Logică Matematică şi Computaţională
Cursurile III și IV

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2021–2022, Semestrul I

Relații n–are, relații binare

Definiție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi. Se numește *relație n–ară* între mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observație

Pentru $n = 1$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație unară* pe o mulțime: prin definiție, o *relație unară* pe o mulțime A este o submulțime a lui A.
Pentru $n = 2$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație binară*.

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se numește *relație binară* între A și B o submulțime R a produsului direct $A \times B$.
Pentru fiecare $a \in A$ și fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a\,R\,b$ și se citește: *a este în relația R cu b*.

Exemplu

Pentru orice mulțimi A și B, produsul direct $A \times B$ este o relație binară între A și B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relațiile binare între A și B).

Tipuri de relații binare

Definiție (tipuri de relații binare)

Fie A și B mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relație binară între A și B). R se zice:

- *funcțională* ddacă: pentru orice $a \in A$ și orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a \, R \, b_1$ și $a \, R \, b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relație funcțională între A și B se mai numește *funcție parțială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a \, R \, b$; o relație funcțională totală între A și B se mai numește *funcție* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ și orice $b \in B$, dacă $a_1 \, R \, b$ și $a_2 \, R \, b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a \, R \, b$.

Remarcă

Definiția de mai sus a unei funcții este exact definiția din cursul al doilea, în care identificăm o funcție cu graficul ei: o funcție $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noțiunea de funcție injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relație funcțională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă și surjectivă.

Tipuri de relații binare

Într–adevăr:

Remarcă

Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relație funcțională (funcție parțială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puțin un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- așadar, R este o **funcție** ddacă este o **relație funcțională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puțin un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație injectivă și surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație funcțională totală injectivă/surjectivă/injectivă și surjectivă** ddacă este o **funcție injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Diagonala unei mulțimi, și o temă obligatorie

Exercițiu (TEMĂ OBLIGATORIE privind relațiile funcționale totale)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$. Considerăm f ca relație binară de la A la B, i.e. o identificăm cu graficul ei. Demonstrați că: $f = A \times B$ ddacă $\begin{cases} A = \emptyset \\ \text{sau} \\ |B| = 1. \end{cases}$

Definiție

Pentru orice mulțime A,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relație binară între A și A, numită *diagonala lui A*.

Remarcă ($\Delta_A =$ egalitatea pe A)

Pentru orice mulțime A, Δ_A este chiar **relația de egalitate pe** A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a \, \Delta_A \, b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarcă ($\Delta_A = id_A$)

Pentru orice mulțime A, Δ_A este o funcție, chiar o funcție bijectivă, anume **funcția identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \to A, \text{ pentru orice } a \in A, \ id_A(a) = a.$$

Operații cu relații binare

- Relațiile sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc..
- Astfel, pentru orice mulțimi A, B și orice relații binare R și S între A și B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relații binare între A și B.

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, A', B' și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $R' \subseteq A' \times B'$, se definește *produsul direct* al relațiilor R și R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relație binară între $A \times A'$ și $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulțime I, orice familii de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ și orice familie de relații binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se definește *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod\limits_{i \in I} R_i$, ca fiind următoarea relație binară între $\prod\limits_{i \in I} A_i$ și $\prod\limits_{i \in I} B_i$: $\prod\limits_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i, b_i \in B_i$ și $a_i\, R_i\, b_i)\} \subseteq \prod\limits_{i \in I} A_i \times \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Produsul direct de relații binare

Observație

Definiția produsului direct de relații binare este diferită de definiția produsului direct de mulțimi al acelorași relații binare, adică de produsul lor direct ca mulțimi. Mulțimile obținute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecție, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulțimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecției în cauză cu identitatea.

Exemplu

Dacă $R := \{(1,1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ și $S := \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, atunci:

- produsul direct al relațiilor binare R și S este: $R \times S = \{((1,0),(1,0)),((1,0),(-1,0))\} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$;
- produsul direct al mulțimilor R și S este: $R \times S = \{((1,1),(0,0)),((1,-1),(0,0))\} = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (două scrieri alternative, dintre care este folosită, de obicei, a doua, fără paranteze redundante).

Produsul direct de relații binare

Remarcă (facultativă)

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă avem încă o pereche de relații binare $S \subseteq A \times B$ și $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S și S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ și } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relații binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ și, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ și $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \Leftrightarrow (\forall\, i \in I)\, (R_i = S_i)$$

Într–adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalența de mai sus rezultă, prin dublă implicație, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;

Produsul direct de relații binare

Remarcă (continuare)

- $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} S_i$ ddacă are loc echivalența:
  $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalența:
  $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarcă (facultativă)

Desigur, și pentru două familii de mulțimi nevide $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ indexate de aceeași mulțime nevidă I, avem:

$$\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i\in I} B_i \Leftrightarrow (\forall\, i \in I)\,(A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i\in I}$, avem:
$(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \Leftrightarrow (\forall\, i \in I)\,(x_i \in A_i)$, și la fel pentru $(B_i)_{i\in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ au aceleași elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i și B_i au aceleași elemente.

Compunerea relațiilor binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, C și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$, se definește *compunerea lui S cu R* ca fiind relația binară între A și C notată $S \circ R$ și definită prin:
$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists\, b \in B)\, [(a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarcă (temă)

Diagonala unei mulțimi este element neutru la compunere și la dreapta, și la stânga, i. e., pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$,
$R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.
Demonstrația folosește faptul că diagonala unei mulțimi este relația de egalitate pe acea mulțime, și este imediată.

Remarcă

Compunerea ca relații binare a două funcții coincide cu compunerea lor ca funcții. În particular, rezultatul ei este tot o funcție.
Într–adevăr, să considerăm trei mulțimi A, B, C și două funcții $f : A \to B$ și $g : B \to C$.
Ca relații binare, deci identificate cu graficele lor, $f \subseteq A \times B$ și $g \subseteq B \times C$ sunt

Compunerea funcțiilor e un caz particular

următoarele relații binare funcționale totale:

- $f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$: pentru fiecare $a \in A$, există și este unic $b = f(a)$ cu proprietatea că $(a, b) \in f$;
  și
- $g = \{(b, f(b)) \mid b \in B\}$: pentru fiecare $b \in B$, există și este unic $c = g(b)$ cu proprietatea că $(b, c) \in g$.

Notăm cu $g \circ f$ compunerea lui g cu f ca relații binare conform definiției de mai sus, și, ad–hoc, cu $g \square f$ compunerea lui g cu f ca funcții, conform definiției uzuale:
$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists\, b \in B)\,((a, b) \in f \text{ și } (b, c) \in g)\} = \{(a, c) \in A \times C \mid (\exists\, b \in B)\,(b = f(a) \text{ și } c = g(b)\} = \{(a, c) \in A \times C \mid c = g(f(a))\} = \{(a, g(f(a))) \mid a \in A\}$;
$g \square f : A \to C$, pentru fiecare $a \in A$, $(g \square f)(a) = g(f(a))$, adică $g \square f \subseteq A \times C$ este următoarea relație binară funcțională totală:
$g \square f = \{(a, (g \square f)(a)) \mid a \in A\} = \{(a, g(f(a))) \mid a \in A\}$.
Așadar $g \circ f = g \square f$.
Desigur, în continuare vom folosi notația obișnuită $g \circ f$ pentru compunerea a două funcții g și f, nu cea temporară $g \square f$ de mai sus.

Inversa unei relații binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, se definește *inversa lui* R, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relație binară între B și A:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiție, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$:

$$b\, R^{-1}\, a \Leftrightarrow a\, R\, b$$

Remarcă

A se observa faptul că, pentru orice relație binară R, se definește inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcții, care se definesc numai pentru funcțiile bijective, această restricție provenind atât din constrângerea ca relația binară să fie funcție, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcție (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiția funcției este exact definiția bijectivității (i. e. a injectivității și surjectivității) în oglindă).

Inversa unei relații binare

Remarcă

A se observa că o relație binară injectivă și surjectivă nu este neapărat o funcție (bijectivă), pentru că nu i se impune condiția de a fi funcțională, și nici cea de a fi totală.

Exercițiu (temă)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcțională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă și surjectivă ddacă R^{-1} este funcție.

Cum $(R^{-1})^{-1} = R$, din cele de mai sus rezultă și:

- R^{-1} este injectivă ddacă R este funcțională;
- R^{-1} este surjectivă ddacă R este totală;
- prin urmare: R^{-1} este injectivă și surjectivă ddacă R este funcție.

Așadar: R este funcție și R^{-1} este funcție ddacă R este funcție bijectivă ddacă R^{-1} este funcție bijectivă.

Comportarea inversei unei relații binare față de compunere

Exercițiu (temă)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- R este totală ddacă $R^{-1} \circ R \supseteq \Delta_A$;
- R este funcțională ddacă $R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$;
- R este surjectivă ddacă $R \circ R^{-1} \supseteq \Delta_B$.

Așadar:

- R este injectivă și totală ddacă $R^{-1} \circ R = \Delta_A$;
- R este funcțională și surjectivă ddacă $R \circ R^{-1} = \Delta_B$.

Prin urmare:

- R este funcție bijectivă ddacă $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ și $R \circ R^{-1} = \Delta_B$.

Amintesc că $\Delta_A = id_A$ și $\Delta_B = id_B$.

Inversa unei funcții e caz particular al inversei unei relații

Remarcă

Inversa ca relație a unei funcții bijective este inversa ei ca funcție.
Într–adevăr, să considerăm două mulțimi A, B și o funcție bijectivă $f : A \to B$. Atunci f este relația binară funcțională totală $f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$ și, fiind funcție bijectivă, este inversabilă ca funcție.
Să notăm, ca mai sus, cu f^{-1} inversa lui f ca relație binară și, ad–hoc, cu $f^\star$ inversa lui f ca funcție.
Atunci:

- $f^{-1} = \{(f(a), a) \mid a \in A\} \subseteq B \times A$,
  iar
- $f^\star : B \to A$ este definită prin: oricare ar fi $b \in B$, $f^\star(b) = a$, unde $a \in A$ este unicul element care satisface $f(a) = b$, prin urmare, ca relație binară, $f^\star = \{(b, f^\star(b)) \mid b \in B\} \subseteq B \times A$.

Așadar, pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$: $(b, a) \in f^{-1}$ ddacă $b = f(a)$ ddacă $f^\star(b) = a$ ddacă $(b, a) \in f^\star$.
Cum (b, a) este un element arbitrar al lui $B \times A$, rezultă că $f^{-1} = f^\star$.
Desigur, în continuare vom folosi notația obișnuită f^{-1} pentru inversa unei funcții bijective f, nu cea temporară $f^\star$ de mai sus.

Remarcă (asociativitatea compunerii de relații binare)

Fie A, B, C, D mulțimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ și $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Într-adevăr, $T \circ (S \circ R) = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, c \in C)\, ((a, c) \in S \circ R \text{ și } (c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, c \in C)\, [(\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S) \text{ și } (c, d) \in T]\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, c \in C)\, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S \text{ și } (c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, b \in B)\, (\exists\, c \in C)\, ((a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S \text{ și } (c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, b \in B)\, [(a, b) \in R \text{ și } (\exists\, c \in C)\, ((b, c) \in S \text{ și } (c, d) \in T)]\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R \text{ și } (b, d) \in T \circ S)\} = (T \circ S) \circ R$. Am aplicat faptul că doi cuantificatori de același fel comută (aici avem doi cuantificatori existențiali) și domeniul unui cuantificator existențial poate fi extins peste un termen al unei conjuncții logice în care nu apare variabila cuantificată.

Remarcă

Fie A, B, C mulțimi, $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Într-adevăr, $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(c, a) \mid c \in C, a \in A, (\exists\, b \in B)\, ((c, b) \in S^{-1} \text{ și } (b, a) \in R^{-1})\} = \{(c, a) \mid a \in A, c \in C, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S)\} = \{(c, a) \mid (a, c) \in S \circ R\} = (S \circ R)^{-1}$.

Exercițiu (temă)

Fie A, B, C și I mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R, S \in \mathcal{P}(A \times B)$ și $T, U \in \mathcal{P}(B \times C)$ relații binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare de la A la B, i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.

Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\emptyset_A^{-1} = \emptyset$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea, intersecția și diferența, deci și cu diferența simetrică:**
  1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$; **generalizare:** $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$
  2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$; **generalizare:** $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$
  3. $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$
  4. $(R \Delta S)^{-1} = R^{-1} \Delta S^{-1}$

Exercițiu (temă – continuare)

- **compunerea este distributivă față de reuniune, la stânga și la dreapta:**
  1. $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$; **generalizare:** $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (T \circ R_i)$
  2. $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$; **generalizare:** $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ P)$
- **compunerea nu este distributivă față de intersecție (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ și $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ și $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S))$
- **compunerea (la stânga și la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**
  1. $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $T \circ R \subsetneq T \circ S$)
  2. $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $R \circ P \subsetneq S \circ P$)

  prin urmare:
  1. $R \subseteq S$ și $T \subseteq U$ implică $T \circ R \subseteq U \circ S$
  2. $T \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i)$
  3. $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ P)$

Să ne amintim definiția puterilor unei mulțimi

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.
Amintesc definiția **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i\in I}$ (numit și **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i\in I}$):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i\in I)\,(a_i\in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i\in I)\,(f(i)\in A_i)\}.$$

Fie A o mulțime arbitrară.
Amintesc că **puterile unei mulțimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i\in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\} = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i\in I)\,(a_i\in A)\} = \prod_{i\in I} A.$$

Notația următoare, a *puterii a n–a a unei mulțimi A*, A^n, pentru un număr natural nenul n, corespunde cazului particular $I=\overline{1,n}$ și $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

Să ne amintim următoarea convenție

Notație

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A, se notează:

$$A^n := A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}.$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Relații binare pe o mulțime

- În tot restul acestui curs, când nu se va menționa altfel, A va fi o mulțime arbitrară.

Definiție

Se numește *relație binară pe A* o relație binară între A și A, i. e. o submulțime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplu

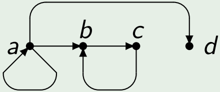
A^2 și Δ_A sunt relații binare pe A.

Remarcă

Dacă A este finită și nevidă, iar R este o relație binară pe A, atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulțimea vârfurilor A și mulțimea arcelor R), așadar relația binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

Exemplu

Relația binară $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, b)\}$ pe mulțimea cu exact 4 elemente $A = \{a, b, c, d\}$ poate fi reprezentată grafic astfel:



Operații cu relații binare pe o mulțime

Definiție (puterile naturale ale unei relații binare pe o mulțime)

Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, se definește *puterea a n–a a lui R*, notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarcă

Cum Δ_A este element neutru la compunerea de relații binare, din definiția anterioară obținem că, pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$, $R^1 = R$, pentru că:

$$R^1 = R^0 \circ R = \Delta_A \circ R = R.$$

Remarcă

Asociativitatea compunerii de relații binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relație binară R pe A și orice număr natural n:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R},$$

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă (continuare)

cu **licența de scriere (convenția):**

$$R^0 = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{0 \text{ de } R} = \Delta_A.$$

Faptul că Δ_A este element neutru la compunere face posibilă această notație unitară (pentru orice n natural, inclusiv pentru 0) în următoarea remarcă.

Notă

Pentru o relație binară R și un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notația R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operație care poate fi definită numai dacă R este o relație binară pe o mulțime, nu între două mulțimi diferite) sau produsul direct de relații binare $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulțimi $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă (comutarea și adunarea exponenților naturali la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime)

Compunerea de relații binare nu este comutativă, nici în cazul în care relațiile compuse sunt relații binare pe aceeași mulțime, în care ar avea sens comutativitatea compunerii. Știm că, nici în cazul particular al compunerii de funcții (de la o mulțime la aceeași mulțime, ca să aibă sens comutativitatea), compunerea nu este comutativă. Dar, în cazul particular al compunerii puterilor naturale (chiar întregi de același semn – vom vedea) ale unei aceleiași relații binare, are loc comutativitatea compunerii (și, în plus, adunarea exponenților). Asociativitatea compunerii de relații binare implică faptul că două puteri naturale ale aceleiași relații binare comută și se adună la compunere. Într-adevăr, pentru orice $R \subseteq A \times A$ și orice $n, k \in \mathbb{N}$, $R^n \circ R^k = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} =$
$\underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} = R^k \circ R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n+k \text{ de } R} = R^{n+k}$ (am mutat parantezele, apoi le–am eliminat).

Vom vedea că aceste egalități sunt valabile pentru orice n, k întregi de același semn.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă

$$\Delta_A^{-1} = \Delta_A.$$

Într-adevăr, $\Delta_A^{-1} = \{(b,a) \mid a \in A, b \in A, (a,b) \in \Delta_A\} = \{(b,a) \mid a \in A, b \in A, a = b\} = \{(a,a) \mid a \in A\} = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Aplicăm inducție după $n \in \mathbb{N}$:
Pasul de verificare: Pentru $n = 0$ avem: $(R^0)^{-1} = (\Delta_A)^{-1} = \Delta_A = (R^{-1})^0$.
Pasul de inducție: Presupunem că $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$, arbitrar, fixat. Conform egalității $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$, stabilite mai sus, ipotezei de inducție și adunării exponenților naturali la compunerea puterilor unei relații binare, observate mai sus,
$(R^{n+1})^{-1} = (R^n \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (R^n)^{-1} = R^{-1} \circ (R^{-1})^n = (R^{-1})^{n+1}$.
Raționamentul prin inducție matematică este încheiat.
Așadar $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Definiție (puterile întregi negative ale unei relații binare pe o mulțime)

Pentru orice relație binară $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, se definește:

$$R^{-n} := (R^{-1})^n.$$

Remarcă

Din remarca precedentă și faptul că $\Delta_A = \Delta_A^{-1}$, obținem: pentru orice relație binară $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}$:

$$R^{-n} = (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}.$$

Aplicând aceste egalități pentru R^{-1} și un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar, alături de faptul că $(R^{-1})^{-1} = R$, rezultă:
$R^{-(-n)} = R^n = ((R^{-1})^{-1})^n = (R^{-1})^{-n} = ((R^{-1})^n)^{-1} = (R^{-n})^{-1}$, așadar egalitățile de mai sus sunt valabile pentru orice n întreg: oricare ar fi $R \subseteq A^2$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$:

$$R^{-n} = (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}.$$

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă (comutarea și adunarea exponenților întregi de același semn la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime – facultativă)

Fie $R \subseteq A^2$ și n, k două numere întregi de același semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

Aceste egalități au fost stabilite pentru $n, k \in \mathbb{N}$. Folosindu–le, alături de prima egalitate din remarca anterioară (care spune că egalitatea din definiția precedentă este valabilă și pentru $n = 0$), obținem: pentru orice n, k întregi cu $n, k \leq 0$, $R^n \circ R^k = (R^{-1})^{-n} \circ (R^{-1})^{-k} = (R^{-1})^{-k} \circ (R^{-1})^{-n} = R^k \circ R^n = (R^{-1})^{-n-k} = R^{n+k}$.

Remarcă (exponenții întregi de semne diferite (i. e. unul natural nenul, iar celălalt întreg strict negativ) nu comută și nu se adună la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime – facultativă)

După cum știm, în cazul particular al funcțiilor, orice exponenți întregi comută și se adună la compunerea puterilor unei funcții de la o mulțime la aceeași mulțime, dar numai în cazul în care puterile negative ale unei funcții sunt tot funcții, adică în cazul funcțiilor bijective, pentru care se definește inversa ca funcție, nu numai ca relație binară.

Remarcă (exponenții întregi de semne diferite nu comută și nu se adună la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime, în general – continuare)

În cazul general al relațiilor binare, aceste proprietăți nu sunt valabile. De **exemplu**, dacă $A = \{a, b, c\}$ este o mulțime cu exact 3 elemente și $R = \{(a, b), (a, c)\}$, atunci:

- $R^{-1} = \{(b, a), (c, a)\}$, așadar:
- $R^{-1} \circ R = \{(a, a)\}$,
- $R \circ R^{-1} = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$,

și, desigur, $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} = \Delta_A = R^0 = R^{1-1} = R^{-1+1}$.
Prin urmare (considerând exponenții $n = 1$ și $k = -1$):

- $R^{-1} \circ R^1 = R^{-1} \circ R \subsetneq \Delta_A = R^{-1+1}$;
- $R^1 \circ R^{-1} = R \circ R^{-1} \neq \Delta_A = R^{1-1}$, chiar $R \circ R^{-1}$ și Δ_A sunt incomparabile, adică: $R \circ R^{-1} \nsubseteq \Delta_A$ și $R \circ R^{-1} \nsupseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R \neq R \circ R^{-1}$, chiar $R^{-1} \circ R$ și $R \circ R^{-1}$ sunt incomparabile: $R^{-1} \circ R \nsubseteq R \circ R^{-1}$ și $R^{-1} \circ R \nsupseteq R \circ R^{-1}$, și sunt chiar disjuncte: $(R^{-1} \circ R) \cap (R \circ R^{-1}) = \emptyset$.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa.

Observație

Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relație binară totală** este specific **relațiilor binare pe o mulțime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relații binare în general (relații binare între două mulțimi)**, și **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relațiilor binare pe o mulțime.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi – temă)

Fie R o relație binară pe A. Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu și reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică este Δ_A;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu și reciproc;
- singura relație binară pe A care este simultan simetrică și asimetrică este $\emptyset$;

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi – temă – continuare)

- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu și reciproc;
- R este asimetrică și tranzitivă ddacă R este ireflexivă și tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă și totală.

Observație

Cazul degenerat $A = \emptyset$ este trivial (toate proprietățile de mai sus sunt, evident, satisfăcute pentru $A = \emptyset$) și poate fi eliminat din demonstrație.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine (parțială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine totală* ddacă e simultan o relație de ordine și o relație totală (în acest al doilea sens de mai sus);
- *(relație de) ordine strictă* ddacă e asimetrică și tranzitivă.

Remarcă (consecință a remarcii anterioare)

- Întrucât orice relație de ordine este reflexivă, rezultă că o relație de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.
- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă

Am văzut mai sus că următoarele caracterizări pentru **relațiile de ordine strictă** sunt echivalente: o relație binară pe o mulțime este **asimetrică și tranzitivă** ddacă este **ireflexivă și tranzitivă**.

Remarcă

Orice relație de ordine este reflexivă, și orice relație de ordine strictă este ireflexivă. Nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan reflexive și ireflexive.

Prin urmare, nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan relații de ordine și relații de ordine strictă (i. e. nicio relație de ordine pe o mulțime nevidă nu e relație de ordine strictă, și nicio relație de ordine strictă pe o mulțime nevidă nu e relație de ordine).

Remarcă (temă)

Dată o relație de ordine R pe A, rezultă că $R \setminus \Delta_A$ e o relație de ordine strictă pe A, și, dată o relație de ordine strictă S pe A, rezultă că $S \cup \Delta_A$ e o relație de ordine pe A. (Vom reveni la această remarcă; asocierile de mai sus stabilesc două bijecții, inverse una celeilalte, între mulțimea relațiilor de ordine pe A și mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A.)

Exemple de diferite tipuri de relații binare pe o mulțime

- Relația $\leq$ pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ este o relație de ordine totală, numită *relația de ordine naturală* pe fiecare dintre aceste mulțimi de numere, iar relația $<$ pe fiecare dintre aceste mulțimi este o relație de ordine strictă.
- Pentru orice mulțime T, relația $\subseteq$ pe $\mathcal{P}(T)$ este o relație de ordine parțială, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$ (dacă $T = \emptyset$ sau $|T| = 1$, atunci $\mathcal{P}(T) = \{\emptyset, T\}$, și $\emptyset \subseteq T$, iar, dacă există $a, b \in T$ cu $a \neq b$, atunci $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ și $\{b\} \nsubseteq \{a\}$), iar $\subsetneq$ este o relație de ordine strictă pe $\mathcal{P}(T)$.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relație de ordine parțială.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care nu este antisimetrică (deci nu e relație de ordine), pentru că, de exemplu: $(-3)|3$ și $3|(-3)$, dar $-3 \neq 3$.
- Relația binară de a avea aceeași paritate (sau același rest modulo $n \in \mathbb{N}^*$), pe $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, este o relație de echivalență.
- Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A, anume cea mai mică și respectiv cea mai mare relație de echivalență pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relația $\subseteq$ (i. e., pentru orice relație de echivalență R pe A, avem $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$, unde prima incluziune are loc datorită reflexivității lui R, iar cea de–a doua este dată de definiția unei relații binare pe A).
- Δ_A este și o relație de ordine, anume cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii (datorită reflexivității relațiilor de ordine).
- Relația $\neq = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \neq b\} = A^2 \setminus \Delta_A$ este ireflexivă și simetrică.

Matrici caracteristice – facultativ

- Știm din cursul trecut că, pentru orice mulțime T, are loc: $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T = \{f \mid f : T \to \{0,1\}\}$, cu bijecția care duce fiecare $X \in \mathcal{P}(T)$ în funcția sa caracteristică $\chi_X : T \to \{0,1\}$.
- Relațiile binare pe A sunt părțile lui A^2, prin urmare există o bijecție între mulțimea $\mathcal{P}(A^2)$ a relațiilor binare pe A și $\{0,1\}^{A^2} = \{f \mid f : A^2 \to \{0,1\}\}$, anume bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în funcția sa caracteristică: $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$, pentru orice $a, b \in A$,

$$\chi_R(a,b) = \begin{cases} 0, & (a,b) \notin R \\ 1, & (a,b) \in R \end{cases}$$

- În cazul particular în care $|A| = n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pentru orice $R \subseteq A^2$, funcția caracteristică $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$ a lui R poate fi dată prin matricea valorilor ei, anume: $M(R) := (\chi_R(a_i, a_j))_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, prin urmare mulțimea relațiilor binare pe A se află în bijecție cu mulțimea $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ a matricilor pătratice de dimensiune n peste $\{0,1\}$, prin bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în matricea $M(R)$, numită *matricea booleană* sau *matricea caracteristică a relației R*.

Matrici caracteristice – facultativ

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $M = (m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}, P = (p_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, definim operațiile:

- $M \vee P := (\max\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \wedge P := (\min\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $\overline{M} := (1 - m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \circ P = (\min\{1, r_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}}$, unde $(r_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} = M \cdot P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente și R și S două relații binare pe A. Atunci:

1. $M(\Delta_A) = I_n$ *(matricea unitate)*
2. $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$ *și* $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$
3. $M(\overline{R}) = \overline{M(R)}$
4. $M(R^{-1}) = {}^t M(R)$ *(transpusa lui $M(R)$)*
5. $M(S \circ R) = M(R) \circ M(S)$

Matrici caracteristice – facultativ

Demonstrație: (1) $M(\Delta_A) = (\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = I_n$, pentru că: oricare ar fi $i,j \in \overline{1,n}$, $\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $(a_i, a_j) \in \Delta_A$ ddacă $a_i = a_j$ ddacă $i = j$.

(2) Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C - \chi_B \cdot \chi_C = \max\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta + \gamma - \beta \cdot \gamma = \max\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \vee M(S) = (\max\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cup S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cup S)$.
Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cap C} = \chi_B \cdot \chi_C = \min\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta \cdot \gamma = \min\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \wedge M(S) = (\min\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cap S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cap S)$.

(3) $\overline{R} = A^2 \setminus R$. Pentru orice $i,j \in \overline{1,n}$, $[(a_i, a_j) \in \overline{R}$ ddacă $(a_i, a_j) \notin R]$, deci $[\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_i, a_j) = 0$ ddacă $1 - \chi_R(a_i, a_j) = 1]$, așadar $\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1 - \chi_R(a_i, a_j)$. Prin urmare $M(\overline{R}) = (\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = (1 - \chi_R(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = \overline{M(R)}$.

(4) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in R^{-1}$ ddacă $(a_j, a_i) \in R]$, adică $[\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_j, a_i) = 1]$, deci $\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = \chi_R(a_j, a_i)$, prin urmare $M(R^{-1}) =^t M(R)$.

(5) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in S \circ R$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $(a_i, a_k) \in R$ și $(a_k, a_j) \in S]$, adică $[\chi_{S \circ R}(a_i, a_j) = 1$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\chi_R(a_i, a_k) = 1$ și $\chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\min\{\chi_R(a_i, a_k), \chi_S(a_k, a_j)\} = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î.

$\chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) \geq 1$ ddacă

$\min\{1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j)\} = 1]$, de unde rezultă egalitatea din enunț.

Observație

Notația $\circ$ pentru operația de mai sus între matrici caracteristice **nu** este consacrată.

Matrici caracteristice – facultativ

Exercițiu

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente, I o mulțime nevidă și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare pe A. Să se demonstreze că:

1. $M(\bigcup\limits_{i \in I} R_i) = \bigvee\limits_{i \in I} M(R_i)$
2. $M(\bigcap\limits_{i \in I} R_i) = \bigwedge\limits_{i \in I} M(R_i)$

Rezolvare: (1) Folosind rezultatul din cursul al doilea care spune că funcția caracteristică a unei reuniuni arbitrare de mulțimi este egală (punctual, adică în fiecare punct) cu maximul dintre funcțiile caracteristice ale mulțimilor care se reunesc, obținem:

$$\bigvee_{i \in I} M(R_i) = (\max\{\chi_{R_i}(a_j, a_k) \mid i \in I\})_{j,k \in \overline{1,n}} = (\chi_{\bigcup\limits_{i \in I} R_i}(a_j, a_k))_{j,k \in \overline{1,n}} = M(\bigcup_{i \in I} R_i).$$

(2) Analog cu (1). **Temă.**

Matrici caracteristice – facultativ

Exercițiu (temă)

Considerăm $A = \{a_1, a_2\}$ (o mulțime cu exact 2 elemente; și putem lua $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$, de exemplu) și R, S următoarele relații binare pe A: $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, $S = \{(a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$. Să se determine relația binară Q pe A dată de egalitatea: $Q = (R^3 \circ S^{-1}) \cup ((S^2 \circ R) \cap R^{-1})$.

Indicație: $M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind propoziția anterioară, putem calcula:
$M(Q) = ({}^t M(S) \circ M(R) \circ M(R) \circ M(R)) \vee ((M(R) \circ M(S) \circ M(S)) \wedge {}^t M(R))$,
iar Q este unica relație binară pe A care are această matrice caracteristică și poate fi ușor determinată pe baza acestei matrici, folosind definiția matricii caracteristice: pentru fiecare $i, j \in \overline{1, 2} = \{1, 2\}$, $(a_i, a_j) \in Q$ ddacă, în matricea $M(Q)$, componenta de pe linia i și coloana j are valoarea 1.

Matrici caracteristice – facultativ

Remarcă (temă)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente, iar $R \subseteq A^2$. Atunci:

1. R e reflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 1 pe toată diagonala principală;
2. R e ireflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 0 pe toată diagonala principală;
3. R e simetrică ddacă $M(R)$ e matrice simetrică, i. e. ddacă $M(R) = ^t M(R)$;
4. R e asimetrică ddacă $M(R) \wedge ^t M(R) = 0_n$ (matricea cu toate componentele nule);
5. R e totală ddacă $I_n \vee M(R) \vee ^t M(R) = 1_n$ (matricea cu toate componentele egale cu 1);
6. R e completă ddacă $M(R) \vee ^t M(R) = 1_n$.

Pot fi stabilite mai multe proprietăți de acest gen.

Lemă (temă)

Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ și $(C_i)_{i\in I}$ familii de mulțimi, iar $(Q_i)_{i\in I}$, $(R_i)_{i\in I}$ și $(S_i)_{i\in I}$ familii de relații binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ și $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- $\prod\limits_{i\in I} R_i \subseteq \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i \subseteq S_i)$;
- $\prod\limits_{i\in I} R_i = \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0, i_1 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$;
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} S_i) = \prod\limits_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ *(și la fel pentru* $\cup$, $\setminus$, Δ *în loc de* $\cap$*)*;
- $(\prod\limits_{i\in I} Q_i) \circ (\prod\limits_{i\in I} R_i) = \prod\limits_{i\in I}(Q_i \circ R_i)$;
- $(\prod\limits_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod\limits_{i\in I} R_i^{-1}$.

Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime

Propoziție

Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

1. $\prod_{i \in I} R_i$ *este reflexivă ddacă* R_i *este reflexivă, pentru fiecare* $i \in I$
2. *dacă există* $i_0 \in I$ *cu* R_{i_0} *ireflexivă, atunci* $\prod_{i \in I} R_i$ *este ireflexivă*
3. $\prod_{i \in I} R_i$ *este simetrică ddacă* R_i *este simetrică, pentru fiecare* $i \in I$
4. $\prod_{i \in I} R_i$ *este antisimetrică ddacă* R_i *este antisimetrică, pentru fiecare* $i \in I$
5. *dacă există* $i_0 \in I$ *cu* R_{i_0} *asimetrică, atunci* $\prod_{i \in I} R_i$ *este asimetrică*
6. $\prod_{i \in I} R_i$ *este tranzitivă ddacă* R_i *este tranzitivă, pentru fiecare* $i \in I$

Prin urmare:

- $\prod_{i \in I} R_i$ *este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine, ddacă, pentru fiecare* $i \in I$, R_i *este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine;*

Propoziție (continuare)

- $\prod_{i\in I} R_i$ *este o ordine strictă ddacă există* $i_0 \in I$ *a.î.* R_{i_0} *este o ordine strictă și, pentru fiecare* $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i *este o ordine,*

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i *este antisimetrică, atunci:* $\prod_{i\in I} R_i$ *este asimetrică ddacă există* $i_0 \in I$ *cu* R_{i_0} *asimetrică.*

Demonstrație: Conform lemei anterioare, avem următoarele proprietăți (**temă**):

1. $\Delta_{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \Delta_{A_i}$
2. $(\prod_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$
3. pentru orice familie $(S_i)_{i\in I}$, cu $\emptyset \neq S_i \subseteq A_i^2$ pentru fiecare $i \in I$:
   - $\prod_{i\in I} R_i \subseteq \prod_{i\in I} S_i$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \subseteq S_i$
   - $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} S_i$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$
   - $(\prod_{i\in I} R_i) \cap (\prod_{i\in I} S_i) = \prod_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ (și la fel pentru $\cup$, $\setminus$, Δ în loc de $\cap$)

Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime

- $(\prod_{i\in I} R_i)\circ(\prod_{i\in I} S_i)=\prod_{i\in I}(R_i\circ S_i)$; cum $(\prod_{i\in I} R_i)^{-1}=\prod_{i\in I} R_i^{-1}$, rezultă că:
- pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, $(\prod_{i\in I} R_i)^n=\prod_{i\in I} R_i^n$; în particular: $(\prod_{i\in I} R_i)^2=\prod_{i\in I} R_i^2$

Din proprietățile de mai sus și caracterizările acestor tipuri de relații binare prin operații cu ele, rezultă proprietățile din enunț.

Exemplificăm pentru proprietatea (3) din enunț. Vom folosi faptul că o relație binară este vidă ddacă inversa ei este vidă.

$(\prod_{i\in I} R_i)^{-1}=\{((b_i)_{i\in I},(a_i)_{i\in I})\mid((a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I})\in\prod_{i\in I} R_i\}=$
$\{((b_i)_{i\in I},(a_i)_{i\in I})\mid(\forall\, i\in I)\,((a_i,b_i)\in R_i)\}=\{((b_i)_{i\in I},(a_i)_{i\in I})\mid(\forall\, i\in I)$
$((b_i,a_i)\in R_i^{-1})\}=\prod_{i\in I} R_i^{-1}$.

Prin urmare, avem: $\prod_{i\in I} R_i$ este simetrică ddacă $\prod_{i\in I} R_i=(\prod_{i\in I} R_i)^{-1}$ ddacă $\prod_{i\in I} R_i=\prod_{i\in I} R_i^{-1}$ ddacă, pentru fiecare $i\in I$, $R_i=R_i^{-1}$ ddacă, pentru fiecare $i\in I$, R_i este simetrică.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime. Amintim:

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *relație reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *relație simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *relație tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemplu

Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A, anume cea mai mică și, respectiv, cea mai mare relație de echivalență pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relația de incluziune între mulțimi.

Partiție a unei mulțimi

Definiție

Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulțimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A ddacă satisface următoarele condiții:

1. pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
2. pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulțimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)
3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$

Exemplu

Următoarele familii de mulțimi sunt partiții ale lui $\mathbb{N}$ (unde notăm $a\mathbb{N} + b = \{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$):

- $\{\mathbb{N}\}$
- $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$
- $\{5\mathbb{N}, 5\mathbb{N} + 1, 5\mathbb{N} + 2, 5\mathbb{N} + 3, 5\mathbb{N} + 4\}$
- $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, altfel scrisă: $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$

Partiție a unei mulțimi

Propoziție

Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A. Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.

Demonstrație: Într-adevăr, considerând un element $x \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$, rezultă că există $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.
Presupunând prin absurd că există un $i_1 \in I$, cu $i_0 \neq i_1$ și $x \in A_{i_1}$, rezultă că $x \in A_{i_0} \cap A_{i_1} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție. Deci $i_0 \in I$ este unic cu proprietatea că $x \in A_{i_0}$.

Observație

În cele ce urmează vom defini **clasele unei relații de echivalență**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulțimilor. Aici, toate clasele de echivalență sunt mulțimi, în această accepțiune a relațiilor binare ca fiind definite între mulțimi. Dacă adoptăm definiția relațiilor binare din sistemul axiomatic prezentat în Cursul I, care permitea unei relații binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relația de **cardinal echivalență**, studiată în Cursul II, este o relație de echivalență pe **clasa mulțimilor**, iar clasele ei de echivalență sunt **clase proprii, cu excepția clasei lui** $\emptyset$ (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Pentru cele ce urmează, vom considera mulțimea A nevidă, și o relație de echivalență $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relație binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiția simetriei, putem interschimba x și y și continua seria de implicații, obținând implicație dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiție

Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalență a lui* x *raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulțime a lui A, notată cu $\widehat{x}$ sau cu $x/_{\sim}$:
$\widehat{x} := x/_{\sim} := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarcă

Observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$,
$\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

1. *Pentru orice* $x \in A$, $x \in \widehat{x}$, *și, așadar,* $\widehat{x} \neq \emptyset$.
2. *Pentru orice* $x, y \in A$, *avem:*
   - *dacă* $x \sim y$, *atunci* $\widehat{x} = \widehat{y}$;
   - *dacă* $(x, y) \notin \sim$, *atunci* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Demonstrație: **(1)** Întrucât $\sim$ este reflexivă, pentru orice $x \in A$, avem: $x \sim x$, deci $x \in \widehat{x}$, prin urmare $\widehat{x}$ este nevidă.

(2) Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.

- Dacă $x \sim y$, atunci:
  - pentru orice $z \in \widehat{y}$, are loc $y \sim z$, ceea ce implică $x \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \widehat{x}$, deci $\widehat{y} \subseteq \widehat{x}$;
  - conform simetriei lui $\sim$, are loc și $y \sim x$, prin urmare: pentru orice $z \in \widehat{x}$, are loc $x \sim z$, ceea ce implică $y \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \widehat{y}$, deci $\widehat{x} \subseteq \widehat{y}$;
  - rezultă că $\widehat{x} = \widehat{y}$.
- Dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci, presupunând prin absurd că există $z \in \widehat{x} \cap \widehat{y}$, i. e. $z \in \widehat{x}$ și $z \in \widehat{y}$, adică $z \in A$ și $x \sim z$ și $z \sim y$, tranzitivitatea lui $\sim$ implică $x \sim y$, ceea ce este o contradicție cu ipoteza acestui caz; așadar $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$ în acest caz.

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

Pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ *ddacă* $y \sim x$ *ddacă* $x \in \widehat{y}$ *ddacă* $y \in \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} = \widehat{y}$*;*
- $(x, y) \notin \sim$ *ddacă* $(y, x) \notin \sim$ *ddacă* $x \notin \widehat{y}$ *ddacă* $y \notin \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$*.*

Demonstrație: Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.
Cum $\sim$ este simetrică, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$, iar definiția claselor de echivalență ne asigură de faptul că fiecare dintre aceste condiții este echivalentă cu fiecare dintre condițiile $x \in \widehat{y}$ și $y \in \widehat{x}$.
Prin urmare (după cum se poate verifica aplicând metoda reducerii la absurd) au loc și echivalențele între negațiile proprietăților de mai sus: $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \widehat{y}$ ddacă $y \notin \widehat{x}$.
Adăugând aceste proprietăți la propoziția precedentă, obținem, pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ ddacă $y \sim x$ ddacă $x \in \widehat{y}$ ddacă $y \in \widehat{x}$ implică $\widehat{x} = \widehat{y}$
- $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \widehat{y}$ ddacă $y \notin \widehat{x}$ implică $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$

Deci mai avem de demonstrat că implicațiile care încheie fiecare dintre cele două rânduri anterioare sunt chiar echivalențe, adică au rămas de demonstrat implicațiile reciproce acelora de la capetele celor două rânduri anterioare.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

- Dacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, atunci, cum $x \in \widehat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \in \widehat{y}$, ceea ce arată prima implicație reciprocă dintre cele două.
- Dacă $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$, atunci, întrucât $x \in \widehat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \notin \widehat{y}$, ceea ce încheie demonstrația celei de–a doua implicații reciproce.

O altă metodă de a demonstra implicațiile reciproce ale acestor două implicații este reducerea la absurd, folosind, pentru demonstrarea fiecărei implicații reciproce, cealaltă implicație directă:

- dacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, și presupunem prin absurd că $(x, y) \notin \sim$, atunci, conform celei de–a doua implicații, rezultă că $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$, iar, acum, faptul că $\widehat{x} = \widehat{y}$ arată că $\widehat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă;
- dacă $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$, și presupunem prin absurd că $x \sim y$, atunci, conform primei implicații, rezultă că $\widehat{x} = \widehat{y}$, și, acum, ca și mai sus, rezultă că $\widehat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă.

Cu toate că, în acest caz, metoda a doua, a reducerii la absurd, este mai ineficientă decât prima metodă, această a doua metodă are meritul de a fi aplicabilă în cazul general al unor astfel de șiruri de echivalențe terminate prin implicații, între proprietăți complementare (spunem că două proprietăți sunt *complementare* ddacă, la un moment dat (i. e. pentru anumite elemente, anumite date), una și numai una dintre ele este satisfăcută; denumirea de proprietăți complementare este **ad–hoc, nu consacrată**).

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Observație

Proprietățile complementare sunt proprietățile de forma p și *non* p (o proprietate și negația ei).
Generalitatea metodei reducerii la absurd, menționată mai sus, se referă la faptul că, pentru orice proprietăți p și q, are loc **principiul reducerii la absurd:**

- $[p \Rightarrow q]$ ddacă $[non\ q \Rightarrow non\ p]$,

de unde, folosind faptul că $[p \Leftrightarrow q]$ ddacă $[p \Rightarrow q\ și\ q \Rightarrow p]$, obținem:

- $[p \Leftrightarrow q]$ ddacă $[non\ p \Leftrightarrow non\ q]$.

Definiție

Fiecare $x \in A$ se numește *reprezentant al clasei* $\widehat{x}$.

Remarcă (proprietățile claselor de echivalență)

- Pentru fiecare $x \in A$, orice $y \in \widehat{x}$ este reprezentant al clasei $\widehat{x}$.

Într–adevăr, conform propoziției precedente, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $y \in \widehat{x}$ ddacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, iar, conform definiției anterioare, orice y este reprezentant al clasei $\widehat{y}$, care este egală cu $\widehat{x}$ exact atunci când $y \in \widehat{x}$, deci orice $y \in \widehat{x}$ este reprezentant al clasei $\widehat{x}$.
Mai mult, tocmai am demonstrat că:

- pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\widehat{x}$ ddacă $y \in \widehat{x}$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Definiție

Mulțimea claselor de echivalență ale lui $\sim$ se notează cu $A/_{\sim}$ și se numește *mulțimea factor a lui A prin* $\sim$ sau *mulțimea cât a lui A prin* $\sim$: $A/_{\sim} = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Observație

Denumirile de **mulțime factor** și **mulțime cât** se datorează faptului că mulțimea $A/_{\sim}$ din definiția anterioară se obține prin "împărțirea mulțimii A în clasele de echivalență ale lui $\sim$" (a se vedea următoarea propoziție).

Propoziție (clasele de echivalență formează o partiție)

Mulțimea factor $A/_{\sim}$ este o partiție a lui A.

Demonstrație: Verificăm proprietățile din definiția unei partiții, aplicând cele două propoziții anterioare cu **proprietățile claselor de echivalență**.

(1) Conform primeia dintre cele două propoziții precedente, pentru orice $x \in A$, $\widehat{x} \neq \emptyset$.

(2) Conform celei de–a doua dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x, y \in A$, dacă $\widehat{x} \neq \widehat{y}$, atunci $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

(3) Conform primeia dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x \in A$, $x \in \widehat{x} \subseteq A$, prin urmare $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} \widehat{x} \subseteq A$, așadar $A = \bigcup_{x \in A} \widehat{x}$.

Deci $A/_\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$ este o partiție a lui A.

Notație

Pentru orice număr real x, vom nota cu $[x]$ partea întreagă a lui x (notație **consacrată**), și cu $frac\{x\}$ partea fracționară a lui x (notație **neconsacrată**). I. e.:

- $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \in \mathbb{Z}$
- $frac\{x\} := x - [x] \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$

Exemplu

- $[5] = 5$ și $frac\{5\} = 0$
- $[-7] = -7$ și $frac\{-7\} = 0$
- $[4,3] = 4$ și $frac\{4,3\} = 0,3$
- $[-3,2] = -4$ și $frac\{-3,2\} = 0,8$

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Remarcă

Este imediat faptul că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc: $x \in \mathbb{Z}$ ddacă $x = [x]$.

Exercițiu (temă)

Considerăm următoarea relație binară pe $\mathbb{R}$:

- $\rho := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$

Demonstrați că:

- $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, frac\{x\} = frac\{y\}\} \subset \mathbb{R}^2$ (**indicație:** folosiți expresia părții fracționare de pe slide–ul anterior, i. e. chiar definiția părții fracționare);
- ρ este o relație de echivalență pe $\mathbb{R}$;
- mulțimea factor $\mathbb{R}/_{\rho}$ este în bijecție cu intervalul real $[0, 1)$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Remarcă

Cu notațiile anterioare exercițiului de mai sus, funcția $p : A \to A/\!\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că $\widehat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiție

Cu notațiile de mai sus, funcția p se numește *surjecția canonică de la A la $A/\!\sim$*.

Propoziție

Mulțimea partițiilor unei mulțimi nevide este în bijecție cu mulțimea relațiilor de echivalență pe acea mulțime.

Demonstrație: Fie A o mulțime nevidă. Notăm cu $\mathrm{Part}(A)$ mulțimea partițiilor lui A și cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea A.
Avem de demonstrat că:

$$\mathrm{Part}(A) \cong \mathrm{Eq}(A)$$

Definim $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, prin: pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ (mulțimea factor a lui A prin $\sim$). Conform propoziției anterioare, pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, $A/\!\sim \in \mathrm{Part}(A)$, așadar φ este o funcție corect definită de la $\mathrm{Eq}(A)$ la $\mathrm{Part}(A)$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Definim $\psi : \mathrm{Part}(A) \to \mathrm{Eq}(A)$, prin: pentru orice $(A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i\in I}) \subseteq A^2$ (relație binară pe A), definită astfel: $\psi((A_i)_{i\in I}) = \{(x,y) \mid x,y \in A, (\exists\, i \in I)\,(x,y \in A_i)\} = \bigcup_{i\in I} A_i^2$.

Pentru a demonstra că ψ este corect definită, să considerăm $(A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, să notăm $\sim = \psi((A_i)_{i\in I})$ și să demonstrăm că $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$.

Reflexivitatea lui $\sim$: pentru orice $x \in A$, cum $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ conform definiției unei partiții, urmează că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, deci există (chiar un unic, a se vedea o propoziție de mai sus) un $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$ (deci $(x,x) \in A_{i_0}^2$), prin urmare $x \sim x$ conform definiției lui $\sim$.

Simetria lui $\sim$: pentru orice $x,y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci există $i_0 \in I$ a. î. $x,y \in A_{i_0}$, deci $y,x \in A_{i_0}$, așadar $y \sim x$.

Tranzitivitatea lui $\sim$: pentru orice $x,y,z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci există $i_0, i_1 \in I$ a. î. $x,y \in A_{i_0}$ și $y,z \in A_{i_1}$, prin urmare $y \in A_{i_0} \cap A_{i_1}$, deci $A_{i_0} \cap A_{i_1} \neq \emptyset$, așadar $i_0 = i_1$ conform definiției unei partiții, prin urmare $x,z \in A_{i_0} = A_{i_1}$, deci $x \sim z$ (din nou puteam folosi acea propoziție de mai sus, pentru y).

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Așadar $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, prin urmare ψ este o funcție corect definită de la $\mathrm{Part}(A)$ la $\mathrm{Eq}(A)$.

Pentru a arăta că $\mathrm{Part}(A) \cong \mathrm{Eq}(A)$, este suficient să demonstrăm că funcțiile:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Eq}(A) \arrow[r, shift left, "\psi"] & \mathrm{Part}(A) \arrow[l, shift left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

sunt inverse una alteia, ceea ce va arăta că aceste funcții sunt inversabile, deci bijective.

Să demonstrăm că $\psi \circ \varphi = id_{\mathrm{Eq}(A)}$.
Fie $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, arbitrară, fixată.
$\varphi(\sim) = A/_{\sim} = \{\widehat{a} \mid a \in A\}$.
Notăm $\sigma = \psi(\varphi(\sim))$.
Conform definițiilor lui φ și ψ și proprietăților claselor de echivalență, pentru orice $x, y \in A$, $x\sigma y$ ddacă există $a \in A$, cu $x, y \in \widehat{a}$ ddacă există $a \in A$ cu $\widehat{a} = \widehat{x} = \widehat{y}$ ddacă $\widehat{x} = \widehat{y}$ (pentru că luăm $a = x$ la implicația inversă) ddacă $x \sim y$. Așadar $\sigma =\sim$, i. e. $\psi(\varphi(\sim)) =\sim$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Acum să demonstrăm că $\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Part}(A)}$.
Fie $\alpha := (A_i)_{i \in I} \in \mathrm{Part}(A)$, arbitrară, fixată.
Calculăm $\varphi(\psi(\alpha))$.
Conform definiției lui ψ, relația de echivalență $\psi(\alpha) = \psi((A_i)_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} A_i^2$.

Fie $x \in A$, arbitrar, fixat. Conform aceleiași propoziții de mai sus asupra partițiilor unei mulțimi, există un unic $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$. Din expresia anterioară a relației de echivalență $\psi(\alpha)$ și faptul că mulțimile din partiția $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte, un $y \in A$ are proprietatea că $x\psi(\alpha)y$ ddacă $y \in A_{i_0}$, așadar $\{y \in A \mid x\psi(\alpha)y\} = A_{i_0}$, deci clasa de echivalență $\widehat{x}$ a lui x raportat la $\psi(\alpha)$ este A_{i_0}. Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) = A/_{\psi(\alpha)} = \{\widehat{x} \mid x \in A\} \subseteq (A_i)_{i \in I} = \alpha$.
Pentru fiecare $i \in I$, A_i este nevid și, așadar, este, conform celor de mai sus, clasa de echivalență a oricărui element al său raportat la $\psi(\alpha)$. Acest fapt înseamnă că $\alpha = (A_i)_{i \in I} \subseteq \{\widehat{x} \mid x \in A\} = A/_{\psi(\alpha)} = \varphi(\psi(\alpha))$.
Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) \subseteq \alpha$ și $\alpha \subseteq \varphi(\psi(\alpha))$, așadar $\varphi(\psi(\alpha)) = \alpha$.

Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{\mathrm{Eq}(A)}$ și $\varphi \circ \psi = id_{\mathrm{Part}(A)}$, i. e. $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$ și $\psi : \mathrm{Part}(A) \to \mathrm{Eq}(A)$ sunt funcții inverse una alteia, deci sunt funcții inversabile, deci bijective, așadar $\mathrm{Part}(A) \cong \mathrm{Eq}(A)$.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de același tip) (i. e. funcțiile care comută cu operațiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se definește în funcție de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcțiilor**, definite între două mulțimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noțiuni de **nucleu**, o funcție nu poate fi raportată decât la ea însăși, de unde și denumirea din definiția următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A și B două mulțimi nevide arbitrare și $f : A \to B$ o funcție arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiție:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definiție (nucleul de săgeată dublă)

Se numește *nucleul (de săgeată dublă al) lui f* următoarea relație binară pe A, notată $Ker(f)$:

$$Ker(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

- În cazul morfismelor, au loc proprietăți de forma: morfismul este injectiv ddacă nucleul său este trivial.
- Și aici avem o proprietate de acest tip:

Remarcă

1. $Ker(f) \supseteq \Delta_A$;
2. $Ker(f) = \Delta_A$ ddacă f este injectivă.

Într–adevăr, proprietatea (1) este imediată și demonstrează că proprietatea (2) este echivalentă cu:

$$Ker(f) \subseteq \Delta_A \text{ ddacă } f \text{ este injectivă.}$$

Pentru a demonstra această din urmă proprietate, aplicăm faptul că Δ_A este relația de egalitate pe A: $Ker(f) \subseteq \Delta_A$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, $(x, y) \in Ker(f)$ implică $(x, y) \in \Delta_A$, ddacă, pentru orice $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implică $x = y$, ceea ce este echivalent cu faptul că f este injectivă.

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Remarcă

$Ker(f)$ este o relație de echivalență pe A.
Acest fapt rezultă imediat, chiar din definiția nucleului de săgeată dublă al lui f și din faptul că egalitatea pe B (Δ_B) este o relație de echivalență pe B: definiția lui $Ker(f)$ poate fi scrisă sub forma:

$$Ker(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$$

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de același tip sunt **congruențe**, adică relații de echivalență care păstrează operațiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruențe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.
- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulțimi și funcții, ca aceea din propoziția următoare, de exemplu) se zice *comutativă* ddacă, indiferent pe ce drum "urmărim săgețile" și compunem funcțiile, între oricare două mulțimi din diagramă se obține aceeași funcție, i. e. toate compunerile de funcții între acele mulțimi sunt egale (mulțimile pot fi și 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Pentru cele ce urmează, renunțăm la fixarea lui A, B și f.

Propoziție (proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

Fie A o mulțime nevidă, $\sim$ o relație de echivalență pe A și $p : A \to A/_{\sim}$ surjecția canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.
Atunci: pentru orice mulțime nevidă B și orice funcție $f : A \to B$ cu $\sim \subseteq Ker(f)$, există o unică funcție $\tilde{f} : A/_{\sim} \to B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A/_{\sim} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\tilde{f}$: Fie $g, h : A/_{\sim} \to B$, astfel încât $g \circ p = f = h \circ p$, i. e., pentru orice $x \in A$, $g(\widehat{x}) = f(x) = h(\widehat{x})$.

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Cum $\{\widehat{x} \mid x \in A\} = A/_{\sim}$ (p e surjectivă), rezultă că g și h coincid pe fiecare element din domeniul lor, $A/_{\sim}$, i. e. $g = h$.
Existența lui $\tilde{f}$: Fie $\tilde{f} : A/_{\sim} \to B$, definită prin: $\tilde{f}(\widehat{x}) := f(x) \in B$, pentru orice $x \in A$. $\{\widehat{x} \mid x \in A\} = A/_{\sim}$, așadar aplicația $\tilde{f}$ este definită pe întreaga mulțime $A/_{\sim}$.
Însă $\tilde{f}$ este definită pe fiecare clasă ($\widehat{x}$) prin intermediul unui reprezentant al acelei clase (x), așadar, pentru a arăta că $\tilde{f}$ este o **funcție** de la $A/_{\sim}$ la B (i. e., pentru a arăta că $\tilde{f}$ asociază fiecărui element din $A/_{\sim}$ un **unic** element din B), trebuie să demonstrăm că $\tilde{f}$ este **bine definită**, i. e. **independentă de reprezentanți**, i. e., indiferent ce reprezentant alegem pentru o clasă, valoarea lui $\tilde{f}$, definită prin intermediul acelui reprezentant, este aceeași, adică: pentru orice $x, y \in A$ cu $\widehat{x} = \widehat{y}$, are loc: $\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x) = f(y) = \tilde{f}(\widehat{y})$.
Fie, așadar, $x, y \in A$ cu $\widehat{x} = \widehat{y}$, i. e. $x \sim y$ (a se revedea proprietățile claselor de echivalență), i. e. $(x, y) \in \sim$. Dar, prin ipoteză, $\sim \subseteq Ker(f)$, deci $(x, y) \in Ker(f)$, i. e. $f(x) = f(y)$. Prin urmare, $\tilde{f}$ este bine definită, i. e. este o funcție de la $A/_{\sim}$ la B.
Din definiția lui $\tilde{f}$, avem: pentru orice $x \in A$, $\tilde{f}(p(x)) = \tilde{f}(\widehat{x}) = f(x)$, așadar $\tilde{f} \circ p = f$.

Operatori de închidere și familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulțimea părților unei mulțimi și **familiile Moore (sistemele de închidere)** de părți ale unei mulțimi.
- Aceste noțiuni pot fi definite și studiate pe **mulțimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în considerațiile de mai jos, se poate înlocui mulțimea părților unei mulțimi cu o mulțime arbitrară M, incluziunea de mulțimi cu o relație de ordine arbitrară $\leq$ pe M, iar intersecția cu **infimumul** în **mulțimea ordonată** $(M, \leq)$ (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noțiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).

Intersecția familiei vide de mulțimi

- Vom vedea că, în mulțimi ordonate arbitrare:
  1. supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);
  2. infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).
- Pentru familii de mulțimi:
  1. am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$ (cea mai mică mulțime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulțimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulțime A);
  2. nu există o cea mai mare mulțime (dintre toate mulțimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulțime A, deci ar conține fiecare mulțime A, deci ar avea ca submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se revedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulțime dintre părțile unei anumite mulțimi. Deci ce mulțime va fi intersecția familiei vide de mulțimi?

Exercițiu (temă)

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Atunci, pentru orice $\emptyset \neq S \subseteq I$, au loc incluziunile:

1. $\displaystyle\bigcup_{s \in S} A_s \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
2. $\displaystyle\bigcap_{s \in S} A_s \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

Intersecția familiei vide de mulțimi

Remarcă

Conform celor de mai sus, incluziunea de la punctul (1) din exercițiul anterior este valabilă și pentru $S = \emptyset$.
Vom vedea că și incluziunea de la punctul (2) este valabilă și pentru $S = \emptyset$, atunci când are sens intersecția familiei vide.

Să transcriem definiția intersecției unei familii arbitrare de mulțimi pentru familia vidă:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\}.$$

Proprietatea $i \in \emptyset$ este falsă pentru orice element i, așadar implicația $i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i$ este adevărată pentru orice i și orice x, deci proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x. Sigur că nu există o mulțime care să conțină toate obiectele x. O astfel de mulțime ar conține, în particular, toate mulțimile, deci ar avea drept submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se revedea Cursul I).

Intersecția familiei vide de mulțimi

Remarcă

Intersecția familiei vide nu există decât raportat la o mulțime totală T: intersecția familiei vide de părți ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulțimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **definește** în următorul mod, și este egală cu mulțimea totală T:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x, după cum am arătat mai sus.

Intersecția familiei vide de mulțimi

Să transcriem enunțul exercițiului anterior pentru familii de părți ale unei mulțimi T, familii cărora le permitem să fie și vide. Vom folosi acest rezultat în cele ce urmează, și vom vedea o generalizare a sa când vom studia mulțimile ordonate arbitrare.

Exercițiu (temă)

Fie T o mulțime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulțimi de părți ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

1. $\bigcup\limits_{A \in X} A \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$
2. $\bigcap\limits_{A \in X} A \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ și $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulțime cu un singur element)), atunci:

1. $M \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$
2. $M \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

Operatori de închidere și familii Moore

Cele două noțiuni care fac obiectul acestei secțiuni a cursului sunt strâns legate una de cealaltă, așa că le vom descrie pe amândouă în cadrul unei singure definiții, cu toate că nu sunt legate între ele prin definiție (nu se definește una în funcție de cealaltă).

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară.

- Se numește *familie Moore de părți ale lui T* (sau *sistem de închidere pe mulțimea părților lui T*) o familie de părți ale lui T închisă la intersecții arbitrare, i. e. o familie de mulțimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulțime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap_{s \in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap_{s \in S} M_s = M_{i_S}$).
- Se numește *operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$* o funcție $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietățile:
  1. $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);
  2. $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);
  3. dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Operatori de închidere și familii Moore

Peste tot în restul acestei secțiuni, T va fi o mulțime arbitrară.

Remarcă

Orice familie Moore de părți ale lui T conține intersecția familiei vide de părți ale lui T, adică pe T.

Exemplu

- $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- Funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părți ale lui T.
- $\{T\}$ este o familie Moore de părți ale lui T.
- $\emptyset$ nu este o familie Moore de părți ale lui T, pentru că nu îl conține pe T.

Așadar:

Remarcă

Orice familie Moore este nevidă.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție

Dacă $\mathcal{M}$ este o familie Moore de părți ale lui T, atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), și aceasta este egală cu intersecția mulțimilor din $\mathcal{M}$ care includ pe A.

Demonstrație: Fie $A \in \mathcal{P}(T)$, I o mulțime și $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T. Conform remarcii anterioare, $\mathcal{M}$ este nevidă, i. e. I este nevidă. Considerăm $S \subseteq I$, dată de: $S := \{s \in I \mid A \subseteq M_s\}$, și fie $M := \bigcap_{s \in S} M_s$. A se observa că S este nevidă, pentru că $T \in \mathcal{M}$ și $A \subseteq T$.

Avem, datorită faptului că $M = \bigcap_{s \in S} M_s$:

1. întrucât $\mathcal{M}$ este o familie Moore, rezultă că $M \in \mathcal{M}$;
2. întrucât $A \subseteq M_s$, pentru orice $s \in S$, rezultă că $A \subseteq M$;
3. pentru orice $i \in I$ astfel încât $A \subseteq M_i$, rezultă că $i \in S$, prin urmare $M \subseteq M_i$.

Cele trei proprietăți anterioare spun exact că M este cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A. Unicitatea lui M rezultă din cele de mai sus și antisimetria lui $\subseteq$: dacă N este o (altă) cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A, atunci, conform lui (3), au loc $M \subseteq N$ și $N \subseteq M$, așadar $M = N$.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție ($\star$)

Fie I o mulțime nevidă și $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T. Definim funcția $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiție, cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe X, adică

$$C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ X \subseteq M}} M.$$

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Demonstrație – facultativă: Fie $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, arbitrare.

Definiția lui $C_{\mathcal{M}}$ arată că $C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}$, și, aplicând din nou definiția lui $C_{\mathcal{M}}$, observăm că $C_{\mathcal{M}}(C_{\mathcal{M}}(X)) = C_{\mathcal{M}}(X)$ (pentru că, dacă $A \in \mathcal{M}$, atunci cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A este chiar A). Așadar, $C_{\mathcal{M}}$ este idempotent.

Definiția lui $C_{\mathcal{M}}$ arată că $C_{\mathcal{M}}(X) \supseteq X$, adică $C_{\mathcal{M}}$ este extensiv.

Dacă $X \subseteq Y$, atunci orice mulțime M cu $Y \subseteq M$ satisface și $X \subseteq M$ (prin tranzitivitatea lui $\subseteq$), prin urmare $\{M \in \mathcal{M} \mid Y \subseteq M\} \subseteq \{M \in \mathcal{M} \mid X \subseteq M\}$, așadar $\bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ X \subseteq M}} M \subseteq \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ Y \subseteq M}} M$, adică $C_{\mathcal{M}}(X) \subseteq C_{\mathcal{M}}(Y)$, deci $C_{\mathcal{M}}$ este crescător.

Operatori de închidere și familii Moore

Prin urmare, $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiție (mulțimi închise)

Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C, $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulțimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulțimi închise* raportat la operatorul de închidere C.

Propoziție (caracterizare echivalentă pentru mulțimile închise)

Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulțimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulțimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.

Demonstrație: Fie $A := \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\}$ și $B := \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$. Avem de demonstrat că $A = B$.
Fie $Y \in A$, adică $Y = C(X)$ pentru un $X \in \mathcal{P}(T)$. Atunci, conform idempotenței lui C, $C(Y) = C(C(X)) = C(X) = Y$, deci $Y \in B$. Așadar, $A \subseteq B$.
Fie $X \in B$. Atunci $X = C(X) \in A$. Deci $B \subseteq A$.
Prin urmare, $A = B$.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție (⋆⋆)

Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulțimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C). Atunci $\mathcal{M}_C$ este o familie Moore de părți ale lui T.

Demonstrație – facultativă: $C(T) \subseteq T \subseteq C(T)$ (din extensivitatea lui T), așadar $T = C(T) \in \mathcal{M}_C$, iar T este intersecția familiei vide de părți ale lui T, deci $\mathcal{M}_C$ conține intersecția familiei vide de părți ale lui T.
Fie acum S o mulțime nevidă și $(M_s)_{s\in S} \subseteq \mathcal{M}_C$, deci $M_s = C(M_s)$, pentru orice $s \in S$. C este extensiv, deci $\bigcap\limits_{s\in S} M_s \subseteq C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s)$. Pe de altă parte, oricare ar fi $s_0 \in S$, $\bigcap\limits_{s\in S} M_s \subseteq M_{s_0}$, deci, cum C este crescător, $C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \subseteq C(M_{s_0})$ pentru orice $s_0 \in S$, așadar $C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \subseteq \bigcap\limits_{s\in S} C(M_s) = \bigcap\limits_{s\in S} M_s$. Am obținut că $\bigcap\limits_{s\in S} M_s = C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \in \mathcal{M}_C$, deci $\mathcal{M}_C$ este închisă la intersecții nevide arbitrare.
Așadar, $\mathcal{M}_C$ este închisă la intersecții arbitrare, adică este familie Moore.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție

Aplicațiile din cele Propozițiile ($\star$) *și* ($\star\star$) *sunt inverse una alteia, adică:*

1. *pentru orice operator de închidere* $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;
2. *pentru orice familie Moore* $\mathcal{M}$ *de părți ale lui* T, $\mathcal{M}_{C_\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ *și mulțimea familiilor Moore de părți ale lui* T *sunt în bijecție.*

Demonstrație – facultativă: (1) $\mathcal{M}_C = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$. Așadar, pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C}(X) = \bigcap\limits_{\substack{M \in \mathcal{M}_C,\\ M \supseteq X}} M = \bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T),\\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) \supseteq C(X)$, pentru că fiecare termen al acestei intersecții $C(Y) = C(C(Y)) \supseteq C(X)$. Dar $C(X) \supseteq X$, deci $C(X)$ este unul dintre termenii acestei intersecții, așadar $\bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T),\\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) \subseteq C(X)$. Prin urmare, $C_{\mathcal{M}_C}(X) = \bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T),\\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) = C(X)$, deci are loc egalitatea $C_{\mathcal{M}_C} = C$.

(2) Conform definiției sale, pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}$, așadar $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \{C_{\mathcal{M}}(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} \subseteq \mathcal{M}$.
Acum fie $X \in \mathcal{M}$. Conform definiției lui $C_{\mathcal{M}}$, are loc $X = C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}}$. Deci are loc și incluziunea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}}$.
Prin urmare, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Exemplu

- Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.
- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

Mnemonic despre relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2 \stackrel{\text{not.}}{=} A \times A$ (i. e. R o relație binară pe A; pentru orice $a, b \in A$, faptul că $(a, b) \in R$ se notează și sub forma aRb). R se numește:

- *relație reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *relație ireflexivă* ddacă nu există $a \in A$ a. î. aRa;
- *relație simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *relație antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$;
- *relație asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *relație tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine strictă* ddacă este asimetrică (deci și antisimetrică) și tranzitivă, sau, echivalent, ddacă este ireflexivă și tranzitivă.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

- Peste tot în această secțiune a cursului, A va fi o mulțime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulțimea submulțimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulțimea relațiilor binare pe A.
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$ =relația de egalitate pe A.

Propoziție

Fie $(R_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relații binare pe A. Atunci:

1. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$ e reflexivă*
2. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$ e simetrică*
3. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$ e tranzitivă*
4. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$ e o preordine*
5. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relație de echivalență, atunci $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$ e o relație de echivalență*

Demonstrație: **(1)** Dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $\Delta_A \subseteq R_i$, atunci $\Delta_A \subseteq \bigcap_{i\in I} R_i$, i. e. $\bigcap_{i\in I} R_i$ este reflexivă.

(2) Conform unor rezultate anterioare, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i = R_i^{-1}$, de unde rezultă că $(\bigcap_{i\in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i$, prin urmare $\bigcap_{i\in I} R_i$ e simetrică.

(3) Notăm $S := \bigcap_{i\in I} R_i$. Fie $x, y, z \in A$, a. î. xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S$, i. e. $(x, y), (y, z) \in \bigcap_{i\in I} R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $(x, y), (y, z) \in R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, xR_iy și yR_iz, iar faptul că fiecare relație R_i este tranzitivă implică xR_iz pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in \bigcap_{i\in I} R_i = S$, i. e. xSz, deci S e tranzitivă.

(4) Rezultă din (1) și (3).

(5) Rezultă din (1), (2) și (3) (sau din (2) și (4)).

Remarcă (familiile Moore ale relațiilor binare reflexive, respectiv simetrice, respectiv tranzitive, respectiv preordinilor, respectiv echivalențelor pe A)

Propoziția anterioară arată că familia relațiilor binare reflexive/simetrice/tranzitive/de preodine/de echivalență pe A este o familie Moore de părți ale lui A^2. Într–adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăți, fiind relație de echivalență pe A. Și, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relațiilor reflexive pe A conține pe A^2, care este intersecția familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziției anterioare, această familie este închisă la intersecții nevide arbitrare. Așadar, familia relațiilor reflexive pe A este închisă la intersecții arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarcă (definiția închiderii reflexive scrisă sub forma a trei condiții)

Remarca anterioară și o serie de propoziții despre familii Moore și operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relație binară R pe A, există o cea mai mică relație binară reflexivă $\overline{R}$ pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică unica relație binară $\overline{R}$ pe A care satisface următoarele trei proprietăți:

- $\overline{R}$ este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relație reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

Remarcă (continuare – operatorii de închidere asociați fiecărei dintre familiile Moore ale relațiilor binare reflexive, respectiv simetrice, respectiv tranzitive, respectiv preordinilor, respectiv echivalențelor pe A)

$\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \to \mathcal{P}(A^2)$, definită prin: pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este operatorul de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$ asociat familiei Moore a relațiilor binare reflexive pe A.

Toate aceste considerații rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietățile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{S}$
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{T}$
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relație de echivalență – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{E}$

Aceste notații **nu** sunt consacrate, ci sunt notații ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează, și pe care le vom păstra în toate cursurile următoare.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Definiție

Fie R o relație binară pe A. Se numește:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor binare simetrice pe A care includ pe R, adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relație binară tranzitivă pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor binare tranzitive pe A care includ pe R, adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R, anume intersecția tuturor preordinilor pe A care includ pe R, adică $Pre(R)$;
- *relația de echivalență generată de* R cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor de echivalență pe A care includ pe R, adică $\mathcal{E}(R)$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Idempotența operatorilor de închidere arată că, pentru orice relație binară R pe A: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ și $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Mai mult:

Remarcă

Fie R o relație binară pe A. Conform descrierii mulțimilor închise din secțiunea despre operatori de închidere și familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relație de echivalență ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție

Fie R o relație binară pe A. Atunci:

1. $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$
2. $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$
3. $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
4. $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
5. $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Demonstrație: Folosim o caracterizare a închiderilor dintr–o remarcă de mai sus, caracterizare care este pur și simplu definiția acestor închideri, scrisă sub forma a trei condiții.

(1) Avem de demonstrat că: $R \cup \Delta_A$ este reflexivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A care include pe R.

$\Delta_A \subseteq R \cup \Delta_A$, deci $R \cup \Delta_A$ este reflexivă.
Evident, $R \subseteq R \cup \Delta_A$.
Fie Q o relație binară reflexivă pe A cu $R \subseteq Q$. Q este reflexivă, deci $\Delta_A \subseteq Q$.
Cum avem și $R \subseteq Q$, rezultă că $R \cup \Delta_A \subseteq Q$.
Prin urmare, $R \cup \Delta_A = \mathcal{R}(R)$.
(2) Avem de demonstrat că: $R \cup R^{-1}$ este simetrică, include pe R și este inclusă în orice relație binară simetrică pe A care include pe R.
Conform unor rezultate anterioare,
$(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$, deci $R \cup R^{-1}$ este simetrică.
Evident, $R \subseteq R \cup R^{-1}$.
Fie Q o relație binară simetrică pe A cu $R \subseteq Q$, prin urmare $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$. Q este simetrică, deci $Q = Q^{-1}$, așadar am obținut $R \subseteq Q$ și $R^{-1} \subseteq Q$, prin urmare $R \cup R^{-1} \subseteq Q$.
Rezultă că $R \cup R^{-1} = \mathcal{S}(R)$.
(3) Notăm $S := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$. Pentru a arăta că $S = \mathcal{T}(R)$, avem de demonstrat că: S este tranzitivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară tranzitivă pe A care include pe R.

Fie $x, y, z \in A$, cu xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$, i. e. există

$n_0, n_1 \in \mathbb{N}^*$, cu $(x, y) \in R^{n_0}$ și $(y, z) \in R^{n_1}$, prin urmare, aplicând definiția compunerii de relații binare și a puterilor naturale ale unei relații binare, precum și asociativitatea compunerii de relații binare, obținem că
$(x, z) \in R^{n_1} \circ R^{n_0} = R^{n_0+n_1} \subseteq S$, deci $(x, z) \in S$, i. e. xSz. Așadar S e tranzitivă.
$R = R^1 \subseteq S$.
Fie Q o relație binară tranzitivă pe A cu $R \subseteq Q$. Pentru a arăta că
$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$, vom demonstra prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că
$R^n \subseteq Q$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Pasul de verificare: $R^1 = R \subseteq Q$, conform alegerii lui Q.
Pasul de inducție: Presupunem că $R^n \subseteq Q$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat.
Fie $(x, z) \in R^{n+1} = R^n \circ R$, arbitrar, fixat. Atunci există $y \in A$ a. î. $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R^n$. Dar $R \subseteq Q$ conform alegerii lui Q și $R^n \subseteq Q$ conform ipotezei de inducție. Așadar $(x, y), (y, z) \in Q$, i. e. xQy și yQz. Iar Q este tranzitivă, conform alegerii sale, prin urmare xQz, i. e. $(x, z) \in Q$. Rezultă că $R^{n+1} \subseteq Q$ și raționamentul prin inducție este încheiat.
Puteam folosi proprietatea de mai sus conform căreia incluziunile între relații binare se pot compune membru cu membru și caracterizarea de mai sus a tranzitivității aplicată lui Q: $R^n \subseteq Q$ și $R \subseteq Q$, așadar
$R^{n+1} = R^n \circ R \subseteq Q \circ Q \subseteq Q$.

Am demonstrat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n \subseteq Q$, așadar $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$.

Rezultă că: $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = S = \mathcal{T}(R)$.

(4), (5) A se vedea mai jos.

Observație

Indicii din reuniunile de mai sus nu ajung efectiv la o valoare infinită, ci parcurg mulțimea $\mathbb{N}$ sau o submulțime a sa: acestea sunt doar notații pentru: $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} R^n$. La fel pentru alte notații de acest gen.

Remarcă (temă)

Dacă A este o mulțime finită și nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

1. $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n$;
2. șirul $R^0, R^1, R^2, \ldots, R^n, \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent.

Indicație pentru demonstrația remarcii anterioare:

① **Intuitiv**, acest lucru este ușor de observat, dacă ne gândim la reprezentarea relațiilor binare prin grafuri orientate: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (chiar orice $n \in \mathbb{N}$), R^n este mulțimea arcelor având drept capete capetele drumurilor de lungime n formate din arce din R (unde lungimea unui drum este numărul arcelor care îl compun, cu fiecare apariție a fiecărui arc numărată, chiar dacă acel arc apare mai mult de o dată în acel drum), în timp ce $\mathcal{T}(R)$ este mulțimea arcelor având drept capete capetele drumurilor nevide (i. e. cu cel puțin un arc) formate din arce din R. Iar, dacă graful orientat are $|A| = k \in \mathbb{N}^*$ vârfuri, atunci orice drum din acest graf de lungime strict mai mare decât k conține cel puțin un circuit, care poate fi eliminat din acest drum, obținându–se un drum între aceleași vârfuri și de lungime strict mai mică; acest procedeu poate continua până la obținerea unui drum între aceleași vârfuri și de lungime mai mică sau egală cu k.
② Aici se folosește faptul că există doar un număr finit de relații binare pe A, anume $|\mathcal{P}(A^2)| = 2^{k^2}$.

Remarcă (generalizare a idempotenței reuniunii și intersecției)

Dacă A este o mulțime, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie **nevidă** de mulțimi cu $A_i = A$ pentru fiecare $i \in I$, atunci: $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A = A$.

Folosim generalizarea idempotenței reuniunii în demonstrația de mai jos pentru comutările închiderilor reflexivă și tranzitivă.

Propoziție (comutările închiderilor și proprietățile de prezervare care rezultă din acestea)

Fie R o relație binară pe A. Atunci:

1. $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$;
2. $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$;
3. *închiderea reflexivă păstrează simetria și tranzitivitatea, adică:*
   - *dacă R e simetrică, atunci $\mathcal{R}(R)$ e simetrică;*
   - *dacă R e tranzitivă, atunci $\mathcal{R}(R)$ e tranzitivă;*
4. *închiderea simetrică păstrează reflexivitatea, adică: dacă R e reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ e reflexivă;*
5. *închiderea tranzitivă păstrează reflexivitatea și simetria, adică:*
   - *dacă R e reflexivă, atunci $\mathcal{T}(R)$ e reflexivă;*
   - *dacă R e simetrică, atunci $\mathcal{T}(R)$ e simetrică;*
6. $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$, *dar "$\supseteq$" nu are loc întotdeauna;*
7. *închiderea simetrică nu păstrează tranzitivitatea, adică: dacă R e tranzitivă, atunci $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ nu e neapărat tranzitivă.*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică și tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Demonstrație: Folosim formulele închiderilor reflexivă, simetrică și tranzitivă demonstrate mai sus și proprietățile operațiilor cu relații binare.

① $\mathcal{S}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R) \cup (\mathcal{R}(R))^{-1} = (\Delta_A \cup R) \cup (\Delta_A \cup R)^{-1} = \Delta_A \cup R \cup \Delta_A^{-1} \cup$ $\cup R^{-1} = \Delta_A \cup R \cup \Delta_A \cup R^{-1} = \Delta_A \cup R \cup R^{-1} = \Delta_A \cup \mathcal{S}(R) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(R))$.

② $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \Delta_A \cup \mathcal{T}(R) = \Delta_A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$.

$\mathcal{T}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{T}(\Delta_A \cup R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Delta_A \cup R)^n$.

Demonstrăm prin inducție că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Delta_A \cup R)^n = \bigcup_{k=0}^{n} R^k$.

Pasul de verificare: $(\Delta_A \cup R)^1 = \Delta_A \cup R = R^0 \cup R^1$.

Pasul de inducție: Fie $n \in \mathbb{N}^*$ a. î.

$(\Delta_A \cup R)^n = \bigcup_{k=0}^{n} R^k = \Delta_A \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$.

Atunci:

$(\Delta_A \cup R)^{n+1} = (\Delta_A \cup R) \circ (\Delta_A \cup R)^n = (\Delta_A \cup R) \circ (\bigcup_{k=0}^{n} R^k) = [\Delta_A \circ (\bigcup_{k=0}^{n} R^k)] \cup [R \circ$ $(\bigcup_{k=0}^{n} R^k)] = \bigcup_{k=0}^{n} R^k \cup \bigcup_{k=0}^{n} (R \circ R^k) = \bigcup_{k=0}^{n} R^k \cup \bigcup_{k=0}^{n} R^{k+1} = \bigcup_{k=0}^{n} R^k \cup \bigcup_{k=1}^{n+1} R^k = \bigcup_{k=0}^{n+1} R^k$.

Am încheiat raționamentul prin inducție.

Așadar $\mathcal{T}(\mathcal{R}(R)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n} R^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$.

③ Dacă R e simetrică, atunci $\mathcal{S}(R) = R$, așadar, conform ①, $\mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$, care e simetrică.

Dacă R e tranzitivă, atunci $\mathcal{T}(R) = R$, așadar, conform ②, $\mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$, care e tranzitivă.

④ Dacă R e reflexivă, atunci $\mathcal{R}(R) = R$, așadar, conform ①, $\mathcal{S}(R) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(R))$, care e reflexivă.

⑤ Dacă R e reflexivă, atunci $\mathcal{R}(R) = R$, așadar, conform ②, $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$, care e reflexivă.

Dacă R e simetrică, atunci $R = R^{-1}$, așadar

$$\mathcal{T}(R)^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \mathcal{T}(R),$$

așadar $\mathcal{T}(R)$ e simetrică.

⑥ Conform ⑤, cum $\mathcal{S}(R)$ e simetrică, rezultă că $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ e simetrică.

Dar $R \subseteq \mathcal{S}(R)$, iar $\mathcal{T}$ e crescător, așadar $\mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$.

Conform caracterizărilor închiderilor prin cele trei condiții de mai sus, rezultă că $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$:

$\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ e o relație binară simetrică pe A care include pe $\mathcal{T}(R)$, așadar $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ include cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe $\mathcal{T}(R)$, anume

$\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$.
Dăm un contraexemplu finit și unul infinit pentru cealaltă incluziune, așadar pentru egalitate, adică pentru comutarea închiderilor simetrică și tranzitivă.
Fie $A = \{a, b\}$ cu $a \neq b$, iar $R = \{(a, b)\} \subset A^2$.
Atunci R e o relație binară tranzitivă pe A, întrucât, pentru orice $x, y, z \in A$, proprietatea $(x, y), (y, z) \in R$ este falsă, așadar proprietatea $(\forall\, x, y, z \in A)\,((x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$ este adevărată.
Prin urmare, $\mathcal{T}(R) = R$, așadar
$\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1} = \{(a, b), (b, a)\} \subsetneq A^2$.
În schimb $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{T}(R \cup R^{-1}) = \mathcal{T}(\{(a, b), (b, a)\})$, care este tranzitivă și include pe $\{(a, b), (b, a)\}$, așadar conține și perechile (a, a) și (b, b), prin urmare $A^2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) \subseteq A^2$, a sadar $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) = A^2 \supsetneq \mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$.
Acum fie $A = \mathbb{N}$, iar $R = \,|\, = \{(n, k \cdot n) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ (adică R e relația "divide pe" pe $\mathbb{N}$), așadar $R^{-1} = \,\vdots\, = \{(k \cdot n, n) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ (R^{-1} e relația "se divide cu" pe $\mathbb{N}$).

Atunci $R = \,|$ e tranzitivă, așadar $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1} = \,| \cup \vdots$.

În schimb $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{T}(| \cup \vdots)$, care include pe $| \cup \vdots$, așadar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$,

$(a, a \cdot b) \in \,| \subset \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$, iar $(a \cdot b, b) \in \,\vdots \subset \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$, așadar $(a, b) \in \mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ întrucât $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ e tranzitivă, prin urmare $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) \subseteq \mathbb{N}^2$, deci

$\mathcal{T}(\mathcal{S}(R)) = \mathbb{N}^2 \supsetneq | \cup \vdots = \mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$, întrucât, de exemplu, $(2,3) \notin | \cup \vdots$.
⑦ În fiecare dintre cele două contraexemple pentru egalitatea dintre $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ și $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ de la ⑥, R e tranzitivă, dar $\mathcal{S}(R)$ nu e tranzitivă:
$(a,b),(b,a) \in \mathcal{S}(\{(a,b)\})$, dar $(a,a) \notin \mathcal{S}(\{(a,b)\})$, deci $\mathcal{S}(\{(a,b)\})$ nu e relație tranzitivă pe $\{(a,b)\}$ cu $a \neq b$;
$(2,6),(6,3) \in \mathcal{S}(|)$, dar $(2,3) \notin \mathcal{S}(|)$, deci $\mathcal{S}(|)$ nu e relație tranzitivă pe $\mathbb{N}$.

Cu proprietățile de comutare ale închiderilor, putem demonstra formulele **(4)** și **(5)** de mai sus pentru operatorii de închidere *Pre* și $\mathcal{E}$, și observăm, în plus, că:

Propoziție

Pentru orice mulțime A și orice $R \subseteq A^2$:

1. $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$;
2. $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(R))) \supseteq \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T}(R))) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))) = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathcal{R}(R)))$, *dar nu avem neapărat și cealaltă incluziune, iar* $\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)))$ *e reflexivă și simetrică, dar nu neapărat tranzitivă.*

Demonstrație: Folosim caracterizarea de mai sus a închiderilor prin cele trei proprietăți.
① $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$ este o relație binară reflexivă pe A, și, conform comutării închiderii reflexive cu cea tranzitivă, $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$, prin urmare această relație este și tranzitivă, deci este o preordine.

$R \subseteq \mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$, așadar $R \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$.
Acum fie $P \subseteq A^2$ o preordine pe A astfel încât $R \subseteq P$. Atunci: $R \subseteq P$ și P e tranzitivă, așadar $\mathcal{T}(R) \subseteq P$; dar P e și reflexivă, prin urmare $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) \subseteq P$.
Deci $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R))$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) preordine pe A care include pe R, adică $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = Pre(R)$.
(2) Conform comutării închiderii reflexive cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, avem:
$\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(R)))$ și
$\mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathcal{T}(R))) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))) = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathcal{R}(R)))$, care, ca mai sus, e reflexivă si simetrică,
iar, întrucât închiderea simetrică a închiderii tranzitive este inclusă în închiderea tranzitivă a închiderii simetrice, avem: $\mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathcal{R}(R))) \supseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(R)))$.
Ca mai sus:
$\mathcal{R}(\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$ este și reflexivă, și tranzitivă, deci este o preordine;
dar avem și $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(\mathcal{R}(R)))$, iar $\mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$ este simetrică și, conform propoziției anterioare, închiderea tranzitivă păstrează simetria, așadar $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$ este și simetrică;
prin urmare $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$ este o relație de echivalență pe A.
$R \subseteq \mathcal{S}(R) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$, așadar $R \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$.
Acum fie $E \in \mathrm{Eq}(A)$ astfel încât $R \subseteq E$. Atunci: $R \subseteq E$ și E e simetrică, așadar $\mathcal{S}(R) \subseteq E$, iar E e reflexivă, așadar $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) \subseteq E$, iar E e tranzitivă, așadar $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) \subseteq E$.

Deci $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)))$ e cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R, adică $\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{E}(R)$.

Acum să considerăm o mulțime $A = \{a, b, c\}$ având $|A| = 3$ (adică $a \neq b \neq c \neq a$), iar $R = \{(a, b), (c, b)\}$, astfel că R e tranzitivă, ca în exemplul finit de mai sus (nu există $x, y, z \in A$ cu $(x, y), (y, z) \in R$), deci $\mathcal{T}(R) = R$.

$\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{R}(\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\} \notin \mathrm{Eq}(A)$, pentru că nu e tranzitivă: de exemplu conține perechile $(a, b), (b, c)$, dar nu și perechea (a, c);

în timp ce $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\})) = \mathcal{T}(\Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}) = A^2 \supsetneq \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(R)))$.

Un alt contraexemplu pentru egalitatea lui $\mathcal{E}(R)$ cu succesiunile operatorilor $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ aplicați lui R în care $\mathcal{S}$ apare în fața lui $\mathcal{T}$ este cel infinit de la punctul 6 din demonstrația propoziției precedente:

$\mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(|))) = \mathcal{R}(\mathcal{S}(|)) = \mathcal{R}(| \cup \vdots) = | \cup \vdots \notin \mathrm{Eq}(\mathbb{N}^2)$, pentru că nu e tranzitivă:

$(2, 6), (6, 3) \in | \cup \vdots$, dar $(2, 3) \notin | \cup \vdots$;

$\mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(|))) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(| \cup \vdots)) = \mathcal{T}(| \cup \vdots) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(|)) = \mathbb{N}^2 \supsetneq \mathcal{R}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(|)))$.

Exercițiu (temă)

Fie R relația “sunt numere consecutive“ pe $\mathbb{N}$, i. e.: $R = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$. Să se arate că:

1. $\mathcal{R}(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y - x \in \{0, 1\}\}$
2. $\mathcal{S}(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, |y - x| = 1\}$
3. $\mathcal{T}(R) =<= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$ (**indicație:** să se arate, prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, că $R^n = \{(k, k + n) \mid k \in \mathbb{N}\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$; de fapt, această egalitate este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$)
4. $Pre(R) =\leq= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$
5. $\mathcal{E}(R) = \mathbb{N}^2$

Remarcă (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată)

Fie R o relație binară pe A, arbitrară.
De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R, sau o relație de ordine generată de R?
Două motive sunt următoarele fapte, fiecare ușor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relație binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiția antisimetriei), și deci nu este nici relație de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conține cel puțin două elemente distincte a și b, așadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relație de ordine, prin urmare A^2 nu aparține familiei relațiilor antisimetrice pe A, deci nici familiei relațiilor de ordine pe A, așadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părți ale lui A^2, pentru că niciuna dintre ele nu conține intersecția familiei vide de părți ale lui A^2, anume pe A^2.