

# Control Sistemas Mecatronicos

BMJIvan

15 de agosto de 2021

# 1. UNIDAD I

## 1.1. Solución de ecuaciones en espacio de estado

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con condición inicial

$$x(0) = x_0.$$

$$A : n \times n, \quad x : n \times 1, \quad B : n \times m, \quad u : m \times 1, \quad C : p \times n, \quad y : p \times 1,$$

El problema consiste en determinar  $x(t)$  y la respuesta  $y(t)$

Aplicando la transformada de Laplace a (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t)\} + \mathcal{L}\{Bu(t)\} \\ sX(s) - X(0) &= AX(s) + Bu(s) \\ \underbrace{sX(s)}_{n \times 1} - \underbrace{AX(s)}_{n \times 1} &= X(0) + Bu(s) \\ (sI - A)X(s) &= X(0) + Bu(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \\ \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\} \\ y(t) &= \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}X(0)}_{\substack{\text{Solución homogénea} \\ \text{Respuesta en estado transitorio} \\ \text{Respuesta natural}}} + \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}}_{\substack{\text{Solución particular} \\ \text{Respuesta en estado estacionario} \\ \text{Respuesta forzada}}} \end{aligned}$$

## 1.2. Transformación de similitud

considere el vector  $q : n \times 1$  ( $q \in R^n$ ). El conjunto de vectores  $q_1, \dots, q_m$  es linealmente independiente si existen numero reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  no todos cero, tales que

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_m q_m = 0 \quad (1)$$

Si la solución unica de (1) es  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes (l.i).

A la expresión  $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_n q_n$  se le denomina combinación lineal.

Base: Un conjunto de vctores l.i en  $R^n$  se define como una base si se puede expresar como una combinación lineal unica.

En  $R^n$  todo conjunto de vectores l.i puede utilizarse como una base.

Sea  $X : n \times 1$  todo vector  $X$  puede expresarse como

$$X = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n \quad (2)$$

donde  $q_i$  son l.i.

De (2) se tiene que

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} \quad (3)$$

se definen

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en (3) se tiene que

$$X = Q \tilde{X}$$

donde  $X$  y  $\tilde{X}$  son similares.

De (2)  $X^\top = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_n S_n$   $S_i : 1 \times n$

$$X^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Una matriz es estable cuando los valores propios son negativos.

Sea la ecuacion lineal

$$Ax = y \quad (4)$$

donde  $A : n \times n$   $B : n \times 1$   $y : n \times 1$  se definen

$$x = Q\tilde{x}, \quad y = Q\tilde{y}$$

sustituyendo en (4) se tiene que

$$\begin{aligned} AQ\tilde{x} &= Q\tilde{y} \\ Q^{-1}AQ\tilde{x} &= \tilde{y} \quad (5) \end{aligned}$$

donde  $A$  y  $Q^{-1}AQ$  son similares y  $A$  esta relacionada con la estabilidad.  
 ejercicio: Sea  $A : n \times n$  una matriz estable, demuestre que la matriz  $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$  es tambien estable, considere que  $Q$  es invertible.  
 Si

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0 \\ \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det(\lambda I - A) \\ \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det(\lambda Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) \\ &= \det(Q^{-1}\lambda Q - Q^{-1}AQ) \\ &= \det(Q^{-1}(\lambda I - A)Q) \\ &= \det(Q^{-1})\det(\lambda I - A)\det(Q) \\ &= \det(Q^{-1})\det(Q)\det(\lambda I - A) \\ &= \det(Q^{-1}Q)\det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

repetir el ejercicio anterior considerando la siguiente matriz  $\tilde{A} = QAQ^{-1}$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det(\lambda I - A) \\ \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - QAQ^{-1}) \\ &= \det(\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= \det(Q\lambda Q^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= \det(Q(\lambda I - A)Q^{-1}) \\ &= \det(Q)\det(\lambda I - A)\det(Q^{-1}) \\ &= \det(Q)\det(Q^{-1})\det(\lambda I - A) \\ &= \det(QQ^{-1})\det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

### 1.3. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{A}^{\text{estabilidad}} x(t) + \underbrace{B}_{\text{controlabilidad}} u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$X : n \times 1$$

$$A : n \times n$$

$$B : n \times m \text{ entradas}$$

$$u : m \times 1$$

$$C : p \times n$$

$$y : P \times 1 \text{ salidas}$$

Controlabilidad: Existencia de una entrada  $u(t)$  tal que cada variable de estado se pueda manipular de manera independiente. Es decir, las entradas cambian las variables.

Observabilidad: Consiste en determinar el estado inicial a partir de la salida  $y(t)$ . Es decir, las condiciones iniciales afectan la salida.

Definición 1. El sistema (1) es controlable si existe  $u(t)$  tal que para todo estado inicial  $x_0 = x(0)$  y todo estado final  $x_f = x(T)$ , el sistema puede llevarse de  $x_0$  a  $x_f$  en tiempo finito.

## 1.4. Solución de ecuaciones en espacio de estado 2

Se considera el sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad x(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - Ax(t) &= Bu(t) \\ e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \\ e^{-At}(\dot{x}(t)) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\ \int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= \int_0^t Bu(\tau)d\tau \\ e^{-A\tau} \Big|_a^b &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ e^{-At}x(t) - e^0x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ e^{At}(e^{-At}x(t) - e^0x(0)) &= e^{At} \left( \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \right) \\ x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + C \end{aligned}$$

anteriormente se obtuvo

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

A continuación se desarrollará los dos terminos un poco mas.

Se considera la matriz exponencial de la siguiente forma

$$f(t) = e^{At} \quad f(0) = I$$

entonces, partiendo de la derivada

$$\begin{aligned}
\dot{f}(t) &= Ae^{At} = Af(t) \\
\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} &= \mathcal{L}\{Af(t)\} \\
sF(s) - AF(s) &= AF(s) \\
sF(s) - AF(s) &= F(0) \\
(sI - A)F(s) &= I \\
(sI - A)^{-1}(sI - A)F(s) &= (sI - A)^{-1}I \\
F(s) &= (sI - A)^{-1} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando la definicion de la convolución

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Según el teorema de la covolución. si  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  existen para  $s > a \geq 0$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

considerando las ecuaciones

$$f(t) = e^{At}, \quad g(t) = Bu(t)$$

Se tiene que

$$\int_0^t e^{At-\tau} Bu(\tau)d\tau = f * g$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{At-\tau} Bu(\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{f * g\} \\
&= F(s)G(s) \\
&= (sI - A)^{-1}Bu(s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\int_0^t e^{At-\tau} Bu(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\right\}$$

## 1.5. Criterios de estabilidad

El sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par  $(A, B)$  es controlable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Controlabilidad de Kalman La matriz de controlabilidad

$$C = \left[ \underbrace{B}_{n \times m} \quad \underbrace{AB}_{n \times m} \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B \right] \}_{n \times nm}$$

para  $m = 1$  (una entrada), con  $\det(C) \neq 0$  es de rango completo, es decir,  $\text{rango}(C) = n$ .

2) Controlabilidad de Hautus La matriz de controlabilidad

$$H = [\lambda I - A \quad B] \}_{n \times (n+m)}$$

es de rango completa,  $\text{rango}(HC) = n$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de controlabilidad

$$G_c = \int_0^t e^{At\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

es invertible, es decir,  $\det(G_c) \neq 0$

4) Los valores propios de la matriz  $A - Bk$  pueden asignarse arbitrariamente.

## 1.6. Criterios de observabilidad

El sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par  $(A, B)$  es observable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Observabilidad de Kalman La matriz de observabilidad

$$C = \left[ \begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right] \}_{pn \times n}$$

es de rango completo,  $\text{rango}(C) = n$ .

2) Observabilidad de Hautus La matriz de observabilidad

$$H_o = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

es de rango completa,  $\text{rango}(H_o) = n$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$



3) Gramiano de observabilidad

$$G_o = \int_0^t e^{At\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

es invertible,  $\det(G_o) \neq 0$ )

4) Los valores propios de la matriz  $A - LC$  pueden asignarse arbitrariamente.

## 1.7. Forma Canonica Controlable

Ejercicio: demostrar que la propiedad de controlabilidad es invariante para cualquier transformación de similitud

Se considera la transformación de similitud

$$(1) X = P^{-1}z$$

donde  $P$  es invertible Se toma el sistema

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para conseguir  $P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + Bu$ , y así, obtener el sistema

$$(3) \begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{PAP^{-1}}^{\tilde{A}} + \overbrace{PBu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = CP^{-1} \end{cases}$$

donde  $A$  y  $PAP^{-1}$  son invariantes, se tiene que  $\lambda(A) = \lambda(PAP^{-1})$  debido a que  $P$  es invertible, entonces  $\text{rango}(\tilde{C}) = \text{rango}(C)$ .

Se obtiene la matriz de controlabilidad para los sistemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4) C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

$$(5) \tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Considerando que  $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$ , se sustituye las matrices similares de (3) en (5)

$$\tilde{C} = [PB, PAP^{-1}PB, PA^2P^{-1}PB, \dots, PA^{n-1}P^{-1}PB]$$

$$\tilde{C} = P[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

$$\tilde{C} = PC$$

Lo que se busca es la matriz  $P$ , por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\tilde{C} = PC$$

$$\tilde{C}\tilde{C}^{-1} = PC\tilde{C}^{-1}$$

$$I = PC\tilde{C}^{-1}$$

$$P^{-1}I = C\tilde{C}^{-1}$$

$$P^{-1} = C\tilde{C}^{-1} \quad (6)$$

Ahora se tomará el sistema de entradas y salidas

$$y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \dots + a_ny(t) = b_1u^{n-1}(t) + \dots + b_nu(t)$$

$$\mathcal{L}\{y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \dots + a_ny(t)\} = \mathcal{L}\{b_1u^{n-1}(t) + \dots + b_nu(t)\}$$

$$y(s)s^n + a_1y(s)s^{n-1} + \dots + a_ny(s) = b_1u(s)s^{n-1} + \dots + b_nu(s)$$

$$y(s)(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n) = u(s)(b_1s^{n-1} + \dots + b_n)$$

Se escribe la función de transferencia como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Si consideramos una función de transferencia racional (sin retardo) y estrictamente propia (orden del denominador mayor que el numerador)

$$g(s) = N(s)D(s)^{-1}$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomios. Por lo tanto, la función de transferencia se puede escribir como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = N(s)D(s)^{-1}$$

La salida del sistema se puede escribir como

$$y(s) = N(s)D(s)^{-1}u(s)$$

donde  $v(s) = D(s)^{-1}u(s)$ . Entonces la entrada y la salida se pueden escribir como

$$\begin{aligned} u(s) &= D(s)v(s) \\ y(s) &= N(s)v(s) \end{aligned}$$

Se definen las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_{n-1}(s) \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{n-1} \\ S^{n-2} \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{bmatrix} v(s)$$

entonces las variables de estado se pueden escribir como

$$\begin{aligned} X_n &= v(s) \\ X_{n-1} &= sv(s) = sX_n(s) \\ X_{n-2}(s) &= S^2v(s) = s(sv(s)) = sX_{n-1}(s) \\ &\vdots \\ X_2(s) &= sX_3(s) \\ X_1(s) &= sX_2(s) \end{aligned}$$

Si se sustituyen las variables de estado en la entrada se obtiene lo siguiente

$$u(s) = sX_1(s) + a_1X_1(s) + \dots + a_nX_n(s)$$

Se despeja  $sX_1(s)$

$$sX_1(s) = -a_1X_1(s) - \dots - a_nX_n(s) + u(s)$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)$$

Según la definición de la matriz similar de controlabilidad

$$\tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Se usará una matriz de 3\*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de controlabilidad

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.8. Forma Canonica Observable

Ejercicio: Demostrar que la propiedad de observabilidad es invariante para cualquier transformación de similitud.

Se considera la transformación de similitud

$$(1) \quad x = Qz$$

donde Q es invertible. Se toma el sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para obtener  $Q\dot{z} = AQz + Bu$  y así obtener el sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{Q^{-1}AQ}^{\tilde{A}}z + \overbrace{Q^{-1}Bu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = \underbrace{CQz}_{\tilde{C}} \end{cases}$$

Se obtiene la matriz de observabilidad para los sistemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4) \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T$$

$$(5) \quad \tilde{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \dots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Debido a que  $\tilde{A}^n = Q^{-1}\tilde{A}^nQ$

$$\tilde{O} = [CQ, CQQ^{-1}AQ, CQQ^{-1}A^2Q, \dots, CQQ^{-1}A^{n-1}Q]^T$$

$$\tilde{O} = [CQ, CAQ, CA^2Q, \dots, CA^{n-1}Q]^T$$

$$\tilde{O} = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T Q$$

$$\tilde{O} = OQ$$

Lo que se busca es la matriz Q, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede

despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\tilde{O} &= OQ \\
\tilde{O}Q^{-1} &= OQQ^{-1} \\
\tilde{O}Q^{-1} &= OI \\
\tilde{O}^{-1}\tilde{O}Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\
IQ^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\
Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \quad (6)
\end{aligned}$$

Debido a que  $Q$  es invertible,  $\text{rango}(\tilde{O}) = \text{rango}(O)$   
Tomando el sistema de entradas salidas

$$y(s)s^n + a_1y(s)s^{n-1} + \dots + a_ny(s) = b_1u(s)s^{n-1} + \dots + b_nu(s) \quad (7)$$

Se reacomoda de la siguiente forma

$$s^n y(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) = b_nu(s) - a_ny(s)$$

Se considera la variable de estado  $X_n(s) = y(s)$ , es decir

$$y(s) = [0, 0, 0, \dots, 1]X(s)$$

Entonces se comienza a definir las variables de estado a partir de (7), de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
s^n y(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}sy(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}(sy(s) + a_1y(s) - b_1u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}\overbrace{(sy(s) + a_1y(s) - b_1u(s))}^{X_{n-1}(s)} + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}X_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2y(s) - b_2u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}sX_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2y(s) - b_2u(s)) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}(sX_{n-1}(s) + \overbrace{(a_2y(s) - b_2u(s))}^{X_{n-2}(s)}) + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}\overbrace{(sX_{n-1}(s) + a_2y(s) - b_2u(s))}^{X_{n-2}(s)} + \dots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
&\vdots \\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s\overbrace{(sX_2(s) + a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s))}^{X_1(s)} &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
sX_1(s) &= b_nu(s) - a_ny(s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las variables de estado se definen como

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= sX_2(s) + a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
X_{n-2}(s) &= sX_{n-1}(s) + a_2y(s) - b_2u(s) \\
X_{n-1}(s) &= sX_n(s) + a_1y(s) - b_1u(s) \\
X_n(s) &= y(s)
\end{aligned}$$

Del proceso para obtener las variables de estado se puede ver que

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_ny(s) + b_nu(s) \\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= -a_ny(s) + b_nu(s) \\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= sX_1(s) \\
sX_2(s) + (a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= X_1(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s)
\end{aligned}$$

entonces la derivada de las variables de estado se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_ny(s) + b_nu(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2y(s) + b_2u(s) \\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1y(s) + b_1u(s)
\end{aligned}$$

Recordando que  $X_n(s) = y(s)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_nX_n(s) + b_nu(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}X_n(s) + b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2X_n(s) + b_2u(s) \\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1X_n(s) + b_1u(s)
\end{aligned}$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s) \\
y(s) &= \underbrace{[0, 0, \dots, 1]}_{\tilde{C}} X(s)
\end{aligned}$$

Según la definición de la matriz similar de observabilidad

$$\tilde{O} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \dots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Se usará una matriz de 3\*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{O}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de observabilidad

$$O = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$



## 2. UNIDAD II

### 2.1. Diseño de sistemas de control en espacios de estado

De manera general un sistema de control se define donde  $u$  : señal de control,  $y$  : señal disponible. Se asume que la referencia y la salida son conocidas.

En función de  $r$  se definen los siguientes problemas de control:

1. Regulación: se considera que  $r$  es constante
2. Seguimiento de trayectoria: En este caso  $y$  es una función variante con el tiempo
3. Seguimiento de modelo de referencia

Los sistemas de control se clasifican en dos tipos principales

1. En lazo abierto

La señal de control es independiente de la salida.

2. En lazo cerrado o retroalimentado

## 2.2. Ubicación de polos: metodo directo

Considere un sistema SISO

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

El polinomio caracteristico de (1)

$$\begin{aligned} P(s) &= \det(sI - A) = 0 \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \\ &= (s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_n) \end{aligned}$$

donde  $q_1, q_2, \dots, q_n$  son los polos del sistema en lazo abierto. El problema de ubicación de polos consiste en asignar los polos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  al sistema en lazo cerrado, entonces

$$P_{LC} = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n$$

Se define la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned} (2) \quad u &= r - kx \quad \text{donde } k : 1 \times n \\ &= r - [k_1, k_2, \dots, k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= r - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n) \\ &= r - \sum_{i=1}^n k_i x_i \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(r - kx) \\ &= Ax + Br - Bkx \\ &= (A - Bk)x + Br \quad (3) \text{ sistema en lazo cerrado} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= \det(sI - (A - Bk)) = 0 \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

### 2.3. Ubiación de polos forma canonica controlable

Considere el sistema SISO

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se asume que el sistema (1) es controlable, y el polinomio caracteristico del sistema es

$$\begin{aligned} P(s) &= \det(sI - A) \\ &= (s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_n) \\ &= s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n \end{aligned}$$

Haciendo  $z = Px$  o bien  $x = p^{-1}z$  (2) donde

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} p^{-1}\dot{z} &= AP^{-1}z + Bu \\ (3) \quad \dot{z} &= \underbrace{PAP^{-1}}_{\tilde{A}}z + \underbrace{PB}_{\tilde{B}}u \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned} (4) \quad u &= r - kx \\ &= r - kP^{-1}z \\ &= r - \tilde{k}z \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{k} = kP^{-1}$  (5)

Sustituyendo (4) en (3)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= PAP^{-1}z + PB(r - kP^{-1}z) \\ &= PAP^{-1}z + PBr - PBkP^{-1}z \\ (6) \quad &= P(A - Bk)P^{-1}z + PBr \end{aligned}$$

Ya que  $A - Bk$  y  $P(A - Bk)P^{-1}$  son similares, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{LC} &= \det(sI - (A - Bk)) = \det(sI - P(A - Bk)P^{-1}) \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

Donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  son los polos que se quieren ubicar, es decir, son conocidos, así como  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$

Si  $\tilde{A}$  se obtiene del polinomio característico del sistema  $A$ , entonces se puede escribir el sistema similar en lazo cerrado  $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k}$  de la siguiente forma

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} = \begin{bmatrix} -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \dots & -\tilde{a}_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{A}'$$

El problema consiste en despejar las ganancias  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n$

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}' \\ -\tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}' - \tilde{A} \\ \tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A} - \tilde{A}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \dots & \tilde{a}_n \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 & \tilde{a}_2 - a_2 & \dots & \tilde{a}_n - a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El vector de ganancias similares se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \vdots \\ \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix}$$

De la ecuación (5) se puede despaar las ganancias en lazo cerrado

$$\tilde{k} = kP^{-1}$$

$$\tilde{k}P = k$$

$$k = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix} [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. Formula de Ackerman

El metodo consiste en calcular la ganancia  $k$  para asignar los polos en lazo cerrado  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  a partir del polinomio caracteristico en lazo cerrado

$$P_{LC}(s) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n = 0$$

y en lazo abierto se tiene

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz satisface su polinomio caracteristico, por lo tanto se tiene que

$$P(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I = 0$$

$$P_{LC}(A - Bk) = (A - Bk)^n + \tilde{a}_1 (A - Bk)^{n-1} + \tilde{a}_2 (A - Bk)^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n I = 0$$

Para  $n = 3$  se tiene que

$$\begin{aligned} (A - Bk)^2 &= A^2 - ABk - Bk(A - Bk) \\ (A - Bk)^3 &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio caracteristico en lazo cerrado se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_{LC}(A - Bk) &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \\ &\quad + \tilde{a}_1 (A^2 - ABk - Bk(A - Bk)) + \tilde{a}_2 (A - Bk) + \tilde{a}_3 I \\ &= A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I - A^2 B(k) - AB(k(A - Bk)) \\ &\quad - B(k(A - Bk)^2) - AB(\tilde{a}_1 k) - B(\tilde{a}_1 k(A - Bk)) - B(\tilde{a}_2 k) \\ &= \underbrace{A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I}_{P_{LC}(A)} - B(k(A - Bk)^2 + \tilde{a}_1 k(A - Bk) - \tilde{a}_2 k) \\ &\quad - AB(k(A - Bk) + \tilde{a}_1 k) - A^2 B(k) \\ &= P_{LC}(A) - \underbrace{\begin{bmatrix} B & BA & A^2 B \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de controlabilidad } C} \underbrace{\begin{bmatrix} k(A - Bk)^2 & \tilde{a}_1 k(A - Bk) & \tilde{a}_2 k \\ 0 & k(A - Bk) & \tilde{a}_1 k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_G \\ &= P_{LC}(A) - CG = 0 \end{aligned}$$

Se despeja la ganancia  $G$

$$\begin{aligned} P_{LC}(A) - CG &= 0 \\ -CG &= P_{LC}(A) \\ CG &= P_{LC}(A) \\ G &= C^{-1} P_{LC}(A) \end{aligned}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones, pero solo se va a tomar el ultimo elemento de la matriz de ganancias, por lo tanto

$$\begin{aligned} [0 \quad 0 \quad 1] G &= [0 \quad 0 \quad 1] C^{-1} P_{LC}(A) \\ k &= [0 \quad 0 \quad 1] C^{-1} P_{LC}(A) \end{aligned}$$

Se define la formula de Ackerman como

$$k = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] C^{-1} P_{LC}(A)$$

### 3.1. Ecuación de Lyapunov

El metodo consiste en calcular  $k$  tal que la matriz  $(A - Bk)$  se le agregan los polos deseados en lazo cerrado.

Sea  $F$  una matriz con los valores propios deseados en lazo cerrado  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ .

Se aplica una transformación de similitud  $P$  tal que

$$A - Bk = PFP^{-1}$$

Se desconocen  $P$  y  $k$ , entonces

$$\begin{aligned} A - Bk &= PFP^{-1} \\ (A - Bk)P &= PFP^{-1}P \\ AP - B \underbrace{KP}_{\tilde{k}} &= PF \\ -B\tilde{k} &= PF - AP \\ B\tilde{k} &= AP - PF \end{aligned}$$

La cual es la ecuación de Lyapunov en la forma de Silvestre.

#### 3.1.1. Procedimiento para propones $\tilde{k}$

1. Construir una matriz  $F$ . Se recomienda que sea diagonal por bloques
2. Seleccionar  $\tilde{k}$ , tal que el par  $(F, \tilde{k})$  sea observable, es decir

$$O = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{k}F \\ \tilde{k}F^2 \\ \vdots \\ \tilde{k}F^n \end{bmatrix}, \quad \det(O) \neq 0$$

3. La ecuación de Lyapunov es un sistema de ecuaciones lineales, en MATLAB se puede solucionar usando  $P = \text{lyap}(A, -F, -B\tilde{k})$
4. Recordando que  $\tilde{k} = kP$ , las ganancias se obtienen con

$$k = \tilde{k}P^{-1}$$

La construcción de la matriz  $F$  se realizará con las siguientes reglas

1. Polos repetidos: se colocan en la diagonal, pero se agrega un 1
2. Polos reales no repetidos: se colocan en la diagonal
3. Polos imaginarios: Los reales se colocan en la diagonal, los imaginarios alternan de signo



Ejemplo: construir la matriz F segun los siguientes polos

$$\left\{ -1, -2, -3 + 4j, -3 - 4j, -1 \right\}$$

Se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

### 3.2. Estabilización por retroalimentación de estado

Considere el sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A &: n \times n \\ B &: n \times m \\ C &: p \times 1 \\ k_{m \times n} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definición estabilización: El sistema (1) es estable por retroalimentación de estado si existe  $u = -kx$  tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{X} = (A - Bk)x \text{ es estable}$$

es decir, que todos los valores característicos de la matriz  $A - Bk$  tienen parte real negativa

Se tienen dos casos

1. Si el par  $(A, B)$  es controlable entonces el sistema (1) siempre es estabilizable por retroalimentación de estado

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad \text{rango}(C) = n$$

2. Si el par  $(A, B)$  no es controlable,  $\text{rango}(C) = r < n$ , donde  $r$  es el número de vectores linealmente independientes. En este caso se debe determinar las condiciones para calcular la ganancia  $k$

Teorema: sea la matriz de controlabilidad

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad \text{rango}(C) = n$$

Se definen  $q_1, q_2, \dots, q_r$  vectores columna de la matriz  $C$  linealmente independientes, y  $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n$  vectores columna arbitrarios (se proponen) linealmente independientes tales que la matriz  $Q$  sea invertible

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_r \quad q_{r+1} \quad \dots \quad q_n]$$

Entonces la transformación  $x = Qz$  es tal que

$$\begin{aligned}
 (2) \quad Q\dot{z} &= AQz + Bu \\
 z &= Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bu \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Descomposición de Kalman}} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
 &\quad \text{(controlable, no controlable)}
 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A_{11} &: r \times r \\
 A_{12} &: r \times (n - r) \\
 O &: (n - r) \times r \\
 B_1 &: r \times m \\
 A_{22} &: (n - r) \times (n - r)
 \end{aligned}$$

El sistema (1) y (2) son similares, es decir  $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$

Se define

$$(3) \quad u = \tilde{k}z$$

Donde  $\tilde{k} = kQ^{-1}$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2] z \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} B_1\tilde{k}_1 & B_1\tilde{k}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z
 \end{aligned}$$

Los valores característicos del sistema en lazo cerrado son

$$\underbrace{\lambda(A_{11} - B_1\tilde{k}_1)}_{\substack{\text{polos} \\ \text{controlables}}} \cup \underbrace{\lambda(A_{22})}_{\substack{\text{polos no} \\ \text{controlables}}}$$

Condición necesaria para estabilización es que la matriz  $A_{22}$  se estable

El problema de estabilización se resuelve como un problema de ubicación de polos para la matriz  $A_{11} - B_1\tilde{k}_1$

donde

$$\tilde{k} = [\tilde{k}_1 \quad \tilde{k}_2]$$

Las ganancias en lazo cerrado se obtienen con

$$k = \tilde{k}\tilde{Q}^{-1}$$

### 3.3. Observadores de estado (reconstruir variables que no se conocen)

La retroalimentación de estado  $u = r - kx$  asume que todo el vector de estados es conocido  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  y  $C = I$  para tener en la salida todas las variables de estado.

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Sin embargo no siempre se tiene acceso a todas las variables de estado, debido a restricciones tecnologicas, de costos, etc.,.

Los observadores de estado, se utilizan para aproximar el valor de las variables de estado desconocidas.

Sea  $x$  y  $\hat{x}$ , donde  $\hat{x}$  es un valor aproximado del vector  $x$  obtenido mediante un observador de estado, entonces  $u = r - k\hat{x}$ . Se propone el observador de estado para (1)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{copia del del sistema}} + \underbrace{L(y - C\hat{x})}_{\text{factor de corrección}} \\ &= A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x} \end{aligned}$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

Convergencia asintotica

$$\|x - \hat{x}\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\|x - \hat{x}\| \leq k_0 e^{-\lambda t}$$

Se define el error de estimación

$$(2) \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Derivando (2) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(y - C\hat{x}) \\ &= Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) \\ &= A \underbrace{(x - \hat{x})}_{e(t)} - LC \underbrace{(x - \hat{x})}_{e(t)} \\ &= Ae(t) - LCe(t) \\ &= (A - LC)e(t) \quad (3) \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial (3), se puede ver que  $f(t) = e(t)$  con condición inicial  $f(0) = e(0)$ , y la derivada  $\dot{f}(t) = (A - LC)e(t)$ . Así que se propone que  $f(t) = Q_0 e^{Qt}$ , por lo tanto se tiene que

$$f(0) = e(0) = Q_0 e^{Q(0)} = Q_0 e^0 = Q_0 I = Q_0$$

La derivada de la función propuesta es

$$\dot{f}(t) = Q_0 Q e^{Qt}$$

igualando funciones

$$\begin{aligned} Q_0 Q e^{Qt} &= (A - LC)e(t) \\ Q_0 Q e^{Qt} &= (A - LC)Q_0 e^{Qt} \\ Q_0 Q e^{Qt} (Q_0 e^{Qt})^{-1} &= (A - LC)Q_0 e^{Qt} (Q_0 e^{Qt})^{-1} \\ Q &= (A - LC) \end{aligned}$$

Sustituyendo  $Q$  y  $Q_0$  en la función propuesta

$$f(t) = e(0)e^{(A-LC)t}$$

El problema de diseño de observadores se resuelve como un problema de ubicación de polos, es decir, consiste en calcular  $L$  para asignar dinámica del observador de estado

$$\begin{aligned} P_{\text{obs}} &= \det(sI - (A - LC)) \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

### 3.4. Diseño de observadores de estado: forma canonica observable

Considere el sistema SISO

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Se asume que el sistema (1) es observable, y el polinomio caracteristico del sistema es

$$\begin{aligned} P(s) &= \det(sI - A) \\ &= (s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_n) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \end{aligned}$$

Haciendo  $z = xQ^{-1}$  o bien  $x = Qz$  (2) donde

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} Q\dot{z} &= AQz + Bu \\ \dot{z} &= \underbrace{Q^{-1}AQ}_{\tilde{A}} z + \underbrace{Q^{-1}B}_{\tilde{B}} u \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ y &= \underbrace{CQ}_{\tilde{C}} z \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

Se tiene el observador de estado

$$\begin{aligned} (3) \quad \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x} \\ &= A\hat{x} - LC\hat{x} + Bu + Ly \\ &= (A - LC)\hat{x} + \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene que

$$\begin{aligned}
Q\dot{\hat{z}} &= AQ\hat{z} + Bu + L(y - CQ\hat{z}) \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}AQ\hat{z} + Q^{-1}Bu + \underbrace{Q^{-1}L}_{\tilde{L}}(y - CQ\hat{z}) \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}AQ\hat{z} + Q^{-1}Bu + Q^{-1}Ly - Q^{-1}LCQ\hat{z} \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}(A - LC)Q\hat{z} + Q^{-1}(Bu + Ly)
\end{aligned}$$

Donde  $\tilde{L} = Q^{-1}L$  (4)

Ya que  $A - LC$  y  $Q^{-1}(A - LC)Q$  son similares, se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{obs} &= \det(sI - (A - LC)) = \det(sI - Q^{-1}(A - LC)Q) \\
&= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\
&= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n
\end{aligned}$$

Si  $\tilde{A}$  se obtiene del polinomio característico del sistema  $A$ , entonces se puede escribir el sistema similar del observador  $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$  de la siguiente forma

$$\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\tilde{a}_n \\ 1 & 0 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix} = \tilde{A}'$$

El problema consiste en despejar las ganancias  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A}' \\
-\tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A}' - \tilde{A} \\
\tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A} - \tilde{A}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_n \\ -1 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \tilde{a}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \tilde{L}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{L}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_n - a_n \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

El vector de ganancias similares se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_n - a_n \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4) se puede despañar las ganancias del observador

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= Q^{-1}L \\ L &= Q\tilde{L}\end{aligned}$$



### 3.5. Formula de Ackerman

Se tiene el polinomio caracteristico del observador

$$\begin{aligned} P_{obs} &= \det(sI - (A - LC)) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n = 0 \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} (A - LC)^2 &= A^2 - LCA - (A - LC)LC \\ (A - LC)^3 &= A^3 - LCA^2 - (A - LC)LCA - (A - LC)^2 LC \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton con  $A - LC$ , para  $n = 3$

$$\begin{aligned} P_{obs} &= A^3 - LCA - (A - LC)LCA - (A - LC)^2 LC \\ &\quad + \tilde{a}_1(A^2 - LCA - (A - LC)LC) + \tilde{a}_2(A - LC) + \tilde{a}_3 \\ &= \underbrace{A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3}_{P_{obs}(A)} - ((A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2)LC \\ &\quad - ((A - LC) + \tilde{a}_1)LCA - LCA^2 \\ &= P_{obs}(A) - \begin{bmatrix} (A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2 & (A - LC) + \tilde{a}_1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \\ &= P_{obs}(A) - \underbrace{\begin{bmatrix} (A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2 \\ (A - LC) + \tilde{a}_1 \\ L \end{bmatrix}^T}_G \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de observabilidad}} \\ &= P_{obs}(A) - GO = 0 \end{aligned}$$

Se despeja la ganancia G

$$\begin{aligned} P_{obs}(A) - GO &= 0 \\ -GO &= -P_{obs}(A) \\ GO &= P_{obs}(A) \\ G &= P_{obs}(A)O^{-1} \end{aligned}$$

Solo tiene un sistema de ecuaciones, pero solo se va a tomar el ultimo elemento de la matriz de ganancias, por lo tanto

$$\begin{aligned} G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{obs}(A)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= P_{obs}(A)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se define la formula de Ackerman como

$$L = P_{obs}(A)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.6. Ecuación de Lyapunov

Sea  $F$  una matriz con los valores característicos iguales a la dinámica deseada del observador

Se aplica una transformación de similitud  $P$  tal que

$$A - LC = PFP^{-1}$$

Se desconocen  $P$  y  $L$ , entonces

$$\begin{aligned} A - LC &= P^{-1}FP \\ P(A - LC) &= FP \\ PA - \underbrace{PL}_{\tilde{L}}C &= FP \\ -\tilde{L}C &= FP - PA \\ \tilde{L}C &= PA - FP \end{aligned}$$

#### 3.6.1. Procedimiento para proponer $\tilde{L}$

1. Construir una matriz  $F$ . Se recomienda que sea diagonal por bloques
2. Seleccionar  $\tilde{L}$ , tal que el par  $(F, \tilde{L})$  sea controlable, es decir

$$C = [\tilde{L} \quad F\tilde{L} \quad F^2\tilde{L} \quad \dots \quad F^n\tilde{L}], \quad \det(C) \neq 0$$

3. La ecuación de Lyapunov es un sistema de ecuaciones lineales, en MATLAB se puede solucionar usando  $P = \text{lyap}(-F, A, -\tilde{L}C)$
4. Recordando que  $\tilde{L} = PL$ , las ganancias se obtienen con

$$L = P^{-1}\tilde{L}$$

### 3.7. Detectabilidad de sistemas lineales

Considere el sistema

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A &: n \times n \\ B &: n \times m \\ C &: p \times n \\ X &: n \times 1 \\ y &: p \times 1 \\ u &: m \times 1 \\ m &: \text{entradas} \\ p &: \text{salidas} \end{aligned}$$

Definición detectabilidad: El sistema (1) es detectable si existe  $L$  tal que la matriz  $A - LC$  es Horwitz estable, es decir, los polos son negativos

1. Si el par  $(A, B)$  es observable entonces el sistema (1) siempre es detectable

$$O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T \quad rango(O) = n$$

2. Si el par  $(A, C)$  no es observable, es decir,  $rango(C) = r < n$ , donde  $r$  es el número de vectores linealmente independientes.

Se definen  $s_1, s_2, \dots, s_r$  los primeros vectores fila linealmente independientes de la matriz  $O$  y  $s_{r+1}, \dots, s_n$  vectores fila arbitrarios (se proponen) tales que la matriz  $S$  sea invertible

$$S = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_r \quad s_{r+1} \quad \dots \quad s_n]^T : n \times n \quad det(S) \neq 0$$

Entonces la transformación de estado  $z = Sx$  o  $x = S^{-1}z$  es tal que

$$\begin{aligned} (2) \quad S^{-1}\dot{z} &= AS^{-1}z + Bu \\ \dot{z} &= SAS^{-1}z + SBu \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

En la salida

$$y = CS^{-1}z = [C_1 \quad 0]z$$

Donde

$$\begin{aligned} A_{11} &: r \times r \\ 0 &: r \times (n - r) \\ A_{21} &: (n - r) \times r \\ A_{22} &: (n - r) \times (n - r) \\ C_1 &: P \times (n - r) \end{aligned}$$

El sistema (1) y (2) comparten valores propios,  $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$   
 Se propone el observador para el sistema (2)

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}} (y - [C_1 \ 0] \hat{z}) \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} [C_1 \ 0] \hat{z} \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 C_1 & 0 \\ \tilde{L}_2 C_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{z} \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{L}_1 C_1 & 0 \\ A_{21} - \tilde{L}_2 C_1 & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y
 \end{aligned}$$

La dinamica del observador es

$$\lambda(A_{11} - \tilde{L}_1 C_1) \cup \lambda(A_{22})$$

Una ecuación necesaria para detectabilidad es que  $A_{22}$  sea Hurwits estable

La ganancia  $\tilde{L}_1$  se calcula con los metodos de diseño de observadores para la matriz  $A_{11} - \tilde{L}_1 C_1$  donde  $\tilde{L}_2$  es arbitrario, por lo tanto se propone  $\tilde{L}_2 = 0$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

APlicando la transformación de estado  $x = S^{-1}z$  al observador del sistema (1)

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\
 S^{-1}\dot{\hat{z}} &= AS^{-1}\hat{z} + Bu + L(y - CS^{-1}\hat{z}) \\
 \dot{\hat{z}} &= SAS^{-1}\hat{z} + SBu + SL(y - CS^{-1}\hat{z})
 \end{aligned}$$

se define  $\tilde{L} = SL$

Las ganancias del observador se obtienen con

$$L = S^{-1}\tilde{L}$$