Tutoriat 1 - Arhitectura sistemelor de calcul

Stan Bianca-Mihaela, Stăncioiu Silviu

Contents

1 [IMPORTANT]Transformarea din baza 10 in baza b

1.1 Nr. intregi

Cum se face transformarea lui x din baza 10 in baza b?

- impart x cu rest la b (x : b= c1 rest r1)
- impart c_1 cu rest la b (c1 : b = c2 rest r2)
- impart c_2 cu rest la b (c2 : b = c3 rest r3) . . .
- impart c_n cu rest la b ($c_n : b = c_{n+1}$ rest r_{n+1}) si $c_{n+1} = 0$
- numarul x in baza b va fi concatenarea: $r_{n+1}r_n...r_1$

Exemplul 1: $(7954)_{16} = ?$

7954 : 16 = 497 rest 2
497 : 16 = 31 rest 1
31 : 16 = 1 rest 15

1 : 16 = 0 rest 1 => aici ne oprim

Luam resturile obtinute in ordine inversa: 1, 15, 1, 2.
Totusi, nu putem sa concatenam numerele direct. De ce? Concatenarea lor ar fi 1512. Dar cum stim ca numarul a fost obtinut prin concatenarea 1, 15, 1, 2 si nu prin concatenarea 1, 1, 5, 1, 2? Ca sa putem face diferenta, numerele de la 10 la 15, in baza 16, vor fi reprezentate prin literele de la A la F, asa cum se vede si in tabelul de mai jos:

Binary Base-2	Decimal Base-10	Hexa-Decimal Base-16	Octal Base-8	BCD Code	Gray Code
0000	0	0	0	0	0000
0001	1	1	1	1	0001
0010	2	2	2	2	0011
0011	3	3	3	3	0010
0100	4	4	4	4	0110
0101	5	5	5	5	0111
0110	6	6	6	6	0101
0111	7	7	7	7	0100
1000	8	8	10	8	1100
1001	9	9	11	9	1101
1010	10	A	12	---	1111
1011	11	B	13	---	1110
1100	12	C	14	---	1010
1101	13	D	15	---	1011
1110	14	E	16	---	1001
1111	15	F	17	---	1000

Deci noi vom concatena numerele 1, F, 1 si 2.
=> $(7954)_{16} = \overline{1F12}$

Exemplul 2: $(243)_2 = ?$
Pentru transformarea in baza 2 putem sa facem o mica "optimizare" in calcul. Scriem x | 1 daca x e impar si x | 0 daca x e par.
243 | 1 , pe linia urmatoare vom scrie catul lui 243 la impartirea cu 2
121 | 1
60 | 0
30 | 0
15 | 1
7 | 1
3 | 1
1 | 1
0 - am ajuns la 0 deci ne oprim
Retineti! sensul de parcurgere a resturilor este de **jos** in **sus**

Urmatorul pas este sa luam toate resturile in ordine inversa: 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1.
=> $(243)_2 = \overline{11110011}$ Exercitii Sa se transforme:

- 712 in baza 5
- 9934 in baza 2
- 721 in baza 8
- 6290 in baza 16

1.2 Fractii

La ce ne referim prin fractie: numere cu virgula (pot sa aiba si perioada). Cum facem conversia din baza 10 in baza b pentru o fractie?

- Pentru partea intreaga a numarului, transformarea se face fix ca ala numere intregi (ex: pentru 167,89(3) transformam 167 in baza b ca la numere intregi, punem virgula si separat facem transformarea pentru ce e dupa virgula)
- Pentru partea fractionara, avem: perioada si neperioada.
  Mai intai transformam in fractie:
  - la numarator punem: partea fractionara minus neperioada

- la numitor punem: atati de 9 cate cifre are perioada, urmati de atati de 0 cate cifre are neperioada

Ca sa fie mai usor de inteles procesul vom lua:
Exemplul 1 : Transformati 18,4(8) din baza 10 in baza 8.

$(18,7(45))_8 = ?$

Facem conversia lui 18 in baza 8:
18 : 8 = 2 rest 2
2 : 8 = 0 rest 2
0 - ne oprim
=> $(18)_8 = \overline{22}$

Facem conversia lui 0,4(8) in baza 8 : $\frac{48-4}{90} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45}$
Acum inmultim succesiv cu baza b:
$\frac{22}{45} * 8 = \frac{176}{45} = 3 + \frac{41}{45}$ (retinem ca aici partea intreaga a fost 3)

$\frac{41}{45} * 8 = \frac{328}{45} = 7 + \frac{13}{45}$ (retinem ca aici partea intreaga a fost 7)

$\frac{13}{45} * 8 = \frac{104}{45} = 2 + \frac{14}{45}$ (retinem ca aici partea intreaga a fost 2)

$\frac{14}{45} * 8 = \frac{112}{45} = 2 + \frac{22}{45}$ (retinem ca aici partea intreaga a fost 2)

Am ajuns inapoi la fractia $\frac{22}{45}$ => avem o perioada.
De data aceasta concatenam partile intregi de **sus** in **jos**.
=> $0,4(8)_8 = 0,(3722)$

=> $18,4(8)_8 = \overline{22,(3722)}$

Exemplul 2 : Transformati 215,65 din baza 10 in baza 16.
215 : 16 = 13 rest 7 (reamintim ca $13_{16} = D$)
13 : 16 = 0 rest 13
0 - ne oprim
=> $(215)_{16} = \overline{D7}$

$0,65 * 16 = 10,4$ retinem ca partea intreaga este $10_{16} = A$
$0,4 * 16 = 6,4$ retinem ca partea intreaga este 6

0,4 - se repeta deja aceasta valoare => ne oprim si avem perioada pe 6

$0,65_{16} = 0, A(6)$
=> $(215,65)_{16} = \overline{D7, A(6)}$ Exercitii Sa se transforme:

- 82,61(3) in baza 8
- 6,(18) in baza 2
- 99,1(5) in baza 5
- 0,6(7) in baza 16

2 [IMPORTANT]Transformarea din baza b in baza 10

Cand avem de transformat din baza b in baza 10, impartim din nou numarul in 2 sectiuni:

- partea intreaga : plecam de la sfarsitul numarului, indexand de la 0
- partea fractionara: daca avem perioada transformam in fractie, daca nu, indexam de la -1 descrescator

Exemplul 1 : Transformati 110110 din baza 2 in baza 10

- Plecam de la sfarsitul numarului cu un index de la 0:
  $110110_0 -> 11011_1 0_0 -> 1101_2 1_1 0_0 -> .... -> 1_5 1_4 0_3 1_2 1_1 0_0$
- Inmultim fiecare cifra cu 2^{index} :
  $(\overline{110110})_2^{-1} = 1{*}2^5{+}1{*}2^4{+}0{*}2^3{+}1{*}2^2{+}1{*}2^1{+}0{*}2^0 = 54$

=> $(\overline{110110})_2^{-1} = 54$

Exemplul 2 : Transformati A25,1C(4) din baza 16 in baza 10.

- Plecam de la sfarsitul numarului cu un index de la 0:
  $\text{A25}_0 -> \text{A2}_1 5_0 -> A_2 2_1 5_0$

- Inmultim fiecare cifra cu 16^{index} :
  $(\overline{A25})_{16}^{-1}$ = A$*16^2+2*16^1+5*16^0$ = $10*16^2+2*16^1+5*16^0$=2597

- Luam acum partea fractionara si o transformam in fractie (numarator=parte fractionara-neperioada, numitor=atati de F (baza in care suntem -1 = 16-1) cate cifre are perioada urmati de atati de 0 cate cifre are neperioada):
  $(\overline{0,1C(4)})_{16}^{-1} = (\frac{\overline{1C4}-\overline{1C}}{\overline{F00}})_{16}^{-1} = \frac{(\overline{1C4})_{16}^{-1}-(\overline{1C})_{16}^{-1}}{(\overline{F00})_{16}^{-1}} = \frac{1*16^2+C*16^1+4*16^0-1*16^1+C*16^0}{F*16^2+0*16^1+0*16^0} = \frac{1*16^2+12*16^1+4*16^0-1*16^1-12*16^0}{F*16^2+0*16^1+0*16^0} = \frac{424}{3840} = 0,11041(6)$

  => $(\overline{A25})_{16}^{-1} = 2597,11041(6)$

Exemplul 3 : Să se scrie în baza 10 următoarele numere:

- $(\overline{1101})_2^{-1} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$
- $(\overline{A2C})_1 6^{-1} = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2604$
- $(\overline{12.4})_5^{-1} = 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^-1 = 7 + \frac{4}{5} = \frac{39}{5} = 7.8$

Exemplul 4 : Să se scrie în baza 10 următoarele numere:

- $(\overline{1010001011})_2$
- $(\overline{1001.1001})_2$
- $(\overline{513})_6$
- $(\overline{C1D})_{16}$
- $(\overline{ABC.ABC})_{16}$

3 [IMPORTANT]Trecerea din baza 2 într-o bază care este putere a lui 2 (și invers)

Fie n un număr reprezentat în baza 2 pe care vrem să-l reprezentăm în baza 2^k. Putem grupa reprezentarea reprezentarea binară a numărului în bucăți de lungime k. Scriem fiecare bucată în baza 2^k, concatenam rezultatele și obținem reprezentarea în baza 2^k.

Exemplul 1 : Să se convertească $(\overline{11011.101})_2$ în baza 16.

Grupăm numărul în bucăți de cate 4 deoarece $16 = 2^4$. Pentru partea întreagă vom începe împărtirea de la dreapta spre stânga, iar pentru partea fractionară vom începe de la stânga la dreapta. Astfel, vom obține gruparea: 0001 1011.1010. Observăm că se completează cu 0 pentru o obține bucățile de lungime 4. Acum transformăm bucățile în baza 16.
$(\overline{0001})_2 = (\overline{1})_{16}$,
$(\overline{1011})_2 = (\overline{B})_{16}$,
$(\overline{1010})_2 = (\overline{A})_{16}$.
Prin urmare $(\overline{11011.101})_2 = (\overline{1B.A})_{16}$

Pentru a reprezenta un număr scris într-o bază b = 2^k în baza 2, aplicam procedeul invers. Luăm fiecare cifră din reprezentarea în baza b a numărului, o reprezentăm în baza 2, iar la final concatenăm ”bucățile” obținute.

Exemplul 2 : Să se convertească $(\overline{1A.C})_{16}$ în baza 2.

Deoarece $16 = 2^4$ știm că fiecare cifră din reprezentarea numărului în baza 2 va avea lungimea 4 (se completează cu 0-uri acolo unde este cazul). Luăm fiecare cifră și o scriem în baza 2.
$(\overline{1})_{16} = (\overline{0001})_2$,
$(\overline{A})_{16} = (\overline{1010})_2$,
$(\overline{C})_{16} = (\overline{1100})_2$,

Reprezentarea lui $(\overline{1A.C})_{16}$ în baza 2 este concatenarea celor 3 rezultate obținute anterior, adică $(\overline{00011010.1100})_2 = (\overline{11010.11})_2$ (am eliminat 0-urile redundante).

Exemplul 3 : Sa se transforme 6A,D din baza 16 in baza 2.

Fiindca 16=2^4 fiecare cifra din numarul in baza 16 reprezinta 4 cifre din numarul in baza 2.

$(\overline{6A,D})_{16}$ =?
$6_{(16)} = \overline{0110}_{(2)}$
$A_{(16)} = \overline{1010}_{(2)}$
$D_{(16)} = \overline{1101}_{(2)}$
=> $(\overline{6A,D})_{(16)} = \overline{01101010,1101}_{(2)} = \overline{1101010,1101}_{(2)}$

Exemplul 4 : Transformati 1011001,101 din baza 2 in baza 8.

Cum $8 = 2^3$ impart in bucatele de cate 3 cifre (pornind de la virgula) si adaug 0-uri la inceput si sfarsit daca este cazul.

$\overline{10111001,101}_2$ =?
$001_{(2)} = \overline{1}_{(8)}$
$011_{(2)} = \overline{3}_{(8)}$
$001_{(2)} = \overline{1}_{(8)}$

$101_{(2)} = \overline{5}_{(8)}$
=> $(\overline{1011001, 101})_{(2)} = \overline{131, 5}_{(8)}$

Exemplul 5 : Să se reprezinte în baza 2 următoarele numere:

- $(\overline{47.3})_8$
- $(\overline{113.3})_4$
- $(\overline{ABC.ABC})_{16}$
- $(\overline{AB.G})_{32}$

Exemplul 6 : Să se reprezinte numerele în următoarele baze:

- $(\overline{1011.1011})_2$ în baza 8
- $(\overline{111.111})_2$ în baza 4
- $(\overline{101010.010111})_2$ în baza 16
- $(\overline{101010.010111})_2$ în baza 32

4 [IMPORTANT]Operații în baza b

Operațiile aritmetice cu numerele scrise într-o bază b ≥ 2 oarecare se fac după reguli asemănătoare ca în baza 10, dar transportul și împrumutul trebuie să se facă la b, nu la 10. Pentru calculele de o cifră în baza b putem trece numerele în baza 10, facem acolo calculele, apoi trecem rezultatele în baza b.

4.1 Adunarea

Exemplul 1 : Să se calculeze $(\overline{1011})_2 + (\overline{110})_2$ fără a trece prin baza 10.

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Pe poziția unităților am avut $\overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$, fără transport. Pe următoarea poziție am avut $\overline{1}+\overline{1} = \overline{10}$ (adică numărul 2), s-a păstrat $\overline{0}$ și s-a propagat $\overline{1}$; pe următoarea poziție am avut $\overline{0} + \overline{1} + \overline{1}$ (ultimul $\overline{1}$ provenit din transport) $= \overline{10}$, s-a păstrat $\overline{0}$ și s-a propagat $\overline{1}$; etc.

4.2 Scaderea

Exemplul 2 : În baza 16, să se scadă BA - 9B.

	B	A
-	9	B
	1	F

Pe poziția unităților avem $\overline{A} - \overline{B} = 10 - 11 < 0$; de aceea, împrumutăm $\overline{1}$ de pe poziția următoare și atunci calculul este $1 \cdot 16 + 10 - 11 = 15 = \overline{F}$. Pe poziția următoare avem $\overline{B} - \overline{1} - \overline{9}$ (acel $\overline{1}$ a fost cedat la împrumut) $= 11 - 1 - 9 = 1 = \overline{1}$.

4.3 Inmultirea

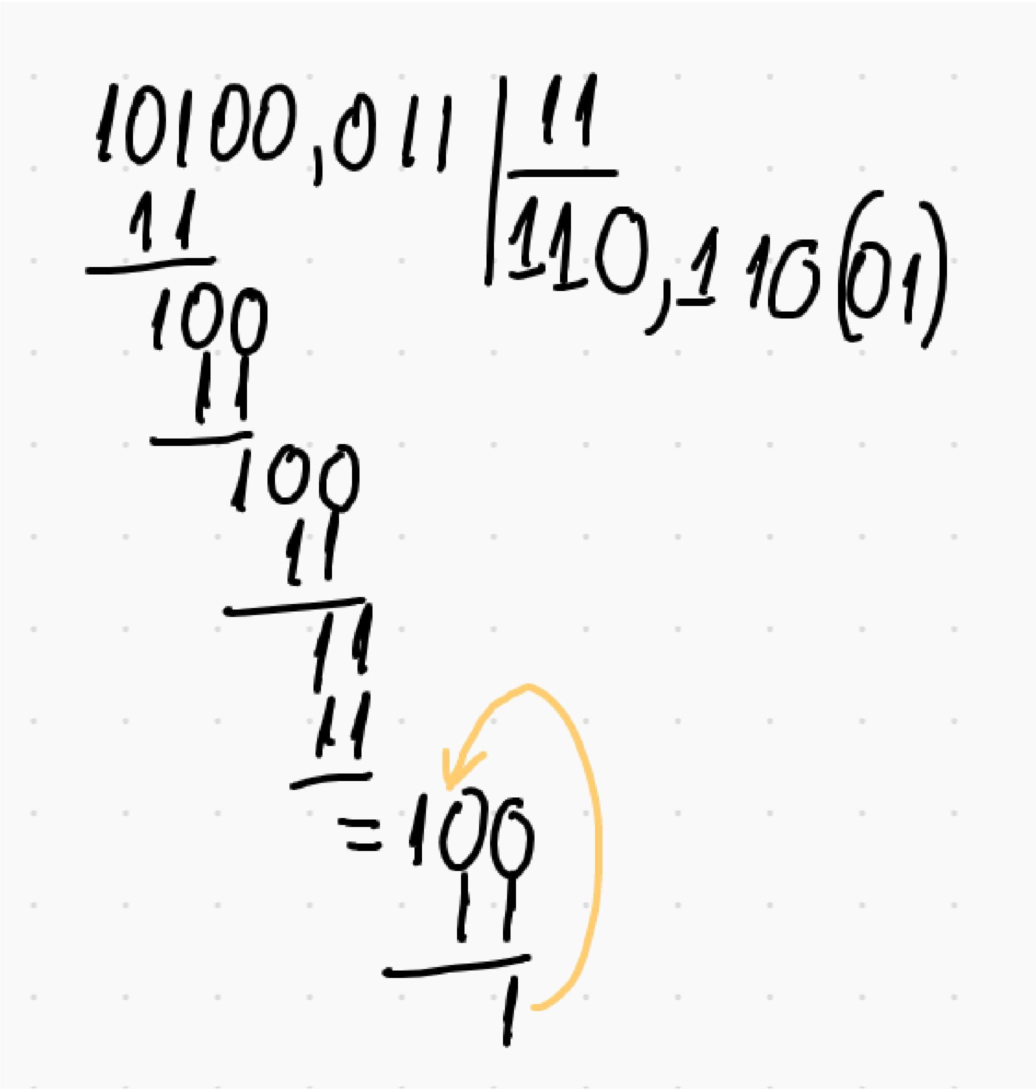
Exemplul 3 : În baza 2, să se înmulțească $110.11 \cdot 1.001$.

			1	1	0	.1	1
		·		1	.0	0	1
			1	1	0	.1	1
1	1	0	.1	1			
1	1	1	.1	0	0	1	1

Înmulțirea într-o bază oarecare se face tot după reguli asemănătoare ca în baza 10, dar pentru baza 2 aceste reguli se pot simplifica, deoarece singurele cifre sunt $\overline{0}$ și $\overline{1}$, care desemnează respectiv 0 și 1, care sunt factor anulator, respectiv element neutru, la înmulțire; înmulțirea cu $\overline{0}$ presupune scrierea unui rând de $\overline{0}$-uri, care nu contează la adunare și se pot omite, iar înmulțirea cu un $\overline{1}$ revine la a scrie o copie a deînmulțitului; așadar, pentru a face înmulțirea, este suficient să parcurgem înmulțitorul de la dreapta spre stânga și pentru fiecare $\overline{1}$ întâlnit să mai scriem o copie a deînmulțitului, cu cifra unităților aliniată la acel $\overline{1}$, iar în final să adunăm rândurile scrise - ceea ce am făcut mai sus; în final, numărul de zecimale ale produsului este suna numerelor de zecimale ale factorilor, la fel ca în cazul bazei 10.

4.4 Impartirea

Exemplul 4 : Impartiti 10100,011 la 11 in lucrand cu operatiile in baza 2.



- Ca la impartirea normala, incep din stanga. Ma uit la prima cifra, clar 11 nu se cuprinde in 1 deci mai adaug o cifra din numar.
- Acum am 10 si 11. Clar 11 nu se cuprinde in 10 deci mai adaug o cifra.

- 101 si 11, acum putem sa facem impartirea. Fiind in baza 2, lucrurile stau destul de simplu: catul ori e 0 ori e 1. In cazul nostru catul e 1 si restul 10.
- Adaug urmatoarea cifra din numar si am 100 si 11. => catul 1, restul 1.
- Adaug urmatoarea cifra care e 0. 11 nu se cuprinde in 10 => catul 0, restul 10.
- Inainte de a adauga urmatoarea cifra, observ ca intalnesc virgula, pe care o adaug si la rezultat. Abia acum pot adauga urmatorul 0. => 100 impartit la 11, cat 1 rest 1.
- Adaug urmatoarea cifra. => 11 impartit la 11, cat 1 rest 0.
- Adaug urmatoarea cifra, care este 1. 11 nu se cuprinde in 1 => cat 0 rest 1.
- S-a terminat numarul, dar nu s-a terminat si impartirea. Adaugam cati de 0 avem nevoie pana ajungem la restul 0 sau gasim perioada. Asadar, 10 impartit la 11 => cat 0 rest 10.
- Mai adaug un 0 => 100 impartit la 11, cat 1 rest 1. Am ajuns inapoi la 1 => avem perioada pe 01.

Exercițiul 5 : Să se efectueze următoarele calcule:

- $(\overline{1010})_2 + (\overline{1111})_2$
- $(\overline{F3})_{16} + (\overline{AB})_{16}$
- $(\overline{12})_8 + (\overline{46})_8$
- $(\overline{1000})_2$ - $(\overline{1})_2$

Exercițiul 6 : Să se efectueze următoarele calcule:

- $(\overline{110})_2 \cdot (\overline{10101})_2$
- $(\overline{AB})_{16} \cdot (\overline{3})_{16}$

References

[1] Dumitru Daniel Drăgulici. *Curs.*

[2] Larisa Dumitrache *Tutoriat 2019*