Control Sistemas Mecatrónicos

BMJIvan

25 de agosto de 2021

1. UNIDAD I

1.1. Solución de ecuaciones en espacio de estado

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con condición inicial

$$x(0) = x_0.$$

$$A : n \times n,\;\; x : n \times 1,\;\; B : n \times m,\;\; u : m \times 1,\;\; C : p \times n,\;\; y : p \times 1,$$

El problema consiste en determinar $x(t)$ y la respuesta $y(t)$
Aplicando la transformada de Laplace a (1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t)\} + \mathcal{L}\{Bu(t)\} \\
sX(s) - X(0) &= AX(s) + Bu(s) \\
\underbrace{sX(s)}_{n\times 1} - \underbrace{AX(s)}_{n\times 1} &= X(0) + Bu(s) \\
(sI - A)X(s) &= X(0) + Bu(s) \\
X(s) &= (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \\
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\} \\
y(t) &= \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}X(0)}_{\substack{\text{Solución homogénea} \\ \text{Respuesta en estado transitorio} \\ \text{Respuesta natural}}} + \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}}_{\substack{\text{Solución particular} \\ \text{Respuesta en estado estacionario} \\ \text{Respuesta forzada}}}
\end{aligned}$$

1.2. Transformación de similitud

Considere el vector $q : n \times 1$ ($q \in R^n$). El conjunto de vectores $q_1, \ldots, q_m$ es linealmente dependiente si existen números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos cero, tales que

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_1 q_1 \ldots, \alpha_n q_n = 0 \;\; (1)$$

Si la solución única de (1) es $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_m$ entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes.

A la expresión $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_n q_n$ se le denomina combinación lineal.

Base: Un conjunto de vectores linealmente independientes en R^n se define como una base si se puede expresar como una combinación lineal única.

En R^n todo conjunto de vectores linealmente independientes puede utilizarse como una base.

Sea $X : n \times 1$ todo vector X puede expresarse como

$$X = \alpha_1 q_1 + \ldots \; + \alpha_n q_n \;\; (2)$$

donde q_i son linealmente independientes.

De (2) se tiene que

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} \;\; (3)$$

Se definen

$$Q = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}, \;\; \tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en (3) se tiene que

$$X = Q\tilde{X}$$

donde X y $\tilde{X}$ son similares.

De (2) $X^\top = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n \;\; S_i : 1 \times n$

$$X^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Una matriz es estable cuando los valores propios son negativos.

Sea la ecuación lineal

$$Ax = y \;\; (4)$$

donde $A : n \times n \;\; B : n \times 1 \;\; y : n \times 1$. se definen

$$x = Q\tilde{x}, \;\; y = Q\tilde{y}$$

Sustituyendo en (4) se tiene que

$$\begin{aligned} AQ\tilde{x} &= Q\tilde{y} \\ Q^{-1}AQ\tilde{x} &= \tilde{y} \;\; (5) \end{aligned}$$

donde A y $Q^{-1}AQ$ son similares y A esta relacionada con la estabilidad.
Ejercicio: Sea $A : n \times n$ una matriz estable, demuestre que la matriz $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ es también estable, considere que Q es invertible.
Si

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) &= \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \\ det(\lambda I - \tilde{A}) &= \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}\lambda Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}(\lambda I - A)Q) \\ &= det(Q^{-1})det(\lambda I - A)det(Q) \\ &= det(Q^{-1})det(Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(Q^{-1}Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

repetir el ejercicio anterior considerando la siguiente matriz $\tilde{A} = QAQ^{-1}$

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - A) &= det(\lambda I - QAQ^{-1}) \\ &= det(\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q\lambda Q^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q(\lambda I - A)Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(\lambda I - A)det(Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(Q^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(QQ^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

1.3. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema

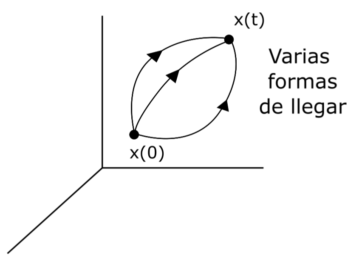
$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{A}^{\text{estabilidad}} x(t) + \underbrace{B}_{\textbf{controlabilidad}} u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

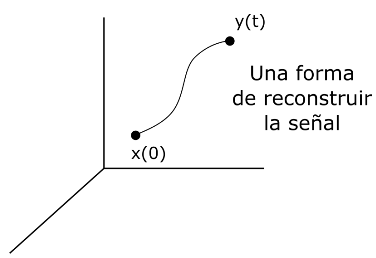
$$\begin{aligned} X &: n \times 1 \\ A &: n \times n \\ B &: n \times m \;\; \textit{entradas} \\ u &: m \times 1 \\ C &: p \times n \\ y &: P \times 1 \;\; \textit{salidas} \end{aligned}$$

Controlabilidad: existencia de una entrada $u(t)$ tal que cada variable de estado se pueda manipular de manera independiente, es decir, las entradas cambian las variables.

Observabilidad: Consiste en determinar el estado inicial a partir de la salida $y(t)$, es decir, las condiciones iniciales afectan la salida.



(a) Controlabilidad



(b) Observabilidad

Figura 1: Sistemas lineales

Definición 1. El sistema (1) es controlable si existe $u(t)$ tal que para todo estado inicial $x_0 = x(0)$ y todo estado final $x_f = x(T)$, el sistema puede llevarse de x_0 a x_f en tiempo finito.

1.4. Solución de ecuaciones en espacio de estado 2

Se considera el sistema

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\quad x(0)=X_0\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t)-Ax(t)&=Bu(t)\\
e^{-At}(\dot{x}(t)-Ax(t))&=e^{-At}Bu(t)\\
e^{-At}(\dot{x}(t))-e^{-At}Ax(t)&=e^{-At}Bu(t)\\
\int_0^t\frac{d}{dt}(e^{-A\tau}x(\tau))&=\int_0^t Bu(\tau)d\tau\\
e^{-A\tau}\Big|_0^t&=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\\
e^{-At}x(t)-e^0x(0)&=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\\
e^{At}(e^{-At}x(t)-e^0x(0))&=e^{At}\Big(\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\Big)\\
x(t)&=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+C
\end{aligned}$$

Anteriormente se obtuvo

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}x(0)+\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}$$

Por lo tanto

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

A continuación se desarrollará los dos términos un poco mas.
Se considera la matriz exponencial de la siguiente forma

$$f(t)=e^{At}\quad f(0)=I$$

entonces, partiendo de la derivada

$$\begin{aligned}
f(\dot{t})&=Ae^{At}=Af(t)\\
\mathcal{L}\{f(\dot{t})\}&=\mathcal{L}\{Af(t)\}\\
sF(s)-AF(s)&=AF(s)\\
sF(s)-AF(s)&=F(0)\\
(sI-A)F(s)&=I\\
(sI-A)^{-1}(sI-A)F(s)&=(sI-A)^{-1}I\\
F(s)&=(sI-A)^{-1}\\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}&=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\\
F(t)&=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\\
e^{At}&=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, considerando la definición de la convolución

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Según el teorema de la convolución. si $\mathcal{L}\{f(t)\} y \mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

Considerando las ecuaciones

$$f(t) = e^{At}, \quad g(t) = Bu(t)$$

Se tiene que

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = f * g$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big\{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{f * g\Big\} \\ &= F(s)G(s) \\ &= (SI - A)^{-1}Bu(s)\end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\Big\{(SI - A)^{-1}Bu(s)\Big\}$$

1.5. Criterios de controlabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es controlable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Controlabilidad de Kalman La matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} \underbrace{B}_{n\times m} & \underbrace{AB}_{n\times m} & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \Big\} n \times nm$$

para $m = 1$ (una entrada), con $det(C) \neq 0$ es de rango completo, es decir, $rango(C) = n$.

2) Controlabilidad de Hautus La matriz de controlabilidad

$$H = \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} \Big\} n \times (n + m)$$

es de rango completa, $rango(HC) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de controlabilidad

$$G_c = \int_0^t e^{At\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

es invertible, es decir, $det(G_c) \neq 0$

4) Los valores propios de la matriz $A - Bk$ pueden asignarse arbitrariamente.

1.6. Criterios de observabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es observable si cumple alguno de los siguientes criterios.

1) Observabilidad de Kalman La matriz de observabilidad

$$C = \left.\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} pn \times n$$

es de rango completo, $rango(C) = n$.

2)Observabilidad de Hautus La matriz de observabilidad

$$H_o = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

es de rango completa, $rango(H_o) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de observabilidad

$$G_o = \int_0^t e^{At\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

es invertible, $det(G_o) \neq 0$

4) Los valores propios de la matriz $A - LC$ pueden asignarse arbitrariamente.

1.7. Forma Canónica Controlable

Ejercicio: demostrar que la propiedad de controlabilidad es invariante para cualquier transformación de similitud.

Se considera la transformación de similitud

$$(1)\ \ X = P^{-1}z$$

donde P es invertible Se toma el sistema

$$(2)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para conseguir $P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + Bu$, y así, obtener el sistema

$$(3)\begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{PAP^{-1}}^{\tilde{A}} + \overbrace{PBu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = CP^{-1} \end{cases}$$

donde A y PAP^{-1} son invariantes, se tiene que $\lambda(A) = \lambda(PAP^{-1})$ debido a que P es invertible, entonces $rango(\tilde{C}) = rango(C)$.

Se obtiene la matriz de controlabilidad para los sistemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4)\ \ C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$
$$(5)\ \ \tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Considerando que $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$, se sustituye las matrices similares de (3) en (5)

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= [PB, PAP^{-1}PB, PA^2P^{-1}PB, \dots, PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ \tilde{C} &= P[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \\ \tilde{C} &= PC \end{aligned}$$

Lo que se busca es la matriz P, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= PC \\ \tilde{C}\tilde{C}^{-1} &= PC\tilde{C}^{-1} \\ I &= PC\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1}I &= C\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1} &= C\tilde{C}^{-1} \quad (6) \end{aligned}$$

Ahora se tomará el sistema de entradas y salidas

$$\begin{aligned} y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \dots + a_ny(t) &= b_1u^{n-1}(t) + \dots + b_nu(t) \\ \mathcal{L}\{y^n(t) + a_1y^{n-1}(t) + \dots + a_ny(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1u^{n-1}(t) + \dots + b_nu(t)\} \\ y(s)s^n + a_1y(s)s^{n-1} + \dots + a_ny(s) &= b_1u(s)s^{n-1} + \dots + b_nu(s) \\ y(s)(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n) &= u(s)(b_1s^{n-1} + \dots + b_n) \end{aligned}$$

Se escribe la función de transferencia como

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Si consideramos una función de transferencia racional (sin retardo) y estrictamente propia (orden del denominador mayor que el numerador)

$$g(s)=N(s)D(s)^{-1}$$

donde N(s) y D(s) son polinomios. Por lo tanto, la función de transferencia se puede escribir como

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=N(s)D(s)^{-1}$$

La salida del sistema se puede escribir como

$$y(s)=N(s)D(s)^{-1}u(s)$$

donde $v(s)=D(s)^{-1}u(s)$. Entonces la entrada y la salida se pueden escribir como

$$\begin{aligned}u(s)&=D(s)v(s)\\ y(s)&=N(s)v(s)\end{aligned}$$

Se definen las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\\ \vdots\\X_{n-1}(s)\\X_n(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S^{n-1}\\S^{n-2}\\ \vdots\\S\\1\end{bmatrix}v(s)$$

entonces las variables de estado se pueden escribir como

$$\begin{aligned}X_n&=v(s)\\ X_{n-1}&=sv(s)=sX_n(s)\\ X_{n-2}(s)=S^2v(s)&=s(sv(s))=sX_{n-1}(s)\\ &\vdots\\ X_2(s)&=sX_3(s)\\ X_1(s)&=sX_2(s)\end{aligned}$$

Si se sustituyen las variables de estado en la entrada se obtiene lo siguiente

$$u(s)=sX_1(s)+a_1X_1(s)+\ldots+a_nX_n(s)$$

Se despeja $sX_1(s)$

$$sX_1(s)=-a_1X_1(s)-\ldots-a_nX_n+u(s)$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} SX_1(s) \\ SX_2(s) \\ \vdots \\ SX_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)$$

Según la definición de la matriz similar de controlabilidad

$$\tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \cdots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Se usará una matriz de 3*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de controlabilidad

$$C = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1.8. Forma Canónica Observable

Ejercicio: Demostrar que la propiedad de observabilidad es invariante para cualquier transformación de similitud.

Se considera la transformación de similitud

$$(1)\ \ x = Qz$$

donde Q es invertible. Se toma el sistema

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para obtener $Q\dot{z} = AQz + Bu$ y así obtener el sistema

$$(3) \begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{Q^{-1}AQz}^{\tilde{A}} + \overbrace{Q^{-1}Bu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = \underbrace{CQz}_{\tilde{C}} \end{cases}$$

Se obtiene la matriz de observabilidad para los sistemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4)\ \ O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

$$(5)\ \ \tilde{O} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \ldots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Debido a que $\tilde{A}^n = Q^{-1}\tilde{A}^n Q$

$$\tilde{O} = [CQ, CQQ^{-1}AQ, CQQ^{-1}A^2Q, \ldots, CQQ^{-1}A^{n-1}Q]^T$$
$$\tilde{O} = [CQ, CAQ, CA^2Q, \ldots, CA^{n-1}Q]^T$$
$$\tilde{O} = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T Q$$
$$\tilde{O} = OQ$$

Lo que se busca es la matriz Q, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\tilde{O} &= OQ \\
\tilde{O}Q^{-1} &= OQQ^{-1} \\
\tilde{O}Q^{-1} &= OI \\
\tilde{O}^{-1}\tilde{O}Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\
IQ^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \\
Q^{-1} &= \tilde{O}^{-1}O \quad (6)
\end{aligned}$$

Debido a que Q es invertible, $rango(\tilde{O}) = rango(O)$
Tomando el sistema de entradas salidas

$$y(s)s^n + a_1y(s)s^{n-1} + \ldots + a_ny(s) = b_1u(s)s^{n-1} + \ldots + b_nu(s) \quad (7)$$

Se reescribe de la siguiente forma

$$s^ny(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) = b_nu(s) - a_ny(s)$$

Se considera la variable de estado $X_n(s) = y(s)$, es decir

$$y(s) = [0, 0, 0, \ldots, 1]X(s)$$

Entonces se comienza a definir las variables de estado a partir de (7), de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
s^ny(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}sy(s) + s^{n-1}(a_1y(s) - b_1u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}(sy(s) + a_1y(s) - b_1u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}\overbrace{(sy(s) + a_1y(s) - b_1u(s))}^{X_{n-1}(s)} + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-1}X_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2y(s) - b_2u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}sX_{n-1}(s) + s^{n-2}(a_2y(s) - b_2u(s)) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}(sX_{n-1}(s) + (a_2y(s) - b_2u(s))) + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s^{n-2}\overbrace{(sX_{n-1} + a_2y(s) - b_2u(s))}^{X_{n-2}(s)} + \ldots + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
s\,\overbrace{(sX_2(s) + a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s))}^{X_1(s)} &= b_nu(s) - a_ny(s) \\
sX_1(s) &= b_nu(s) - a_ny(s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto las variables de estado se definen como

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= sX_2(s) + a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)\\
&\vdots\\
X_{n-2}(s) &= sX_{n-1}(s) + a_2 y(s) - b_2 u(s)\\
X_{n-1}(s) &= sX_n(s) + a_1 y(s) - b_1 u(s)\\
X_n(s) &= y(s)
\end{aligned}$$

Del proceso para obtener las variables de estado se puede ver que

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n y(s) + b_n u(s)\\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= -a_n y(s) + b_n u(s)\\
s^2X_2(s) + s(a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= sX_1(s)\\
sX_2(s) + (a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s)) &= X_1(s)\\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s)
\end{aligned}$$

entonces la derivada de las variables de estado se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n y(s) + b_n u(s)\\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}y(s) + b_{n-1}u(s)\\
&\vdots\\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2 y(s) + b_2 u(s)\\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1 y(s) + b_1 u(s)
\end{aligned}$$

Recordando que $X_n(s) = y(s)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
sX_1(s) &= -a_n X_n(s) + b_n u(s)\\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}X_n(s) + b_{n-1}u(s)\\
&\vdots\\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2 X_n(s) + b_2 u(s)\\
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1 X_n(s) + b_1 u(s)
\end{aligned}$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} SX_1(s)\\ SX_2(s)\\ \vdots\\ SX_n(s)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1}\\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s)\\ X_2(s)\\ \vdots\\ X_n(s)\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_n\\ b_{n-1}\\ \vdots\\ b_1\end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)$$

$$y(s) = \underbrace{[0, 0, \ldots, 1]}_{\tilde{C}} X(s)$$

Según la definición de la matriz similar de observabilidad

$$\tilde{O} = [\tilde{C}, \tilde{C}\tilde{A}, \tilde{C}\tilde{A}^2, \cdots, \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}]^T$$

Se usará una matriz de 3*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz similar de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{O}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de observabilidad

$$O = [C, CA, CA^2, \ldots, CA^{n-1}]^T$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2. UNIDAD II

2.1. Diseño de sistemas de control en espacios de estado

De manera general un sistema de control se define

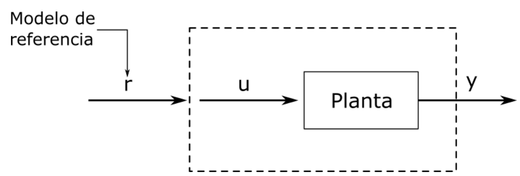


Figura 2: Sistema de control

donde u : señal de control, y : señal disponible. Se asume que la referencia y la salida son conocidas.

En función de r se definen los siguientes problemas de control:

1. Regulación: se considera que r es constante

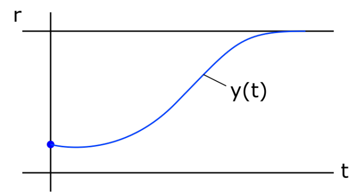


Figura 3: Sistema de control

2. Seguimiento de trayectoria: En este caso y es una función variante con el tiempo

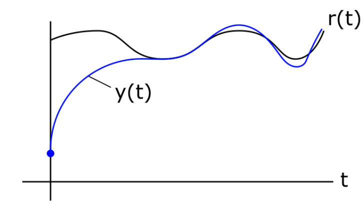


Figura 4: Sistema de control

3. Seguimiento de modelo de referencia (Control inteligente)

Los sistemas de control se clasifican en dos tipos principales

1. En lazo abierto
   La señal de control es independiente de la salida.

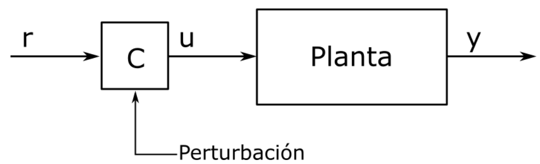


Figura 5: Sistema de control

2. En lazo cerrado o retroalimentado

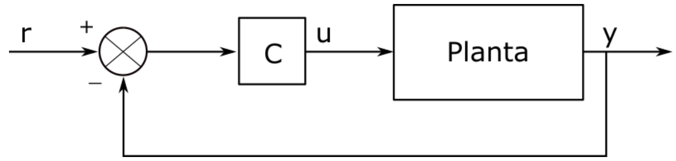


Figura 6: Sistema de control

2.2. Ubicación de polos: método directo

Considere un sistema SISO

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

El polinomio característico de (1)

$$\begin{aligned} P(s) &= det(sI - A) = 0 \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n \\ &= (s - q_1)(s - q_2)\ldots(s - q_n) \end{aligned}$$

donde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ son los polos del sistema en lazo abierto. El problema de ubicación de polos consiste en asignar los polos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ al sistema en lazo cerrado, entonces

$$P_{LC} = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n$$

Es decir, que se encontraran las ganancias que permitan que los polos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ aparezcan en el polinomio característico del sistema en lazo cerrado. Por lo tanto en este punto los polos en lazo cerrado son conocidos.

Se define la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned} (2)\ \ u &= r - kx \ \ donde \ \ k : 1 \times n \\ &= r - [k_1, k_2, \ldots, k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= r - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n) \\ &= r - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(r - kx) \\ &= Ax + Br - Bkx \\ &= (A - Bk)x + Br \ \ \text{(3) sistema en lazo cerrado} \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio característico en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= det(sI - (A - Bk)) = 0 \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

Ejemplo: determinar las ganancias $k = K_1, k_2$ para ubicar los polos $\mu_1 = -1 + j,\ \mu_2 = -1 - j$, considerando el siguiente sistema en lazo abierto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conociendo los polos, se puede obtener el polinomio característico de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= (s - (-1 + j))(s - (-1 - j)) \\ &= (s + 1 - j)(s + 1 + j) \\ &= s^2 + s + sj + s + 1 + j - sj - j - j^2 \\ &= s^2 + 2s + 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tilde{a}_1 = 2\ \ \tilde{a}_2 = 2$$

Por otro lado el polinomio característico se calcula usando las matrices A y B como

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= det(sI - (A - Bk)) \\ &= det(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix})) \\ &= det(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ &= det(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - 1 & k_2 - 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}) \\ &= det(\begin{bmatrix} s + k_1 - 1 & k_2 - 3 \\ -3 & s - 1 \end{bmatrix}) \\ &= s^2 + sk_1 - s - s - k_1 + 1 + 3_2 - 9 \\ &= s^2 + (k_1 - 2)s + 3k_2 - k_1 - 8 \end{aligned}$$

Igualando ambos polinomios característicos, se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 &= k_1 - 2 \\ 2 &= 3k_2 - k_1 - 8 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las ganancias para ubicar los polos

$$\begin{aligned} k_1 &= 4 \\ k_2 &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

2.3. Ubicación de polos forma canónica controlable

Considere el sistema SISO

$$(1)\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{cases}$$

Se asume que el sistema (1) es controlable, y el polinomio característico del sistema es

$$\begin{aligned}P(s) &= det(sI - A)\\ &= (s-q_1)(s-q_2)\dots(s-q_n)\\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n\end{aligned}$$

Haciendo $z = Px$ o bien $x = p^{-1}z$ (2) donde

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned}p^{-1}\dot{z} &= AP^{-1}z + Bu\\ (3)\quad dotz &= \underbrace{PAP^{-1}}_{\tilde{A}}z + \underbrace{PB}_{\tilde{B}}u\\ \dot{z} &= \begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}z + \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}u\end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en la retroalimentación de estado

$$\begin{aligned}(4)\quad u &= r - kx\\ &= r - kP^{-1}z\\ &= r - \tilde{k}z\end{aligned}$$

Donde $\tilde{k} = kP^{-1}$ (5)

Sustituyendo (4) en (3)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= PAP^{-1}z + PB(r - kP^{-1}z)\\ &= PAP^{-1}z + PBr - PBkP^{-1}z\\ (6)\quad &= P(A - Bk)P^{-1}z + PBr\end{aligned}$$

Ya que $A - Bk$ y $P(A - Bk)P^{-1}$ son similares, se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{LC} &= det(sI - (A - Bk)) = det(sI - P(A - Bk)P^{-1}) \\
&= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \\
&= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n
\end{aligned}$$

Donde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los polos que se quieren ubicar, es decir, son conocidos, así como $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$

Si $\tilde{A}$ se obtiene del polinomio característico del sistema A, entonces se puede escribir el sistema similar en lazo cerrado $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k}$ de la siguiente forma

$$\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} = \begin{bmatrix} -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \cdots & -\tilde{a}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{A}^{'}$$

El problema consiste en despejar las ganancias $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}^{'} \\
-\tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A}^{'} - \tilde{A} \\
\tilde{B}\tilde{k} &= \tilde{A} - \tilde{A}^{'}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \dots & \tilde{k}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 & \tilde{a}_2 - a_2 & \cdots & \tilde{a}_n - a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de ganancias similares se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{k}_2 \\ \vdots \\ \tilde{k}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix}$$

De la ecuación (5) se puede despajar las ganancias en lazo cerrado

$$\tilde{k} = kP^{-1}$$
$$\tilde{k}P = k$$
$$k = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 - a_1 \\ \tilde{a}_2 - a_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \tilde{a}_n - a_n \end{bmatrix} [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.4. Formula de Ackerman

El método consiste en calcular la ganancia k para asignar los polos en lazo cerrado $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ a partir del polinomio característico en lazo cerrado

$$P_{LC}(s) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n = 0$$

y en lazo abierto se tiene

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

Teorema de Cayley-Hamilton
Toda matriz satisface su polinomio característico, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-1} + \ldots + a_n I = 0 \\ P_{LC}(A - Bk) &= (A - Bk)^n + \tilde{a}_1 (A - Bk)^{n-1} + \tilde{a}_2 (A - Bk)^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n I = 0 \end{aligned}$$

Para $n = 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} (A - Bk)^2 &= A^2 - ABk - Bk(A - Bk) \\ (A - Bk)^3 &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio característico en lazo cerrado se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} P_{LC}(A - Bk) &= A^3 - A^2 Bk - ABk(A - Bk) - Bk(A - Bk)^2 \\ &\quad + \tilde{a}_1 (A^2 - ABk - Bk(A - Bk)) + \tilde{a}_2 (A - Bk) + \tilde{a}_3 I \\ &= A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I - A^2 B(k) - AB(k(A - Bk)) \\ &\quad - B(K(A - Bk)^2) - AB(\tilde{a}_1 k) - B(\tilde{a}_1 k(A - Bk)) - B(\tilde{a}_2 k) \\ &= \underbrace{A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3 I}_{P_{LC}(A)} - B(k(A - Bk)^2 + \tilde{a}_1 k(A - Bk) - \tilde{a}_2 k) \\ &\quad - AB(k(a - Bk) + \tilde{a}_1 k) - A^2 B(k) \\ &= P_{LC}(A) - \underbrace{\begin{bmatrix} B & BA & A^2 B \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{controlabilidad } C}} \underbrace{\begin{bmatrix} k(A - Bk)^2 & \tilde{a}_1 k(A - Bk) & \tilde{a}_2 k \\ 0 & k(A - Bk) & \tilde{a}_1 k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}}_{G} \\ &= P_{LC}(A) - CG = 0 \end{aligned}$$

Se despeja la ganancia G

$$\begin{aligned} P_{LC}(A) - CG &= 0 \\ -CG &= P_{LC}(A) \\ CG &= P_{LC}(A) \\ G &= C^{-1} P_{LC}(A) \end{aligned}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones, pero solo se va a tomar el ultimo elemento de la matriz de ganancias, por lo tanto

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} G &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A) \\ k &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A)\end{aligned}$$

Se define la formula de Ackerman como

$$k = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} C^{-1} P_{LC}(A)$$

2.5. Ecuación de Lyapunov

El método consiste en calcular k tal que la matriz $(A - Bk)$ se le agregan los polos deseados en lazo cerrado.

Sea F una matriz con los valores propios deseados en lazo cerrado $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

Se aplica una transformación de similitud P tal que

$$A - Bk = PFP^{-1}$$

Se desconocen P y k, entonces

$$\begin{aligned} A - Bk &= PFP^{-1} \\ (A - Bk)P &= PFP^{-1}P \\ AP - B\underbrace{KP}_{\tilde{k}} &= PF \\ -B\tilde{k} &= PF - AP \\ B\tilde{k} &= AP - PF \end{aligned}$$

La cual es la ecuación de Lyapunov en la forma de Silvestre.

2.5.1. Procedimiento para propones $\tilde{k}$

1. Construir una matriz F. Se recomienda que sea diagonal por bloques
2. Seleccionar $\tilde{k}$, tal que el par $(F, \tilde{k})$ sea observable, es decir

$$O = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{k}F \\ \tilde{k}F^2 \\ \vdots \\ \tilde{K}F^n \end{bmatrix}, \quad det(O) \neq 0$$

3. La ecuación de Lyapunov es un sistema de ecuaciones lineales, en MATLAB se puede solucionar usando $P = lyap(A, -F, -B\tilde{k})$
4. Recordando que $\tilde{k} = kP$, las ganancias se obtienen con

$$k = \tilde{k}P^{-1}$$

La construcción de la matriz F se realizará con las siguientes reglas

1. Polos repetidos: se colocan en la diagonal, pero se agrega un 1
2. Polos reales no repetidos: se colocan en la diagonal
3. Polos imaginarios: Los reales se colocan en la diagonal, los imaginarios alternan de signo

Ejemplo: construir la matriz F según los siguientes polos

$$\Big\{ -1, -2, -3+4j, -3-4j, -1 \Big\}$$

Se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

2.6. Estabilización por retroalimentación de estado

Considere el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$A : n \times n$$
$$B : n \times m$$
$$C : p \times 1$$
$$\underset{m\times n}{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición estabilización: El sistema (1) es estable por retroalimentación de estado si existe $u = -kx$ tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{X} = (A - Bk)x \text{ es estable}$$

es decir, que todos los valores característicos de la matriz $A - Bk$ tienen parte real negativa

Se tienen dos casos

1. Si el par (A, B) es controlable entonces el sistema (1) siempre es estabilizable por retroalimentación de estado

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \;\; rango(C) = n$$

2. Si el par (A, B) no es controlable, $rango(C) = r < n$, donde r es el numero de vectores linealmente independientes. En este caso se debe determinar las condiciones para calcular la ganancia k

Teorema: sea la matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \;\; rango(C) = n$$

Se definen $q_1, q_2, \dots, q_r$ vectores columna de la matriz C linealmente independientes, y $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n$ vectores columna arbitrarios (se proponen) linealmente independientes tales que la matriz Q sea invertible

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_r & q_{r+1} & \dots & q_n \end{bmatrix}$$

Entonces la transformación $x = Qz$ es tal que

$$
\begin{aligned}
(2)\;\; Q\dot{z} &= AQz + Bu \\
z &= Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bu \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Descomposición de Kalman} \\ \text{(controlable, no controlable)}}} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
A_{11} &: r \times r \\
A_{12} &: r \times (n-r) \\
O &: (n-r) \times r \\
B_1 &: r \times m \\
A_{22} &: (n-r) \times (n-r)
\end{aligned}
$$

El sistema (1) y (2) son similares, es decir $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$
Se define

$$(3)\;\; u = \tilde{k}z$$

Donde $\tilde{k} = kQ^{-1}$
Sustituyendo (3) en (2)

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} z \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} B_1\tilde{k}_1 & B_1\tilde{k}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z
\end{aligned}
$$

Los valores característicos del sistema en lazo cerrado son

$$\underbrace{\lambda(A_{11} - B_1\tilde{k}_1)}_{\substack{\text{polos} \\ \text{controlables}}} \;\cup\; \underbrace{\lambda(A_{22})}_{\substack{\text{polos no} \\ \text{controlables}}}$$

Condición necesaria para estabilización es que la matriz A_{22} se estable
El problema de estabilización se resuelve como un problema de ubicación de polos para la matriz $A_{11} - B_1\tilde{k}_1$
donde

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \vec{0} \end{bmatrix}$$

Las ganancias en lazo cerrado se obtienen con

$$k = \tilde{k}\tilde{Q}^{-1}$$

2.7. Observadores de estado (reconstruir variables que no se conocen)

La retroalimentación de estado $u = r - kx$ asume que todo el vector de estados es conocido $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $C = I$ para tener en la salida todas las variables de estado.

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

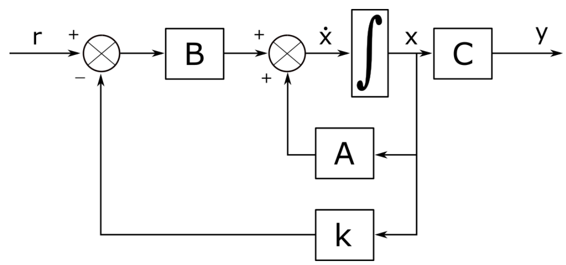


Figura 7: Sistema retroalimentado

Sin embargo no siempre se tiene acceso a todas las variables de estado, debido a restricciones tecnológicas, de costos, etc,.

Los observadores de estado, se utilizan para aproximar el valor de las variables de estado desconocidas.

Sea x y $\hat{x}$, donde $\hat{x}$ es un valor aproximado del vector x obtenido mediante un observador de estado, entonces $u = r - k\hat{x}$

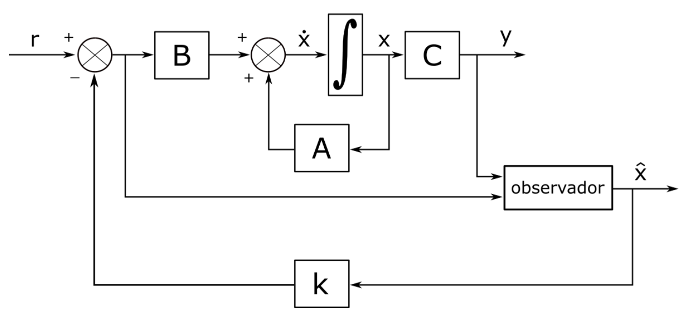


Figura 8: Sistema con observador

Se propone el observador de estado para (1)

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\substack{\text{copia del} \\ \text{del sistema}}} + \underbrace{L(y - C\hat{x})}_{\substack{\text{factor de} \\ \text{corrección}}}$$

$$= A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x}$$

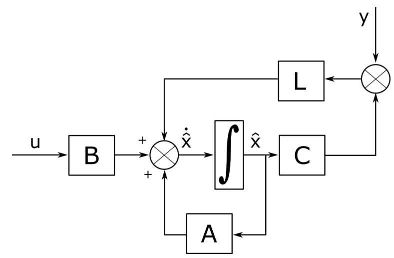


Figura 9: Observador

donde

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

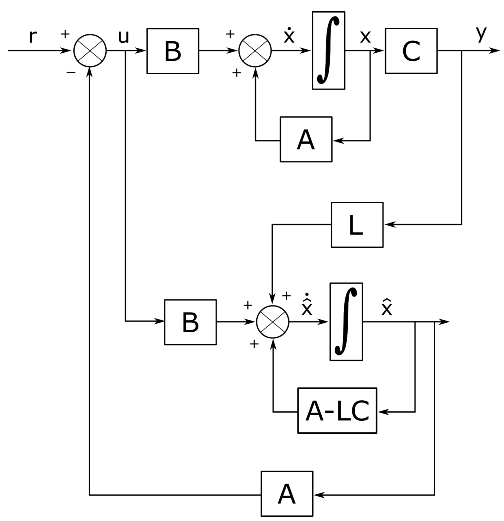


Figura 10: Sistema con observador retroalimentado

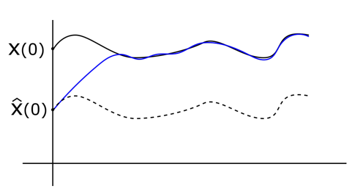


Figura 11: Comparación con el observador de estado

Convergencia asintótica

$$||x-\hat{x}|| \underset{t\to \text{ínf}}{\rightarrow} 0$$

$$||x-\hat{x}|| \leq k_0 e^{-\lambda t}$$

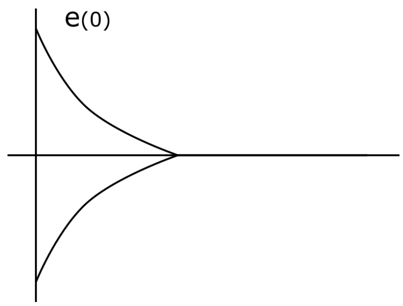


Figura 12: Comparación con el observador de estado

Se define el error de estimación

$$(2)\ \ e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Derivando (2) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\
&= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - L(y - C\hat{x}) \\
&= Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x}) \\
&= A\underbrace{(x-\hat{x})}_{e(t)} - LC\underbrace{(x-\hat{x})}_{e(t)} \\
&= Ae(t) - LCe(t) \\
&= (A - LC)e(t)\ \ (3)
\end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial (3), se puede ver que $f(t) = e(t)$ con condición inicial $f(0) = e(0)$, y la derivada $\dot{f(t)} = (A - LC)e(t)$. Así que se propone que $f(t) = Q_0 e^{Qt}$, por lo tanto se tiene que

$$f(0) = e(0) = Q_0 e^{Q(0)} = Q_0 e^0 = Q_o I = Q_0$$

La derivada de la función propuesta es

$$\dot{f(t)} = Q_0 Q e^{Qt}$$

igualando funciones

$$\begin{aligned}
Q_0 Q e^{Qt} &= (A - LC)e(t) \\
Q_0 Q e^{Qt} &= (A - LC)Q_0 e^{Qt} \\
Q_0 Q e^{Qt}(Q_0 e^{Qt})^{-1} &= (A - LC)Q_0 e^{Qt}(Q_0 e^{Qt})^{-1} \\
Q &= (A - LC)
\end{aligned}$$

Sustituyendo Q y Q_0 en la función propuesta

$$f(t) = e(0)e^{(A-LC)t}$$

El problema de diseño de observadores se resuelve como un problema de ubicación de polos, es decir, consiste en calcular L para asignar dinámica del observador de estado

$$\begin{aligned} P_{\text{obs}} &= det(sI - (A - LC)) \\ &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \ldots (s - \mu_n) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n \end{aligned}$$

2.8. Diseño de observadores de estado: forma canónica observable

Considere el sistema SISO

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Se asume que el sistema (1) es observable, y el polinomio característico del sistema es

$$\begin{aligned} P(s) &= det(sI - A) \\ &= (s - q_1)(s - q_2)\dots(s - q_n) \\ &= s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n \end{aligned}$$

Haciendo $z = xQ^{-1}$ o bien $x = Qz$ (2) donde

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que

$$\begin{aligned} Q\dot{z} &= AQz + Bu \\ \dot{z} &= \underbrace{Q^{-1}AQ}_{\tilde{A}}\, z + \underbrace{Q^{-1}B}_{\tilde{B}}\, u \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{CQ}_{\tilde{C}}\, z \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

Se tiene el observador de estado

$$\begin{aligned} (3)\quad \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} + Bu + Ly - LC\hat{x} \\ &= A\hat{x} - LC\hat{x} + Bu + Ly \\ &= (A - LC)\hat{x} + \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (3) se tiene que

$$\begin{aligned}
Q\dot{\hat{z}} &= AQ\hat{z} + Bu + L(y - CQ\hat{z}) \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}AQ\hat{z} + Q^{-1}Bu + \underbrace{Q^{-1}L}_{\tilde{L}}(y - CQ\hat{z}) \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}AQ\hat{z} + Q^{-1}Bu + Q^{-1}Ly - Q^{-1}LCQ\hat{z} \\
\dot{\hat{z}} &= Q^{-1}(A - LC)Q\hat{z} + Q^{-1}(Bu + Ly)
\end{aligned}$$

Donde $\tilde{L} = Q^{-1}L$ (4)

Ya que $A - LC$ y $Q^{-1}(A - LC)Q$ son similares, se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{obs} &= det(sI - (A - LC)) = det(sI - Q^{-1}(A - LC)Q) \\
&= (s - \mu_1)(s - \mu_2)\dots(s - \mu_n) \\
&= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_n
\end{aligned}$$

Si $\tilde{A}$ se obtiene del polinomio característico del sistema A, entonces se puede escribir el sistema similar del observador $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$ de la siguiente forma

$$\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\tilde{a}_n \\ 1 & 0 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix} = \tilde{A}'$$

El problema consiste en despejar las ganancias $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A}' \\
-\tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A}' - \tilde{A} \\
\tilde{L}\tilde{C} &= \tilde{A} - \tilde{A}'
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_n \\ -1 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \tilde{a}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \tilde{L}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{L}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{L}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_n - a_n \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

El vector de ganancias similares se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_n - a_n \\ \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4) se puede despajar las ganancias del observador

$$\tilde{L} = Q^{-1} L$$
$$L = Q\tilde{L}$$

2.9. Formula de Ackerman

Se tiene el polinomio característico del observador

$$\begin{aligned} P_{obs} &= det(sI - (A - LC)) \\ &= s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \tilde{a}_2 s^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_n = 0 \end{aligned}$$

Considerando que

$$\begin{aligned} (A - LC)^2 &= A^2 - LCA - (A - LC)LC \\ (A - LC)^3 &= A^3 - LCA^2 - (A - LC)LCA - (A - LC)^2 LC \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton con $A - LC$, para $n = 3$

$$\begin{aligned} P_{obs} &= A^3 - LCA - (A - LC)LCA - (A - LC)^2 LC \\ &+ \tilde{a}_1(A^2 - LCA - (A - LC)LC) + \tilde{a}_2(A - LC) + \tilde{a}_3 \\ &= \underbrace{A^3 + \tilde{a}_1 A^2 + \tilde{a}_2 A + \tilde{a}_3}_{P_{obs}(A)} - ((A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2)LC \\ &- ((A - LC) + \tilde{a}_1)LCA - LCA^2 \\ &= P_{obs}(A) - \begin{bmatrix}(A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2 & (A - LC) + \tilde{a}_1 & L\end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \\ &= P_{obs}(A) - \underbrace{\begin{bmatrix}(A - LC)^2 + \tilde{a}_1(A - LC) + \tilde{a}_2 \\ (A - LC) + \tilde{a}_1 \\ L\end{bmatrix}^T}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{observabilidad}}} \\ &= P_{obs}(A) - GO = 0 \end{aligned}$$

Se despeja la ganancia G

$$\begin{aligned} P_{obs}(A) - GO &= 0 \\ -GO &= -P_{obs}(A) \\ GO &= P_{obs}(A) \\ G &= P_{obs}(A)O^{-1} \end{aligned}$$

Solo tiene un sistema de ecuaciones, pero solo se va a tomar el ultimo elemento de la matriz de ganancias, por lo tanto

$$\begin{aligned} G \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= P_{obs}(A)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L &= P_{obs}(A)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se define la formula de Ackerman como

$$L = P_{obs}(A)O^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

2.10. Ecuación de Lyapunov

Sea F una matriz con los valores característicos iguales a la dinámica deseada del observador

Se aplica una transformación de similitud P tal que

$$A - LC = PFP^{-1}$$

Se desconocen P y L, entonces

$$\begin{aligned} A - LC &= P^{-1}FP \\ P(A - LC) &= FP \\ PA - \underbrace{PL}_{\tilde{L}}C &= FP \\ -\tilde{L}C &= FP - PA \\ \tilde{L}C &= PA - FP \end{aligned}$$

2.10.1. Procedimiento para proponer $\tilde{L}$

1. Construir una matriz F. Se recomienda que sea diagonal por bloques
2. Seleccionar $\tilde{L}$, tal que el par $(F, \tilde{L})$ sea controlable, es decir

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{L} & F\tilde{k} & F^2\tilde{L} & \cdots & F^n\tilde{L} \end{bmatrix}, \ det(C) \neq 0$$

3. La ecuación de Lyapunov es un sistema de ecuaciones lineales, en MATLAB se puede solucionar usando $P = lyap(-F, A, -\tilde{L}C)$
4. Recordando que $\tilde{L} = PL$, las ganancias se obtienen con

$$L = P^{-1}\tilde{L}$$

2.11. Detectabilidad de sistemas lineales

Considere el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A &: n \times n \\ B &: n \times m \\ C &: p \times n \\ X &: n \times 1 \\ y &: p \times 1 \\ u &: m \times 1 \\ m &: entradas \\ p &: salidas \end{aligned}$$

Definición detectabilidad: El sistema (1) es detectable si existe L tal que la matriz $A - LC$ es Horwitz estable, es decir, los polos son negativos

1. Si el par (A, B) es observable entonces el sistema (1) siempre es detectable

$$O = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \quad rango(O) = n$$

2. Si el par (A, C) no es observable, es decir, $rango(C) = r < n$, donde r es el número de vectores linealmente independientes.

Se definenen $s_1, s_2, \dots, s_r$ los primeros vectores fila linealmente independientes de la matriz O y $s_{r+1}, \dots, s_n$ vectores fila arbitrarios (se proponen) tales que la matriz S sea invertible

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_r & s_{r+1} & \dots & s_n \end{bmatrix}^T : n \times n \;\; det(S) \neq 0$$

Entonces la transformación de estado $z = Sx$ o $x = S^{-1}z$ es tal que

$$\begin{aligned} (2) \;\; S^{-1}\dot{z} &= AS^{-1}z + Bu \\ \dot{z} &= SAS^{-1} + SBu \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

En la salida

$$y = CS^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} z$$

Donde

$$\begin{aligned} A_{11} &: r \times r \\ 0 &: r \times (n - r) \\ A_{21} &: (n - r) \times r \\ A_{22} &: (n - r) \times (n - r) \\ C_1 &: P \times (n - r) \end{aligned}$$

El sistema (1) y (2) comparten valores propios, $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$
Se propone el observador para el sistema (2)

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{z}} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}} (y - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \hat{z}) \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 C_1 & 0 \\ \tilde{L}_2 C_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} - \tilde{L}_1 C_1 & 0 \\ A_{21} - \tilde{L}_2 C_1 & A_{22} \end{bmatrix} \hat{z} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{bmatrix} y
\end{aligned}
$$

La dinamica del observador es

$$\lambda(A_{11} - \tilde{L}_1 C_1) \cup \lambda(A_{22})$$

Una ecuación necesaria para detectabilidad es que A_{22} sea Hurwits estable
La ganancia $\tilde{L}_1$ se calcula con los metodos de diseño de observadores para la matriz $A_{11} - \tilde{L}_1 C_1$ donde $\tilde{L}_2$ es arbitrario, por lo tanto se propone $\tilde{L}_2 = 0$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

APlicando la transformación de estado $x = S^{-1} z$ al observador del sistema (1)

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\
S^{-1}\dot{\hat{z}} &= AS^{-1}\hat{z} + Bu + L(y - CS^{-1}\hat{z}) \\
\dot{\hat{z}} &= SAS^{-1}\hat{z} + SBu + SL(y - CS^{-1}\hat{z})
\end{aligned}
$$

se define $\tilde{L} = SL$
Las ganancias del observador se obtienen con

$$L = S^{-1}\tilde{L}$$

2.12. Control retroalimentado basado en observación

Considere el sistema SISO

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Teorema 1: si el sistema es estabilizable entonces existe k tal que la matriz $A - Bk$ es estable

Teorema 2: si el sistema es detectable entonces existe L tal que $A - LC$ es estable

Teorema 3: sea el sistema estabilizable y detectable, entonces existe un observador de estado $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ y una retroalimentación $u = r - k\hat{x}$ tal que el sistema acoplado es estable

Sustituyendo la retroalimentación del observador de estado $u = r - k\hat{x}$ en el sistema (1) y en su observador se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(r - k\hat{x}) \\ &= Ax - Bk\hat{x} + Br \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(r - k\hat{x}) + L(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} - Bk\hat{x} + Br + L(Cx - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} - Bk\hat{x} + Br + LCx - LC\hat{x} \\ &= LCx + (A - BK - LC)\hat{x} + Br \end{aligned}$$

entonces se puede escribir un solo sistema de l asiguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -Bk \\ LC & A - Bk - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

2.13. Regulación de sistemas lineales

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Es posible convertirlo a una función de transferencia usando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ sx(s) - Ax(s) &= Bu(s) \\ (sI - A)x(s) &= Bu(s) \\ x(s) &= (sI - A)^{-1}Bu(s) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la salida del sistema (1)

$$\begin{aligned} y(s) &= Cx(s) \\ y(s) &= C(sI - A)^{-1}Bu(s) \\ \frac{y(s)}{u(s)} &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned}$$

También se puede describir el sistema (1) con una función de transferencia obtenida a partir de un sistema de entradas-salidas

$$\begin{aligned} y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \ldots + a_n y(t) &= b_1 u^{n-1}(t) + \ldots + b_n u(t) \\ \mathcal{L}\{y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \ldots + a_n y(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1 u^{n-1}(t) + \ldots + b_n u(t)\} \\ y(s)s^n + a_1 y(s)s^{n-1} + \ldots + a_n y(s) &= b_1 u(s)s^{n-1} + \ldots + b_n u(s) \\ y(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n) &= u(s)(b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n) \end{aligned}$$

Se escribe la función de transferencia como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Por lo tanto

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = C(sI - A)^{-1}B$$

También es posible escribir la función de transferencia a partir de los polos $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ y los ceros $q_1, q_2, \ldots, q_m$

$$G(s) = \frac{(s - q_1)(s - q_2)\ldots(s - q_m)}{(s - \mu_1)(s - \mu_2)\ldots(s - \mu_n)} \;\; donde \;\; m < n$$

Cuando $r(t) = 0$, es decir, no hay entradas, el sistema solo depende de los polos (respuesta natural), sin embargo, cuando la $r(t) \neq 0$ los ceros también participan en la respuesta del sistema.

2.14. Regulación de sistemas lineales: caso 1

Cuando no hay integrador en la planta, es decir todos los polos son distintos de cero, el sistema en lazo cerrado no alcanza la referencia, por ello Se añade una ganancia en la referencia. Considerando el sistema en lazo cerrado

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - Bk)x(t) + B\underbrace{r(t)}_{u(t)} \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

considerando que el sistema (1) tiene inicialmente una ganancia de 1, es decir, la función de transferencia es

$$\frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - (A - Bk))^{-1}B = 1$$

Se le agrega una ganancia N tal que

$$\frac{y(s)}{u(s)N} = C(sI - (A - Bk))^{-1}B = \frac{1}{N}$$

o bien

$$\frac{y(s)}{u(s)} = NC(sI - (A - Bk))^{-1}B = 1$$

Para una entrada r constante, en estado estacionario se tiene que

$$\lim_{t\to\text{ínf}}(\frac{y(s)}{u(s)}) = NC(A - Bk)^{-1}B = 1$$
$$N = \frac{1}{C(A - Bk)^{-1}B}$$

Usando la representación con polos y ceros

$$\lim_{t\to\text{ínf}}(\frac{y(s)}{u(s)}) = N\frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = 1$$
$$N\frac{b_n}{a_n} = 1$$
$$N = \frac{a_n}{b_n}$$

Por lo tanto

$$N = \frac{1}{C(A - Bk)^{-1}B} = \frac{a_n}{b_n}$$

Se consigue reducir el error de estado estacionario a cero, pero debido a que no tiene un integrador, el sistema no responde correctamente ante ruido.

2.15. Regulación de sistemas lineales: caso 2

Cuando no hay integrador en la planta, y en lugar de usar solo una ganancia en la entrada, se propone un integrador de la siguiente forma

considere el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se define la entrada al sistema (1)

$$u = K_I\xi - kx$$

Sustituye (2) en (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(k_I\xi - kx) \\ &= Ax + Bk_I\xi - Bkx \\ &= (A - Bk)x + Bk_I\xi\end{aligned}$$

Del integrador se puede ver que

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= r - y \\ &= r - Cx \quad (3)\end{aligned}$$

Usando (2) y (3) se puede formar el sistema en lazo cerrado

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - Bk & Bk_I \\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ \xi\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \quad (4)$$

En estado estacionario la ecuación (4)

$$\begin{bmatrix}\text{lím}_{t\to\infty}\dot{x}(t) \\ \text{lím}_{t\to\infty}\dot{\xi}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - Bk & Bk_I \\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{lím}_{t\to\infty} x(t) \\ \text{lím}_{t\to\infty}\xi(t)\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \quad (5)$$

Haciendo (4) - (5)

$$\begin{bmatrix}\dot{x} - \text{lím}_{t\to\infty}\dot{x}(t) \\ \dot{\xi} - \text{lím}_{t\to\infty}\dot{\xi}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - Bk & Bk_I \\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x - \text{lím}_{t\to\infty} x(t) \\ \xi - \text{lím}_{t\to\infty}\xi(t)\end{bmatrix} + r \quad (6)$$

Se define el error

$$\begin{aligned}e_x &= x - \lim_{t\to\infty} x(t) \\ e_\xi &= \xi - \lim_{t\to\infty}\xi(t\end{aligned}$$

Se reescribe el sistema (6)

$$\begin{bmatrix}\dot{e_x} \\ \dot{e_\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - Bk & Bk_I \\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_x \\ e_\xi\end{bmatrix}$$

el sistema (6) se separa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{e_x}\\ \dot{e_\xi}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}-k & +k_I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix} - B\underbrace{\begin{bmatrix}k & -k_I\end{bmatrix}}_{\tilde{k}}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$e_u = -ke_x + k_I e_\xi = -\tilde{k}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix}$$

También se puede ver de (1) en estado estacionario

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = k_I \lim_{t\to\infty} \xi(t) - k \lim_{t\to\infty} x(t)(7)$$

Haciendo (7) - (1)

$$\begin{aligned}u - \lim_{t\to\infty} u(t) &= k_I\xi - k_I \lim_{t\to\infty} \xi(t) - kx + k \lim_{t\to\infty} x(t)\\ &= k_I(\xi - \lim_{t\to\infty} \xi(t)) - k(x - \lim_{t\to\infty} x(t))\\ &= K_I e_\xi - ke_x\end{aligned}$$

Reescribiendo (4)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u + r\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad (8)$$

En estado estacionario (8)

$$\begin{bmatrix}\lim_{t\to\infty} \dot{x(t)}\\ \lim_{t\to\infty} \dot{\xi}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lim_{t\to\infty} x(t)\\ \lim_{t\to\infty} \xi(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\lim_{t\to\infty} u(t) + r\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad (9)$$

Haciendo (8) - (9)

$$\begin{bmatrix}\dot{e_x}\\ \dot{e_\xi}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}\begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}}_{\tilde{B}}e_u \quad (10)$$

Se define la variable de estado como

$$E = \begin{bmatrix}e_x\\ e_\xi\end{bmatrix}$$

El sistema (10)

$$\dot{E} = \tilde{A}E + \tilde{B}e_u \quad (11)$$

Sustituyendo E en la definición de e_u

$$e_u = -\tilde{k}E \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11)

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \tilde{A}E + \tilde{B}(-\tilde{k}E) \\ &= \tilde{A}E - \tilde{B}\tilde{k}E \\ &= (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k})E\end{aligned}$$

Se resuelve como un problema de asignación de polos para la matriz $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{k}$

2.16. Regulación de sistemas lineales: caso 3

La planta tiene un integrador, es decir, un polo en el origen
Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

La entrada del sistema es

$$\begin{aligned} u &= k_1(r - x_1) - k_2x_2 - k_3x_3 - \ldots - k_nx_n \\ &= k_1r - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - \ldots - k_nx_n \\ &= k_1r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= k_1r - kx \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(k_1r - kx) \\ &= Ax + Bk_1r - Bkx \\ &= (A - Bk)x + Bk_1r \end{aligned}$$

El problema de regulación se resuelve como un problema de ubicación de polos para la matriz $A - Bk$

2.17. Criterios para asignación de polos en lazo cerrado

Sea el sistema

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array}\right.$$

hay dos casos al momento de obtener la función de transferencia

- a) Sin ceros

$$\frac{x(s)}{y(s)} = \frac{b}{s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_n} = \frac{b}{(s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n)}$$

- b) Con ceros y polos

$$\frac{x(s)}{y(s)} = \frac{(s-q_1)(s-q_2)\ldots(s-q_m)}{(s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n)} \text{ con } m < n$$

La función de transferencia se aproxima a un sistema de segundo orden, de la forma

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{W_n}{s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2} \quad (2)$$

Donde

$$\xi : \text{amortiguamiento}$$
$$W_n : \text{frecuencia natural}$$

Entonces se define el máximo sobre impulso

$$M_p = e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

Tiempo de asentamiento: tiempo para mantenerse alrededor del valor final

$$t_s = \frac{4}{\xi W_n} \text{ Criterio del } 2\,\%$$
$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} \text{ Criterio del } 5\,\%$$

La ecuación (2) se resuelve

$$\text{polos dominantes} < S_{1,2} = -\xi W_n \pm W_n(\sqrt{\xi^2 - 1})$$

Polos no dominantes: deben de estar mas alejados de los dominantes, al menos 5 veces en valor absoluto del polo dominante

Para el caso b) eliminar los ceros con los polos, tal que

$$\mu_3 \approx q_1, \mu_4 \approx q_2, \ldots, \mu_{n+m} \approx q_m$$

2.18. Estabilidad de Lyapunov

Método 1 directo
Requiere de la solución del sistema

Método 2 indirecto
No requiere solución del sistema, se basa en la dinámica del sistema

Definición (función definida positiva) Una función escalar $V(x)$ es definida positiva si

$$
\begin{aligned}
&1)\ V(0) = 0 \\
&2)\ V(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0
\end{aligned}
$$

Definición (forma cuadrática)
Sea una matriz $p > 0$ y sea simétrica $P = P^T$ Con $V(x) = x^T P x > 0$ Se tiene la desigualdad de Rayleight

$$
\begin{aligned}
\lambda_{min}(P)||x||^2 \leq & V(x) = x^T P x \leq \lambda_{max}(P)||x||^2 \\
\lambda_{min}(I)||x||^2 \leq & V(x) \leq \lambda(I)||x^*||^2
\end{aligned}
$$

Sea el sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x) \\
x(0) &= x_0
\end{aligned}
$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estado y $f : R^n \to R^n$

Definición (punto de equilibrio) Un punto de equilibrio es aquel que satisface $f(x^*) = 0$

- a) Tiene un punto de equilibrio:

$$x^* = 0 \text{ Si A es invertible}$$

- b) Tiene un numero infinito de puntos de equilibrio, si A no es invertible

Segundo método de Lyapunov

Sea el sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x) \\
f(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Si existe una función $V(x)$ tal que

$$
\begin{cases}
(1)V(x) > 0 \\
(2)\dot{V}(x)\big|_{(x)} < 0
\end{cases}
$$

entonces el punto de equilibrio es asintoticamente estable.

Sea el sistema (1) $\dot{x} = Ax$ determinar las condiciones de estabilidad en el sentido de Lyapunov

- 1)

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T, \quad P > 0$$

- 2)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x} P x + x^T P \dot{x} \qquad \dot{x}^T = (Ax)^T = x^T A^T \\
&= x^T A^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= x^T (A^T P + PA) x \quad \text{Sea } Q > 0 \ A^T P + PA = -Q \\
&= -x^T Q x
\end{aligned}$$

3. UNIDAD III Introducción a los sistemas discretos

Un sistema en tiempo discreto se define en función de un periodo de muestreo T y un instante de muestreo k

$$x((x+1)k) = f(k, x(k), T)$$

Si T es constante

$$x(k+1) = f(k, x(k))$$

Las raíces del polinomio característico define la estabilidad del sistema.

Si todas las raíces tienen magnitud menor o igual que 1, el sistema es estable

$$|\mu_i| \leq 1$$

3.1. Forma canónica controlable

considere la representación entrada-salida

$$(1)\ \ y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n)$$

Aplicando transformada Z a (1)

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) = b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_n z^{-n} U(z)$$

Se obtiene la función de transferencia

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} \\ (2) &= \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} \end{aligned}$$

De (2)

$$\frac{Y(z)}{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}} = \frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} = Q(z)$$

$$U(z) = Q(z) + a_1 z^{-1} Q(z) + a_2 z^{-2} Q(z) + \ldots + a_n z^{-n} Q(z)$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} Q(z) = -a_1 z^{-1} Q(z) - a_2 z^{-2} Q(z) - \ldots - a_n z^{-n} Q(z) + U(z) \\ Y(z) = b_1 z^{-1} Q(z) + b_2 z^{-2} Q(z) + \ldots + b_n z^{-n} Q(z) \end{array} \right.$$

A partir de (3) se definen las variables de estado

$$(4)\ \ X(z) = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_{n-1}(z) \\ X_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-n} \\ z^{-n+1} \\ \vdots \\ z^{-2} \\ z^{-1} \end{bmatrix} Q(z)$$

Haciendo el cambio de variables en (3)

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} Q(z) = -a_n X_1 - a_{n-1} X_2 - \ldots - a_2 X_{n-1}(z) - a_1 X_n(z) + U(z) \\ Y(z) = b_1 X_n(z) + b_2 x_{n-1}(z) + \ldots + b_n X_1(z)\ \ = [b_n\ b_{n-1}\ \ldots\ b_1] X(z) \end{array} \right.$$

Multiplicamos (4) por z

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} zX_1(z) = z^{-n+1} Q(z) = X_2(z) \\ zX_2(z) = z^{-n+2} Q(z) = X_3(z) \\ \qquad \vdots \\ zX_{n-1}(z) = z^{-1} Q(z) = X_n(z) \\ zX_n(z) = Q(z) \end{array} \right.$$

Se sustituye (4) en (5), considerando el ultimo termino de (6)

$$(7)\begin{cases} zX_n(z) = Q(z) = [-a_n \ -a_{n-1} \ \dots \ -a_1]X(z) + U(z) \\ Y(z) = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1]X(z) \end{cases}$$

se aplica la transformada inversa a las variables de estado(4)

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_{n-1}(k) \\ X_n(k) \end{bmatrix}$$

Se aplica la transformada inversa a (6) y (7)

$$(7)\begin{cases} X_1(k+1) = X_2(k) \\ X_2(k+1) = X_3(k) \\ \quad\vdots \\ X_{n-1}(k+1) = X_n(k) \\ X_n(k+1) = Q(k) = [-a_n \ -a_{n-1} \ \dots \ -a_1]X(k) + U(k) \\ y(k) = [b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1]X(k) \end{cases}$$

se obtiene la forma canónica controlable de (7)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots b_2 & b_1 \end{bmatrix} X(k)$$

3.2. Forma canónica observable

Considere el sistema (1)

$$
\begin{aligned}
(1)\ \ & y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) \\
& = b_1 u(k-n) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_n u(k-n)
\end{aligned}
$$

Aplicando transformada Z a la ecuación (1)

$$
\begin{aligned}
& Y(z) + a_1 z^{-1} Y(Z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) \\
& = b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z) + \ldots + b_n z^{-n} U(z) \\
& Y(z) = z^{-1}[b_1 U(z) - a_1 Y(z)] + z^{-2}[b_2 U(z) - a_2 Y(z)] + \ldots + \\
& z^{-n+1}[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z)] + \ldots + z^{-n}[b_n U(z) - a_n Y(z)] \\
& Y(z) = z^{-1}[b_1 U(z) - a_1 Y(z)] + z^{-1} z^{-1}[b_2 U(z) - a_2 Y(z)] + \ldots + \\
& z^{-n+1}[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z)] + \ldots + z^{-n}[b_n U(z) - a_n Y(z)] \\
(2) & Y(z) = z^{-1}[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + z^{-1}\{b_2 U(z) - a_2 Y(z) + z^{-1}(b_3 U(z) - a_3 Y(z) + \ldots + \\
& z^{-1}[b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + z^{-1}(b_n U(z) - a_n Y(z))] \ldots)\}]
\end{aligned}
$$

Con $Y(z) = x_n(z)$, a partir de (2) se definen las variables de estado

$$
(3) \begin{cases}
X_1(z) = z^{-1}(b_n U(z) - a_n Y(z)) \\
x_2(z) = z^{-1}(b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z)) \\
\qquad \vdots \\
x_{n-1}(z) = z^{-1}(b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z)) \\
X_n(z) = z^{-1}(b_1 U(z) - a_1 X_n(z) + x_{n-1}(z))
\end{cases}
$$

Se multiplica (3) por z y se agrega la salida del sistema

$$
(4) \begin{cases}
z X_1(z) = b_n U(z) - a_n Y(z) \\
z x_2(z) = b_{n-1} U(z) - a_{n-1} Y(z) + X_1(z) \\
\qquad \vdots \\
z x_{n-1}(z) = b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z) \\
z X_n(z) = b_1 U(z) - a_1 X_n(z) + x_{n-1}(z) \\
Y(z) = x_n(z)
\end{cases}
$$

Aplicando transformada inversa a (4)

$$
(5) \begin{cases}
X_1(k+1) = b_n u(k) - a_n y(k) \\
X_2(k+1) = b_{n-1} u(k) - a_{n-1} y(k) + X_1(k) \\
\qquad \vdots \\
X_{n-1}(k+1) = b_2 u(k) - a_2 y(k) + X_{n-2}(k) \\
X_n(k+1) = b_1 u(k) - a_1 X_n(k) + x_{n-1}(k) \\
y(k) = X_n(k)
\end{cases}
$$

A partir de (5) se obtiene la forma canónica observable

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k)
\end{aligned}
$$

3.3. Forma canónica diagonal

Considere el sistema (1)

$$
\begin{aligned}
(1)\ \ & y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) \\
& = b_1 u(k-n) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_n u(k-n)
\end{aligned}
$$

Se obtiene la función de transferencia

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} \frac{z^n}{z^n} \\
&= \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n} \\
&= \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n}{(s-q_1)(s-q_2)\ldots(s-q_n)}
\end{aligned}
$$

Sea $q_1, q_2, \ldots, q_n$, raíces del polinomio P(z). Se asume que todas las raíces son distintas, entonces se define (2) en fracciones parciales

$$
(3)\ \ \frac{C_1}{z-q_1} U(z) + \frac{C_2}{z-q_2} U(z) + \ldots + \frac{C_n}{z-q_n} U(z)
$$

Se definen las variables de estado de (3)

$$
(4) \begin{cases}
X_1(z) = \frac{1}{z-q_1} U(z) \\
x_2(z) = \frac{1}{z-q_2} U(z) \\
\qquad \vdots \\
X_n(z) = \frac{1}{z-q_n}
\end{cases}
$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$
\begin{aligned}
& Y(z) = X_1 C_1 + X_2 C_2 + \ldots + X_n C_n \\
(5)\ \ & Y(z) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{bmatrix} X(z)
\end{aligned}
$$

Si se toma una variable de estado

$$
\begin{aligned}
X_1(z) &= \frac{1}{z-q_1} U(z) \\
X_1(z)(z-q_1) &= U(z) \\
zX_1(z) - X_1(z) q_1 &= U(z) \\
zX_1(z) &= U(z) + X_1(z) q_1
\end{aligned}
$$

Aplicando el mismo procedimiento a todas las variables de estado

$$(6)\begin{cases} zX_1(z) & = U(z) + X_1(z)q_1 \\ zX_2(z) & = U(z) + X_2(z)q_2 \\ \quad\vdots & \\ zX_n(z) & = U(z) + X_n(z)q_n \end{cases}$$

Aplicando transformada inversa a (5) y (6)

$$(7)\begin{cases} X_1(k+1) & = q_1X_1(k) + u(k) \\ X_2(k+1) & = q_2X_2(k) + u(k) \\ \quad\vdots & \\ X_n(k+1) & = q_nX_n(k) + u(k) \\ y(k) & = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

A partir de (7) se obtiene la forma canónica diagonal

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} X(k)$$

3.4. Solución de ecuaciones en espacio de estados

Considere el sistema

$$(1)\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$

El problema consiste en determinar el vector de estado $x(k)$ y la salida $y(k)$

Se aplica la transformada Z al sistema (1)

$$\begin{cases} \mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{Ax(k)\} + \mathcal{Z}\{Bu(k)\} \\ \mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{Cx(k)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} zX(z) - zX(0) = AX(z) + BU(z) \\ y(z) = CX(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} zX(z) - AX(z) = zX(0) + BU(z) \\ y(z) = CX(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (zI - A)X(z) = zX(0) + BU(z) \\ y(z) = CX(z) \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}zX(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ y(z) = C(zI - A)^{-1}zX(0) + C(zI - A)^{-1}BU(z) \end{cases}$$

Para condiciones iniciales $X(0) = 0$

$$\left.\frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B \right\} \begin{array}{l}\text{Matriz de} \\ \text{transferencia}\end{array}$$

Aplicando transformada inversa a (2)

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\}x(0) + \mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}BU(z)\}$$

$$y(k) = Cx(k) = \underbrace{C\mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\}x(0)}_{\substack{\text{Solución homogénea} \\ \text{natural}}} + \underbrace{C\mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}BU(z)\}}_{\substack{\text{Solución particular} \\ \text{forzada}}}$$

Se define la matriz de transición de estado

$$\mathcal{Z}^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\}$$

3.5. Discretización de ecuaciones en espacio de estado

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con condición inicial $x(0) = x_0$ El problema de discretización consiste en obtener un sistema dinámico equivalente para el sistema (1) en tiempo discreto de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \dot{x}((k+1)T) = Ax(kT) + Bu(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) \end{cases}$$

La solución de la ecuación (1) es

$$(2)\;\; x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Haciendo $t = (k+1)T$ en la ecuación (2)

$$(3)\;\; x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Haciendo $t = kT$ en la ecuación (2)

$$(4)\;\; x(kT) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT}\int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Multiplicar (4) por e^{AT}

$$\begin{aligned}(5)\;\; e^{AT}x(kT) &= e^{AT}e^{AkT}x(0) + e^{AT}e^{AkT}\int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T}\int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Restarle (5) a (3)

$$\begin{aligned}
x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau - \\
e^{A(k+1)T} \int_0^{kT} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \\
= e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau \\
x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Se asume $u(t)$ es constante para $kT \leq t \leq (k+1)T$

$$(6) \;\; x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau Bu(kT)$$

Se puede ver que $e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau$ se puede resolver por cambio de variable

$$\begin{aligned}
u &= -A\tau \\
du &= -Ad\tau \\
-A^{-1}du &= d\tau \\
&\text{con limites} \\
u_{kT} &= -AkT \\
u_{(k+1)T} &= -A(k+1)T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} d\tau &= e^{A(k+1)T} \int_{-AkT}^{-A(k+1)T} e^{u}(-A^{-1})du \\
&= e^{A(k+1)T} \Big|_{-AkT}^{-A(k+1)T} e^{u}(-A^{-1}) \\
&= e^{A(k+1)T} [e^{-A(k+1)T} - e^{-AkT}](-A^{-1}) \\
&= [e^{0} - e^{AT}](-A^{-1}) \\
&= [e^{AT} - I]A^{-1}
\end{aligned}$$

El resultado es el mismo si se aplica la integral por un periodo T, usando el mismo cambio de variable, pero cambiando los limites a

$$\begin{aligned}
u_T &= -AT \\
u_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau}d\tau &= e^{AT}\int_0^{-AT} e^{u}(-A^{-1})du \\
&= e^{AT}\big|_0^{-AT} e^{u}(-A^{-1}) \\
&= e^{AT}[e^{-AT} - e^{0}](-A^{-1}) \\
&= [e^{0} - e^{AT}](-A^{-1}) \\
&= [e^{AT} - I]A^{-1}
\end{aligned}
$$

por lo tanto, es posible sustituir la integral de (6)

$$
\begin{aligned}
(6)\ \ x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) + e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau}d\tau Bu(kT) \\
&= e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau Bu(kT)
\end{aligned}
$$

se realiza un cambio de variable

$$
\begin{aligned}
\lambda &= T - \tau \\
d\lambda &= -d\tau \\
&\text{con limites} \\
\lambda_T &= 0 \\
\lambda_0 &= T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) - \int_T^0 e^{A\lambda}d\lambda Bu(kT) \\
&= e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda}d\lambda Bu(kT)
\end{aligned}
$$

Entonces se definen

$$
\begin{aligned}
A(t) &= e^{AT} \\
B(t) &= \Big(\int_0^T e^{A\lambda}d\lambda\Big)B
\end{aligned}
$$