Mecánica de fluidos

BMJIvan

16 de septiembre de 2021

1. Conceptos fundamentales

$$\text{Aplicaciones}\begin{cases}\text{Transporte de fluidos}\\ \text{Conversión de la energía}\\ \text{Acondicionamiento de ambiente}\\ \text{Turbomáquinaria}\\ \text{Transporte (vehicular)}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{Áreas de}\\ \text{mecánica de fluidos}\end{matrix}\begin{cases}\text{Aerodinámica}\\ \text{Hidráulica}\\ \text{Hidrología}\\ \text{Metrología}\end{cases}\begin{cases}\text{Hidráulica de potencia}\\ \text{Redes de tubería}\\ \text{Neumática}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\text{Técnicas o}\\ \text{métodos o analíticos}\end{matrix}\begin{cases}\text{Analíticos}\\ \text{Experimentales}\\ \text{Computacionales}\end{cases}\begin{cases}\text{Diferenciales}\\ \text{Diferenciales}\end{cases}$$

Presión, esfuerzo normal: Genera deformaciones lineales

$$P = \lim \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}$$

Esfuerzo cortante: Genera deformaciones angulares

$$\tau = \lim \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

1.1. Propiedades de los fluidos

Densidad

$$\rho = \frac{m}{v} \quad \left[{}^{kg}/_{m^3} . {}^{lbm}/_{pie^3}, {}^{slug}/_{pie^3}\right]$$

Peso especifico

$$\gamma = \frac{W_g}{v} = \frac{mg}{v} = \rho g \quad \left[{}^{N}/_{m^3}, {}^{lb}/_{pie^3}\right]$$

Densidad relativa

$$sg = GE = \rho_r = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{H_2O \ \ T=4^oC}}$$

Viscosidad dinámica o absoluta

$$\mu = \frac{\tau}{{}^{d\vec{u}}/dy} \quad \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Gradiente de velocidad}}$$

$$\mu = \frac{\tau y}{\vec{u}} \quad \left[{}^{N\cdot s}/m^2, {}^{lb\cdot s}/pie^2\right]$$

Viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[{}^{m^2}/s, {}^{pie^2}/s\right]$$

1.2. Gases ideales

Proceso adiabático: Aquel proceso en el que no se gana ni pierde calor, es decir, cuenta con un aislamiento térmico.

En proceso adiabático reversible no hay transferencia de calor y por lo tanto el proceso es isoentrópico.

Un proceso adiabático irreversible no es isoentropico.

$$\forall: \text{ Volumen}$$
$$\nu: \text{ volumen especifico } \frac{\forall}{m} = \frac{1}{\rho}$$

1. Ley de Boyle y Mariotte

$$\text{Si } T = constante$$
$$P \; \alpha \; \frac{1}{\forall}$$
$$P\forall = C$$
$$P_1\forall_1 = P_2\forall_2$$

2. Ley de Charles

$$\text{Si } P = constante$$
$$\forall \; \alpha \; T$$
$$\frac{\forall}{T} = C$$
$$\frac{\forall_1}{T_1} = \frac{\forall_2}{T_2}$$

3. Ley de Gay - Lussac

$$\text{Si } \forall = constante$$
$$P \; \alpha \; T$$
$$\frac{P}{T} = C$$
$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

4.

$$\frac{P\forall}{T} = C$$
$$\frac{P_1\forall_1}{T_1} = \frac{P_2\forall_2}{T_2}$$
$$\frac{P\nu}{T} = nR_u$$
$$R_u = \frac{P\forall}{Tn}$$

Donde

$$P = 1 \text{ atmósfera}$$
$$T = 0^oC = 273{,}15K$$
$$n = 1 \text{ kmol}$$
$$\forall = 22{,}413m^3$$
$$R_u = 8{,}314^{kJ}/_{kmol\cdot K}$$
$$n = \frac{m}{M} \; \frac{\text{masa}}{\text{masa molar}}$$
$$R = \frac{R_u}{M} \text{ constante del gas}$$

Entonces

$$R_u = \frac{P\forall}{T^m/M} = \frac{MP\forall}{Tm}$$
$$m\frac{R_u}{M} = \frac{P\forall}{T}$$
$$\frac{P\forall}{T} = mR$$
$$P\forall = TmR$$
$$P\frac{\forall}{m} = TR$$
$$P\nu = TR$$
$$P = \frac{1}{\nu}TR = \rho TR$$
$$\frac{P}{\rho} = TR$$

1.3. Velocidad sonica o acústica y viscosidad

A partir de 1

$$dp \;\alpha\; -\frac{d\forall}{\forall} dp = -E_v\frac{d\forall}{\forall}$$

Donde E_v es el modulo de compresibilidad o modulo volumétrico.
De la definición de masa

$$\begin{aligned} m &= \rho\forall \\ dm &= \rho dv + d\rho\forall, \quad dm = 0 \\ -\rho d\forall &= d\rho\forall \\ -\frac{d\forall}{\forall} &= \frac{d\rho}{\rho} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$dp = E_v \frac{d\rho}{\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \text{ Velocidad del sonido a través de líquidos}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_p}{C_\nu} = 1{,}4 \\ R &= C_p - C_\nu \quad \left[{}^{kJ}/kg \cdot K\right] \\ R &= {,}287^{kJ}/kg \cdot K \\ C &= \sqrt{\frac{k_p}{\rho}} = \sqrt{KTR} \\ E_v &= P \text{ Proceso isotérmico} \\ E_v &= KP \text{ Proceso isoentropico} \end{aligned}$$

Líquidos incompresibles $\rho = constante$
Líquidos compresibles $\rho \neq constante$

$$\begin{aligned} \text{Mach } &= \frac{\vec{v}}{C} \ \frac{\text{velocidad fluido}}{\text{velocidad de sonido}} \\ \text{Mach } &\leq {,}3 \text{ flujo de gas incompresible} \\ \text{Mach } &\geq {,}3 \text{ flujo compresible} \end{aligned}$$

$$\frac{\overbrace{\mu}^{\text{Dinámica}}}{\rho} = \overbrace{v}^{\text{Cinemática}}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \text{ constante o 0 ideal o no viscoso} \\ \mu &\neq \text{ constante o 0 real o viscoso} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{Fluido de acuerdo} \\ \text{al comportamiento} \\ \text{de la } \mu \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Newtoniano} \left\{ \ \tau \ \alpha \ \frac{d\theta \text{ deformación}}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \text{ley de viscosidad} \\ \text{de Newton} \end{array} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dy} \right. \\ \text{No Newtoniano} \left\{ \ \tau \text{ no } \ \alpha \ \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{ Series de potencias} \right. \\ \text{Visco-elástico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Comportamiento Newtoniano} \\ \text{y no Newtoniano} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Número de Raynolds

$$NR_E = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \overbrace{\frac{\rho\vec{v}D}{\mu}}^{\text{Dinámica}} = \overbrace{\frac{\vec{v}D}{\forall}}^{\text{Cinemática}}$$

$$\text{Flujo viscoso} \begin{cases} \text{flujo laminar} \{ \; NR_E \leq 2000 \;\; (2300) \\ \text{flujo transición} \Big\{ \; 2000 \leq NR_E \leq 4000 \;\; \begin{array}{l}\text{puede ser} \\ \text{laminar o turbulento}\end{array} \\ \text{flujo turbulento} \{ \; NR_E \geq 4000 \end{cases}$$

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel} \rightarrow P_{\text{manométrica}}$$

$$\begin{aligned} &Mach > 1 \;\; \text{supersónico} \\ &Mach > 5 \;\; \text{hipersónico} \\ &Mach < 1 \;\; \text{sursónico} \\ &Mach = 1 \;\; \text{sónico} \\ &Mach \leq 1 \;\; \text{transónico} \end{aligned}$$

$$\dot{\forall} = \frac{\forall}{t} = \vec{v}A \rightarrow \quad \text{caudal}$$

$$\begin{aligned} \rho_{gasolina} &= 680 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 1{,}3 \times 10^9 \; {}^{N}/_{m^2} \\ \rho_{Hg} &= 13600 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 2{,}85 \times 10^{10} \; {}^{N}/_{m^2} \\ \rho_{H_2O \; mar} &= 1030 \; {}^{kg}/_{m^3} \;\; E_v = 2{,}34 \times 10^9 \; {}^{N}/_{m^2} \end{aligned}$$

1.4. Esfuerzo cortante

$$\begin{aligned} \tau \; \alpha \; \frac{du}{dt} &= \frac{\vec{v}}{dy} \\ \tau &= \mu \frac{d\vec{v}}{dy} \\ \tau \int_0^h dy &= \mu \int_0^{\vec{v}} \\ \tau h &= \mu \vec{v} \\ \tau &= \mu \frac{\vec{v}}{h} \\ \tau &= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} \\ \tau &= \frac{F_t}{A} \end{aligned}$$

Donde F_v es la fuerza viscosa o tangente

$$\mu\frac{\vec{v}}{h} = \frac{F_v}{A}$$
$$F_v = \frac{\mu\vec{v}A}{h}$$

caso 1:

$$A = \pi dL$$
$$h = \frac{D-d}{2}$$
$$F_v = \frac{2\pi dL\vec{v}\mu}{D-d}$$

caso 2:

$$F_v = W\sin\theta$$
$$h = \frac{\mu\vec{v}A}{W\sin\theta}$$

*tablas líquidos y gases: mecánica de fluidos Pottev

1.5. Tensión o esfuerzo superficial

$$\sigma_s = \frac{F_{\text{tensión}}}{l} \quad \left[{}^{W}/_{m}, {}^{lb}/_{pie}\right]$$
$$\sum F_y = 0$$
$$F_{rsy} - Wg = 0$$
$$\sigma_s\pi D\cos\theta - \rho\forall g = 0$$
$$\sigma_s\pi D\cos\theta - \rho g\frac{\pi D^2}{4}h = 0$$
$$\sigma_s\cos\theta = \frac{\rho g D h}{4}$$
$$h = \frac{4\sigma_s\cos\theta}{\rho g D}$$

2. Estática de fluidos

2.1. Derivada y series de Taylor

La pendiente de una recta con base de una función

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente en el punto x, o derivada ocurre cuando

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Los coeficientes de $(a+b)^n$ se pueden escribir como

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \cdots$$

El cambio de la altura de una función se puede escribir como

$$\Delta f(x) = f(x+r) - f(x)$$

El valor de la altura final es

$$f(x+r) = f(x) + \Delta f(x)$$

Se aplica lo misma operación una segunda vez

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\ &= \Delta(f(x+r) - f(x)) \\ &= f(x+r+r) - f(x+r) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x+r) \\ &= f(x+2r) - 2\Delta f(x) - f(x) \end{aligned}$$

El valor de la altura final es

$$f(x+2r) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$$

Se vuelve a repetir

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) \\ &= f(x+3r) - f(x+2r) - 2\Delta^2 f(x) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x+2r) \\ &= f(x+3r) - f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta^2 f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta f(x) \\ &= f(x+3r) - f(x) - 3\Delta f(x) - 3\Delta^2 f(x) \end{aligned}$$

El valor de la altura es

$$f(x+3r) = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n f(x)$$

Haciendo $h = nr$, y multiplicando por 1

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \cdots + \frac{(n(n-1)\cdots 1)r^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

Haciendo $n \to \infty$ hace que $r \to 0$

$$f(x+rn) = f(x+h) = f(x) + hf(x)^{'} + h^2\frac{f(x)^{''}}{2!} + \cdots$$

2.2. Principio de Pascal

presión

$$P = \frac{F}{A}\left[1Pa = 1^N/_{m^2}, {}^{lb}/_{pie^2}, {}^{lb}/_{pulg^2}\right]$$

Presión atmosférica

$$Pa\ \left[1\ atm = 760\ mmHg = 16{,}7^{lb}/_{pulg^2} = 101{,}325kPa\right]$$

Presión relativa

$$P_{rel}$$

Presión absoluta

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel}$$

$$\sum F_y = ma_y$$
$$P_y\Delta z\Delta x - P\Delta s\Delta x\sin\theta = \rho\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2}a_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$
$$P_z\Delta y\Delta x - P\Delta s\Delta x\cos\theta - \rho g\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2} = \rho\frac{\Delta z\Delta y\Delta x}{2}a_z$$

Pero de la figura se puede ver que

$$\Delta z = \Delta s\sin\theta$$
$$\Delta y = \Delta s\cos\theta$$

entonces

$$P_y - P = \rho \frac{\Delta y}{2} a_y$$
$$P_z - P = \frac{\rho}{2}(g + a_z)\Delta z$$

Si $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, y $\frac{d\vec{v}}{dy} = 0$

$$p_y - P = 0$$
$$P_z - P = 0$$
$$P = P_z = P_y$$

Transmisor de fuerza. Si la presión de un punto es igual a otro

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Transmisor de presión

$$P_1 A_1 = P_2 A_2$$

si $\Delta z = 1$

$$P = P_x = P_y = P_z$$

2.3. Variación de la presión de un fluido en reposo

$$\begin{aligned} W &= dmg \\ &= \rho g d\forall \\ &= \rho g dxdydz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= F(X) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \cdots \\ f(x + \delta x) &\approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x \\ f(x - \delta x) &\approx f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (CD)\ P(y + \frac{dy}{2}) &= P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2} \\ (CI)\ P(y - \frac{dy}{2}) &= P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
dFsy &= dfy(+) - dfy(-) \\
&= [(P + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2}) - (P - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{2})]dxdz \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz \ \ (1) \\
Fsz &= -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz \ \ (2) \\
Fsx &= -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz \ \ (3) \\
\underbrace{dF_B}_{\text{cuerpo o másicas}} &= \rho g dxdydz \ \ (4)
\end{aligned}
$$

Fuerza másica: fuerza que actúa sobre la masa de un fluido.

$$
\begin{aligned}
d\vec{F_T} &= m\vec{a} \\
d\vec{F_s} + d\vec{F_B} &= m\vec{a} \\
d\vec{F_{sx}} + d\vec{F_{sy}} + d\vec{F_{sy}} + \rho g dxdydz &= m\vec{a} \\
(-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g)dxdydz &= \rho dxdydz\vec{a}
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}}_{\text{Ecuación de cantidad de movimiento}}
$$

$$
\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho\vec{g} = 0}_{\text{Ecuación vectorial de hidrostática}}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = 0 \\
-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = 0
\end{aligned}
$$

Si $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho g \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \\
\partial P &= -\rho g \partial z \\
\int_P^0 dP &= -\rho g \int_{-h}^0 dz \\
-P &= -\rho g(+h) \\
P &= \rho g h
\end{aligned}
$$

2.4. Fuerzas sobre superficies planas y curvas

2.4.1. Fuerza resultante de una distribución de fuerzas hidrostáticas

considerando

$$
\begin{aligned}
dF_R &= PdA \\
\frac{dP}{dh} &= \rho g \\
P &= P_o + \rho g h \\
h &= y \sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dF_R &= (P_o + \rho g h)dA \quad P_o = 0 \\
&= \rho g h dA \\
\int_0^{F_R} &= \rho g \sin\theta \int y dA \\
F_R &= \rho g \sin\theta y_{cg} A
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\int_A y_c dA = y_{cg} A}_{\text{Primer momento de área}}
$$

2.4.2. Localización de la fuerza resultante

$$
\begin{aligned}
dM_x &= dF_R \cdot y \\
&= \rho g y \sin\theta y dA \\
&= \rho g y^2 \sin\theta dA \\
M_{Rx} &= \rho g \sin\theta I_{xx} \\
F_R y_{cp} &= \rho g \sin\theta I_{xx} \\
y_{cp} &= \frac{\rho g \sin\theta I_{xx}}{\rho g \sin\theta y_{cg} A} = \frac{I_{cg} + y_{cg}^2 A}{y_{cg} A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg}
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\int y^2 dA = I_{xx} = I_{cg} + y_{cg}^2 A}_{\text{Segundo momento de área}}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} F_H &= F_{x2} - F_{x1} = 0 \\ F_{x2} &= F_{x1} \\ F_V &= 2F_y + 2W_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x &= \rho g(h_1 + \frac{r}{2})(rb) \\ F_y &= \rho g h_1 (rb) \\ W &= mg \\ &= \rho \forall g = \rho g(R^2 b - \frac{\pi r^2 b}{4}) \end{aligned}$$

2.5. Principio de Arquímedes

$$\begin{aligned} F_B &= F_i - F_s \\ &= \rho g(h+y)A - \rho g h A \\ &= \rho g y A \\ &= \rho g \forall \end{aligned}$$

F_B : Fuerza de flotabilidad o Boyante

$\forall$: Volumen desplazado