Bărdiță D. Mihai-Andrei
Anul 1, Seria ID, Grupa 1

LMC - parțial

Ex. 2:

②. $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \vee, \wedge, \leq)$, $x, y \in L$

$f: L \to M$ morfism de latici $\Rightarrow \begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \end{cases}$

①. A - interval al lui L

$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\} \subseteq L$

fie $x, y \in [a, b]$ $(x \leq y)$ $\Rightarrow a \leq x \leq y \leq b \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \vee y \leq b \\ x \wedge y \geq a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x \vee y \in A \\ x \wedge y \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ A sublatice a lui L

- $\left.\begin{matrix} a \leq x \Rightarrow a \wedge x = a - \inf \in A \\ y \leq b \Rightarrow y \vee b = b - \sup \in A \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ A este latice mărginită

- $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ - latice mărginită

presupunem intervalul $A \subseteq L$ și $B \subseteq L$ a.î.

$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$ - latice mărginită

$[c, d] = \{y \in B \mid c \leq y \leq d\}$ - latice mărginită

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} A \text{ - mărginită} \Rightarrow 0 \in A \text{ și } 1 \in A \\ a = \inf \\ b = \sup \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} B \text{ mărginită} \Rightarrow 0 \in B \text{ și } 1 \in B \\ c = \inf \\ d = \sup \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ d = 1 \end{matrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = c \\ b = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = B$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$! singur interval sublatice mărginită a lui L.

② caz general: $f: A \to B \Rightarrow Im(f) = B$

fie $x \in L \Rightarrow Im(x) = f(x) \in M$

$f[f(a), f(b)] = \{f(x) \in M \mid f(a) \leq f(x) \leq f(b)\}$

fie $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$

$$\left.\begin{array}{l} Im(a) = f(a) \in M \\ Im(b) = f(b) \in M \\ x \in [a, b] \Rightarrow Im(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow [f(a), f(b)] = \{f(x) \in M \mid x \in L\}$$

③ $f: L \to M$ injectivă ($\forall x, y \in L$, $x \neq y$ $\exists$ $f(x) \neq f(y)$)

$a, b \in L$ cu $a \leq b$

$\forall x, y \in [a, b]_L \Rightarrow x$ complement lui y în $[a, b]_L$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x \wedge y = a \\ x \vee y = b \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) \wedge f(y) = f(a) \\ f(x) \vee f(y) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ este complement al lui $f(y)$ în $[f(a), f(b)]_M$

pt. $(\forall)$ $f(x), f(y) \in [f(x), f(y)]_M \Rightarrow f(x)$ complement lui $f(y)$ în $[f(a), f(b)]_M$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(a) \\ f(x) \vee f(y) = f(b) \\ f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) \\ f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \wedge y = a \\ x \vee y = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x$ complementara lui y în $[a, b]_L$

④. $Ker(f) = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$

Ex. 1:

① $S \subseteq A$, $\sim \in Eg(A)$, „$\leq$" = relație de ordine pe A

① $\sim \circ \leq \in Eg(A)$ ddacă:
- $\leq \circ \sim \in Eg(A)$
- $\sim \cup \leq \in Eg(A)$

Dacă $\sim \in Eg(A) \Rightarrow \sim$ este:
- reflexivă: $\Delta_A \subseteq \sim \Leftrightarrow \Delta_A^{-1} \subseteq \sim^{-1} \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq \sim^{-1} \Leftrightarrow$ $\sim^{-1}$ reflex. $(\Delta_A^{-1} = \Delta_A)$
- simetrică: $\sim = \sim^{-1} \Leftrightarrow \sim^{-1} = (\sim^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \sim^{-1}$
- tranzitivă: $\sim \circ \sim \subseteq \sim \Leftrightarrow (\sim \circ \sim)^{-1} \subseteq \sim \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sim^{-1} \circ \sim^{-1} \subseteq \sim^{-1} \Leftrightarrow \sim^{-1}$ $((\sim \circ \sim)^{-1} = \sim^{-1})$

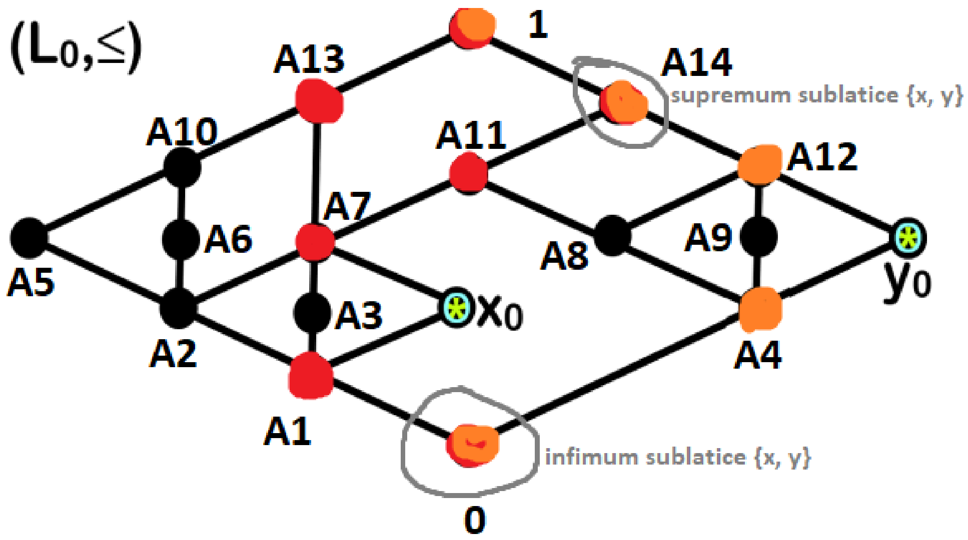
„$\leq$" rel. de ordine i.e „$\leq$" este:
- reflexivă $\Delta_A \subseteq \leq$
- tranzitivă $\leq^2 \subseteq \leq$
- antisimetrică $\leq \cap \leq^{-1} \subseteq \Delta_A$

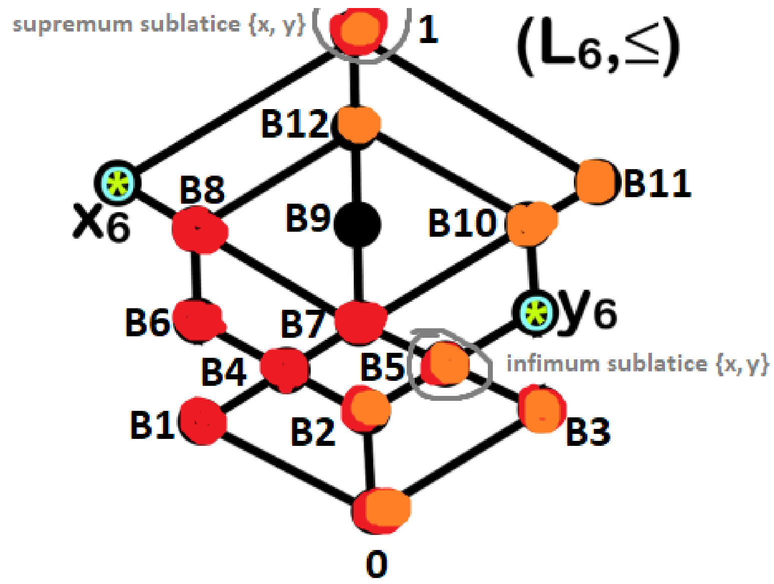
$\forall a, b, c \in A$: $a \leq a$ - reflexivă

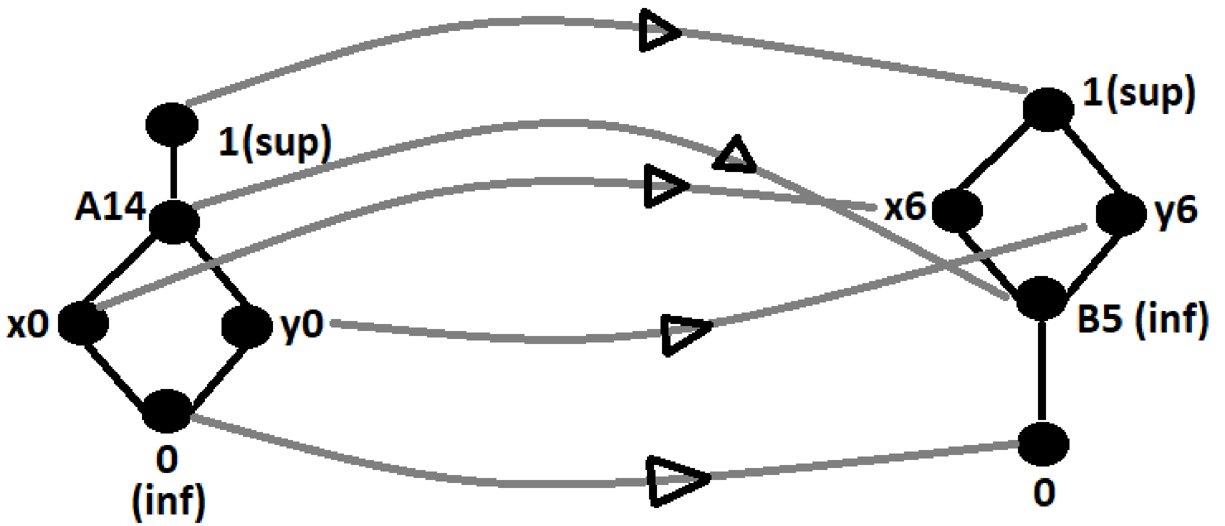
$a \leq b$ și $b \leq a$ antisimetrică

$a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$ - tranzitivă

Ex. 3.1:

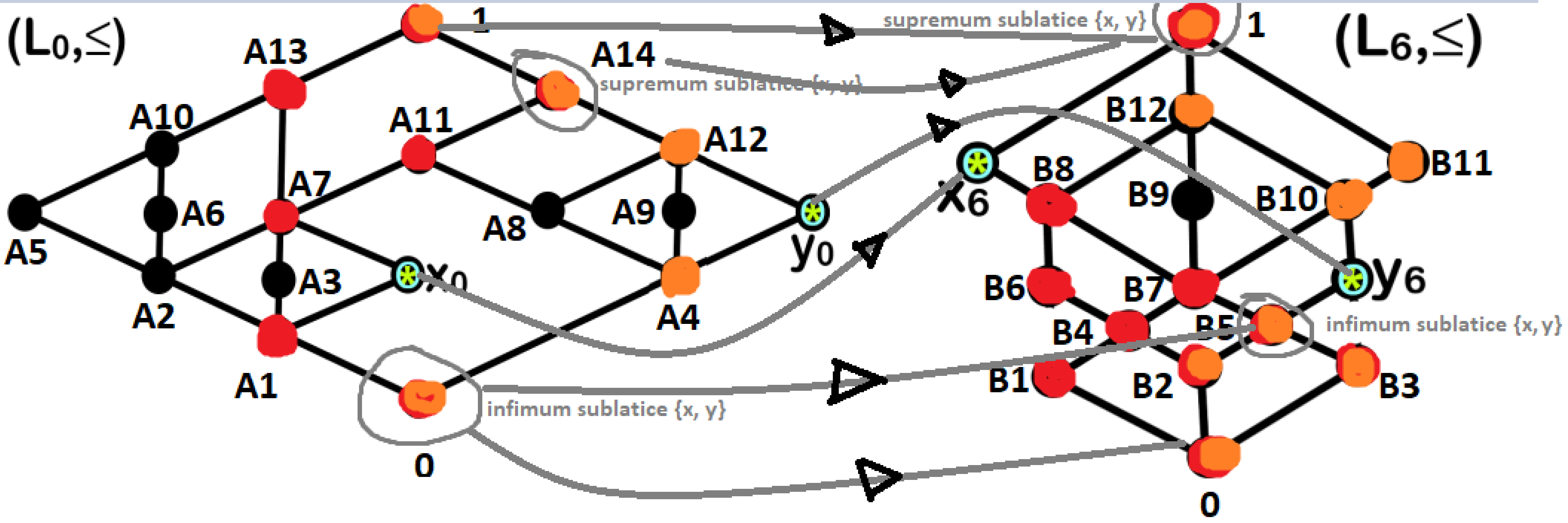






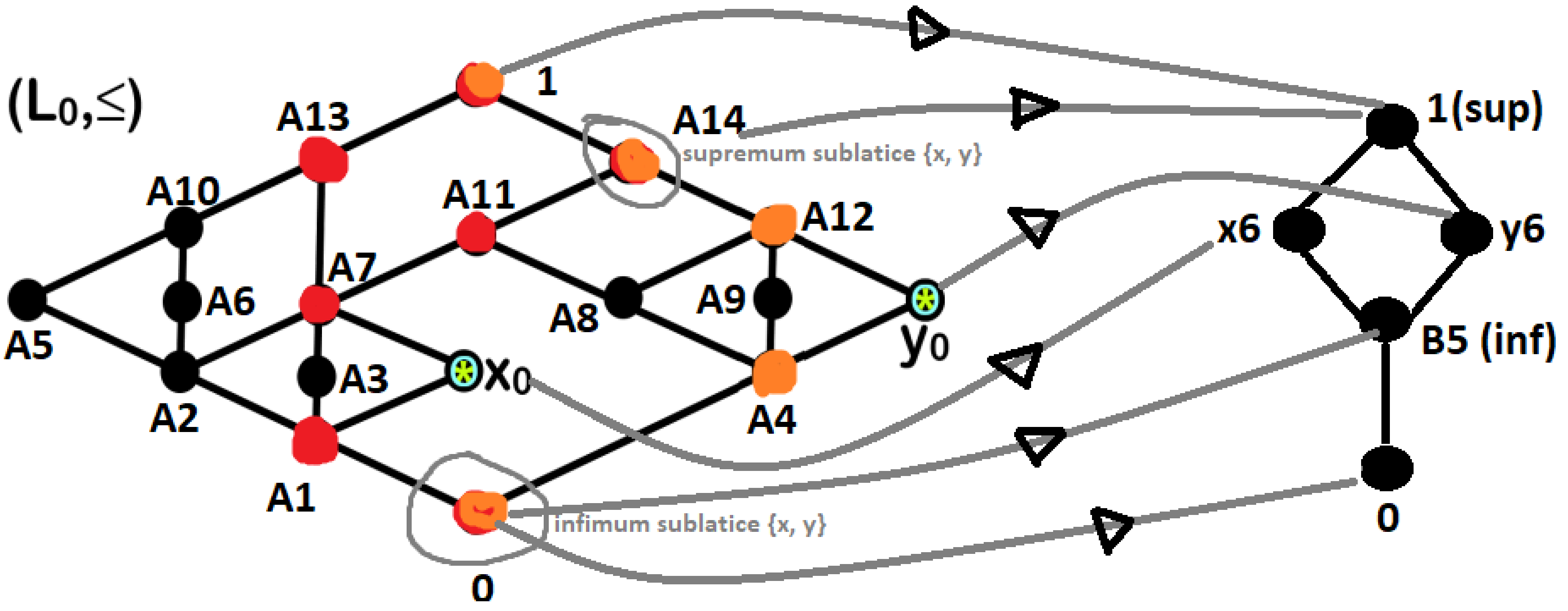
Nu exista izomorfism intre sublatici ale laticilor L0 si L6.

Ex. 3.2:



Nu exista morfisme.

Ex. 3.3:



Nu exista functia.