CURS I

NOŢIUNI PRELIMINARE

§ 1. MULŢIMI

Prin *mulţime* înţelegem o colecţie de obiecte care se numesc elementele mulţimii. Vom nota cu litere mari mulţimile, iar cu litere mici elementele lor. Dacă A este o mulţime şi x un element al său, vom scrie $x \in A$ şi vom citi „x aparţine lui A". Dacă x nu se găseşte în A, atunci vom scrie $x \notin A$ şi vom citi „x nu aparţine lui A".

Există două moduri de definire (de determinare) a unei mulţimi:

i) Numind individual elementele sale. În acest caz mulţimea se specifică scriind între acolade elementele sale $\{x, y, z, ...\}$. De exemplu, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, adică mulţimea formată din primele patru numere naturale; $B = \{a, b, c, d, e\}$, adică mulţimea formată din primele cinci litere ale alfabetului latin.

ii) Specificând o proprietate pe care o au elementele sale şi nu le au alte elemente. Mai precis, dată o proprietate se poate vorbi de mulţimea acelor obiecte pentru care proprietatea respectivă are loc. Mulţimile definite în acest mod se vor nota prin $A = \{x \mid P(x)\}$, adică mulţimea acelor obiecte x pentru care are loc P(x).

De exemplu, să considerăm proprietatea "a fi număr natural par": în acest caz mulţimea A va fi mulţimea numerelor naturale pare.

Pentru câteva mulţimi care vor fi des utilizate avem notaţii speciale: cu **N** vom nota mulţimea numerelor naturale, adică $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Cu $\mathbf{N}^*$ vom nota mulţimea numerelor naturale nenule, adică $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Cu **Z** vom nota mulţimea numerelor întregi, cu **Q** mulţimea numerelor raţionale, cu **R** mulţimea numerelor reale, iar cu **C** mulţimea numerelor complexe.

În teoria mulţimilor se admite existenţa unei mulţimi care nu are nici un element. Aceasta se numeşte *mulţimea vidă* şi se notează cu simbolul $\varnothing$.

Dacă A şi B sunt două mulţimi, vom spune că A este o *submulţime* a lui B (sau A este *conţinută*, respectiv *inclusă* în B) şi vom scrie $A \subseteq B$ dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Simbolic scriem astfel: $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$. Dacă incluziunea este strictă, adică există elemente în B care nu sunt în A, scriem $A \subset B$.

Mulţimea vidă este submulţime a oricărei mulţimi. Între mulţimile de numere considerate mai înainte avem incluziunile: $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Două mulţimi A şi B sunt *egale* dacă au aceleaşi elemente, adică $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$ („$\Leftrightarrow$” înseamnă "dacă şi numai dacă").

Relaţia de incluziune (resp. relaţia de egalitate) între mulţimi are proprietăţile următoare:

a) este <u>reflexivă</u>, adică $A \subseteq A$ (resp. $A = A$);

b) este <u>antisimetrică</u>, adică din $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$ rezultă $A = B$ (resp. este <u>simetrică</u> adică $A = B \Rightarrow B = A$);

c) este <u>tranzitivă</u>, adică $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (resp. $A = B$ şi $B = C \Rightarrow A = C$).

Cu mulţimi se fac următoarele operaţii:

• *intersecţia* a două mulţimi A şi B înseamnă mulţimea

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\};$$

• *reuniunea* mulţimilor A şi B înseamnă mulţimea

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

În cazul când $A \cap B = \varnothing$ spunem că mulţimile A şi B sunt *disjuncte*.

Operaţiile de intersecţie şi reuniune au următoarele proprietăţi:

$$A \cup \varnothing = A;\ A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup B = B \cup A;\ A \cap B = B \cap A \text{ (comutativitate)}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \text{ (asociativitate)}$$

$$A \cup A = A;\ A \cap A = A \text{ (idempotenţă)}$$

$$A \subseteq B \text{ dacă şi numai dacă } A \cup B = B;\ A \subseteq B \text{ dacă şi numai dacă } A \cap B = A$$

Operaţiile de intersecţie şi reuniune satisfac egalităţile:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

numite *distributivitatea intersecţiei (resp. reuniunii) faţă de reuniune (resp. intersecţie).*

Prin *diferenţa* mulţimilor B şi A înţelegem mulţimea

$$B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}.$$

Să observăm că $A \subseteq B$ dacă şi numai dacă $A \setminus B = \varnothing$.

Dacă A este o submulţime a lui B, atunci diferenţa $B \setminus A$ se numeşte *complementara* mulţimii A în B şi se notează cu $C_B A$. De exemplu $C_B\varnothing = B$, iar $C_B B = \varnothing$. De asemenea, $A \cup C_B A = B$, iar $A \cap C_B A = \varnothing$, adică A şi $C_B A$ sunt disjuncte.

Dacă A şi A' sunt două submulţimi ale mulţimii B au loc egalităţile:

$$C_B(A \cup A') = (C_B A) \cap (C_B A')$$

$$C_B(A \cap A') = (C_B A) \cup (C_B A')$$

numite *formulele lui De Morgan*.

Relaţia de incluziune ne permite să definim *mulţimea părţilor* unei mulţimi T notată cu $\mathcal{P}(T)$, adică $\mathcal{P}(T)$ are ca elemente toate submulţimile mulţimii T.

Fie A şi B două mulţimi arbitrare. Dacă $a \in A$ şi $b \in B$, atunci putem forma *perechea ordonată* (a, b), adică perechea formată din elementele a şi b unde este stabilită o anumită ordine în sensul că *a* este primul element iar *b* este al doilea element în această pereche. Rezultă că două perechi (a_1, b_1) şi (a_2, b_2) sunt egale dacă şi numai dacă $a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$. Prin *produsul cartezian* al mulţimilor A şi B înţelegem mulţimea

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Când $A = B$, notăm $A^2 = A \times A$.

Se observă că dacă $A = \emptyset$ sau $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$. În plus, dacă A are *m* elemente iar B are *n* elemente, atunci mulţimea $A \times B$ are *mn* elemente.

§ 2. FUNCŢII

Fiind date mulţimile A şi B, prin *funcţie* (sau *aplicaţie*) definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B se înţelege o „lege” f în baza căreia oricărui element $a \in A$ i se asociază un unic element, notat f(a), din B.

Mulţimea A se numeşte *domeniul de definiţie* al funcţiei f, iar mulţimea B se numeşte *domeniul valorilor* funcţiei f (sau *codomeniul* funcţiei f).

O funcţie f este determinată atunci când se dă domeniul de definiţie, codomeniul său şi modul cum acţionează f. O funcţie f definită pe mulţimea A cu valori în B se notează $f : A \to B$.

Fie $f : A \to B$ o funcţie. Prin *graficul* lui f se înţelege mulţimea $G_f = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ şi } b = f(a)\}$. Evident $G_f \subseteq A \times B$. Dacă ştim graficul unei funcţii, atunci putem identifica domeniul, codomeniul şi „legea” funcţiei. De aceea este mult mai riguros să definim o funcţie ca un triplet (A, B, G) format din trei mulţimi A, B şi $G \subseteq A \times B$ cu proprietatea că $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B$ astfel încât $(a, b) \in G$.

Dacă A şi B sunt două mulţimi oarecare, vom nota cu $B^A = \{f : A \to B \mid f \text{ funcţie}\}$, adică mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori în B.

Dacă A este o mulţime oarecare, funcţia $1_A : A \to A$, unde $1_A(a) = a$ oricare ar fi $a \in A$ se numeşte *funcţia identică* a mulţimii A.

Dacă $A \subseteq B$, atunci funcţia $i : A \to B$, unde $i(a) = a$ oricare ar fi $a \in A$ se numeşte *funcţia incluziune* a submulţimii A a lui B.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *restricţie* a funcţiei $g : A' \to B$ dacă $A \subseteq A'$ şi $f(a) = g(a)$, oricare ar fi $a \in A$. (Să observăm că $f = g \circ i$, unde $i : A \to A'$ este funcţia incluziune.) f se notează cu $g_{|A}$. În această situaţie g se numeşte *extindere* a lui f.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *corestricţie* a funcţiei $g : A \to B'$ dacă $\operatorname{Im} g \subseteq B \subseteq B'$ şi $f(a) = g(a)$, oricare ar fi $a \in A$.

Dacă A_1 şi A_2 sunt două mulţimi oarecare, definim o funcţie $p_1 : A_1 \times A_2 \to A_1$ prin $p_1((a_1, a_2)) = a_1$ oricare ar fi $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Această funcţie se numeşte *proiecţia pe prima componentă*. Analog definim o funcţie $p_2 : A_1 \times A_2 \to A_2$ prin $p_2((a_1, a_2)) = a_2$ oricare ar fi $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ şi o numim *proiecţia pe a doua componentă*.

Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sunt mulţimi oarecare şi $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$ sunt două funcţii, atunci putem defini o funcţie $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ prin $(f_1 \times f_2)((a_1, a_2)) = (f_1(a_1), f_2(a_2))$ oricare ar fi $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. Această funcţie se numeşte *produsul cartezian* al lui f_1 cu f_2.

Dacă A şi T sunt două mulţimi şi $A \subseteq T$, definim o funcţie $\chi_A : T \to \{0, 1\}$ astfel: $\chi_A(t) = 1$ dacă $t \in A$, respectiv $\chi_A(t) = 0$ dacă $t \in T \setminus A$. Această funcţie se numeşte *funcţia caracteristică* a lui A.

Să observăm că dacă A şi A' sunt submulţimi ale lui T, atunci A = A' dacă şi numai dacă $\chi_A = \chi_{A'}$.

Exerciţiu. Fie A şi A' submulţimi ale lui T. Arătaţi că:

1) $\chi_{A \cap A'} = \chi_A \chi_{A'}$.

2) $\chi_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'} - \chi_A \chi_{A'}$. În particular, dacă A şi A' sunt disjuncte avem $\chi_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'}$.

3) $\chi_{A \setminus A'} = \chi_A(1 - \chi_{A'})$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi $A' \subseteq A$ este o submulţime a mulţimii A, notăm

$$f(A') = \{f(a') \mid a' \in A'\}$$

numită *imaginea directă* a lui A' prin funcţia f şi este o submulţime a lui B. În cazul particular când A' = A, notăm f(A) = Im f şi se numeşte *imaginea* funcţiei f.

Similar, dacă $B' \subseteq B$ este o submulţime a lui B, atunci notăm

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}.$$

Această submulţime se numeşte *imaginea inversă* a lui B' prin funcţia f şi este o submulţime a lui A.

Propoziţia 2.1. Considerăm o funcţie $f : A \to B$.

a) Dacă $M \subseteq N \subseteq A$, atunci $f(M) \subseteq f(N)$.

b) Dacă $M \subseteq A$ şi $N \subseteq A$, atunci $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.

c) Dacă $M \subseteq A$ şi $N \subseteq A$, atunci $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$.

d) Dacă $M \subseteq A$, atunci $M \subseteq f^{-1}(f(M))$.

e) Dacă $P \subseteq Q \subseteq B$, atunci $f^{-1}(P) \subseteq f^{-1}(Q)$.

f) Dacă $P \subseteq B$ şi $Q \subseteq B$, atunci $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.

g) Dacă $P \subseteq B$ şi $Q \subseteq B$, atunci $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.

h) Dacă $P \subseteq B$, atunci $f(f^{-1}(P)) \subseteq P$.

Exerciţii.

1) Daţi exemple de funcţii $f : A \to B$ cu proprietatea că există $M \subseteq A$ şi $N \subseteq A$ astfel încât $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.

2) Daţi exemple de funcţii $f : A \to B$ cu proprietatea că există $M \subseteq A$ astfel încât $M \subset f^{-1}(f(M))$.

3) Daţi exemple de funcţii $f : A \to B$ cu proprietatea că există $P \subseteq B$ astfel încât $f(f^{-1}(P)) \subset P$.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *injectivă* dacă oricare ar fi $a, a' \in A$ cu $a \neq a'$ rezultă $f(a) \neq f(a')$ sau echivalent, din egalitatea $f(a) = f(a')$ rezultă $a = a'$.

Propoziţia 2.2. (i) O funcţie $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă $\forall\ M \subseteq A$ şi $\forall\ N \subseteq A$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.

(ii) O funcţie $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă $M = f^{-1}(f(M))\ \forall\ M \subseteq A$

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *surjectivă* dacă oricare ar fi $b \in B$ există $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$ sau echivalent, $\mathrm{Im}\, f = B$.

Propoziţia 2.3. O funcţie $f : A \to B$ este surjectivă dacă şi numai dacă $f(f^{-1}(P)) = P$, $\forall\ P \subseteq B$.

O funcţie care este injectivă şi surjectivă se numeşte *bijectivă*.

Fiind date funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$, funcţia notată cu $g \circ f$, unde $g \circ f : A \to C$ şi $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ oricare ar fi $a \in A$, se numeşte *compunerea* funcţiilor f şi g.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie, atunci sunt evidente egalităţile:

$$1_B \circ f = f \text{ şi } f \circ 1_A = f.$$

O proprietate importantă a compunerii funcţiilor este următoarea:

Teorema 2.4. Compunerea funcţiilor este asociativă, adică fiind date funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to C$ şi $h : C \to D$ are loc egalitatea

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, se vede mai întâi că funcţiile $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au domeniul de definiţie A, iar codomeniul D. Fie acum $a \in A$. Avem

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))),$$

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))),$$

de unde rezultă că $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propoziţia 2.5. Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$.

a) Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

b) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

c) Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

d) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

e) Dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.

f) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă, iar g este surjectivă.

Demonstraţie. a) Fie $a, a' \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Atunci avem că $g(f(a)) = g(f(a'))$ şi cum g este injectivă rezultă $f(a) = f(a')$, de unde obţinem că $a = a'$ deoarece f este injectivă.

b) Fie $a, a' \in A$ astfel încât $f(a) = f(a')$. Atunci avem că $g(f(a)) = g(f(a'))$, adică $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, de unde obţinem că $a = a'$. Deci f este o funcţie injectivă.

c) Fie $c \in C$. Deoarece g este surjectivă există $b \in B$ astfel încât $g(b) = c$. Pe de altă parte există $a \in A$ cu $f(a) = b$, deoarece f este surjectivă. Rezultă că $(g \circ f)(a) = c$, deci $g \circ f$ este surjectivă.

d) Fie acum $c \in C$ şi $a \in A$ cu $(g \circ f)(a) = c$. Fie $b = f(a)$. Atunci $g(b) = c$, ceea ce ne arată că g este surjectivă.

e), f) Rezultă din precedentele.

Exerciţiu. Daţi exemplu de funcţii $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ cu proprietatea că $g \circ f = 1_{\mathbf{N}}$, dar g nu este injectivă, iar f nu este surjectivă.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *inversabilă* dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

Să presupunem acum că funcţia $f : A \to B$ este inversabilă. În acest caz funcţia $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$ este unic determinată. Într-adevăr, să presupunem că mai există o funcţie $g' : B \to A$ astfel încât $g' \circ f = 1_A$ şi $f \circ g' = 1_B$. În acest caz avem $(g' \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g$. Cum $(g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g'$ rezultă $g = g'$. Funcţia g fiind unică se notează cu f^{-1} şi se numeşte *inversa* funcţiei f.

Teorema 2.6. 1) Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, atunci inversa sa $f^{-1} : B \to A$ este inversabilă şi are loc egalitatea $(f^{-1})^{-1} = f$.

2) Dacă funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt inversabile, atunci şi funcţia $g \circ f : A \to C$ este inversabilă şi are loc egalitatea

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demonstraţie. 1) Cum avem egalităţile $f \circ f^{-1} = 1_B$ şi $f^{-1} \circ f = 1_A$ rezultă că şi f^{-1} este inversabilă şi inversa sa este f, adică $(f^{-1})^{-1} = f$.

2) Avem

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (1_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1_C$$

şi

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (1_B \circ f) = f^{-1} \circ f = 1_A.$$

Aceste egalităţi ne arată că $g \circ f$ este inversabilă şi inversa sa este $f^{-1} \circ g^{-1}$, adică $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Următoarea teoremă caracterizează funcţiile inversabile:

Teorema 2.7. Dacă $f : A \to B$ este o funcţie, atunci f este inversabilă dacă şi numai dacă f este bijectivă.

Demonstraţie. Presupunem că f este inversabilă. Atunci există o funcţie $g : B \to A$

astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Din Propoziţia 2.5 b) rezultă că f este injectivă iar din Propoziţia 2.5 d) rezultă că f este surjectivă, deci f este bijectivă.

Invers, presupunem că f este bijectivă. Fie $b \in B$ un element oarecare. Cum f este surjectivă există elementul $a_b \in A$ astfel încât $f(a_b) = b$. Cum f este injectivă, elementul a_b este unic determinat de b. Atunci definim funcţia $g : B \to A$ astfel: $g(b) = a_b$. Se verifică imediat că $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

Un rezultat foarte util în cele ce vor urma este următorul:

Teorema 2.8. Fie A o mulţime finită şi $f : A \to A$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) f este bijectivă;
2) f este injectivă;
3) f este surjectivă.

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2) şi 1) $\Rightarrow$ 3) sunt evidente.

2) $\Rightarrow$ 1) Deoarece A este o mulţime finită, putem scrie că $A = \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$. Cum f este injectivă, avem $f(A) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots , f(a_n)\}$, unde $f(a_i) \neq f(a_j)$, oricare ar fi $i \neq j$. Deci f(A) are n elemente. Din $f(A) \subseteq A$ rezultă că $f(A) = A$ şi deci f este şi surjectivă, adică bijectivă.

3) $\Rightarrow$ 1) Fie $b \in A$ şi notăm cu $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Evident că $f^{-1}(b)$ este o submulţime a lui A. Cum f este surjectivă, atunci $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ oricare ar fi $b \in A$. Deoarece $A = \bigcup_{b\in A} f^{-1}(b)$ şi mulţimile $f^{-1}(b)$ sunt disjuncte două câte două, rezultă că $f^{-1}(b)$ are un singur element, deoarece în caz contrar ar rezulta că $\bigcup_{b\in A} f^{-1}(b)$ ar avea un număr mai mare de elemente decât mulţimea A. Aceasta ne arată că f este neapărat o funcţie injectivă.

§ 3. PRODUSUL CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULŢIMI

Fie $I \neq \emptyset$ şi A o mulţime oarecare. O funcţie $\varphi: I \to A$ se mai numeşte *familie de elemente* din A indexată după I. Se notează

$$\varphi = (a_i)_{i\in I}, \text{ unde } a_i = \varphi(i).$$

Dacă $I = \{1, 2, \ldots , n\}$, atunci folosim notaţia $(a_i)_{i\in I} = (a_1, a_2, \ldots , a_n)$ şi $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ se mai numeşte *n-uplu*.

Dacă elementele lui A sunt mulţimi (sau submulţimi ale unei mulţimi T) obţinem noţiunea de *familie de mulţimi* (respectiv *familie de submulţimi* a lui T).

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Atunci mulţimile

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I, x \in A_i\}, \text{ respectiv } \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I, x \in A_i\}$$

se numesc *reuniunea*, respectiv *intersecţia* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Avem egalitățile:

$$A \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$$

$$A \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$$

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Mulţimea

$$\prod_{i\in I} A_i = \{\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \varphi(i) \in A_i, \forall\ i \in I\}$$

se numeşte *produsul cartezian* sau *produsul direct* al familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Astfel, putem scrie:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i \ \forall\ i \in I\}.$$

Dacă $A_i = A$ oricare ar fi $i \in I$, atunci produsul cartezian nu este altcineva decât mulţimea $A^I = \{\varphi : I \to A\}$, adică mulţimea funcţiilor definite pe I cu valori în A. Dacă $I = \{1, 2, \dots , n\}$, atunci notăm $\prod_{i\in I} A_i$ cu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Deci $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots , a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots , a_n \in A_n\}$. În cazul $n = 2$ obţinem produsul cartezian a două mulţimi introdus în §1. Dacă $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ vom nota $A^n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Fie $j \in I$. Funcţia $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, definită prin egalitatea $p_j(\varphi) = \varphi(j) \in A_j$, unde $\varphi \in \prod_{i\in I} A_i$ (sau $p_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$) se numeşte *j-proiecţia canonică* a produsului cartezian pe mulţimea A_j. Aceasta este în mod evident o funcţie surjectivă.

Fie $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ două familii de mulţimi şi $f_i : A_i \to B_i$ o familie de funcţii. Definim o funcţie $\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ prin $(\prod_{i\in I} f_i)((a_i)_{i\in I}) = (f_i(a_i))_{i\in I}$. Această funcţie se numeşte *produsul cartezian* al familiei de funcţii $(f_i)_{i\in I}$.

În teoria mulţimilor se admite următoarea axiomă:

Axioma alegerii. Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie nevidă de mulţimi nevide, atunci

$$\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

Echivalentă cu axioma alegerii este următoarea afirmaţie: dacă $\boldsymbol{S}$ este o colecţie nevidă de mulţimi nevide disjuncte două câte două, atunci există o mulţime A, numită *mulţime selectivă*, astfel încât $A \cap X$ este formată dintr-un singur element oricare ar fi $X \in \boldsymbol{S}$.