Definiție Se numește șir de elemente dintr-o mulțime M o funcție $x: \mathbb{N} \to M$. Notăm $x_n = x(n)$ și șirul îl vom nota cu $(x_n)_{n\geq 0}$ sau $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uneori $x: \mathbb{N}_k \to M$, $\mathbb{N}_k = \{k+1, k+2, \dots\}$ și în acest caz șirul se notează $(x_n)_{n\geq k}$.

Definiție Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este

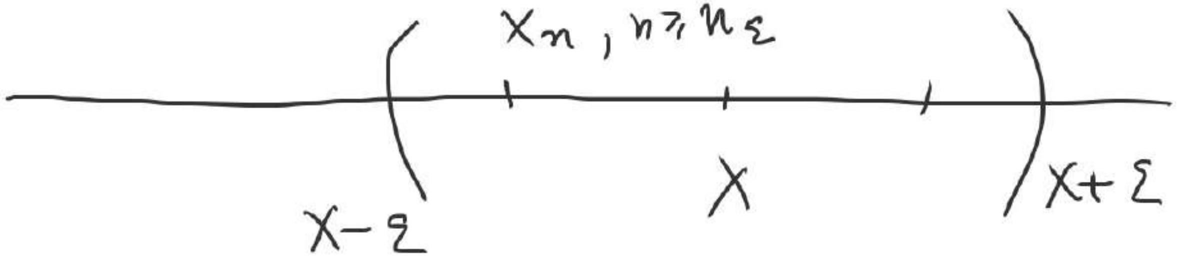
1) mărginit, dacă $\exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $\forall n \geq 0$

2) crescător (descrescător) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (resp $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) strict crescător (strict descresc) dacă $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Spunem că $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ este convergent dacă există $x \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$

În acest caz x se numește limita șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.



$|x_n - x| < \varepsilon \iff x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, x_n > \varepsilon$

Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.
$\forall n \geq n_\varepsilon,\ x_n < -\varepsilon$.

<u>Obs.</u> Dacă $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ are limită aceasta este unică.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , q \in (-1,1) \\ 1 & , q = 1 \\ \infty & , q > 1 \\ \nexists & , q \leq -1 \end{cases}$$

Spunem că $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ este Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

<u>Teoremă</u> Un şir $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.

$(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

$$\left| x_{2n} - x_n \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

deci $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este Cauchy şi deci nu este convergent.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

<u>Teoremă</u> Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Remarcă: Orice şir monoton are limită

$(x_n)_{n\geq 0}$ $\quad x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n$, (x_n) - nemărginit $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n$ —"— $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Serii de numere reale

Def Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$, şirul $(s_n)_{n\geq 0}$.

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

s.n. num. şirul sumelor parţiale. Perechea de şiruri $((x_n)_n, (s_n)_n)$ s.n. seria generată de $(x_n)_{n\geq 0}$ şi se not cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n\geq 0} x_n$. Spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent; dacă $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ atunci s se numeşte suma seriei şi scriem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = s$

O serie care nu este convergentă se numește divergentă.

<u>Exercițiu</u> Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ și în cazul în care este converg. găsiți suma ei.

$$s_n = \frac{1}{4\cdot 1^2 - 1} + \frac{1}{4\cdot 2^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{4\cdot n^2 - 1}$$

$$\frac{1}{4K^2-1} = \frac{1}{(2K-1)(2K+1)} = \frac{A}{2K-1} + \frac{B}{2K+1} = \frac{A(2K+1)+B(2K-1)}{(2K-1)(2K+1)}$$

$$A(2K+1) + B(2K-1) = 1, \quad \forall K.$$

$$K(2A+2B) + A - B = 1 \qquad \begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$$

Propoziție - Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Deci dacă $x_n \not\to 0$ atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{dacă} \quad q \neq 1$$

Seria este convergentă pt $q \in (-1,1)$ și $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Pt $q \notin (-1,1)$ seria este divergentă.

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1} + \frac{1}{2\cdot 1+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 2-1} - \frac{1}{2\cdot 2+1}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}} - \underline{\frac{1}{2n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Deci seria este conv. și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă pt că șirul $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

nu este Cauchy și deci este divergent.

Teoremă (Criteriul condensării) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi a.î. $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Spunem că două serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură și scriem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

dacă fie ambele sunt convergente fie ambele sunt div.

Crit. condensării spune: $(x_n) \subset \mathbb{R}_+$, $x_n \searrow$: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=0} 2^n x_{2^n}$

Prop. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergentă pt $\alpha > 1$ și divergentă pt $\alpha \leq 1$.

Dem. Crit. condensării

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha}}}_{x_n} \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$$

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \text{ conv} \iff \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2^{\alpha-1} > 1 \iff \alpha - 1 > 0 \iff \alpha > 1.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ conv $\Leftrightarrow q \in (-1,1)$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ conv $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Teoremă (Primul criteriu al comparației) Fie $\sum x_n$, $\sum y_n$ două serii cu termeni pozitivi cu prop că $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$, $\forall n \geq n_0$.

1) Dacă $\sum y_n$ conv, atunci $\sum x_n$ este conv

2) Dacă $\sum x_n$ diverg, atunci $\sum y_n$ este diverg.

Exercițiu Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n+3^n}}_{x_n}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n} = y_n, \ \forall n \geq 1 \\ \sum y_n = \sum \frac{1}{3^n} \text{ converg.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Comp I}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n} \text{ convergentă}$$

Teoremă (Al doilea criteriu al comparației). Fie $\sum x_n, \sum y_n$ serii cu termeni pozitivi cu prop. că există $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

1) $0 < l < \infty$, $\sum x_n \sim \sum y_n$

2) $l = 0$ și $\sum y_n$ convergentă $\Longrightarrow \sum x_n$ convergentă

3) $l = \infty$ și $\sum y_n$ divergentă $\Longrightarrow \sum x_n$ divergentă

Exemplu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+2n}{n^4+n+1}}_{x_n}$, $\sum \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{y_n}$. $\alpha = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n)n^\alpha}{n^4+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha+2}+2n^{\alpha+1}}{n^4+n+1} = 1.\ \text{pt } \alpha+2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+2n}{n^4+n+1} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ convergentă}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{3n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + \dots + b_p} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & k=p. \\ 0, & p>k. \\ +\infty, & k>p \text{ și } \frac{a_0}{b_0}>0. \\ -\infty, & k>p \text{ și } \frac{a_0}{b_0}<0. \end{cases}$$

Teoremă (Crit. raportului).

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ serie cu termeni pozitivi a.î. există $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

1) $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converg.

2) $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ diverg

3) $l = 1$ nu ne putem pronunța

<u>Exemplu</u>. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$, $x_n = \frac{n^2}{5^n}$, $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{\cancel{5^{n+1}}_{5}} \cdot \frac{\cancel{5^n}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow$$ seria este convergentă

<u>Teoremă</u> (Crit. rădăcinii)

Fie $\sum_{k=0}^{\infty} x_n$ serie cu termeni pozitivi a.î. $\exists\ l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{\frac{1}{n}}$$

1) $l < 1 \Rightarrow \sum x_n$ conv

2) $l > 1 \Rightarrow \sum x_n$ diverg.

3) $l = 1$ nu putem decide

Exemplu. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{seria este conv}$$

__Teoremă__ (Crit. Raabe-Duhamel)

Fie $\sum x_n$ serie cu termeni pozitivi a.î. există

$$l=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$$

1) $l>1 \Longrightarrow \sum x_n$ convergentă

2) $l<1 \Longrightarrow \sum x_n$ divergentă

3) $l=1$ nu putem decide.

__Exemplu.__ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$;

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\overset{(2n+1)(2n+2)}{\cancel{(2(n+1))!}}}{\underset{4}{\cancel{4^{n+1}}}\;\underset{(n+1)^2}{\cancel{((n+1)!)^2}}}\cdot\frac{\cancel{4^n}\cdot\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{4(n+1)^{\cancel{2}}}{(2n+1)\cdot 2\cancel{(n+1)}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \text{seria este divergentă.}$$

<u>Teoremă</u> (Crit. lui Leibniz).

Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ a.î.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) $(x_n)_n$ descrescător.

Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ convergentă

$x_n \to 0 \iff |x_n| \to 0$.

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, |x_n| < \varepsilon$

$|x_n| = \big||x_n| - 0\big|$

$x_n \to 0 \iff (-1)^n x_n \to 0$.

Exemplu. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergentă $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0. & (1) \\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1. & (2) \end{array} \right.$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ conv.

<u>Definiție</u> O serie $\sum x_n$ se numește absolut convergentă dacă $\sum |x_n|$ este convergentă.

<u>Teoremă</u> Dacă $\sum x_n$ este absolut convergentă atunci $\sum x_n$ este converg.

$\left(\sum |x_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum x_n \text{ convergentă} \right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \qquad \sum \left| \frac{(-1)^n}{n^3+1} \right| = \sum \frac{1}{n^3+1} \sim \sum \frac{1}{n^3} \text{ conv.}$$

absolut conv. și deci convergentă.

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ <u>este</u> convergentă dar <u>nu este</u> absolut converg.

Noțiuni de topologie.

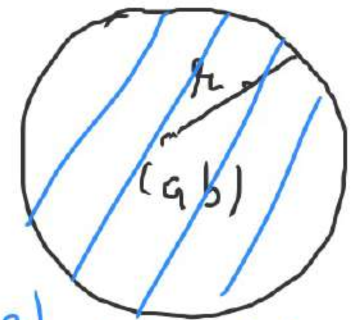
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ $\quad n=1$, norma este modulul.

$x=(x_1, \dots, x_n)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ - norma euclidiană

$x=(a,b)$, $y=(a',b')$ $\quad \|x-y\| = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2}$



1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x,y \in \mathbb{R}^n$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

3) $\|x\| = 0 \iff x = 0 = (0,0,\dots,0)$

$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid d((a,b),(u,v)) < r\}$

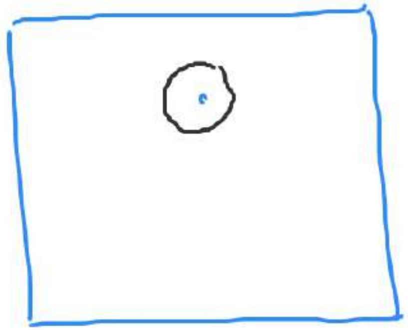
$\|(u,v) - (a,b)\| < r$

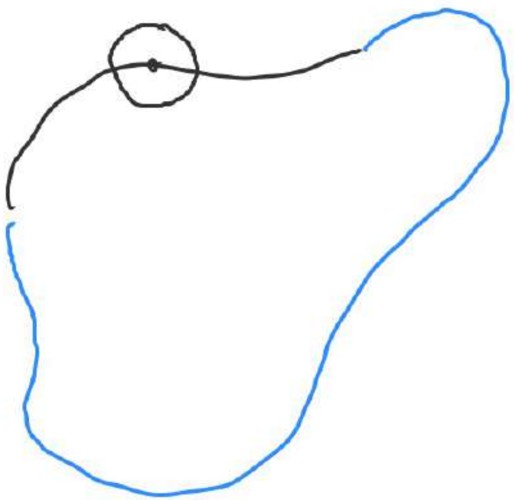
$a \in \mathbb{R}^n$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$ – bila deschisă cu centrul a și raza r.

$a \in \mathbb{R}$, $B(a,r) = (a-r, a+r)$

O mulțime $D \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă dacă $\forall a \in D$ există $r>0$ a.î. $B(a,r) \subset D$





deschisă.

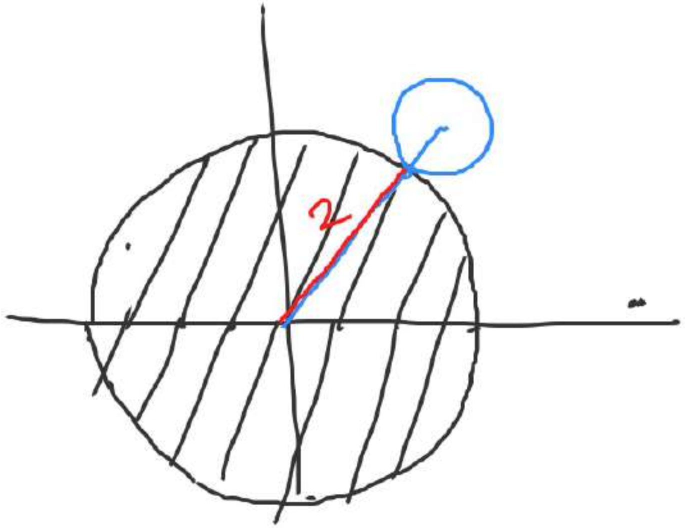
$A=(0,1)\ni a$, $r=\min\{a,1-a\}$, $(a-r,a+r)\subset A$.

$B=[0,1)$, $\forall r$, $(-r,r)\not\subset B$, B nu este deschisă

Definiție. O mulțime $F \subset \mathbb{R}^n$ se numește închisă dacă $CF = \mathbb{R}^n \setminus F$ este deschisă

$A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $CA = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ deschisă $\Rightarrow A$ închisă

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$



închisă $\quad (a,b) \notin B \Leftrightarrow a^2+b^2 > 4.$

$b > 0.$

$r = ?$ a.î. $B((a,b), r) \subset F$

$d = \sqrt{a^2+b^2}$, $r = d-2$, $B((a,b), r) \subset CF$

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

$$\complement\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i, \quad \complement\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

$$x \in \complement(A \cup B) = x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ și } x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement A \text{ și } x \in \complement B$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in \complement A \cap \complement B.$$

$(A_i)_{i \in I}$, $A_i \subset X$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

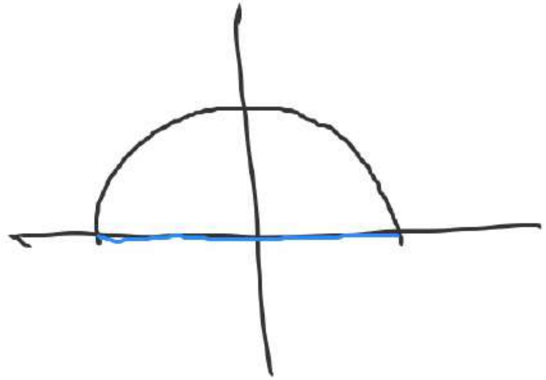
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

$T = [0,3] \cup \{4\}$ închisă

$R = [1,3) \cup (4,5]$ - nici închisă nici deschisă

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ y > 0\}$

nici închisă nici deschisă.



<u>Proprietăți</u> 1) $\emptyset$ și $\mathbb{R}^n$ sunt deschise și închise

2) O reuniune arbitrară de mulțimi deschise este deschisă

O intersecție finită de mulțimi deschise este deschisă

3) O intersecție arbitrară de mulțimi închise este închisă

O reuniune finită de mulțimi închise este închisă

$D_n \subset \mathbb{R}$ deschise , $D_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\bigcap_{n \geq 1} D_n = \{0\}$ - închise.

Propoziție. Orice mulțime deschisă din $\mathbb{R}$ se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale deschise

---

$\mathbb{Q} = \{ r_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$D = \bigcup_{n \geq 1} \left(r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n} \right)$ deschisă $D \neq \mathbb{R}$.

Mulțimi compacte.

O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește compactă dacă pt orice familie $(D_i)_{i \in I}$ de mulțimi deschise din $\mathbb{R}^n$ cu prop. că $A \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ există $J \subset I$ finită a.î.

$$A \subset \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Teoremă $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă $\Longleftrightarrow$ A închisă și mărginită.

Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită dacă $\exists M > 0$ a.î. $\|x\| \leq M, \forall x \in A$.

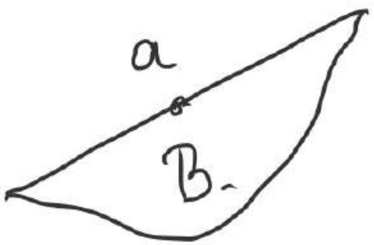
(echiv. $A \subset$ produs cartezian de interv. mărginite)

$A = [7,9] \cup \{99\} \subset \mathbb{R}$ compactă

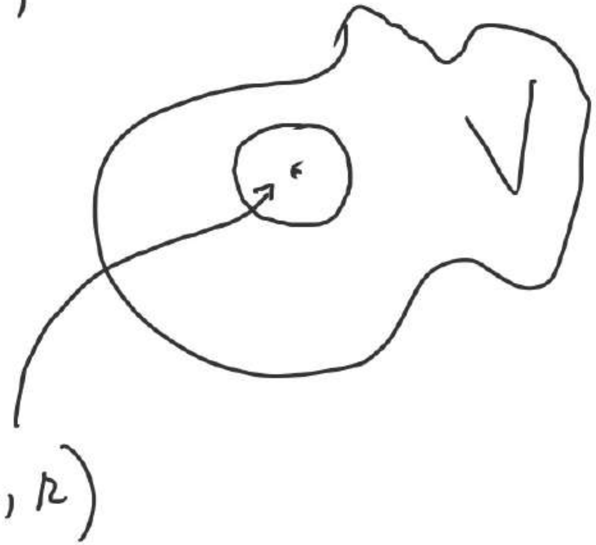
$B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 4\}$ nu este compactă pt că nu e mărginită

$C = \{0\} \times [1,4]$ – compactă

Fie $a \in \mathbb{R}^n$. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^n$ s.n. vecinătate a lui a dacă există $r > 0$ a.î. $B(a,r) \subset V$



B nu este vec. a lui a.



Funcții continue

<u>Definiție</u>. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ și $x_0 \in A$. Spunem că f este continuă în x_0 dacă

$\forall V$ o vecinătate a lui $f(a)$, $\exists U$ o vecinătate a lui x_0 a.î. $f(U) \subset V$ (adică $\forall x \in U$ avem $f(x) \in V$)

<u>Teoremă</u> Fie $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ și $x_0 \in A$. UASE:

1) f este continuă în x_0

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu prop că $\|x - x_0\| < \delta$ avem.

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

3) $\forall (z_n)_{n \geq 0} \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(x_0)$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

f este discontinuă în orice punct.

Fie $a\in\mathbb{R}$.

Există $(x_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{Q}$ și $(y_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î.

$x_n\to a$ $\qquad$ $y_n\to a$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=0 \implies f$ nu este cont în a

<u>Am folosit</u>. Dacă există $(x_n)_{n\geq n}\subset A$ a.î $x_n\to a$ dar:

$f(x_n)\not\to f(a)$ atunci f nu este continuă în a.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2 + a & x \geq 1. \end{cases}$

$a = ?$ a.i. f continuă pe $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1+a$, $f(1) = 1+a$.

$2 = 1 + a \Rightarrow a = 1$.

Prop Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ care este și pct de acumulare al mulțimii A. Atunci f continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$, $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ și sunt egale cu $f(x_0)$.

Șiruri de funcții

Definiție. $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

1) Spunem că $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplu pe A către f dacă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in A. \quad \text{Scriem } f_n \xrightarrow{s} f.$$

$$\Updownarrow$$

$\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \underbrace{n_{\varepsilon,x}} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2) Spunem că $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform către f pe A și scriem $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \underline{n_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Obs: $f_n \xrightarrow{u} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow{s} f$.

$f : A \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}$.

$f_n \xrightarrow{u} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.i. $\forall n \geq n_\varepsilon, \ \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Exemplu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases} \qquad f(x) \equiv 0$$

$$f_n \xrightarrow{s} f$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\{x^n \mid 0 \leq x < 1\} = 1$$

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0 \text{ Deci } f_n \overset{u}{\not\to} f.$$

$$f_n : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \underbrace{\frac{x}{1+nx}} + x.$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad f(x) = x, \quad f_n \xrightarrow{s} f.$$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{x}{1+nx}$$

$$g(x) = \frac{x}{1+nx} \qquad g'(x) = \frac{1\cdot(1+nx) - x(1+nx)'}{(1+nx)^2} = \frac{1}{(1+nx)^2}$$

g strict crescatoare. $\displaystyle \sup_{x\in[1,2]} g(x) = g(2) = \frac{2}{1+2n}.$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,2]} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+2n} = 0 \implies f_n \xrightarrow{u} f$$

Teoremă (Weierstrass) Fie $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ cu $a_n \to 0$. Dacă

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \ \forall x \in A \text{ și } \forall n \geq 1 \quad \text{atunci } f_n \xrightarrow{u} f$$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} + x, \quad f(x) = x, \quad x \in [1,2]$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{2}{1+nx} \leq \frac{2}{1+n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Teorema Fie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ continue pe A și $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ atunci f este continuă pe A.

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ $\quad f_n \xrightarrow{s} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

Consecința teoremă Dacă $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ sunt continue $f_n \xrightarrow{s} f$ și f nu e continuă pe A atunci $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$

În cazul nostru. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ nu este continuă în 1.

Deci $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$.

$$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{nx+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in (0,1), \quad f(x) \equiv 0.$$

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} f_n(x) = 1. \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad f_n'(x) = -\frac{1}{(1+nx)^2} \quad f_n \text{ strict descrescătoare.}$$

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{1+nx} \underset{x=\frac{1}{n}}{\geq} \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in (0,1)$$