Mecánica de fluidos

BMJIvan

19 de septiembre de 2021

1. Conceptos fundamentales

$$\text{Aplicaciones}\left\{\begin{array}{l}\text{Transporte de fluidos}\\ \text{Conversión de la energía}\\ \text{Acondicionamiento de ambiente}\\ \text{Turbomáquinaria}\\ \text{Transporte (vehicular)}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Áreas de}\\ \text{mecánica de fluidos}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{Aerodinámica}\\ \text{Hidráulica}\\ \text{Hidrología}\\ \text{Metrología}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Hidráulica de potencia}\\ \text{Redes de tubería}\\ \text{Neumática}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Técnicas o}\\ \text{métodos o analíticos}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{Analíticos}\\ \text{Experimentales}\\ \text{Computacionales}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Diferenciales}\\ \text{Diferenciales}\end{array}\right.$$

Presión, esfuerzo normal: Genera deformaciones lineales

$$P = \lim \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}$$

Esfuerzo cortante: Genera deformaciones angulares

$$\tau = \lim \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

1.1. Propiedades de los fluidos

Densidad

$$\rho = \frac{m}{v} \quad \left[{}^{kg}/_{m^3}.{}^{lbm}/_{pie^3}, {}^{slug}/_{pie^3}\right]$$

Peso especifico

$$\gamma = \frac{W_g}{v} = \frac{mg}{v} = \rho g \quad \left[{}^{N}/_{m^3}, {}^{lb}/_{pie^3}\right]$$

Densidad relativa

$$sg = GE = \rho_r = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{H_2O \ \ T=4^oC}}$$

Viscosidad dinámica o absoluta

$$\mu = \frac{\tau}{{}^{d\vec{u}}/dy} \quad \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Gradiente de velocidad}}$$

$$\mu = \frac{\tau y}{\vec{u}} \quad \left[{}^{N\cdot s}/m^2, {}^{lb\cdot s}/pie^2\right]$$

Viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[{}^{m^2}/s, {}^{pie^2}/s\right]$$

1.2. Gases ideales

Proceso adiabático: Aquel proceso en el que no se gana ni pierde calor, es decir, cuenta con un aislamiento térmico.

En proceso adiabático reversible no hay transferencia de calor y por lo tanto el proceso es isoentrópico.

Un proceso adiabático irreversible no es isoentropico.

$$\begin{aligned} \forall &: \text{ Volumen} \\ \nu &: \text{ volumen especifico } \frac{\forall}{m} = \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

1. Ley de Boyle y Mariotte

$$\begin{gathered} \text{Si } T = constante \\ P \ \alpha \ \frac{1}{\forall} \\ P\forall = C \\ P_1\forall_1 = P_2\forall_2 \end{gathered}$$

2. Ley de Charles

$$\begin{gathered} \text{Si } P = constante \\ \forall \ \alpha \ T \\ \frac{\forall}{T} = C \\ \frac{\forall_1}{T_1} = \frac{\forall_2}{T_2} \end{gathered}$$

3. Ley de Gay - Lussac

$$\begin{gathered} \text{Si } \forall = constante \\ P \ \alpha \ T \\ \frac{P}{T} = C \\ \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \end{gathered}$$

4.

$$\frac{P\forall}{T} = C$$
$$\frac{P_1\forall_1}{T_1} = \frac{P_2\forall_2}{T_2}$$
$$\frac{P\nu}{T} = nR_u$$
$$R_u = \frac{P\forall}{Tn}$$

Donde

$$P = 1 \text{ atmósfera}$$
$$T = 0^oC = 273{,}15K$$
$$n = 1 \text{ kmol}$$
$$\forall = 22{,}413m^3$$
$$R_u = 8{,}314^{kJ}/_{kmol\cdot K}$$
$$n = \frac{m}{M} \; \frac{\text{masa}}{\text{masa molar}}$$
$$R = \frac{R_u}{M} \text{ constante del gas}$$

Entonces

$$R_u = \frac{P\forall}{T^m/M} = \frac{MP\forall}{Tm}$$
$$m\frac{R_u}{M} = \frac{P\forall}{T}$$
$$\frac{P\forall}{T} = mR$$
$$P\forall = TmR$$
$$P\frac{\forall}{m} = TR$$
$$P\nu = TR$$
$$P = \frac{1}{\nu}TR = \rho TR$$
$$\frac{P}{\rho} = TR$$

1.3. Velocidad sonica o acústica y viscosidad

A partir de 1

$$dp \; \alpha \; -\frac{d\forall}{\forall} dp = -E_v\frac{d\forall}{\forall}$$

Donde E_v es el modulo de compresibilidad o modulo volumétrico.
De la definición de masa

$$\begin{aligned} m &= \rho\forall \\ dm &= \rho dv + d\rho\forall, \quad dm = 0 \\ -\rho d\forall &= d\rho\forall \\ -\frac{d\forall}{\forall} &= \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$dp = E_v \frac{d\rho}{\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \text{ Velocidad del sonido a través de líquidos}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_p}{C_\nu} = 1{,}4 \\ R &= C_p - C_\nu \quad \left[{}^{kJ}/kg \cdot K\right] \\ R &= {,}287^{kJ}/kg \cdot K \\ C &= \sqrt{\frac{k_p}{\rho}} = \sqrt{KTR} \\ E_v &= P \ \text{ Proceso isotérmico} \\ E_v &= KP \ \text{ Proceso isoentropico} \end{aligned}$$

Líquidos incompresibles $\rho = constante$
Líquidos compresibles $\rho \neq constante$

$$\begin{aligned} \text{Mach } &= \frac{\vec{v}}{C} \ \frac{\text{velocidad fluido}}{\text{velocidad de sonido}} \\ \text{Mach } &\leq {,}3 \text{ flujo de gas incompresible} \\ \text{Mach } &\geq {,}3 \text{ flujo compresible} \end{aligned}$$

$$\frac{\overbrace{\mu}^{\text{Dinámica}}}{\rho} = \overbrace{v}^{\text{Cinemática}}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \text{ constante o 0 ideal o no viscoso} \\ \mu &\neq \text{ constante o 0 real o viscoso} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{Fluido de acuerdo} \\ \text{al comportamiento} \\ \text{de la } \mu \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Newtoniano} \left\{ \ \tau \ \alpha \ \frac{d\theta \text{ deformación}}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \text{ley de viscosidad} \\ \text{de Newton} \end{array} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dy} \right. \\ \text{No Newtoniano} \left\{ \ \tau \text{ no } \ \alpha \ \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{ Series de potencias} \right. \\ \text{Visco-elástico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Comportamiento Newtoniano} \\ \text{y no Newtoniano} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Número de Raynolds

$$NR_E = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \overbrace{\frac{\rho\vec{v}D}{\mu}}^{\text{Dinámica}} = \overbrace{\frac{\vec{v}D}{\forall}}^{\text{Cinemática}}$$

$$\text{Flujo viscoso} \begin{cases} \text{flujo laminar}\left\{ \; NR_E \leq 2000 \;\; (2300) \right. \\ \text{flujo transición}\left\{ \; 2000 \leq NR_E \leq 4000 \right. \; \begin{matrix}\text{puede ser} \\ \text{laminar o turbulento}\end{matrix} \\ \text{flujo turbulento}\left\{ \; NR_E \geq 4000 \right. \end{cases}$$

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel} \rightarrow P_{\text{manométrica}}$$

$$\begin{aligned} Mach &> 1 \;\; \text{supersónico} \\ Mach &> 5 \;\; \text{hipersónico} \\ Mach &< 1 \;\; \text{sursónico} \\ Mach &= 1 \;\; \text{sónico} \\ Mach &\leq 1 \;\; \text{transónico} \end{aligned}$$

$$\dot{\forall} = \frac{\forall}{t} = \vec{v}A \rightarrow \;\; \text{caudal}$$

$$\begin{aligned} \rho_{gasolina} &= 680 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 1{,}3 \times 10^9 \; {}^{N}/_{m^2} \\ \rho_{Hg} &= 13600 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 2{,}85 \times 10^{10} \; {}^{N}/_{m^2} \\ \rho_{H_2O\ mar} &= 1030 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 2{,}34 \times 10^9 \; {}^{N}/_{m^2} \end{aligned}$$

1.4. Esfuerzo cortante

$$\begin{aligned} \tau \; \alpha \; \frac{du}{dt} &= \frac{\vec{v}}{dy} \\ \tau &= \mu\frac{d\vec{v}}{dy} \\ \tau \int_0^h dy &= \mu \int_0^{\vec{v}} \\ \tau h &= \mu\vec{v} \\ \tau &= \mu\frac{\vec{v}}{h} \\ \tau &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} \\ \tau &= \frac{F_t}{A} \end{aligned}$$

Donde F_v es la fuerza viscosa o tangente

$$\mu\frac{\vec{v}}{h} = \frac{F_v}{A}$$
$$F_v = \frac{\mu\vec{v}A}{h}$$

caso 1:

$$A = \pi dL$$
$$h = \frac{D-d}{2}$$
$$F_v = \frac{2\pi dL\vec{v}\mu}{D-d}$$

caso 2:

$$F_v = W\sin\theta$$
$$h = \frac{\mu\vec{v}A}{W\sin\theta}$$

*tablas líquidos y gases: mecánica de fluidos Pottev

1.5. Tensión o esfuerzo superficial

$$\sigma_s = \frac{F_{\text{tensión}}}{l} \quad \left[{}^{W}/_{m}, {}^{lb}/_{pie}\right]$$
$$\sum F_y = 0$$
$$F_{rsy} - Wg = 0$$
$$\sigma_s\pi D\cos\theta - \rho\forall g = 0$$
$$\sigma_s\pi D\cos\theta - \rho g\frac{\pi D^2}{4}h = 0$$
$$\sigma_s\cos\theta = \frac{\rho g D h}{4}$$
$$h = \frac{4\sigma_s\cos\theta}{\rho g D}$$

2. Estática de fluidos

2.1. Derivada y series de Taylor

La pendiente de una recta con base de una función

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}
\end{aligned}
$$

La pendiente de la recta tangente en el punto x, o derivada ocurre cuando

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Los coeficientes de $(a+b)^n$ se pueden escribir como

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \cdots$$

El cambio de la altura de una función se puede escribir como

$$\Delta f(x) = f(x + r) - f(x)$$

El valor de la altura final es

$$f(x + r) = f(x) + \Delta f(x)$$

Se aplica lo misma operación una segunda vez

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\
&= \Delta(f(x + r) - f(x)) \\
&= f(x + r + r) - f(x + r) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + r) \\
&= f(x + 2r) - 2\Delta f(x) - f(x)
\end{aligned}
$$

El valor de la altura final es

$$f(x + 2r) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$$

Se vuelve a repetir

$$
\begin{aligned}
\Delta^3 f(x) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) \\
&= f(x + 3r) - f(x + 2r) - 2\Delta^2 f(x) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + 2r) \\
&= f(x + 3r) - f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta^2 f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta f(x) \\
&= f(x + 3r) - f(x) - 3\Delta f(x) - 3\Delta^2 f(x)
\end{aligned}
$$

El valor de la altura es

$$f(x+3r) = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n f(x)$$

Haciendo $h = nr$, y multiplicando por 1

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \cdots + \frac{(n(n-1)\cdots 1)r^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

Haciendo $n \to \infty$ hace que $r \to 0$

$$f(x+rn) = f(x+h) = f(x) + hf(x)^{'} + h^2\frac{f(x)^{''}}{2!} + \cdots$$

2.2. Principio de Pascal

presión

$$P = \frac{F}{A}\left[1Pa = 1^{N}/_{m^2}, {}^{lb}/_{pie^2}, {}^{lb}/_{pulg^2}\right]$$

Presión atmosférica

$$Pa \ \left[1\ atm = 760\ mmHg = 16{,}7^{lb}/_{pulg^2} = 101{,}325kPa\right]$$

Presión relativa

$$P_{rel}$$

Presión absoluta

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel}$$

$$\begin{aligned}
&\sum F_y = ma_y \\
&P_y\Delta z\Delta x - P\Delta s\Delta x\sin\theta = \rho\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2}a_y \\
&\sum F_z = ma_z \\
&P_z\Delta y\Delta x - P\Delta s\Delta x\cos\theta - \rho g\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2} = \rho\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2}a_z
\end{aligned}$$

Pero de la figura se puede ver que

$$\Delta z = \Delta s\sin\theta$$
$$\Delta y = \Delta s\cos\theta$$

entonces

$$P_y - P = \rho\frac{\Delta y}{2}a_y$$
$$P_z - P = \frac{\rho}{2}(g + a_z)\Delta z$$

Si $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, y $\frac{d\vec{v}}{dy} = 0$

$$p_y - P = 0$$
$$P_z - P = 0$$
$$P = P_z = P_y$$

Transmisor de fuerza. Si la presión de un punto es igual a otro

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Transmisor de presión

$$P_1A_1 = P_2A_2$$

si $\Delta z = 1$

$$P = P_x = P_y = P_z$$

2.3. Variación de la presión de un fluido en reposo

$$\begin{aligned} W &= dmg \\ &= \rho g d\forall \\ &= \rho g dxdydz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= F(X) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x}{2!} + \cdots \\ f(x+\delta x) &\approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x \\ f(x-\delta x) &\approx f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (CD)\ P(y+\frac{dy}{2}) &= P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2} \\ (CI)\ P(y-\frac{dy}{2}) &= P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dFsy &= dfy(+) - dfy(-) \\
&= [(P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}) - (P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2})]dxdz \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz \;\; (1) \\
Fsz &= -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz \;\; (2) \\
Fsx &= -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz \;\; (3) \\
\underbrace{dF_B}_{\text{cuerpo o másicas}} &= \rho g dxdydz \;\; (4)
\end{aligned}
$$

Fuerza másica: fuerza que actúa sobre la masa de un fluido.

$$
\begin{aligned}
d\vec{F_T} &= m\vec{a} \\
d\vec{F_s} + d\vec{F_B} &= m\vec{a} \\
d\vec{F_{sx}} + d\vec{F_{sy}} + d\vec{F_{sy}} + \rho g dxdydz &= m\vec{a} \\
(-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g)dxdydz &= \rho dxdydz\vec{a}
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}}_{\text{Ecuación de cantidad de movimiento}}
$$

$$
\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho\vec{g} = 0}_{\text{Ecuación vectorial de hidrostática}}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = 0
\end{aligned}
$$

Si $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho g \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \\
\partial P &= -\rho g \partial z \\
\int_P^0 dP &= -\rho g \int_{-h}^0 dz \\
-P &= -\rho g(+h) \\
P &= \rho g h
\end{aligned}
$$

2.4. Fuerzas sobre superficies planas y curvas

2.4.1. Fuerza resultante de una distribución de fuerzas hidrostáticas

considerando

$$
\begin{aligned}
dF_R &= PdA \\
\frac{dP}{dh} &= \rho g \\
P &= P_o + \rho g h \\
h &= y \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dF_R &= (P_o + \rho g h)dA \quad P_o = 0 \\
&= \rho g h dA \\
\int_0^{F_R} &= \rho g \sin\theta \int y dA \\
F_R &= \rho g \sin\theta y_{cg} A
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\int_A y_c dA = y_{cg} A}_{\text{Primer momento de área}}
$$

2.4.2. Localización de la fuerza resultante

$$
\begin{aligned}
dM_x &= dF_R \cdot y \\
&= \rho g y \sin\theta y dA \\
&= \rho g y^2 \sin\theta dA \\
M_{Rx} &= \rho g \sin\theta I_{xx} \\
F_R y_{cp} &= \rho g \sin\theta I_{xx} \\
y_{cp} &= \frac{\rho g \sin\theta I_{xx}}{\rho g \sin\theta y_{cg} A} = \frac{I_{cg} + y_{cg}^2 A}{y_{cg} A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\int y^2 dA = I_{xx} = I_{cg} + y_{cg}^2 A}_{\text{Segundo momento de área}}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} F_H &= F_{x2} - F_{x1} = 0 \\ F_{x2} &= F_{x1} \\ F_V &= 2F_y + 2W_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F_x = \rho g(h_1 + \frac{r}{2})(rb) \\ &F_y = \rho g h_1 (rb) \\ &W = mg \\ &\quad = \rho \forall g = \rho g(R^2 b - \frac{\pi r^2 b}{4}) \end{aligned}$$

2.5. Principio de Arquímedes

$$\begin{aligned} F_B &= F_i - F_s \\ &= \rho g(h+y)A - \rho g h A \\ &= \rho g y A \\ &= \rho g \forall \end{aligned}$$

F_B : Fuerza de flotabilidad o Boyante

$\forall$: Volumen desplazado

3. Cinemática de fluidos

3.1. Formas para describir el movimiento de un fluido

3.1.1. Enfoque de Lagrange

Identifica una pequeña masa de fluido en un flujo y describe el movimiento todo el tiempo.
Descripción del movimiento donde las partículas de masa individuales son observadas como función del tiempo.

3.1.2. Enfoque de Euler

Se define un volumen finito llamado volumen de control $\forall_c$ a través del cual una masa fluye hacia dentro o hacia afuera.
Se definen variables de campo, como función del espacio y tiempo dentro del $\forall_c$

3.2. Campos de presión y aceleración

3.2.1. Campo de aceleración

$$\begin{aligned}
&\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\
&\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\
&\vec{v} = u\vec{i} + \nu\vec{j} + w\vec{k}
\end{aligned}$$

3.2.2. Campo de presión

$$\begin{aligned}
&\vec{v} = (x, y, z, t) \\
&\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial t}dt
\end{aligned}$$

3.3. Ecuación de Euler y Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} \\
&= u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \nu\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\
&= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{Parte local}} + \underbrace{u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \nu\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}_{\text{Parte conectiva}}
\end{aligned}$$

Donde

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k}) \\
\frac{D}{Dt} &= \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\ldots} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot)\,\overline{\ldots}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} = 0 \quad & \Big\{\text{Estable o permanente} \\
\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \neq 0 \quad & \Big\{\text{No estable ni permanente, en transición}
\end{aligned}
$$

Ecuación de Euler: para compresible e incompresible. A partir de la ecuación de cantidad de movimiento sin esfuerzos cortantes.

$$
\begin{aligned}
-\vec{\nabla}\cdot P + \rho\vec{g} &= \rho\vec{a} \\
&= \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} \\
&= \rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{v}))
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\frac{-\vec{\nabla}\cdot P}{\rho}}_{\substack{\text{Fuerzas de presión}\\ \text{debido a las fuerzas}\\ \text{de superficie o contacto}}} \quad + \quad \underbrace{\vec{g}}_{\substack{\text{Fuerzas de gravedad}\\ \text{debido a fuerzas}\\ \text{másicas}}} \quad = \quad \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas de inercia}\\ \text{debido a la}\\ \text{aceleración}}}
$$

Ecuación de Navier-Stokes: Solo para incompresibles

$$
-\vec{\nabla}\cdot P + \rho\vec{g} + \underbrace{\mu\cdot\nabla^2\vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas viscosas}\\ \text{debido a la}\\ \text{fricción}}} = \rho\vec{a} = \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x &= \rho a_x \quad g_y = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y &= \rho a_y \quad g_y = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z &= \rho a_z
\end{aligned}
$$

3.4. Ecuación de Bernoulli

$$
\begin{array}{rl}
\text{Presión} & \vec{\nabla}\cdot P \ \text{ fuerzas superficie} \\
\text{Fuerza} & \rho\vec{g} \ \text{ fuerzas cuerpo} \\
\text{Aceleración} & \rho\dfrac{D\vec{v}}{Dt} \ \text{ fuerzas inercia} \\
\text{Viscosidad} & \mu\nabla^2\vec{v} \ \text{ fuerzas fricción}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_s &= f(s,t) \\
&= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}\frac{d\vec{v}}{ds}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dv} &= v \\
\frac{1}{2}dv^2 &= vdv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_{Ts} &= dm\ \vec{a}_s \\
d\vec{F}_s + d\vec{F}_B &= dm\ \vec{a}_s \\
PdA - (P+dp)dA - dm\ g\sin\theta &= dm\ \frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dpdA - \rho dsdAg\sin\theta &= \rho dsdA\frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dp - \rho dsg\sin\theta &= \rho ds(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}\frac{d\vec{v}}{ds}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\
-\frac{dp}{\rho} - dzg &= \vec{v}d\vec{v} \\
\int(\frac{dp}{\rho} + gdz + \frac{1}{2}d(\vec{v})^2) &= 0 \\
\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}(\vec{v})^2 + gz &= \text{constante} \\
\underbrace{\frac{P_1}{\rho}}_{\substack{\text{energía o}\\ \text{trabajo}\\ \text{de flujo}}} + \frac{1}{2}(\vec{v}_1)^2 + gz_1 &= \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}(\vec{v}_2) + gz_2
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}(\vec{v})^2 + gz = e_{mec}}_{\substack{\text{energía mecánica}\\ \text{especifica}}}$$

3.4.1. Por cargas o longitud

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g}(\vec{v})^2 + z = constante = \text{carga total}$$

$$\underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{\substack{\text{Carga}\\ \text{presión}\\ \text{estática}}} + \underbrace{\frac{1}{2g}(\vec{v}_1)^2}_{\substack{\text{Carga}\\ \text{dinámica}}} + \underbrace{z_1}_{\substack{\text{Carga}\\ \text{elevación}\\ \text{o altura}}} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(\vec{v}_2)^2 + z_2$$

3.4.2. Por presión

$$P + \frac{\rho}{2}(\vec{v})^2 + \rho g z = constante = \text{Presión total}$$

$$\underbrace{P_1}_{\substack{\text{Presión}\\ \text{relativa}\\ \text{o estática}}} + \underbrace{\frac{\rho}{2}(\vec{v}_1)^2}_{\substack{\text{Presión}\\ \text{dinámica}}} + \underbrace{\rho g z_1}_{\substack{\text{Presión}\\ \text{hidrostática}}} = P_2 + \frac{\rho}{2}(\vec{v}_2)^2 + \rho g z_2$$

Ejemplo

número	cinética	potencial	presión
1	muy pequeña	cero	grande
2	grande	pequeña	cero
3	cero	grande	cero

3.5. Ecuación de Bernoulli: termodinámica

e.c: energía cinética
e.p: energía potencial

$$\delta Q = \Delta U + \delta w$$
$$\delta Q = Q_{ent} - Q_{sal}$$
$$\delta W = w_{ent} - W_{ent}$$

$$\delta Q + \delta W = m(\Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p)$$
$$\delta q + \delta w = \Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p$$

$$\underbrace{\Delta P_v + \Delta e.c + \Delta cp = 0}_{\text{Ecuación de Bernoulli}}$$

3.6. Caudal

$$\dot{m} = \frac{m}{\Delta t} \quad \left[{}^{kg}/_{s}, {}^{lbm}/_{s}, {}^{slug}/_{s},\right]$$
$$\dot{\forall} = \frac{\forall}{\Delta} \quad \left[{}^{m^3}/_{s}, {}^{lt}/_{s}, {}^{pie^3}/_{s}, gpm\right]$$

$$
\begin{aligned}
\dot{m} &= \int_A \rho \vec{v}_n dA \\
\dot{\forall} &= \int_A \vec{v}_n dA \\
\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{velocidad}\\ \text{media}\\ \text{o promedio}}} &= \frac{1}{A}\int_A \vec{u}_n dA
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= 2r \\
r &= \frac{D}{2} \\
A &= \pi r^2 \\
&= \pi \frac{D^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\forall}_A &= \dot{\forall}_B \\
\vec{v}_A A_A &= \vec{v}_B A_B \\
\vec{v}_B &= \vec{V}_A \frac{A_A}{A_B} \\
&= \vec{v}_A \Big(\frac{D_A}{D_B}\Big)^2
\end{aligned}
$$

3.7. Ecuación de Torricelli

Velocidad terminal o máxima de caída libre

$$\vec{v} = \sqrt{2gz}$$

4. Ecuaciones básicas de los fluidos en forma integral

4.1. Transformación de un sistema a volumen de control

- Volumen de control y el sistema ocupan las regiones 1 y 2 en el tiempo t
- Sistema en el instante t ocupa los volúmenes 1 y 2
- Sistema en el instante $t+\Delta t$ ocupa los volúmenes 2 y 3

$$N_{sist} = \underbrace{\int_m \eta dm}_{\substack{\text{masa} \\ \text{(sistema)}}} = \underbrace{\int_\forall \eta\rho d\forall}_{\substack{\text{volumen} \\ \text{(sistema)}}}$$

Donde

$$\begin{aligned} N &: \text{ Propiedad extensiva del sistema} \\ \eta &: \text{ Propiedad intensiva del sistema} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dN}{dt}\right|_{\text{sist}} &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_{sist}(t+\Delta t) - N_{sist}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_2(t+\Delta t) + N_3(t+\Delta t) - N_2(t) - N_1(t) + N_1(t+\Delta t) - N_1(t+\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{(N_2+N_1)(t+\Delta t) - (N_2+N_1)}{\Delta} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) - N_1(t+\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_{\forall_c}(t+\Delta t) - N_{\forall_c(t)}}{\Delta} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) - N_1(t+\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \frac{dN_{\forall_c}}{dt} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{N_3(t+\Delta t) - N_1(t+\Delta t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\forall_1 &= -\hat{n} dA \cdot \vec{v}_1 \cdot \Delta t \\
d\forall_3 &= \hat{n} dA \cdot \vec{v}_3 \cdot \Delta t \\
N_3(t+\Delta t) &= \int_{A_3} \eta\hat{n}\rho\vec{v}\Delta t dA \\
N_1(t+\Delta t) &= -\int_{A_1} \eta\hat{n}\rho\vec{v}\Delta t dA
\end{aligned}$$

4.2. Teorema del transporte de Reynolds

Lagrange $\rightarrow$ Euler

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dN}{dt}\right|_{\text{sist}} &= \frac{d}{dt}\int_{\forall_c}\eta\rho d\forall + \int_{A_3}\eta\rho\vec{v}_3 dA_3 - \int_{A_1}\eta\rho\vec{v}_1 dA_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_c}\eta\rho d\forall + \int_{sc}\eta\rho\vec{v}dA \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int\eta\rho\vec{v}dA}_{\substack{\text{Como cambia dentro}\\ \text{del volumen de}\\ \text{control}}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int\int\eta\rho\vec{v}dA}_{\substack{\text{Flujo de propiedad extensiva neta}\\ \text{a través de la superficie de control}\\ \text{control}}}
\end{aligned}
$$

4.3. Propiedades extensivas e intensivas

Extensiva (N)	Intensiva (η)
m: masa	1: ecuación de continuidad
E: energía	e: energía especifica
$\vec{P}$: cantidad de momento lineal	$\vec{v}$: velocidad
$\vec{H}$: cantidad de momento angular	$\vec{v}\times\vec{r}$: velocidad angular
S: entropía total	s: entropía especifica

4.4. Masa

$$
\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\text{sist}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall_c}\rho d\forall + \underbrace{\int_{sc_{ent}}^{sc_{sal}}}_{\substack{\text{flujo de}\\ \text{masa neto}}}\rho\vec{v}dA
$$

$$
\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\text{sist}} = 0
$$

$$
\frac{d}{dt}\int_{\forall_c}\rho d\forall = \int_{sc_{ent}}(\rho\vec{v}dA)_{ent} - \int_{sc_{sal}}(\rho\vec{v}dA)_{sal}
$$

4.5. Energía

Función de trayectoria no son condición de estado

$$
\begin{aligned}
\dot{Q}_{neto} &= \dot{Q}_{ent} - \dot{Q}_{sal} \\
\dot{W}_{neto} &= \dot{W}_{sal} - \dot{W}_{sal}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dE}{dt}\right|_{sist} &= \dot{Q} - \dot{W} \\
\left.\frac{dE}{dt}\right|_{sist} &= \dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto}
\end{aligned}
$$

$$\frac{dE}{dt}\Big|_{sist} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} e\rho d\forall + \int_{sc} e\rho\vec{v}dA$$

$$\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} = \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{\forall_c} e\rho d\forall}_{\substack{\text{Cambio de}\\ \text{energía total}}} + \underbrace{\int_{sc} e\rho\vec{v}dA}_{\substack{\text{Flujo de}\\ \text{energía}}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \rho d\forall = \int_{sc_{ent}} \rho\vec{v}dA - \int_{sc_{sal}} \rho\vec{v}dA$$

$$\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} e\rho d\forall + \int_{sc_{salida}} (e\rho\vec{v}dA)_{sal} - \int_{sc_{entrada}} (e\rho\vec{v}dA)_{ent}$$

$$e_{s\ cerrado} = u + \frac{1}{2}v^2 + gz$$
$$e_{s\ abierto} = P_v + u + \frac{1}{2}\vec{v} + gz$$

4.6. Momento lineal

$$\frac{dN}{dt}\Big|_{sist} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \eta\rho d\forall + \int_{sc} \eta\rho\vec{v}dA, \quad N = \vec{P} \quad \eta = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{sist} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{v}\rho d\forall + \int_{sc} \vec{v}\rho\vec{v}dA$$

$$\underbrace{\sum F_s}_{\text{superficie}} + \underbrace{\sum F_B}_{\text{cuerpo}} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{v}\cdot\rho d\forall + \int_{sc} \vec{v}\cdot\rho\vec{v}dA$$

$$\sum F_{sx} + \sum F_{Bx} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{u}_x\cdot\rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_x\cdot\rho\vec{v}dA$$

$$\sum F_{sy} + \sum F_{By} = \frac{d}{dt}\int_{\forall_c} \vec{u}_y\cdot\rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_y\cdot\rho\vec{v}dA$$

4.7. Momento angular