

# Proprietăți ale Operațiilor și Relațiilor între Mulțimi

## SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2021–2022, Semestrul I

Amintesc că are sens să scriem:

- "fie  $x$ ", cu semnificația: "fie  $x$  element arbitrar" sau "fie  $x$  din universul discuției";
- $\forall x$ , cu semnificația: "pentru orice element  $x$  (de oriunde)" sau "pentru orice element  $x$  din universul discuției";
- $\exists x$ , cu semnificația: "există un element  $x$ " sau "există un element  $x$  în universul discuției",

unde "universul discuției" este colecția tuturor obiectelor cu care lucrăm în cadrul unei probleme, colecție despre care nu specificăm dacă este o mulțime, o clasă sau de altă natură.

Amintesc că simbolul  $\dashv$  semnifică: *să se demonstreze afirmația precedentă sau să se demonstreze afirmația de mai sus.*

Amintesc abrevierile: "ddacă", semnificând *dacă și numai dacă*, și "i.e.", de la *id est*, semnificând *adică*.

A se vedea, în CURSUL I, definițiile operațiilor  $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ , ale relațiilor  $\subseteq, \subsetneq, \supseteq, \supsetneq$ , definiția mulțimii vide,  $\emptyset$ , și a mulțimii  $\mathcal{P}(M)$  a submulțimilor unei mulțimi  $M$ .

În rezolvarea următorului exercițiu, a se urmări corespondența dintre următoarele proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi și proprietăți ale conectorilor logici între enunțuri, corespondență indicată în CURSUL I în dreptul fiecăreia dintre proprietățile de demonstrat în acest exercițiu.

**Exercițiul 1.** Fie  $A, B, C, D$  mulțimi. Să demonstrăm următoarele:

- **egalitatea de mulțimi este echivalentă cu dubla incluziune:**  $A = B$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A] \dashv$

Prin definiție, două mulțimi coincid ddacă au aceleași elemente, i.e.:

$$\begin{aligned} A = B & \text{ ddacă } (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\ & \text{ ddacă } (\forall x) [(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ & \text{ ddacă } [(\forall x) (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ și } (\forall x) (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ & \text{ ddacă } [A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]. \end{aligned}$$

Fie  $x$ , arbitrar, fixat, pentru următoarele proprietăți de demonstrat.

Pentru a demonstra o egalitate de mulțimi, putem demonstra dubla incluziune sau putem arăta, în mod direct, că  $x$  este element al membrului stâng al egalității ddacă  $x$  este element al membrului drept.

- **idempotența reuniunii și a intersecției:**  $A \cup A = A$  și  $A \cap A = A \dashv$

$x \in A \cup A$  ddacă  $[x \in A \text{ sau } x \in A]$  ddacă  $x \in A$ . Așadar  $A \cup A = A$ .

$x \in A \cap A$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \in A]$  ddacă  $x \in A$ . Așadar  $A \cap A = A$ .

Diferența și diferența simetrică nu sunt idempotente. În schimb, avem:

- $A \setminus A = \emptyset$  și  $A \Delta A = \emptyset \dashv$

$x \in A \setminus A$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \notin A]$  ddacă  $x \in \emptyset$ , pentru că: enunțul  $[x \in A \text{ și } x \notin A]$ , altfel scris  $[x \in A \text{ și } \text{non}(x \in A)]$ , este fals, la fel ca enunțul  $x \in \emptyset$ . Așadar  $A \setminus A = \emptyset$ .

Prin urmare avem și:  $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$  conform idempotenței reuniunii.

- **comutativitatea reuniunii, a intersecției și a diferenței simetrice:**  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$  și  $A \Delta B = B \Delta A \dashv$

$x \in A \cup B$  ddacă  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$  ddacă  $[x \in B \text{ sau } x \in A]$  ddacă  $x \in B \cup A$ . Așadar  $A \cup B = B \cup A$ .

Prin urmare avem și:  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$ .

$x \in A \cap B$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \in B]$  ddacă  $[x \in B \text{ și } x \in A]$  ddacă  $x \in B \cap A$ . Așadar  $A \cap B = B \cap A$ .

- **asociativitatea reuniunii, a intersecției și a diferenței simetrice:**  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ,  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  și  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \dashv$

$x \in A \cup (B \cup C)$  ddacă  $[x \in A \text{ sau } (x \in B \text{ sau } x \in C)]$  ddacă  $[x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C]$  ddacă  $[(x \in A \text{ sau } x \in B) \text{ sau } x \in C]$  ddacă  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Așadar  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

$x \in A \cap (B \cap C)$  ddacă  $[x \in A \text{ și } (x \in B \text{ și } x \in C)]$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C]$  ddacă  $[(x \in A \text{ și } x \in B) \text{ și } x \in C]$  ddacă  $x \in (A \cap B) \cap C$ . Așadar  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

Asociativitatea diferenței simetrice se poate demonstra folosind funcții caracteristice sau ca mai jos.

Conform comutativității reuniunii și a intersecției, următoarele legi de distributivitate, scrise ca distributivități la stânga, sunt echivalente cu distributivitățile la dreapta:  $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ , respectiv  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ .

- **distributivitatea reuniunii față de intersecție:**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  —

În proprietățile scrise ca mai jos, pe mai multe rânduri, conectorii logici dintre rânduri se aplică ultimii, adică, pentru a transcrie o astfel de proprietate pe un singur rând, se încadrează între paranteze enunțurile de pe fiecare rând.

$$x \in A \cup (B \cap C) \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \\ \text{sau} \\ x \in B \text{ și } x \in C. \end{cases} \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \text{ sau } x \in B \\ \text{și} \\ x \in A \text{ sau } x \in C. \end{cases}$$

Să procedăm prin dublă incluziune, folosind caracterizările de mai sus.

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \text{---}$$

Dacă  $x \in A \cup (B \cap C)$ , atunci avem două cazuri:

*cazul 1:*  $x \in A$ , prin urmare  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$ , precum și  $[x \in A \text{ sau } x \in C]$ , așadar  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;

*cazul 2:*  $x \in B$  și  $x \in C$ ; în acest caz, avem  $x \in B$ , prin urmare  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$ , precum și  $x \in C$ , prin urmare  $[x \in A \text{ sau } x \in C]$ , așadar  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \text{---}$$

Dacă  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , atunci putem analiza două cazuri (complementare, date de o proprietate și negația aceleiași proprietăți), dintre care elementul arbitrar (fixat)  $x$  satisface unul și numai unul:

*cazul 1:*  $x \in A$ , ceea ce implică  $[x \in A \text{ sau } x \in B \text{ și } x \in C]$ , adică  $x \in A \cup (B \cap C)$ ;

*cazul 2:*  $x \notin A$ ; în acest caz aplicăm ipoteza că  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ; așadar  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$  și  $x \notin A$ , deci  $x \in B$ ; simultan,  $[x \in A \text{ sau } x \in C]$  și  $x \notin A$ , deci  $x \in C$ ; așadar  $x \in B$  și  $x \in C$ , prin urmare  $[x \in A \text{ sau } x \in B \text{ și } x \in C]$ , adică  $x \in A \cup (B \cap C)$ .

- **distributivitatea intersecției față de reuniune:**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  —

$$x \in A \cap (B \cup C) \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \\ \text{și} \\ x \in B \text{ sau } x \in C. \end{cases} \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ ddacă } \begin{cases} x \in A \text{ și } x \in B \\ \text{sau} \\ x \in A \text{ și } x \in C. \end{cases}$$

Procedăm tot prin dublă incluziune, folosind caracterizările anterioare.

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C). \text{---}$$

Dacă  $x \in A \cap (B \cup C)$ , atunci  $x \in A$  și:

fie  $x \in B$ , așadar  $x \in A$  și  $x \in B$ , prin urmare  $[x \in A \text{ și } x \in B]$  sau  $[x \in A \text{ și } x \in C]$ , adică  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;

fie  $x \in C$ , așadar  $x \in A$  și  $x \in C$ , prin urmare  $[x \in A \text{ și } x \in B]$  sau  $[x \in A \text{ și } x \in C]$ , adică  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C). \text{---}$$

Dacă  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , atunci:

fie  $x \in A$  și  $x \in B$ , așadar, cum  $x \in B$  implică  $[x \in B \text{ sau } x \in C]$ , rezultă că  $x \in A$  și  $[x \in B \text{ sau } x \in C]$ , adică  $x \in A \cap (B \cup C)$ ;

fie  $x \in A$  și  $x \in C$ , așadar, cum  $x \in C$  implică  $[x \in B \text{ sau } x \in C]$ , rezultă că  $x \in A$  și  $[x \in B \text{ sau } x \in C]$ , adică  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

- $A \subseteq A \cup B$  și  $A \cap B \subseteq A$  —

Dacă  $x \in A$ , atunci  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$ , adică  $x \in A \cup B$ . Așadar  $A \subseteq A \cup B$ .

Dacă  $x \in A \cap B$ , adică  $[x \in A \text{ și } x \in B]$ , atunci  $x \in A$ . Așadar  $A \cap B \subseteq A$ .

Cum reuniunea și intersecția sunt comutative, din aceste incluziuni rezultă și  $B \subseteq A \cup B$  și  $A \cap B \subseteq B$ .

- $A \cup B = B$  ddacă  $A \subseteq B$  ddacă  $A \cap B = A$  —

Avem  $A \subseteq A \cup B$ , prin urmare, dacă  $A \cup B = B$ , atunci  $A \subseteq B$ .

Similar,  $A \cap B \subseteq B$ , prin urmare, dacă  $A \cap B = A$ , atunci  $A \subseteq B$ .

Acum să presupunem că  $A \subseteq B$ , adică  $x \in A$  implică  $x \in B$ . Atunci:  $x \in A \cup B$  ddacă  $[x \in A \text{ sau } x \in B]$  ddacă  $x \in B$ , după cum se observă imediat prin dublă implicație, așadar  $A \cup B = B$ . Analog:  $x \in A \cap B$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \in B]$  ddacă  $x \in A$ , așadar  $A \cap B = A$ .

- $\emptyset \subseteq A$  —

Enunțul  $x \in \emptyset$  este fals, așadar  $[x \in \emptyset \Rightarrow x \in A]$  este adevărat, deci  $\emptyset \subseteq A$ .

- $A \subseteq A$  și  $\text{non}(A \subsetneq A)$  —

$A = A$ , așadar  $A \subseteq A$ , precum și  $\text{non}(A \neq A)$ , prin urmare  $[\text{non}(A \subseteq A) \text{ sau } \text{non}(A \neq A)]$ , i.e.  $\text{non}(A \subseteq A \text{ și } A \neq A)$ , adică  $\text{non}(A \subsetneq A)$ .

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ , i.e.:  $A \subseteq \emptyset$  ddacă  $A = \emptyset$  —

Procedăm prin dublă implicație.

$\emptyset \subseteq \emptyset$ , așadar:  $A = \emptyset$  implică  $A \subseteq \emptyset$ .

Acum presupunem că  $A \subseteq \emptyset$  și presupunem prin absurd că  $A \neq \emptyset$ , ceea ce înseamnă că există un element  $a \in A$ ; dar atunci rezultă  $a \in \emptyset$ , ceea ce contrazice definiția lui  $\emptyset$ . Prin urmare,  $A \subseteq \emptyset$  implică  $A = \emptyset$ .

- $A \cup \emptyset = A$  și  $A \cap \emptyset = \emptyset$  —

$\emptyset \subseteq A$ , prin urmare  $A \cup \emptyset = A$  și  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

- $A \setminus \emptyset = A$ ,  $\emptyset \setminus A = \emptyset$  și  $A \Delta \emptyset = A$  —

Enunțul  $x \in \emptyset$  este fals, așadar  $x \notin \emptyset$  este adevărat, prin urmare:  $x \in A \setminus \emptyset$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \notin \emptyset]$  ddacă  $x \in A$ , în timp ce:  $x \in \emptyset \setminus A$  ddacă  $[x \in \emptyset \text{ și } x \notin A]$  ddacă  $x \in \emptyset$ , pentru că enunțul  $x \in \emptyset$ , așadar și conjuncția  $[x \in \emptyset \text{ și } x \notin A]$  sunt false. Așadar  $A \setminus \emptyset = A$  și  $\emptyset \setminus A = \emptyset$ , prin urmare  $A \Delta \emptyset = A \cup \emptyset = A$ .

- $A \cup B = \emptyset$  ddacă  $A = B = \emptyset$  —

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ , așadar  $A = B = \emptyset$  implică  $A \cup B = \emptyset$ .

Cum  $A \subseteq A \cup B$  și  $B \subseteq A \cup B$ ,  $A \cup B = \emptyset$  implică  $A \subseteq \emptyset$  și  $B \subseteq \emptyset$ , așadar  $A = B = \emptyset$ .

- $A \setminus B = \emptyset$  ddacă  $A \subseteq B$  —

- $A \Delta B = \emptyset$  ddacă  $A = B$  —

$A \setminus B = \emptyset$  ddacă  $(\nexists y)(y \in A \setminus B)$  ddacă  $(\forall y)(y \notin A \setminus B)$  ddacă  $(\forall y)(\text{non}(y \in A \text{ și } y \notin B))$  ddacă  $(\forall y)(y \notin A \text{ sau } y \in B)$  ddacă  $(\forall y)(y \in A \Rightarrow y \in B)$  ddacă  $A \subseteq B$ . Am folosit faptul că, pentru orice enunțuri  $p, q$ ,  $[p \Rightarrow q]$  este echivalent cu  $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ .

În consecință:  $A \Delta B = \emptyset$  ddacă  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$  ddacă  $[A \setminus B = \emptyset \text{ și } B \setminus A = \emptyset]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A]$  ddacă  $A = B$ .

- $A \subsetneq B$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$  —

Conform definiției incluziunii stricte,  $A \subsetneq B$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } A \neq B]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } \text{non}(A = B)]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } \text{non}(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq A)]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } (A \not\subseteq B \text{ sau } B \not\subseteq A)]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \not\subseteq A]$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ și } B \setminus A \neq \emptyset]$ . Am aplicat faptul că:  $B \subseteq A$  ddacă  $B \setminus A = \emptyset$ , prin urmare:  $B \not\subseteq A$  ddacă  $B \setminus A \neq \emptyset$ .

- **tranzitivitatea incluziunii nestrictă:**  $(A \subseteq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$  —

- $(A \subsetneq B \text{ și } B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$  —

- $(A \subseteq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$  —

- **tranzitivitatea incluziunii stricte:**  $(A \subsetneq B \text{ și } B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$  —

Dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq C$ , atunci  $x \in A$  implică  $x \in B$ , ceea ce implică  $x \in C$ , prin urmare  $A \subseteq C$ . Așadar incluziunea nestrictă este tranzitivă.

Dacă  $A \subsetneq B$  și  $B \subseteq C$ , atunci  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq C$ , prin urmare  $A \subseteq C$ , dar și  $B \setminus A \neq \emptyset$ , adică există un element  $a \in B \setminus A$ , așadar  $a \in B$  și  $a \notin A$ , ceea ce, întrucât  $B \subseteq C$ , implică  $a \in C$  și  $a \notin A$ , adică  $a \in C \setminus A$ , deci  $C \setminus A \neq \emptyset$ . Prin urmare  $A \subseteq C$  și  $C \setminus A \neq \emptyset$ , adică  $A \subsetneq C$ .

Dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subsetneq C$ , atunci  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq C$ , prin urmare  $A \subseteq C$ , dar și  $C \setminus B \neq \emptyset$ , adică există un element  $b \in C \setminus B$ , așadar  $b \in C$  și  $b \notin B$ , ceea ce, întrucât  $A \subseteq B$  (adică  $x \in A$  implică  $x \in B$ , așadar  $x \notin B$  implică  $x \notin A$ ), implică  $b \in C$  și  $b \notin A$ , adică  $b \in C \setminus A$ , deci  $C \setminus A \neq \emptyset$ . Prin urmare  $A \subseteq C$  și  $C \setminus A \neq \emptyset$ , adică  $A \subsetneq C$ .

Dacă  $A \subsetneq B$  și  $B \subsetneq C$ , atunci  $A \subseteq B$  și  $B \subsetneq C$ , prin urmare  $A \subsetneq C$ .

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$  —

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$  —
- $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$  —
- $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$  —

Presupunem că  $A \subseteq B$ , așadar  $x \in A$  implică  $x \in B$ , prin urmare  $x \notin B$  implică  $x \notin A$ .

Dacă  $x \in A \cup C$ , adică  $x \in A$  sau  $x \in C$ , atunci  $x \in B$  sau  $x \in C$ , adică  $x \in B \cup C$ . Așadar  $A \cup C \subseteq B \cup C$ .

Dacă  $x \in A \cap C$ , adică  $x \in A$  și  $x \in C$ , atunci  $x \in B$  și  $x \in C$ , adică  $x \in B \cap C$ . Așadar  $A \cap C \subseteq B \cap C$ .

Dacă  $x \in A \setminus C$ , adică  $x \in A$  și  $x \notin C$ , atunci  $x \in B$  și  $x \notin C$ , adică  $x \in B \setminus C$ . Așadar  $A \setminus C \subseteq B \setminus C$ .

Dacă  $x \in C \setminus B$ , adică  $x \in C$  și  $x \notin B$ , atunci  $x \in C$  și  $x \notin A$ , adică  $x \in C \setminus A$ . Așadar  $C \setminus B \subseteq C \setminus A$ .

- dacă  $\begin{cases} A \subseteq B \\ \text{și} \\ C \subseteq D \end{cases}$ , atunci:  $\begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \setminus D \subseteq B \setminus C \end{cases}$  —

Presupunem că  $A \subseteq B$  și  $C \subseteq D$ .

Cum  $A \subseteq B$ , rezultă că  $A \cup C \subseteq B \cup C$ . Cum  $C \subseteq D$ , rezultă că  $B \cup C \subseteq B \cup D$ . Conform tranzitivității incluziunii nestrictă, rezultă  $A \cup C \subseteq B \cup D$ .

Analog, rezultă  $A \cap C \subseteq B \cap C \subseteq B \cap D$ , prin urmare  $A \cap C \subseteq B \cap D$ .

Cum  $A \subseteq B$ , rezultă că  $A \setminus D \subseteq B \setminus D$ . Cum  $C \subseteq D$ , rezultă că  $B \setminus D \subseteq B \setminus C$ . Prin urmare  $A \setminus D \subseteq B \setminus C$ .

- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C) \text{ ddacă } A \cup B \subseteq C$  —
- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C) \text{ ddacă } A \subseteq B \cap C$  —

Cum  $A \subseteq A \cup B$  și  $B \subseteq A \cup B$ , conform tranzitivității incluziunii nestrictă,  $A \cup B \subseteq C$  implică  $A \subseteq C$  și  $B \subseteq C$ . Reciproc,  $A \subseteq C$  și  $B \subseteq C$  implică  $A \cup B \subseteq C \cup C = C$ .

Cum  $B \cap C \subseteq B$  și  $B \cap C \subseteq C$ , conform tranzitivității incluziunii nestrictă,  $A \subseteq B \cap C$  implică  $A \subseteq B$  și  $A \subseteq C$ . Reciproc,  $A \subseteq B$  și  $A \subseteq C$  implică  $A = A \cap A \subseteq B \cap C$ .

- $A \setminus B \subseteq A$  —
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$  și  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  —

Dacă  $x \in A \setminus B$ , adică  $x \in A$  și  $x \notin B$ , atunci  $x \in A$ . Așadar  $A \setminus B \subseteq A$ , prin urmare  $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$ .

$x \in A \cap (B \setminus A)$  ddacă  $[x \in A, x \in B \text{ și } x \notin A]$ , ceea ce este echivalent cu  $x \in \emptyset$ , pentru că ambele enunțuri sunt false.

- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$  —

$x \in A \setminus (A \cap B)$  ddacă  $[x \in A \text{ și } \text{non}(x \in A \text{ și } x \in B)]$  ddacă  $[x \in A \text{ și } (x \notin A \text{ sau } x \notin B)]$  ddacă  $[x \in A \text{ și } x \notin B]$  ddacă  $x \in A \setminus B$ . Așadar  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ .

- $A \cap B = \emptyset$  ddacă  $A \setminus B = A$  ddacă  $B \setminus A = B$  —

Dacă  $A \cap B = \emptyset$ , atunci  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus \emptyset = A$ .

Acum să presupunem că  $A \setminus B = A$ , așadar  $A \subseteq A \setminus B$ , și să presupunem prin absurd că  $A \cap B \neq \emptyset$ , adică există un element  $a \in A \cap B$ , adică  $a \in A$  și  $a \in B$ , prin urmare  $a \in A$ , așadar  $a \in A \setminus B$  întrucât  $A \subseteq A \setminus B$ , deci  $a \in A$  și  $a \notin B$ , așadar  $a \notin B$ , ceea ce contrazice faptul că  $a \in B$ . Prin urmare  $A \cap B = \emptyset$ .

Așadar:  $A \setminus B = A$  ddacă  $A \cap B = \emptyset$ , ceea ce este echivalent cu  $B \cap A = \emptyset$  datorită comutativității conjuncției, enunț echivalent  $B \setminus A = B$  conform echivalenței anterioare.

Amintesc notațiile:

- pentru orice mulțime finită  $M$ ,  $|M| =$  numărul elementelor lui  $M$ ;
- $2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} =$  mulțimea numerelor naturale impare;
- pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\overline{1, n} = \{1, 2, \dots, n\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$ .

Să notăm, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ :

- pentru orice enunțuri  $p_1, \dots, p_n$ , cu  $\overline{p_1 \text{ xor } p_2 \text{ xor } \dots \text{ xor } p_n} := (\dots ((p_1 \text{ xor } p_2) \text{ xor } p_3) \text{ xor } \dots \text{ xor } p_{n-1}) \text{ xor } p_n$ ;
- pentru orice mulțimi  $A_1, \dots, A_n$ , cu  $\overline{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n} := (\dots ((A_1 \Delta A_2) \Delta A_3) \Delta \dots \Delta A_{n-1}) \Delta A_n$ .

**Remarca 2.** ① Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și orice enunțuri  $p_1, \dots, p_n$ , enunțul  $q_n := p_1 \text{ xor } p_2 \text{ xor } \dots \text{ xor } p_n$  este adevărat ddacă  $|\{i \in \overline{1, n} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| \in 2\mathbb{N} + 1$ ;

② Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și orice mulțimi  $A_1, \dots, A_n$ ,  $B_n := A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n = \{x \mid |\{i \in \overline{1, n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N} + 1\}$ .

① Demonstrăm această proprietate prin inducție matematică după  $n \in \mathbb{N}^*$ . Conform notației fără paranteze de mai sus:

- $q_1 = p_1$  și, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_{n+1} = q_n \text{ xor } p_{n+1}$ .

$n = 1$ :  $q_1 = p_1$ , iar  $\overline{1, 1} = \{1\}$ , așadar  $q_1$  este adevărat ddacă  $p_1$  este adevărat ddacă  $|\{i \in \{1\} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| = 1$  ddacă  $|\{i \in \overline{1, 1} \mid p_i \text{ este adevărat}\}| \in 2\mathbb{N} + 1$ .

$n \mapsto n + 1$ : Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ , să notăm cu  $M_n := \{i \in \overline{1, n} \mid p_i \text{ este adevărat}\}$ . Observăm că, pentru orice

$$n \in \mathbb{N}^*, M_{n+1} = \begin{cases} M_n, & \text{dacă } n + 1 \notin M_{n+1}, \\ M_n \cup \{n + 1\}, & \text{altfel.} \end{cases} \text{ așadar } |M_{n+1}| = \begin{cases} |M_n|, & \text{dacă } n + 1 \notin M_{n+1}, \\ |M_n| + 1, & \text{altfel,} \end{cases}$$

întrucât  $n + 1 \notin M_n$ .

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $q_n$  este adevărat ddacă  $|M_n| \in 2\mathbb{N} + 1$ . Conform definiției conectorului logic *sau*

*exclusiv* și celor de mai sus,  $q_{n+1} = q_n \text{ xor } p_{n+1}$  este adevărat ddacă  $\begin{cases} q_n \text{ e adevărat și } p_{n+1} \text{ e fals} \\ \text{sau} \\ q_n \text{ e fals și } p_{n+1} \text{ e adevărat} \end{cases}$  ddacă

$$\begin{cases} |M_n| \in 2\mathbb{N} + 1 \text{ și } n + 1 \notin M_{n+1} \\ \text{sau} \\ |M_n| \in 2\mathbb{N} \text{ și } n + 1 \in M_{n+1} \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} |M_n| \in 2\mathbb{N} + 1 \text{ și } |M_{n+1}| = |M_n| \\ \text{sau} \\ |M_n| \in 2\mathbb{N} \text{ și } |M_{n+1}| = |M_n| + 1 \end{cases} \text{ ddacă } |M_{n+1}| \in 2\mathbb{N} + 1, \text{ pentru}$$

că acestea sunt singurele cazuri posibile în care avem  $|M_{n+1}| \in 2\mathbb{N} + 1$ , întrucât  $|M_{n+1}| \in \{|M_n|, |M_n| + 1\}$ .

Conform **principiului inducției matematice**, rezultă că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_n$  este adevărat ddacă  $|M_n| \in 2\mathbb{N} + 1$ .

② Conform notațiilor fără paranteze de mai sus:

- $B_1 = A_1$  și, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B_{n+1} = B_n \text{ xor } A_{n+1}$ , așadar, conform definiției diferenței simetrice:
- pentru orice element  $x$ , dacă, pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n$  este proprietatea  $x \in A_n$ , atunci, pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in B_n$  ddacă  $x$  satisface proprietatea  $q_n$ .

Așadar, conform ①, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in B_n$  ddacă  $|\{i \in \overline{1, n} \mid x \in A_i\}| \in 2\mathbb{N} + 1$ .

Acum putem demonstra asociativitatea diferenței simetrice: conform proprietății ② din remarcă anterioară și **comutativității diferenței simetrice**, precum și **asociativității** și **comutativității intersecției**, pentru orice mulțimi  $A, B, C$  și orice element  $x$ , avem:  $x \in (A \Delta B) \Delta C$  ddacă  $x \in A \cap B \cap C$  sau  $x \in A \setminus (B \cup C)$  sau  $x \in B \setminus (A \cup C)$  sau  $x \in C \setminus (A \cup B)$  ddacă  $x \in B \cap C \cap A$  sau  $x \in B \setminus (A \cup C)$  sau  $x \in C \setminus (A \cup B)$  sau  $x \in A \setminus (B \cup C)$  ddacă  $x \in (B \Delta C) \Delta A$  ddacă  $x \in A \Delta (B \Delta C)$ , prin urmare  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

**Exercițiul 3.** Fie  $T$  o mulțime, iar  $A, B \in \mathcal{P}(T)$ . Pentru orice  $X \in \mathcal{P}(T)$ , notăm cu  $\overline{X} = T \setminus X$ . Să demonstrăm următoarele:

- $\overline{\overline{A}} \in \mathcal{P}(T)$ , adică  $\overline{\overline{A}} \subseteq T$ —
- $\overline{\emptyset} = T$  și  $\overline{T} = \emptyset$ —

$\overline{A} = T \setminus A \subseteq T$ ,  $\overline{\emptyset} = T \setminus \emptyset = T$  și  $\overline{T} = T \setminus T = \emptyset$ . Am folosit proprietăți din Exercițiul 1; vom folosi și în cele ce urmează proprietăți demonstrate în acest exercițiu de mai sus.

Amintesc că, pentru orice proprietate  $p$  asupra elementelor lui  $T$ , avem:

$$(\forall x \in T) (p(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (x \in T \Rightarrow p(x)).$$

Cum  $A \subseteq T$  și  $B \subseteq T$ , avem:  $A = A \cap T$  și  $B = B \cap T$ . Prin urmare:

$A = B$  ddacă  $A \cap T = B \cap T$  ddacă  $(\forall x)(x \in A \cap T \Leftrightarrow x \in B \cap T)$  ddacă  $(\forall x)[x \in T \Rightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$  ddacă  $(\forall x \in T)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ;

$A \subseteq B$  ddacă  $A \cap T \subseteq B \cap T$  ddacă  $(\forall x)(x \in A \cap T \Rightarrow x \in B \cap T)$  ddacă  $(\forall x)[x \in T \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)]$  ddacă  $(\forall x \in T)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ .

Aşadar, pentru a demonstra următoarele proprietăţi, putem fixa un  $x \in T$ , arbitrar. Pentru un  $x \in T$  avem:  $x \in \bar{A} = T \setminus A$  ddacă  $[x \in T \text{ şi } x \notin A]$  ddacă  $x \notin A$ .

Fie, aşadar,  $x \in T$ , arbitrar, fixat.

- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$  —

$x \in A \setminus B$  ddacă  $[x \in A \text{ şi } x \notin B]$  ddacă  $[x \in A \text{ şi } x \in \bar{B}]$  ddacă  $x \in A \cap \bar{B}$ . Aşadar  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

- $\bar{\bar{A}} = A$  —

$x \in \bar{\bar{A}}$  ddacă  $x \notin \bar{A}$  ddacă  $\text{not}(x \in \bar{A})$  ddacă  $\text{not}(x \notin A)$  ddacă  $x \in A$ . Prin urmare  $\bar{\bar{A}} = A$ .

- **legile lui De Morgan:** 
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$
 —

$x \in \overline{A \cup B}$  ddacă  $x \notin A \cup B$  ddacă  $\text{not}(x \in A \text{ sau } x \in B)$  ddacă  $[x \notin A \text{ şi } x \notin B]$  ddacă  $[x \in \bar{A} \text{ şi } x \in \bar{B}]$  ddacă  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ . Aşadar  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

$x \in \overline{A \cap B}$  ddacă  $x \notin A \cap B$  ddacă  $\text{not}(x \in A \text{ şi } x \in B)$  ddacă  $[x \notin A \text{ sau } x \notin B]$  ddacă  $[x \in \bar{A} \text{ sau } x \in \bar{B}]$  ddacă  $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ . Aşadar  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$  —

- $A = B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$  —

- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \bar{B} \subsetneq \bar{A}$  —

Dacă  $A \subseteq B$ , atunci:  $x \in \bar{B}$ , adică  $x \notin B$ , implică  $x \notin A$ , adică  $x \in \bar{A}$ . Aşadar  $A \subseteq B$  implică  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ , prin urmare  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$  implică  $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{\bar{B}}$ , adică  $A \subseteq B$ . Aşadar:  $A \subseteq B$  ddacă  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ .

În consecinţă:  $A = B$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ şi } B \subseteq A]$  ddacă  $[\bar{B} \subseteq \bar{A} \text{ şi } \bar{A} \subseteq \bar{B}]$  ddacă  $\bar{A} = \bar{B}$ .

Prin urmare:  $A \subsetneq B$  ddacă  $[A \subseteq B \text{ şi } A \neq B]$  ddacă  $[\bar{B} \subseteq \bar{A} \text{ şi } \bar{B} \neq \bar{A}]$  ddacă  $\bar{B} \subsetneq \bar{A}$ .

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$  şi  $A \cup \bar{A} = T$  —

mai mult:

- $A \cap B = \emptyset$  ddacă  $A \subseteq \bar{B}$  ddacă  $B \subseteq \bar{A}$  —

- $A \cup B = T$  ddacă  $A \supseteq \bar{B}$  ddacă  $B \supseteq \bar{A}$  —

- $$\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad \text{ddacă } A = \bar{B} \text{ ddacă } B = \bar{A}$$
 —

$x \in A \cap \bar{A}$  ddacă  $[x \in A \text{ şi } x \in \bar{A}]$  ddacă  $[x \in A \text{ şi } x \notin A]$  ddacă  $x \in \emptyset$ , întrucât aceste două ultime afirmaţii sunt ambele false. Aşadar  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

Prin urmare, conform celei de-a doua legi a lui De Morgan şi autodualităţii complementării:  $A \cup \bar{A} = \bar{\bar{A}} \cup \bar{A} = \overline{\bar{A} \cap A} = \overline{\emptyset} = T$ .

Cele două egalităţi precedente rezultă şi din următoarele echivalenţe.

$A \cap B = \emptyset$  ddacă  $A \cap \bar{B} = \emptyset$  ddacă  $A \setminus \bar{B} = \emptyset$  ddacă  $A \subseteq \bar{B}$ , prin urmare:  $A \cap B = \emptyset$  ddacă  $B \cap A = \emptyset$  ddacă  $B \subseteq \bar{A}$ .

În consecinţă:  $A \cup B = T$  ddacă  $\overline{A \cap B} = \bar{T}$  ddacă  $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$  ddacă  $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{B}}$  ddacă  $\bar{A} \subseteq B$ , prin urmare:  $A \cup B = T$  ddacă  $B \cup A = T$  ddacă  $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ .

Aşadar: 
$$\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} \quad \text{ddacă } [A \subseteq \bar{B} \text{ şi } \bar{B} \subseteq A] \text{ ddacă } A = \bar{B} \text{ ddacă } \bar{A} = \bar{\bar{B}} \text{ ddacă } B = \bar{A}.$$

Pentru ultima echivalenţă puteam folosi şi comutativitatea reuniunii şi a intersecţiei, ca mai sus.

- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{---}$

Cu scrierea de mai sus pentru diferență ca fiind intersecția cu complementara, a doua lege a lui De Morgan, distributivitatea intersecției față de reuniune și din nou această scriere a diferenței de mulțimi:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \emptyset = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B.$$

**Exercițiul 4.** Fie  $a, b, c, d$  proprietăți ale substanțelor (putem restrânge cadrul la substanțele din eprubetele dintr-un laborator, de exemplu), astfel încât:

- ① dacă o substanță are proprietățile  $a$  și  $b$ , atunci acea substanță are exact una dintre proprietățile  $c$  și  $d$ ;
- ② dacă o substanță are proprietățile  $b$  și  $c$ , atunci acea substanță are:  $\begin{cases} \text{fie ambele proprietăți } a \text{ și } d, \\ \text{fie niciuna dintre proprietățile } a \text{ și } d; \end{cases}$
- ③ dacă o substanță nu are niciuna dintre proprietățile  $a$  și  $b$ , atunci acea substanță nu are niciuna dintre proprietățile  $c$  și  $d$ .

Să se demonstreze, prin calcul cu mulțimi, că:

- (I) dacă o substanță nu are niciuna dintre proprietățile  $a$  și  $b$ , atunci acea substanță nu are proprietatea  $c$ ;
- (II) nu există substanță care să aibă proprietățile  $a, b$  și  $c$ .

**Rezolvare:** Să notăm cu:  $T :=$  mulțimea tuturor substanțelor;

$A :=$  mulțimea substanțelor care au proprietatea  $a$ ;

$B :=$  mulțimea substanțelor care au proprietatea  $b$ ;

$C :=$  mulțimea substanțelor care au proprietatea  $c$ ;

$D :=$  mulțimea substanțelor care au proprietatea  $d$ .

De asemenea, pentru orice  $X \subseteq T$ , să notăm cu  $\overline{X} := T \setminus X$ .

Atunci, de exemplu, mulțimea substanțelor care nu au proprietatea  $a$  este  $\overline{A}$ .

Să transcriem condițiile ①, ② și ③ în proprietăți ale mulțimilor  $A, B, C, D$ :

Condiția ① spune că  $(a \text{ și } b) \Rightarrow (c \text{ xor } d)$ , pentru că substanțele care au exact una dintre proprietățile  $c$  și  $d$

sunt cele care:  $\begin{cases} \text{au proprietatea } c \text{ și nu au proprietatea } d, \\ \text{sau} \\ \text{au proprietatea } d \text{ și nu au proprietatea } c, \end{cases}$  adică substanțele cu proprietatea  $(c \text{ xor } d)$ . Așadar:

$$\textcircled{1} \iff A \cap B \subseteq (C \setminus D) \cup (D \setminus C) = C \Delta D.$$

Condiția ② spune că  $(b \text{ și } c) \Rightarrow [(a \text{ și } d) \text{ sau } (\text{non } a \text{ și } \text{non } d)]$ . A se observa că proprietatea din dreapta acestei implicații este echivalentă cu  $\text{non}(a \text{ xor } d)$ ; de asemenea, putem observa că această proprietate este echivalentă cu  $[(a \text{ și } d) \text{ xor } (\text{non } a \text{ și } \text{non } d)]$ , întrucât proprietățile  $(a \text{ și } d)$  și  $(\text{non } a \text{ și } \text{non } d)$  nu pot fi simultan adevărate. Așadar:

$$\textcircled{2} \iff B \cap C \subseteq (A \cap D) \cup (\overline{A} \cap \overline{D}) \quad (= \overline{A \Delta D}).$$

Condiția ③ spune că  $(\text{non } a \text{ și } \text{non } b) \Rightarrow (\text{non } c \text{ și } \text{non } d)$ . Așadar:

$$\textcircled{3} \iff \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{C} \cap \overline{D}.$$

Acum să transcriem ce avem de demonstrat în proprietăți ale mulțimilor  $A, B, C, D$ :

$$(I) \iff \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{C} \text{---}$$

$$(II) \iff A \cap B \cap C = \emptyset \text{---}$$

Să demonstrăm aceste proprietăți.

(I) Conform lui ③,  $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{C} \cap \overline{D} \subseteq \overline{C}$ , așadar  $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{C}$ .

(II) Intersectând cu  $C$  în ambii membri ai incluziunii corespunzătoare lui ①, obținem:

$$A \cap B \cap C \subseteq [(C \setminus D) \cup (D \setminus C)] \cap C = [(C \setminus D) \cap C] \cup [(D \setminus C) \cap C] = (C \setminus D) \cup \emptyset = C \setminus D, \text{ întrucât } C \setminus D \subseteq C.$$

Intersectând cu  $A$  în ambii membri ai incluziunii corespunzătoare lui ②, obținem:

$$A \cap B \cap C \subseteq A \cap [(A \cap D) \cup (\overline{A} \cap \overline{D})] = (A \cap A \cap D) \cup (A \cap \overline{A} \cap \overline{D}) = (A \cap D) \cup (\emptyset \cap \overline{D}) = (A \cap D) \cup \emptyset = A \cap D.$$

Așadar:  $A \cap B \cap C \subseteq C \setminus D$  și  $A \cap B \cap C \subseteq A \cap D$ , prin urmare:

$$A \cap B \cap C \subseteq (C \setminus D) \cap A \cap D = (C \setminus D) \cap D \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset, \text{ așadar } A \cap B \cap C = \emptyset.$$