Control Sistemas Mecatronicos

BMJIvan

12 de agosto de 2021

1. UNIDAD I

1.1. Solución de ecuaciones en espacio de estado

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con condición inicial

$$x(0) = x_0.$$

$$A : n \times n, \quad x : n \times 1, \quad B : n \times m, \quad u : m \times 1, \quad C : p \times n, \quad y : p \times 1,$$

El problema consiste en determinar $x(t)$ y la respuesta $y(t)$
Aplicando la transformada de Laplace a (1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t)\} + \mathcal{L}\{Bu(t)\} \\
sX(s) - X(0) &= AX(s) + Bu(s) \\
\underbrace{sX(s)}_{n\times 1} - \underbrace{AX(s)}_{n\times 1} &= X(0) + Bu(s) \\
(sI - A)X(s) &= X(0) + Bu(s) \\
X(s) &= (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \\
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\} \\
y(t) &= \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}X(0)}_{\substack{\text{Solución homogenea} \\ \text{Respuesta en estado transitorio} \\ \text{Respuesta natural}}} + \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}}_{\substack{\text{Solución particular} \\ \text{Respuesta en estado estacionario} \\ \text{Respuesta forzada}}}
\end{aligned}$$

1.2. Transformación de similitud

considere el vector $q : n \times 1$ ($q \in R^n$). El conjunto de vectores $q_1, \ldots, q_m$ es linealmente independiente si existen numero reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos cero, tales que

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_1 q_1 \ldots, \alpha_n q_n = 0 \ \ (1)$$

Si la solución unica de (1) es $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_m$ entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes (l.i).

A la expresión $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_n q_n$ se le denomina combinación lineal.

Base: Un conjunto de vctores l.i en R^n se define como una base si se puede expresar como una combinación lineal unica.

En R^n todo conjunto de vectores l.i puede utilizarse como una base.

Sea $X : n \times 1$ todo vector X puede expresarse como

$$X = \alpha_1 q_1 + \ldots \ + \alpha_n q_n \ \ (2)$$

donde q_i son l.i.

De (2) se tiene que

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} \ \ (3)$$

se definen

$$Q = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}, \ \ \tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en (3) se tiene que

$$X = Q\tilde{X}$$

donde X y $\tilde{X}$ son similares.

De (2) $X^\top = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n \ \ S_i : 1 \times n$

$$X^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Una matriz es estable cuando los valores propios son negativos.

Sea la ecuacion lineal

$$Ax = y \ \ (4)$$

donde $A : n \times n$ $B : n \times 1$ $y : n \times 1$ se definen

$$x = Q\tilde{x}, \;\; y = Q\tilde{y}$$

sustituyendo en (4) se tiene que

$$\begin{gathered} AQ\tilde{x} = Q\tilde{y} \\ Q^{-1}AQ\tilde{x} = \tilde{y} \;\; (5) \end{gathered}$$

donde A y $Q^{-1}AQ$ son similares y A esta relacionada con la estabilidad.

ejercicio: Sea $A : n \times n$ una matriz estable, demuestre que la matriz $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ es tambien estable, considere que Q es invertible.

Si

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) = \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \\ det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}\lambda Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}(\lambda I - A)Q) \\ &= det(Q^{-1})det(\lambda I - A)det(Q) \\ &= det(Q^{-1})det(Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(Q^{-1}Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

repetir el ejercicio anterior considerando la siguiente matriz $\tilde{A} = QAQ^{-1}$

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - A) &= det(\lambda I - QAQ^{-1}) \\ &= det(\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q\lambda Q^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q(\lambda I - A)Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(\lambda I - A)det(Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(Q^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(QQ^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

1.3. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{A}^{\text{estabilidad}} x(t) + \underbrace{B}_{\textbf{controlabilidad}} u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} X &: n \times 1 \\ A &: n \times n \\ B &: n \times m \ \ \textit{entradas} \\ u &: m \times 1 \\ C &: p \times n \\ y &: P \times 1 \ \ \textit{salidas} \end{aligned}$$

Controlabilidad: Existencia de una entrada $u(t)$ tal que cada variable de estado se pueda manipular de manera independiente. Es decir, las entradas cambian las variables.

Observabilidad: Consiste en determinar el estado inicial a partit de la salida $y(t)$. Es decir, las condiciones iniciales afectan la salida.

Definición 1. El sistema (1) es controlable si existe $u(t)$ tal que para todo estado inicial $x_0 = x(0)$ y todo estado final $x_f = x(T)$, el sistema puede llevarse de x_0 a x_f en tiempo finito.

1.4. Solución de ecuaciones en espacio de estado 2

Se condidera el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad x(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - Ax(t) &= Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t)) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\
\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= \int_0^t Bu(\tau)d\tau \\
e^{-A\tau}\Big|_a^b &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{-At}x(t) - e^0x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{At}(e^{-At}x(t) - e^0x(0)) &= e^{At}\Big(\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\Big) \\
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + C
\end{aligned}$$

anteriormente se obtuvo

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

A continuación se desarrollará los dos terminos un poco mas.

Se considera la matriz exponencial de la siguiente forma

$$f(t) = e^{At} \quad f(0) = I$$

entonces, partiendo de la derivada

$$
\begin{aligned}
f(\dot{t}) &= Ae^{At} = Af(t) \\
\mathcal{L}\{f(\dot{t})\} &= \mathcal{L}\{Af(t)\} \\
sF(s) - AF(s) &= AF(s) \\
sF(s) - AF(s) &= F(0) \\
(sI - A)F(s) &= I \\
(sI - A)^{-1}(sI - A)F(s) &= (sI - A)^{-1}I \\
F(s) &= (sI - A)^{-1} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, considerando la definicion de la convolución

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Según el teorema de la covolución. si $\mathcal{L}\{f(t)\}y\mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

considerando las ecuaciones

$$f(t) = e^{At}, \quad g(t) = Bu(t)$$

Se tiene que

$$\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau = f * g$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{f * g\Big\} \\
&= F(s)G(s) \\
&= (SI - A)^{-1}Bu(s)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto aplucando la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\Big\{(SI - A)^{-1}Bu(s)\Big\}$$

1.5. Criterios de estabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es controlable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Controlabilidad de Kalman La matriz de controlabilidad

$$C = \left.\begin{bmatrix} \underbrace{B}_{n\times m} & \underbrace{AB}_{n\times m} & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right\} n \times nm$$

para $m = 1$ (una entrada), con $det(C) \neq 0$ es de rango completo, es decir, $rango(C) = n$.

2) Controlabilidad de Hautus La matriz de controlabilidad

$$H = \left.\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}\right\} n \times (n+m)$$

es de rango completa, $rango(HC) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de controlabilidad

$$G_c = \int_0^t e^{At\tau}BB^Te^{A^T\tau}d\tau$$

es invertible, es decir, $det(G_c) \neq 0)$

4) Los valores propios de la matriz $A - Bk$ pueden asignarse arbitrariamente.

1.6. Criterios de observabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es observable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Observabilidad de Kalman La matriz de observabilidad

$$C = \left.\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} pn \times n$$

es de rango completo, $rango(C) = n$.

2)Observabilidad de Hautus La matriz de observabilidad

$$H_o = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

es de rango completa, $rango(H_o) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de observabilidad

$$G_o = \int_0^t e^{At\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

es invertible, $det(G_o) \neq 0)$

4) Los valores propios de la matriz $A - LC$ pueden asignarse arbitrariamente.

1.7. Forma Canonica Controlable

Ejercicio: demostrar que la propiedad de controlabilidad es invariante para cualquier transformación de similtud

Se considera la transformación de similitud

$$(1) X = P^{-1}z$$

donde P es invertible Se toma el sistema

$$(2)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para conseguir $P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + Bu$, y asi, obtener el sistema

$$(3)\begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{PAP^{-1}}^{\tilde{A}} + \overbrace{PBu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = CP^{-1} \end{cases}$$

donde A y PAP^{-1} son invariantes, se tiene que $\lambda(A) = \lambda(PAP^{-1})$ debido a que P es invertible, entonces $rango(\tilde{C}) = rango(C)$.

Se obtiene la matriz de controlabilidad para los sitemas (2) y (3) respectivamente.

$$\begin{aligned} &(4)\ \ C = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] \\ &(5)\ \ \tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \ldots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \end{aligned}$$

Considerando que $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$, se sustituye las matrices similares de (3) en (5)

$$\begin{aligned} &\tilde{C} = [PB, PAP^{-1}PB, PA^2P^{-1}PB, \ldots, PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ &\tilde{C} = P[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] \\ &\tilde{C} = PC \end{aligned}$$

Lo que se busca es la matriz P, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= PC \\ \tilde{C}\tilde{C}^{-1} &= PC\tilde{C}^{-1} \\ I &= PC\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1}I &= C\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1} &= C\tilde{C}^{-1} \quad (6) \end{aligned}$$

Ahora se tomará el sistema de entradas y salidas

$$\begin{aligned} y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \ldots + a_ny(t) &= b_1u^{n-1}(t) + \ldots + b_nu(t) \\ \mathcal{L}\{y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \ldots + a_ny(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1u^{n-1}(t) + \ldots + b_nu(t)\} \\ y(s)s^n + a_1y(s)s^{n-1} + \ldots + a_ny(s) &= b_1u(s)s^{n-1} + \ldots + b_nu(s) \\ y(s)(s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n) &= u(s)(b_1s^{n-1} + \ldots + b_n) \end{aligned}$$

Se escribe la función de transferencia como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Si consideramos una función de transferencia racional (sin retardo) y estrictamente propia (orden del denominador mayor que el numerador)

$$g(s) = N(s)D(s)^{-1}$$

donde N(s) y D(s) son polinomios. Por lo tanto, la función de transferencia se puede escribir como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = N(s)D(s)^{-1}$$

La salida del sistema se puede escribir como

$$y(s) = N(s)D(s)^{-1}u(s)$$

donde $v(s) = D(s)^{-1}u(s)$. Entonces la entrada y la salida se pueden escribir como

$$\begin{aligned} u(s) &= D(s)v(s) \\ y(s) &= N(s)v(s) \end{aligned}$$

Se definen las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_{n-1}(s) \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{n-1} \\ S^{n-2} \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{bmatrix} v(s)$$

entonces las variables de estado se pueden escribir como

$$\begin{aligned} X_n &= v(s) \\ X_{n-1} &= sv(s) = sX_n(s) \\ X_{n-2}(s) = S^2 v(s) &= s(sv(s)) = sX_{n-1}(s) \\ &\vdots \\ X_2(s) &= sX_3(s) \\ X_1(s) &= sX_2(s) \end{aligned}$$

Si se sustituyen las variables de estado en la entrada se obtiene lo siguiente

$$u(s) = sX_1(s) + a_1 X_1(s) + \ldots + a_n X_n(s)$$

Se despeja $sX_1(s)$

$$sX_1(s) = -a_1 X_1(s) - \ldots - a_n X_n + u(s)$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} SX_1(s) \\ SX_2(s) \\ \vdots \\ SX_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)$$

Según la definición de la matriz similar de controlabilidad

$$\tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \cdots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Se usará una matriz de 3*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de controlabilidad

$$C = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1.8. Forma Canonica Observable

Ejercicio: Demostrar que la propiedad de observabilidad es invariante para cualquier transformación de similitud.

Se considera la transformación de similitud

$$(1)\;\; x = Qz$$

donde Q es invertible. Se toma el sistema

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para obtener $Q\dot{z} = AQz + Bu$ y asu obtener el sistema

$$(3) \begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{Q^{-1}AQz}^{\tilde{A}} + \overbrace{Q^{-1}Bu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = \underbrace{CQz}_{\tilde{C}} \end{cases}$$

Se obtiene la matriz de observabilidad para los sistemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4)\;\; O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

$$(5)\;\; \tilde{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \ldots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Debido a que $\tilde{A}^n = Q^{-1}\tilde{A}^n Q$

$$\tilde{O} = [CQ, CQQ^{-1}AQ, CQQ^{-1}A^2Q, \ldots, CQQ^{-1}A^{n-1}Q]^T$$
$$\tilde{O} = [CQ, CAQ, CA^2Q, \ldots, CA^{n-1}Q]^T$$
$$\tilde{O} = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T Q$$
$$\tilde{O} = OQ$$

Lo que se busca es la matriz Q, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tilde{O} &= OQ \\ \tilde{O}Q^{-1} &= OQQ^{-1} \\ \tilde{O}Q^{-1} &= OI \\ \tilde{O}^{-1}\tilde{O}Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\ IQ^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\ Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \quad (6)\end{aligned}$$

Debido a que Q es invertible, $rango(\tilde{O}) = rango(O)$
Tomando el sistema de entradas salidas

$$y(s)s^n + a_1 y(s)s^{n-1} + \ldots + a_n y(s) = b_1 u(s)s^{n-1} + \ldots + b_n u(s) \quad (7)$$

Se reacomoda de la siguiente forma

$$s^n y(s) + s^{n-1}(a_1 y(s) - b_1 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) = b_n u(s) - a_n y(s)$$

Se considera la variable de estado $X_n(s) = y(s)$, es decir

$$y(s) = [0, 0, 0, \ldots, 1]X(s)$$

Entonces se comienza a definir las variables de estado a partir de (7), de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
s^n y(s) + s^{n-1}(a_1 y(s) - b_1 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-1} s y(s) + s^{n-1}(a_1 y(s) - b_1 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-1}(s y(s) + a_1 y(s) - b_1 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-1} \overbrace{(s y(s) + a_1 y(s) - b_1 u(s))}^{X_{n-1}(s)} + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-1} X_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2 y(s) - b_2 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-2} s X_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2 y(s) - b_2 u(s)) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-2}(s X_{n-1}(s) + (a_2 y(s) - b_2 u(s))) + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s^{n-2} \overbrace{(s X_{n-1} + a_2 y(s) - b_2 u(s))}^{X_{n-2}(s)} + \ldots + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
s^2 X_2(s) + s(a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s)) &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s \overbrace{(s X_2(s) + a_{n-1} y(s) - b_{n-1} u(s))}^{X_1(s)} &= b_n u(s) - a_n y(s) \\
s X_1(s) &= b_n u(s) - a_n y(s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las variables de estado se definen como

$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= sX_2(s) + a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
X_{n-2}(s) &= sX_{n-1}(s) + a_2 y(s) - b_2 u(s) \\
X_{n-1}(s) &= sX_n(s) + a_1 y(s) - b_1 u(s) \\
X_n(s) &= y(s)
\end{aligned}
$$

Del proceso para obtener las variables de estado se puede ver que

$$
\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n y(s) + b_n u(s) \\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= -a_n y(s) + b_n u(s) \\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= sX_1(s) \\
sX_2(s) + (a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= X_1(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s)
\end{aligned}
$$

entonces la derivada de las variables de estado se pueden escribir de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n y(s) + b_n u(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2 y(s) + b_2 u(s) \\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1 y(s) + b_1 u(s)
\end{aligned}
$$

Recordando que $X_n(s) = y(s)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n X_n(s) + b_n u(s) \\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}X_n(s) + b_{n-1}u(s) \\
&\vdots \\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2 X_n(s) + b_2 u(s) \\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1 X_n(s) + b_1 u(s)
\end{aligned}
$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$
\begin{bmatrix} SX_1(s) \\ SX_2(s) \\ \vdots \\ SX_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)
$$

$$
y(s) = \underbrace{[0, 0, \ldots, 1]}_{\tilde{C}} X(s)
$$

Según la definición de la matriz similar de observabilidad

$$\tilde{O} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \cdots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Se usará una matriz de 3*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{O}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de observabilidad

$$O = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2. UNIDAD II

2.1. Diseño de sistemas de control en espacios de estado

De manera general un sistema de control se define

donde u : señal de control, y : señal disponible. Se asume que la referencia y la salida son conocidas.

En funcion de r se definen los siguientes problemas de control:

1. Regulación: se considera que r es constante
2. Seguimiento de trayectoria: En este caso y es una función variante con el tiempo
3. Seguimiento de modelo de referencia

Los sistemas de control se clasifican en dos tipos principales

1. En lazo abierto

   La señal de control es independiente de la salida.

2. En lazo cerrado o retroalimentado

2.2. Ubicación de polos: metodo directo

Considere un sistema SISO

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

El polinomio caracteristico de (1)

$$\begin{aligned} P(s) &= det(sI - A) = 0 \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n \\ &= (s - q_1)(s - q_2)\ldots(s - q_n) \end{aligned}$$

donde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son los polos del sistema en lazo abierto. El problema de ubicación de polos consiste en asignar los polos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ al sistema en lazo cerrado, entonces

$$P_{LC} = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n$$

Se define la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned} (2)\ \ u &= r - kx \ \ donde \ \ k : 1 \times n \\ &= r - [k_1, k_2, \ldots, k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= r - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n) \\ &= r - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(r - kx) \\ &= Ax + Br - Bkx \\ &= (A - Bk)x + Br \ \ \text{(3) sistema en lazo cerrado} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= det(sI - (A - Bk)) = 0 \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

2.3. Ubiación de polos forma canonica controlable

Considere el sistema SISO

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se asume que el sistema (1) es controlable, y el polinomio caracteristico del sistema es

$$\begin{aligned} P(s) &= det(sI - A) \\ &= (s - q_1)(s - q_2)\dots(s - q_n) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \end{aligned}$$

Haciendo $z = Px$ o bien $x = p^{-1}z$ (2) donde

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} p^{-1}\dot{z} &= AP^{-1}z + Bu \\ (3)\quad \dot{z} &= \underbrace{PAP^{-1}}_{\tilde{A}}z + \underbrace{PB}_{\tilde{B}}u \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned} (4)\quad u &= r - kx \\ &= r - kP^{-1}z \\ &= r - \tilde{k}z \end{aligned}$$

Donde $\tilde{k} = kP^{-1}$ (5)
Sustituyendo (4) en (3)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= PAP^{-1}z + PB(r - kP^{-1}z) \\ &= PAP^{-1}z + PBr - PBkP^{-1}z \\ (6)\quad &= P(A - Bk)P^{-1}z + PBr \end{aligned}$$

Ya que $A - Bk$ y $P(A-Bk)P^{-1}$ son similares, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{LC} &= det(sI - (A - Bk)) = det(sI - P(A-Bk)P^{-1}) \\ &= (s-\mu_1)(s-\mu_2)\dots(s-\mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

Donde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los polos que se quieren ubicar, es decir, son conocidos, asi como $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$

Si $\tilde{A}$ se obtiene del polinomio caracteristico del sistema A, entonces se puede escribir el sistema similar en lazo cerrado $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k}$ de la siguiente forma

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} = \begin{bmatrix} -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \cdots & -\tilde{a}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{A}^{'}$$

El problema consiste en despejar las ganancias $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n$

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}^{'} \\ -\tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}^{'} - \tilde{A} \\ \tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A} - \tilde{A}^{'} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 & \tilde{a}_2 - a_2 & \cdots & \tilde{a}_n - a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de ganacias similares se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \vdots \\ \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix}$$

De la ecuación (5) se puede despajar las ganancias en lazo cerrado

$$\tilde{k} = kP^{-1}$$

$$\tilde{k}P = k$$

$$k = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix} [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. Formula de Ackerman

El metodo consiste en calcular la ganacia k para asignar los polos en lazo cerrado $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ a partir del polinomio caracteristico en lazo cerrado

$$P_{LC}(s) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n = 0$$

y en lazo abierto se tiene

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Teorema de Cayley-Hamilton
Toda matriz satisface su polinomio caracteristico, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-1} + \ldots + a_n I = 0 \\ P_{LC}(A - Bk) &= (A - Bk)^n + \tilde{a}_1 (A - Bk)^{n-1} + \tilde{a}_2 (A - Bk)^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n I = 0 \end{aligned}$$

Para $n = 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} (A - Bk)^2 &= A^2 - ABk - Bk(A - Bk) \\ (A - Bk)^3 &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio caracteristico en lazo cerrado se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_{LC}(A - Bk) &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \\ &\quad + \tilde{a}_1 (A^2 - ABk - Bk(A - Bk)) + \tilde{a}_2 (A - Bk) + \tilde{a}_3 I \\ &= A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I - A^2 B(k) - AB(k(A - Bk)) \\ &\quad - B(K(A - Bk)^2) - AB(\tilde{a}_1 k) - B(\tilde{a}_1 k(A - Bk)) - B(\tilde{a}_2 k) \\ &= \underbrace{A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I}_{P_{LC}(A)} - B(k(A - Bk)^2 + \tilde{a}_1 k(A - Bk) - \tilde{a}_2 k) \\ &\quad - AB(k(a - Bk) + \tilde{a}_1 k) - A^2 B(k) \\ &= P_{LC}(A) - \underbrace{\begin{bmatrix} B & BA & A^2 B \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{controlabilidad } C}} \underbrace{\begin{bmatrix} k(A - Bk)^2 & \tilde{a}_1 k(A - Bk) & \tilde{a}_2 k \\ 0 & k(A - Bk) & \tilde{a}_1 k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_{G} \\ &= P_{LC}(A) - CG = 0 \end{aligned}$$

Se despeja la ganancia G

$$\begin{aligned} P_{LC}(A) - CG &= 0 \\ -CG &= P_{LC}(A) \\ CG &= P_{LC}(A) \\ G &= C^{-1} P_{LC}(A) \end{aligned}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones, pero solo se va a tomar el ultimo elemento de la matriz de ganancias, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A) \\
k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A)
\end{aligned}
$$

Se define la formula de Ackerman como

$$
k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A)
$$