Logică Matematică și Computațională

EXAMEN PARȚIAL DIN PRELIMINARIILE ALGEBRICE

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

Noiembrie 2021

Fiecare student trebuie să trimită lucrarea sa, într–un singur fișier PDF, semnat cu numele în clar, seria și anul din care face parte, ca răspuns la această temă MS Teams colectivă.
Nu uitați să dați **Turn in** în MS Teams după ce submiteți lucrarea de examen.

(Punctaj: **3 puncte** în total)

Primul exercițiu: **0,5 puncte**; al doilea exercițiu: **0,5 puncte**; al treilea exercițiu: **2 puncte**. Fiecare subpunct al fiecărui exercițiu are același punctaj între subpunctele acelui exercițiu.

Amintesc că, dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \to B$, atunci *nucleul de săgeată dublă al lui* f:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\},$$

aparține mulțimii $\mathrm{Eq}(A)$ a relațiilor de echivalență pe A.
A se observa că mulțimea factor prin această relație de echivalență este formată din clasele:

$$A/\mathrm{Ker}(f) = \{f^{-1}(\{u\}) \mid u \in B\}.$$

Ca de obicei, voi desemna structurile algebrice și prin mulțimile lor suport, și se va înțelege din context între ce structuri pe aceste mulțimi sunt definite morfismele.
În orice latice L, voi folosi notația uzuală $\vee$, $\wedge$ pentru operațiile binare de disjunție, respectiv conjuncție ale lui L și $\leq$ pentru relația de ordine a lui L.

Definiție

Dacă $(L, \leq)$ este o latice, iar $a, b \in L$, cu $a \leq b$, atunci mulțimea elementelor laticii L cuprinse între a și b notată cu $[a, b]_L$, se numește *intervalul* laticii L mărginit de a și b:

$$[a, b]_L = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

Exercițiu (pentru acest exercițiu este permis să vă consultați între voi)

Fie A o mulțime nevidă, $S \subseteq A$, $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, iar $\leq$ o relație de ordine pe A.
Să se demonstreze că:

1. $\sim \circ \leq \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\leq \circ \sim \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\sim \cup \leq \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\leq \subseteq \sim$;
2. $\sim \circ (\leq \cap S^2) \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $(\leq \cap S^2) \circ \sim \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\sim \cup (\leq \cap S^2) \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\leq \cap S^2 \subseteq \sim$;
3. dacă posetul $(A, \leq)$ este mărginit, atunci: $\sim \circ \leq \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\leq \circ \sim \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\sim \cup \leq \in \mathrm{Eq}(A)$ ddacă $\sim = A^2$;
4. $\sim \circ \leq$ este o relație de ordine pe A ddacă $\leq \circ \sim$ este o relație de ordine pe A ddacă $\sim \cup \leq$ este o relație de ordine pe A ddacă $\sim \circ (\leq \cap S^2)$ este o relație de ordine pe A ddacă $(\leq \cap S^2) \circ \sim$ este o relație de ordine pe A ddacă $\sim \cup (\leq \cap S^2)$ este o relație de ordine pe A ddacă $\sim = \Delta_A$.

În enunțul de mai sus a fost nevoie de această distincție între notații, dar, în rezolvările următoarelor exerciții, notați relația de ordine $\leq \cap S^2$ indusă pe o submulțime S a unui poset $(A, \leq)$ de relația de ordine $\leq$ de pe A tot cu $\leq$, în modul uzual.

Exercițiu (pentru acest exercițiu este permis să vă consultați între voi)

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \vee, \wedge, \leq)$ latici nevide, iar $f : L \to M$ un morfism de latici. Să se demonstreze că:

1. intervalele lui L sunt sublatici ale lui L și sunt latici mărginite, iar, în cazul în care $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită, singurul interval al lui L care este sublatice mărginită a lui L este $[0, 1]_L = L$;
2. imaginile intervalelor lui L prin f sunt intervale ale sublaticii $f(L)$ a lui M;
3. dacă f e injectivă, atunci f păstrează complemenții relativi la intervale, adică, pentru orice $a, b \in L$ cu $a \leq b$ și orice $x, y \in [a, b]_L$, are loc: x este complement al lui y în laticea mărginită $[a, b]_L$ ddacă $f(x)$ este complement al lui $f(y)$ în laticea mărginită $[f(a), f(b)]_M$;
4. toate clasele finite ale lui $\mathrm{Ker}(f)$ sunt intervale.

Indicație pentru punctul 4: pentru orice $u \in M$, dacă $f^{-1}(\{u\}) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ (amintesc că orice clasă a unei partiții, deci orice clasă a unei relații de echivalență, este nevidă), atunci $f^{-1}(\{u\}) = [x_1 \wedge \ldots \wedge x_n, x_1 \vee \ldots \vee x_n]_L$. Nu folosiți exercițiul anterior pentru a rezolva acest punct; acel exercițiu este menit doar să vă amintească definițiile relațiilor de echivalență și a celor de ordine; proprietățile din acel exercițiu nu au nicio legătură cu compatibilitatea unei relații de echivalență cu vreo structură de poset (sau de latice).

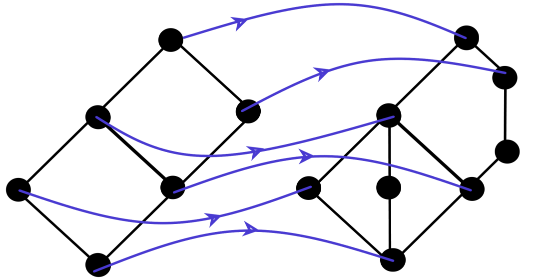
În enunțul următor, pentru fiecare student, i este prima cifră, iar j este a doua cifră a numărului sau perechii de cifre care precedă numele studentului în lista de la finalul acestui set de subiecte, iar $k = \begin{cases} i, & \text{dacă } i \neq j, \\ 10, & \text{dacă } i = j. \end{cases}$

Exercițiu

Considerăm laticile $(L_k, \leq)$ și $(L_j, \leq)$ date de diagramele Hasse de mai jos și elementele $x_k, y_k \in L_k$ și $x_j, y_j \in L_j$ marcate în aceste diagrame Hasse.
Să se eticheteze elementele din $L_k \setminus \{x_k, y_k\}$, respectiv $L_j \setminus \{x_j, y_j\}$ pe aceste diagrame, apoi să se enumere:

1. toate izomorfismele de latici $f : S_k \to S_j$ de la o câte o sublatice mărginită S_k a lui L_k cu proprietatea că $x_k, y_k \in S_k$ la câte o sublatice mărginită S_j a lui L_j cu proprietatea că $x_j, y_j \in S_j$ care satisfac condiția $f(\{x_k, y_k\}) = \{x_j, y_j\}$;
2. toate morfismele de latici mărginite $g : L_k \to L_j$ care satisfac condiția $g(\{x_k, y_k\}) \subseteq \{x_j, y_j\}$;
3. pentru fiecare sublatice S_j a lui L_j de la punctul ①, toate morfismele surjective de latici (mărginite) $h : L_k \to S_j$ care satisfac condiția $h(\{x_k, y_k\}) \subseteq \{x_j, y_j\}$, iar, dacă nu există astfel de perechi de latici la punctul ①, atunci să se determine toate morfismele surjective de latici (mărginite) $h : L_k \to T_j$ de la L_k la cea mai mică sublatice mărginită T_j a lui L_j cu $x_j, y_j \in T_j$ care satisfac condiția $h(\{x_k, y_k\}) \subseteq \{x_j, y_j\}$.

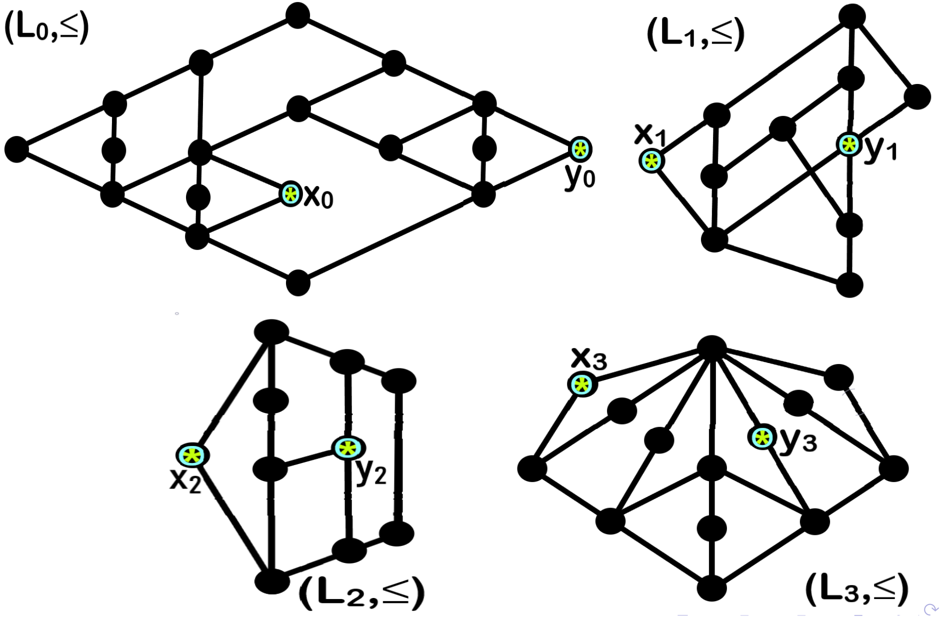
Nu dați aceste morfisme prin tabele, ci reprezentându–l pe fiecare în parte cu săgeți, ca mai jos, dar cu nodurile diagramelor Hasse etichetate (fie desenând de mână lizibil astfel de diagrame, fie editându–le):

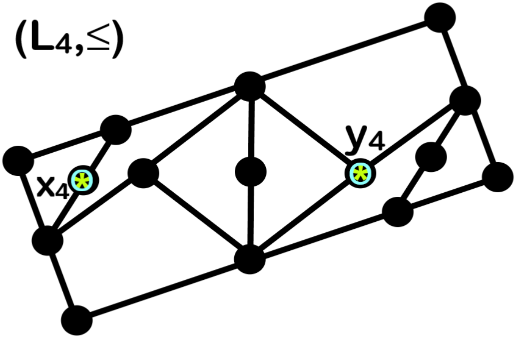


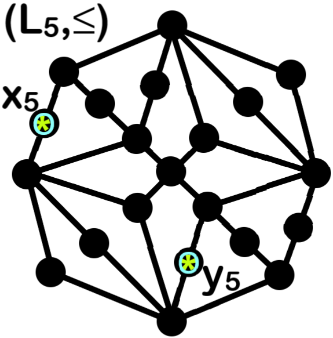
În rezolvarea acestui exercițiu nu este necesară nicio justificare în afară de aceste diagrame de latici și funcții sau, unde este cazul, specificarea faptului că nu există funcții de tipul cerut.

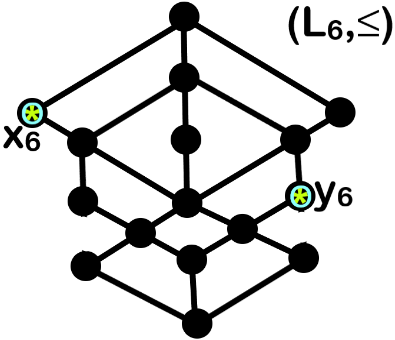
Fiecare student care dă acest examen și nu se regăsește în lista de mai jos va proceda în felul următor: va anunța printr–o postare pe canalul General al acestei echipe MS Teams că preia primul subiect nealocat din lista de mai jos; dacă numerele subiectelor alocate sunt $1, 2, \ldots, n$, atunci următorul subiect preluat va fi $n + 1$; nerespectarea acestei reguli de alocare a propriului subiect individual va duce la anularea lucrării de examen.

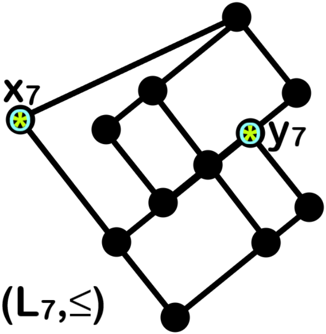
Partea individuală a subiectului fiecărui student

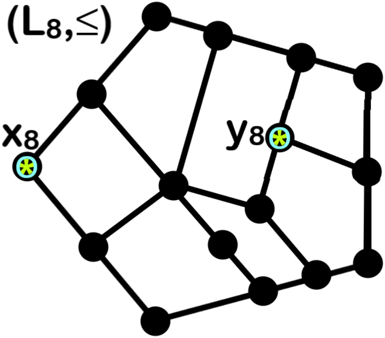


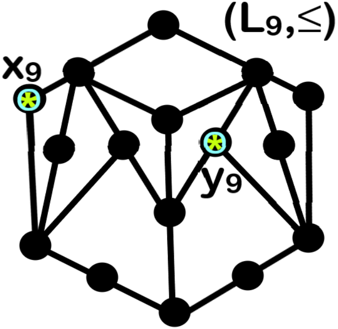

$(L_4, \leq)$
x_4
y_4

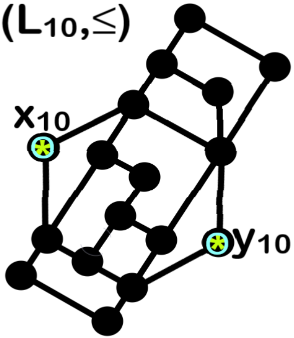

$(L_5, \leq)$
x_5
y_5


$(L_6, \leq)$
x_6
y_6


x_7
y_7
$(L_7, \leq)$


(L8,≤)
x8
y8


(L9,≤)
x9
y9


(L10,≤)
x10
y10

- **Anul I Informatică ID grupa 1**:

număr subiect, nume student:	număr subiect, nume student:
01. Alexa E. L. Andreea	20. Matei L. Teodor Paul
02. Andrei I. Florin Catalin	21. Mlesnita C. Cozmin-Alexandru
03. Anghelescu A. S. Florin-Alexandru-Paraschiv	22. Mosescu A. Rares-Adrian
04. Apostol A. Stefan-Cristian	23. Oprea A.G. Mihai-Daniel
05. Avramescu M. Robert-Valentin	24. Pantiru L. Dragos-George
06. Bardita D Mihai-Andrei	25. Paraipan A. George
07. Cardos I. Maria-Teodora	26. Pauna A.C. Rares-Andrei-Alexandru
08. Cerbu I. Iulian	27. Petcu F. David
09. Cojocari C. Valeriu	28. Petcu A. Gabriela-Camelia
10. Cretu S.A. Stefan-Adrian	29. Petreus L. Victor-Bogdan
11. Draghici I.F. Alisa- Diana	30. Roman V. Eduard-Emanuel
12. Duican R. Cosmin-Alexandru	31. Rotaru O. Ada
13. Eremeico S. Alexandru	32. Rusan S. V. Adrian-Ionut
14. Gemene G. Adrian-Marian	33. Selaru C. Marius-Nicolae
15. Ghita A. Alexandru-Stefan	34. Taloi T.L. Andrei-Cristian
16. Herdes-Suceveanu G. Bogdan	35. Toma R. Alexandru Silviu
17. Iosub F. Erling-Madalin	36. Turcan G. Cristian
18. Jianu S. Radu	37. Voicea C. Maria-Amalia
19. Manta I. Ciprian-Nicolae	

- **Anul I Informatică ID grupa 2**:

număr subiect, nume student:	număr subiect, nume student:
38. Albu I. Adrian	57. Limbosanu F.E Denisa Bianca
39. Balalau M.G. Mihai	58. Lopotaru A. Florin-Mihai
40. Baltatescu C. Elena-Ecaterina	59. Mazilu V.S. Andrei
41. Banu H.V. Marius-Andrei	60. Mehedintu M. Mihail-Octavian
42. Bimbasa G. Razvan	61. Oprea I. Alexandru
43. Bratosin D.E. David-Robert	62. Otelea V. Vasile Robert
44. Circu S.D. Catalin Gherasim	63. Parjol C. Andrei-Nicolae
45. Cojanu M. Mihaela	64. Parlica A. Andreea
46. Cojocaru M. L. Radu-Nicolae	65. Pintilie G. Catalina
47. Costa C.A. Stefan	66. Popa M. Erminia Petra
48. Coteata V. Andrei	67. Pruna V. Diana-Andreea
49. Crisan G.E. Andreea-Georgiana	68. Raianu C. Ovidiu-Stefan
50. Despa M.E. Catalin-Daniel	69. Stanciu V. Olivian-Vasile
51. Eremencu I. Marius-Adrian	70. Stancu V. Theodor
52. Filip M.N. Rares-Andrei	71. Sisiu M. Sorin-Marian
53. Ionascu N. Augustin Ionut	72. Tarcuta G. Georgiana-Viorica
54. Ionovici J. Laurentiu Florin	73. Tudorache A. Radu Tiberiu
55. Jilavu C. Alexandru	74. Ursu G. Carol
56. Leancu A.V.C. Ioan Cristian	75. Voichici N. Gabriel