PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo thao.nguyenxuan@hust.edu.vn

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 5

§ 1.5. Chuỗi luỹ thừa (TT)

- Khai triển một số hàm sơ cấp
- Ứng dụng

4. Khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản

4.1. Một số khai triển

1°/ $f(x) = e^x$

- $f^{(n)}(0) = 1$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^A = M, \ \forall x \in (-A; \ A), \ A > 0$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in (-A; \ A), \ A > 0$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2° $f(x) = \cos x$

- $f^{(n)}(0) = \cos n\dfrac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

3° $f(x) = \sin x$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$

4° $f(x)=(1+x)^{\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}$

• $f(x)=1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1<x<1$

5° $f(x)=\ln(1+x)$

•

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1<x<1$$

6° $f(x)=\arctan x$

• $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$

$x\in\mathbb{R},\ -1\le x\le 1$

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1$

- $a^x = e^{x\ln a}$
- $e^{x\ln a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n,\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \ln(2+x)$

- $\ln(2+x) = \ln 2\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right),\ -1 < \dfrac{x}{2} < 1$
- $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.2^n}$
- $\ln(2+x) = \ln 2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n.2^n},\ -2 < x < 2$

c) $\sin^2 x$ $\quad\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}\right)$

d) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ $\quad\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ -1<x<1\right)$

e) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ $\quad\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R}\right)$

f) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},\ -1\le x\le 1\right)$$

g) $f(x) = e^x \sin x$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x\sqrt{2}\right)^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{4},\ x \in \mathbb{R}\right)$

h) $f(x) = \cosh x$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}\right)$

i) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ x \in \mathbb{R}\right)$

k) $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

$$\left(x + \frac{x^5}{2.5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!2^n(4n+1)} x^{4n+1} + \cdots,\ |x| < 1\right)$$

l (K54) 1) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x) = e^x \sin x$

$$\left(x + x^2 + \frac{x^3}{3} + 0x^4 - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} \ldots\right)$$

2) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x) = e^x \cos x$

$$\left(1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + 0.x^6 + \cdots\right)$$

m (K63) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

1) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, |x| < 1\right)$

2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 6x + 5}$ $\quad\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) x^n, |x| < 1\right)$

3) $f(x) = \ln(1 - x + x^2 - x^3)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[(-1)^{n-1}x^{2n} - x^n], |x| < 1\right)$$

4) Tính tổng $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ $\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)$

Giải 2 $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 6x + 5}$

+) $f(x)=\dfrac{4}{(x-1)(x-5)}=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-1}$, có

$$-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1.$$

+)

$$\frac{1}{x-5}=-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}},\quad \left|\frac{x}{5}\right|<1,$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{5^{n+1}}\right)x^n,\quad |x|<1.$$

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm tương ứng

a) $f(x) = \ln x,\quad x = 1$

- $\ln x = \ln(1 + x - 1)$
- $\ln(1 + x - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-1)^n}{n}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2},\quad x = 4$

- $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$
- $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$
- $f^{(n)}(4) = (-1)^n n!\left(5^{-n-1} - 6^{-n-1}\right)$
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(5^{-n-1} - 6^{-n-1}\right)(x-4)^n$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\dfrac{x}{1+x}$

$$\left(f(x)=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n+\cdots\right)$$

d) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!2}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!2^2}-\cdots-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}}+\cdots\right]\right)$$

e) $f(x)=\sin 3x$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n-1}\right)$$

f (K54) Khai triển hàm

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ theo luỹ thừa của $(x-3)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n,\ |x-3|<1\right)$$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ theo luỹ thừa của $(x-2)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ |x-2|<3\right)$$

g (K56) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

1) $f(x) = \ln\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$

$$\left(3\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n4^n} +,\ |x| < 2\right)$$

2) $f(x) = \ln\left(4x + 8 - x^3 - 2x^2\right)$

$$\left(3\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n - 1}{n2^n}x^n,\ |x| < 2\right)$$

h (K58) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1},\ R = \infty\right)$$

i (K60)

1) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

$$f(x) = \frac{3}{1 + x - 2x^2} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty}[1 + (-1)^n 2^{n+1}]x^n,\ |x| < \frac{1}{2}\right)$$

2) Tính tổng $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$ $\qquad (e^x - 1 - x)$

k (K61)

Khai triển thành chuỗi lũy thừa của $x - 1$, hàm

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,\ |x| < 2\right)$$

l (K62)

1) Khai triển thành chuỗi Maclaurin $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$

$$\left(2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1\right)$$

2) Tính tổng $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

m (K64)

1) Tính tổng $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}x^{3n+1}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$ $\quad (xe^{4x^2}\quad)$

2) Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+4}}{n}, \; x \in (-1;1)$

$(x^4 \ln(1+x^3) \quad)$

Giải 2.

+) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{3n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x^3)^n}{n}=\ln(1+x^3),|x|<1$

+)
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{3n+4}}{n}=x^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x^3)^n}{n}=x^4\ln(1+x^3),$
$|x|<1.$

3) Khai triển thành chuỗi Maclaurin $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

$$\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ |x|<1\right)$$

4) Khai triển $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ thành chuỗi lũy thừa (x-1)

$$\left(-1+(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n,\ |x-1|<3\right)$$

Giải 4

+) $y = \dfrac{x^2 - 4 + 3}{x + 2} = x - 2 + \dfrac{3}{3 + x - 1}$

$$= -1 + (x - 1) + \frac{1}{1 - (-\dfrac{x-1}{3})}$$

+) $\dfrac{1}{1 - (-\dfrac{x-1}{3})} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{x-1}{3} \right)^n, \quad \left| \dfrac{x-1}{3} \right| < 1,$

$$\Rightarrow f(x) = -1 + (x - 1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (x - 1)^n, |x - 1| < 3.$$

4.2. Ứng dụng của chuỗi luỹ thừa

1°/ Tính gần đúng

Ví dụ 3. Áp dụng chuỗi luỹ thừa, tính gần đúng

a) $\sin 18^\circ$ với độ chính xác 10^{-5}

- $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$
- $\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}$
- $|R_n| < \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!10^{2n+1}} \le 10^{-5}$
- $n \ge 3$

b) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ với độ chính xác 10^{-3}

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ • $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$

- $I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$

- $|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} \le 10^{-3} \Rightarrow n \ge 4$

c) Tính gần đúng số e với độ chính xác $0{,}00001$

$(2{,}71828)$

d) Tính gần đúng $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ với độ chính xác $0,0001$

$(0,747)$

e) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ với độ chính xác 10^{-3} $(0,118)$

2°/ Tính giới hạn.

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!}}{x^9}$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + o\left(x^9\right)$

• $A = \lim_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{x^9}{9!} + o\left(x^9\right)}{x^9} = \dfrac{1}{9!}$

§ 1.6 Chuỗi FOURIER

- Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier
- Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

• Đặt vấn đề

1. Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

a) Chuỗi lượng giác

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm số có dạng

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)],\ a_n,b_n\in\mathbb{R} \qquad (1.1)$$

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi (1.1) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$

2°/ Tuy nhiên, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ không phải là điều kiện cần để chuỗi (1.1) hội tụ.

b) Chuỗi Fourier

Bổ đề. Với $\forall p,k\in\mathbb{Z}$, ta có

1°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = 0$ 2°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0,\ \ k \neq 0$

3°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(px)dx = 0$

4°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(px)dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

5°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(px)dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

- Giả sử $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π và có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \qquad (1.2)$$

Sử dụng bổ đề trên và tính toán ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (1.3)$$

Thật vậy

+) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx +$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]\right)dx=\frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

+) $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(nx)dx+$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}[a_n\cos(kx)\cos(nx)+b_n\sin(kx)\cos(nx)]\right)dx$$

$$=0+\pi a_n\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\ \ n=1,2,\ldots$$

Tương tự ta nhận được b_n

Định nghĩa.

Chuỗi lượng giác $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$ với các hệ số a_0, a_n, b_n xác định trong (1.3) được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$.

Nhận xét. Nói chung chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ không bắt buộc hội tụ, ngay cả khi nó hội tụ thì cũng không bắt buộc hội tụ về hàm $f(x)$.

2. Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

Định nghĩa. Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta bảo hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lí Dirichlet. Cho $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi\,;\ \pi] \Rightarrow$ chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi\,;\ \pi]$ và có

$$S(x) = f(x), \text{ tại điểm liên tục của } f(x).$$

Còn tại điểm gián đoạn $x = c$ của $f(x)$ có

$$S(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, xác định như sau

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos(nx))dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx = 0$$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [-\sin(nx)]dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

+) Do f(x) liên tục với $x \neq k\pi$, nên có

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right)$$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

$$\left(f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\right)$$

c) $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$

+) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$

+) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0$

+) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin(nx)}{n} + 2x\frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

+) Do f(x) liên tục với mọi x nên $\forall x \in \mathbb{R}$ có

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{9} - \frac{\cos(4x)}{16} + \cdots\right]$$

d) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$

($f(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin(nx)}{n}$

)

e)(K61) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0\\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ và tính :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$\left(a_0 = \frac{\pi}{2} + 1, a_n = \frac{-1}{\pi n^2}[1-(-1)^n], b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi n}[1-(-1)^n]; S = \frac{\pi^2}{8}\right)$

GIẢI

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} dx\right)$

$= \dfrac{1}{\pi}\left(\pi - \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) = 1 + \dfrac{\pi}{2}.$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

$= \dfrac{1}{\pi}[\int\limits_{0}^{\pi}\cos(nx)dx - \int\limits_{-\pi}^{0} x\cos(nx)dx]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi} - \int_{-\pi}^{0} x\, d\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left.-x\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(nx)}{n}dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left.-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_{-\pi}^{0}\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2}\right] = -\frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(nx)dx - \int_{-\pi}^{0} x\sin(nx)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[- \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} x\, d\left(\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[- \frac{\cos(n\pi) - 1}{n} + x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos(nx)}{n} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n \pi}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] \Rightarrow$$

+)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]=\begin{cases} f(x), & x\neq k\pi \\ \dfrac{1}{2}, & x=k2\pi \\ \dfrac{\pi+1}{2}, & x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

(Do f(x) không liên tục tại $x=k\pi$), vì vậy có

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)],\ x\neq k\pi.$$

+) $\frac{1}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(0x)+b_n\sin(0x)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)^2}=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

f)(K62) $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\pi\le x<0\\ 1-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$, tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$

$$(f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}1 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2})$$

g)(K66) 1) $f(x) = \pi - 2x,\ x \in (-\pi;\pi)$, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$

$$(f(x) = \pi + 4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx))$$

2) $f(x) = \pi - x,\ x \in (0;2\pi)$, tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. Chuỗi Fuorier đó hội tụ về hàm nào trên $[0;2\pi]$

$$(f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0;2\pi \\ \pi - x, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK01) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

BK02) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n}}{n^2.2^n}$

BK03) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$

BK04) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} x^{2n-1}$

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK1.21) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$

BK1.22) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 . 2^n}$

BK3.01) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

BK3.02) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$

BK3.03) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} x^{2n-1}$

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK1.01) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}x^n$

BK1.02) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2.2^n}$

BK1.03) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$

BK1.04) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2}x^{2n-1}$

BK1.05) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK1.06) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2.2^n}$

BK1.07) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$

BK1.08) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} x^{2n-1}$

BK1.09) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

BK1.10) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK1.16) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$

BK1.17) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 . 2^n}$

BK1.18) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} x^{2n-1}$

BK1.19) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$

BK1.20) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

KIỂM TRA 5 PHÚT

BK1.11) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(4n-3)^2} x^{2n-1}$

BK1.12) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2.2^n}$

BK1.13) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

BK1.14) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$

BK1.15) Tìm miền hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$