Control Sistemas Mecatronicos

BMJIvan

9 de agosto de 2021

1. Solución de ecuaciones en espacio de estado

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{array}\right.$$

con condición inicial

$$x(0)=x_0.$$

$$A:n\times n,\;\; x:n\times 1,\;\; B:n\times m,\;\; u:m\times 1,\;\; C:p\times n,\;\; y:p\times 1,$$

El problema consiste en determinar $x(t)$ y la respuesta $y(t)$
Aplicando la transformada de Laplace a (1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t)\}+\mathcal{L}\{Bu(t)\}\\
sX(s)-X(0) &= AX(s)+Bu(s)\\
\underbrace{sX(s)}_{n\times 1}-\underbrace{AX(s)}_{n\times 1} &= X(0)+Bu(s)\\
(sI-A)X(s) &= X(0)+Bu(s)\\
X(s) &= (sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}Bu(s)\\
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}x(0)+\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}\\
y(t) &= \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}X(0)}_{\substack{\text{Solución homogenea}\\ \text{Respuesta en estado transitorio}\\ \text{Respuesta natural}}}+\underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}}_{\substack{\text{Solución particular}\\ \text{Respuesta en estado estacionario}\\ \text{Respuesta forzada}}}
\end{aligned}$$

2. Transformación de similitud

considere el vector $q : n \times 1$ ($q \in R^n$). El conjunto de vectores $q_1, \ldots, q_m$ es linealmente independiente si existen numero reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ no todos cero, tales que

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_1 q_1 \ldots, \alpha_n q_n = 0 \quad (1)$$

Si la solución unica de (1) es $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_m$ entonces el conjunto de vectores es linealmente independientes (l.i).

A la expresión $\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_n q_n$ se le denomina combinación lineal.

Base: Un conjunto de vctores l.i en R^n se define como una base si se puede expresar como una combinación lineal unica.

En R^n todo conjunto de vectores l.i puede utilizarse como una base.

Sea $X : n \times 1$ todo vector X puede expresarse como

$$X = \alpha_1 q_1 + \ldots \; + \alpha_n q_n \quad (2)$$

donde q_i son l.i.

De (2) se tiene que

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{n \times 1} \quad (3)$$

se definen

$$Q = \begin{bmatrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en (3) se tiene que

$$X = Q\tilde{X}$$

donde X y $\tilde{X}$ son similares.

De (2) $X^\top = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n \;\; S_i : 1 \times n$

$$X^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Una matriz es estable cuando los valores propios son negativos.

Sea la ecuacion lineal

$$Ax = y \quad (4)$$

donde $A : n \times n \;\; B : n \times 1 \;\; y : n \times 1$ se definen

$$x = Q\tilde{x}, \;\; y = Q\tilde{y}$$

sustituyendo en (4) se tiene que

$$AQ\tilde{x} = Q\tilde{y}$$
$$Q^{-1}AQ\tilde{x} = \tilde{y} \;\; (5)$$

donde A y $Q^{-1}AQ$ son similares y A esta relacionada con la estabilidad.

ejercicio: Sea $A : n \times n$ una matriz estable, demuestre que la matriz $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ es tambien estable, considere que Q es invertible.

Si

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0$$
$$det(\lambda I - \tilde{A}) = \lambda^n + alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0$$

entonces

$$\begin{aligned}
det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\
det(\lambda I - \tilde{A}) &= det(\lambda Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) \\
&= det(Q^{-1}\lambda Q - Q^{-1}AQ) \\
&= det(Q^{-1}(\lambda I - A)Q) \\
&= det(Q^{-1})det(\lambda I - A)det(Q) \\
&= det(Q^{-1})det(Q)det(\lambda I - A) \\
&= det(Q^{-1}Q)det(\lambda I - A) \\
&= det(\lambda I - A)
\end{aligned}$$

repetir el ejercicio anterior considerando la siguiente matriz $\tilde{A} = QAQ^{-1}$

$$\begin{aligned}
det(\lambda I - \tilde{A} &= det(\lambda I - A) \\
det(\lambda I - A) &= det(\lambda I - QAQ^{-1}) \\
&= det(\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}) \\
&= det(Q\lambda Q^{-1} - QAQ^{-1}) \\
&= det(Q(\lambda I - A)Q^{-1}) \\
&= det(Q)det(\lambda I - A)det(Q^{-1}) \\
&= det(Q)det(Q^{-1})det(\lambda I - A) \\
&= det(QQ^{-1})det(\lambda I - A) \\
&= det(\lambda I - A)
\end{aligned}$$

3. Controlabilidad y observabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{A}^{\text{estabilidad}} x(t) + \underbrace{B}_{\textbf{controlabilidad}} u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} X &: n \times 1 \\ A &: n \times n \\ B &: n \times m \ \ \textit{entradas} \\ u &: m \times 1 \\ C &: p \times n \\ y &: P \times 1 \ \ \textit{salidas} \end{aligned}$$

Controlabilidad: Existencia de una entrada $u(t)$ tal que cada variable de estado se pueda manipular de manera independiente. Es decir, las entradas cambian las variables.

Observabilidad: Consiste en determinar el estado inicial a partit de la salida $y(t)$. Es decir, las condiciones iniciales afectan la salida.

Definición 1. El sistema (1) es controlable si existe $u(t)$ tal que para todo estado inicial $x_0 = x(0)$ y todo estado final $x_f = x(T)$, el sistema puede llevarse de x_0 a x_f en tiempo finito.

4. Solución de ecuaciones en espacio de estado 2

Se condidera el sistema

$$(1)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \quad x(0) = X_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - Ax(t) &= Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \\
e^{-At}(\dot{x}(t)) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\
\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-A\tau}x(\tau)) &= \int_0^t Bu(\tau)d\tau \\
e^{-A\tau}\Big|_a^b &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{-At}x(t) - e^0x(0) &= \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \\
e^{At}(e^{-At}x(t) - e^0x(0)) &= e^{At}\Big(\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\Big) \\
x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + C
\end{aligned}$$

anteriormente se obtuvo

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}Bu(s)\}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

A continuación se desarrollará los dos terminos un poco mas.

Se considera la matriz exponencial de la siguiente forma

$$f(t) = e^{At} \quad f(0) = I$$

entonces, partiendo de la derivada

$$
\begin{aligned}
f\dot{(}t) &= Ae^{At} = Af(t) \\
\mathcal{L}\{f\dot{(}t)\} &= \mathcal{L}\{Af(t)\} \\
sF(s) - AF(s) &= AF(s) \\
sF(s) - AF(s) &= F(0) \\
(sI - A)F(s) &= I \\
(sI - A)^{-1}(sI - A)F(s) &= (sI - A)^{-1}I \\
F(s) &= (sI - A)^{-1} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
F(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \\
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, considerando la definicion de la convolución

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

Según el teorema de la covolución. si $\{(\sqcup)y\}(\sqcup)existenpara$