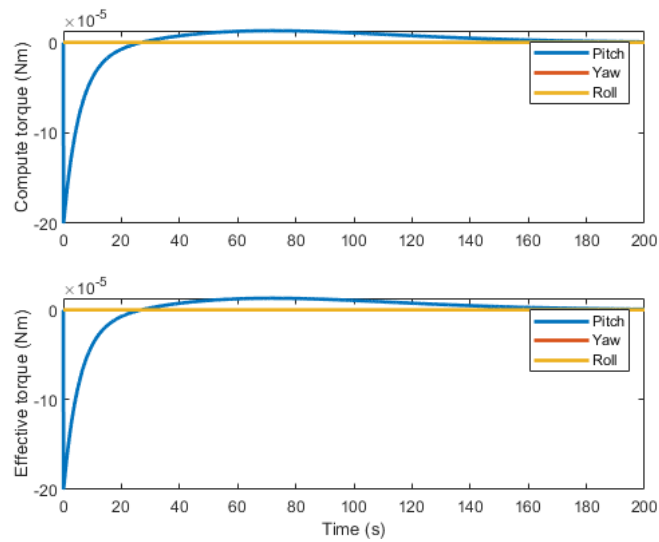


Figure 9.8: Réponse temporelle des couples avec la commande adaptative des modes glissant

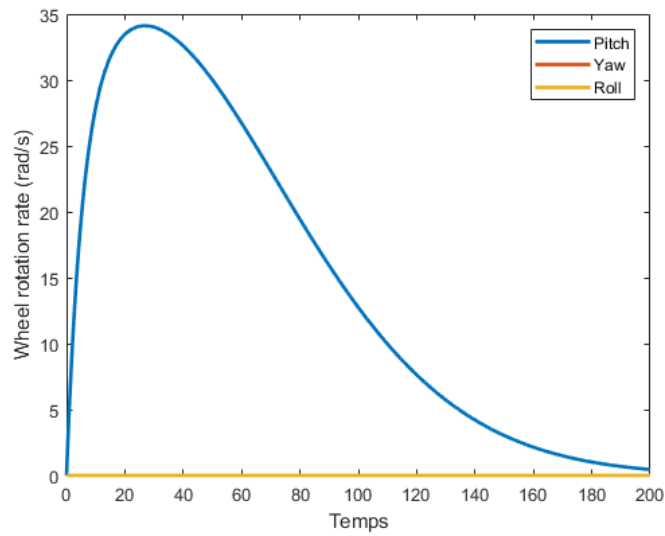


Figure 9.9: Réponse temporelle des vitesses angulaires des roues à réaction avec la commande adaptative des modes glissant

9.4. Représentation de l'orbite

Pour implémenter la trajectoire sur l'orbite, des éléments sont repris d'un fichier matlab déjà existant [20] nommé "*Orbit3D*". L'auteur du fichier n'a pas donné de sources sur les formules utilisées, mais elles peuvent être retrouvées dans [7] au chapitre 2.

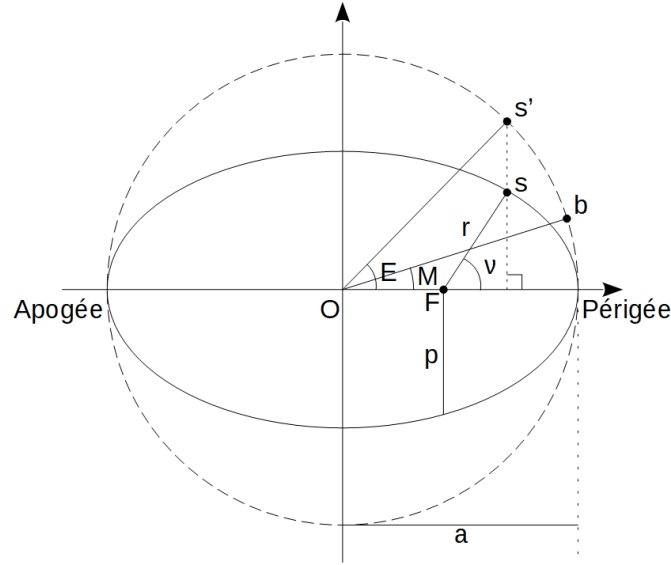


Figure 9.10: Schéma des paramètres orbitaux

Le schéma ci-dessus représente une orbite elliptique (trait continu), de centre O dont le demi-grand axe est a . F est le foyer d'attraction, dans le cas de NIMPF, il s'agit de la Terre, s est le point associé au satellite. s' est la projection de s sur une orbite circulaire (trait discontinu) de centre O et de rayon a . Comme précédemment, ν est l'angle entre l'axe Terre-périgée et celui Terre-satellite.

La modélisation de la position du satellite est souvent faite par un modèle dynamique utilisant les dérivées des différents paramètres (notamment dans [21]). Cependant, une nouvelle dynamique demande d'agrandir le modèle déjà existant pour l'attitude ou d'avoir une seconde boucle d'intégration en parallèle de la première. Une telle modification complexifie le système théorique et numérique. C'est pourquoi nous utilisons le fichier *Orbit3D* qui ne fait pas intervenir d'équations différentielles. Cela présente les avantages de simplifier le modèle numérique et de pouvoir calculer les différents paramètres à n'importe quel instant sans nécessité de les connaître à l'instant précédent.

9.4.1. Vitesse angulaire moyenne

La vitesse angulaire moyenne n est:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} \quad (9.1)$$

Il s'agit de la vitesse angulaire du point b sur la figure (9.10). La vitesse du point b est constante, contrairement à celle du point s qui est minimale à l'apogée et maximale au périgée. n est définie de façon à ce que les points s et b soient confondus au périgée et au même instant. μ est le paramètre gravitationnel standard de la Terre et T la période d'une orbite.

9.4.2. Demi-côté droit

$$p = a(1 - e^2) \quad (9.2)$$

Le demi-côté droit est la valeur du rayon de l'orbite quand le satellite passe par la droite perpendiculaire à l'axe périgée-apogée passant par le point F .

9.4.3. L'anomalie excentrique initiale

L'anomalie excentrique E est calculée séparément de l'anomalie excentrique initiale E_0 qui dépend de paramètres dont eux-mêmes sont dépendants de E_0 .

$$\cos(E_0) = \frac{e + \cos(\nu_0)}{1 + e \cdot \cos(\nu_0)} \quad (9.3)$$

$$\sin(E_0) = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(\nu_0)}{1 + e \cdot \cos(\nu_0)} \quad (9.4)$$

À partir du sinus et du cosinus, nous utilisons les formules de trigonométrie.

$$E_0 = \arctan\left(\frac{\sin(E_0)}{\cos(E_0)}\right)$$

L'anomalie excentrique évolue dans le sens trigonométrique en partant de 0 jusqu'à 2π à chaque orbite. Elle est donc recadrée par la condition suivante:

$$\begin{cases} E_0 := E_0 + 2\pi & \text{Si } E_0 < 0 \\ E_0 := E_0 & \text{Sinon} \end{cases} \quad (9.5)$$

9.4.4. L'instant de passage au périégée

$$t_p = \frac{-E_0 + e \cdot \sin(E_0)}{n} + t_0 \quad (9.6)$$

Il s'agit de l'instant où le satellite passe au point du périégée. Pour le modèle numérique, t_0 l'instant initial, est choisi égal à 0 s.

9.4.5. L'anomalie moyenne

L'anomalie moyenne M est l'angle lié à la vitesse angulaire moyenne:

$$M = n(t - t_p) = E - e \cdot \sin(E) \quad (9.7)$$

De la même manière que pour n , M évolue différemment de ν mais à l'instant t_p , les deux sont nuls à 2π près.

9.4.6. L'anomalie excentrique

L'anomalie excentrique n'a pas de formule exacte, mais elle peut être calculée itérativement à partir de l'équation (9.7). Nous posons la fonction:

$$f(E) = E - e \cdot \sin(E) - M \quad (9.8)$$

On cherche E tel que $f(E) = 0$. Pour ce faire, la méthode de Newton est utilisée:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (9.9)$$

Il faut la dérivée de la fonction $f(E)$.

$$f'(E) = 1 + e \cdot \cos(E) \quad (9.10)$$

Pour initialiser la méthode, nous choisissons que E_1 prenne la valeur de M . Il faut maintenant déterminer un critère d'arrêt ϵ de la méthode. Si le critère est trop grand, la valeur obtenue risque d'être imprécise et, si le critère est trop petit, le temps de calcul risque d'être trop long. Nous utilisons une expression approchée de (9.7) pour obtenir:

$$t = \frac{E - e \cdot \sin(E)}{n} \quad (9.11)$$

Le problème du choix du critère devient: Quelle est la valeur de E maximale pour que l'écart temporel ne soit pas trop important ?

En sachant que les vitesses en orbite basse sont comprises entre 6.9 et 7.8 $km.s^{-1}$.

L'algorithme est donc:

$$\begin{aligned} E &:= M \\ \text{Faire} \\ E &:= \text{newton}(E, f(E)) \\ \text{Tant que } |E| &> \epsilon \end{aligned} \quad (9.12)$$

9.4.7. L'anomalie vraie

$$\sin(\nu(t)) = \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot \sin(E(t))}{1-e \cdot \cos(E(t))} \quad (9.13)$$

$$\cos(\nu(t)) = \frac{\cos(E(t)) - e}{1-e \cdot \cos(E(t))} \quad (9.14)$$

Comme annoncé précédemment, l'anomalie vraie n'évolue pas linéairement comme l'anomalie moyenne. En se rapprochant du périégée, le satellite accélère et décélère quand il s'en éloigne.

$$\nu(t) = \arctan\left(\frac{\sin(\nu(t))}{\cos(\nu(t))}\right) \quad (9.15)$$

9.4.8. Le rayon de l'orbite

L'orbite pouvant être elliptique, la distance entre le satellite et la Terre n'est pas la même en tout point de l'orbite.

$$r(t) = \frac{p}{1+e \cdot \cos(\nu(t))} \quad (9.16)$$

9.4.9. Passage aux coordonnées géocentriques

Pour la suite, nous voulons connaître la position du satellite dans le système de coordonnées géocentrique. Nous commençons par calculer les coordonnées du satellite dans le plan d'orbite. Pour bien comprendre les transformations qui suivent, le schéma suivant est donné :

$$ECI \xrightarrow{\Omega} O' \xrightarrow{i} O'' \xrightarrow{\omega+\nu} orb$$

Figure 9.11: Schéma du passage du repère ECI à celui du satellite sur l'orbite

O' et O'' sont les origines des repères intermédiaires, orb est le repère lié au satellite sur l'orbite. Ce repère orb est similaire au LVLH mais les axes ne sont pas les mêmes.

$$orb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} LVLH \quad (9.17)$$

x_{orb} pointe l'opposé de la Terre, y_{orb} pointe le sens de déplacement du satellite et z_{orb} complète le trièdre.

$$\begin{cases} x_{ECI} = r(\cos(\nu + \omega) \cdot \cos(\Omega) - \sin(\nu + \omega) \cdot \cos(i) \cdot \sin(\Omega)) \\ y_{ECI} = r(\cos(\nu + \omega) \cdot \sin(\Omega) + \sin(\nu + \omega) \cdot \cos(i) \cdot \cos(\Omega)) \\ z_{ECI} = r \cdot \sin(\nu + \omega) \cdot \sin(i) \end{cases} \quad (9.18)$$

À partir des coordonnées ECI, il est plus facile de retrouver les coordonnées géocentriques. Cependant, il ne faut pas oublier que la Terre a une rotation propre par rapport au repère inertiel. Cette rotation est notée ω_e . Nous introduisons le *Greenwich Hour Angle* (GHA), il s'agit de l'angle formé par l'axe Terre-méridien de Greenwich et un axe Terre-point de l'espace. Nous parlons d'angle horaire car c'est le temps nécessaire à la Terre pour faire une rotation de l'angle décrit.

Exemple:

La surface de la Terre est décomposée en 24 méridiens correspondant aux 24 heures d'une journée. L'écart entre deux méridiens est de $15^\circ = \frac{360^\circ}{24}$. Ce qui signifie que la Terre tourne de 15° toutes les heures, le GHA des méridiens consécutifs à celui de Greenwich est de 15° .

Dans le cas de l'astronomie et de la navigation spatiale, le méridien de Greenwich permet de fixer une référence.

$$GHA(t) = \omega_e(t - t_0) + GHA_0 \quad (9.19)$$

Avec $GHA_0 = GHA(t_0)$.

Dans le cas de la simulation de l'attitude du satellite, la rigueur sur l'orbite du satellite n'est pas la plus importante. Le GHA_0 peut être choisi arbitrairement. Dans un contexte où l'orbite doit faire l'objet de plus d'attention, le GHA_0 dépend des éphémérides qui informent de la position du méridien de Greenwich à chaque instant.

L'équation (9.19) montre que si $t \rightarrow \infty$, alors $GHA(t) \rightarrow \infty$ bien que celui-ci soit borné entre -180° et 180° . Nous introduisons des conditions de recadrage:

$$GHA(t) := \begin{cases} GHA(t) + \left\lceil \frac{GHA(t)}{-2\pi} \right\rceil 2\pi & \text{Si } GHA(t) < -\pi \\ GHA(t) - \text{sign}(GHA(t)) \left\lfloor \frac{GHA(t)}{2\pi} \right\rfloor 2\pi & \text{Si } GHA(t) > \pi \\ GHA(t) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (9.20)$$

Remarque:

Pour le calcul numérique, les angles sont convertis en radians, d'où l'usage de π dans les conditions. D'un point de vue navigation, les angles sont en degrés.

Enfin, les coordonnées géocentriques sont obtenues par:

$$\begin{cases} latitude = \arcsin(\sin(i) \cdot \sin(\nu + \omega)) \\ longitude = \arctan\left(\frac{y_{ECI}}{x_{ECI}}\right) - GHA(t) \\ hauteur = r_{ECI} \end{cases} \quad (9.21)$$

Ces nouvelles coordonnées permettent de calculer le champ magnétique en un point de l'espace par rapport à la Terre. Il n'est pas nécessaire d'utiliser le système géocentrique pour calculer le champ magnétique terrestre. Néanmoins, c'est ce système de coordonnées qui est utilisé par le modèle présenté IGRF.

9.5. Analyse du modèle

9.5.1. Points de fonctionnement

Afin de calculer le point de fonctionnement, nous simplifions le problème en posant:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\omega}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} & N(q) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & -S(\omega)I & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \omega \\ \omega_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 3} \\ R & I^{-1} \\ \frac{1}{I_{w3}} & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_w \\ T_m \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

Ce modèle montre que le champ magnétique est déjà inclus dans T_m . Ainsi:

$$\begin{cases} q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3 = 0 \\ q_0\omega_1 + q_2\omega_3 - q_3\omega_2 = 0 \\ q_0\omega_2 + q_3\omega_1 - q_1\omega_3 = 0 \\ q_0\omega_3 + q_1\omega_2 - q_2\omega_1 = 0 \\ T_{m,1} + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = 0 \\ T_{m,2} + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = 0 \\ T_w + T_{m,3} + \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = 0 \\ T_w = 0 \end{cases}$$

Sur les 4 dernières égalités, des inerties ne sont pas écrites car elles sont multipliées par 0. Sur les 4 premières équations, il est possible de voir les points de fonctionnement $q = \text{quelconque}$ et $\omega = 0$. Il n'est cependant pas

possible d'avoir $q = 0$ du fait de (3.9). Si nous essayons de résoudre:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{-q_2\omega_2 - q_3\omega_3}{\omega_1} & \omega_1 \neq 0 \\ q_0 = \frac{-q_2\omega_3 + q_3\omega_2}{\omega_1} & \omega_1 \neq 0 \\ q_3 = \frac{-q_0\omega_2 + q_1\omega_3}{\omega_1} = -\frac{2q_3\omega_3^2}{\omega_1^2} \\ q_2 = \frac{q_0\omega_3 + q_1\omega_2}{\omega_1} = -\frac{q_2(\omega_3^2 + \omega_2^2)}{\omega_1^2} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à:

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases}$$

Ce résultat n'est pas possible, il ne reste que $q = \text{quelconque}$ et $\omega = 0$. Ce qui implique $T_m = 0$. Si nous remplaçons T_m par l'équation (5.14), cela devient:

$$-\frac{1}{\|B\|^2} S(B) \cdot S(B) \cdot T_{m,req} = 0$$

Le champ magnétique ne pouvant être nul.

$$T_{m,req} = 0$$

Les points de fonctionnement sont:

$$\begin{cases} q = \text{quelconque} \\ \omega = 0 \\ \omega_w = \text{quelconque} \\ T_w = 0 \\ T_{m,req} = 0 \end{cases}$$

9.6. Théorie de Floquet

Toute la théorie présentée dans cette section est tirée de [19].

Pour ce rapport, la théorie de Floquet permet simplement de donner une preuve de stabilité d'un système bouclé.

La théorie de Floquet s'applique aux systèmes périodiques tels que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ A(t+T) = A(t) \end{cases} \quad (9.23)$$

Ainsi, la matrice A est périodique d'une période T .

Nous posons:

$$x(t) = \phi_A(t, \tau)x(\tau) \quad (9.24)$$

Où τ est l'instant initial, t est le temps du système. La matrice $\phi_A(t, \tau)$ est définie par:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_A(t, \tau) = A(t)\phi_A(t, \tau) \\ \phi_A(\tau, \tau) = \mathbb{I} \end{cases} \quad (9.25)$$

Elle est aussi périodique:

$$\phi_A(t+T, \tau+T) = \phi_A(t, \tau) \quad (9.26)$$

Remarque:

La matrice de transformation $\phi_A(t, \tau)$ n'a pas d'expression analytique dans le domaine continu. Elle ne peut être

obtenue qu'en intégrant itérativement.

Nous introduisons la matrice de monodromie $\psi_A(t)$ telle que:

$$\psi_A(t) = \phi_A(t + T, t) = \phi_A^{-1}(t + T, t) \quad (9.27)$$

Nous posons le changement de base:

$$\hat{x}(t) = S(t)x(t) \quad (9.28)$$

Avec $S(t + T) = S(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \dot{S}(t)x(t) + S(t)\dot{x}(t) \\ \iff \dot{\hat{x}}(t) &= (\dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)A(t)S^{-1}(t))\hat{x}(t) \\ \iff \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(t)\hat{x}(t) \end{aligned}$$

Nous cherchons $S(t)$ telle que $\hat{A}(t) = \hat{A}$, la matrice \hat{A} doit être constante. À partir de l'expression précédente, nous obtenons:

$$\dot{S}(t) = \hat{A}S(t) - S(t)A(t) \quad (9.29)$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme:

$$S(t) = e^{\hat{A}(t-\tau)}S(\tau)\phi_A(\tau, t) \quad (9.30)$$

Nous cherchons la valeur de $S(\tau)$, la condition initiale.

$$\begin{aligned} S(\tau + T) &= S(\tau) = e^{\hat{A}T}S(\tau)\phi_A(\tau, \tau + T) \\ \iff S(\tau) &= e^{\hat{A}T}S(\tau)\psi_A^{-1}(\tau) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Il est alors possible de trouver \hat{A} . En choisissant $S(\tau) = \mathbb{I}$ (si une solution l'autorise), l'expression se simplifie:

$$e^{\hat{A}T} = \psi_A(\tau) \quad (9.32)$$

Il suffit de calculer l'intégration de la matrice de transformation $\phi_A(t, \tau)$ pour obtenir la matrice de monodromie. La seule difficulté est le calcul de l'inverse de l'exponentielle qui n'est pas abordé dans cette section.

Théorème:

Un système périodique est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice \hat{A} sont à partie réelle négative.

- [1] S. Vézina, "Chapitre 4.3 - le centre de masse." [Online]. Available: https://physique.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nya/note_nya/NYA_XXI_Chap%204.3.pdf
- [2] H. Zeghlache, "Tenseur d'inertie." [Online]. Available: http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M02_G01/co/grain07.html
- [3] J.-F. Tregouet, "Synthèse de correcteurs robustes périodiques à mémoire et application au contrôle d'attitude de satellites par roues à réaction et magnéto-coupleurs," Ph.D. dissertation, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE), Toulouse, France, 2013.
- [4] G. Sanderson and B. Eater, "Visualizing quaternions, an explorable video series." [Online]. Available: <https://eater.net/quaternions/video/intro>
- [5] L. Mazzini, *Flexible Spacecraft Dynamics, Control and Guidance*. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [6] "Conversion between quaternions and euler angles." [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles
- [7] Y. Yang, *Spacecraft Modeling, Attitude Determination, and Control: Quaternion-Based Approach*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2019.
- [8] Y. Lahana *et al.*, "Comparison of adaptative control laws on a satellite attitude control benchmark," *HAL*, 2023.
- [9] R. Feynman *et al.*, *The Feynman Lectures on Physics*. Basic Books, 2011.
- [10] J. V. der Ha *et al.*, "Attitude control by magnetic torquer," *Advances in the Astronautical Sciences*, 2009.
- [11] G. Fanjat, "Les fluctuations du champ magnétique terrestre : des variations séculaires récentes aux renversements," Ph.D. dissertation, Université de Montpellier, 2012.
- [12] P. Alken *et al.*, "International geomagnetic reference field : the thirteenth generation," *Earth, Planet and Space*, 2021.
- [13] W. Brown, "m_igrf," 2025, consulté le 12/08/2025. [Online]. Available: https://github.com/wb-bgs/m_IGRF
- [14] J. Riggs, "Coordinate transformations via euler angle rotations," *Scribd*, 2019.
- [15] M. Lovera and A. Astolfi, "Spacecraft attitude control using magnetic actuators," *Elsevier*, 2004.
- [16] M. Lovera and E. Silani, "Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results," *Elsevier*, 2005.
- [17] D. Alazard, "Régulation lq/lqg," notes de cours, ISAE-SUPAERO.
- [18] M. Psiaki, "Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation," *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.*, 2000.
- [19] S. Bittanti and P. Colaneri, *Periodic Systems, Filtering and Control*. Springer, 2009.
- [20] E. Condoleo, "Orbit3d," 2014, consulté le 13/08/2025. [Online]. Available: https://fr.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/45573-orbit3d?s_tid=FX_rc1_behav
- [21] P. R. A. Gilz, "Embedded and validation control algorithms for the spacecraft rendezvous," Ph.D. dissertation, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2018.