Control Sistemas Mecatronicos

BMJIvan

9 de agosto de 2021

1. Solución de ecuaciones en espacio de estado

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{array}\right.$$

con condición inicial

$$x(0)=x_0.$$

$$A:n\times n,\ \ x:n\times 1,\ \ B:n\times m,\ \ u:m\times 1,\ \ C:p\times n,\ \ y:p\times 1,$$

El problema consiste en determinar $x(t)$ y la respuesta $y(t)$
Aplicando la transformada de Laplace a (1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t)\}+\mathcal{L}\{Bu(t)\}\\
sX(s)-X(0) &= AX(s)+Bu(s)\\
\underbrace{sX(s)}_{n\times 1}-\underbrace{AX(s)}_{n\times 1} &= X(0)+Bu(s)\\
(sI-A)X(s) &= X(0)+Bu(s)\\
X(s) &= (sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}Bu(s)\\
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}x(0)+\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}\\
y(t) &= \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}X(0)}_{\substack{\text{Solución homogenea}\\ \text{Respuesta en estado transitorio}\\ \text{Respuesta natural}}}+\underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}}_{\substack{\text{Solución particular}\\ \text{Respuesta en estado estacionario}\\ \text{Respuesta forzada}}}
\end{aligned}$$

2. Transformación de similitud

considere el vector $q : n \times 1$ ($q \in R^n$). El conjunto de vectores $q_1, \ldots, q_m$ es linealmente independiente si existen numero reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos cero, tales que

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_1 q_1 \ldots, \alpha_n q_n = 0 \;\; (1)$$

Si la solución unica de (1) es $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_m$ entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes (l.i).

A la expresión $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_n q_n$ se le denomina combinación lineal.

Base: Un conjunto de vctores l.i en R^n se define como una base si se puede expresar como una combinación lineal unica.

En R^n todo conjunto de vectores l.i puede utilizarse como una base.

Sea $X : n \times 1$ todo vector X puede expresarse como

$$X = \alpha_1 q_1 + \ldots \; + \alpha_n q_n \;\; (2)$$

donde q_i son l.i.

De (2) se tiene que

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} \;\; (3)$$

se definen

$$Q = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}, \;\; \tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en (3) se tiene que

$$X = Q\tilde{X}$$

donde X y $\tilde{X}$ son similares.

De (2) $X^\top = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n \;\; S_i : 1 \times n$

$$X^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Una matriz es estable cuando los valores propios son negativos.

Sea la ecuacion lineal

$$Ax = y \;\; (4)$$

donde $A : n \times n \;\; B : n \times 1 \;\; y : n \times 1$ se definen

$$x = Q\tilde{x}, \;\; y = Q\tilde{y}$$

sustituyendo en (4) se tiene que

$$\begin{aligned} AQ\tilde{x} &= Q\tilde{y} \\ Q^{-1}AQ\tilde{x} &= \tilde{y} \;\; (5) \end{aligned}$$

donde A y $Q^{-1}AQ$ son similares y A esta relacionada con la estabilidad.

ejercicio: Sea $A : n \times n$ una matriz estable, demuestre que la matriz $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ es tambien estable, considere que Q es invertible.

Si

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) &= \lambda^n + alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \\ det(\lambda I - \tilde{A}) &= \lambda^n + alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}\lambda Q - Q^{-1}AQ) \\ &= det(Q^{-1}(\lambda I - A)Q) \\ &= det(Q^{-1})det(\lambda I - A)det(Q) \\ &= det(Q^{-1})det(Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(Q^{-1}Q)det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

repetir el ejercicio anterior considerando la siguiente matriz $\tilde{A} = QAQ^{-1}$

$$\begin{aligned} det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\ det(\lambda I - A) &= det(\lambda I - QAQ^{-1}) \\ &= det(\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q\lambda Q^{-1} - QAQ^{-1}) \\ &= det(Q(\lambda I - A)Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(\lambda I - A)det(Q^{-1}) \\ &= det(Q)det(Q^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(QQ^{-1})det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

3. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{A}^{\text{estabilidad}} \; x(t) + \underbrace{B}_{\textbf{controlabilidad}} \; u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} X &: n \times 1 \\ A &: n \times n \\ B &: n \times m \;\; \textit{entradas} \\ u &: m \times 1 \\ C &: p \times n \\ y &: P \times 1 \;\; \textit{salidas} \end{aligned}$$

Controlabilidad: Existencia de una entrada $u(t)$ tal que cada variable de estado se pueda manipular de manera independiente. Es decir, las entradas cambian las variables.

Observabilidad: Consiste en determinar el estado inicial a partit de la salida $y(t)$. Es decir, las condiciones iniciales afectan la salida.

Definición 1. El sistema (1) es controlable si existe $u(t)$ tal que para todo estado inicial $x_0 = x(0)$ y todo estado final $x_f = x(T)$, el sistema puede llevarse de x_0 a x_f en tiempo finito.

4. Solución de ecuaciones en espacio de estado 2

Se condidera el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad x(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - Ax(t) &= Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t)) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\
\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= \int_0^t Bu(\tau)d\tau \\
e^{-A\tau}\Big|_a^b &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{-At}x(t) - e^0x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{At}(e^{-At}x(t) - e^0x(0)) &= e^{At}\Big(\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\Big) \\
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + C
\end{aligned}$$

anteriormente se obtuvo

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

A continuación se desarrollará los dos terminos un poco mas.

Se considera la matriz exponencial de la siguiente forma

$$f(t) = e^{At} \quad f(0) = I$$

entonces, partiendo de la derivada

$$
\begin{aligned}
f(\dot{t}) &= Ae^{At} = Af(t) \\
\mathcal{L}\{f(\dot{t})\} &= \mathcal{L}\{Af(t)\} \\
sF(s) - AF(s) &= AF(s) \\
sF(s) - AF(s) &= F(0) \\
(sI - A)F(s) &= I \\
(sI - A)^{-1}(sI - A)F(s) &= (sI - A)^{-1}I \\
F(s) &= (sI - A)^{-1} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, considerando la definicion de la convolución

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Según el teorema de la covolución. si $\mathcal{L}\{f(t)\}y\mathcal{L}\{g(t)\}$ existen para $s > a \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

considerando las ecuaciones

$$f(t) = e^{At}, \quad g(t) = Bu(t)$$

Se tiene que

$$\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau = f * g$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big\{\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau\Big\} &= \mathcal{L}\Big\{f * g\Big\} \\
&= F(s)G(s) \\
&= (SI - A)^{-1}Bu(s)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto aplucando la transformada inversa de Laplace se obtiene

$$\int_0^t e^{At-\tau}Bu(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\Big\{(SI - A)^{-1}Bu(s)\Big\}$$

5. Criterios de estabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es controlable si cumple alguno de los siguientes criterios.
1) Controlabilidad de Kalman La matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} \underbrace{B}_{n\times m} & \underbrace{AB}_{n\times m} & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \Big\} n \times nm$$

para $m = 1$ (una entrada), con $det(C) \neq 0$ es de rango completo, es decir, $rango(C) = n$.
2) Controlabilidad de Hautus La matriz de controlabilidad

$$H = \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} \Big\} n \times (n+m)$$

es de rango completa, $rango(HC) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$
3) Gramiano de controlabilidad

$$G_c = \int_0^t e^{At\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

es invertible, es decir, $det(G_c) \neq 0$)
4) Los valores propios de la matriz $A - Bk$ pueden asignarse arbitrariamente.

6. Criterios de observabilidad

El sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

O el par (A, B) es observable si cumple alguno de los siguientes criterios.
1) Observabilidad de Kalman La matriz de observabilidad

$$C = \left.\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} pn \times n$$

es de rango completo, $rango(C) = n$.
2)Observabilidad de Hautus La matriz de observabilidad

$$H_o = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

es de rango completa, $rango(H_o) = n$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

3) Gramiano de observabilidad

$$G_o = \int_0^t e^{At\tau} C^T C e^{A^T\tau} d\tau$$

es invertible, $det(G_o) \neq 0)$

4) Los valores propios de la matriz $A-LC$ pueden asignarse arbitrariamente.

7. Forma Canonica Controlable

Ejercicio: demostrar que la propiedad de controlabilidad es invariante para cualquier transformación de similtud

Se considera la transformación de similitud

$$(1) X = P^{-1}z$$

donde P es invertible Se toma el sistema

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Se sustituye (1) en (2) para conseguir $P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + Bu$, y asi, obtener el sistema

$$(3) \begin{cases} \dot{z}(t) = \overbrace{PAP^{-1}}^{\tilde{A}} + \overbrace{PBu}^{\tilde{B}} \\ y(t) = CP^{-1} \end{cases}$$

donde A y PAP^{-1} son invariantes, se tiene que $\lambda(A) = \lambda(PAP^{-1})$ debido a que P es invertible, entonces $rango(\tilde{C}) = rango(C)$.

Se obtiene la matriz de controlabilidad para los sitemas (2) y (3) respectivamente.

$$(4) \;\; C = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$$

$$(5) \;\; \tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \ldots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Considerando que $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$, se sustituye las matrices similares de (3) en (5)

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= [PB, PAP^{-1}PB, PA^2P^{-1}PB, \ldots, PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ \tilde{C} &= P[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] \\ \tilde{C} &= PC \end{aligned}$$

Lo que se busca es la matriz P, por lo tanto, de la ecuación anterior se puede despejar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= PC \\ \tilde{C}\tilde{C}^{-1} &= PC\tilde{C}^{-1} \\ I &= PC\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1}I &= C\tilde{C}^{-1} \\ P^{-1} &= C\tilde{C}^{-1} \quad (6) \end{aligned}$$

Ahora se tomará el sistema de entradas y salidas

$$\begin{aligned}
y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \ldots + a_n y(t) &= b_1 u^{n-1}(t) + \ldots + b_n u(t) \\
\mathcal{L}\{y^n(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \ldots + a_n y(t)\} &= \mathcal{L}\{b_1 u^{n-1}(t) + \ldots + b_n u(t)\} \\
y(s)s^n + a_1 y(s)s^{n-1} + \ldots + a_n y(s) &= b_1 u(s)s^{n-1} + \ldots + b_n u(s) \\
y(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n) &= u(s)(b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n)
\end{aligned}$$

Se escribe la función de transferencia como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Si consideramos una función de transferencia racional (sin retardo) y estrictamente propia (orden del denominador mayor que el numerador)

$$g(s) = N(s)D(s)^{-1}$$

donde N(s) y D(s) son polinomios. Por lo tanto, la función de transferencia se puede escribir como

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = N(s)D(s)^{-1}$$

La salida del sistema se puede escribir como

$$y(s) = N(s)D(s)^{-1}u(s)$$

donde $v(s) = D(s)^{-1}u(s)$. Entonces la entrada y la salida se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
u(s) &= D(s)v(s) \\
y(s) &= N(s)v(s)
\end{aligned}$$

Se definen las variables de estado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_{n-1}(s) \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{n-1} \\ S^{n-2} \\ \vdots \\ S \\ 1 \end{bmatrix} v(s)$$

entonces las variables de estado se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
X_n &= v(s) \\
X_{n-1} &= sv(s) = sX_n(s) \\
X_{n-2}(s) = S^2 v(s) &= s(sv(s)) = sX_{n-1}(s) \\
&\vdots \\
X_2(s) &= sX_3(s) \\
X_1(s) &= sX_2(s)
\end{aligned}$$

Si se sustituyen las variables de estado en la entrada se obtiene lo siguiente

$$u(s) = sX_1(s) + a_1X_1(s) + \ldots + a_nX_n(s)$$

Se despeja $sX_1(s)$

$$sX_1(s) = -a_1X_1(s) - \ldots - a_nX_n + u(s)$$

Entonces es posible escribir el espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} SX_1(s) \\ SX_2(s) \\ \vdots \\ SX_n(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(s)$$

Según la definición de la matriz similar de controlabilidad

$$\tilde{C} = [\tilde{B}, \tilde{A}\tilde{B}, \tilde{A}^2\tilde{B}, \cdots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

Se usará una matriz de 3*3 para encontrar un patrón

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_1^2 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa esta dada por

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz de controlabilidad se puede expresar como

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la matriz de controlabilidad

$$C = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$P^{-1} = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$