LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul V

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2021–2022, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

1. Relații de ordine
2. Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
3. Funcții izotone
4. Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

1 Relații de ordine

2 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

3 Funcții izotone

4 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

Obținerea unei relații de ordine dintr–o relație de preordine

Remarcă (continuare)

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarcă (temă; aplicație: ordinele de complexitate ale algoritmilor)

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A.
Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă [xRy și yRx]).
Se demonstrează că $\sim$ este o relație de echivalență pe A.
Considerăm mulțimea factor $A/_{\sim} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde
$\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_{\sim}$ definim relația binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.
Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt. Și se demonstrează că $\leq$ este o relație de ordine pe $A/_{\sim}$.

Ordine versus ordine strictă

Remarcă

Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă.
Într–adevăr, dacă ar exista $R \subseteq A^2$ a. î. R să fie și reflexivă, și ireflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$ și $\Delta_A \cap R = \emptyset$, deci $\emptyset = \Delta_A \cap R = \Delta_A$, prin urmare $\Delta_A = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu $A \neq \emptyset$.

Exemplu

Δ_A este cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Exercițiu (temă)

Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \to S$ și $\psi : S \to O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A, se obține o relație de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obține o relație de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$ (acest din urmă fapt poate fi verificat foarte ușor pornind de la observația că orice relație de ordine pe A include Δ_A și orice relație de ordine strictă pe A este disjunctă de Δ_A, și văzând cum se comportă și proprietățile de tranzitivitate, antisimetrie și asimetrie vizavi de operațiile de scădere a diagonalei mulțimii, respectiv reuniune cu diagonala mulțimii), ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S.

Ordine versus ordine strictă

Definiție

Fie A o mulțime, $\leq$ o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A. Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarcă

Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notație

Pentru orice mulțime A, orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2,\ a_2 R a_3, \ldots$ și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$.

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă**) că:

- $\leq$ este o relație de ordine totală (i. e. liniară) pe fiecare dintre mulțimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, numită *relația de ordine naturală* pe aceste mulțimi (desigur, am notat cu $\leq$ relația de ordine "uzuală" pe fiecare dintre aceste mulțimi, definită prin: $x \leq y$ ddacă există un număr nenegativ a, a. î. $y = x + a$, unde numerele nenegative și adunarea pot fi definite în diverse moduri în fiecare dintre aceste mulțimi; de exemplu, se poate porni de la construcția cu numere cardinale pentru numerele naturale și operațiile cu ele, apoi, pe baza numerelor naturale, se pot construi $\mathbb{Z}$, apoi $\mathbb{Q}$, apoi $\mathbb{R}$, în modurile cunoscute)
- fie relația binară pe $\mathbb{C}$ pe care o vom nota cu $\sqsubseteq$ și pe care o definim prin: pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + bi \sqsubseteq c + di$ ddacă $a \leq c$ și $b \leq d$, unde $\leq$ este ordinea naturală pe $\mathbb{R}$; atunci $\sqsubseteq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{C}$ care nu este totală (pentru că, de exemplu, $(2 + 5\mathrm{i}, 5 + 2\mathrm{i}) \notin \sqsubseteq$ și $(5 + 2\mathrm{i}, 2 + 5\mathrm{i}) \notin \sqsubseteq$, sau $(1, i) \notin \sqsubseteq$ și $(i, 1) \notin \sqsubseteq$)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{N}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$) este o relație de ordine care nu este totală (pentru că, de exemplu, 3 nu divide 7 și 7 nu divide 3)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{Z}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$) este o preordine care

Exemple de relații de ordine

Exemplu (continuare)

nu este relație de ordine (pentru că, de exemplu, $5|(-5)$ și $(-5)|5$, dar $5 \neq -5$, prin urmare $|$ pe $\mathbb{Z}$ nu este antisimetrică)

Exemplu

Pentru orice mulțime T, $\subseteq$ este o relație de ordine pe $\mathcal{P}(T)$, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$; într–adevăr:

- dacă $T = \emptyset$, atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că $\emptyset \subseteq \emptyset$
- dacă $T = \{\star\}$ (*singleton*, i. e. mulțime cu un singur element, mulțime de cardinal 1), atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset, \{\star\}\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că: $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\star\}$ și $\{\star\} \subseteq \{\star\}$
- dacă $|T| \geq 2$, adică T are cel puțin două elemente distincte, atunci: alegând (la întâmplare, i. e. arbitrar) două elemente $a, b \in T$ cu $a \neq b$, rezultă că $\{a\} \in \mathcal{P}(T)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(T)$, și $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ și $\{b\} \nsubseteq \{a\}$

Notă

Vom folosi adesea notația $\leq$ pentru relații de ordine, chiar dacă nu este vorba de relația de ordine uzuală pe o mulțime de numere.

Mulțimi ordonate

Definiție

- O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set").
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relație de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Exemplu

- Posetul $(\mathbb{N}, \leq)$ este lanț (unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{N}$).
- Posetul $(\mathbb{N}, |)$ nu este lanț.

A se vedea și celelalte exemple de relații de ordine de mai sus.

Observație

Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară.**

Mulțimi ordonate

Observație (continuare)

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b$ și $a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq$.
Relației de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată $\prec$ și definită astfel:
$\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b$ și nu există $x \in A$ a. î. $a < x < b\} \subseteq A^2$.
Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui a* (se mai spune că *b acoperă pe a*)
- a se numește *predecesor al lui b* (sau se spune că *a este acoperit de b*)

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Mulțimi ordonate

Notație (notații uzuale într–un poset)

Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Exemplu (temă)

- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{N}$ este relația "sunt numere consecutive", i. e. relația $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ este $\emptyset$, pentru că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$) cu $a < b$, există $x \in \mathbb{Q}$ (sau $x \in \mathbb{R}$), a. î. $a < x < b$.

- Proprietatea observată mai sus a mulțimilor ordonate $(\mathbb{Q}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ se numește *densitate* și, de obicei, se enunță pentru mulțimi **total** ordonate, dar poate fi definită și în cazul general al poseturilor, astfel:

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$.

- Așadar, $\leq$ este o ordine densă pe $\mathbb{Q}$ și pe $\mathbb{R}$.

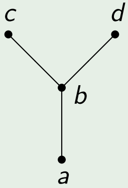
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Amintim că relațiile binare (pe mulțimi finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite și nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ și a cărui reprezentare grafică respectă regula:
    - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
    - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el**.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Exemplu

Posetul $(A, \leq)$ dat de $A = \{a, b, c, d\}$ și
$\leq = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (d,d)\}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație (diagrama Hasse: reprezentare minimală, fără redundanțe)

Într–o diagramă Hasse, buclele sunt eliminate (orice ordine este reflexivă, deci nu e nevoie să se deseneze arce între un vârf și el însuși), și orice arc care rezultă prin tranzitivitate din altele este, de asemenea, eliminat. Mai mult, antisimetria unei ordini arată că nu există circuite în graful orientat asociat unei ordini (graf orientat asociat la fel ca în cazul relațiilor binare oarecare), iar acest fapt permite reprezentarea printr–un graf neorientat, cu acea convenție privind poziționarea nodurilor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Faptul că, într–un poset finit și nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr–un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observație

În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Diagrama Hasse a unei **mulțimi liniar ordonate** este "liniară".
Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul cu** k **elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarcă

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

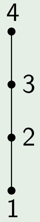
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Remarcă (continuare)

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ și $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k și M_k sunt mulțimi cu exact k elemente, iar $\leq$ este o ordine totală pe L_k și $\sqsubseteq$ este o ordine totală pe M_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ și $(M_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulțumim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeași diagramă Hasse.**

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente: $\mathcal{L}_4 = (L_4, \leq)$, cu $L_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ și $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2,), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, are următoarea diagramă Hasse:



Elemente distinse într–un poset

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset și $X \subseteq A$.

Remarcă

Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, și că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiție

Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de* $\leq$ *pe* X și se notează tot cu $\leq$.
Posetul $(X, \leq)$ se numește *subposet* sau *submulțime (parțial) ordonată a lui* $(A, \leq)$.
Dacă $(X, \leq)$ este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numește *submulțime total ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $a \in A$ se numește:

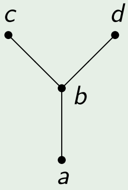
- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarcă

X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minoranții a și b și nu are niciun majorant.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

- Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată primul exemplu de mai jos, minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru maxim.

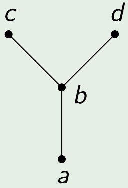
Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

În posetul având diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minimul b și nu are maxim, iar întreaga mulțime $\{a, b, c, d\}$ (întregul poset) are minimul a și nu are maxim.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente este un poset mărginit (la fel ca orice lanț finit și nevid; a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*).

Remarcă

O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui X* ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui X* ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarcă

Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Reprezentarea prin diagrame Hasse a poseturilor finite se bazează pe următoarele rezultate, care pot fi demonstrate simplu, prin reducere la absurd și inducție matematică, ajungându–se la contradicție cu finitudinea posetului (a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*); a treia remarcă de mai jos arată că orice diagramă Hasse corespunde unui unic poset:

Remarcă (temă)

Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e și un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

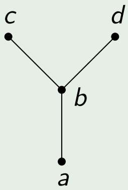
Infimumul lui X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulțimii minoranților lui X, și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.
Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulțimii majoranților lui X, și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată exemplele de mai jos, infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.
Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru supremum.

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{c, d\}$ are infimumul b și nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților lui $\{c, d\}$ este vidă și, deci, nu are minim.

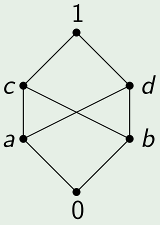
Observație

Într–o diagramă Hasse, nodurile sunt marcate prin cerculețe. Nu toate intersecțiile de muchii sunt noduri, după cum ilustrează următorul exemplu.

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

Notăm relația de ordine a posetului dat de următoarea diagramă Hasse cu $\leq$, iar relația de ordine strictă asociată ei cu $<$.



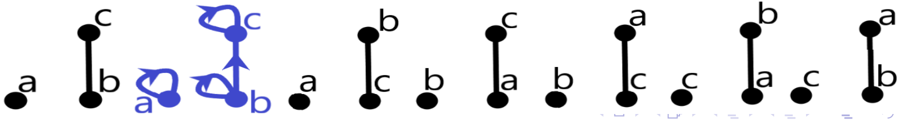
În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c < 1$, $d < 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 < a$, $0 < b$ și a și b sunt incomparabile).

Exercițiu

Să se determine toate relațiile de ordine pe o mulțime cu exact 3 elemente.

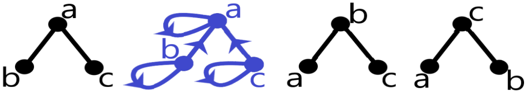
Rezolvare: Fie $A = \{a, b, c\}$, având $|A| = 3$ (i.e. cu $a \neq b \neq c \neq a$).
Enumerăm relațiile de ordine pe A în ordinea crescătoare a cardinalelor acestora.
Pentru fiecare set de poseturi izomorfe (vom vedea), adică având diagramele Hasse de aceeași formă, vom face diagrama prin graf orientat a relației de ordine dintr–unul singur dintre aceste poseturi.
Ca pentru orice mulțime A, cea mai mică relație de ordine pe A este Δ_A, având $|\Delta_A| = 3$; posetul (A, Δ_A) este *antilanțul* cu mulțimea suport A, adică posetul $(A, \leq)$ în care oricare două elemente diferite nu sunt comparabile: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \neq y$, atunci $x \nleq y$ și $y \nleq x$. Așadar, în acest caz, antilanțul cu exact 3 elemente:

Relațiile de ordine de cardinal 4: câte două elemente comparabile, al treilea incomparabil cu fiecare dintre ele:

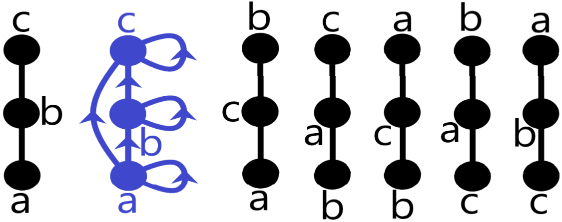


Relațiile de ordine de cardinal 5 formând poseturi care au minim și câte două elemente maximale distincte:

Relațiile de ordine de cardinal 5 formând poseturi care au maxim și câte două elemente minimale distincte:



Relațiile de ordine de cardinal 6, anume relațiile de ordine totale (adică liniare) pe A, i.e. cele care formează lanțuri $(A, \leq)$ (în acest caz lanțuri cu exact 3 elemente), și singurele din acest caz $|A| = 3$ în care $<= \mathcal{T}(\prec) \neq \prec$:



În total, există 19 relații de ordine pe A, de 5 tipuri, adică formând 5 poseturi modulo izomorfism, adică maxim 5 poseturi două câte două neizomorfe.

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii ddacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$. Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii ddacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Elemente distinse într–un poset

Lemă

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Demonstrație: Vom folosi definițiile infimumului, supremumului, minimului și maximului unei submulțimi a unui poset, și le vom aplica acestui caz particular al submulțimilor cu 1 sau 2 elemente.
Fie $x, y \in L$.
(1) $\Rightarrow$ (2): Dacă $x \leq y$, atunci $x = \min\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ în L.
(1) $\Rightarrow$ (3): Dacă $x \leq y$, atunci $y = \max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ în L.
(2) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\inf\{x, y\}$, atunci $\inf\{x, y\} \leq y$, prin urmare, dacă, în plus, $\inf\{x, y\} = x$, atunci $x \leq y$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\sup\{x, y\}$, atunci $x \leq \sup\{x, y\}$, prin urmare, dacă, în plus, $\sup\{x, y\} = y$, atunci $x \leq y$.

Principiul dualității pentru poseturi

- **Principiul dualității pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esențial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim* $\leq$ *cu* $\leq^{-1}$ *(notată* $\geq$*, ca mai sus;* conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*),* $<$ *cu* $<^{-1}$ *(notată* $>$*),* $\prec$ *cu* $\prec^{-1}$ *(notată* $\succ$*), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relația de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranții lui $(X, \geq)$ și vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ și vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.

Într–adevăr:

- $\geq=\leq^{-1}$ este o relație de ordine pe A,

pentru că $\leq$ este o relație de ordine pe A și deci:
$\leq$ e reflexivă, așadar $\Delta_A \subseteq\leq$, prin urmare $\Delta_A = \Delta_A^{-1} \subseteq\leq^{-1}=\geq$, deci $\geq$ e reflexivă;
$\leq$ e tranzitivă, așadar $\leq \circ \leq\subseteq\leq$, prin urmare
$\geq \circ \geq=\leq^{-1} \circ \leq^{-1}= (\leq \circ \leq)^{-1} \subseteq\leq^{-1}=\geq$, deci $\geq$ e tranzitivă;
$\leq$ e antisimetrică, așadar $\leq \cap \leq^{-1}\subseteq \Delta_A$, prin urmare
$\geq \cap \geq^{-1}=\leq^{-1} \cap(\leq^{-1})^{-1} =\leq^{-1} \cap \leq\subseteq \Delta_A$, deci $\geq$ e antisimetrică;

- $>=<^{-1}$ este relația de ordine strictă pe A asociată relației de ordine $\geq$,

pentru că $>=<^{-1}= (\leq \setminus\Delta_A)^{-1} =\leq^{-1} \setminus\Delta_A^{-1} =\geq \setminus\Delta_A$;

- $\succ=\prec^{-1}$ este relația de succesiune asociată relației de ordine $\geq$,

pentru că, oricare ar fi $a, b \in A$, avem: $(b, a) \in\succ=\prec^{-1}$ ddacă $(a, b) \in\prec$ ddacă $a < b$ și $(\nexists\, x \in A)\,(a < x < b)$ ddacă $b > a$ și $(\nexists\, x \in A)\,(b > x > a)$;

- și, pentru orice $a \in A$ și orice $X \subseteq A$, au loc următoarele:

• a e minorant pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $(\forall\, x \in X)\,(a \geq x)$ ddacă $(\forall\, x \in X)\,(x \leq a)$ ddacă a e majorant pentru X în posetul $(A, \leq)$;
• a e majorant pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $(\forall\, x \in X)\,(x \geq a)$ ddacă $(\forall\, x \in X)\,(a \leq x)$ ddacă a e minorant pentru X în posetul $(A, \leq)$;

Principiul dualității pentru poseturi

- a e element minimal pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(x > a)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(a < x)$ ddacă a e element maximal pentru X în posetul $(A, \leq)$;
- a e element maximal pentru X în posetul $(A, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(a > x)$ ddacă $a \in X$ și $(\nexists\, x \in X)\,(x < a)$ ddacă a e element minimal pentru X în posetul $(A, \leq)$;

(m) $a = \min(X, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(a \geq x)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(x \leq a)$ ddacă $a = \max(X, \leq)$;

(M) $a = \max(X, \geq)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(x \geq a)$ ddacă $a \in X$ și $(\forall\, x \in X)\,(a \leq x)$ ddacă $a = \min(X, \leq)$;

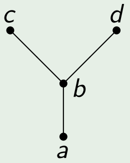
- $a = \inf(X, \geq)$ ddacă $a = \max(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(m \geq x)\}, \geq)$ ddacă (aplicând proprietatea (M) de mai sus) $a = \min(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(m \geq x)\}, \leq)$ ddacă $a = \min(\{m \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \leq m)\}, \leq)$ ddacă $a = \sup(X, \leq)$;
- $a = \sup(X, \geq)$ ddacă $a = \min(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \geq M)\}, \geq)$ ddacă (aplicând proprietatea (m) de mai sus) $a = \max(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(x \geq M)\}, \leq)$ ddacă $a = \max(\{M \in A \mid (\forall\, x \in X)\,(M \leq x)\}, \leq)$ ddacă $a = \inf(X, \leq)$.

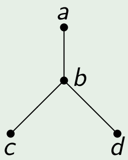
Principiul dualității pentru poseturi

- Posetul $(A, \geq)$ se numește *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- De acum încolo, ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi** în demonstrații, vom scrie, simplu, “prin dualitate“.

Exemplu

- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin “răsturnarea diagramei Hasse“ a acelui poset “cu susul în jos“.





$(P, \leq)$ $\qquad$ $(P, \geq) =$ dualul lui $(P, \leq)$

- Lanțurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarcă

Fie $(A, \leq)$ un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Exemplu

Se poate demonstra că orice submulțime finită și nevidă a unui lanț are un minim și un maxim, astfel: arătând prin inducție după cardinalul submulțimii existența minimului, iar existența maximului rezultă **prin dualitate**.

Observație

O consecință a remarcii din exemplul anterior este faptul că orice lanț finit și nevid este un poset mărginit (fapt menționat și mai sus).

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.
Într–adevăr, cum $X \neq \emptyset$, rezultă că există $x \in X$. $\inf(X)$ este un minorant al lui X, iar $\sup(X)$ este un majorant al lui X, prin urmare $\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$, deci $\inf(X) \leq \sup(X)$ prin tranzitivitate.

Elemente distinse într–un poset

Caracterizarea supremumului si a infimumului de mai sus fac demonstrațiile următoarelor remarci foarte simple.

Remarcă

Pentru orice mulțime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$

Remarcă (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$)

Fie $(L, \leq)$ un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.

Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Într–adevăr, $\sup(\emptyset) \overset{\text{definiție}}{=} \min\{x \mid x \in L, \text{ a. î. } (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x)\} = \min\{x \mid x \in L\} = \min(L)$ ($\sup(\emptyset)$ și $\min(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale), pentru că, oricare ar fi un element y, afirmația $y \in \emptyset$ este falsă, și deci implicația $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ este adevărată pentru orice element x. Dual, $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale.

Propoziție

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;*
2. *pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.*

Demonstrație: Condiția (1) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are minim, iar condiția (2) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are maxim. Deci, dacă $(L, \leq)$ satisface una dintre condițiile (1) și (2), atunci L este nevidă.

$(1) \Rightarrow (2)$: Ipoteza acestei implicații, anume existența în $(L, \leq)$ a infimumurilor tuturor submulțimilor lui L, implică faptul că:

- L este nevidă;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(\emptyset) = \max(L)$, conform remarcii anterioare; deci $(L, \leq)$ are maxim;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(L) = \min(L)$; deci $(L, \leq)$ are minim.

Conform remarcii anterioare, rezultă că în $(L, \leq)$ există $\sup(\emptyset) = \min(L)$.
Fie, acum, $\emptyset \neq A \subseteq L$ și $M := \{m \in L \mid (\forall x \in A)\,(x \leq m)\} \subseteq L$, i. e. M este mulțimea majoranților lui A. $M \neq \emptyset$, pentru că $\max(L) \in M$.
Faptul că $(L, \leq)$ satisface condiția (1) arată că există $s := \inf(M) \in L$.
Pentru orice $x \in A$ și orice $y \in M$, are loc $x \leq y$, conform definiției mulțimii M (am putut aplica axioma alegerii lui A și M, întrucât sunt ambele nevide). Deci orice element x al mulțimii nevide A este minorant al lui M. Definiția infimumului arată acum că $x \leq \inf(M) = s$, oricare ar fi $x \in A$. Deci $s = \inf(M)$ este un majorant al lui A, adică $s = \inf(M) \in M$, conform definiției lui M. Dar $s = \inf(M) \in M$ înseamnă că $s = \min(M)$, adică s este cel mai mic majorant al lui A, adică $s = \sup(A)$, conform definiției supremumului.
$(2) \Rightarrow (1)$: Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.

1 Relații de ordine

2 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

3 Funcții izotone

4 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dotplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \dotplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \dotplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \dotplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Observație

Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui

produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într–un curs anterior.
În unele cărți și articole se folosesc următoarele denumiri:

- **sumă alipită** în locul **sumei ordinale**
- **sumă ordinală** în locul **sumei directe**

În cursurile mele mai vechi puteți găsi notațiile $\dot{+}$ și $\oplus$ pentru sumele directe, respectiv ordinale inversate. La **examen** este necesar să le folosiți pe cele din cursul de anul acesta.

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \dot{+} \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \oplus \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \oplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.
Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).
În cazul sumei directe și a sumei ordinale, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \coprod B$ vizavi de mulțimile “din care provin“ acestea: sunt ambele din A, ambele din B, sau unul din A și unul din B.
În cazul produsului direct, acest fapt se obține dintr–un rezultat mai general, dintr–un curs anterior, rezultat privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă** și **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

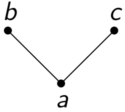
1. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
2. Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
3. Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$ sunt izomorfe.
4. Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
5. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarcă

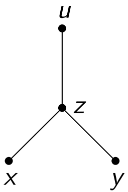
Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite**.
Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:



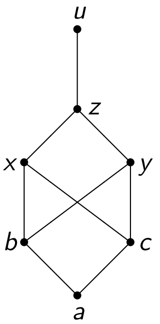
$(A, \leq)$



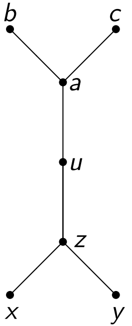
$(B, \sqsubseteq)$

Suma directă de poseturi

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$, apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B:



$(A, \leq) \dot{+} (B, \sqsubseteq) = (A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$



$(B, \sqsubseteq) \dot{+} (A, \leq) = (B \coprod A, \sqsubseteq \dot{+} \leq)$

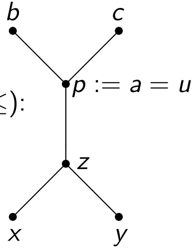
$\leq \dot{+} \sqsubseteq = \leq \coprod \sqsubseteq \coprod \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$, iar
$\sqsubseteq \dot{+} \leq = \sqsubseteq \coprod \leq \coprod \{(\beta, \alpha) \mid \beta \in B, \alpha \in A\}$.
După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru $(A \coprod B, \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ și $(B \coprod A, \sqsubseteq \dot{+} \leq)$, suma directă de poseturi nu este comutativă, întrucât aceste două poseturi nu sunt izomorfe.

Suma ordinală de poseturi

Se poate efectua suma ordinală numai între un poset cu maxim și unul cu minim, așadar putem efectua suma ordinală a lui $(B, \sqsubseteq)$ cu $(A, \leq)$, **nu și invers**.

Diagrama Hasse a sumei ordinale $(B \oplus A, \sqsubseteq \oplus \leq) := (B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq)$, se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$, se identifică maximul lui $(B, \sqsubseteq)$ cu minimul lui $(A, \leq)$, astfel obținându–se un punct comun p, și cele două diagrame Hasse se unesc în acest punct comun, astfel că: $B \oplus A = ((B \coprod A) \setminus \{a, u\}) \coprod \{p\} = (B \setminus \{u\}) \coprod (A \setminus \{a\}) \coprod \{p\}$, iar $\sqsubseteq \oplus \leq = (\sqsubseteq \setminus \{(\beta, u) \mid \beta \in B\}) \coprod (\leq \setminus \{(a, \alpha) \mid \alpha \in A\}) \coprod \{(\beta, p), (p, \alpha), (\beta, \alpha) \mid \beta \in B, \alpha \in A\}$:

$(B \oplus A, \sqsubseteq \oplus \leq) = (B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq)$:

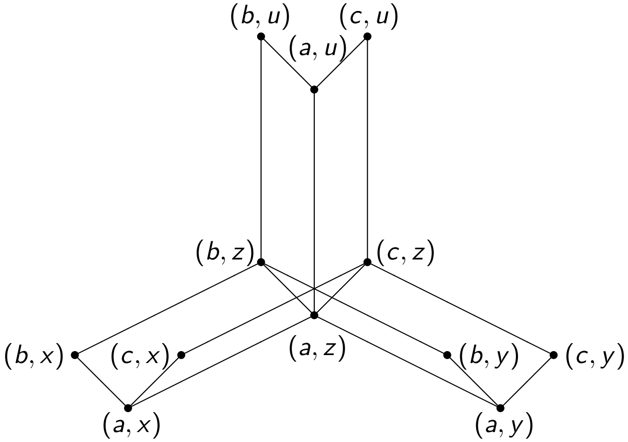


După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru suma directă și suma ordinală a acestor poseturi, prima dintre ele are o muchie în plus față de cea de–a doua. Suma ordinală se poate obține din suma directă prin identificarea lui $B \oplus A$ cu mulțimea factor a lui $B \amalg A$ prin relația de echivalență corespunzătoare partiției $\{\{a, u\}\} \cup \{\{\alpha\} \mid \alpha \in (B \coprod A) \setminus \{a, u\}\}$: p se identifică cu $\{a, u\}$, iar fiecare $\alpha \in (B \coprod A) \setminus \{a, u\}$ se identifică cu $\{\alpha\}$.

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ cu perechea formată din:
  - eticheta lui din diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$
    și
  - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β), cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ), cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$:

Produsul direct de poseturi



$$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq) \cong (B \times A, \sqsubseteq \times \leq) = (B, \sqsubseteq) \times (A, \leq)$$

Se observă că produsul direct de poseturi este comutativ, adică poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq) \times (A, \leq) = (B \times A, \sqsubseteq \times \leq)$ sunt izomorfe, $\varphi : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, $\varphi(a, b) = (b, a)$, fiind un izomorfism de poseturi între ele.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \dot{+} (A_2, \leq_2) \dot{+} \ldots \dot{+} (A_n, \leq_n)$ sau $\dot{+}_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n, \leq_1 \dot{+} \leq_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \leq_n)$ sau $(\coprod_{i=1}^{n} A_i, \dot{+}_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\dot{+}_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\dot{+}_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \dot{+} (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

La fel pentru suma ordinală a familiei de poseturi $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, pentru cazul în care $(A_1, \leq_1)$ are maxim $(A_n, \leq_n)$ are minim, iar $(A_2, \leq_2), \ldots, (A_{n-1}, \leq_{n-1})$ sunt poseturi mărginite.

Se pot face generalizări și la cazuri infinite.

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \ldots \times (A_n, \leq_n)$ sau $\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \ldots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \prod_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

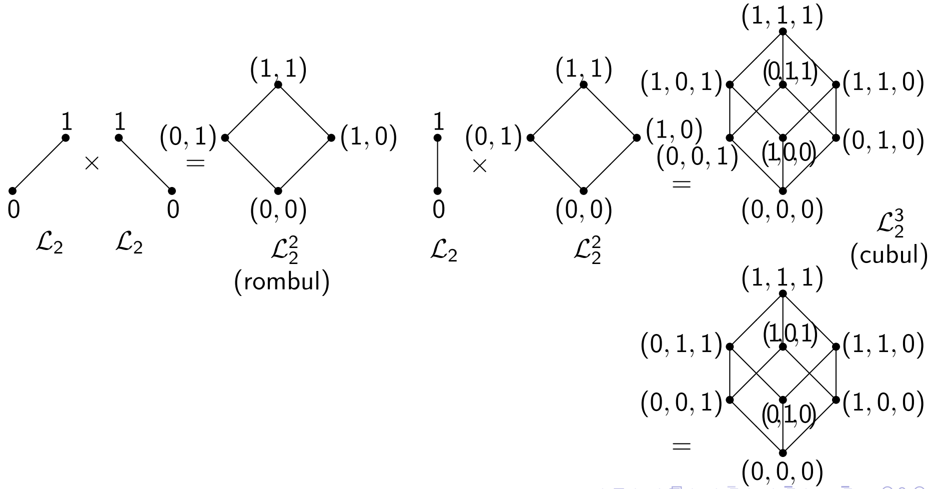
$$\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notație

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă $(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \ldots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct $(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \ldots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu $(A^n, \leq)$.

Vom vedea că puterile lanțului cu două elemente sunt algebre Boole

Considerăm lanțul cu (exact) două elemente: $\mathcal{L}_2 = (\{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$.



Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i\in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i\in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i\in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i\in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi $\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall\, i \in I)\,(f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația $\leq$ definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i\in I} A_i$, deci $(\prod_{i\in I} A_i, \leq) = \prod_{i\in I}(A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notație

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i\in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i\in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relația de succesiune asociată lui $\leq_i$, și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relația de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i\in I} \leq (b_i)_{i\in I}$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\,[a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)]\}$.

Într–adevăr, să considerăm $a = (a_i)_{i\in I} \in A$ și $b = (b_i)_{i\in I} \in A$.
Dacă $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$, atunci $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $a < b$.
Dacă $a < b$, atunci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \leq = \prod_{i\in I} \leq_i$ și $(a_i)_{i\in I} \neq (b_i)_{i\in I}$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, ceea ce este echivalent cu $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \leq b_k$ și $a_k \neq b_k)$, adică $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$.
Așadar are loc egalitatea între $<$ și mulțimea de mai sus.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Să presupunem că există un $k \in I$ astfel încât $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$. Atunci $a_k <_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i b_i)$, deci $a < b$, conform expresiei lui $<$ de mai sus. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, astfel încât $a \leq x \leq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$. Atunci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i x_i \leq_i b_i = a_i \leq a_i)$ și $a_k \leq_k x_k \leq_k b_k$, prin urmare $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = x_i = b_i)$, conform tranzitivității și antisimetriei lui $\leq_i$ pentru fiecare $i \in I \setminus \{k\}$, și $a_k = x_k$ sau $x_k = b_k$, întrucât $a_k \prec_k b_k$. Așadar $(\forall\, i \in I)\,(a_i = x_i)$ sau $(\forall\, i \in I)\,(x_i = b_i)$, adică $a = x$ sau $x = b$. Prin urmare, $a \prec b$.

Acum să presupunem că $a \prec b$. Atunci $a < b$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$. Presupunem prin absurd că există $j, k \in I$ astfel încât $j \neq k$, $a_j \neq b_j$ și $a_k \neq b_k$. Atunci $a_j <_j b_j$ și $a_k <_k b_k$. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$ cu $x_k = b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$. Atunci $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare există un unic $k \in I$ astfel încât $a_k \neq b_k$, deci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$ și, intrucât $a_k \leq_k b_k$ și $a_k \neq b_k$, are loc $a_k <_k b_k$. Presupunem prin absurd că $a_k \not\prec_k b_k$. Atunci există un $u \in A_k$ astfel încât $a_k <_k u <_k b_k$. Atunci, considerând $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, cu $x_k = u$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$, rezultă $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare, $a_k \prec_k b_k$. Deci $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$.

Așadar are loc și a doua egalitate de mai sus.

Remarcă (dualul unui produs direct de poseturi)

Cu notațiile din remarca anterioară: $\geq = \leq^{-1} = (\prod_{i\in I} \leq_i)^{-1} = \prod_{i\in I} \leq_i^{-1} = \prod_{i\in I} \geq_i$, așadar dualul produsului este produsul dualelor: $(A, \geq) = \prod_{i\in I}(A_i, \geq_i)$.

Remarcă (cazul particular al produsului a două poseturi)

Din remarcile anterioare deducem că, dacă $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ sunt poseturi, iar $\leq = \leq_A \times \leq_B$, astfel că $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) = (A \times B, \leq)$, atunci, cu notațiile uzuale, la care atașăm indici pentru poseturile $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$:

- $\geq = \geq_A \times \geq_B$;
- $< = \{((a, b), (a', b')) \mid a, a' \in A, b, b' \in B, (a = a'$ și $b <_B b')$ sau $(a <_A a'$ și $b = b')\} = \{((a, b), (a, b')) \mid a \in A, b, b' \in B, b <_B b'\} \cup \{((a, b), (a', b)) \mid a, a' \in A, b \in B, a <_A a'\}$;
- $\prec = \{((a, b), (a', b')) \mid a, a' \in A, b, b' \in B, (a = a'$ și $b \prec_B b')$ sau $(a \prec_A a'$ și $b = b')\} = \{((a, b), (a, b')) \mid a \in A, b, b' \in B, b \prec_B b'\} \cup \{((a, b), (a', b)) \mid a, a' \in A, b \in B, a \prec_A a'\}$. A se observa, din această expresie a lui $\prec$ pentru posetul produs, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr–o diagramă Hasse.

Produsul direct al familiei vide

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*,*)\}$.
La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).
Într–adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu $\emptyset$ în definiția anterioară.
Reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$, așadar mulțimea
$\prod\limits_{i\in\emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \to \emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$ (unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$; a se vedea definiția unei funcții).
Așadar, pentru orice mulțime A, $A^\emptyset = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$.
Este admisă și notația A^0 în loc de $A^\emptyset$.
Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

1 Relații de ordine

2 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

3 Funcții izotone

4 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Funcții izotone

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.
Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ și posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Funcții izotone

Remarcă

Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă. Întradevăr, dacă $(P, \leq)$, $(Q, \sqsubseteq)$ și $(R, \trianglelefteq)$ sunt poseturi, iar $f : P \to Q$ și $g : Q \to R$ sunt funcții izotone, atunci, pentru orice $x, y \in P$: dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$, prin urmare $g(f(x)) \trianglelefteq g(f(y))$, adică $(g \circ f)(x) \trianglelefteq (g \circ f)(y)$, i. e. $g \circ f$ este izotonă.

Exercițiu (temă)

Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.
I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $<:=\leq \setminus \Delta_A$ și $\sqsubset:=\sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ și, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

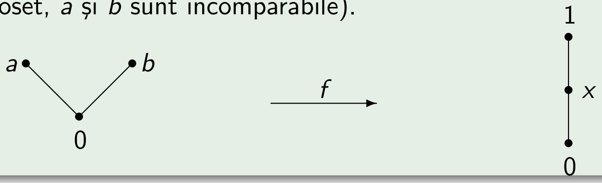
Funcții izotone

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Funcții izotone

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un lanț (adică o mulțime total ordonată, adică o mulțime liniar ordonată). Atunci, pentru orice $a, b \in L$, $a \nleq b$ implică $b < a$, unde $< := \leq \setminus \Delta_L$ este ordinea strictă asociată lui $\leq$. Într–adevăr, pentru orice $a, b \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț implică $a \leq b$ sau $b \leq a$, așadar, dacă $a \nleq b$, atunci $b \leq a$ și $a \neq b$, prin urmare $b < a$.

Temă: folosind antisimetria relației $\leq$, demonstrați că implicația reciprocă: $b < a$ implică $a \nleq b$, are loc în orice poset, indiferent dacă este lanț sau nu.

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Indicație: aplicați metoda reducerii la absurd, remarca anterioară și injectivitatea funcției din enunț.

Funcții izotone

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanț.

Exercițiu (Teorema Knaster–Tarski (temă))

Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

1. $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
2. dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

1. $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
2. dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulțimi parțial ordonate (poseturi)

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulțime A și o **relație de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Relația de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este $< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.

Relația de succesiune asociată ordinii $\leq$ este $\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- $\geq$ este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relația de succesiune asociată lui $\geq$

- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului $(A, \leq)$.

1 Relații de ordine

2 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

3 Funcții izotone

4 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Operatori și sisteme de închidere

Pe tot parcursul acestei secțiuni a cursului, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.
Următoarea definiție o generalizează pe cea din cursul anterior în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.
Toate demonstrațiile rezultatelor din această secțiune sunt analoge celor din cazul particular al posetului $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ incluse în cursul anterior. Transpunerea lor la cazul general de aici este un bun **exercițiu (temă)** pentru fiecare student.

Definiție

- Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcție $C : A \to A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:
  1. $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
  2. $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
  3. dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Operatori și sisteme de închidere

Remarcă

Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplu

- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcția constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziție

Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.
Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$,
$C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Operatori și sisteme de închidere

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Fie $C : A \to A$ un operator de închidere pe $(A, \leq)$. Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, având ca elemente exact punctele fixe ale lui C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

1. *pentru orice operator de închidere $C : A \to A$ pe $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;*
2. *pentru orice sistem de închidere M pe $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.*

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ și mulțimea sistemelor de închidere pe $(A, \leq)$ sunt în bijecție.

Demonstrație: temă facultativă.