



OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO AMORTIGUADO Y BAJO FORZAMIENTO PERIÓDICO

DIEGO ADOLFO CARVAJAL ARAYA

Profesor Guía:

Dr. Felipe Herrera

Profesores comisión:

Dr. Humberto Prado

Dr. Yaroslav Ispolatov

Trabajo de titulación para optar al
título profesional de Ingeniero
Matemático

Santiago - Chile
2018

© Diego Adolfo Carvajal Araya.

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Principios básicos de la Mecánica Cuántica	5
1.1.1. Axiomas de la Mecánica Cuántica	5
1.1.2. Notación de Dirac	9
1.2. Oscilador Armónico Cuántico	11
1.2.1. Operadores Posición y Momentum	11
1.2.2. Oscilador Armónico Cuántico	12
1.2.3. Representación en el espacio $l^2(\mathbb{N})$	14
1.3. Estados Coherentes	16
1.3.1. Operador de Desplazamiento	17
1.4. Semigrupos	19
2. Oscilador Armónico forzado periódicamente	22
2.1. Teoría de Floquet	22
2.2. Oscilador Armónico bajo Forzamiento Periódico	24
2.2.1. Operador de Evolución	24
2.2.2. Función de desplazamiento $\alpha(t)$	29
2.2.3. Esperanzas de los operadores a , a^\dagger y \hat{N}	32
2.2.4. Overlaps	34
2.2.5. Representación de Floquet	38
2.2.6. Cuasi-energías	44
3. Oscilador Armónico Cuántico Forzado y Amortiguado	46
3.1. Ecuación de Lindblad bajo un Hamiltoniano periódico	46
3.1.1. Derivación del operador de Lindblad	48
3.1.2. Cálculo de las Tasas $\gamma(\omega)$ y $S(\omega)$	55
3.2. Solución para los operadores a , a^\dagger y \hat{N}	58
3.2.1. Evolución de \mathcal{D}_z en el cuadro de interacción	58
3.2.2. $\Lambda_t^*(\mathcal{D}_z)$ como generador de $a^{\dagger j} a^l$ en el tiempo	59
Bibliografía	64

Introducción

A lo largo de la historia, el ser humano se ha cuestionado incesantemente la realidad en la cual se desenvuelve; entre estas interrogantes se encuentra el saber de que está compuesto todo lo que se observa. En la antigua Grecia el filósofo Demócrito, propuso que dado cualquier objeto material, si se comienza a dividir este en pedazos cada vez más pequeños, llegará un momento en el cual no podremos seguir realizando este acto, a tales trozos indivisibles llamo por átomo. Siglos después, pasando por los aportes de varios científicos como John Dalton, Joseph John Thomson o Ernest Rutherford junto a su equipo compuesto de Hans Geiger y Ernest Marsden [25, 19], llegamos a comienzos del siglo 20, donde el Físico Max Planck realiza un revolucionario trabajo en la explicación del fenómeno de la radiación de cuerpos negros; introduciendo la constante de Planck y la cuantización de la energía [18]. Más tarde Albert Einstein tomaría las hipótesis de Planck para trabajar en el efecto fotoeléctrico del electrón, el cual le terminaría valiendo el Premio Nobel de Física en 1921. Es así que llega el Físico danés Niels Bohr cambiando la concepción de lo que se conoce como átomo hasta ese momento, influenciado por Max Planck y Ernest Rutherford, propone un modelo atómico en el cual los electrones tienen órbitas cuantificadas [3]. Luego bajo los aportes de varios científicos, llega Werner Heisenberg junto a Max Born y Pascual Jordan, los cuales observando la naturaleza matemática no conmutativa de los objetos en la teoría cuántica, introduce la mecánica cuántica matricial [5, 4], donde ahora los observables físicos no vienen representados por números reales, si no más bien por matrices, aunque posteriormente se generaliza aún más este trabajo, introduciendo operadores en espacios vectoriales de dimensión arbitraria, y con características matemáticas peculiares como la completitud y la separabilidad propias de la métrica generada por el producto interno. Por otro lado, los aportes de Erwin Schrodinger; con la concepción de la función de onda y su celebre ecuación diferencial, nos entregó información valiosa de la dinámica de estos sistemas cuánticos a través del tiempo [22]. De manera paralela, en cuanto a las estructuras matemáticas involucradas en la mecánica cuántica, se avanza significativamente en el terreno del análisis funcional, permitiendo el desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert en dimension finita o infinita por matematicos de renombre como David Hilbert, Erhard Schmidt o Frigyes Riesz, la teoría espectral de operadores acotados y no acotados, en semigrupos uniformemente continuos o fuertemente continuos por Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski o Goran Lindblad, entre otros, que terminaron por dar a la teoría cuántica una fortaleza formal en su construcción.

Entre los muchos avances realizado, uno de gran revuelo fue el colapso de la función de onda, a la hora de realizar mediciones sobre estos sistemas cuánticos, es decir, a la hora de realizar intervenciones de cualquier tipo. El problema radica en que el universo es bastante caótico, por lo cual mantener sistemas cuánticos aislados de todo agente externo es todo un reto. Es así que nace la necesidad de estudiar sistemas cuánticos abiertos. Desde un punto de vista formal, la dinámica de los sistemas cerrados está íntimamente conectada a la solución de la ecuación de Schrodinger, que nos entrega un operador unitario, el cual forma un grupo

uniparamétrico sobre toda la recta real, i.e, un operador dependiente de un parámetro t definido sobre los reales. Pero algo interesante ocurre al momento de estudiar la dinámica de sistemas abiertos; el operador asociado ya no forma un grupo sobre toda la recta real, ahora estamos hablando de un semigrupo uniparamétrico sobre la recta real positiva, que traducimos como la irreversibilidad que sufre dicho sistema al momento de entregar información al entorno.

Entonces nuestro interés a lo largo de esta tesis se encontrará totalmente enfocado en el estudio del sistema armónico cuántico, abierto a un baño térmico a temperatura ambiente por el cual se disipe energía, además bajo un control externo, periódico en el tiempo; que realizará un trabajo inverso al ambiente, es decir, entregará energía al oscilador. En el primer capítulo se realizará una introducción matemática a conceptos básicos de la mecánica cuántica; como lo son sus postulados, la notación de Dirac, el formalismo para el oscilador armónico cuántico, por medio de los operadores de aniquilación y creación, los estados coherentes, el operador desplazamiento y una pincelada al formalismo de semigrupos generados por el operador de Lindblad, que será especialmente útil en el capítulo 3. En los capítulos 2 y 3 se entrará de lleno al problema abordado en esta tesis, donde en un principio estudiaremos al sistema armónico cuántico, cerrado a un ambiente, pero bajo el control o forzamiento periódico anteriormente mencionado; el cual nos introduce términos adicionales al operador Hamiltoniano, heredando la periodicidad del forzamiento. Resolveremos la ecuación de Schrodinger para dicho operador por medio del operador desplazamiento, reduciendo el problema a un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas, con esto estudiaremos el comportamiento de la solución de dichas EDO's. Como es común en la literatura [6, 14, 11], dado un Hamiltoniano periódico, parecerá natural invocar al teorema de Floquet, con la intención de obtener una forma explícita para el operador de evolución, pero aprovecharemos de poner en duda la utilización de este teorema, es decir, se hará un pequeño estudio sobre los alcances de expresar a dicho operador en su representación de Floquet, ya que de antemano solo sabemos que dicho teorema está limitado a espacios vectoriales en dimensión finita. Además dado un forzamiento en especial, encontraremos una condición suficiente para que dicha representación exista, aunque notaremos que esta debe depender exclusivamente de las condiciones iniciales que impongamos al sistema de estudio, luego bajo dicho supuesto aprovecharemos de calcular las cuasi-energías involucradas. Por último, en el tercer capítulo se realizará un estudio más general, en el cual el sistema presentado en el capítulo 2 se le adicionara al ambiente representado por el baño térmico [6, 7], por el cual se disipó energía, es decir, abriremos el sistema del segundo capítulo. Así que el trabajo de dicho capítulo, irá desde la obtención de un generador infinitesimal para el semigrupo, en el cuadro de interacción, que nos permitirá modelar la dinámica del sistema armónico, el cálculo de las tasas de disipación, hasta el cálculo de los operadores de aniquilación, creación y número a lo largo del tiempo, en el cuadro de Heisenberg; para así realizar un análisis en el número de excitaciones del sistema bajo todos estos factores externos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Principios básicos de la Mecánica Cuántica

Comenzaremos introduciendo la notación de esta tesis y algunos hechos básicos de la mecánica cuántica desde una perspectiva más formal. Partiremos por los postulados básicos de la teoría cuántica dentro del enfoque dado por el operador densidad, para luego introducir los operadores de creación y aniquilación, al igual que el formalismo de estados coherentes que serán de gran utilidad para el tratamiento del oscilador armónico cuántico amortiguado con y sin forzamiento periódico en los capítulos 2 y 3 respectivamente. Por último, se presentarán algunas definiciones y resultados básicos de la teoría de semigrupos para estudiar la dinámica de sistemas cuánticos abiertos, es decir, la teoría de semigrupos cuánticos de Markov.

A lo largo de la tesis \mathcal{H} será un espacio de Hilbert separable sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C} , con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilineal, el cual define la norma $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Además $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se definirá como el espacio de Banach de operadores acotados sobre \mathcal{H} con la norma del supremo y $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ el espacio de operadores positivos de traza unidad sobre \mathcal{H} con la norma $\|T\|_1 := \sqrt{\text{Tr}(T^\dagger T)}$ para todo $T \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, donde la notación T^\dagger denotará el adjunto de T .

1.1.1. Axiomas de la Mecánica Cuántica

Postulado 1. *Todo sistema cuántico \mathcal{S} tiene asociado un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C} , además si el sistema de estudio está compuesto de varios subsistemas, el espacio de Hilbert asociado es el productor tensorial de estos. Por otro lado, al estado del sistema le corresponde un operador $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ autoadjunto, positivo y de traza unitaria, el cual suele ser llamado **operador densidad** y contiene codificada toda la información física observable del sistema.*

La exigencia de separabilidad del espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, es para que las bases de este sean numerables, aunque puede que hayan casos en los que esto no ocurre, para nuestro propósito bastará con este requisito. Además al espacio de Hilbert del sistema cerrado \mathcal{S} lo escribiremos simplemente como \mathcal{H} , a menos que el estudio se haga bajo varios subsistemas. El operador densidad suele recibir distintos nombres, de acuerdo a la forma matemática que tenga, como veremos a continuación

Definición 1. *El estado del sistema será **puro** si ρ es igual al operador proyección de un subespacio de dimensión 1, i.e., $\rho = P_\psi$ para $\psi \in \mathcal{H}$ unitario. En caso contrario, este suele ser llamado **mixto**.*

El teorema de Hilbert-Schmidt [24], permite descomponer a un operador compacto y autoadjunto como una combinación lineal de operadores de proyección, i.e., para cada $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ existe una base ortonormal $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ en \mathcal{H} tal que

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} p_n P_{\psi_n} \quad y \quad \text{Tr}(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1, \quad (1.1)$$

En otras palabras, el estado mixto es una combinación lineal de estados puros. Los valores $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se interpretan como la probabilidad clásica de estos posibles estados puros, es decir, el operador densidad en general como estado mixto, es una mezcla estadística de distintos posibles estados cuánticos que pueda tener un sistema.

Observación 1. *Si se trabaja con un estado puro, es fácil notar que dos vectores unitarios $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ comparten el mismo estado físico si y solamente si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\psi_1 = z\psi_2$.*

El siguiente par de postulados nos introducen la manera de obtener la información física codificada en el operador de densidad, por medio de operadores autoadjuntos asociados a observables físicos respectivamente. Estos operadores podrían ser acotados o no acotados, así que para no tener problemas con su definición, se dirán siempre que son operadores densamente definidos, i.e., su dominio es al menos un subconjunto denso en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , bajo la métrica inducida por el producto interno.

Postulado 2. *Todo observable físico A tiene asociado un operador autoadjunto \hat{A} que actúa densamente sobre \mathcal{H} . Los únicos resultados posibles de la medición del observable A vienen dados por los valores propios del operador \hat{A} , descompuesto espectralmente como*

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_{\alpha_n}, \quad (1.2)$$

Donde $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corresponden a los vectores propios asociados a cada valor propio $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Postulado 3. *La esperanza de un observable A viene dada por*

$$\langle \hat{A} \rangle := \text{Tr}(\hat{A}\rho). \quad (1.3)$$

La probabilidad de obtener uno de los posibles resultados de A se calcula por $\text{Tr}(P_{\alpha_n}\rho P_{\alpha_n}^\dagger)$ y una vez medido el observable sobre el sistema, el estado queda como

$$\rho_n = \frac{P_{\alpha_n}\rho P_{\alpha_n}^\dagger}{\text{Tr}(P_{\alpha_n}\rho P_{\alpha_n}^\dagger)}. \quad (1.4)$$

Es decir, la medida afecta completamente el estado del sistema, por lo cual si se vuelve a medir ρ_n , este seguirá estando en el mismo estado.

En cuanto a la dinámica del estado de un sistema cerrado, esta viene completamente determinada por un grupo uniparamétrico $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ fuertemente continuo, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U_t(\psi) - \psi\| = 0$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Por el teorema de Stone [12], existe un único operador autoadjunto \hat{H} densamente definido sobre el dominio $D(\hat{H}) \subset \mathcal{H}$ tal que

$$U_t = e^{-iHt/\hbar} \quad (1.5)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde

$$D(\hat{H}) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \exists s - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hbar U_t(\psi) - \psi}{h} \right\}. \quad (1.6)$$

s-lím denota el límite bajo la topología fuerte de operadores, ya que el operador H podría no ser acotado. Es así que presentamos el cuarto postulado

Postulado 4. *La evolución de un sistema cerrado está descrita por una familia de mapeos $\mathcal{U}_t : \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tal que al actuar sobre algún estado ρ_0 en tiempo $t = 0$, la evolución a un tiempo arbitrario $t \neq 0$, viene dado por*

$$\begin{aligned} \rho_t &= \mathcal{U}_t(\rho_0) \\ &= U_t \rho_0 U_t^{-1}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde $(U_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el grupo uniparamétrico fuertemente continuo generado por el operador Hamiltoniano H que describe la energía del sistema.

La igualdad (1.7) resuelve la ecuación diferencial de primer orden [17]

$$\frac{d}{dt} \rho_t = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho_t], \quad \rho_t|_{t=0} = \rho_0, \quad (1.8)$$

usualmente llamada ecuación de Schrodinger, donde $[A, B] := AB - BA$ es el conmutador para todo $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Principalmente su forma más conocida se da para un estado puro $\rho_t = P_{\psi(t)}$ como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H(t) \psi(t), \quad \psi(t)|_{t=0} = \psi_0. \quad (1.9)$$

Por otro lado, dentro de la teoría cuántica es muy común trabajar los problemas dinámicos bajo tres cuadros físicamente equivalentes, estos son los cuadros de Heisenberg, Schrodinger y de Interacción.

Definición 2. *Si se analiza la dinámica del sistema desde la perspectiva de las observables, nos encontraremos bajo el **cuadro de Heisenberg**. Es decir, dado $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la evolución está dada por*

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \mathcal{U}_t^{-1}(\hat{A}(0)) \\ &= U_t^{-1} \hat{A}(0) U_t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Satisfaciendo así la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar} [H(t), \hat{A}(t)], \quad \hat{A}(t)|_{t=0} = \hat{A}_0, \quad (1.11)$$

Bajo este cuadro, el estado del sistema se mantiene constante en el tiempo, mientras que los observables son los que evolucionan. Sin embargo, se llamará por cuadro de Schrodinger al presentado en el Postulado 4, es decir:

Definición 3. *Si la dinámica del sistema viene descrita para el operador densidad, de acuerdo a la transformación (1.7), satisfaciendo la ecuación diferencial (1.8), nos encontramos bajo **cuadro de Schrodinger**.*

Ahora bien, si al sistema de estudio se le adiciona otro sistema, de tal manera que ahora exista alguna especie de interacción entre estos, entonces habrá asociada una energía de interacción, que estará presente en el operador Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H = H_0 + H_I, \quad (1.12)$$

donde H_0 será llamado el *Hamiltoniano libre* y corresponde a la suma de las energías de estos subsistemas, mientras que H_I corresponde al Hamiltoniano de Interacción, propia de la energía de interacción. De esta manera, se define:

Definición 4. *Un operador T en $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ o $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ queda bajo el **cuadro de Interacción** si se le aplica un mapeo $\bar{U}_t : \mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ definido como*

$$\bar{U}_t(O) := \bar{U}_t^{-1} O \bar{U}_t, \quad (1.13)$$

donde $(\bar{U}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico fuertemente continuo para \mathcal{H} , generado por el Hamiltoniano Libre (1.12). Además a los operadores transformados por (1.13) los denotaremos por \bar{O} .

Se puede entender al cuadro de Interacción como un cuadro intermedio entre el de Heisenberg y el de Schrodinger, ya que la evolución temporal se da tanto en los operadores autoadjuntos asociados al observable y con el operador densidad asociado al estado del sistema. Es decir, la transformación (1.13) puede ser extendida tanto al espacio de estados $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ como al de observables $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por otro lado, es posible encontrar la ecuación dinámica para el operador densidad bajo este cuadro, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 1. *Sea $\rho_t \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ el operador densidad y $H(t)$ el operador Hamiltoniano dependiente del tiempo definido por (1.13). Entonces la ecuación de Schrodinger para ρ_t (1.8) bajo el cuadro de interacción viene dado por*

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_t = -\frac{i}{\hbar} [\bar{H}_I(t), \bar{\rho}_t] \quad (1.14)$$

Demostración: Para simplificar cálculos tomaremos $\hbar \equiv 1$. Ahora aplicando la transformación (1.13) a la ecuación (1.8). Nos queda al lado izquierdo

$$\begin{aligned} -i\bar{U}_t^{-1} [H(t), \rho_t] \bar{U}_t &= -i\bar{U}_t^{-1} H(t) \rho_t \bar{U}_t + i\bar{U}_t^{-1} \rho_t H(t) \bar{U}_t \\ &= -i\bar{U}_t^{-1} (H_0(t) \rho_t + H_I \rho_t) \bar{U}_t + i\bar{U}_t^{-1} (\rho_t H_0(t) + \rho_t H_I) \bar{U}_t, \end{aligned} \quad (1.15)$$

Como $H_0(t)$ conmuta con \bar{U}_t , i.e. $[H_0(t), \bar{U}_t] = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, se tendrá

$$\begin{aligned} -i\bar{U}_t^{-1} [H(t), \rho_t] \bar{U}_t &= -iH_0(t) \bar{\rho}_t + i\bar{\rho}_t H_0(t) - i\bar{U}_t^{-1} H_I \bar{U}_t \bar{U}_t^{-1} \rho_t \bar{U}_t \\ &\quad + i\bar{U}_t^{-1} (t) \rho_t \bar{U}_t \bar{U}_t^{-1} (t) H_I \bar{U}_t \\ &= -i[H_0(t), \bar{\rho}_t] - i[\bar{H}_I(t), \bar{\rho}_t] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cabe hacer notar que la derivada del lado derecho de la ecuación de Schrodinger corresponde a la derivada de la topología fuerte, es decir,

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_t(\rho) = s - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{U}_{t+h}(\rho) - \bar{U}_t(\rho)}{h}$$

y bajo nuestro propósito satisface que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\mathcal{U}}_t(\rho) &= \frac{d}{dt}\bar{U}_t^{-1}\rho_t\bar{U}_t + \bar{U}_t^{-1}\frac{d}{dt}\rho_t\bar{U}_t + \bar{U}_t^{-1}\rho_t\frac{d}{dt}\bar{U}_t \\
&= iH_0(t)\bar{\rho}_t + \bar{\mathcal{U}}_t\left(\frac{d}{dt}\rho_t\right) - i\bar{\rho}_tH_0(t) \\
&= i\left[H_0(t), \bar{\rho}_t\right] + \bar{\mathcal{U}}_t\left(\frac{d}{dt}\rho_t\right)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Entonces

$$\bar{\mathcal{U}}_t\left(\frac{d}{dt}\rho_t\right) = -i\left[H_0(t), \bar{\rho}_t\right] + \frac{d}{dt}\bar{\mathcal{U}}_t(\rho) \tag{1.18}$$

Así que juntando ambos lados, obtenemos

$$-i\left[H_0(t), \bar{\rho}_t\right] + \frac{d}{dt}\bar{\mathcal{U}}_t(\rho) = -i\left[H_0(t), \bar{\rho}_t\right] - i\left[\bar{H}_I(t), \bar{\rho}_t\right] \tag{1.19}$$

Por lo tanto, se obtiene lo pedido

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = -i\left[\bar{H}_I(t), \bar{\rho}_t\right]$$

□

En síntesis los postulados nos entregan los pilares básicos para comprender la teoría cuántica. En general, es frecuente que en la literatura estos sean presentados desde la perspectiva de un estado puro en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Pero se decidió una perspectiva formal del operado densidad en el espacio de Banach $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, ya que es el tratamiento más adecuado para afrontar los problemas de los próximos capítulos.

1.1.2. Notación de Dirac

Alrededor del año 1939 el Físico Paul Dirac presentó la conocida notación de *bra-ket* o notación de Dirac, para expresar los estados cuánticos de un sistema, sus productos internos e incluso los operadores de proyección. Esta será presentada con su debida justificación, ya que servirá más adelante para manipular de manera más directa ciertos cálculos relacionados a estados números o estados coherentes.

Se enuncia a continuación el teorema de la Representación de Riesz para espacios de Hilbert, que nos permitirá introducir dicha notación.

Teorema 1. (*Representación de Riesz*) Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y ϕ' un funcional lineal continuo sobre \mathcal{H} , entonces existe un único vector $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $\phi'(\psi) = \langle \psi, \phi \rangle$ para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Así la aplicación $\Phi : \phi \ni \mathcal{H} \rightarrow \phi' \in \mathcal{H}^*$ es una isomorfismo (conjugado) isométrico.

De esta manera, siempre que tengamos un vector en $\psi \in \mathcal{H}$, lo llamaremos *ket* y será denotado por $|\psi\rangle$. Y gracias al teorema de la representación de Riesz, dado un funcional sobre el espacio dual $\phi' \in \mathcal{H}^*$, sabemos que existe un vector $\phi \in \mathcal{H}$ que llamaremos *bra* y denotaremos por $\langle \phi|$ tal que esta “multiplicación” de bra y ket, al final corresponde a aplicar el funcional del espacio dual sobre un vectores en el espacio de Hilbert inicial, generando el productor interno $\langle \phi|\psi \rangle := \phi'(\psi) = \langle \psi, \phi \rangle \in \mathbb{C}$ llamado *bra-ket*.

Por otro lado, introduciremos la notación para el operador proyección como sigue; Dada una base ortonormal $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de \mathcal{H} , al operador proyección sobre ψ_i lo denotaremos por $|\psi_n\rangle\langle\psi_n| := P_{\psi_n}$ tal que dado $x \in \mathcal{H}$, el operador proyección actúa como $P_{\psi_i}(x) = |\psi_n\rangle\langle\psi_n||x\rangle = \langle\psi_n|x\rangle|\psi_n\rangle$. Por último todas estas anotaciones pueden ser resumidas en la siguiente tabla:

	Notación Usual	Notación Dirac
Vector	ψ	$ \psi\rangle$
Funcional	ϕ	$\langle\phi $
Producto interno	$\langle\psi, \phi\rangle$	$\langle\phi \psi\rangle$
Proyección	P_ψ	$ \psi\rangle\langle\psi $

1.2. Oscilador Armónico Cuántico

En mecánica clásica un oscilador (1-dimensional) es una partícula que se mueve sobre un potencial cuadrático de la forma

$$V(q) = \frac{\omega_0 q^2}{2}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

donde q representa la coordenada espacial en la que se mueve dicha partícula y $\omega_0 > 0$ su frecuencia natural de oscilación. Con eso la energía del sistema en su forma Hamiltoniana viene dada por

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0 q^2}{2}, \quad (1.21)$$

Donde $p(t) = m\dot{q}(t)$ es el momentum lineal o cantidad de movimiento y $m > 0$ la masa de la partícula.

1.2.1. Operadores Posición y Momentum

De acuerdo al postulado 2, los observables de posición y momentum tienen sus respectivos operadores autoadjuntos $(q, p) \mapsto (\hat{q}, \hat{p})$ que actúan densamente sobre un Hilbert \mathcal{H} . El espacio de estados del sistema viene dado por $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dq)$ que es el espacio de funciones cuadrado integrables sobre \mathbb{R} en la coordenada q . El operador posición $\hat{q} : D(\hat{q}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ se define como el operador de multiplicación

$$(\hat{q}\psi)(q) := q\psi(q), \quad (1.22)$$

sobre el dominio [24]

$$D(\hat{q}) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} q^2 |\psi(q)|^2 dq < +\infty \right\} \quad (1.23)$$

Mientras que el operador momentum $\hat{p} : D(\hat{p}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ se define como el operador diferencial

$$(\hat{p}\psi)(q) := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \psi(q), \quad (1.24)$$

donde $D(\hat{p}) := W^{1,2}(\mathbb{R})$ es el espacio de Sobolev de funciones f absolutamente continuas sobre \mathbb{R} tal que f y f' están en $L^2(\mathbb{R})$ [24]. Estas definiciones tienen consistencia de acuerdo al postulado 2, como podemos asegurar con el siguiente teorema [24][12]:

Teorema 2. *Los operadores \hat{q} y \hat{p} definidos en (1.22) y (1.24) son operadores no acotados, densamente definidos y autoadjuntos.*

El hecho de no ser acotados nos advierte del cuidado con el que hay que tratar a estos operadores sobre el espacio $L^2(\mathbb{R})$, ya que hay funciones sobre este espacio en los cuales su imagen no necesariamente son funciones cuadrado integrables, es por eso que son definidos bajo los respectivos dominios densos presentados más arriba, de tal manera que todo esté bien definido. Por otro lado, un resultado muy importante en la teoría cuántica nos dice que estos operadores no conmutan, lo cual tiene una directa consecuencia con la medida inmediata de estos dos observables sobre el sistema cuántico de estudio.

Proposición 2. *Los operadores de posición \hat{q} y momentum \hat{p} no conmutan, satisfaciendo la identidad*

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{p}] &= \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} \\ &= i\hbar\mathbb{I} \end{aligned} \quad (1.25)$$

De esta manera, de acuerdo al principio de incertidumbre de Heisenberg [10][24][12], la multiplicación de las varianzas de estas dos observables están acotadas inferiormente, por lo cual a la hora de medir sobre el sistema, no es posible saber con exactitud el resultado de las dos a la vez.

1.2.2. Oscilador Armónico Cuántico

Al introducir estos operadores, tenemos la libertad de presentar el análogo cuántico del oscilador clásico, por medio del operador Hamiltoniano

$$H := \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega_0}{2}\hat{q}^2, \quad (1.26)$$

que al estar compuesto de los operadores \hat{q} y \hat{p} , también actúa densamente sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}, dq)$.

Operadores de Creación y Aniquilación

Para un tratado más ameno sobre el operador Hamiltoniano y sobre el entendimiento físico del oscilador armónico cuántico, definiremos los siguientes operadores:

Definición 5. *Llamaremos por operadores de **Aniquilación** y **Creación** a operadores definidos respectivamente como*

$$a := \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}(m\omega_0\hat{q} + i\hat{p}) \quad (1.27)$$

$$a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}(m\omega_0\hat{q} - i\hat{p}), \quad (1.28)$$

sobre el dominio $D(a) = D(\hat{q}) \cap D(\hat{p})$. Además se llamará por operador **Número** a

$$\hat{N} := a^\dagger a \quad (1.29)$$

Observación 2. *La notación adjunta para el operador de Creación es debido a que este es justamente el adjunto del operador de Destrucción, además $(a^\dagger)^\dagger = a$ sobre $D(a)$.*

Algo interesante con estos operadores es que cumplen unas cuantas identidades que serán de gran ayuda en cálculos realizados en las siguientes capítulos. Estos serán presentados a continuación, y su demostración es fácil de realizar.

Proposición 3. *Los operadores a, a^\dagger y \hat{N} cumplen con las siguientes relaciones de conmutación:*

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{I}, \quad [\hat{N}, a] = -a, \quad [\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (1.30)$$

Con esto podemos redefinir el operador Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico como

$$H := \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{I} \right). \quad (1.31)$$

Por otro lado, expresando al operador Hamiltoniano como (1.31) y ocupando las relaciones de conmutación de la proposición anterior, se puede obtener los vectores y valores propios de este, que además forman una base ortonormal para \mathcal{H} , como lo afirma la siguiente proposición [24][12]:

Proposición 4. *Supongamos que existe un vector no nulo $\psi \in D((a)^n) \cap D((a^\dagger)^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$H\psi = E\psi. \quad (1.32)$$

Entonces se tendrá lo siguiente:

(i) *Existen vectores no nulos $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{H}$, tales que*

$$a\psi_0 = 0 \quad y \quad \psi_n = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0, \quad (1.33)$$

son los vectores propios ortonormales de H con valores propios $(E_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dados por

$$E_n := \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.34)$$

(ii) *El conjunto de vectores propios de H forman una base para \mathcal{H} .*

Estos valores E_n definidos en (1.34) que corresponden a los valores propios del Hamiltoniano (1.31); se interpretan como los únicos valores de energía posibles que puede llegar a tener un sistema armónico cuántico libre. Una vez que presentemos la siguiente proposición [24][12], se hará una interpretación un poco mas detallada que nos pueda entregar información física relevante.

Proposición 5. *Sea $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ la familia definida en la proposición anterior, entonces se sigue que*

$$\hat{N}\psi_n = n\psi_n, \quad (1.35)$$

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}, \quad (1.36)$$

$$a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}. \quad (1.37)$$

Ahora si se expresan estos vectores propios en la representación de coordenada q , se podrá obtener una forma explicita de estos. Partamos por la condición $a\psi_0 = 0$ que define una ecuación diferencial de primer orden

$$\left(\hbar \frac{d}{dq} + m\omega_0 q \right) \psi_0(q) = 0, \quad (1.38)$$

que puede ser resuelta de manera directa sabiendo que $\|\psi_0\| = 1$, por lo cual

$$\psi_0(q) = \sqrt[4]{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}} e^{-m\omega_0 q^2 / 2\pi}. \quad (1.39)$$

Este vector es llamado “*ground state*” o “*estado fundamental*” del oscilador armónico y además de acuerdo a la proposición 4 las autofunciones serán

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}} \left(m\omega_0 q - \hbar \frac{d}{dq} \right) \right)^n \psi_0 \quad (1.40)$$

Estas autofunciones pueden ser expresadas de manera más directa por medio de los polinomios de Hermite, como lo asegura la siguiente proposición [24]:

Proposición 6. *Dado el Hamiltoniano en representación de coordenadas q*

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega_0}{2} q^2, \quad (1.41)$$

sobre el dominio denso $D(H) \subset L^2(\mathbb{R}, dq)$. Las autofunciones de este operador se expresan como

$$\psi_n(q) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} q \right) e^{-m\omega_0 q^2 / 2\hbar}, \quad (1.42)$$

donde $H_n(q)$ es el polinomio de Hermite de grado n .

1.2.3. Representación en el espacio $l^2(\mathbb{N})$

De ahora en adelante, cuando trabajemos con los operadores a , a^\dagger y \hat{N} , ya no estaremos bajo el espacio $L^2(\mathbb{R}, dq)$, más bien será bajo el espacio de Hilbert de sucesiones complejas cuadrado sumables

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 < \infty \right\}. \quad (1.43)$$

La siguiente proposición [24] nos da libertad de ello.

Proposición 7. *La base de vectores (1.42) establece un isomorfismo isométrico $L^2(\mathbb{R}, dq) \cong l^2(\mathbb{N})$,*

$$L^2(\mathbb{R}, dq) \ni \psi = \sum_{n=0}^\infty x_n \psi_n \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n e_n = (x_n)_{n=0}^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \quad (1.44)$$

donde $x_n = \langle \psi, \psi_n \rangle$ y $(e_n)_{n=0}^\infty$ es la base canónica para $l^2(\mathbb{N})$.

De esta manera, se tiene que para $\psi \in D(a)$

$$a\psi = \sum_{n=0}^\infty x_n a\psi_n = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n} x_n \psi_{n-1} = \sum_{n=0}^\infty \sqrt{n+1} x_{n+1} \psi_n$$

y

$$a^\dagger \psi = \sum_{n=0}^\infty x_n a^\dagger \psi_n = \sum_{n=0}^\infty \sqrt{n+1} x_n \psi_{n+1} = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{n} x_{n-1} \psi_n$$

Lo cual nos permite expresar estos operadores en una representación matricial semi-infinita:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

y

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Ademas los dominios para los operadores a y a^\dagger será [24]

$$D(a) := \left\{ (x_n)_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty n|x_n|^2 < +\infty \right\} \quad y \quad (1.47)$$

el dominio para el operador número

$$D(\hat{N}) := \left\{ (x_n)_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty n^2|x_n|^2 < +\infty \right\}. \quad (1.48)$$

Por ultimo, de acuerdo a la proposición 6 y 7, expresaremos la base canónica del espacio $l^2(\mathbb{N})$ en la notación de Dirac presentada en la sección 1.1.2, como

$$e_n := |n\rangle. \quad (1.49)$$

Por lo cual, cuando apliquemos un operador de destrucción a definido densamente en $l^2(\mathbb{N})$, al estado número $|n\rangle$, se obtendrá

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.50)$$

que se interpreta como la liberación de un cuanto de energía de un estado con n excitaciones, obteniendo un nuevo estado con $n-1$ excitaciones. Mientras que aplicar el operador de creación a^\dagger , se tendrá

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.51)$$

es decir, el estado con n excitaciones queda como un estado con $n+1$ excitaciones cuando absorbe un cuanto de energía. Por otro lado, si se aplica el operador número \hat{N} al estado número

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (1.52)$$

se obtendrá el número n de excitaciones que tiene nuestro estado $|n\rangle$.

1.3. Estados Coherentes

Si se decide hacer mediciones de la posición y el momentum, se sabe que de acuerdo al principio de incertidumbre, la varianza de cada una de esas observables viene gobernada por la desigualdad

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

En el caso de un oscilador armónico, al contar con un sistema preparado en algún estado número $|n\rangle$, si se desea medir justamente estas dos observables, se obtendrá el siguiente resultado [7]:

Proposición 8. *En un sistema \mathcal{S} definido por un oscilador armónico cuántico con un estado excitado preparado $|n\rangle$. Entonces se tendrá la siguiente desigualdad para las varianzas de los operadores \hat{q} y \hat{p}*

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{(2n+1)\hbar}{2}, \quad (1.53)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Se puede observar que la incertidumbre es mínima para $n = 0$, es decir, para el estado fundamental del oscilador armónico. En cambio para el caso en que $n \in \mathbb{N}$, la incertidumbre se ira haciendo más grande a medida que n va creciendo. Así que naturalmente nace la siguiente pregunta: ¿Se podrá alcanzar la incertidumbre mínima por otro medios?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y el medio para alcanzar este objetivo es con una combinación lineal adecuada de estos estados números $|n\rangle$, a esta combinación lineal se le suele llamar estados coherentes. Una definición más formal viene del operador de destrucción a como sigue:

Definición 6. *Los estados coherentes del oscilador armónico cuántico son los vectores propios del operador destrucción a de (1.7), i.e.,*

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.54)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Observación 3. *Nuevamente estamos ocupando la notación de Dirac, además de ahora en adelante cada vez que la letra que acompaña al ket $|\cdot\rangle$ sea griega, se sobre entenderá que tal vector es un estado coherente de un oscilador armónico, en cambio cuando la letra sea la del alfabeto latino, se estará trabajando con un estado número que expresa la cantidad de excitaciones del sistema.*

Como se dijo anteriormente, los estados coherentes pueden ser tratados como una combinación lineal de estados de excitación, por lo cual de la definición 6 se obtiene la siguiente caracterización [7]:

Proposición 9. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Un vector $|\alpha\rangle$ es un estado coherente para un oscilador armónico si y solamente si*

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.55)$$

Observación 4. *El estado fundamental $|0\rangle$ es el único estado coherente de los estados número de la proposición 4.*

Un hecho interesante es que si se analiza el valor esperado de los operadores \hat{q} y \hat{p} de acuerdo al estado del sistema dado por un estado coherente, estos valores pueden ser visualizado en el plano complejo, ya que es directo que de (1.27), (1.28) con la definición 6

$$\langle q \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\alpha + \alpha^*), \quad (1.56)$$

$$\langle p \rangle_\alpha = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\alpha^* - \alpha), \quad (1.57)$$

tal plano es conocido como **espacio fásico**.

Observación 5. Si los valores esperados de estos dos observables se encuentran en el origen del plano, el sistema se encontrará en un estado número o solo en el estado coherente trivial.

1.3.1. Operador de Desplazamiento

Otra manera de obtener estos estados coherentes es a través de un operador unitario generado por los operadores de aniquilación y creación que se le aplica al estado fundamental del oscilador armónico.

Definición 7. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, el operador **Desplazamiento** es el operador unitario \mathcal{D}_α que actúa sobre $l^2(\mathbb{N})$ y se define como

$$\mathcal{D}_\alpha := \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a). \quad (1.58)$$

Si se aplica este operador sobre el estado fundamental $|0\rangle$, se obtendrá el estado coherente $|\alpha\rangle$, i.e.

$$\mathcal{D}_\alpha|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (1.59)$$

por lo cual \mathcal{D}_α desplaza $\langle q \rangle_0 + i\langle p \rangle_0$ a $\langle q \rangle_\alpha + i\langle p \rangle_\alpha$ en el plano fásico, como se logra apreciar en la Figura 1.1. Por otro lado, este operador cumple unas cuantas propiedades [9] que serán bastante útiles en los próximos capítulos.

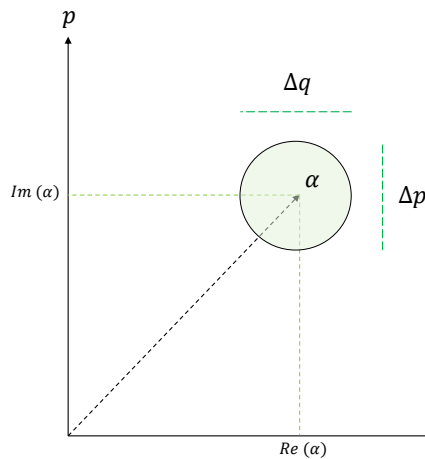


Figura 1.1: Un desplazamiento $|\alpha|$ en el espacio de fase.

Proposición 10. *Sea \mathcal{D}_α el operador unitario de la definición 7, entonces*

1. $\mathcal{D}_\alpha^{-1}a\mathcal{D}_\alpha = a + \alpha$
2. $\mathcal{D}_\alpha a\mathcal{D}_\alpha^{-1} = a - \alpha$
3. $\frac{\partial}{\partial \alpha^*}\mathcal{D}_\alpha = \left(\frac{1}{2}\alpha - a\right)\mathcal{D}_\alpha$
4. $\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathcal{D}_\alpha = \left(a^\dagger - \frac{1}{2}\alpha^*\right)\mathcal{D}_\alpha$
5. $\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta = e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}\mathcal{D}_{\alpha+\beta}$
6. $\mathcal{D}_\alpha = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^*a}$.

Notemos que el operador a en la propiedad 1 y 2 sufre un desplazamiento de $\pm\alpha$ en la diagonal, de acuerdo a la representación matricial introducida en la sección 1.2.3. Por otro lado, las propiedades 3 y 4 servirán para estudiar el valor esperado de los operadores a , a^\dagger y \hat{N} en el tiempo, de un oscilador armónico forzado periódicamente bajo un ambiente dado por un baño térmico, como se verá en el último capítulo. En cuanto a las propiedades 5 y 6, serán de utilidad para simplificar cálculos, tanto en el segundo como en el tercer capítulo.

1.4. Semigrupos

Hasta el momento el sistema de estudio \mathcal{S} ha sido considerado cerrado, es decir, no ha presentado interacción de ningún tipo con otra clase de sistema, por lo cual su dinámica ha estado completamente determinada por un grupo uniparamétrico fuertemente continuo $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$, generado por el operador Hamiltoniano $H_{\mathcal{S}}$.

Ahora si se decide “abrir.” el sistema \mathcal{S} , incorporando un ambiente \mathcal{R} , el nuevo sistema generalizado viene dado por $\mathcal{S} + \mathcal{R}$. Este ambiente será entendido como otro sistema, pero con infinitos grados de libertad y acoplado débilmente al sistema de estudio, de tal manera que esta interacción será de tipo Markoviana, es decir, toda la información que \mathcal{S} le entregue a \mathcal{R} será olvidada de manera casi inmediata, importando solo el presente del estado del sistema. De acuerdo al postulado 1, el espacio de Hilbert asociado a este sistema generalizado se obtendrá del producto tensorial de los espacios de los subsistemas, es decir, del producto tensorial del sistema de estudio $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ y el espacio de Hilbert del ambiente $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, donde cada uno tiene su respectiva naturaleza matemática, obteniendo un nuevo espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. La energía de este nuevo sistema generalizado contendrá la energía del sistema reducido S , la del ambiente R y una propia de la interacción entre estos dos, por lo cual, el operador Hamiltoniano asociado $H_{\mathcal{S}+\mathcal{R}} : D(H_{\mathcal{S}+\mathcal{R}}) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}}$ se definirá como

$$H_{\mathcal{S}+\mathcal{R}} := H_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{R}} + \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \otimes H_{\mathcal{R}} + H_I, \quad (1.60)$$

donde $H_{\mathcal{S}}$ es el operador Hamiltoniano del sistema \mathcal{S} que actúa en $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, $H_{\mathcal{R}}$ es el operador Hamiltoniano del ambiente \mathcal{R} que actúa en $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ y H_I es el operador Hamiltoniano de interacción asociado a la energía de interacción que actúa en $\mathcal{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}}$. El estado del sistema generalizado, vendrá dado por un operador densidad $\sigma \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}})$ tal que su evolución temporal estará determinada por un nuevo grupo uniparamétrico $(U_t^{\mathcal{S}+\mathcal{R}})_{t \in \mathbb{R}}$ que actúa en $\mathcal{H}_{\mathcal{S}+\mathcal{R}}$. Si en un inicio ($t = 0$) el estado viene preparado como

$$\sigma_0 = \rho_0 \otimes \varrho_0, \quad (1.61)$$

donde $\rho_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ es el operador densidad del sistema reducido y $\varrho_0 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{R}})$ el operador densidad del ambiente, cada uno en el instante inicial. Entonces a un tiempo $t > 0$, el estado del sistema generalizado estará dado por

$$\sigma_t = U_t^{\mathcal{S}+\mathcal{R}} \sigma_0 U_{-t}^{\mathcal{S}+\mathcal{R}}. \quad (1.62)$$

Nuestro interés está en querer conocer el comportamiento del estado del sistema reducido a un tiempo dado. Para esto se aplica la traza parcial sobre el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ a (1.62), es decir,

$$\rho_t = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(U_t^{\mathcal{S}+\mathcal{R}} \rho_0 \otimes \varrho_0 U_{-t}^{\mathcal{S}+\mathcal{R}}). \quad (1.63)$$

En varios casos obtener una expresión explícita de (1.63) que sea manipulable para estudiar incluso la dinámica de observables es poco práctico. En el caso tratado en el capítulo 3, para un sistema reducido modelado por un oscilador armónico, bajo un ambiente representado por un baño término de infinitos osciladores con la presencia de un forzamiento periódico externo que fuerza al sistema de estudio, se decidió dar un enfoque de semigrupos, es decir, el tratamiento para obtener la dinámica de nuestro sistema reducido estará determinado por una familia uniparamétrica de semigrupos fuertemente continuos. Lo interesante está en que ya no se trabaja bajo un grupo uniparamétrico, como se ha dicho hasta el momento; la dinámica para un sistema abierto es irreversible, ya que la información entregada al ambiente

se pierde, por lo cual no se puede volver al sistema inicial como ocurre en el caso del sistema cerrado. El enfoque que se presentará a continuación viene dado con el fin de estudiar la dinámica de los observables (cuadro de Heisenberg), aunque más adelante se podrá caracterizar fácilmente los semigrupos para la dinámica del operador densidad del sistema reducido (cuadro de Schrodinger).

Definición 8. Una familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ de aplicaciones sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, es un semigrupo uniparamétrico de operadores lineales si:

$$a) \Lambda_{t=0}^* = \mathbb{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)} \text{ y}$$

$$b) \Lambda_{t+s}^* = \Lambda_t^* \Lambda_s^* \text{ para todo } t, s \geq 0.$$

Ademas si satisface que

$$\lim_{t \downarrow 0} \|\Lambda_t^* - \mathbb{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)}\|_\infty = 0, \quad (1.64)$$

entonces se dice que es un semigrupo **uniformemente continuo** o **SUC**. Si la convergencia es puntualmente, i.e.,

$$\lim_{t \downarrow 0} \|\Lambda_t^*(x) - x\| = 0, \quad (1.65)$$

para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, entonces se dice que es un semigrupo **fuertemente continuo** o un C_0 -semigrupo. Y si

$$\lim_{t \downarrow 0} \text{Tr}(\rho \Lambda_t^*(x) - \rho x) = 0, \quad (1.66)$$

para cada $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$ y cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, entonces será un semigrupo **w^* -continuo** (o **debil***-).

Se ha escogido la notación Λ_t^* para el semigrupo definido en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, para diferenciarlo del semigrupo que se construirá sobre $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$, ya que la construcción se hará sabiendo que el espacio dual de este último es isométricamente isomorfo a $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$. Ahora bien, a esta familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ le faltan propiedades para que sea capaz de llevar observables en observables, por lo cual se introduce la siguiente definición:

Definición 9. Una familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ de aplicaciones en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ es

a) **positivo** si $\Lambda_t^*(x^*x)$ es un elemento positivo para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$

b) **n -positivo** si dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, todo par de $(x_i)_{i=0}^n, (y_i)_{i=0}^n \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, la suma

$$\sum_{i,j=0}^n y_i^* \Lambda_t^*(x_i^* x_j) y_j \quad (1.67)$$

es positiva .

c) es **completamente positivo** si se cumple b) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Con esto podemos definir el semigrupo apropiado para la dinámica de los observables

Definición 10. Una familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ de aplicaciones sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ son un **semigrupo cuántico de Markov** si cumple las propiedades a) y b) de la definición 8 y además:

c) Λ_t^* es completamente positivo para cada $t \geq 0$,

d) $\Lambda_t^*(\mathbb{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)}) = \mathbb{I}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)}$ para cada $t \geq 0$ (conservativo o de Markov) y

e) es al menos w^* -continuo.

En caso de tener un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo, hay una caracterización para el generador infinitesimal \mathcal{L} dado por Lindblad [16].

Teorema 3. (Lindblad) Si la familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ de semigrupos cuánticos de Markov es uniformemente continua en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, entonces el generador infinitesimal \mathcal{L} es un operador acotado sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ tal que su forma es

$$\mathcal{L}^*(x) = \Phi(x) + xG^* + Gx^*, \quad (1.68)$$

donde Φ es un mapeo sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ llamado **mapeo dinámico cuántico**, el cual tiene la forma

$$\Phi(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i^* x L_i, \quad (1.69)$$

donde \mathcal{I} es un conjunto numerable y $(L_i)_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia de operadores acotados en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ y G tiene la forma

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}} L_i^* L_i + i\hat{H}_S. \quad (1.70)$$

donde \hat{H}_S es el operador Hamiltoniano del sistema reducido \mathcal{S} .

Esta forma no es única ni exclusiva de los operadores acotados, ya que el teorema nos asegura que si hay continuidad uniforme, entonces el operador de Lindblad tendrá la forma (1.68), pero como veremos en el capítulo 3, a pesar de trabajar con un generador no acotado bajo la continuidad fuerte, este sigue teniendo la forma presentada en este teorema. Ahora se presentará una caracterización [23] clásica del espacio dual $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)^*$ y que nos permitirá extender esta estructura de semigrupo cuántico de Markov sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ a un semigrupo cuántico de Markov en $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$, es decir, nos permitirá pasar del cuadro de Heisenberg al cuadro de Schrodinger de estados del sistema reducido.

Teorema 4. El espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ de operadores lineales acotados sobre \mathcal{H}_S es isométricamente isomorfo al espacio dual $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)^*$ de operadores lineales positivos de traza unidad sobre \mathcal{H}_S .

De esta manera es posible construir un SCM sobre $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$

Definición 11. El semigrupo **Predual** de una familia $(\Lambda_t^*)_{t \geq 0}$ de SCM sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ es un semigrupo que denotaremos por $(\Lambda_t)_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$ tal que

$$(\Lambda_t(w))(x) = w(\Lambda_t^*(x)) \quad (1.71)$$

para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ y cada $w \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$. En forma equivalente, bajo la función traza

$$\text{Tr}(\rho \Lambda_t^*(x)) = \text{Tr}(\Lambda_t(\rho)x) \quad (1.72)$$

para todo $t \geq 0$. Además su generador infinitesimal será denotado por \mathcal{L} definido bajo un dominio denso $D(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$.

Capítulo 2

Oscilador Armónico forzado periódicamente

En el capítulo anterior se presentó la teoría básica para un sistema armónico cuántico. En este capítulo nos centraremos en dicho sistema, pero bajo la influencia de un forzamiento externo, periódico en el tiempo, que nos ayudará a controlar el número de excitaciones iniciales del sistema, por medio de diversos parámetros externos que trataremos a continuación. En otras palabras, controlaremos al sistema introduciendo términos periódicos en el operador Hamiltoniano (1.31); modificando la solución para la ecuación de Schrodinger. Con la intención de obtener una solución para el operador de evolución, resultará tentador aplicar el teorema de Floquet, pero como veremos más adelante, existen ciertos problemas que nos imposibilita realizar tal acto. A continuación se hará un leve repaso de la teoría de Floquet para dichos sistemas con forzamiento externo periódico en el tiempo, ya que nos servirá para hacer la comparación con sistemas que pueden o no, aceptar una descomposición de Floquet.

2.1. Teoría de Floquet

El enfoque que se presentará a continuación de este formalismo será el presentado por K. Szczygielski [23], para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales bajo espacios de Hilbert en dimension infinita. En un principio, la teoría clásica de Floquet [8] se ha restringido exclusivamente a espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, a EDO's de tipo

$$\frac{d}{dt}f(t) = A(t)f(t), \quad f(t_0) = f_0, \quad (2.1)$$

donde la matriz $A(t) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es una función continua con respecto al parámetro $t \in \mathbb{R}$ y T -periódica, i.e., $A(t + nT) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Considerando la matriz fundamental $\Phi(t) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ que soluciona al sistema (2.1), al satisfacer la ecuación

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t)|_{t=0} = \Phi_0, \quad (2.2)$$

es posible asegurar una forma exclusiva para esta matriz $\Phi(t)$ gracias al celebre teorema de Floquet [8]:

Teorema 5 (Floquet). *Dado el sistema (2.1). Existen matrices $B, P(t) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tales que*

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}, \quad (2.3)$$

donde B es constante y $P(t)$ es diferenciable y T -periódica.

Ahora bien, a la hora de estudiar sistemas cuánticos asociados a espacios de Hilbert en dimension finita, es valido ocupar el teorema de Floquet para la ecuación de Schrodinger con un Hamiltoniano periódico en el tiempo, con esto tenemos una forma explicita para el operador de evolución, de acuerdo a la identidad (2.3); ya que este se construye a partir de la matriz fundamental como

$$U_t := \Phi(t)\Phi(0)^{-1}. \quad (2.4)$$

En cuanto a sistema cuántico asociado a espacio de Hilbert de dimension infinita, es tentado aplicar este teorema, sin embargo la demostración de este no es valido bajo las mismas suposiciones. En otras palabras, perfectamente puede existir una descomposición (2.3) para el caso infinito dimensional, pero no es posible asegurarlo bajo las hipótesis previas del caso presentado en (2.1).

A continuación daremos la definición presentada por K. Szczygielski, para casos en el que existe dicha representación. Así que se redefine la ecuación diferencial (2.1) para $A(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el espacio de Banach de operadores lineales acotados sobre el espacio de Hilbert separable \mathcal{H} y $f(t) \in \mathcal{H}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 12. Se entenderá por **representación de Floquet** de orden m a un triplete $(P, B, m) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathbb{N}$ donde P es mT -periódico, i.e., $P(t + mT, t_0) = P(t, t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y B es un operador lineal constante con respecto al parámetro temporal t tal que el operador (1.2) se puede descomponer como $U_{t,t_0} = P(t, t_0)e^{B(t-t_0)}$

Bajo la existencia de esta representación, se pueden obtener algunos resultados que nos serán de utilidad, su demostración es sencilla y se puede ver [23].

Proposición 11. Si se define $\psi_k(t) = U_{t,t_0}\phi_k$ y $\phi_k(t) = e^{-\mu_k t}\psi_k(t)$. Entonces el conjunto $(\psi_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de \mathcal{H} y las funciones $(\phi_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ son T -periódicas.

Ahora bien, si dicha representación se tiene para la ecuación de Schrodinger con un Hamiltoniano T -periódico, se tendrá la siguiente proposición:

Proposición 12. Existe un operador constante y autoadjunto $\bar{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $P(t, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ T -periódico, tal que

- $U_{t+T,t_0} = U_{t,t_0}e^{-i\bar{H}T/\hbar}$ y
- $U_{t,t_0} = P(t, t_0)e^{-i\bar{H}(t-t_0)/\hbar}$.

El operador \bar{H} es llamado *Hamiltoniano de Floquet*, ademas satisface

$$\bar{H}\phi_k = \epsilon_k\phi_k \quad (2.5)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que los valores propios $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ son llamados las *quasi-energías de Floquet* y los vectores propios $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la *base de Floquet*.

2.2. Oscilador Armónico bajo Forzamiento Periódico

Entrando al problema que nos convoca, la intención de este capítulo es resolver la ecuación de Schrodinger para un oscilador armónico cuántico bajo un forzamiento periódico, es decir, dada la ecuación

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = H(t)\psi(t), \quad \psi(t)|_{t=0} = \psi_0, \quad (2.6)$$

el Hamiltoniano $H(t)$ será T -periódico, tal que bajo la representación de \hat{q} y \hat{p} tendrá la forma

$$H(t) := \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega_0}{2}\hat{q}^2 - \hat{q}F(t) + \hat{p}G(t), \quad (2.7)$$

donde $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones T -periódica, al menos continua a trozos tal que (2.7) se encuentre definido sobre el dominio $D(\hat{q}) \cap D(\hat{p}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Gracias a Husimi [13] se sabe que es posible resolver (2.6) bajo el Hamiltoniano (2.7) con $G(t) \equiv 0$, por medio de varias transformaciones a la función de onda $\psi(q, t)$. A continuación se realizará un trabajo análogo e incluso acorde a nuestro propósito, más efectivo. Obtendremos una expresión explícita para el operador de evolución U_{t,t_0} generado por el Hamiltoniano (2.7), pero bajo la representación de los operadores de creación y aniquilación en el espacio $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$, es decir, redefinimos al Hamiltoniano como

$$H(t) := \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I} \right) + af(t) + a^\dagger f(t)^* \quad (2.8)$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función T -periódica, al menos continua a trozos que está dada por

$$f(t) := -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}F(t) + i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}G(t). \quad (2.9)$$

De aquí en adelante se considerará al tiempo inicial como $t_0 = 0$, por lo cual anotaremos al operador de evolución por $U_t = U_{t,0}$. Además el espacio de Hilbert complejo sobre el que se trabajará será $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$, es decir, el espacio de sucesiones complejas cuadrado sumables.

2.2.1. Operador de Evolución

Como se dijo anteriormente, la ecuación de Schrodinger bajo un Hamiltoniano (2.7) fue resuelta haciendo unas cuantas transformaciones, que equivalen a traslaciones sobre el espacio de fase. En su trabajo introdujo una traslación en el eje q , tal que esta corresponde a la adición de una función arbitraria dependiente del tiempo, es decir, realizó una traslación en el eje de la posición que se modifica de acuerdo al parámetro t . Luego aplicó una transformación que también equivale a una traslación en el eje del momentum p en el espacio de fase, pero proporcional a la derivada de esta función arbitraria. Sabemos que podemos hacer un trabajo análogo aplicando el operador de desplazamiento, por lo que introduciremos dos funciones arbitrarias $x, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sean al menos doblemente diferenciables, tales que estas definan otra función de valores complejos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\alpha(t) := \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}x(t) + i\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_0}}v(t), \quad (2.10)$$

que llamaremos **curva** o **función de desplazamiento** sobre el plano complejo; está se visualizará como la cantidad que desplaza sobre el espacio de fase el operador de desplazamiento

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)} = \exp(\alpha(t)a^\dagger - \alpha(t)^*a). \quad (2.11)$$

La forma de la función (2.10) no es al azar, ya que es la forma que tiene el operador de aniquilación (1.27), cuando es definido con respecto a los operadores de posición y momentum. De esta manera se produce un desplazamiento proporcional a la $x(t)$ en el eje de la posición y uno proporcional a $v(t)$ en el del momentum. Hasta el momento estamos asumiendo la existencia de estas funciones, de tal manera que en su debido momento se le impondrán ciertas condiciones que nos ayudaran a simplificar varios cálculos, luego de eso sabremos que forma deben tener. Entonces comenzaremos aplicando el inverso de (2.11) a la función que satisface la ecuación (2.6) que deseamos resolver, es decir,

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1}\psi(t) = \varphi(t), \quad (2.12)$$

tal que trabajaremos bajo la función $\varphi(t)$.

Observación 6. Si aplicamos un desplazamiento en el eje de la posición y luego uno en el eje del momentum en el espacio de fase, esto será equivalente a realizar un desplazamiento inmediato en los dos ejes, es decir, si $\mathcal{D}_{\alpha_1(t)}$ con

$$\alpha_1(t) := \text{Re}(\alpha(t)),$$

es la traslación en el eje de posición y $\mathcal{D}_{\alpha_2(t)}$ con

$$\alpha_2(t) := i \text{Im}(\alpha(t)),$$

la traslación en el eje del momentum, entonces de acuerdo a (0.2), se tendrá que

$$\mathcal{D}_{\alpha_2(t)}\mathcal{D}_{\alpha_1(t)} = e^{i\alpha_1\alpha_2}\mathcal{D}_{\alpha(t)}.$$

Este exponencial que aparece al lado derecho no tiene información física relevante, ya que simplemente corresponde a una fase que desaparece a la hora de hacer mediciones (su módulo es 1). En la Figura 2.1 podemos apreciar el comportamiento de estos operadores de desplazamiento.

Ahora bien, como deseamos trabajar bajo el vector desplazado $\varphi(t)$, obtendremos su ecuación de Schrodinger por medio de $\psi(t)$. Entonces al lado izquierdo de (2.6) queda como

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) &= i\hbar \frac{d}{dt}(\mathcal{D}_{\alpha(t)}\varphi(t)) \\ &= i\hbar \frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)}\varphi(t) + i\hbar \mathcal{D}_{\alpha(t)} \frac{d}{dt}\varphi(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mientras que al lado derecho

$$H(t)\psi(t) = H(t)\mathcal{D}_{\alpha(t)}\varphi(t), \quad (2.14)$$

de esta manera igualando (2.13) y (2.14)

$$i\hbar \frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)}\varphi(t) + i\hbar \mathcal{D}_{\alpha(t)} \frac{d}{dt}\varphi(t) = H(t)\mathcal{D}_{\alpha(t)}\varphi(t), \quad (2.15)$$

obteniendo así la ecuación de Schrodinger para la función $\varphi(t)$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\varphi(t) = H'(t)\varphi(t), \quad (2.16)$$

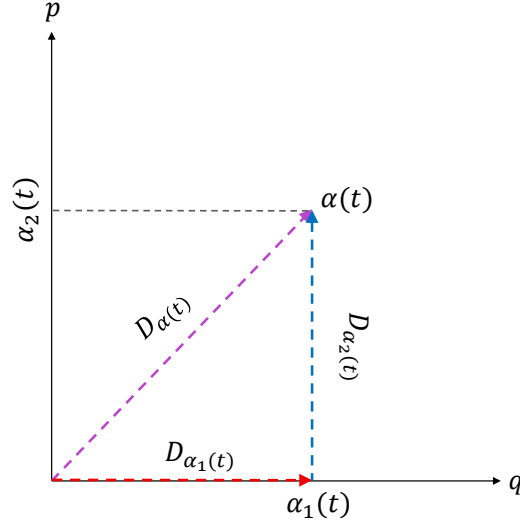


Figura 2.1: El operador $\mathcal{D}_{\alpha_1(t)}$ se encarga de desplazar a $\psi(t)$ con respecto al eje q en el espacio de fase, mientras que $\mathcal{D}_{\alpha_2(t)}$ desplaza solo en el eje del momentum p . Nosotros haremos algo equivalente desde el punto de vista físico, es decir, desplazaremos directamente $\mathcal{D}_{\alpha(t)}$. La diferencia radica en la dirección en la que queda el vector aplicado, dirección que se traduce en una simple fase $e^{-i\alpha_1(t)\alpha_2(t)}$, la cual ignoraremos, ya que a la hora de hacer mediciones esta se desvanece al tener modulo 1.

con un operador Hamiltoniano

$$H'(t) := \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} H(t) \mathcal{D}_{\alpha(t)} - i\hbar \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} \frac{d}{dt} \mathcal{D}_{\alpha(t)}. \quad (2.17)$$

Usualmente un cambio de este estilo es llamado “rotating frame”. Como conocemos la forma del operador $H(t)$, también será posible obtener una forma explícita para $H'(t)$. El primer término de la resta queda como

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} H(t) \mathcal{D}_{\alpha(t)} = \hbar\omega_0 \left(\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a^\dagger a \mathcal{D}_{\alpha(t)} + \frac{1}{2} \mathbb{I} \right) + \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a \mathcal{D}_{\alpha(t)} f(t) + \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a^\dagger \mathcal{D}_{\alpha(t)} f(t)^\star, \quad (2.18)$$

de acuerdo a las propiedades vistas anteriormente del operador desplazamiento sobre los operadores de creación y aniquilación, el segundo y tercer término de la última igualdad corresponde a la adición de un parámetro proporcional al operador identidad, i.e.,

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a^\dagger \mathcal{D}_{\alpha(t)} = a^\dagger + \alpha(t)^\star \quad y \quad \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a \mathcal{D}_{\alpha(t)} = a + \alpha(t). \quad (2.19)$$

Por lo que (2.18) queda como

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} H(t) \mathcal{D}_{\alpha(t)} = \hbar\omega_0 \left(\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a^\dagger a \mathcal{D}_{\alpha(t)} + \frac{1}{2} \mathbb{I} \right) + (a + \alpha(t)) f(t) + (a^\dagger + \alpha(t)^\star) f(t)^\star, \quad (2.20)$$

además como $\mathcal{D}_{\alpha(t)} \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} = \mathbb{I}$, el primer término resulta ser

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a^\dagger a \mathcal{D}_{\alpha(t)} = (a^\dagger + \alpha(t)^\star) (a + \alpha(t)). \quad (2.21)$$

Por lo cual, reagrupando todos los términos, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1}H(t)\mathcal{D}_{\alpha(t)} &= \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) + a^\dagger\left(\hbar\omega_0\alpha(t) + f(t)^\star\right) + a\left(\hbar\omega_0\alpha(t)^\star + f(t)\right) \\ &+ \left(\hbar\omega|\alpha(t)|^2 + f(t)\alpha(t) + f(t)^\star\alpha(t)^\star\right).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Por otro lado, para desarrollar el segundo término del lado derecho de la igualdad (2.17), notamos que aplicando la proposición 6, el operador densidad puede ser descompuesto como

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)} = e^{-|\alpha(t)|^2/2}e^{\alpha(t)a^\dagger}e^{-\alpha(t)^\star a}.\quad (2.23)$$

Así que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)} &= \frac{d}{dt}e^{-|\alpha(t)|^2/2}e^{\alpha(t)a^\dagger}e^{-\alpha(t)^\star a} + e^{-|\alpha(t)|^2/2}\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)a^\dagger}e^{-\alpha(t)^\star a} \\ &+ e^{-|\alpha(t)|^2/2}e^{\alpha(t)a^\dagger}\frac{d}{dt}e^{-\alpha(t)^\star a}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Las derivadas temporales del segundo y tercer término de la suma del lado derecho son de la forma

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha(t)a^\dagger} = \dot{\alpha}(t)a^\dagger e^{\alpha(t)a^\dagger}\quad (2.25)$$

y

$$\frac{d}{dt}e^{-\alpha(t)^\star a} = -\dot{\alpha}(t)^\star a e^{-\alpha(t)^\star a}.\quad (2.26)$$

De esta manera, (2.24) queda como

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)} = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^\star + \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^\star)\mathcal{D}_{\alpha(t)} + \dot{\alpha}(t)a^\dagger\mathcal{D}_{\alpha(t)} - \mathcal{D}_{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t)^\star a.\quad (2.27)$$

Ya que $\mathcal{D}_{\alpha(t)}\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} = \mathbb{I}$, el segundo término de (2.27) se puede dejar como

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t)a^\dagger\mathcal{D}_{\alpha(t)} &= \dot{\alpha}(t)\mathcal{D}_{\alpha(t)}\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1}a^\dagger\mathcal{D}_{\alpha(t)} \\ &= \dot{\alpha}(t)\mathcal{D}_{\alpha(t)}(a^\dagger + \alpha(t)^\star),\end{aligned}\quad (2.28)$$

así que (2.27) resulta

$$\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)} = \mathcal{D}_{\alpha(t)}\left(\dot{\alpha}(t)a^\dagger - \dot{\alpha}(t)^\star a + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^\star - \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^\star)\right).\quad (2.29)$$

Es así que el segundo término del lado derecho de (2.17) tiene la forma

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1}\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t)a^\dagger - \dot{\alpha}(t)^\star a + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^\star - \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^\star).\quad (2.30)$$

Por lo tanto, el operador Hamiltoniano $H'(t)$ de la nueva función $\varphi(t)$ queda como

$$\begin{aligned}H'(t) &= \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) + a^\dagger\left(\hbar\omega_0\alpha(t) + f(t)^\star - i\hbar\dot{\alpha}(t)\right) + a\left(\hbar\omega_0\alpha(t)^\star + f(t) + i\hbar\dot{\alpha}(t)^\star\right) \\ &+ \left(\hbar\omega|\alpha(t)|^2 + f(t)\alpha(t) + f(t)^\star\alpha(t)^\star + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^\star - \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^\star)\right),\end{aligned}\quad (2.31)$$

además como la función $\alpha(t)$ es arbitraria hasta el momento, impondremos la condición

$$\dot{\alpha}(t) = -i\left(\omega_0\alpha(t) + \frac{1}{\hbar}f(t)^*\right), \quad \alpha(t)|_{t=0} = \alpha_0 \in \mathbb{C} \quad (2.32)$$

para que los términos que acompañan a los operadores de creación y aniquilación de (2.31) se desvanezcan, entonces

$$\begin{aligned} H'(t) &= \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) + \left(\hbar\omega|\alpha(t)|^2 + f(t)\alpha(t) + f(t)^*\alpha(t)^*\right) \\ &+ \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^* - \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^*). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Al segundo término lo reescribiremos como

$$L(t) := \left(\hbar\omega|\alpha(t)|^2 + f(t)\alpha(t) + f(t)^*\alpha(t)^* + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}(t)\alpha(t)^* - \alpha(t)\dot{\alpha}(t)^*)\right), \quad (2.34)$$

de esta manera, si se aplica la transformación

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}S(t)\right)\varphi(t) = \bar{\varphi}(t), \quad (2.35)$$

donde

$$S(t) = \int_0^t L(t')dt', \quad (2.36)$$

resultará que de (2.16)

$$i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}L(t)e^{-iS(t)/\hbar}\right)\bar{\varphi}(t) + i\hbar e^{-iS(t)/\hbar}\frac{d}{dt}\bar{\varphi}(t) = H'(t)e^{-iS(t)/\hbar}\bar{\varphi}(t), \quad (2.37)$$

obteniendo así la ecuación de Schrodinger de un oscilador armónico cuántico libre:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\bar{\varphi}(t) = H\bar{\varphi}(t), \quad (2.38)$$

donde H es el Hamiltoniano de la forma

$$H = \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right). \quad (2.39)$$

La solución de (2.38) la conocemos y la dejaremos expresada de acuerdo a su operador de evolución y al estado de excitación inicial $\bar{\varphi}_n(0) = |n\rangle$

$$\bar{\varphi}_n(t) = \bar{U}_t|n\rangle, \quad \bar{U}_t = e^{-itH/\hbar}. \quad (2.40)$$

Si nos devolvemos hasta el estado forzado $\psi(t)$, es posible expresar su enésimo estado excitado $\psi_n(t)$, como una serie de transformaciones aplicadas al estado excitado inicial de un oscilador armónico libre, es decir,

$$\psi_n(t) = e^{-iS(t)/\hbar}\mathcal{D}_{\alpha(t)}\bar{U}_t|n\rangle. \quad (2.41)$$

Por lo tanto, la solución dinámica para ψ_n es

$$\psi_n(t) = U_t\psi_n(0), \quad (2.42)$$

donde U_t es su operador de evolución dado por

$$U_t := e^{-iS(t)/\hbar}\mathcal{D}_{\alpha(t)}\bar{U}_t\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \quad y \quad \psi_n(0) = \mathcal{D}_{\alpha_0}|n\rangle, \quad (2.43)$$

Esto nos dice que el estado inicial del sistema forzado $\psi_n(0)$ estará dado por un desplazamiento α_0 en el espacio de fase al vector $|n\rangle$, mientras que a medida que el tiempo transcurre, este desplazamiento se ira modificando. Esto es de suma importancia, ya que las condiciones iniciales de la curva de desplazamiento $\alpha(t)$ estarán directamente relacionadas con las condiciones iniciales del estado del sistema.

2.2.2. Función de desplazamiento $\alpha(t)$

A la curva de desplazamiento $\alpha(t)$ le hemos impuesto la ecuación diferencial (2.32) para que pueda simplificar la forma que tenía el operador Hamiltoniano $H'(t)$. Como esta curva es de valores complejos, definida por (2.10), es directo desprender fácilmente dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) - G(t), & x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \\ \dot{v}(t) &= -\omega_0^2 x(t) + \frac{1}{m}F(t), & v(0) &= v_0 \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Observación 7. Si nos detenemos a observar la expresión (2.34). Este corresponde al Lagrangiano para la ecuación de movimiento (2.32). Ahora si deseamos expresar este con respecto al sistema (2.44), luego de un pequeño trabajo algebraico este se logra expresar como

$$L(x, \dot{x}, v, \dot{v}, t) = \frac{1}{2}m(\omega_0^2 x^2 + v^2) - (xF + mvG) - \frac{1}{2}m(\dot{x}v - x\dot{v})\tag{2.45}$$

Ahora bien, resolver la ecuación e Schrodinger para un Hamiltoniano (2.8) se ha reducido a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. A continuación presentaremos el forzamiento con el que se trabajará a lo largo de toda la tesis.

Forzamiento sinusoidal en la posición \hat{q}

De aquí en adelante nuestro interés estará totalmente enfocado en un forzamiento del tipo

$$F(t) := A \sin(\Omega t), \quad A \in \mathbb{R}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}\tag{2.46}$$

donde A es la amplitud del forzamiento, Ω su frecuencia y T el periodo. Recordemos que esta función fuerza al término asociado \hat{q} en (2.7). En este caso no se considerará ningún forzamiento sobre el momentum \hat{p} , i.e., $G(t) := 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, se considerará al enésimo estado excitado inicial del sistema forzado $\psi_n(0)$ como el enésimo estado excitado de un sistema sin forzamiento $|n\rangle$, es decir, $\psi_n(0) = |n\rangle$, así que de acuerdo a (2.43), la curva de desplazamiento se encontrará inicialmente en $\alpha_0 = 0$, por lo cual $x_0 = 0 = v_0$. En efecto, como estamos suponiendo las condiciones iniciales $\psi_n(0) = |n\rangle = \mathbb{I}|n\rangle$ y además por (2.43) se sabe que $\psi_n(0) = D_{\alpha_0}|n\rangle$, entonces necesariamente $\alpha_0 = 0$. De esta manera, en un inicio la curva de desplazamiento se encontrará en el origen del espacio de fase y a medida que el forzamiento se haga presente, nos iremos trasladando fuera del origen. Es así que el sistema de ecuaciones diferenciales (2.44) queda como

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t),\tag{2.47}$$

$$x(0) = 0,\tag{2.48}$$

$$\dot{x}(0) = 0,\tag{2.49}$$

el cual corresponde a la EDO que satisface el oscilador armónico clásico bajo una fuerza externa $F(t)$. La solución de esta ecuación de segundo orden es directa por medio del método de variación de constante, así que su solución es :

$$x(t) = \frac{A}{m\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\omega_0 \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_0 t) \right).\tag{2.50}$$

En cuanto a $v(t)$, estamos suponiendo que $G(t) \equiv 0$, así que por (2.44) se sigue que $\dot{x}(t) = v(t)$:

$$v(t) = \frac{A\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t) \right). \quad (2.51)$$

Por lo tanto, la función de desplazamiento tendrá la forma :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{A}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\omega_0 \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_0 t) \right) \\ &+ i\Omega \left(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t) \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ahora analicemos el comportamiento de esta función; ya que al estar directamente relacionada con el operador de evolución U_t del sistema, sabremos como será el comportamiento sobre las observables.

Resonancia entre el sistema y el forzamiento

Si analizamos el caso límite $\omega_0 = \Omega$, es decir, el caso de resonancia entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia del forzamiento. Logramos obtener la expresión

$$\alpha_r(t) := \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \alpha(t) \quad (2.53)$$

$$= \frac{At}{2\sqrt{2\hbar m\omega_0}} \left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} - \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) \right), \quad (2.54)$$

donde $\alpha_r(t)$ es la curva de desplazamiento en resonancia. En la Figura 2.2 a) se logra ver un comportamiento de espiral en la función $\alpha_r(t)$ sobre el espacio de fase; a medida que transcurre el tiempo, esta función se aleja cada vez más del origen. Por otro lado, en el caso sin resonancia, i.e., $\omega_0 \neq \Omega$, se puede apreciar de la Figura 2.2 b) que la función $\alpha(t)$ muestra un comportamiento repetitivo en el que se aleja y acerca al origen.

Incluso siempre se podrá asegurar el comportamiento descrito más arriba. En efecto, basta con ver si esta función está acotada:

$$\begin{aligned} |\alpha(t)|^2 &= \frac{A^2}{2m\omega_0\hbar(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \left(\left(\omega_0 \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_0 t) \right)^2 \right. \\ &+ \left. \Omega^2 \left(\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

como $0 \leq |\cos(\Omega t)|, |\cos(\omega_0 t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, resultará que

$$|\alpha(t)|^2 \leq \frac{A^2}{2m\omega_0\hbar(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \left(\left(\omega_0 \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_0 t) \right)^2 + 4\Omega^2 \right) \quad (2.56)$$

$$\leq \frac{A^2}{2m\omega_0\hbar(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \left(\omega_0^2 \sin^2(\Omega t) + \Omega^2 \sin^2(\omega_0 t) + 4\Omega^2 \right) \quad (2.57)$$

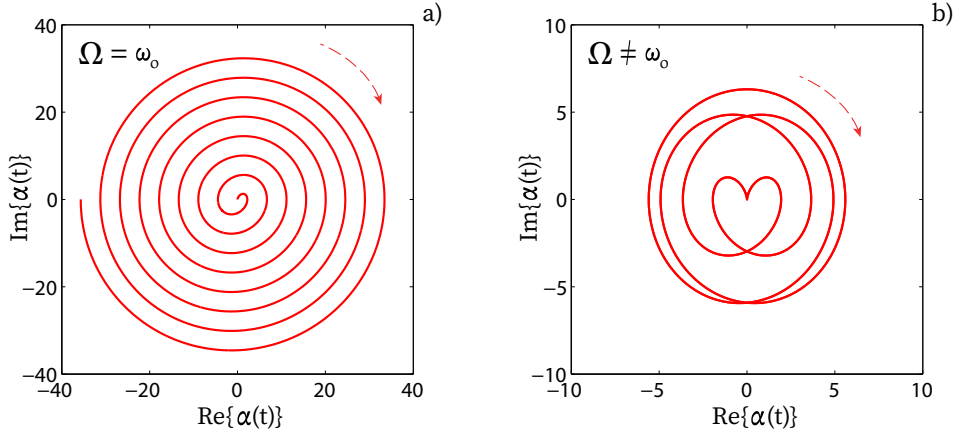


Figura 2.2: En la figura de linea roja se observa el comportamiento de la función de desplazamiento $\alpha(t)$ en el espacio de fase. En a) se tiene la resonancia entre la frecuencia natural del sistema y el forzamiento, es decir, $\omega_0 = 2\pi/T = \Omega$. En cambio, en b) resulta un forzamiento fuera de resonancia, con frecuencias $\omega = 2\pi/T$ y $\Omega = 5\pi/2T$.

además $0 \leq |\sin(\Omega t)|, |\sin(\omega_0 t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que

$$|\alpha(t)|^2 \leq \frac{A^2(\omega_0^2 + 5\Omega^2)}{2m\omega_0\hbar(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}. \quad (2.58)$$

Así la curva $\alpha(t)$ siempre se encontrará acotada por un disco

$$B[0, R(\Omega, A)] := \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq R(\Omega, A)^2\}, \quad (2.59)$$

donde el radio $R(\Omega, A)$ viene dado por

$$R(\Omega, A) = \frac{A\sqrt{\omega_0^2 + 5\Omega^2}}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}|\omega_0^2 - \Omega^2|}, \quad (2.60)$$

es decir, la raíz cuadrada del término de la derecha en (2.53). En la Figura 2.3 se puede observar el borde de este disco sobre la curva de desplazamiento para un caso fuera de resonancia, además es fácil notar que este radio disminuye a medida que la frecuencia de forzamiento Ω se distancia más de la frecuencia natural ω_0 del sistema. Esto se puede interpretar como que a medida que la frecuencia del forzamiento se aleja de la frecuencia natural, en principio menos efectivo se haría el forzamiento o el control sobre el sistema inicial, ya que la curva de desplazamiento se mantiene bastante cerca del origen; recordemos que en el origen se tiene al estado en $\psi_n(0) = |n\rangle$. Ahora bien, si nos encontramos bajo resonancia, es directo que el radio (2.55) diverge, por lo cual la curva de desplazamiento (2.49) crece indefinidamente, en otras palabras, el forzamiento en principio debería ser mucho más efectivo, ya que nos alejamos cada vez mas del sistema libre o sin forzamiento (origen).

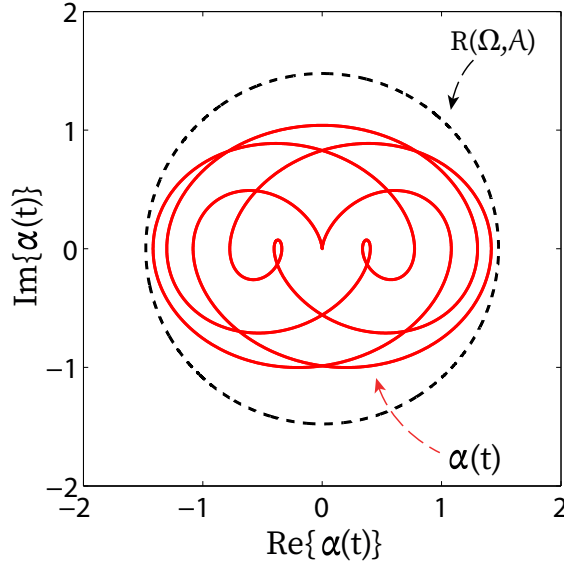


Figura 2.3: La línea segmentada de color negro corresponde al disco que acota a la curva de desplazamiento (línea de color rojo) para un caso fuera de resonancia con una frecuencia natural de $\omega_0 = 7\pi/2T$ y una frecuencia de forzamiento $\Omega = 2\pi/T$.

2.2.3. Esperanzas de los operadores a , a^\dagger y \hat{N}

Ahora veamos si efectivamente la curva de desplazamiento nos ayuda a entender la efectividad del forzamiento. Analicemos los valores esperados de los operadores de aniquilación a , creación a^\dagger y número \hat{N} , por lo que consideraremos un estado inicial con n excitaciones, i.e., $\rho_0 = |\psi_n(0)\rangle\langle\psi_n(0)| = |n\rangle\langle n|$. Los cálculos los haremos sobre el cuadro de Heisenberg, es decir

$$a = a(0) \mapsto a(t) = U_t^{-1} a U_t \quad (2.61)$$

$$a^\dagger = a^\dagger(0) \mapsto a^\dagger(t) = U_t^{-1} a^\dagger U_t \quad (2.62)$$

$$\hat{N} = \hat{N}(0) \mapsto \hat{N}(t) = U_t^{-1} \hat{N} U_t, \quad (2.63)$$

donde $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ viene definido por (2.43). Entonces la esperanza sobre el operador de aniquilación a un tiempo t es

$$\begin{aligned} \langle a(t) \rangle &= \text{Tr}(a(t) \rho_0) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \langle m | U_t^{-1} a U_t \rho_0 | m \rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

El estado ρ_0 sobre $|m\rangle$, actúa como $|n\rangle\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}|n\rangle$, así que

$$\begin{aligned} \langle a(t) \rangle &= \langle n | U_t^{-1} a U_t | n \rangle \\ &= \langle n | \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a \mathcal{D}_{\alpha(t)} | n \rangle \\ &= \langle n | (a + \alpha(t)) | n \rangle \\ &= \langle n | a | n \rangle + \langle n | \alpha(t) | n \rangle, \end{aligned} \quad (2.65)$$

además $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

$$\begin{aligned}\langle a(t) \rangle &= \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \alpha(t)\langle n|n\rangle \\ &= \alpha(t).\end{aligned}\tag{2.66}$$

El calculo es análogo para el operador de creación, de esta manera

$$\langle a^\dagger(t) \rangle = \alpha(t)^*.\tag{2.67}$$

Esto nos dice que el ascenso y descenso en los niveles de excitaciones del sistema forzado esta directamente relacionado con el crecimiento de la curva de desplazamiento. En cuanto al operador número

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}(t) \rangle &= \text{Tr}(\hat{N}(t)\rho_0) \\ &= \langle n|U_t^{-1}a^\dagger a U_t|n\rangle \\ &= \langle n|\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1}a^\dagger a \mathcal{D}_{\alpha(t)}|n\rangle \\ &= \langle n|(a^\dagger + \alpha(t)^*)(a + \alpha(t))|n\rangle \\ &= \langle n|a^\dagger a|n\rangle + \alpha(t)\langle n|a^\dagger|n\rangle + \alpha(t)^*\langle n|a|n\rangle + |\alpha(t)|^2\langle n|n\rangle \\ &= \langle \hat{N} \rangle + \alpha(t)\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \alpha(t)^*\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + |\alpha(t)|^2 \\ &= \langle \hat{N} \rangle + |\alpha(t)|^2,\end{aligned}\tag{2.68}$$

es decir, el número de excitaciones inicial $\langle \hat{N} \rangle$ crece en el tiempo de acuerdo al módulo de la curva de desplazamiento. Si nos encontramos en resonancia, este puede ser expresado como

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}_r(t) \rangle &= \langle \hat{N} \rangle + |\alpha_r(t)|^2 \\ &= \langle \hat{N} \rangle + \frac{A^2}{8m\omega_0\hbar} \left(\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - t \cos(\omega_0 t) \right)^2 + t^2 \sin(\omega_0 t)^2 \right) \\ &= \langle \hat{N} \rangle + \frac{A^2}{8m\omega_0\hbar} \left(\frac{\sin(\omega_0 t)^2}{\omega_0^2} - \frac{t \sin(2\omega_0 t)}{\omega_0} + t^2 \right),\end{aligned}\tag{2.69}$$

por lo cual, hay un crecimiento cuadrático con pequeñas oscilaciones producto de los términos sinusoidales. En la Figura 2.4 a) podemos observar este crecimiento en resonancia, mientras que en la Figura 2.4 b) se aprecia un crecimiento mas lento cuando nos encontramos fuera de resonancia, además en los dos casos nos encontramos que la amplitud del forzamiento es proporcional a $\langle \hat{N}(t) \rangle$. Por lo tanto, efectivamente el forzamiento sobre el sistema se puede analizar observando el comportamiento de la curva de desplazamiento; ya que a medida que nos alejamos del origen, es decir, cuando mayor sea el modulo de la curva de desplazamiento, mayor serán las excitaciones del sistema.

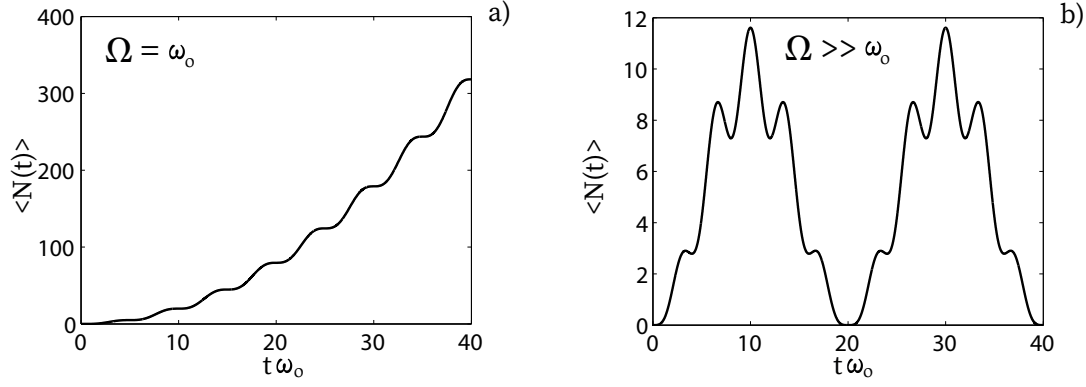


Figura 2.4: En estas imágenes nos encontramos bajo un sistema inicialmente en $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$, es decir, sin excitaciones. En a) se aprecia el comportamiento creciente de la del valor esperado $\langle \hat{N}(t) \rangle$ de excitaciones en el tiempo, cuando el forzamiento se encuentra en resonancia con el sistema; en este caso se logra observar el comportamiento cuadrático que anticipaba la ecuación (1.59). Mientras que en b) se tiene la misma función fuera de resonancia, donde $\omega_0 = 7\pi/T$ y $\Omega = 2\pi/T$; aquí predomina un comportamiento cuasi-periódico. Además notemos que en el primer caso se tienen valores entre $[0, 500]$ y en el segundo entre $[0, 4]$ bajo un tiempo entre $[0, 50]$, es decir, el forzamiento en el caso fuera de resonancia no es tan efectivo.

2.2.4. Overlaps

Ahora que sabemos que el enésimo estado del sistema evoluciona como

$$\psi_n(t) = e^{-iS(t)/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar} |n\rangle,$$

quisiéramos saber que tan probable es que luego de haber dejado pasar un tiempo, el sistema se encuentre en un estado sin excitaciones $|0\rangle$, en otras palabras, saber la probabilidad de que el sistema pase de un estado inicial de n excitaciones a uno de 0. Por lo que a continuación nos enfocaremos en calcular la probabilidad de que esto suceda y luego analizaremos bajo que condiciones esto podría suceder. Así que la idea está en calcular $P_n(t) = |\langle 0|\psi_n(t)\rangle|^2$, ya que sabemos que en un inicio nuestro sistema se encontrará en una combinación de estados excitados $|n\rangle$, acompañados de un escalar que representa la probabilidad cuántica de que este evento suceda, pero luego de dejar pasar un tiempo, estas probabilidades cambian, así que esa es la razón para calcular el modulo al cuadrado del producto interno entre el estado evolucionado $\psi_n(t)$ y el estado sin excitaciones $|0\rangle$. Entonces

$$\langle 0|\psi_n(t)\rangle = \langle 0|e^{-iS(t)/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar} |n\rangle, \quad (2.70)$$

ahora bien, como H es el operador Hamiltoniano del oscilador armónico sin forzamiento, sabemos que

$$e^{-iHt/\hbar} |n\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle, \quad (2.71)$$

por lo que

$$\langle 0|\psi_n(t)\rangle = e^{-iS(t)/\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} \langle 0|\mathcal{D}_{\alpha(t)} |n\rangle, \quad (2.72)$$

recordemos que el operador desplazamiento \mathcal{D}_α sobre un estado $|0\rangle$ lo transforma a un

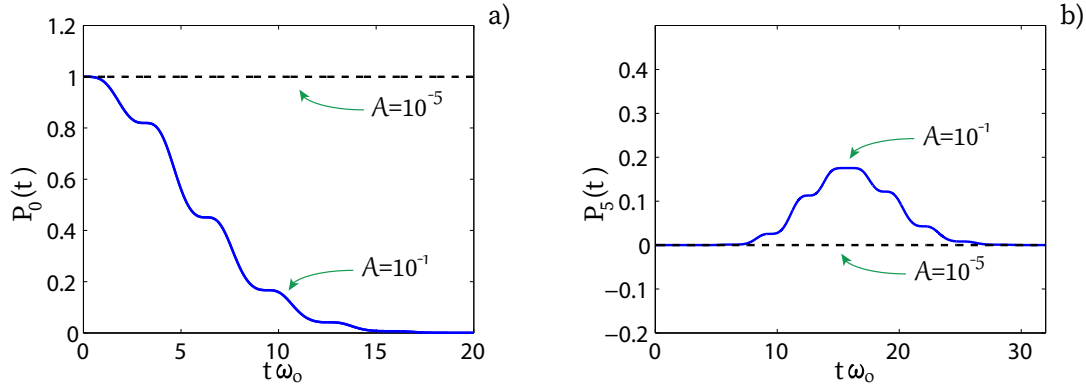


Figura 2.5: En la primera figura nos encontramos bajo el comportamiento de $P_0(t)$, mientras que en b) se exhibe $P_5(t)$, es decir, la probabilidad en el tiempo de encontrar al estado con 0 y 5 excitaciones respectivamente, sabiendo que inicialmente $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$. En la línea segmentada negra se aprecia el caso en el cual la amplitud de forzamiento es $A = 0,00001$, mientras que en la curva azul se tiene $A = 0,1$, en otras palabras, la línea segmentada nos muestra el caso en que es probable que el estado inicial se mantenga igual, mientras que en la azul el sistema inicial se ve apreciablemente forzado. Además los dos casos están bajo resonancia, ya que en caso contrario el comportamiento es similar a la línea segmentada.

estado coherente $|\alpha\rangle$, además todo estado coherente se puede escribir como una combinación de estados excitados de la forma

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle,$$

dejando a (2.67) como

$$\langle 0|\psi_n(t)\rangle = -e^{-iS(t)/\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} e^{-|\alpha(t)|^2/2} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(\alpha(t)^*)^m}{\sqrt{m!}} \langle m|n\rangle, \quad (2.73)$$

sabemos que cada $|n\rangle$ está siendo representada por la base canónica de $l^2(\mathbb{N})$ sobre \mathbb{C} , de esta manera resulta que $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$. Es así que solo sobrevive el enésimo término de la serie, obteniendo

$$\langle 0|\psi_n(t)\rangle = -e^{-iS(t)/\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} e^{-|\alpha(t)|^2/2} \frac{(\alpha(t)^*)^n}{\sqrt{n!}}. \quad (2.74)$$

Ahora solo nos queda aplicar el módulo al cuadrado para obtener la probabilidad deseada

$$\begin{aligned} P_n(t) &= |\langle 0|\psi_n(t)\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{n!} |\alpha(t)|^{2n} e^{-|\alpha(t)|^2}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

que no es otra cosa que la distribución de Poisson. Notemos que en tal expresión se encuentra el módulo al cuadrado de la curva de desplazamiento, y por (2.63) podemos observar que este valor se puede interpretar como el valor esperado del operador número \hat{N} para un estado preparado $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$, es decir, es el número probable de excitaciones que habrán en el tiempo para un sistema preparado inicialmente sin excitaciones. Por lo que si aplicamos lo que

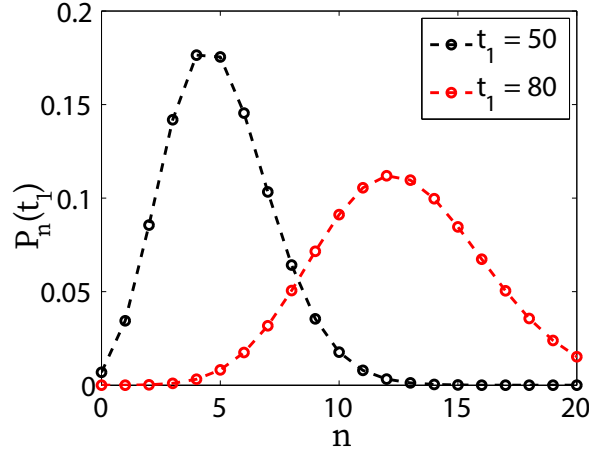


Figura 2.6: En la curva segmentada negra se aprecia el comportamiento de la probabilidad $P_n(t_1)$ para un tiempo fijo $t_1 = 50$, mientras que la curva roja es para $t_1 = 80$. Los puntos huecos de las curvas corresponden a la probabilidad de que aparezca ese enésimo estado excitado. Esto nos muestra que a medida que pasa el tiempo, es menos probable que el sistema se vea forzado a saltar a un estado de mayor excitación. Cabe mencionar que estas curvas son para el caso resonante y con una amplitud $A = 0,1$.

sabemos de la distribución de Poisson, estamos calculando la probabilidad de encontrar n excitaciones en un cierto tiempo t , sabiendo que se espera que en dicho tiempo se encuentren $\langle \hat{N}(t) \rangle = \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = |\alpha(t)|^2$ excitaciones.

Si nos enfocamos en estudiar esta probabilidad bajo el caso resonante, sabemos que el módulo al cuadrado de la curva de desplazamiento tiene la forma

$$|\alpha_r(t)|^2 = \frac{A^2}{8m\omega_0\hbar} \left(\frac{\sin(\omega_0 t)^2}{\omega_0^2} - \frac{t \sin(2\omega_0 t)}{\omega_0} + t^2 \right). \quad (2.76)$$

Si en un principio nos centramos en estudiar la probabilidad de encontrar cero excitaciones luego de haber dejado pasar el tiempo, resultará que

$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-|\alpha_r(t)|^2} \\ &= 1 - |\alpha_r(t)|^2 + O(|\alpha_r(t)|^4), \end{aligned} \quad (2.77)$$

entonces si la amplitud A del forzamiento es muy cercana a cero, se tendrá que

$$P_0(t) \approx 1, \quad (2.78)$$

es decir, el estado inicial se mantiene inalterado para todo tiempo $t \in \mathbb{R}_0^+$. Esto se logra apreciar en la línea segmentada negra de la Figura 2.5 a). En cambio si A es apreciable, la probabilidad disminuye exponencialmente con pequeñas oscilaciones por la naturaleza del forzamiento, esto se puede observar en la curva azul de la Figura 2.5 a). Si nos detenemos a estudiar la probabilidad en el tiempo de que el estado se encuentre con $n \neq 0$ excitaciones, se observa en la Figura 2.5 b) que para una amplitud $A = 0,1$ su comportamiento es el de una campana, que crece a medida que el tiempo transcurre, para luego alcanzar un máximo e inmediatamente decrecer hasta 0. Además a medida que se requiera una mayor cantidad

de excitaciones sobre el estado inicial, la probabilidad de que este alcance dichas excitaciones sera cada vez menor. Para eso basta con notar que en (2.70) para un n_0 lo suficientemente grande se tendrá que $P_n(t) > P_{n+1}(t)$ para todo $n > n_0$ con t fijo; es directo analizando el termino factorial que aparece. En la Figura 2.6 se logra apreciar este comportamiento, donde podemos encontrar dos curvas, cada una para un tiempo fijo; por orden temporal tenemos a la curva segmentada negra, que nos dice que tan probable es encontrar algún estado n si en un inicio tenemos 0 excitaciones, mientras que en la curva segmentada roja se hace notar que la probabilidad de alcanzar alguno de esos estados aun mayores es menor.

2.2.5. Representación de Floquet

Como hemos dicho al comienzo de este capítulo, el teorema de Floquet fue hecho para operadores definidos sobre espacios vectoriales de dimension finita, por lo cual nada asegura la existencia de esta representación para espacios de dimension infinita.

Contraejemplo

Es más, supongamos la existencia de los operadores $P(t)$ y \bar{H} tales que $U_t = P(t)e^{-\bar{H}t/\hbar}$. Basta que analicemos el valor esperado de \hat{N} en el tiempo para demostrar que no siempre podremos encontrar esta representación. En efecto, primero notemos que

$$\begin{aligned}\psi(t) &= U_t\psi(0) \\ &= P(t)e^{-i\bar{H}t/\hbar}\psi_n(0),\end{aligned}\tag{2.79}$$

pero bajo la suposición de la existencia de estos operadores, sabemos que $\psi_n(t) = e^{-i\epsilon_n t/\hbar}\phi_n(t)$, por lo cual $\psi_n(0) = \phi_n(0)$, con esto (1.79) queda como

$$\psi(t) = P(t)e^{-i\bar{H}t/\hbar}\phi_n(0),\tag{2.80}$$

además como $\bar{H}\phi_n(0) = \epsilon_n\phi_n(0)$, se obtiene

$$\psi(t) = P(t)e^{-i\epsilon_n t/\hbar}\phi_n(0).\tag{2.81}$$

De esta manera, el valor esperado de \hat{N} en el tiempo es

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{N} | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \phi_n(0) | e^{i\epsilon_n t/\hbar} P(t)^{-1} \hat{N} e^{-i\epsilon_n t/\hbar} P(t) | \phi_n(0) \rangle \\ &= \langle \phi_n(0) | P(t)^{-1} \hat{N} P(t) | \phi_n(0) \rangle.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Ahora bien, como $P(t)$ es T -periódico, se tendrá

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}(t) \rangle &= \langle \phi_n(0) | P(t)^{-1} \hat{N} P(t) | \phi_n(0) \rangle \\ &= \langle \phi_n(0) | P(t+T)^{-1} \hat{N} P(t+T) | \phi_n(0) \rangle \\ &= \langle \hat{N}(t+T) \rangle,\end{aligned}\tag{2.83}$$

es decir, $\langle \hat{N}(t) \rangle$ es una función T -periódica. Pero esta es una contradicción, ya que bajo las condiciones iniciales $\psi(0) = \psi_n(0) = |n\rangle$, se observa que el valor esperado de dicho operador no cumple esta condición, basta observar (2.68) junto a (2.52).

Invalidez del teorema de Floquet

Si nos centramos en encontrar y estudiar la falla en la validez del teorema de Floquet para nuestro caso. Notemos que en la demostración del teorema [8] se construye una matriz C a partir de la matriz fundamental $\Phi(t)$, es decir, se define

$$C := \Phi(t)^{-1}\Phi(t+T),\tag{2.84}$$

el cual es invertible e independiente del parámetro temporal t , luego partir de C se crea la matriz periódica $P(t)$, construyendo así una representación de Floquet. Ahora bien, si

construimos un operador $\Phi(t)^{-1}\Phi(t+T)$ bajo nuestro caso, podemos demostrar que en general es dependiente del tiempo. En efecto, sea

$$\Phi(t) = e^{-iS(t)/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar}, \quad (2.85)$$

para una función de desplazamiento $\alpha(t)$ con condiciones iniciales arbitrarias. Así resultará que

$$\Phi(t)^{-1}\Phi(t+T) = e^{iHt/\hbar} \mathcal{D}_{-\alpha(t)} \mathcal{D}_{\alpha(t+T)} e^{-i\left(H(t+T)+S(t)-S(t+T)\right)/\hbar}. \quad (2.86)$$

Nos focalizaremos en calcular el producto interno de (2.86) bajo vectores de la base canónica $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y observar que ocurre con la dependencia temporal. De esta manera, dado $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $n \geq m$, resultará

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = \langle n | \mathcal{D}_{-\alpha(t)} \mathcal{D}_{\alpha(t+T)} | m \rangle e^{-i(S(t)-S(t+T)+(E_n-E_m)t-E_mT)/\hbar}. \quad (2.87)$$

Recordemos que el operador desplazamiento cumple la identidad

$$\mathcal{D}_{-\alpha(t)} \mathcal{D}_{\alpha(t+T)} = e^{\xi(t)} \mathcal{D}_{\bar{\alpha}(t)}, \quad (2.88)$$

donde

$$\xi(t) := (\alpha(t+T)\alpha(t)^* - \alpha(t+T)^*\alpha(t))/2 \quad y \quad \bar{\alpha}(t) := \alpha(t+T) - \alpha(t), \quad (2.89)$$

entonces (1.87) nos queda

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = \langle n | \mathcal{D}_{\bar{\alpha}(t)} | m \rangle e^{\beta(t)}, \quad (2.90)$$

donde se ha definido

$$\beta(t) := -i(S(t) - S(t+T) + (E_n - E_m)t - E_mT)/\hbar + \xi(t) \quad (2.91)$$

con el único propósito de ahorrar términos. Ahora bien, si descomponemos al operador desplazamiento como en (2.23), se tendrá que

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = \langle n | e^{\bar{\alpha}(t)a^\dagger} e^{-\bar{\alpha}(t)^*a} | m \rangle e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2}. \quad (2.92)$$

Al descomponer a los operadores exponenciales en su forma de serie, vamos a obtener

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\bar{\alpha}(t)^l (-\bar{\alpha}(t)^*)^k}{l!k!} \langle n | a^{\dagger l} a^k | m \rangle. \quad (2.93)$$

Ahora bien, como $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, la igualdad (2.93) queda como

$$\begin{aligned} \langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle &= e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{\bar{\alpha}(t)^l (-\bar{\alpha}(t)^*)^k}{l!k!} \\ &\times \langle n-l | \left(\frac{n!}{(n-l)!} \right)^{1/2} \left(\frac{m!}{(m-k)!} \right)^{1/2} | m-k \rangle, \end{aligned} \quad (2.94)$$

como $\langle n-l | m-k \rangle = \delta_{n-l, m-k}$, se desvanecerán todos los términos $l \neq k+n-m$, así que

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{|\bar{\alpha}(t)|^{2k} \bar{\alpha}(t)^{n-m} \sqrt{n!m!}}{(k+n-m)!(m-k)!k!}. \quad (2.95)$$

Si nos detenemos en el caso $m = n$, obtendremos que

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | n \rangle = e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} \frac{|\bar{\alpha}(t)|^{2k}}{k!}, \quad (2.96)$$

el cual resulta ser la forma de los polinomios de Laguerre de orden n , es decir,

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | n \rangle = e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} L_n(|\bar{\alpha}(t)|^2). \quad (2.97)$$

Así que al analizar al operador $\Phi(t)^{-1} \Phi(t+T)$ bajo la base canónica $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, este será una matriz semi-infinita dependiente del tiempo con componentes de la forma (2.95) para el sector triangular superior, (2.97) para la diagonal y para la parte triangular inferior basta con hacer un calculo análogo al hecho más arriba, pero para el caso $m > n$, obteniendo

$$\langle n | \Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) | m \rangle = e^{\beta(t) - |\bar{\alpha}(t)|^2/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{|\bar{\alpha}(t)|^{2k} \bar{\alpha}(t)^{\star m-n} \sqrt{n!m!}}{(l+m-n)!(n-l)!l!}. \quad (2.98)$$

Observación 8. Si $\bar{\alpha}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $\alpha(t)$ es una función T -periódica, entonces la solución fundamental $\Phi(t)$ tiene una representación de Floquet.

Demostración. En efecto, bajo esta suposición, el operador (1.86) queda como

$$\Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) = e^{-i(HT+S(t+T)-S(t))/\hbar}, \quad (2.99)$$

donde con un poco de trabajo es posible notar que los exponenciales no dependen del tiempo. En efecto,

$$\begin{aligned} S(t+T) - S(t) &= \int_0^{t+T} L(t') dt' - \int_0^t L(t') dt' \\ &= \int_t^{t+T} L(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.100)$$

El Lagrangiano de la forma (2.34) que estamos integrando se convierte en una función periódica en el tiempo por herencia directa de la función $\alpha(t)$, es así que la integral queda como

$$S(t+T) - S(t) = \int_0^T L(t') dt', \quad (2.101)$$

por lo tanto

$$\Phi(t)^{-1} \Phi(t+T) = e^{-i(HT-S(T))/\hbar}, \quad (2.102)$$

es decir, es un operador constante en el tiempo. Con esto definiremos al Hamiltoniano de Floquet como

$$\bar{H} := H - \frac{1}{T} S(T) \quad (2.103)$$

con la base de Floquet $\phi_n = |n\rangle$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{H} \phi_n &= (H - \frac{1}{T} S(T)) |n\rangle \\ &= (E_n - \frac{1}{T} S(T)) |n\rangle \\ &= (E_n - \frac{1}{T} S(T)) \phi_n, \end{aligned} \quad (2.104)$$

es decir, los autovalores o cuasi-energías ϵ_n tendrán la forma

$$\epsilon_n := E_n - \frac{1}{T}S(T). \quad (2.105)$$

Ahora bien, por medio de \bar{H} , es posible construir al operador $P(t)$ como

$$P(t) := \Phi(t)e^{i\bar{H}t/\hbar}, \quad (2.106)$$

de esta manera, remplazando (1.85)

$$P(t) := e^{-i\bar{S}(t)/\hbar}\mathcal{D}_{\alpha(t)}, \quad (2.107)$$

donde

$$\bar{S}(t) := S(t) - \frac{t}{T}S(T). \quad (2.108)$$

Este operador $P(t)$ claramente es T -periódico. Por lo tanto, si la curva de desplazamiento es T -periódica, podemos asegurar la existencia de una representación de Floquet para la solución fundamental $\Phi(t)$. \square

Gracias a esta observación, es posible construir otra representación para el operador de evolución del sistema, como se aprecia a continuación.

Observación 9. Si $\bar{\alpha}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces el operador U_t también cuenta con una representación de Floquet.

Demostración. Recordemos que $U_t = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$, así que

$$U_t = P(t)e^{-i\bar{H}t/\hbar}P(0)^{-1}, \quad (2.109)$$

pero por (2.107) se tiene que $P(0)^{-1} = \mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1}$. Con esto (2.109) queda como

$$\begin{aligned} U_t &= P(t)e^{-i\bar{H}t/\hbar}\mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1} \\ &= P(t)\mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1}\mathcal{D}_{\alpha(0)}e^{-i\bar{H}t/\hbar}\mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

de esta manera, redefinimos a los operadores \bar{H} y $P(t)$ para U_t como

$$\bar{H} := \mathcal{D}_{\alpha(0)}H\mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1} - \frac{1}{T}S(T) \quad (2.111)$$

$$P(t) := e^{-i\bar{S}(t)}\mathcal{D}_{\alpha(t)}\mathcal{D}_{\alpha(0)}^{-1} \quad (2.112)$$

aunque podríamos expresar al primer termino de (2.111) como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha_0}H\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} &= \hbar\omega_0\left(\mathcal{D}_{\alpha_0}a^\dagger a\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) \\ &= \hbar\omega_0\left((a^\dagger - \alpha_0^*)(a - \alpha_0) + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) \\ &= \hbar\omega_0\left(c^\dagger c + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) \end{aligned} \quad (2.113)$$

donde c y c^\dagger son los operadores de creación y aniquilación desplazados un término proporcional al operador identidad, es decir

$$c^* := a^\dagger - \alpha_0^* = \mathcal{D}_{\alpha_0}a^\dagger\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \quad y \quad c := a - \alpha_0 = \mathcal{D}_{\alpha_0}a\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1}, \quad (2.114)$$

de esta manera, a (2.111) lo reescribimos como

$$\bar{H} := \hbar\omega_0\left(c^\dagger c + \frac{1}{2}\mathbb{I}\right) - \frac{1}{T}S(T)\mathbb{I}. \quad (2.115)$$

Por lo tanto, bajo la periodicidad de la curva de desplazamiento $\alpha(t)$ también es posible obtener una representación de Floquet para el operador de evolución U_t \square

Cuasi-periodicidad de $\alpha(t)$

Las funciones $x(t)$ y $v(t)$ de la curva de desplazamiento $\alpha(t)$ para el forzamiento (2.46) hasta el momento han sido resueltas bajo el sistema (2.47) con las condiciones iniciales $x(0) = 0 = v(0)$, pero en general si no especificamos estas últimas, la solución general es

$$x(t) = \frac{A \sin(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + \left(v_0 - \frac{A\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \right) \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} + x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.116)$$

y por lo tanto,

$$v(t) = \frac{A\Omega \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + \left(v_0 - \frac{A\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \right) \cos(\omega_0 t) - x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (2.117)$$

Podemos apreciar que estas funciones no tienen periodo T , ya que corresponden a una combinación de distintas funciones trigonométricas con sus respectivas frecuencias. Sin embargo, es posible que bajo ciertos valores de estas frecuencias, las funciones de arriba logren una periodicidad; cuando existen comportamientos de este estilo, se le suelen llamar funciones cuasi-periódicas [2]. Ahora bien, como $x(t)$ y $v(t)$ presentan este comportamiento, es claro que la curva de desplazamiento $\alpha(t)$ también lo hará.

Periodicidad de $\alpha(t)$

Recordemos que la condición inicial del enésimo estado excitado del sistema es de la forma $\psi_n(0) = \mathcal{D}_{\alpha_0}|n\rangle$, es decir, la condición inicial α_0 de la curva de desplazamiento esta directamente relacionada con la condición inicial del sistema inicial de estudio. Por lo que si preparamos el sistema en un estado con una cantidad fija de excitaciones $\rho_0 = |\psi_n(0)\rangle\langle\psi_n(0)| = \mathcal{D}_{\alpha_0}|n\rangle\langle n|\mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1}$, las condiciones iniciales que se impongan sobre la curva del desplazamiento estarán dadas por las condiciones iniciales que preparamos para el sistema.

Nada nos impide que en un comienzo el sistema se encuentre bajo otras condiciones. Si tomamos un ejemplo sencillo [14] en el cual se imponga

$$x_0 = 0 \quad y \quad v_0 = \frac{A\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \quad (2.118)$$

obtendremos funciones de la forma

$$x(t) = \frac{A \sin(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad y \quad v(t) = \frac{A\Omega \cos(\Omega t)}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \quad (2.119)$$

que claramente son T -periódicas. Además como se logra apreciar en la Figura 2.7 a) la curva de desplazamiento tiene un movimiento cíclico, lo que permite que el operador de evolución del sistema forzado pueda ser representado en la forma de Floquet. Si ahora nos detenemos a observar el valor esperado en el tiempo de algún observable, como \hat{N} . Por (2.68) resultaría

$$\langle \hat{N}(t) \rangle = \langle \hat{N} \rangle + \frac{A^2}{2m\omega_0\hbar(\omega_0^2 - \Omega^2)^2} \left(\omega_0^2 \sin(\Omega t)^2 + \Omega^2 \cos(\Omega t)^2 \right). \quad (2.120)$$

En la Figura 2.8 se logra ver la periodicidad del valor esperado en el tiempo del número de excitaciones del sistema.

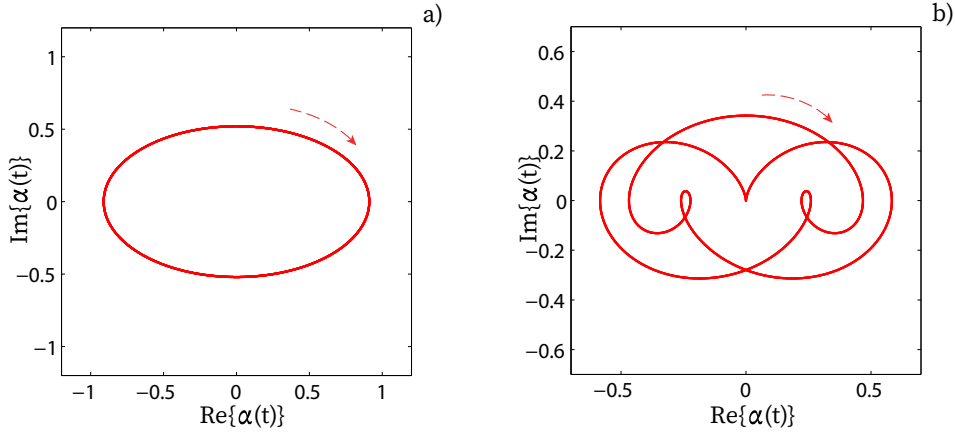


Figura 2.7: En a) se observa el comportamiento de elipse de la curva de desplazamiento para condiciones iniciales dadas por (2.118), que transforman a $\alpha(t)$ en una función T -periódica. En b) se tiene el comportamiento de la curva de desplazamiento para frecuencia del forzamiento $\Omega = 5\pi/T$ y $\omega_0 = 2\pi/T$, es decir, cuando dichas frecuencias son múltiplos racionales, en los que se tiene una representación de Floquet.

Por otro lado, como se dijo anteriormente, en general la curva $\alpha(t)$ es cuasi-periódica, pero podríamos encontrar valores específicos para las frecuencias involucradas que nos permita volverla T -periódica; bastará con dejar a la frecuencia del forzamiento Ω como un múltiplo racional de la frecuencia natural ω_0 del sistema, i.e., existen $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$T = \frac{2\pi k_0}{\omega_0} = \frac{2\pi k_1}{\Omega}. \quad (2.121)$$

Si analizamos las funciones $x(t)$ y $v(t)$ bajo este supuesto, es directo que son T -periódicas y por lo tanto, existen \bar{H} y $P(t)$ de la forma (2.115) y (2.112) respectivamente, tales que $U_t = P(t)e^{-i\bar{H}t}$. En la Figura 2.7 b) se aprecia a la curva de desplazamiento para frecuencias proporcionales.

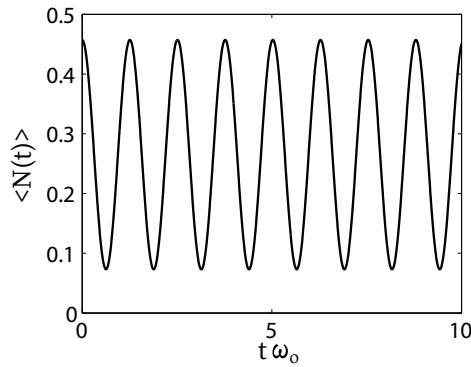


Figura 2.8: Esta curva representa la forma de la función $\langle \hat{N}(t) \rangle$ en el tiempo, dado para condiciones iniciales (2.118). Se puede ver que de acuerdo a (2.80), esta función tiene un comportamiento periódico.

2.2.6. Cuasi-energías

En la sección anterior observamos que habrán al menos dos casos en los que el operador de evolución bajo un forzamiento del tipo (2.38) tiene una representación de Floquet. Ahora nos centraremos en encontrar sus respectivas cuasi-energías; lo haremos para el caso en que la frecuencia del forzamiento es múltiplo racional de la frecuencia natural del sistema, pero bajo condiciones iniciales apropiadas, es decir, bajo un estado inicial $\rho_0 = |0\rangle\langle 0|$; que es equivalente a $x_0 = 0 = v_0$.

Recordemos que estas cuasi-energías corresponden a los valores propios $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ del Hamiltoniano de Floquet \bar{H} bajo la base de Floquet $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como el Hamiltoniano de Floquet tiene la forma (2.115); la cuasi-energía ϵ_n para el operador de evolución satisface la misma expresión que la obtenida para la matriz fundamental en (2.105). En efecto, basta observar que el estado inicial satisface $c^\dagger c \psi_n(0) = n \psi_n(0)$, ya que como $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ y además $\psi_n(0) = \mathcal{D}_{\alpha_0} |n\rangle$, entonces

$$\begin{aligned} c^\dagger c \psi_n(0) &= \mathcal{D}_{\alpha_0} a^\dagger a \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \mathcal{D}_{\alpha_0} |n\rangle \\ &= \mathcal{D}_{\alpha_0} a^\dagger a |n\rangle \\ &= n \mathcal{D}_{\alpha_0} |n\rangle \\ &= n \psi_n(0), \end{aligned} \tag{2.122}$$

y además como $\psi_n(0) = \phi_n$, de (2.115) se tendrá que

$$\begin{aligned} \bar{H} \phi_n &= \left(\hbar \omega_0 \left(c^\dagger c + \frac{1}{2} \mathbb{I} \right) - \frac{1}{T} S(T) \right) \psi_n(0) \\ &= \left(\hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{T} S(T) \right) \phi_n, \end{aligned} \tag{2.123}$$

así que la enésima cuasi-energía es

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{T} S(T).$$

Ahora solo nos queda calcular la integral $S(T)$. Si desarrollamos el Lagrangiano (2.45) con la ecuación (2.47), bajo el forzamiento $F(t) = A \sin(\Omega t)$ y $G(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, resultará que

$$L(t') = -\frac{A^2 \sin(\Omega t)}{2m\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} (\omega_0 \sin(\Omega t) - \Omega \sin(\omega_0 t)), \tag{2.124}$$

luego integrando sobre $[0, T]$. La función $S(t)$ evaluada en $t = T$ adopta la forma

$$S(t) = -\frac{A^2}{4m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \tag{2.125}$$

de esta manera la enésima cuasi-energía de nuestro sistema será

$$\epsilon_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{A^2}{4m(\Omega^2 - \omega_0^2)}. \tag{2.126}$$

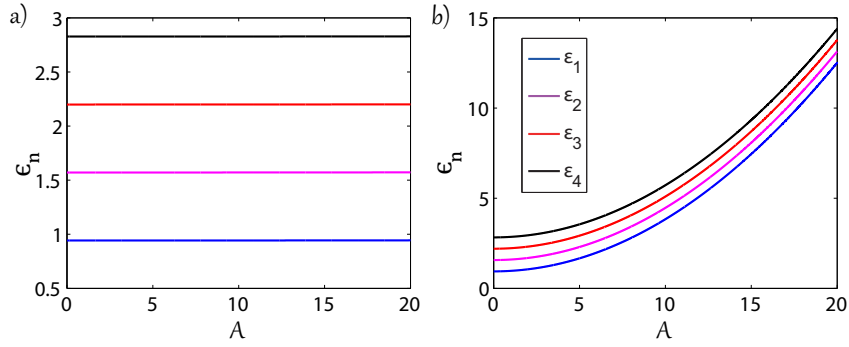


Figura 2.9: En estas dos imágenes se observan 4 cuasi-energías versus la amplitud del forzamiento; en a) se tiene un caso fuera de resonancia en el que la frecuencia del forzamiento se distancia bastante de la frecuencia natural. En b) tenemos una frecuencia de forzamiento cercana a la frecuencia natural; aquí la cuasi-energía aumenta de manera considerable a medida que aumenta la amplitud del forzamiento.

Notemos que esta cuasi-energía resulta la suma de los posibles valores de energía que tendrá un sistema armónico libre $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$ más un término adicional que corresponde a la contribución del forzamiento sobre el sistema. Además si la amplitud del forzamiento es cero, i.e., $A = 0$, entonces la cuasi-energía coincide con la energía E_n , lo cual tiene sentido, ya que en tal caso no habrá forzamiento sobre el sistema y el operador Hamiltoniano de Floquet \bar{H} (2.70) sería igual al operador Hamiltoniano del sistema armónico libre (2.28). El comportamiento de esta cuasi-energía versus la amplitud se logra apreciar con más detalle en la Figura 2.9. En ese caso si la frecuencia del forzamiento se encuentra bastante alejada de la frecuencia del sistema Ω , la cuasi-energía es prácticamente igual a la energía del sistema sin forzamiento como vemos en Figura 2.9 a), mientras que en la Figura 2.9 b) se aprecia el comportamiento cuadrático si la frecuencia del forzamiento es mucho más cercana a la frecuencia natural.

Capítulo 3

Oscilador Armónico Cuántico Forzado y Amortiguado

Ahora que sabemos como estudiar un sistema armónico cuántico bajo un forzamiento externo periódico en el tiempo. La siguiente etapa consiste en abrir tal sistema a un ambiente, de tal manera que se disipe energía propia del sistema; la gracia está en que ahora contamos con este control externo, que nos permite mantener o incluso aumentar tales excitaciones a pesar de la pérdida de energía. Por lo que, a lo largo de este capítulo, vamos a obtener y estudiar un semigrupo que nos ayude a entender la dinámica de los observables a lo largo del tiempo; esto lo haremos obteniendo una expresión explícita para el generador infinitesimal de tal semigrupo, para luego estudiar el comportamiento del valor esperado del operador número que nos dirá que es lo que ocurre realmente con las excitaciones del sistema de estudio.

3.1. Ecuación de Lindblad bajo un Hamiltoniano periódico

El objetivo de este capítulo será realizar una derivación para el generador infinitesimal del semigrupo que nos permitirá estudiar la dinámica del sistema \mathcal{S} abierto a un reservorio \mathcal{R} . Esto lo haremos bajo una serie de aproximaciones físicas que se irán presentando a lo largo del trabajo, correspondientes a lo que se conoce como weak coupling limit [16], es decir, vamos a suponer que el sistema se encuentra débilmente acoplado al ambiente.

A nuestro sistema expandido $\mathcal{S} + \mathcal{R}$ le asociaremos un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, donde $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ corresponde al espacio de Hilbert para el sistema reducido \mathcal{S} y $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ al espacio del ambiente \mathcal{R} . Por lo cual, el estado de este vendrá dado por el operador densidad $\sigma_t \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$, donde $t \in \mathbb{R}$. De esta manera, es posible definir al estado del sistema de interés $\rho_t \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$, por medio de la traza parcial en σ_t sobre el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, i.e.,

$$\rho_t := \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\sigma_t), \quad (3.1)$$

así aplicaremos en el operador σ_t la traza sobre cualquier base de $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, para obtener el estado ρ_t del sistema \mathcal{S} . De acuerdo al postulado 4, la dinámica del estado σ_t esta dada por la ecuación de Schrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sigma_t = [H(t), \sigma_t], \quad (3.2)$$

donde $H(t)$ corresponde al operador Hamiltoniano dependiente del tiempo del sistema expandido $\mathcal{S} + \mathcal{R}$, definido como

$$H(t) := H_{\mathcal{S}}(t) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{R}} + \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \otimes H_{\mathcal{R}} + H_I, \quad (3.3)$$

donde $H_{\mathcal{S}}(t)$ es el operador Hamiltoniano dependiente del tiempo para el sistema reducido, $H_{\mathcal{R}}$ es el operador Hamiltoniano asociado al ambiente y H_I el operador Hamiltoniano de interacción entre \mathcal{S} y \mathcal{R} , i.e., representa la energía de interacción entre estos dos subsistemas.

Entrando al problema que nos convoca, hasta ahora hemos estado trabajando con un oscilador armónico cuántico forzado periódicamente por un agente externo. Lo que haremos a continuación sera abrir este sistema a un baño término a temperatura ambiente, de tal manera que en general la energía se pueda perder a lo largo del tiempo. Entonces al igual que el capitulo anterior, seguiremos trabajando bajo el espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = l^2(\mathbb{N})$ y con un Hamiltoniano (0.1), es decir,

$$H_{\mathcal{S}}(t) = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\mathcal{S}} \right) + af(t) + a^\dagger f(t)^\star.$$

En cuanto al espacio que asociaremos al ambiente, este será $\mathcal{H}_{\mathcal{R}} := \bigotimes_{j \in J} l^2(\mathbb{N})$ donde el conjunto J es contable. De esta manera, tendremos una cantidad infinita numerable de osciladores armónicos con sus respectivas frecuencias $(w_j)_{j \in J}$ tal que cada operador de aniquilación y creación asociado será de la forma

$$b_j = \mathbb{I}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_{j-1} \otimes \underbrace{a}_{j\text{-ésimo}} \otimes \mathbb{I}_{j+1} \otimes \dots, \quad (3.4)$$

$$b_j^\dagger = \mathbb{I}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_{j-1} \otimes \underbrace{a^\dagger}_{j\text{-ésimo}} \otimes \mathbb{I}_{j+1} \otimes \dots, \quad (3.5)$$

donde \mathbb{I}_j corresponde al operador identidad del j -ésimo espacio $l^2(\mathbb{N})$ del ambiente. Con esto, se define al operador Hamiltoniano $H_{\mathcal{R}}$ como

$$H_{\mathcal{R}} := \hbar \sum_{j \in J} w_j b_j^\dagger b_j \quad (3.6)$$

y al estado del ambiente [7]

$$\varrho = \prod_{i \in I} e^{-\hbar w_i b_i^\dagger b_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar w_i / K_B T}), \quad (3.7)$$

donde la productoria \prod lo entenderemos como el producto tensorial, K_B es la constante de Boltzman y T la temperatura del ambiente. En cuanto al Hamiltoniano de interacción, este lo definiremos como

$$H_I = \hbar(a + a^\dagger) \otimes \left(\sum_{j \in J} b_j k_j + b_j^\dagger k_j^\star \right), \quad (3.8)$$

donde $(k_j)_{j \in J} \subset \mathbb{C}$ son las constantes de acoplamiento entre el oscilador del sistema y el j -ésimo oscilador del ambiente.

3.1.1. Derivación del operador de Lindblad

Lo siguiente será obtener al operador de Lindblad; este nos permitirá generar al semigrupo encargado de la dinámica del oscilador armónico forzado bajo este baño térmico. Partiremos retomando la ecuación de Schrodinger (3.2); para simplificar cálculos vamos a trabajar bajo el cuadro de interacción, por lo que introducimos al mapeo $\bar{\mathcal{U}}_t$ sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como

$$\bar{\mathcal{U}}_t(A) := \bar{U}_t A \bar{U}_t^{-1} \quad , \quad \bar{\mathcal{U}}_t^{-1}(A) := \bar{U}_t^{-1} A \bar{U}_t, \quad (3.9)$$

donde $\bar{U}_t := U_t \otimes \tilde{U}_t$ y U_t con \tilde{U}_t son operadores unitarios generados por $H_S(t)$ y $H_{\mathcal{R}}$ respectivamente, i.e.,

$$U_t := e^{-S(t)/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \quad y \quad \tilde{U}_t := e^{-iH_{\mathcal{R}}t/\hbar}. \quad (3.10)$$

De esta manera, por la proposición 1, la ecuación (3.2) bajo el cuadro de interacción queda como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \bar{\sigma}_t = [\bar{H}_I(t), \bar{\sigma}_t]. \quad (3.11)$$

Si integramos esta ecuación en el intervalo $[0, t]$, resulta que

$$\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}_0 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\bar{H}_I(s), \bar{\sigma}_s] ds, \quad (3.12)$$

luego remplazemos esta ecuación en (3.11), por lo cual

$$\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_t = [\bar{H}_I(t), \bar{\sigma}_0] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(s), \bar{\sigma}_s]] ds. \quad (3.13)$$

Ahora si aplicamos la traza parcial sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, para obtener una expresión para el operador densidad de \mathcal{S} , nos queda

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_t = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), \bar{\sigma}_0] \right) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(s), \bar{\sigma}_s]] \right) ds. \quad (3.14)$$

Asumiremos que la primera expresión al lado izquierdo de la ecuación se anula, es decir, $\text{Tr}_{\mathcal{R}}([\bar{H}_I(t), \bar{\sigma}_0]) = 0$, así nos queda

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(s), \bar{\sigma}_s]] \right) ds. \quad (3.15)$$

Aproximación de Born y Markov

Ahora haremos la primera aproximación, supondremos que la interacción entre el sistema y el reservorio es muy débil, de esta manera la influencia del sistema en este ambiente es pequeña. Con esto el operador densidad del reservorio $\bar{\varrho}_t$ se ve afectado de manera insignificante por tal interacción, entonces el estado del sistema-reservorio a un tiempo t , se asumirá de la forma

$$\bar{\sigma}_t = \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}, \quad (3.16)$$

esta hazaña es conocida como la *aproximación de Born* [7][23], por lo cual (1.15) queda como

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(s), \bar{\rho}_s \otimes \bar{\varrho}]] \right) ds. \quad (3.17)$$

Otra suposición que haremos a la hora de abrir el sistema, es que su estado no podrá depender de la información pasada, ya que el ambiente absorbe y olvida rápidamente la información que este entrega, por lo cual es prácticamente improbable que dicha información vuelva luego de un tiempo. Este tiempo que le toma al reservorio en olvidar la información obtenida de \mathcal{S} la llamaremos tiempo de correlación y la anotaremos por τ_C , así que de acuerdo a lo anterior, se tendrá que el tiempo de correlación debe ser mucho menor al tiempo que le toma al sistema evolucionar, i.e, $\tau_C \ll \tau_S$, donde τ_S es el tiempo en el cual el sistema tiene un cambio apreciable. Entonces de acuerdo a lo anterior, se hará el cambio

$$\bar{\rho}_s \rightarrow \bar{\rho}_t \quad (3.18)$$

sobre la ecuación (3.17). Con esto la variación en el tiempo del estado del sistema no depende de la acumulación de información pasada, por lo cual obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(s), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] \right) ds, \quad (3.19)$$

esta aproximación es conocida como *aproximación de Markov*. Ahora haciendo el cambio $s \rightarrow t - t'$

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] \right) dt'. \quad (3.20)$$

Asumiremos que el tiempo t será del orden de τ_S y que t' de la integración estará dominado por muchos τ_C , de esta manera podemos extender la integral hasta infinito

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] \right) dt' \quad (3.21)$$

Conmutadores de la integración

Por conveniencia cambiaremos al primer término del conmutador de (3.21) por su adjunto, es decir,

$$[\bar{H}_I(t), [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] = [\bar{H}_I(t)^\dagger, [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]], \quad (3.22)$$

esto lo podemos hacer ya que H_I es autoadjunto y por lo tanto es directo que $\bar{H}_I(t)$ también lo es. Ahora si desarrollamos estos dos conmutadores

$$\begin{aligned} [\bar{H}_I(t)^\dagger, [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] &= [\bar{H}_I(t)^\dagger, \bar{H}_I(t - t')\bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho} - \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}\bar{H}_I(t - t')] \\ &= \bar{H}_I^\dagger(t)\bar{H}_I(t - t')\bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho} - \bar{H}_I(t - t')\bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}\bar{H}_I^\dagger(t) \\ &\quad + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde *h.c* son los términos adjuntos o hermitico conjugado. Ahora aplicando la traza parcial con respecto al espacio $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t)^\dagger, [\bar{H}_I(t - t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] \right) &= \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t)^\dagger, \bar{H}_I(t - t')\bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}] \right) \\ &\quad + \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\text{h.c.}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para ahorrar espacio, escribiremos al Hamiltoniano de interacción (3.8) como $H_I = A \otimes B$, donde $A = a + a^\dagger$ y $B = \sum_{j \in J} b_j k_j + b_j^\dagger k_j^*$. Se sigue que en el cuadro de interacción este queda como

$$\begin{aligned} \bar{H}_I(t) &= \bar{\mathcal{U}}_t(H_I) \\ &= U_t A U_t^{-1} \otimes \tilde{U}_t B \tilde{U}_t^{-1} \\ &= \bar{A}(t) \otimes \bar{B}(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

de esta manera, podemos escribir a (3.24) como

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{H}_I(t)^\dagger, [\bar{H}_I(t-t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] \right) &= \text{Tr}_{\mathcal{R}} \left([\bar{A}(t)^\dagger \otimes \bar{B}(t)^\dagger, \bar{A}(t-t')\bar{\rho}_t \otimes \bar{B}(t-t')\bar{\varrho}] \right) \\
&+ \text{h.c.} \\
&= \bar{A}(t)^\dagger \bar{A}(t-t')\bar{\rho}_t \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t')\bar{\varrho}) \\
&- \bar{A}(t-t')\bar{\rho}_t \bar{A}(t)^\dagger \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\bar{B}(t-t')\bar{\varrho} \bar{B}(t)^\dagger) \\
&+ \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

como la traza es cíclica, i.e., $\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\bar{B}(t-t')\bar{\varrho} \bar{B}(t)^\dagger) = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t')\bar{\varrho})$ y ademas, escribiendo $\langle \bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t') \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t')\bar{\varrho})$, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\mathcal{R}}([\bar{H}_I(t)^\dagger, [\bar{H}_I(t-t'), \bar{\rho}_t \otimes \bar{\varrho}]] &= [\bar{A}(t)^\dagger, \bar{A}(t-t')\bar{\rho}_t] \langle \bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t') \rangle \\
&+ \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Observación 10. *Notemos que la función $r(t, t') := \langle \bar{B}(t)^\dagger \bar{B}(t-t') \rangle$ de correlación del baño, es independiente del tiempo t .*

Demostración: Desarrollemos la expresión $r(t, t')$ como sigue

$$\begin{aligned}
r(t, t') &= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho B^\dagger(t) B(t-t')) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho \tilde{U}_t^{-1} B \tilde{U}_t \tilde{U}_{t-t'}^{-1} B \tilde{U}_{t-t'}) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\tilde{U}_{t-t'} \varrho \tilde{U}_t^\dagger B \tilde{U}_t \tilde{U}_{t-t'}^\dagger B).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ahora bien, como ϱ es independiente del tiempo, de acuerdo a la ecuación de Schrodinger se tendrá que $[\varrho, H_{\mathcal{R}}] = 0$. Esto nos lleva a que el operador de evolución \tilde{U}_t conmuta con el estado del ambiente, i.e., $[\varrho, \tilde{U}_t] = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que

$$r(t, t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho \tilde{U}_{t-t'} \tilde{U}_t^{-1} B \tilde{U}_t \tilde{U}_{t-t'}^{-1} B). \tag{3.29}$$

Si agregamos el término $\tilde{U}_\tau \tilde{U}_\tau^{-1} = \mathbb{I}_{\mathcal{R}}$ para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, entre los términos $\tilde{U}_{t-t'} \tilde{U}_t^{-1}$ y $\tilde{U}_t \tilde{U}_{t-t'}^{-1}$, se obtiene

$$r(t, t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho \tilde{U}_{t-t'+\tau} \tilde{U}_{t+\tau}^{-1} B \tilde{U}_{t+\tau} \tilde{U}_{t+\tau-t'}^{-1} B), \tag{3.30}$$

ahora ocupando nuevamente $[\varrho, \tilde{U}_t] = 0$, resulta

$$\begin{aligned}
r(t, t') &= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\tilde{U}_{t-t'+\tau} \varrho \tilde{U}_{t+\tau}^{-1} B \tilde{U}_{t+\tau} \tilde{U}_{t+\tau-t'}^{-1} B) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho \tilde{U}_{t+\tau}^{-1} B \tilde{U}_{t+\tau} \tilde{U}_{t+\tau-t'}^{-1} B \tilde{U}_{t-t'+\tau}) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho B^\dagger(t+\tau) B(t+\tau-t')) \\
&= r(t+\tau, t')
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Por lo tanto, $r(t+\tau, t') = r(t, t')$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. □

Observación 11. *Como r no es dependiente del tiempo t , anotaremos a tal función como $r(t, t') = r(t - (t - t')) = r(t')$. Además notamos que $r^*(t') = r(-t')$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
r^*(t') &= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho B(t)^\dagger B(t-t'))^* \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(B(t-t')^\dagger B(t) \varrho) \\
&= \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho B(t-t')^\dagger B(t)) \\
&= r(t-t'-t) \\
&= r(-t').
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo tanto, el conjugado de la función de correlación solo cambiará en el signo de la diferencia temporal entre $B(t')^\dagger$ y $B(0)$. \square

Ahora remplazando (3.27) en (3.21)

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \left([\bar{A}(t)^\dagger, \bar{A}(t-t') \bar{\rho}_t] \langle \bar{B}(t')^\dagger \bar{B}(0) \rangle + h.c. \right) dt'. \tag{3.33}$$

Ahora vamos a descomponer los operadores $\bar{A}(t)$ y $\bar{A}(t-t')$. Recordemos que estos se encuentran bajo el cuadro de interacción, por lo que debemos aplicar el mapeo (3.9) al operador $A = a + a^\dagger$. Así que

$$\begin{aligned}
\bar{A}(t) &= U_t^{-1} A U_t \\
&= \mathcal{D}_{\alpha_0} e^{iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)} (a + a^\dagger) \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \\
&= \mathcal{D}_{\alpha_0} e^{iHt/\hbar} (a + a^\dagger + \alpha(t) + \alpha(t)^*) e^{-iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Si ocupamos la identidad [20]

$$e^C D e^{-C} = D + [C, D] + \frac{1}{2!} [C, [C, D]] + \dots \tag{3.35}$$

para $C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, resultará que

$$e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} = a + i\omega_0 [a^\dagger a, a] - \frac{1}{2!} \omega_0^2 [a^\dagger a, [a^\dagger a, a]] + \dots, \tag{3.36}$$

pero sabemos que $[a^\dagger a, a] = -a$, así que

$$\begin{aligned}
e^{iHt/\hbar} a e^{-iHt/\hbar} &= a - i\omega_0 a + \frac{1}{2!} \omega_0^2 a + \dots \\
&= a e^{-i\omega_0 t},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

ademas análogamente para el operador de creación a^\dagger

$$e^{iHt/\hbar} a^\dagger e^{-iHt/\hbar} = a^\dagger e^{i\omega_0 t}, \tag{3.38}$$

entonces (3.34) queda como

$$\begin{aligned}
\bar{A}(t) &= \mathcal{D}_{\alpha_0} (a e^{-i\omega_0 t} + a^\dagger e^{i\omega_0 t} + \alpha(t) + \alpha(t)^*) \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \\
&= (a - \alpha_0) e^{-i\omega_0 t} + (a^\dagger - \alpha_0^*) e^{i\omega_0 t} + \alpha(t) + \alpha(t)^* \\
&= a e^{-i\omega_0 t} + a^\dagger e^{i\omega_0 t} + \left(\alpha(t) + \alpha(t)^* - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} - \alpha_0^* e^{i\omega_0 t} \right) \mathbb{I}_S.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Los términos proporcionales al operador identidad de sistema (3.39) no contribuyen a la ecuación (3.33), ya que $[\mathbb{I}_{\mathcal{S}}, \bar{\rho}_t] = 0$, por lo que (3.33) queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \left([ae^{-i\omega_0 t} + a^\dagger e^{i\omega_0 t}, (ae^{-i\omega_0(t-t')} + a^\dagger e^{i\omega_0(t-t')})\bar{\rho}_t] \right. \\ &\quad \times \left. \langle \bar{B}(t')^\dagger \bar{B}(0) \rangle + h.c. \right) dt'. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como los conmutadores son bilineales, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \left(\left\{ [a, a\bar{\rho}_t]e^{-2i\omega_0 t}e^{i\omega_0 t'} + [a, a^\dagger\bar{\rho}_t]e^{-i\omega_0 t'} + [a^\dagger, a\bar{\rho}_t]e^{i\omega_0 t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [a^\dagger, a^\dagger\bar{\rho}_t]e^{2i\omega_0 t}e^{-i\omega_0 t'} \right\} \langle \bar{B}(t')^\dagger \bar{B}(0) \rangle + h.c. \right) dt'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aproximación Secular

A la expresión (3.41) la simplificaremos un poco más. Al tiempo intrínseco del sistema $\tau_{\mathcal{S}}$ lo vamos a tomar proporcional al $\max\{|\omega - \omega'|^{-1} : \omega, \omega' \in \{\pm\omega_0\}, \omega \neq \omega'\}$, de esta manera si este tiempo es muy grande en comparación al tiempo de correlación del reservorio $\tau_{\mathcal{C}}$ y al tiempo de relajación $\tau_{\mathcal{R}}$, es decir, al tiempo que le toma al estado reducido del sistema \mathcal{S} en cambiar de manera apreciable; entonces los términos no seculares, i.e. los términos tales que $\omega \neq \omega'$, podrán ser ignorados ya que oscilan demasiado rápido; en otras palabras, vamos a eliminar los términos que estén acompañados de exponenciales con frecuencias $\pm 2\omega_0$. Con esto, la ecuación (3.41) se reduce a

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \left([a, a^\dagger\bar{\rho}_t]e^{-i\omega_0 t'} + [a^\dagger, a\bar{\rho}_t]e^{i\omega_0 t} \right) \langle \bar{B}(t')^\dagger \bar{B}(0) \rangle + h.c. dt'. \quad (3.42)$$

Una vez realizada la aproximación secular, abreviaremos más la ecuación (3.42) introduciendo la transformada de Fourier de la función de correlación del baño $r(t')$ sobre el intervalo $[0, \infty)$

$$\Gamma(\omega) := \int_0^\infty e^{-i\omega t'} r(t') dt'. \quad (3.43)$$

De esta manera, la ecuación (3.14) queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= \frac{1}{\hbar^2} \left([a^\dagger\bar{\rho}_t, a]\Gamma(\omega_0) + [a\bar{\rho}_t, a^\dagger]\Gamma(-\omega_0) \right. \\ &\quad \left. + [a^\dagger, \bar{\rho}_t a]\Gamma(\omega_0)^* + [a, \bar{\rho}_t a^\dagger]\Gamma(-\omega_0)^* \right) dt'. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Podemos observar que $\Gamma(\omega)^*$ es la transformación de Fourier de $r(t')$ sobre $(-\infty, 0)$. En efecto, como se tiene que

$$\Gamma(\omega)^* = \int_0^\infty e^{i\omega t'} r(t')^* dt', \quad (3.45)$$

por la observación 11 sabemos que $r(t')^* = r(-t')$, así que

$$\Gamma(\omega)^* = \int_0^\infty e^{i\omega t'} r(-t')^* dt', \quad (3.46)$$

luego si se hace el cambio $t' \rightarrow -t'$, obtenemos

$$\Gamma(\omega)^* = \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega t'} r(t')^* dt'. \quad (3.47)$$

Ahora bien, si a $\Gamma(\omega)$ la descomponemos de la forma

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{2}\gamma(\omega) + iS(\omega) \quad (3.48)$$

podemos dejar a (3.44) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= \frac{1}{2}\gamma(\omega)\left([a^\dagger\bar{\rho}_t, a] + [a^\dagger, \bar{\rho}_t a]\right) + \frac{1}{2}\gamma(-\omega)\left([a\bar{\rho}_t, a^\dagger] + [a, \bar{\rho}_t a^\dagger]\right) \\ &+ i\left\{S(\omega)\left([a^\dagger\bar{\rho}_t, a] - [a^\dagger, \bar{\rho}_t a]\right) + S(-\omega)\left([a\bar{\rho}_t, a^\dagger] - [a, \bar{\rho}_t a^\dagger]\right)\right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Generador infinitesimal

Ahora si desarrollamos los conmutadores de la expresión (3.49), se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= \gamma(\omega)\left(a^\dagger\bar{\rho}_t a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \bar{\rho}_t\}\right) + \gamma(-\omega)\left(a\bar{\rho}_t a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \bar{\rho}_t\}\right) \\ &+ -i\left\{S(\omega)[aa^\dagger, \bar{\rho}_t] + S(-\omega)[a^\dagger a, \bar{\rho}_t]\right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Recordemos que se cumple la identidad $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = \mathbb{I}$, de esta manera

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= \left\{\gamma(\omega)\left(a^\dagger\bar{\rho}_t a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \bar{\rho}_t\}\right) + \gamma(-\omega)\left(a\bar{\rho}_t a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \bar{\rho}_t\}\right)\right\} \\ &- i\left(S(\omega) + S(-\omega)\right)[a^\dagger a, \bar{\rho}_t]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

definiremos $\Delta := S(\omega) + S(-\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{\rho}_t &= \gamma(\omega)\left(a^\dagger\bar{\rho}_t a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \bar{\rho}_t\}\right) + \gamma(-\omega)\left(a\bar{\rho}_t a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \bar{\rho}_t\}\right) \\ &- i\Delta[a^\dagger a, \bar{\rho}_t], \end{aligned} \quad (3.52)$$

De esta última expresión definimos al operador de Lindblad $\bar{\mathcal{L}}$ bajo el cuadro de interacción, que actúa sobre $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S)$ como

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{\rho}_t) := \mathcal{D}(\bar{\rho}_t) - i[\delta H, \bar{\rho}_t], \quad (3.53)$$

donde los operadores $\bar{\mathcal{D}}$ y δH son respectivamente

$$\bar{\mathcal{D}}(\bar{\rho}_t) := \gamma(\omega)\left(a^\dagger\bar{\rho}_t a - \frac{1}{2}\{aa^\dagger, \bar{\rho}_t\}\right) + \gamma(-\omega)\left(a\bar{\rho}_t a^\dagger - \frac{1}{2}\{a^\dagger a, \bar{\rho}_t\}\right) \quad (3.54)$$

$$\delta H(\bar{\rho}_t) := \Delta a^\dagger a \bar{\rho}_t, \quad (3.55)$$

a (3.54) se le conoce como el operador de disipación y a (3.55) como el operador Hamiltoniano de Lamb Shift [6]. Luego de manera abreviada (3.52) se expresa como

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_t = \bar{\mathcal{L}}(\bar{\rho}_t). \quad (3.56)$$

De esta manera, el operador $\bar{\mathcal{L}}$ es un generador infinitesimal para el C_0 -semigrupo $(\bar{\Lambda}_t)_{t \geq 0}$, dado por

$$\bar{\rho}_t = \bar{\Lambda}_t(\bar{\rho}_0) \quad (3.57)$$

$$= e^{t\bar{\mathcal{L}}}(\bar{\rho}_0) \quad (3.58)$$

bajo el dominio denso [1]

$$D(\bar{\mathcal{L}}) := \left\{ \rho \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_S) : \exists s - \lim_{t \downarrow 0} \frac{\bar{\Lambda}_t(\rho) - \rho}{t} \right\}. \quad (3.59)$$

Semigrupo en el cuadro de Schrodinger

Recordemos que nos encontramos bajo el cuadro de interacción, así que si deseamos obtener al operador densidad (1.57) bajo el cuadro de Schrodinger, basta que observemos el mapeo $\bar{\rho}_t = \mathcal{U}_t(\rho_t) = U_t^{-1} \rho_t U_t \Leftrightarrow \rho_t = \mathcal{U}_t^{-1}(\bar{\rho}_t) = U_t \bar{\rho}_t U_t^{-1}$, así que el operador densidad bajo el cuadro de Schrodinger se expresa como

$$\rho_t = (\mathcal{U}_t^{-1} \circ \bar{\Lambda}_t)(\rho_0) \quad (3.60)$$

$$= (\mathcal{U}_t^{-1} \circ e^{t\bar{\mathcal{L}}})(\rho_0). \quad (3.61)$$

Entonces definiremos el semigrupo para el cuadro de Schrodinger como $(\Lambda_t := \mathcal{U}_t^{-1} \circ \bar{\Lambda}_t)_{t \geq 0}$.

Semigrupo en el cuadro de Heisenberg

Además podemos definir al semigrupo para el cuadro de Heisenberg por medio de la la función traza. Tomemos un observable $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, si calculamos su valor esperado a través del tiempo, se tendrá que

$$\begin{aligned} \langle O(t) \rangle &= \text{Tr}_S(O \Lambda_t(\rho_0)) \\ &= \text{Tr}_S \left(O (\mathcal{U}_t^{-1} \circ e^{t\bar{\mathcal{L}}})(\rho_0) \right) \\ &= \text{Tr}_S \left(O U_t e^{t\bar{\mathcal{L}}}(\rho_0) U_t^{-1} \right) \\ &= \text{Tr}_S \left(U_t^{-1} O U_t e^{t\bar{\mathcal{L}}}(\rho_0) \right) \\ &= \text{Tr}_S \left(\mathcal{U}_t(O) e^{t\bar{\mathcal{L}}}(\rho_0) \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Si aplicamos la forma de serie del operador exponencial $e^{t\bar{\mathcal{L}}}$ junto a la propiedad cíclica de la traza, es directo obtener que

$$\text{Tr}_S \left(\mathcal{U}_t(O) e^{t\bar{\mathcal{L}}}(\rho_0) \right) = \text{Tr}_S \left((e^{t\bar{\mathcal{L}}^*} \circ \mathcal{U}_t(O)) \rho_0 \right), \quad (3.63)$$

donde $\bar{\mathcal{L}}^*$ es el operador de Lindblad dual sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ que se define gracias a $\bar{\mathcal{L}}$ y a la propiedad cíclica de la traza, el cual tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^*(O) &= \gamma(\omega_0) \left(a O a^\dagger - \{a a^\dagger, O\} \right) + \gamma(-\omega_0) \left(a^\dagger O a - \{a^\dagger a, O\} \right) \\ &+ i\Delta[a^\dagger a, O]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Entonces de (3.62) con (3.63) resulta que

$$\langle O(t) \rangle = \text{Tr}_S \left((e^{t\bar{\mathcal{L}}^*} \circ \mathcal{U}_t(O)) \rho_0 \right) \quad (3.65)$$

Por lo cual, el semigrupo dual para los observables es de la forma $(\Lambda_t^* := e^{t\bar{\mathcal{L}}^*} \circ \mathcal{U}_t)_{t \geq 0}$.

3.1.2. Cálculo de las Tasas $\gamma(\omega)$ y $S(\omega)$

Ahora nos encargaremos de obtener una forma explicita para las tasas de disipación $\gamma(\omega)$ y de Lamb Shift $S(\omega)$. Lo que haremos sera ocupar la expresión (3.48). Recordemos que la función de correlación tiene la forma $r(t) = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho \bar{B}(t') \bar{B}(t' - t))$ y que $B = \sum_{i \in I} k_i^* b_i^\dagger + k_i b_i$. Este último operador en el cuadro de interacción queda como

$$\bar{B}(t) = \sum_{i \in J} k_i^* b_i^\dagger e^{i\omega_i t} + k_i b_i e^{-i\omega_i t}, \quad (3.66)$$

de esta manera, la función de correlación es

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{i,j \in J} k_i^* k_j^* e^{i\omega_i t'} e^{i\omega_j(t'-t)} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j^\dagger) + k_i k_j e^{-i\omega_i t'} e^{-i\omega_j(t'-t)} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i b_j) \\ &+ k_i k_j^* e^{-i\omega_i t'} e^{i\omega_j(t'-t)} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j) + k_i^* k_j e^{i\omega_i t'} e^{-i\omega_j(t'-t)} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i b_j^\dagger) \end{aligned} \quad (3.67)$$

El primer término de la serie se desvanece, ya que dada una base $\{\otimes |n_l\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle\}_{n_l \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}}$ sobre $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$, se tendrá

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j^\dagger) = \sum_{n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}_0} \langle n_1, n_2, \dots | \varrho b_i^\dagger b_j^\dagger | n_1, n_2, \dots \rangle, \quad (3.68)$$

recordemos que de (1.8) el operador densidad del ambiente ϱ tiene la forma

$$\varrho = \prod_{j \in J} e^{-\hbar\omega_j b_j^\dagger b_j / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_j / K_B T}),$$

así que remplazando esto en (3.68)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j^\dagger) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \langle n_1 | e^{-\hbar\omega_1 b_1^\dagger b_1 / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_1 / K_B T}) | n_1 \rangle \dots \\ &\dots \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} \langle n_i | e^{-\hbar\omega_i b_i^\dagger b_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}) b_i^\dagger | n_i \rangle \dots \\ &\dots \sum_{n_j \in \mathbb{N}_0} \langle n_j | e^{-\hbar\omega_j b_j^\dagger b_j / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_j / K_B T}) b_j^\dagger | n_j \rangle \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

Todas las sumas que no van acompañadas de los operadores b_i^\dagger y b_j^\dagger son iguales a 1, ya que corresponden a las trazas de los estados para el l -ésimo oscilador del ambiente. Mientras que las que están acompañadas de los operadores de creación son iguales a 0 (al aplicar dichos operadores, queda el producto interno de vectores ortogonales). El cálculo es análogo para la traza $\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i b_j)$. Por lo tanto,

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j^\dagger) = 0 = \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i b_j) \quad (3.70)$$

para todo $i, j \in J$. Sin embargo, el cálculo para el tercer (el cuarto resp.) término estará dividido en dos partes, uno para $i \neq j$ y $i = j$. En el primer caso vamos a tener que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_j) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \langle n_1 | e^{-\hbar\omega_1 b_1^\dagger b_1 / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_1 / K_B T}) | n_1 \rangle \dots \\ &\dots \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} \langle n_i | e^{-\hbar\omega_i b_i^\dagger b_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}) b_i^\dagger | n_i \rangle \dots \\ &\dots \sum_{n_j \in \mathbb{N}_0} \langle n_j | e^{-\hbar\omega_j b_j^\dagger b_j / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_j / K_B T}) b_j | n_j \rangle \dots, \end{aligned} \quad (3.71)$$

pero al igual que el primer y segundo término en (3.67), esta traza se desvanece por consecuencia de aplicar b_i^\dagger y b_j sobre los estados $|n_i\rangle$ y $|n_j\rangle$, quedando nuevamente el producto interno de vectores ortogonales. Por otro lado, para el caso $i = j$

$$\begin{aligned}\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_i) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{N}_0} \langle n_1 | e^{-\hbar\omega_1 b_1^\dagger b_1 / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_1 / K_B T}) | n_1 \rangle \dots \\ &\dots \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} \langle n_i | e^{-\hbar\omega_i b_i^\dagger b_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}) b_i^\dagger b_i | n_i \rangle \dots\end{aligned}\quad (3.72)$$

aunque recordemos que $b_i^\dagger b_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle$, por lo cual

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_i) = \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} \langle n_i | e^{-\hbar\omega_i b_i^\dagger b_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}) n_i | n_i \rangle, \quad (3.73)$$

además como $e^{-\hbar\omega_i b_i^\dagger b_i / K_B T} |n_i\rangle = e^{-n_i \hbar\omega_i / K_B T} |n_i\rangle$, entonces

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_i) = \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} n_i e^{-n_i \hbar\omega_i / K_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}). \quad (3.74)$$

Ahora bien, esta serie la podemos calcular notando que dada la serie geométrica

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1, \quad (3.75)$$

si esta es derivada con respecto a x nos queda

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (3.76)$$

y además si la amplificamos por x , resulta que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (3.77)$$

el cual es exactamente la forma de (3.75) al evaluar x en $e^{-\hbar\omega_i / K_B T}$, por lo tanto

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i^\dagger b_i) = \frac{e^{-\hbar\omega_i / K_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_i / K_B T}}. \quad (3.78)$$

A esta traza la denotaremos por $\bar{n}(\omega_i, T)$, ya que depende exclusivamente de la frecuencia de dicho oscilador y de la temperatura del ambiente. Análogamente para el cuarto término en (3.67), tendremos

$$\text{Tr}_{\mathcal{R}}(\varrho b_i b_i^\dagger) = \bar{n}(\omega_i, T) + 1. \quad (3.79)$$

Por lo tanto, la función de correlación $r(t)$ queda como

$$r(t) = \sum_{i \in J} |k_i|^2 e^{-i\omega_i t} \bar{n}(\omega_i, T) + |k_i|^2 e^{i\omega_i t} (\bar{n}(\omega_i, T) + 1). \quad (3.80)$$

El siguiente paso será introducir la densidad espectral [21]

$$J(\omega') := \sum_{i \in J} |k_i|^2 \delta(\omega' - \omega_i), \quad (3.81)$$

que nos permite convertir a (3.80) en una integral con respecto a las frecuencias ω del baño

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} J(\omega') \left(e^{-i\omega' t} \bar{n}(\omega', T) + e^{i\omega' t} (\bar{n}(\omega', T) + 1) \right) d\omega', \quad (3.82)$$

además si dichas oscilaciones ocurren con una densidad de estados $g(\omega)$ tal que $g(\omega') d\omega'$ represente el número de oscilaciones con frecuencia entre $\omega' + d\omega'$ [7], la integral (3.82) se convierte en

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} g(\omega') |k(\omega')|^2 \left(e^{-i\omega' t} \bar{n}(\omega', T) + e^{i\omega' t} (\bar{n}(\omega', T) + 1) \right) d\omega', \quad (3.83)$$

así la función $\Gamma(\omega)$ se transforma en

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} g(\omega') |k(\omega')|^2 \left(e^{-i\omega' t} \bar{n}(\omega', T) + e^{i\omega' t} (\bar{n}(\omega', T) + 1) \right) d\omega' dt, \quad (3.84)$$

ahora reagrupando la parte temporal de la integral, nos queda

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} g(\omega') |k(\omega')|^2 \left\{ \bar{n}(\omega', T) \int_0^{+\infty} e^{-i(\omega+\omega')t} dt \right. \\ &\quad \left. + (\bar{n}(\omega', T) + 1) \int_0^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} dt \right\} d\omega'. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Las únicas componentes dependientes del tiempo son los exponenciales, por lo cual podemos aplicar la identidad [7]

$$\int_0^{+\infty} e^{-iut} dt = \pi \delta(u) - i \frac{P}{u} \quad (3.86)$$

donde P es el valor principal de Cauchy [15] y $u \in \{\omega \pm \omega' : \omega \in \{\pm\omega_0\}\}$. Así que aplicando (3.86) en (3.85)

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \pi g(-\omega) |k(-\omega)|^2 \bar{n}(-\omega, T) - iP \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega') |k(\omega')|^2}{\omega + \omega'} \bar{n}(\omega', T) d\omega' \\ &\quad + \pi g(\omega) |k(\omega)|^2 (\bar{n}(\omega, T) + 1) - iP \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega') |k(\omega')|^2}{\omega - \omega'} (\bar{n}(\omega', T) + 1) d\omega'. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ahora bien, como dijimos en un comienzo, para calcular $\gamma(\omega)$ y $S(\omega)$, ocuparemos la identidad (3.48), es decir,

$$\gamma(\omega) = \Gamma(\omega) + \Gamma(\omega)^* \quad (3.88)$$

y

$$S(\omega) = \frac{1}{2i} \left(\Gamma(\omega) - \Gamma(\omega)^* \right), \quad (3.89)$$

por lo cual, la tasa de disipación $\gamma(\omega)$ queda como

$$\gamma(\omega) = 2\pi \left(g(-\omega) |k(-\omega)|^2 \bar{n}(-\omega, T) + g(\omega) |k(\omega)|^2 (\bar{n}(\omega, T) + 1) \right), \quad (3.90)$$

y la tasa que acompaña al Hamiltoniano de Lamb-Shift

$$S(\omega) = P \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega') |k(\omega')|^2}{\omega' - \omega} (\bar{n}(\omega', T) + 1) d\omega' - P \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega') |k(\omega')|^2}{\omega + \omega'} \bar{n}(\omega', T) d\omega' \quad (3.91)$$

Así que si necesitamos calcular estas tasas, basta con que tengamos una densidad de estados $g(\omega)$ del número de frecuencias de los osciladores del ambiente.

3.2. Solución para los operadores a , a^\dagger y \hat{N}

Ahora que conocemos la forma de nuestro semigrupo Λ_t^\star para nuestro sistema de interés. Lo siguiente será obtener expresiones para los operadores de creación, aniquilación y número a través del tiempo. Para eso estudiaremos el comportamiento del semigrupo sobre el operador de desplazamiento, ya que nos servirá como generador de la dinámica del operador $a^{\dagger j} a^k$ para todo $j, k \in \mathbb{N}_0$.

3.2.1. Evolución de \mathcal{D}_z en el cuadro de interacción

Al aplicar el semigrupo dual bajo el cuadro de interacción $\bar{\Lambda}_t^\star$ al operador \mathcal{D}_z , esperamos que este nos entregue un nuevo operador desplazamiento acompañado de una fase. Es por eso que introducimos dos funciones diferenciables $h, z : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\bar{\Lambda}_t^\star(\mathcal{D}_z) = h(t)\mathcal{D}_{z(t)}, \quad z(0) = z, \quad h(0) = 1. \quad (3.92)$$

Como el semigrupo dual satisface la ecuación diferencial [17][23]

$$\frac{d}{dt}\bar{\Lambda}_t^\star(\mathcal{D}_z) = (\bar{\mathcal{L}}^\star \circ \bar{\Lambda}_t^\star)(\mathcal{D}_z), \quad (3.93)$$

entonces al remplazar (3.92) en (3.93) vamos a obtener por el lado derecho

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{L}}^\star \circ \bar{\Lambda}_t^\star)(\mathcal{D}_z) &= h(t)\bar{\mathcal{L}}^\star(\mathcal{D}_{z(t)}) \\ &= h(t)\gamma_+ \left(a\mathcal{D}_{z(t)}a^\dagger - \frac{1}{2}aa^\dagger\mathcal{D}_{z(t)} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{z(t)}aa^\dagger \right) + h(t)\gamma_- \left(a^\dagger\mathcal{D}_{z(t)}a \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}a^\dagger a\mathcal{D}_{z(t)} - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{z(t)}a^\dagger a \right) + i\Delta h(t)(a^\dagger a\mathcal{D}_{z(t)} - \mathcal{D}_{z(t)}a^\dagger a), \end{aligned} \quad (3.94)$$

donde $\gamma_\pm := \gamma(\pm\omega_0)$ son las tasas de absorción y disipación respectivamente. Ahora bien, ocupando las propiedades $\mathcal{D}_{z(t)}^\dagger \mathcal{D}_{z(t)} = \mathbb{I}_S$ y $\mathcal{D}_{z(t)}a\mathcal{D}_{z(t)}^{-1} = a - z(t)$ sobre (3.94), nos queda

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{L}}^\star \circ \bar{\Lambda}_t^\star)(\mathcal{D}_z) &= h(t)\gamma_+ \left(a(a^\dagger - z(t)^\star) - \frac{1}{2}aa^\dagger - \frac{1}{2}(a - z(t))(a^\dagger - z(t)^\star) \right) \mathcal{D}_{z(t)} \\ &\quad + h(t)\gamma_- \left(a^\dagger(a - z(t)) - \frac{1}{2}a^\dagger a - \frac{1}{2}(a^\dagger - z(t)^\star)(a - z(t)) \right) \mathcal{D}_{z(t)} \\ &\quad + i\Delta h(t) \left(a^\dagger a - (a^\dagger - z(t)^\star)(a - z(t)) \right) \mathcal{D}_{z(t)}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

luego reagrupando

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{L}}^\star \circ \bar{\Lambda}_t^\star)(\mathcal{D}_z) &= h(t)z(t)^\star \left(i\Delta - \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-) \right) a\mathcal{D}_{z(t)} \\ &\quad + h(t)z(t) \left(i\Delta + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-) \right) a^\dagger \mathcal{D}_{z(t)} \\ &\quad - h(t)|z(t)|^2 \left(i\Delta + \frac{1}{2}(\gamma_+ + \gamma_-) \right) \mathcal{D}_{z(t)}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

En cuanto al lado izquierdo de (3.93)

$$\frac{d}{dt}\bar{\Lambda}_t^\star(\mathcal{D}_z) = \dot{h}(t)\mathcal{D}_{z(t)} + h(t)\frac{d}{dt}\mathcal{D}_{z(t)}, \quad (3.97)$$

recordemos que la derivada temporal de $\mathcal{D}_{z(t)}$ la calculamos en (2.27), así que remplazando dicha expresion para un desplazamiento $z(t)$ en (3.97)

$$\frac{d}{dt}\bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) = \left(\dot{h}(t) + \frac{1}{2}(\dot{z}(t)^*z(t) - \dot{z}(t)z(t)^*)\right)\mathcal{D}_{z(t)} + \dot{z}(t)a^\dagger\mathcal{D}_{z(t)} - \dot{z}(t)^*a\mathcal{D}_{z(t)}, \quad (3.98)$$

así que al igualar las expresiones (3.96) y (3.98) obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$\dot{h}(t) = -\frac{1}{2}h(t)|z(t)|^2(\gamma_+ + \gamma_-) \quad (3.99)$$

$$\dot{z}(t) = z(t)\left(\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-) + i\Delta\right). \quad (3.100)$$

La solución de la ecuación diferencial (3.100) es directa por el método de separación de variable:

$$z(t) = ze^{\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-)t}e^{i\Delta t}, \quad (3.101)$$

así que al remplazar esta solución en (3.103) se obtiene

$$h(t) = \exp\left\{\frac{|z|^2}{2}\left(\frac{\gamma_+ + \gamma_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\right)\left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t}\right)\right\}. \quad (3.102)$$

Por lo tanto, la evolución del operador desplazamiento (3.97) viene dada por

$$\bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) = \exp\left\{\frac{|z|^2}{2}\left(\frac{\gamma_+ + \gamma_-}{\gamma_+ - \gamma_-}\right)\left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t}\right)\right\}\mathcal{D}_{(ze^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2}e^{i\Delta t})}. \quad (3.103)$$

3.2.2. $\bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z)$ como generador de $a^{\dagger j}a^l$ en el tiempo

Si al operador de evolución se le ve como una función parametrizada en el tiempo bajo un dominio de dos variables en \mathbb{C}^2 , donde la primera componente es $z(t)$ y la segunda $z(t)^*$. De acuerdo a la proposición 10, es posible derivarlo parcialmente con respecto a z o z^* como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_z = \left(a^\dagger - \frac{z^*}{2}\right)\mathcal{D}_z \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\mathcal{D}_z = \left(\frac{z}{2} - a\right)\mathcal{D}_z, \quad (3.105)$$

evaluando en el origen del plano complejo se tendrá que

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_z\Big|_{z=0} = a^\dagger, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\mathcal{D}_z\Big|_{z=0} = -a, \quad (3.107)$$

es decir, es posible obtener los operadores de creación y destrucción a través del operador desplazamiento. Ahora bien, si derivamos con respecto a z^* a la expresión (3.104) y evaluamos nuevamente en el origen, resultará que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^*\partial z}\mathcal{D}_z\Big|_{z=0} = -\left(\frac{1}{2}\mathbb{I} + a^\dagger a\right). \quad (3.108)$$

Por lo tanto, también es posible obtener al operador número $\hat{N} = a^\dagger a$ por medio del operador desplazamiento. Ahora ocuparemos esta propiedad para calcular la evolución temporal de los operadores a , a^\dagger y \hat{N} , de acuerdo a este sistema forzado y abierto, aunque en principio podemos ser capaz de calcular la evolución de todos los operadores $\{a^{\dagger j}a^l\}_{j,l \in \mathbb{N}_0}$ por medio de este método.

Operador de aniquilación y creación

Ahora estudiemos la evolución del operador de aniquilación a sobre el cuadro de Heisenberg. Recordemos que el semigrupo dual sobre este cuadro viene dado por $\Lambda_t^* = \bar{\Lambda}_t^* \circ \bar{\mathcal{U}}_t$, así que primero apliquemos $\bar{\mathcal{U}}_t$ sobre a :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{U}}_t(a) &= U_t^{-1} a U_t \\
&= \mathcal{D}_{\alpha_0} e^{iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha(t)}^{-1} a \mathcal{D}_{\alpha(t)} e^{-iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \\
&= \mathcal{D}_{\alpha_0} e^{iHt/\hbar} (a + \alpha(t)) e^{-iHt/\hbar} \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \\
&= \mathcal{D}_{\alpha_0} (a e^{-i\omega_0 t} + \alpha(t)) \mathcal{D}_{\alpha_0}^{-1} \\
&= a e^{-i\omega_0 t} + \left(\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} \right) \mathbb{I}.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Ahora aplicamos $\bar{\Lambda}_t^*$ a (3.113)

$$(\bar{\Lambda}_t^* \circ \bar{\mathcal{U}}_t)(a) = \bar{\Lambda}_t^*(a) e^{-i\omega_0 t} + \left(\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} \right) \bar{\Lambda}_t^*(\mathbb{I}), \tag{3.110}$$

pero es directo que $\bar{\Lambda}_t^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$. Con respecto a $\bar{\Lambda}_t^*(a)$, aplicaremos el semigrupo $\bar{\Lambda}_t^*$ a la igualdad (3.111) como sigue

$$\bar{\Lambda}_t^*(a) = -\bar{\Lambda}_t^* \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \mathcal{D}_z \Big|_{z=0} \right), \tag{3.111}$$

ocuparemos el hecho de que

$$\bar{\Lambda}_t^* \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \mathcal{D}_z \right) = \frac{\partial}{\partial z^*} \bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z), \tag{3.112}$$

ya que el semigrupo es una función continua [17], así que

$$\bar{\Lambda}_t^*(a) = -\frac{\partial}{\partial z^*} \bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) \Big|_{z=0}. \tag{3.113}$$

Ahora bien, como sabemos que $\bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z)$ tiene la forma (3.107), solo tenemos que derivar dicha expresión con respecto a z^* y luego evaluar en el origen del plano complejo. Así que

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) \Big|_{z=0} = e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2} e^{-i\Delta t} a, \tag{3.114}$$

ahora remplazando en (3.114), obtendremos la evolución $a(t)$ del operador de aniquilación en el tiempo:

$$a(t) = a e^{\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-)t} e^{-i\omega'_0 t} + \left(\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} \right) \mathbb{I}, \tag{3.115}$$

donde $\omega'_0 = \Delta + \omega$. Por lo tanto, el valor esperado de $a(t)$ será

$$\langle a(t) \rangle = \langle a \rangle e^{\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-)t} e^{-i\omega'_0 t} + \left(\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t} \right). \tag{3.116}$$

Análogamente se tendrá que la evolución para el operador de creación será

$$a^\dagger(t) = a^\dagger e^{\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-)t} e^{i\omega'_0 t} + \left(\alpha(t)^* - \alpha_0^* e^{i\omega_0 t} \right) \mathbb{I}, \tag{3.117}$$

por lo cual, su valor esperado es

$$\langle a^\dagger(t) \rangle = \langle a^\dagger \rangle e^{\frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_-)t} e^{i\omega'_0 t} + \left(\alpha(t)^* - \alpha_0^* e^{i\omega_0 t} \right). \tag{3.118}$$

Operador número

Vamos a proceder de igual manera que para el caso anterior. Primero calcularemos al operador \hat{N} en el cuadro de Heisenberg:

$$\bar{\mathcal{U}}_t(\hat{N}) = U_t^{-1} a^\dagger a U_t. \quad (3.119)$$

pero recordemos que $U_t U_t^{-1} = \mathbb{I}$ y por (3.113)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_t(\hat{N}) &= U_t^{-1} a^\dagger U_t U_t^{-1} a U_t \\ &= a^\dagger a + a^\dagger \left(\alpha(t) e^{i\omega_0 t} - \alpha_0 \right) + a \left(\alpha(t)^* e^{-i\omega_0 t} - \alpha_0^* \right) \\ &\quad + |\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t}|^2 \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Entonces aplicar el semigrupo sobre \hat{N} queda como

$$\begin{aligned} \Lambda_t^*(\hat{N}) &= \bar{\Lambda}_t^*(a^\dagger a) + \bar{\Lambda}_t^*(a^\dagger) \left(\alpha(t) e^{i\omega_0 t} - \alpha_0 \right) + \bar{\Lambda}_t^*(a) \left(\alpha(t)^* e^{-i\omega_0 t} - \alpha_0^* \right) \\ &\quad + |\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t}|^2 \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Si aplicamos $\bar{\Lambda}_t^*$ a la igualdad (3.112), tendremos que

$$\bar{\Lambda}_t^*(a^\dagger a) = - \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + \frac{\partial^2}{\partial z^* \partial z} \bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) \Big|_{z=0} \right), \quad (3.122)$$

donde la segunda expresión se obtiene fácilmente de (3.107)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^* \partial z} \bar{\Lambda}_t^*(\mathcal{D}_z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_+ + \gamma_-}{\gamma_+ - \gamma_-} \right) \left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \right) - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \left(\frac{1}{2} \mathbb{I} + a^\dagger a \right), \quad (3.123)$$

así (3.127) queda como

$$\bar{\Lambda}_t^*(a^\dagger a) = e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} a^\dagger a - \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_+ - \gamma_-} \right) \left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \right). \quad (3.124)$$

Con esto $\Lambda_t^*(\hat{N})$ queda como

$$\begin{aligned} \hat{N}(t) &= a^\dagger a e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} + a^\dagger \left(\alpha(t) e^{i\omega'_0 t} - \alpha_0 e^{i\Delta t} \right) e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2} \\ &\quad + a \left(\alpha(t)^* e^{-i\omega'_0 t} - \alpha_0^* e^{-i\Delta t} \right) e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2} \\ &\quad + \left\{ |\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t}|^2 - \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_+ - \gamma_-} \right) \left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \right) \right\} \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (3.125)$$

por lo tanto, su valor esperado es

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}(t) \rangle &= \langle a^\dagger a \rangle e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} + \langle a^\dagger \rangle \left(\alpha(t) e^{i\omega'_0 t} - \alpha_0 e^{i\Delta t} \right) e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2} \\ &\quad + \langle a \rangle \left(\alpha(t)^* e^{-i\omega'_0 t} - \alpha_0^* e^{-i\Delta t} \right) e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t/2} \\ &\quad + \left\{ |\alpha(t) - \alpha_0 e^{-i\omega_0 t}|^2 - \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_+ - \gamma_-} \right) \left(1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

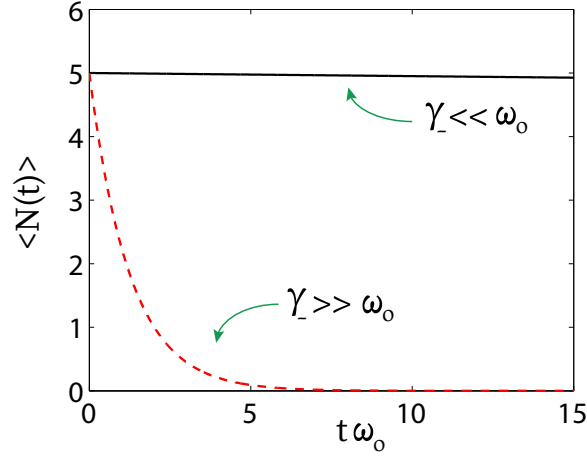


Figura 3.1: La linea segmentada roja corresponde a una tasa de disipación alta en comparación a la frecuencia de oscilación del sistema de estudio; el numero de excitaciones decrece rápidamente en el tiempo. Mientras que la linea negra corresponde a una baja tasa de disipación; el numero de excitaciones se mantiene prácticamente igual al del inicio.

Si nos detenemos a observar el comportamiento del número de excitaciones bajo este sistema, vamos a tener en grandes rasgos dos casos; sin y con un forzamiento externo periódico, es decir, $A = 0$ y $A > 0$ respectivamente. Bajo el primer caso, es posible subdividirlo nuevamente en dos nuevos casos; uno en el que tenemos un amortiguamiento fuerte y débil del ambiente al sistema, i.e., $\gamma_- \gg \omega_0$ y $\gamma_- \ll \omega_0$ respectivamente. Ilustrando este caso bajo un estado inicial con n excitaciones, es decir, $\rho_0 = |n\rangle\langle n|$ y con una tasa de absorción muy por debajo de la tasa de disipación, es decir, $0 < \gamma_+ \ll \gamma_-$; como es de esperar, el decrecimiento será rápido en el tiempo, liberando todas las excitaciones al ambiente, mientras que en el segundo subcaso, como es de esperar, dichas excitaciones se mantienen prácticamente constantes bajo la misma cantidad de tiempo. Este comportamiento puede ser observado en la Figura 3.1.

Ahora bien, para el caso en el que el forzamiento se hace presente, vamos a subdividir este en cuatro casos, el primero y segundo constaran de frecuencias en resonancia, aunque la amplitud del forzamiento será fuerte y débil respectivamente en comparación a la tasa de disipación, en otras palabras, $\Omega = \omega_0$ con $\gamma_- \ll A$ o $\gamma_- \gg A$. Mientras que el tercero y cuarto será similar a los dos anteriores, solo que nos encontraremos fuera de resonancia, es decir, $\Omega \gg \omega_0$ con $\gamma_- \ll A$ o $\gamma_- \gg A$. En los dos primeros notamos que el comportamiento es el mismo, es decir, el sistema absorbe energía sin mayores problema, aunque el primer caso es mucho mas efectivo dicho forzamiento, ya que el numero de excitaciones es mayor bajo el mismo tiempo. Por otro lado, para el tercer y cuarto subcaso, se tendrá en un principio un crecimiento en el número de excitaciones, para luego alcanzar un cuasi-equilibrio, es decir, este oscilará bajo un punto de equilibrio, sin embargo, la diferencia entre estos es que el tercero tendrá un punto de equilibrio mayor al cuarto. Para una mayor ilustración de estos, observar las Figuras 3.2 a) y b) respectivamente.

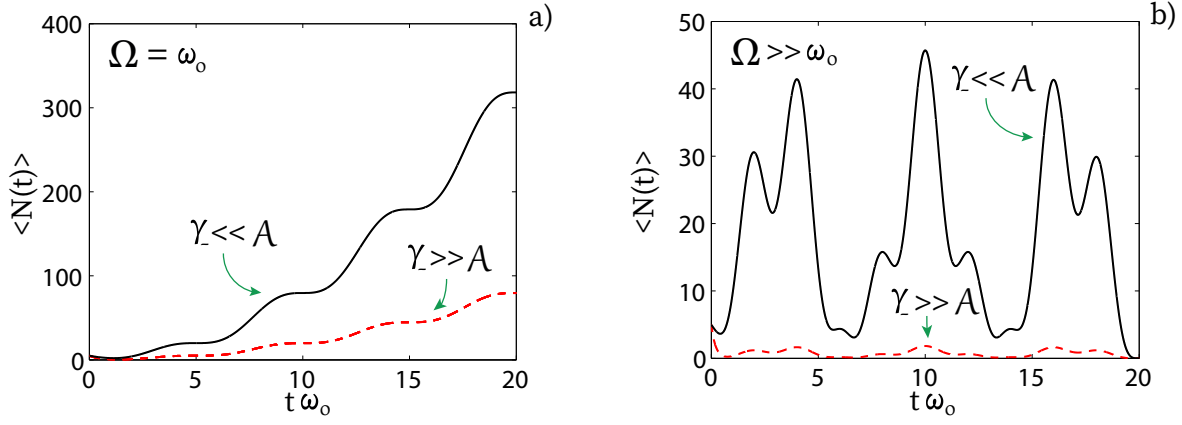


Figura 3.2: En la figura a) nos encontramos bajo el caso resonante. El número de excitaciones es creciente a lo largo del tiempo, solo que la curva segmentada roja es mas lenta. En cambio, en la Figura b) las curvas oscilan; obteniendo un crecimiento y decrecimiento de tales excitaciones del sistema

Cota sobre el valor esperado de $\hat{N}(t)$

Ahora bien, si nos detenemos a observar el valor esperado en el tiempo del operador $\hat{N}(t)$, para la condición inicial $\rho_0 = |n\rangle\langle n|$ y suponiendo que la tasa de disipación es mayor a la de absorción, i.e., $\gamma_+ < \gamma_-$. Es posible obtener una cota, por medio de la desigualdad (2.58) para la función de desplazamiento obtenida en el capítulo 2. En efecto, notemos primero que $\langle a \rangle = 0 = \langle a^\dagger \rangle$, por causa de la condición inicial, entonces

$$|\langle \hat{N}(t) \rangle| \leq |\langle a^\dagger a \rangle| e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} + |\alpha(t)|^2 + \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_- - \gamma_+} \right) |1 - e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t}|, \quad (3.127)$$

notemos que $e^{(\gamma_+ - \gamma_-)t} \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que

$$|\langle \hat{N}(t) \rangle| \leq |\langle a^\dagger a \rangle| + |\alpha(t)|^2 + 2 \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_- - \gamma_+} \right). \quad (3.128)$$

En este caso, vamos a tener que $\langle a^\dagger a \rangle = n$, es decir, es el número inicial de excitaciones del sistema, por lo que

$$|\langle \hat{N}(t) \rangle| \leq n + |\alpha(t)|^2 + 2 \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_- - \gamma_+} \right). \quad (3.129)$$

Por lo tanto, mientras la función de desplazamiento $\alpha(t)$ se encuentre acotada, el número de excitaciones lo estará. Pero si nos vamos al caso en resonancia, vamos a tener que

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} |\langle \hat{N}(t) \rangle| \leq n + |\alpha_r(t)|^2 + 2 \left(\frac{\gamma_+}{\gamma_- - \gamma_+} \right), \quad (3.130)$$

por lo cual, se tendrá que $\langle \hat{N}(t) \rangle$ crece sin problemas a través del tiempo, aunque a medida que la tasa de disipación aumente, dicho crecimiento es mucho más lento; esta situación se logra apreciar en la Figura 3.2, al comparar la curva de línea segmentada roja con la curva negra.

Conclusión

Del trabajo realizado en estos capítulos, es posible extraer bastante información en cuanto a la resolución de las ecuaciones diferenciales involucradas, de las propias soluciones y de la información física involucrada. En cuanto al capítulo 2:

- Primero hay que hacer notar que el método algebraico para resolver la ecuación de Schrodinger por medio del operador desplazamiento, para un oscilador armónico bajo un control externo, a sido bastante adecuado. Ya que ha sido posible solucionar dicha ecuación para cualquier forzamiento proporcional a los operadores de aniquilación y creación; reduciendo el problema a resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas, impuesta a la función de desplazamiento.
- Una vez definido los términos asociados al forzamiento. Notamos que las condiciones iniciales del sistema están íntimamente relacionadas a las condiciones iniciales de la función de desplazamiento.
- A pesar de trabajar con un Hamiltoniano periódico, no es posible obtener siempre una representación de Floquet, por lo cual el teorema de Floquet bajo nuestro sistema, no precisa ser la mejor herramienta para estudiar su dinámica. Aunque hemos encontrado condiciones suficientes para que tal representación exista; y estas vienen dadas por la periodicidad de la función de desplazamiento.
- Juntando los dos puntos anteriores, la existencia de la representación de Floquet estará ligada a las condiciones iniciales del sistema, ya que solo bajo ciertos casos podremos obtener una curva de desplazamiento periódica en el tiempo.
- En el caso para el cual el sistema se encuentre inicialmente con una cantidad arbitraria de excitaciones, el forzamiento bajo resonancia funciona bastante bien, ya que tal número de excitaciones aumenta en el tiempo, aunque esto no nos dice realmente que tan efectivo será dicho forzamiento; de la información extraído del capítulo 3, se podrá realizar una conclusión más determinante.
- Bajo el caso sin resonancia, es posible acotar la imagen de la función de desplazamiento a lo largo del tiempo. Esto lo traducimos en una cota superior en el número de excitaciones.
- En el caso resonante, este conjunto que acota a la imagen de la función desplazamiento se agranda hasta alcanzar al plano complejo \mathbb{C} , por lo cual, el número de excitaciones no cesaría en el tiempo.
- Cuando trabajamos al operador de evolución en frecuencias del forzamiento racionalmente proporcionales a la frecuencia natural. Podemos dejar a la función desplazamiento como una función periódica, por lo cual, es posible obtener una representación

de Floquet. Con esto podemos estudiar de manera indirecta la energía del sistema, por medio de las cuasi-energías del Hamiltoniano de Floquet; además estas nos dicen que ya sea en resonancia o en un aumento de la amplitud del forzamiento, aumentaran, alejándose de la energía inicial del sistema.

En síntesis, bajo un sistema cerrado junto a un control externo. El forzamiento se muestra bastante eficiente a la hora de querer mantener o aumentar las excitaciones iniciales, lo cual implica un aumento en la energía del sistema. Esto de antemano, nos dice que cuando abramos el sistema a un ambiente que absorba su energía, este control periódico debería ser en principio bastante efectivo. Ahora obtengamos las conclusiones del capítulo 3, para determinar realmente la eficiencia de este control:

- El tener un Hamiltoniano dependiente del tiempo no fue un impedimento para obtener un generador infinitesimal para el semigrupo.
- Gracias a la obtención de una forma explícita para el operador desplazamiento a medida que transcurre el tiempo en este sistema abierto, es decir, a la hora de aplicar el semigrupo a dicho operador. Es posible obtener formas explícitas para los operadores de creación, aniquilación y número en el cuadro de Heisenberg.
- De acuerdo a lo anterior, el operador de desplazamiento nos permitió estudiar la dinámica de las excitaciones del sistema abierto.
- Para el caso en resonancia, podemos notar que a pesar de que la tasa de disipación sea superior a la amplitud del forzamiento, es posible aumentar el número de excitaciones, aunque mucho más lento en el tiempo, a diferencia de una amplitud superior a la tasa de disipación.
- Para el caso fuera de resonancia, es posible aumentar el número de excitaciones en un cierto periodo de tiempo, pero también existirá un posterior. Además dichos aumentos y reducciones de las excitaciones serán más bruscas en el tiempo, para el caso en el que la amplitud del forzamiento es mucho mayor a la tasa de disipación.
- Bajo este mismo caso sin resonancia, es posible obtener una cota superior para todo tiempo, con respecto a número máximo de excitaciones que puede llegar a tener el sistema.
- Independiente del forzamiento que vayamos a desear aplicar al sistema, no es posible controlar la tasa de disipación. Por lo cual, queda trabajo en cuanto a que otro tipo de forzamientos serían posibles realizar tal hazaña. En otras palabras, no basta con un forzamiento proporcional a los operadores de creación y aniquilación en el operador Hamiltoniano, para poder controlar que tanta información se podrá liberar al ambiente.

En conclusión, podemos estar seguros que bajo el forzamiento tratado, es posible controlar suficientemente bien al sistema, a pesar de encontrarnos bajo una disipación constante al baño térmico. Ya que si las frecuencias del forzamiento y la natural del sistema se encuentran en resonancia, podemos igualar o aumentar las excitaciones. Por otro lado, hay que tener bastante cuidado a la hora de querer aplicar el teorema de Floquet, por lo cual, hay que procurar estudiar de antemano el espacio de Hilbert asociado al sistema de interés. Además aunque no pueda ser aplicado dicho teorema, no implica que no podamos obtener tal representación.

En cuanto a preguntas abiertas, nos queda saber bajo que forzamientos, es posible obtener un control sobre la tasa de disipación; una posible respuesta podría ser encontrada agregando términos periódicos proporcionales a $a^\dagger a$, aa^\dagger , $a^2 a^2$ o a $a^{\dagger 2} a^{\dagger 2}$, aunque existe la posibilidad de que tengan que ser de orden superior. Por otro lado, cabe saber cuales son las condiciones necesarias y suficientes para que la representación de Floquet exista en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

Bibliografía

- [1] ANDROULAKIS, G., AND ZIEMKE, M. Generators of quantum markov semigroups. *Journal of Mathematical Physics* 56, 8 (2015), 083512.
- [2] ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 26, 151 (1913), 1–25.
- [4] BORN, M., HEISENBERG, W., AND JORDAN, P. Zur quantenmechanik. ii. *Zeitschrift für Physik* 35, 8-9 (1926), 557–615.
- [5] BORN, M., AND JORDAN, P. Zur quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik* 34, 1 (1925), 858–888.
- [6] BREUER, H.-P., PETRUCCIONE, F., ET AL. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [7] CARMICHAEL, H. J. Statistical methods in quantum optics 1: Master equations and fokker-planck equations (theoretical and mathematical physics), 2003.
- [8] CHICONE, C. *Ordinary differential equations with applications*, vol. 34. Springer Science & Business Media, 2006.
- [9] GERRY, C., KNIGHT, P., AND KNIGHT, P. L. *Introductory quantum optics*. Cambridge university press, 2005.
- [10] GRIFFITHS, D. J., AND SCHROETER, D. F. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [11] GRIFONI, M., AND HÄNGGI, P. Driven quantum tunneling. *Physics Reports* 304, 5-6 (1998), 229–354.
- [12] HALL, B. C. *Quantum theory for mathematicians*, vol. 267. Springer, 2013.
- [13] HUSIMI, K. Miscellanea in elementary quantum mechanics, ii. *Progress of Theoretical Physics* 9, 4 (1953), 381–402.
- [14] JØRGENSEN, M. A. Driven problems in quantum and classical mechanics with floquet theory. *Signature* (2015).
- [15] KANWAL, R. P. *Linear integral equations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics* 48, 2 (1976), 119–130.

- [17] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] PLANCK, M. *The theory of heat radiation*. Courier Corporation, 2013.
- [19] RUTHERFORD, E. Lxxix. the scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 21, 125 (1911), 669–688.
- [20] SAKURAI, J. J., NAPOLITANO, J., ET AL. *Modern quantum mechanics*. Pearson, 2014.
- [21] SCHALLER, G., AND BRANDES, T. Preservation of positivity by dynamical coarse graining. *Physical Review A* 78, 2 (2008), 022106.
- [22] SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical review* 28, 6 (1926), 1049.
- [23] SZCZYGIELSKI, K. On the application of floquet theorem in development of time-dependent lindbladians. *Journal of Mathematical Physics* 55, 8 (2014), 083506.
- [24] TAKHTADZHIAN, L. A. *Quantum mechanics for mathematicians*, vol. 95. American Mathematical Soc., 2008.
- [25] THOMSON, J. J. Xxiv. on the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 7, 39 (1904), 237–265.