

**PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÝ THUYẾT CHUỖI****BÀI 1. CHƯƠNG I. LÝ THUYẾT CHUỖI****§ 1. Đại cương về chuỗi số**

- Định nghĩa
- Điều kiện cần để chuỗi hội tụ
- Các tính chất cơ bản

**Đặt vấn đề:**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$

- Có phải là cứ cộng mãi các số hạng của vế trái thì thành vế phải?
- $1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = ?$

**1. Chuỗi số:**

**Định nghĩa:** Với mỗi số tự nhiên  $n$ , cho tương ứng với một số thực  $a_n$ , ta có dãy số kí hiệu là  $\{a_n\}$ .

**Định nghĩa:**

Cho dãy số  $\{a_n\}$ , ta gọi tổng vô hạn  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  là chuỗi số, ký hiệu là  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

$a_n$  là số hạng tổng quát.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  là tổng riêng thứ  $n$ . Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  thì ta bảo chuỗi hội tụ,

có tổng  $S$  và viết:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ .

Khi dãy  $\{S_n\}$  phân kỳ thì ta bảo chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kỳ.

**Ví dụ 1.** Xét sự hội tụ và tính  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Phân kỳ khi  $|q| \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

**Ví dụ 2.** Xét sự hội tụ và tính  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

**Ví dụ 3.** Xét sự hội tụ, phân kỳ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (Chuỗi điều hoà)  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Lấy  $n > 2^{m+1}$  có

$$\begin{aligned} S_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} = \left( 1 + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^m + 1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \right) \\ &> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = (m+1) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Do đó  $S_n$  có thể lớn bao nhiêu tùy ý, nên có  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

Chuỗi đã cho phân kỳ

**Ví dụ 4.** Chuỗi nghịch đảo bình phương:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

$S_n$  tăng và dương

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$$

**Nhận xét:**

•  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ)

Chứng minh: Có  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

• Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  hoặc không tồn tại thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kỳ.

• Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

**Ví dụ 5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \text{ phân kỳ}$$

**Ví dụ 6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

Có  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ chẵn} \\ -1 & n \text{ lẻ.} \end{cases}$

Không tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ phân kỳ.}$$

**Ví dụ 7.** Tìm tổng (nếu có) của chuỗi số sau  $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$  (ĐS: 1)

**Ví dụ 8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n$  (PK)

**Tính chất.** Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a.b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$

## §2. Chuỗi số dương

- Định nghĩa
- Các định lý so sánh
- Các tiêu chuẩn hội tụ

**1. Định nghĩa:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$

**Nhận xét.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ khi và chỉ khi  $S_n$  bị chặn.

**Trong bài này ta giả thiết chỉ xét các chuỗi số dương**

### 2. Các định lý so sánh.

**Định lý 1.** Cho hai chuỗi số dương,  $a_n \leq b_n$ ,  $n$  tùy ý hoặc từ một lúc nào đó trở đi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hội tụ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ phân kỳ} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ phân kỳ}$$

**Chứng minh.**

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$0 < S_n \leq T_n$$

Rút ra các khẳng định.

**Ví dụ 1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$

Chuỗi dương

$$3^n + 1 > 3^n$$

$$\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \text{ hội tụ}$$

$\Rightarrow$  Chuỗi đã cho hội tụ

**Ví dụ 3. a)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{2^n (3n + 2)}, \quad (\text{HT})$

**Ví dụ 2.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Chuỗi dương

$$\ln n < n$$

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \text{ phân kỳ}$$

**b)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt{n^7 + 2n^3 + 3}}, \quad \beta \in \mathbb{R}; (\text{HTTĐ})$

**Định lí 2.** Cho hai chuỗi số dương,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

**Nhận xét.** Đối với các chuỗi số dương  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ :

1°/ Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ

2°/ Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  phân kì  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kì

**Ví dụ 4.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 - 3}$

Chuỗi dương

$$\frac{n+2}{2n^3 - 3} = \frac{n}{2n^3} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{2n^3}} = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{2n^3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{2n^3} : \frac{1}{2n^2} \right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \text{ hội tụ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-3} \text{ hội tụ}$$

**Ví dụ 5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 0$

Khi  $0 < p \leq 1$  có  $0 < n^p \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ , do  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ nên  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  phân kỳ.

Khi  $p > 1$ ,  $n$  tùy ý, chọn  $m$  sao cho  $n < 2^m$ , có

$$\begin{aligned} S_n &\leq S_{2^m-1} = 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{7^p} \right) + \dots + \left[ \frac{1}{(2^{m-1})^p} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^p} \right] \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \dots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{p-1})^{m-1}} \\ &= \frac{1-a^m}{1-a} < \frac{1}{1-a}, \quad 0 < a = \frac{1}{2^{p-1}} < 1 \end{aligned}$$

Dãy  $S_n$  bị chặn trên  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  hội tụ.

KL: Chuỗi hội tụ với  $p > 1$  và phân kì với  $0 < p \leq 1$ .

**Ví dụ 6.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$

Chuỗi dương

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} = \frac{1}{n^{3/2} \sqrt{1+\frac{3}{n^3}}}; \quad b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} \text{ hội tụ}$$

**Ví dụ 7**

$$\mathbf{a1)} \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{a2)} \sum_{n=2}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{b1)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \quad (\text{PK});$$

$$\mathbf{b2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \quad (\text{HT})$$

$$\mathbf{c1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos n}{\sqrt{n^5 + 1}} \quad (\text{HT})$$

$$\mathbf{c2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin n}{\sqrt{n^3 + 1}} \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{d1)} \sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{d3)} \sum_{n=2}^{\infty} n \left( e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{d3)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 2n^3 + 3}} \quad (\text{HT})$$

**e)** Xét sự hội tụ

$$\mathbf{1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} \quad (\text{HT})$$

$$\mathbf{2)} \sum \frac{1}{\arcsin \frac{1}{n} + \ln n} \quad (\text{PK})$$

$$\mathbf{3)} \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left( 1 + \arctan^2 \frac{\pi}{2\sqrt{n^3}} \right) \quad (\text{HT})$$

**3) Các tiêu chuẩn hội tụ****a) Tiêu chuẩn D'Alembert**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Khi  $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ

Khi  $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kỳ.

**Chứng minh**

•  $l < 1$ : Từ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , chọn  $\varepsilon > 0$  đủ bé để  $l + \varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq n_0$ .

• Mặt khác có  $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Do đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

•  $l > 1$ : Từ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , chọn  $\varepsilon$  đủ bé để  $l - \varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$  phân kì

**Nhận xét.** Khi  $l = 1$  không có kết luận gì

**Ví dụ 1.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ hội tụ}$$

**Ví dụ 2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

$$a_n = \frac{3^n}{n!} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

**Ví dụ 3.** Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi  $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} + \frac{1.3.5}{2.5.8} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.5.8 \dots (3n-1)}$

$$a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.5.8 \dots (3n-1)} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2.5.8 \dots (3n-1)(3n+2)} : \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.5.8 \dots (3n-1)} = \frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

**Ví dụ 4**

**a1)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$  (PK)

**a2)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$  (HT)

$$\text{a3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}} \quad (\text{HT})$$

$$\text{b1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{4^n \ln(n+1)} \quad (\text{PK})$$

$$\text{b3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} \quad (\text{HT})$$

$$\text{c1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{2^n (3n + 2)} \quad (\text{HT})$$

$$\text{d1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n} \quad (\text{PK})$$

$$\text{b2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n \ln(n+1)} \quad (\text{HT})$$

$$\text{b4)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} \quad (\text{HT})$$

$$\text{d2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \pi^n}{n^n} \quad (\text{PK})$$

### b) Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Nếu  $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ

Nếu  $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kỳ

**Nhận xét.** Nếu  $l = 1$ , không có kết luận gì

**Ví dụ 5.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$

$$a_n = \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right) > 0$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n-1}{3n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

**Ví dụ 6.** Xét sự hội tụ, phân kỳ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$  (PK)

**Ví dụ 7.**

$$\text{a1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + \sqrt{n} + 1}{4n^2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n} \quad (\text{HT})$$

$$\text{a2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + \sqrt{n} + 1}{3n^2 + \sin n} \right)^{3n - \ln n} \quad (\text{HT})$$



$$\text{a3)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 5^n}{2^n (n+1)^{n^2}} \quad (\text{HT})$$

$$\text{b1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^{n(n+4)} \quad (\text{HT})$$

$$\text{b2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+3}{n+2} \right)^{n(n+4)} \quad (\text{PK})$$

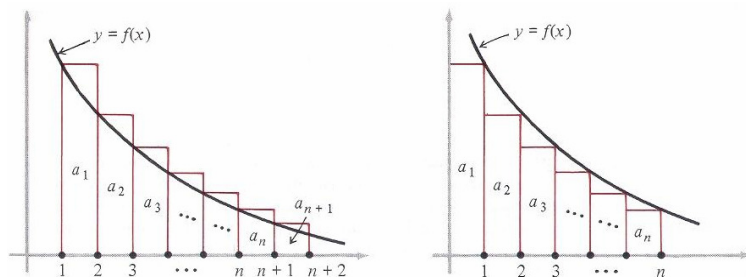
$$\text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} 5^n}{3^n (n+1)^{n^2}} \quad (\text{HT})$$

### c) Tiêu chuẩn tích phân

Có mối liên hệ hay không giữa:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{và } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n$$



Hình 14.4

$$\int_1^n f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Nếu  $f(x)$  là hàm dương giảm với mọi  $x \geq 1$ ,  $f(n) = a_n$ , khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ và } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.}$$

**Ví dụ 8.**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ dương, giảm với } x \geq 2 \text{ và có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)) = \infty$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ phân kỳ}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ phân kỳ}$$

Tổng quát có thể xét  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  hội tụ chỉ khi  $p > 1$ .

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= [\ln 2n + \gamma + o(1)] - [\ln n + \gamma + o(1)], \text{ với } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \end{aligned}$$

$$= \ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2 \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

Mặt khác ta có

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

**Ví dụ 10.** Tương tự nhận được  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2$ .

**Ví dụ 11.** Xét sự hội tụ phân kì của chuỗi số sau

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2} \quad (\text{HT}); \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2} \quad (\text{HT}) \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{3n^2} \quad (\text{HT})$$

**HAPPY NEW YEAR 2011 !**