PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 2

§1.3. Chuỗi số với số hạng có dấu bất kì

- Chuỗi với số hạng có dấu bất kì
- Chuỗi đan dấu
- Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

1. Đặt vấn đề.

Nghiên cứu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \in \mathbb{R}$.

2. Chuỗi với số hạng có dấu bất kì

Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

GIẢI a)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$

+) Xét $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

+) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ hội tụ

+) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$ hội tụ

GIẢI b)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

+) $\sin n^2 \in \mathbb{R}$

+) Không có $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$

Thật vậy, phản chứng có $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1)\right) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2n+3) = 0$ và

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2(2n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sin(2n+1)\cos 2 + \sin 2\cos(2n+1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos^2(2n+1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)\right) = 0 \text{ (vô lí)}$$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ phân kì.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right)$ (HTTĐ)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$ (HTTĐ)

e (K60) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin n}{n^2}$ (HTTĐ)

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ (PK)

3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \cos\frac{1}{n}$ (PK)

4) $\sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\sin(n^5+1)}{\sqrt{n^5+1}}$ (HTTĐ)

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n^3+1)}{\sqrt{n^3+1}}$ (HTTĐ)

f (K63)

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3\sin n}{e^n}$ (HTTĐ)

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\cos n$ (HTTĐ)

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos[(n+5)\alpha]}{5^n},\alpha\in\mathbb{R}$ (HTTĐ)

g (K64) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{\sqrt{n^3+1}}$ (HTTĐ)

GIẢI

+) $\left|\frac{\cos(n^2+1)}{\sqrt{n^3+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3}}, \forall n$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ hội tụ nên chuỗi ban đầu hội tụ.

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì theo tiêu chuẩn D'Alembert

hoặc Cauchy $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì

2°/ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kì (đúng hay sai?)

3. Chuỗi đan dấu

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n > 0$ được gọi là chuỗi đan dấu

Chú ý. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n,\ a_n > 0$ cũng được gọi là chuỗi đan dấu.

Định lí Leibnitz. Dãy $\{a_n\}$ giảm, $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hội tụ và có $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \le a_1$

Chứng minh:

+) $n = 2m$:

• Có $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \Rightarrow \{S_{2m}\}$ tăng

•

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$$

• Từ đó $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ và có $S \le a_1$

+) $n = 2m + 1$:

• $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$

• Do $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$.

Định lí được chứng minh.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (Bán HT)

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (Bán HT)

GIẢI b)

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu

+) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ giảm và có $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

+) Hội tụ theo Leibnitz

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì $\Rightarrow$ bán hội tụ

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ (HTTĐ) d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$ (PK)

GIẢI d)

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$ là chuỗi đan dấu

+) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n-5}$ phân kì

+) $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}$

+) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{6n-5}$ phân kì.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$ (HTTĐ)

f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{7.9.11\ldots(2n+5)}$ (PK)

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$ (HTTĐ) h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ (PK)

i (K50)1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$ (PK)

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ (PK)

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln^2\frac{n+1}{n}$ (HTTĐ)

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ (Bán HT)

k (K52) 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7+2n^3+3}},\ \beta\in\mathbb{R}$ (HTTĐ)

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ (Bán HT)

l (K55) Xét sự hội tụ

1°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$ (HT)

2°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{\ln\sqrt{n}}{n}\right)$ (HT)

3°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}-1\right)$ (HT)

4°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^2}-1\right)$ (HT)

m (K57) 1°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$. (PK)

2°) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.5.8...(3n-1)}$ (HT)

n (K60)

1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (HT)

2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (HT)

o (K61)

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n-1}{n^{2}+1}$ (bán HT)

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}+\sin(n+1)}{n(\ln n)^{2}}$ (HT)

p (K62)

1) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$$ (PK)

2) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt[3]{n}}}$$ (HT)

Giải 1)

+) Có $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} = (-1)^n\left(n+(-1)^n\sqrt{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$= (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} = (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

+) Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ phân kì ,

$\sum_{n=1}^{\infty} o(\frac{1}{n})$ hội tụ, do đó chuỗi đã cho phân kỳ.

q (K63)

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ (PK)

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$ (HT)

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2-1}$ (HT)

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln[1+\frac{(-1)^n}{n}]$ (HT)

r (K64)

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n+\sin n}{n^2}$ (HT)

2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$ (HT)

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}\ln n}$ (HT)

Giải 3)

+) Là chuỗi đan dấu, có $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}\ln n}\right\}$ đơn điệu giảm,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}\ln n} > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}\ln n} = 0$$

+) Chuỗi đã cho hội tụ (ĐL. Leibnitz)

s (K66)

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+\ln(n+1)}{n^3}$ (HT) 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ (HT)

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ (HT)

4. Tính chất của chuỗi hội tụ tuyệt đối

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S \Rightarrow$ chuỗi số nhận được từ chuỗi này bằng cách đổi thứ tự các số hạng và nhóm tuỳ ý các số hạng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S

b) Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kì $\Rightarrow$ có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để chuỗi thu được hội tụ và có tổng là một số bất kì cho trước hoặc trở nên phân kì.

Định nghĩa. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, khi đó ta định nghĩa phép nhân chuỗi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ ở đó } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

Minh họa

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
$$+(a_1 b_3 + a_2 b_2) + a_2 b_3$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = S_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = S_2$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = S_1 S_2$$

Ví dụ 3. a) Xét hội tụ của tích các chuỗi số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Hướng dẫn. a)

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ hội tụ tuyệt đối

+) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ hội tụ

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\tan\frac{1}{k\sqrt{k}}.\ln^2\frac{n+2-k}{n+1-k}\right)$$

c (K57) Xét sự hội tụ của chuỗi số, với $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cos(k\alpha)}{\sqrt[3]{k^7+k^4+1}}\frac{(-1)^{n+1-k}}{(n+1-k)^{\frac{3}{2}}-\ln(n+1-k)}\right),$$

(HTTĐ)

GIẢI :

+) $$\sum = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\alpha)}{\sqrt[3]{n^7+n^4+1}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \ln n}\right),$$

+) $$\left|\frac{n\cos(n\alpha)}{\sqrt[3]{n^7+n^4+1}}\right| \le \frac{n}{\sqrt[3]{n^7+n^4+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}, n \to \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$$

hội tụ, nên chuỗi $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\alpha)}{\sqrt[3]{n^7+n^4+1}}\right)$ HTTĐ.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \ln n}\right| = \frac{1}{\left|n^{\frac{3}{2}} - \ln n\right|} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, n \to \infty,$$

+) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \ln n}$ HTTĐ.

+) Chuỗi đã cho hội tụ.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!