Breviar *pentru o parte din cursul de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

~ Anul I de studiu al ciclului de Licenţă, Semestrul I ~

Cuprinsul cursului de Logică Matematică şi Computaţională

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulţimi, funcţii şi relaţii. Relaţii binare. Relaţii de echivalenţă
- Relaţii de ordine. Mulţimi (parţial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre şi congruenţe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone *(algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole)*. Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propoziţională clasică:

- Sintaxa *(o primă prezentare pentru logica propoziţională clasică: sistemul Hilbert)*
- Algebra Lindenbaum–Tarski *(o algebră Boole asociată logicii propoziţionale clasice)*
- Semantica *(calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente:* $0 =$ *fals,* $1 =$ *adevărat)*
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia propoziţională *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*
- Deducţia naturală *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor *(predicat* $\equiv$ *propoziţie cu variabile)*:

- Structuri de ordinul I *(structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate)*
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia în logica clasică a predicatelor

---

*__Acest breviar nu conţine toate noţiunile şi proprietăţile care apar în cursul de Logică Matematică şi Computaţională, dar, în forma sa finală, le va conţine (sau referi prin trimiteri la curs) pe cele principale, pe care ar trebui să le reţineţi din acest curs.__

Varianta curentă a acestui breviar va fi actualizată periodic; la fel pentru breviarele mai extinse pentru capitolele/secţiunile cursului.

Vă recomand să folosiţi acest rezumat pentru a vă ghida învăţarea la acest curs, iar, înainte de rezolvarea fiecărei teme, precum şi înainte de examen, să printaţi versiunea sa curentă, alături de versiunile curente ale breviarelor mai extinse pentru materia parcursă până în acel moment.

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintesc abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintesc abrevierea $\exists!$, cu semnificaţia "există şi este unic"; $\exists!$ **nu** este un cuantificator.

Denumiri alternative:

- *algebră* $\equiv$ *structură algebrică;*
- *mulţime factor* $\equiv$ *mulţime cât;*
- *relaţie de ordine* $\equiv$ *relaţie de ordine parţială*;
- *relaţie de ordine totală* $\equiv$ *relaţie de ordine liniară*;
- *relaţie de succesiune* $\equiv$ *relaţie de acoperire*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* $\equiv$ *mulţime ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *funcţie antitonă* $\equiv$ *funcţie care inversează ordinea* $\equiv$ *funcţie descrescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană;*
- *morfism boolean* $\equiv$ *morfism de algebre Boole;*
- *filtru maximal* $\equiv$ *ultrafiltru.*

Noţiuni generice:

- dacă o structură algebrică $\mathcal{A}$ are *mulţimea subiacentă* (i. e. *mulţimea suport*, adică mulţimea elementelor) A şi este înzestrată cu un set de operaţii şi relaţii, atunci o *structură algebrică subiacentă a lui $\mathcal{A}$* este o structură algebrică având tot mulţimea suport A şi o parte dintre operaţiile şi relaţiile structurii algebrice $\mathcal{A}$;
- un *morfism de structuri algebrice* este o funcţie între mulţimile suport a două structuri algebrice de acelaşi tip care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice;
- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de acelaşi tip, i. e. un morfism care este o funcţie inversabilă (deci bijectivă) şi a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o submulţime S a mulţimii suport a lui $\mathcal{A}$ închisă la operaţiile algebrei $\mathcal{A}$; S devine astfel algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$ cu *operaţiile induse* pe S de operaţiile lui $\mathcal{A}$, i. e. restricţiile operaţiilor algebrei $\mathcal{A}$ la mulţimea S; dacă $\mathcal{A}$ este înzestrată şi cu o relaţie, atunci restricţia acesteia la S se numeşte *relaţia indusă* de aceasta pe S;
- o *congruenţă* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o relaţie de echivalenţă (a se vedea mai jos) pe mulţimea suport a lui $\mathcal{A}$ compatibilă cu operaţiile algebrei $\mathcal{A}$, ceea ce permite ca mulţimea factor (a se vedea mai jos) a mulţimii subiacente lui $\mathcal{A}$ prin acea relaţie de echivalenţă să fie organizată în mod canonic ca algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$.

Definiţii, notaţii şi rezultate din acest curs:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B;
- notăm cu $\mathcal{S}et$ clasa tuturor mulţimilor;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A: $|A| = \{B \in \mathcal{S}et \mid A \cong B\}$, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);
- pentru orice $A, B \in \mathcal{S}et$, avem:

  $|A| = |B|$ ddacă $A \cong B$;

  $|A| \leq |B|$ ddacă există o funcţie injectivă $i : A \to B$ ddacă există o funcţie surjectivă $s : B \to A$;

  $|A| < |B|$ ddacă nu există o funcţie injectivă $j : B \to A$ ddacă nu există o funcţie surjectivă $t : A \to B$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element);
- pentru orice mulţimi A, I, J şi orice familie de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$, notăm:

  $\prod\limits_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} = \{f \mid f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\}$;

  $A^I = \prod\limits_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} \stackrel{not.}{=} A^{|I|}$, pentru că $|I| = |J| \Longrightarrow |A^I| = |A^J|$;

  conform notaţiei anterioare, $A^0 = A^{|\emptyset|} = A^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to A\} = \{(\emptyset, \emptyset, A)\}$;

  a se vedea, în curs, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile unei structuri algebrice;
- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;
- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a\,\rho\,b$ şi se citeşte *a este în relaţia ρ cu b;*
- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui A*; Δ_A este relaţia de **egalitate** pe A: pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ ddacă $a = b$;
- pentru orice mulţime A, se notează cu id_A *funcţia identică a lui A,* i. e. funcţia $id_A : A \to A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relaţie binară pe A, id_A coincide cu Δ_A;
- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:

① . *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x\,\rho\,x$;
② . *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x\,\rho\,x$;
③ . *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $y\,\rho\,x$;
④ . *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,x$, atunci $x = y$;
⑤ . *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
⑥ . *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,z$, atunci $x\,\rho\,z$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:

① . *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
② . *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
③ . *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
④ . *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x\,\rho\,y$ sau $y\,\rho\,x$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:

① . $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
② . $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
③ . $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
④ . $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\,((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$;

- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

① . ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
② . ρ este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
③ . ρ este simetrică ddacă $\rho \subseteq \rho^{-1}$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \rho$ ddacă $\rho = \rho^{-1}$;
④ . ρ este antisimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$;
⑤ . ρ este asimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$;
⑥ . ρ este tranzitivă ddacă $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \rho$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  ①. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;

  ②. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;

  ③. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  ①. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;

  ②. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;

  ③. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$;
- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui* A este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A;
- pentru orice mulţime A, dacă $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se defineşte *clasa de echivalenţă a lui* x *în raport cu* $\sim$ ca fiind mulţimea elementelor lui A care sunt în relaţia $\sim$ cu x; pentru orice $x \in A$, se notează cu $x/\!\sim$ sau cu $\widehat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$, i. e.: $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ (are loc a doua egalitate pentru că $\sim$, fiind relaţie de echivalenţă, în particular este simetrică);
- pentru orice mulţime A şi orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/\!\sim$ *mulţimea factor* (sau *cât*) *a lui* A *prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$: $A/\!\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$ ($A/\!\sim$ se obţine prin "împărţirea" lui A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$); $A/\!\sim$ este o partiţie a lui A;
- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x şi y se află într–o aceeaşi mulţime din familia $(A_i)_{i \in I}$;
- un *poset* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine;

  dacă $(P, \leq)$ este un poset (cu mulţimea suport P, înzestrată cu relaţia de ordine $\leq$), iar $x, y \in P$, atunci:

  spunem că x şi y sunt *comparabile* ddacă $x \leq y$ sau $y \leq x$;

  notăm cu $x || y$ faptul că x şi y sunt *incomparabile*, i.e. $x \nleq y$ şi $y \nleq x$;

  un *lanţ* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală, i.e. un poset în care oricare două elemente sunt comparabile;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq \setminus \Delta_P = \{(a,b) \mid a,b \in P, a \leq b, a \neq b\}$ (şi avem $\leq=< \cup \Delta_P = \{(a,b) \mid a,b \in P, a < b$ sau $a = b\}$), şi cu $\prec$ *relaţia de succesiune* asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a,b) \mid a,b \in P, a < b, (\nexists x \in P)\,(a < x < b)\}$; muchiile din diagrama Hasse a unui poset finit sunt date de perechile din relaţia de succesiune (a se vedea în curs noţiunea de *diagramă Hasse* şi construcţia pentru diagrama Hasse a unui produs direct, a unei sume directe, respectiv a unei sume ordinale de poseturi finite);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$: $\geq=\leq^{-1}$; avem, de asemenea, notaţiile uzuale: $>=<^{-1}$ şi $\succ=\prec^{-1}$; dualul unui poset $(P, \leq)$ este posetul $(P, \geq)$, având relaţia de ordine strictă $>$ şi relaţia de succesiune $\succ$;

- o *funcţie izotonă* între două poseturi $(P, \leq)$ şi $(Q, \leq)$ este o funcţie $f : P \to Q$, cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in P$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$; un *izomorfism de poseturi* este o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă între acele poseturi;

- o *funcţie antitonă* între două poseturi este o funcţie izotonă între unul dintre acele poseturi şi dualul celuilalt;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. între oricare două lanţuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;

- dacă $(P, \leq)$ este un poset şi $S \subseteq P$, atunci:

  $\leq \cap S^2$ se notează tot cu $\leq$ şi este o relaţie de ordine pe S, numită *relaţia de ordine indusă* pe S de relaţia de ordine $\leq$ de pe P; $(S, \leq)$ se numeşte *subposet* al lui $(P, \leq)$;

  un *minorant* al lui S în $(P, \leq)$ este un element $p \in P$ cu proprietatea că $(\forall\, s \in S)\,(p \leq s)$;

  un *majorant* al lui S în $(P, \leq)$ este un element $p \in P$ cu proprietatea că $(\forall\, s \in S)\,(p \geq s)$;

  un *element minimal* al lui $(S, \leq)$ este un element $s \in S$ cu proprietatea că s este minorant pentru mulţimea elementelor lui S comparabile cu s, sau, echivalent, $(\nexists\, x \in S)\,(s > x)$;

  un *element maximal* al lui $(S, \leq)$ este un element $s \in S$ cu proprietatea că s este majorant pentru mulţimea elementelor lui S comparabile cu s, sau, echivalent, $(\nexists\, x \in S)\,(s < x)$;

  minimul lui S, notat cu $\min(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este un minorant al lui S care aparţine lui S;

  maximul lui S, notat cu $\max(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este un majorant al lui S care aparţine lui S;

  infimumul lui S, notat cu $\inf(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este cel mai mare minorant al lui S: $\inf(S) = \max(N)$, unde N este mulţimea minoraţilor lui S;

  supremumul lui S, notat cu $\sup(S)$ (pentru că, dacă există, este unic) este cel mai mic majorant al lui S: $\sup(S) = \min(M)$, unde M este mulţimea majoraţilor lui S;

  dacă există, $\min(P)$ se notează, de obicei, cu 0;

  dacă există, $\max(P)$ se notează, de obicei, cu 1;

  un *poset mărginit* este un poset cu minim şi maxim;

  dualul unui poset mărginit $(P, \leq, 0, 1)$ este posetul $(P, \geq, 1, 0)$;

- o *latice* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge, \leq)$, unde: $\vee$ şi $\wedge$ sunt două operaţii binare pe mulţimea L (numite, respectiv, *disjuncţie* şi *conjuncţie*, *sau* şi *şi* sau *join* şi *meet*), fiecare idempotentă, comutativă şi asociativă, şi care satisfac *absorbţia*: $(\forall\, x, y \in L)\,(x \wedge (x \vee y) = x)$, sau, echivalent:

$(\forall x, y \in L)\,(x \vee (x \wedge y) = x)$, iar $\leq$ este o relaţie de ordine pe L cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\}$ şi $\sup\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;

- în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$, pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc:

  $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$, precum şi:

  $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ şi $x \vee y = \sup\{x, y\}$,

  aşadar laticea $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este complet determinată:

  atât de structura algebrică $(L, \vee, \wedge)$, numită *laticea Dedekind* subiacentă lui $(L, \vee, \wedge, \leq)$,

  cât şi de posetul $(L, \leq)$, numit *laticea Ore* subiacentă lui $(L, \vee, \wedge, \leq)$,

  astfel că spunem că $(L, \vee, \wedge)$ este laticea $(L, \vee, \wedge, \leq)$, şi posetul $(L, \leq)$ este laticea $(L, \vee, \wedge, \leq)$;

- o *sublatice* a unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice $(S, \vee, \wedge, \leq)$, unde $S \subseteq L$ este *închisă* la $\vee$ şi $\wedge$, i.e., pentru orice $x, y \in S$, au loc $x \vee y, x \wedge y \in S$, iar operaţiile $\vee, \wedge$ şi relaţia $\leq$ de pe S sunt *induse* de cele de pe L, adică sunt restricţiile acestora la S: $\vee\,|_S$: $S \times S \to S$, $\wedge\,|_S$: $S \times S \to S$ şi $\leq \cap S^2$;

- o *latice mărginită* este o latice care este poset mărginit, i.e. o structură algebrică $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, unde $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este latice, iar $(L, \leq, 0, 1)$ este poset mărginit;

- o *latice completă* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq L$, există $\inf(S)$, sau, echivalent, pentru orice $S \subseteq L$, există $\sup(S)$ în $(L, \leq)$;

- orice latice completă este latice mărginită; orice latice finită este latice completă, deci mărginită;

- o *sublatice mărginită* a unei latici mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice mărginită $(S, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, unde $(S, \vee, \wedge, \leq)$ este sublatice a laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$, iar $0, 1 \in S$ sunt minimul, respectiv maximul laticii mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$;

- *duala unei latici* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este laticea $(L, \wedge, \vee, \geq)$; *duala unei latici mărginite* $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea mărginită $(L, \wedge, \vee, \geq, 1, 0)$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ şi} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$

- orice morfism de latici este o funcţie izotonă, dar nu şi reciproc;

- un *izomorfism de latici* este un morfism bijectiv de latici a cărui inversă este tot morfism de latici;

- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici, precum şi cu izomorfismele de poseturi între poseturile subiacente acelor latici;

- o *latice distributivă* este o latice $(L, \vee, \wedge)$ care satisface: $(\forall x, y, z \in L)\,(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$, sau, echivalent: $(\forall x, y, z \in L)\,(x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$;

- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul (a se vedea în curs diagramele Hasse ale acestor latici);

- orice lanţ este o latice distributivă, cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici mărginite* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă f este morfism de latici de la $(L, \vee, \wedge)$ la $(M, \vee, \wedge)$ şi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci orice morfism surjectiv de latici de la $(L, \vee, \wedge)$ la $(M, \vee, \wedge)$ este morfism de latici mărginite de la $\mathcal{L}$ la $\mathcal{M}$;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o *latice mărginită complementată* este o latice mărginită $\mathcal{L}$ cu proprietatea că orice element al lui $\mathcal{L}$ este complementat în $\mathcal{L}$;

- o *algebră Boole* este o structură algebrică $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice distributivă mărginită complementată, iar $\bar{\cdot} : B \to B$ este definită prin: oricare ar fi $x \in B$, $\overline{x}$ este unicul complement al lui x în $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\to$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  1. $x \to y = \overline{x} \vee y$;
  2. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  1. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);
  2. $\overline{\overline{x}} = x$;
  3. **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \text{ şi} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \end{cases}$
  4. $x \to y = 1$ ddacă $x \leq y$;
  5. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcţie $f : A \to B$ este un *morfism de algebre Boole* între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc:
$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ şi } f(1) = 1; \end{cases}$$
  un *izomorfism boolean* este un morfism boolean bijectiv cu inversa tot morfism boolean;

- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci:

  orice morfism de latici mărginite de la $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ la $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este morfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;

  orice izomorfism de latici (deci orice morfism bijectiv de latici) de la $(A, \vee, \wedge)$ la $(B, \vee, \wedge)$ este izomorfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;

- algebra Boole $\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente) se numeşte *algebra Boole standard*;

- o *algebră Boole completă* este o algebră Boole a cărei latice subiacentă este completă;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole completă, în care, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$, iar pentru orice $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, $\sup(S) = \bigcup S = \bigcup\limits_{X \in S} X$ şi $\inf(S) = \bigcap S = \bigcap\limits_{X \in S} X$;

- pentru orice mulţime A, algebra Boole $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^A$ (putere a algebrei Boole standard), întrucât următoarea funcţie este un izomorfism boolean de la $\mathcal{P}(A)$ la $\mathcal{L}_2^A$:

  $\varphi : \mathcal{P}(A) \to L_2^A$, pentru orice $S \in \mathcal{P}(A)$, $\varphi(S) = \chi_S$: *funcţia caracteristică* a lui S raportat la A:

  $\chi_S : A \to L_2^A = \{0,1\}^A = \{f \mid f : A \to L_2 = \{0,1\}\}$, definită prin: pentru orice $a \in A$, $\chi_S(a) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a \in S, \\ 0, & \text{dacă } a \notin S; \end{cases}$

- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  1. $\emptyset \neq F \subseteq B$;
  2. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
  3. pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;

- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1; $\{1\}$ se numeşte *filtrul trivial*, iar B *filtrul impropriu* al algebrei Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$;

- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, anume cel mai mic (în raport cu incluziunea) filtru al lui $\mathcal{B}$ care îl conţine pe a, numit *filtrul principal generat de a*;

- elementele maximale ale posetului $(\mathrm{Filt}(\mathcal{B}) \setminus \{B\}, \leq)$ al filtrelor proprii ale unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ se numesc *filtre maximale*, iar mulţimea acestora se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$;

  de exemplu, dacă notăm cu $L_2 = \{0,1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, astfel că $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$, atunci atomii lui $\mathcal{L}_2^n$ sunt $(0,0,\ldots,0,0,1), (0,0,\ldots,0,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0,0)$; mai general, pentru orice mulţime I, atomii algebrei Boole $\mathcal{L}_2^I$ sunt familiile de cifre binare $(x_i)_{i \in I} \in L_2^I$ cu proprietatea că $(\exists!\, k \in I)\,(x_k = 1)$;

- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale; filtrele maximale ale unei algebre Boole finite sunt exact filtrele generate de câte un atom al acesteia;

- **Teorema de reprezentare a lui Stone**: pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism Boolean injectiv de la $\mathcal{B}$ la algebra Boole $\mathcal{P}(\mathrm{Max}(\mathcal{B}))$, aşadar există un morfism Boolean injectiv de la $\mathcal{B}$ la algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\mathrm{Max}(\mathcal{B})}$;

  dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci acest morfism Boolean injectiv este un izomorfism Boolean, aşadar are loc:

  Teorema de structură a algebrelor Boole finite: orice algebră Boole finită $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$;

- se numeşte *congruenţă a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietăţile:

  ①. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$**);

  ②. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$**);

  ③. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\bar{}$**);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;

- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;

- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci mulţimea factor a lui B prin $\sim$ se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu $a/_{\sim}$ clasa lui a în raport cu $\sim$, atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:

  ①. $x/_{\sim} \vee y/_{\sim} = (x \vee y)/_{\sim}$,

  ②. $x/_{\sim} \wedge y/_{\sim} = (x \wedge y)/_{\sim}$,

  ③. $\overline{x/_{\sim}} = \overline{x}/_{\sim}$,

  ④. $0 = 0/_{\sim}$ şi $1 = 1/_{\sim}$;

  faptul că $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$ arată că operaţiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanţii claselor; $(B/_{\sim}, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui $\mathcal{B}$ prin* $\sim$;

  VOI COMPLETA URMĂTORUL BREVIAR DIN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ CLASICĂ:

- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;

- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;

- dată o *interpretare* în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene;

- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *satisface un enunţ* $\varphi \in E$, respectiv *o mulţime de enunţuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;

- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);

- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;

- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface şi pe φ);

- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- ca orice regulă de deducţie scrisă în acest mod, regula de deducţie **modus ponens** (abreviată **MP**) scrisă sub forma: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$, are semnificaţia: $\{\varphi,\ \varphi \to \psi\} \vdash \psi$;
- pentru orice mulţime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulţimii de ipoteze Σ pentru logica propoziţională clasică, despre care ştim că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^\Sigma \in E/_{\sim_\Sigma}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim_\Sigma}$;
- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/_\sim$ clasa unui enunţ φ în $E/_\sim$;
- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$ în algebra booleană $E/_{\sim_\Sigma}$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**);
- mulţimea T a teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice e satisfăcută de orice interpretare;
- o mulţime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ, anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conţine toate enunţurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncţie de disjuncţii de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h;
- un enunţ φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\vDash \neg\varphi$, aşadar $\vdash \neg\varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ;
- un enunţ φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ.

VOI ADĂUGA REZULTATELE PRINCIPALE DIN LOGICA CLASICĂ A PREDICATELOR.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele de logică (inclusiv cele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională) din *Revista de logică* a Profesorului Adrian Atanasiu, publicaţie online.

[11] Materialele mele de curs şi seminar de logică matematică şi computaţională de pe pagina acestui curs de pe serverul de cursuri *MoodleUB* – a se vedea şi cele cu exerciţii de la consultaţii şi examene.

[12] G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*; traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică şi Programare Logică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1998.