Sprawozdanie z zadania numerycznego 9

1.Problematyka:

1. Zadaniem jest znalezienie pierwiastków równania nieliniowego sposobem nieanalitycznym. Pomimo tego, że ten sposób na rozwiązanie równania jest najprostszy, nie jest on uniwersalny i może się zdarzyć funkcja której pierwiastki będą bardzo trudne, lub wręcz niemożliwe do wyznaczenia analitycznie. Ze względu na ten problem użyjemy metod numerycznych.
2. Polecenie: Należy znaleźć rozwiązanie równań:

a) $f(x)=\sin(x)-0.4$
b) $g(x)=f(x)^2=(\sin(x)-0.4)^2$

2.Teoria:

1. Na zajęciach omawialiśmy przy okazji realizowania listy nr.9 cztery metody iteracyjne mające na celu przybliżenie wartości pierwiastka funkcji jednej zmiennej. Są to:
   - Metoda bisekcji- polega na dzieleniu przedziału na coraz mniejsze podprzedziały o przeciwnych znakach, pomiędzy którymi znajduje się pierwiastek. Uchodzi ona za najprostszą ze wszystkich do rozwiązania równań przestępnych.
   - Metoda Newtona- właściwie metoda Newtona-Raphsona używa pochodnych oraz stycznych do rekursyjnego wyznaczenia następnego punktu i stycznej. Jest to jedyna z metod używająca tylko jednego punktu.
   - Metoda Falsi- polega na wyznaczeniu siecznej przez 2 punkty będące częścią funkcji, odszukaniu punktu przecięcia się jej z osią OX oraz wybraniu na przykładzie tych trzech punktów nowego podprzedziału na którym funkcja zmienia znak.
   - Metoda siecznych- jest bardzo podobna do metody Falsi, ale użyciu tylko dwóch najnowszych punktów

2. Wszystkie z tych metod z założenia w naszym przykładzie będą wraz z kolejnymi iteracjami zbliżać się do analitycznego rozwiązania naszych podpunktów, które wynosi arcsin(0.4), z definicji $\sin(x)=0.4 \Leftrightarrow \arcsin(0.4)=x$.
3. Problemem z którym spotykamy się w podpunkcie b jest kwadratowy stopień funkcji g, który oznacza, że nasz pierwiastek może być dwukrotny, oznacza to, że zarówno metoda bisekcji jak i falsi stracą możliwość działania ze względu na taki sam znak po obu stronach pierwiastka.
4. Funkcja $u(x)\equiv f(x)$ ma tylko pierwiastki jednokrotne, gdyż każdy pierwiastek f(x), który nie jest miejscem zerowym jej pochodnej, z definicji jest także pierwiastkiem g(x), przyjmującej wartości nieujemne; każdy pierwiastek g(x) jest również pierwiastkiem

f(x). To oznacza, że pierwiastki funkcji u(x)≡f(x) są jednokrotne, gdyż są one również pierwiastkami f(x), ale nie są pierwiastkami pochodnej f′(x), co wyklucza ich wielokrotność, bo nie możemy dzielić przez 0. Oznacza to, że zastosowanie metody falsi i bisekcji do u(x)=g(x)/g′(x) w kontekście $g(x)=(\sin(x)-0.4)^2$ jest możliwe, ale może nie być szczególnie efektywne ze względu na brak jednoznacznych zmian znaku u(x), przez co pozwolę sobie pominąć metodę Falsi oraz zaprezentuje, że możliwe jest obliczenie wyniku dzięki u(x) metodą bisekcji, pomimo tego, że $g(x)=f(x)^2$.

3. Rozwiązanie:

Parametry przewijające się w wielu metodach:

- f: funkcja, której pierwiastek obliczamy.
- df: pochodna funkcji, używana w metodzie Newtona-Raphsona.
- x0: początek przedziału, lub pierwszy punkt na osi x potrzebny do użycia metody.
- x1: koniec przedziału, lub drugi punkt na osi x potrzebny do użycia metody.
- tol: tolerancja błędu(10^{-16} domyślnie, 10^{-7} dla przykładu z u(x))

  Wyniki podawane są w precyzji do 10^-19 przy użyciu decimal.Decimal

- secant_method(f, x0, x1, tol)-wyznacza pierwiastek przy użyciu metody siecznych.
- newton_method(f, df, x0, tol)-wyznacza pierwiastek przy użyciu metody Newtona-Raphsona.
- bisection_method(f, a, b, tol)-wyznacza pierwiastek przy użyciu metody bisekcji.
- falsi_method(f, a, b, tol)-wyznacza pierwiastek przy użyciu metody falsi.
- check_finite(value)-sprawdza czy podane w value wyrażenie jest wartością skończoną.

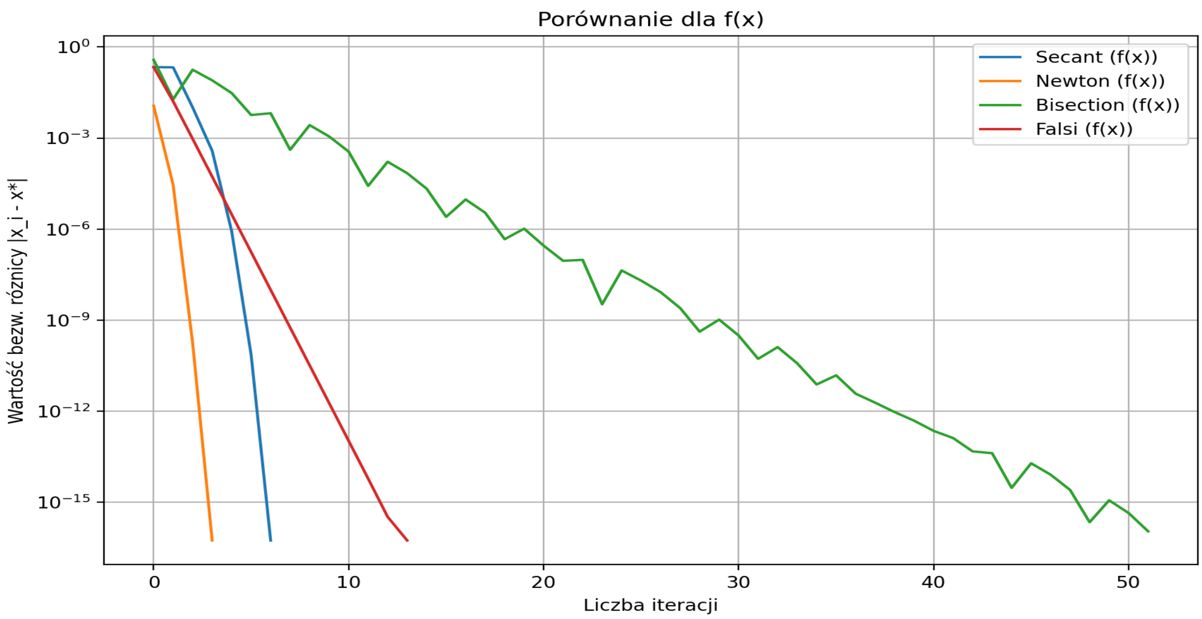
Pierwszą rzeczą, którą musimy policzyć wg. Polecenia jest ilość kroków wymagana do obliczenia pierwiastka o pożądanej i z góry założonej dokładności.

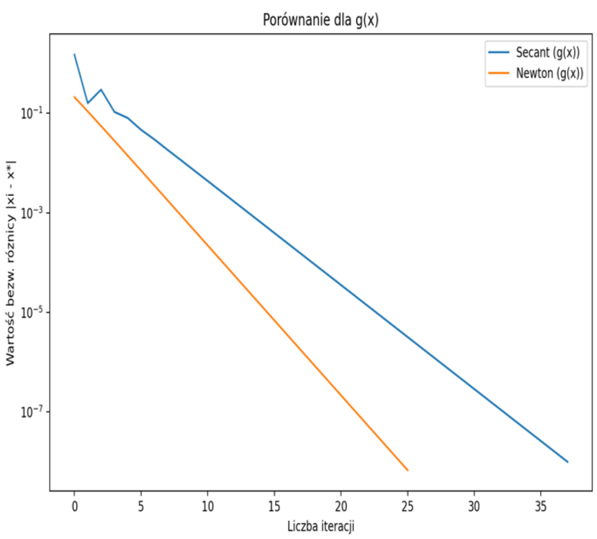
WAŻNE- W TABELI KROKI INDEKSOWANE SĄ OD 1!

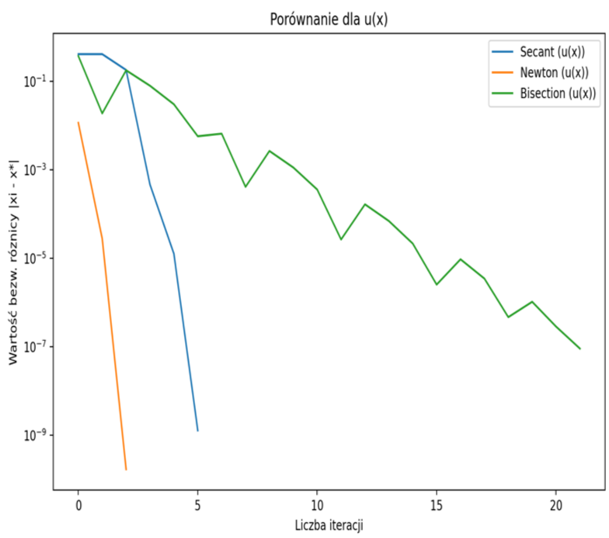
Funkcja i tolerancja->	f(x) 10^{-16}	g(x) 10^{-16}	u(x) 10^{-7}
Siecznych	7 kroków	38 kroków	6 kroków
Newton-Raphson	4 kroki	26 kroków	3 kroki
Falsi	14 kroków	NIE DOTYCZY	NIE DOTYCZY
Bisekcji	52 kroki	NIE DOTYCZY	22 kroki

Przyjrzyjmy się samym pierwiastkom, którym została przypisana precyzja 10^{-19}, oznacza to, że wyniki będą miały 19 cyfr znaczących. Jest to wskutek decimal.getcontext.prec=19.

Funkcja i tolerancja->	f(x) 10^{-16}	g(x) 10^{-16}	u(x) 10^{-10}
Siecznych	0.4115168460674880299	0.4115168361164764432	0. 41151684606
Newton-Raphson	0.4115168460674879795	0.4115168393085637407	4115168462359
Falsi	0.4115168460674880051	NIE DOTYCZY	NIE DOTYCZY
Bisekcji	0.4115168460674879176	NIE DOTYCZY	0.4115168461



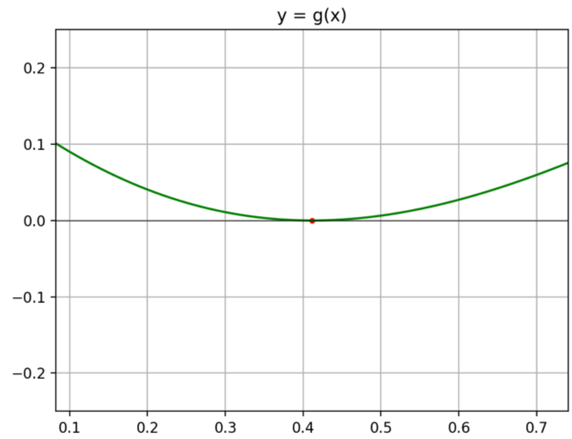




Na powyższych trzech wykresach możemy dostrzec zbliżanie się metod iteracyjnych do poprawnego wyniku pierwiastka równania z każdą kolejną iteracją. Jak widać niemożliwe jest użycie metod Falsi oraz bisekcji w analizie podpunktu b) – rozwiązywania równania dla g(x).

Jak możemy wyczytać z górnego wykresu oraz jego legendy, metoda Newtona zbliża się do poprawnego wyniku najszybciej, pierwsze wartość przydzielana jest w punkcie x=0- iteracji „zerowej", zdecydowałem się policzyć ją w tabeli jako 1, ze względu na to, że metody zwracają wartości po przeprowadzaniu wyliczenia, stąd indeks 0 to pierwszy wynik, krok 1. Możemy ponadto zaobserwować, że metoda bisekcji bardzo powoli zbliża się do wyniku, potrzebuje aż 52 kroków w celu wyliczenia pierwiastka, to 13 razy tyle, ile operacji potrzebuje metoda Newtona.

Na drugim wykresie(lewy dolny róg) widzimy, że w przypadku funkcji g(x) potrzeba nam stosunkowo bardzo dużo kroków najszybszych metod z poprzedniego wykresu, aby wyliczyć pierwiastek o odpowiedniej precyzji, powodem tego jakże powolnego procesu jest równie powolne zbliżanie się wartości funkcji $g(x)=f(x)^2$ do 0. Jak widać na załączonym obrazku, pochodna tej funkcji, która indykuje wzrost lub spadek jej wartości jest dość niska, co przekłada się na małe zmiany w wartościach np. w metodzie Newtona-Raphsona.



Co ciekawe gdy zastosujemy u(x)=g(x)/g'(x), skutki czego wyjaśnione są w podpunkcie 4 teorii jesteśmy w stanie wrócić do szybkiego rozwiązania równań.

4.Wnioski:

Po przeanalizowaniu wykresów, teorii oraz danych w tabelach rozwiązania, możemy zaobserwować, że metoda Newtona-Raphsona najlepiej radzi sobie aproksymacją rozwiązania równania. Jednocześnie możemy też zauważyć jak pozbycie się parzystości funkcji g(x) przy pomocy u(x) wpływa w naszym przypadku ponad pięciokrotnie na ilość operacji przeprowadzonych przez metodę.