

# Mecánica de fluidos

BMJIvan

23 de septiembre de 2021

# 1. Conceptos fundamentales

$$\text{Aplicaciones} \left\{ \begin{array}{l} \text{Transporte de fluidos} \\ \text{Conversión de la energía} \\ \text{Acondicionamiento de ambiente} \\ \text{Turbomáquinaria} \\ \text{Transporte (vehicular)} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Áreas de} \\ \text{mecánica de fluidos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Aerodinámica} \\ \text{Hidráulica} \\ \text{Hidrología} \\ \text{Metrología} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Hidráulica de potencia} \\ \text{Redes de tubería} \\ \text{Neumática} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Técnicas o} \\ \text{métodos o analíticos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Analíticos} \\ \text{Experimentales} \\ \text{Computacionales} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Diferenciales} \\ \text{Diferenciales} \end{array} \right.$$

Presión, esfuerzo normal: Genera deformaciones lineales

$$P = \lim \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}$$

Esfuerzo cortante: Genera deformaciones angulares

$$\tau = \lim \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

## 1.1. Propiedades de los fluidos

Densidad

$$\rho = \frac{m}{v} \left[ \frac{kg}{m^3}, \frac{lbm}{pie^3}, \frac{slug}{pie^3} \right]$$

Peso específico

$$\gamma = \frac{W_g}{v} = \frac{mg}{v} = \rho g \left[ \frac{N}{m^3}, \frac{lb}{pie^3} \right]$$

Densidad relativa

$$sg = GE = \rho_r = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{H_2O} \quad T=4^\circ C}$$

Viscosidad dinámica o absoluta

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{d\bar{u}}{dy}} \quad \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Gradiente de velocidad}}$$

$$\mu = \frac{\tau y}{\dot{u}} \left[ N \cdot s / m^2, lb \cdot s / pie^2 \right]$$

Viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ m^2 / s, pie^2 / s \right]$$

## 1.2. Gases ideales

Proceso adiabático: Aquel proceso en el que no se gana ni pierde calor, es decir, cuenta con un aislamiento térmico.

En proceso adiabático reversible no hay transferencia de calor y por lo tanto el proceso es isoentrópico.

Un proceso adiabático irreversible no es isoentropico.

$\forall$  : Volumen

$$\nu : \text{volumen específico} \quad \frac{\forall}{m} = \frac{1}{\rho}$$

### 1. Ley de Boyle y Mariotte

Si  $T = \text{constante}$

$$P \propto \frac{1}{\forall}$$

$$P\forall = C$$

$$P_1\forall_1 = P_2\forall_2$$

### 2. Ley de Charles

Si  $P = \text{constante}$

$$\forall \propto T$$

$$\frac{\forall}{T} = C$$

$$\frac{\forall_1}{T_1} = \frac{\forall_2}{T_2}$$

### 3. Ley de Gay - Lussac

Si  $\forall = \text{constante}$

$$P \propto T$$

$$\frac{P}{T} = C$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{P\forall}{T} &= C \\ \frac{P_1\forall_1}{T_1} &= \frac{P_2\forall_2}{T_2} \\ \frac{P\nu}{T} &= nR_u \\ R_u &= \frac{P\forall}{Tn}\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}P &= 1 \text{ atmósfera} \\ T &= 0^\circ C = 273,15K \\ n &= 1 \text{ kmol} \\ \forall &= 22,413m^3 \\ R_u &= 8,314^{kJ}/_{kmol \cdot K} \\ n &= \frac{m}{M} \frac{\text{masa}}{\text{masa molar}} \\ R &= \frac{R_u}{M} \text{ constante del gas}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}R_u &= \frac{P\forall}{T^m/M} = \frac{MP\forall}{Tm} \\ m \frac{R_u}{M} &= \frac{P\forall}{T} \\ \frac{P\forall}{T} &= mR \\ P\forall &= TmR \\ P \frac{\forall}{m} &= TR \\ P\nu &= TR \\ P &= \frac{1}{\nu} TR = \rho TR \\ \frac{P}{\rho} &= TR\end{aligned}$$

### 1.3. Velocidad sonica o acústica y viscosidad

A partir de 1

$$dp \propto - \frac{d\forall}{\forall} dp = -E_v \frac{d\forall}{\forall}$$

Donde  $E_v$  es el modulo de compresibilidad o modulo volumétrico.  
De la definición de masa

$$\begin{aligned}m &= \rho \forall \\dm &= \rho dv + d\rho \forall, \quad dm = 0 \\-\rho d\forall &= d\rho \forall \\-\frac{d\forall}{\forall} &= \frac{d\rho}{\rho}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$dp = E_v \frac{d\rho}{\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad \text{Velocidad del sonido a través de líquidos}$$

$$K = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$$

$$R = C_p - C_v \quad [kJ/kg \cdot K]$$

$$R = ,287^{kJ}/kg \cdot K$$

$$C = \sqrt{\frac{k_p}{\rho}} = \sqrt{KTR}$$

$$E_v = P \quad \text{Proceso isotérmico}$$

$$E_v = KP \quad \text{Proceso isoentropico}$$

Líquidos incompresibles  $\rho = \text{constante}$

Líquidos compresibles  $\rho \neq \text{constante}$

$$\text{Mach} = \frac{\vec{v}}{C} \quad \frac{\text{velocidad fluido}}{\text{velocidad de sonido}}$$

$$\text{Mach} \leq ,3 \quad \text{flujo de gas incompresible}$$

$$\text{Mach} \geq ,3 \quad \text{flujo compresible}$$

$$\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\text{Dinámica}} = \underbrace{v}_{\text{Cinemática}}$$

$$\mu = \text{constante o } 0 \quad \text{ideal o no viscoso}$$

$$\mu \neq \text{constante o } 0 \quad \text{real o viscoso}$$

$$\text{Fluido de acuerdo al comportamiento de la } \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Newtoniano} \left\{ \begin{array}{l} \tau \propto \frac{d\theta}{dt} \text{ deformación} \rightarrow \text{ley de viscosidad de Newton} \\ \tau \text{ no } \propto \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{Series de potencias} \end{array} \right. \\ \text{Visco-elástico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Comportamiento Newtoniano} \\ \text{y no Newtoniano} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dy}$$

Número de Reynolds

$$NR_E = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\overbrace{\rho \vec{v} D}^{\text{Dinámica}}}{\mu} = \frac{\overbrace{\vec{v} D}^{\text{Cinemática}}}{\forall}$$

$$\text{Flujo viscoso} \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo laminar} \left\{ \begin{array}{l} NR_E \leq 2000 \quad (2300) \\ \text{flujo transición} \left\{ \begin{array}{l} 2000 \leq NR_E \leq 4000 \\ \text{flujo turbulento} \left\{ \begin{array}{l} NR_E \geq 4000 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \text{puede ser} \\ \text{laminar o turbulento} \end{array}$$

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel} \rightarrow P_{manométrica}$$

$$Mach > 1 \quad \text{supersónico}$$

$$Mach > 5 \quad \text{hipersónico}$$

$$Mach < 1 \quad \text{sursónico}$$

$$Mach = 1 \quad \text{sónico}$$

$$Mach \leq 1 \quad \text{transónico}$$

$$\dot{V} = \frac{\forall}{t} = \vec{v}A \rightarrow \text{caudal}$$

$$\rho_{gasolina} = 680 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 1,3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 2,85 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{H_2O \text{ mar}} = 1030 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 2,34 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

#### 1.4. Esfuerzo cortante

$$\tau \propto \frac{du}{dt} = \frac{\vec{v}}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{d\vec{v}}{dy}$$

$$\tau \int_0^h dy = \mu \int_0^{\vec{v}}$$

$$\tau h = \mu \vec{v}$$

$$\tau = \mu \frac{\vec{v}}{h}$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

$$\tau = \frac{F_t}{A}$$

Donde  $F_v$  es la fuerza viscosa o tangente

$$\mu \frac{\vec{v}}{h} = \frac{F_v}{A}$$

$$F_v = \frac{\mu \vec{v} A}{h}$$

caso 1:

$$A = \pi d L$$

$$h = \frac{D - d}{2}$$

$$F_v = \frac{2\pi d L \vec{v} \mu}{D - d}$$

caso 2:

$$F_v = W \sin \theta$$

$$h = \frac{\mu \vec{v} A}{W \sin \theta}$$

\*tablas líquidos y gases: mecánica de fluidos Pottev

## 1.5. Tensión o esfuerzo superficial

$$\sigma_s = \frac{F_{\text{tensión}}}{l} \left[ W/m, lb/pie \right]$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{rsy} - Wg = 0$$

$$\sigma_s \pi D \cos \theta - \rho \forall g = 0$$

$$\sigma_s \pi D \cos \theta - \rho g \frac{\pi D^2}{4} h = 0$$

$$\sigma_s \cos \theta = \frac{\rho g D h}{4}$$

$$h = \frac{4 \sigma_s \cos \theta}{\rho g D}$$

## 2. Estática de fluidos

### 2.1. Derivada y series de Taylor

La pendiente de una recta con base de una función

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente en el punto  $x$ , o derivada ocurre cuando

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Los coeficientes de  $(a + b)^n$  se pueden escribir como

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

El cambio de la altura de una función se puede escribir como

$$\Delta f(x) = f(x + r) - f(x)$$

El valor de la altura final es

$$f(x + r) = f(x) + \Delta f(x)$$

Se aplica lo misma operación una segunda vez

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\ &= \Delta(f(x + r) - f(x)) \\ &= f(x + r + r) - f(x + r) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + r) \\ &= f(x + 2r) - 2\Delta f(x) - f(x) \end{aligned}$$

El valor de la altura final es

$$f(x + 2r) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$$

Se vuelve a repetir

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) \\ &= f(x + 3r) - f(x + 2r) - 2\Delta^2 f(x) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + 2r) \\ &= f(x + 3r) - f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta^2 f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta f(x) \\ &= f(x + 3r) - f(x) - 3\Delta f(x) - 3\Delta^2 f(x) \end{aligned}$$



El valor de la altura es

$$f(x + 3r) = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x + nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f(x) + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \dots n}\Delta^n f(x)$$

Haciendo  $h = nr$ , y multiplicando por 1

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1} \frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \dots + \frac{(n(n-1)\dots 1)r^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$  hace que  $r \rightarrow 0$

$$f(x + rn) = f(x + h) = f(x) + hf(x)' + h^2 \frac{f(x)''}{2!} + \dots$$

## 2.2. Principio de Pascal

presión

$$P = \frac{F}{A} \left[ 1Pa = 1^N/m^2, \text{ lb}/\text{pie}^2, \text{ lb}/\text{pul}^2 \right]$$

Presión atmosférica

$$Pa \left[ 1 atm = 760 mmHg = 16,7 \text{ lb}/\text{pul}^2 = 101,325 kPa \right]$$

Presión relativa

$$P_{rel}$$

Presión absoluta

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$P_y \Delta z \Delta x - P \Delta s \Delta x \sin \theta = \rho \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} a_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$

$$P_z \Delta y \Delta x - P \Delta s \Delta x \cos \theta - \rho g \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} = \rho \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} a_z$$

Pero de la figura se puede ver que

$$\Delta z = \Delta s \sin \theta$$

$$\Delta y = \Delta s \cos \theta$$

entonces

$$P_y - P = \rho \frac{\Delta y}{2} a_y$$

$$P_z - P = \frac{\rho}{2} (g + a_z) \Delta z$$

Si  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$ , y  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

$$p_y - P = 0$$

$$P_z - P = 0$$

$$P = P_z = P_y$$

Transmisor de fuerza. Si la presión de un punto es igual a otro

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Transmisor de presión

$$P_1 A_1 = P_2 A_2$$

si  $\Delta z = 1$

$$P = P_x = P_y = P_z$$

### 2.3. Variación de la presión de un fluido en reposo

$$W = dm g$$

$$= \rho g d\forall$$

$$= \rho g dx dy dz$$

$$f(x + \Delta x) = F(X) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \dots$$

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$f(x - \delta x) \approx f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$(CD) P(y + \frac{dy}{2}) = P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$(CI) P(y - \frac{dy}{2}) = P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\begin{aligned}
dF_{sy} &= df_y(+)-df_y(-) \\
&= [(P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}) - (P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2})] dx dz \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \quad (1)
\end{aligned}$$

$$F_{sz} = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \quad (2)$$

$$F_{sx} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{dF_B}_{\text{cuerpo o m\u00e1scas}} &= \rho g dx dy dz \quad (4)
\end{aligned}$$

Fuerza m\u00e1scica: fuerza que act\u00faa sobre la masa de un fluido.

$$d\vec{F}_T = m\vec{a}$$

$$d\vec{F}_s + d\vec{F}_B = m\vec{a}$$

$$d\vec{F}_{sx} + d\vec{F}_{sy} + d\vec{F}_{sz} + \rho g dx dy dz = m\vec{a}$$

$$(-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g) dx dy dz = \rho dx dy dz \vec{a}$$

$$\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}}_{\text{Ecuaci\u00f3n de cantidad de movimiento}} = \rho \vec{a}$$

Ecuaci\u00f3n de cantidad de movimiento

$$\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}}_{\text{Ecuaci\u00f3n vectorial de hidrost\u00e1tica}} = 0$$

Ecuaci\u00f3n vectorial de hidrost\u00e1tica

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

Si  $g_x = g_y = 0$  y  $g_z = -g$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho g \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \\
\partial P &= -\rho g \partial z \\
\int_P^0 dP &= -\rho g \int_{-h}^0 dz \\
-P &= -\rho g(+h) \\
P &= \rho gh
\end{aligned}$$

## 2.4. Fuerzas sobre superficies planas y curvas

### 2.4.1. Fuerza resultante de una distribución de fuerzas hidrostáticas

considerando

$$\begin{aligned}
dF_R &= P dA \\
\frac{dP}{dh} &= \rho g \\
P &= P_o + \rho gh \\
h &= y \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dF_R &= (P_o + \rho gh) dA \quad P_o = 0 \\
&= \rho gh dA
\end{aligned}$$

$$\int_0^{F_R} = \rho g \sin \theta \int y dA$$

$$F_R = \rho g \sin \theta y_{cg} A$$

$$\underbrace{\int_A y_c dA}_{\text{Primer momento de área}} = y_{cg} A$$

### 2.4.2. Localización de la fuerza resultante

$$\begin{aligned}
dM_x &= dF_R \cdot y \\
&= \rho g y \sin \theta y dA \\
&= \rho g y^2 \sin \theta dA
\end{aligned}$$

$$M_{Rx} = \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$F_R y_{cp} = \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$y_{cp} = \frac{\rho g \sin \theta I_{xx}}{\rho g \sin \theta y_{cg} A} = \frac{I_{cg} + y_{cg}^2 A}{y_{cg} A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg}$$

$$\underbrace{\int y^2 dA = I_{xx} = I_{cg} + y_{cg}^2 A}_{\text{Segundo momento de área}}$$

Ejemplo

$$F_H = F_{x2} - F_{x1} = 0$$

$$F_{x2} = F_{x1}$$

$$F_V = 2F_y + 2W_L$$

$$F_x = \rho g \left( h_1 + \frac{r}{2} \right) (rb)$$

$$F_y = \rho g h_1 (rb)$$

$$W = mg$$

$$= \rho \forall g = \rho g \left( R^2 b - \frac{\pi r^2 b}{4} \right)$$

## 2.5. Principio de Arquímedes

$$F_B = F_i - F_s$$

$$= \rho g (h + y) A - \rho g h A$$

$$= \rho g y A$$

$$= \rho g \forall$$

$F_B$  : Fuerza de flotabilidad o Boyante

$\forall$  : Volumen desplazado

### 3. Cinemática de fluidos

#### 3.1. Formas para describir el movimiento de un fluido

##### 3.1.1. Enfoque de Lagrange

Identifica una pequeña masa de fluido en un flujo y describe el movimiento todo el tiempo.

Descripción del movimiento donde las partículas de masa individuales son observadas como función del tiempo.

##### 3.1.2. Enfoque de Euler

Se define un volumen finito llamado volumen de control  $\forall_c$  a través del cual una masa fluye hacia dentro o hacia afuera.

Se definen variables de campo, como función del espacio y tiempo dentro del  $\forall_c$

#### 3.2. Campos de presión y aceleración

##### 3.2.1. Campo de aceleración

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ \vec{v} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\end{aligned}$$

##### 3.2.2. Campo de presión

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x, y, z, t) \\ \vec{v} &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial t}dt\end{aligned}$$

#### 3.3. Ecuación de Euler y Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} \\ &= u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{Parte local}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}_{\text{Parte conectiva}}\end{aligned}$$

Donde

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \dots + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Estable o permanente} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{No estable ni permanente, en transición} \end{array} \right.$$

Ecuación de Euler: para compresible e incompresible. A partir de la ecuación de cantidad de movimiento sin esfuerzos cortantes.

$$-\vec{\nabla} \cdot P + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

$$= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$= \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right)$$

$$\underbrace{\frac{-\vec{\nabla} \cdot P}{\rho}}_{\substack{\text{Fuerzas de presión} \\ \text{debido a las fuerzas} \\ \text{de superficie o contacto}}} + \underbrace{\vec{g}}_{\substack{\text{Fuerzas de gravedad} \\ \text{debido a fuerzas} \\ \text{másicas}}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas de inercia} \\ \text{debido a la} \\ \text{aceleración}}}$$

Ecuación de Navier-Stokes: Solo para incompresibles

$$-\vec{\nabla} \cdot P + \rho \vec{g} + \underbrace{\mu \cdot \nabla^2 \vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas viscosas} \\ \text{debido a la} \\ \text{fricción}}} = \rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x \quad g_y = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y \quad g_z = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z$$

### 3.4. Ecuación de Bernoulli

Presión	$\vec{\nabla} \cdot P$	fuerzas superficie
Fuerza	$\rho \vec{g}$	fuerzas cuerpo
Aceleración	$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$	fuerzas inercia
Viscosidad	$\mu \nabla^2 \vec{v}$	fuerzas fricción

$$\begin{aligned}
\vec{a}_s &= f(s, t) \\
&= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \frac{d\vec{v}}{ds} \\
\frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} &= v \\
\frac{1}{2} dv^2 &= v dv \\
d\vec{F}_{Ts} &= dm \vec{a}_s \\
d\vec{F}_s + d\vec{F}_B &= dm \vec{a}_s \\
PdA - (P + dp)dA - dm g \sin \theta &= dm \frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dpdA - \rho ds dA g \sin \theta &= \rho ds dA \frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dp - \rho ds g \sin \theta &= \rho ds \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \frac{d\vec{v}}{ds} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\
-\frac{dp}{\rho} - dz g &= \vec{v} d\vec{v} \\
\int \left( \frac{dp}{\rho} + g dz + \frac{1}{2} d(\vec{v})^2 \right) &= 0 \\
\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + g z &= \text{constante} \\
\underbrace{\frac{P_1}{\rho}}_{\text{energía o trabajo de flujo}} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1)^2 + g z_1 &= \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v}_2)^2 + g z_2 \\
\underbrace{\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + g z}_{\text{energía mecánica específica}} &= e_{mec}
\end{aligned}$$

### 3.4.1. Por cargas o longitud

$$\begin{aligned}
\frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g} (\vec{v})^2 + z &= \text{constante} = \text{carga total} \\
\underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{\text{Carga presión estática}} + \underbrace{\frac{1}{2g} (\vec{v}_1)^2}_{\text{Carga dinámica}} + \underbrace{z_1}_{\text{Carga elevación o altura}} &= \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} (\vec{v}_2)^2 + z_2
\end{aligned}$$



### 3.4.2. Por presión

$$P + \frac{\rho}{2}(\vec{v})^2 + \rho g z = \text{constante} = \text{Presión total}$$

$$\underbrace{P_1}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{relativa} \\ \text{o estática}}} + \underbrace{\frac{\rho}{2}(\vec{v}_1)^2}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{dinámica}}} + \underbrace{\rho g z_1}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{hidrostática}}} = P_2 + \frac{\rho}{2}(\vec{v}_2)^2 + \rho g z_2$$

Ejemplo

número	cinética	potencial	presión
1	muy pequeña	cero	grande
2	grande	pequeña	cero
3	cero	grande	cero

### 3.5. Ecuación de Bernoulli: termodinámica

e.c: energía cinética

e.p: energía potencial

$$\delta Q = \Delta U + \delta w$$

$$\delta Q = Q_{ent} - Q_{sal}$$

$$\delta W = w_{ent} - W_{ent}$$

$$\delta Q + \delta W = m(\Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p)$$

$$\delta q + \delta w = \Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p$$

$$\underbrace{\Delta P_v + \Delta e.c + \Delta cp = 0}_{\text{Ecuación de Bernoulli}}$$

### 3.6. Caudal

$$\dot{m} = \frac{m}{\Delta t} \left[ kg/s, lbm/s, slug/s, \right]$$

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta} \left[ m^3/s, lt/s, pie^3/s, gpm \right]$$

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \int_A \rho \vec{v}_n dA \\
\dot{V} &= \int_A \vec{v}_n dA \\
\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{velocidad} \\ \text{media} \\ \text{o promedio}}} &= \frac{1}{A} \int_A \vec{u}_n dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 2r \\
r &= \frac{D}{2} \\
A &= \pi r^2 \\
&= \pi \frac{D^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_A &= \dot{V}_B \\
\vec{v}_A A_A &= \vec{v}_B A_B \\
\vec{v}_B &= \vec{v}_A \frac{A_A}{A_B} \\
&= \vec{v}_A \left( \frac{D_A}{D_B} \right)^2
\end{aligned}$$

### 3.7. Ecuación de Torricelli

Velocidad terminal o máxima de caída libre

$$\vec{v} = \sqrt{2gz}$$

## 4. Ecuaciones básicas de los fluidos en forma integral

### 4.1. Transformación de un sistema a volumen de control

- Volumen de control y el sistema ocupan las regiones 1 y 2 en el tiempo  $t$
- Sistema en el instante  $t$  ocupa los volúmenes 1 y 2
- Sistema en el instante  $t + \Delta t$  ocupa los volúmenes 2 y 3

$$N_{sist} = \underbrace{\int_m \eta dm}_{\substack{\text{masa} \\ \text{(sistema)}}} = \underbrace{\int_{\forall} \eta \rho d\forall}_{\substack{\text{volumen} \\ \text{(sistema)}}$$

Donde

$N$  : Propiedad extensiva del sistema

$\eta$  : Propiedad intensiva del sistema

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sist}(t + \Delta t) - N_{sist}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_2(t + \Delta t) + N_3(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t) + N_1(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2 + N_1)(t + \Delta t) - (N_2 + N_1)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\forall_c}(t + \Delta t) - N_{\forall_c}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dN_{\forall_c}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$d\forall_1 = -\hat{n}dA \cdot \vec{v}_1 \cdot \Delta t$$

$$d\forall_3 = \hat{n}dA \cdot \vec{v}_3 \cdot \Delta t$$

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \hat{n} \rho \vec{v} \Delta t dA$$

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \eta \hat{n} \rho \vec{v} \Delta t dA$$

### 4.2. Teorema del transporte de Reynolds

Lagrange  $\rightarrow$  Euler

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{A_3} \eta \rho \vec{v}_3 dA_3 - \int_{A_1} \eta \rho \vec{v}_1 dA_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{sc} \eta \rho \vec{v} dA \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \eta \rho \vec{v} dA}_{\text{Como cambia dentro del volumen de control}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \int \eta \rho \vec{v} dA}_{\text{Flujo de propiedad extensiva neta a través de la superficie de control}}
\end{aligned}$$

### 4.3. Propiedades extensivas e intensivas

Extensiva (N)	Intensiva ( $\eta$ )
m: masa	1: ecuación de continuidad
E: energía	e: energía específica
$\vec{P}$ : cantidad de momento lineal	$\vec{v}$ : velocidad
$\vec{H}$ : cantidad de momento angular	$\vec{v} \times \vec{r}$ : velocidad angular
S: entropía total	s: entropía específica

### 4.4. Masa

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \underbrace{\int_{sc_{ent}}^{sc_{sal}} \rho \vec{v} dA}_{\text{flujo de masa neto}} \\
\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sist}} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall &= \int_{sc_{ent}} (\rho \vec{v} dA)_{ent} - \int_{sc_{sal}} (\rho \vec{v} dA)_{sal}
\end{aligned}$$

### 4.5. Energía

Función de trayectoria no son condición de estado

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{neto} &= \dot{Q}_{ent} - \dot{Q}_{sal} \\
\dot{W}_{neto} &= \dot{W}_{sal} - \dot{W}_{ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dE}{dt} \right|_{sist} &= \dot{Q} - \dot{W} \\
\left. \frac{dE}{dt} \right|_{sist} &= \dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} e \rho d\forall + \int_{sc} e \rho \vec{v} dA \\
\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} &= \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\forall_c} e \rho d\forall}_{\text{Cambio de energía total}} + \underbrace{\int_{sc} e \rho \vec{v} dA}_{\text{Flujo de energía}} \\
\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall &= \int_{sc_{ent}} \rho \vec{v} dA - \int_{sc_{sal}} \rho \vec{v} dA \\
\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} e \rho d\forall + \int_{sc_{salida}} (e \rho \vec{v} dA)_{sal} - \int_{sc_{entrada}} (e \rho \vec{v} dA)_{ent} \\
e_{s \text{ cerrado}} &= u + \frac{1}{2} v^2 + gz \\
e_{s \text{ abierto}} &= P_v + u + \frac{1}{2} \vec{v} + gz
\end{aligned}$$

#### 4.6. Momento lineal

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{sc} \eta \rho \vec{v} dA, \quad N = \vec{P} \quad \eta = \vec{v} \\
\frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{v} \rho d\forall + \int_{sc} \vec{v} \rho \vec{v} dA \\
\sum_{\text{superficie}} F_s + \sum_{\text{cuerpo}} F_B &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{v} \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{v} \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum F_{sx} + \sum F_{Bx} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{u}_x \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_x \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum F_{sy} + \sum F_{By} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{u}_y \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_y \cdot \rho \vec{v} dA
\end{aligned}$$

#### 4.7. Momento angular

$$\begin{aligned}
N = \vec{H} &\rightarrow \eta = \vec{r} \times \vec{v} \\
\frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho d\forall + \int_{sc} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum M_s + \sum M_g &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho d\forall + \int_{sc} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho \vec{v} dA \\
S_{sistema} + S_{generada} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} S \cdot \rho d\forall + \int_{sc} S \cdot \rho \vec{v} dA
\end{aligned}$$

#### 4.8. Para ejercicios

$dh = 0$  permanente o estacionario

$$\frac{dh}{dt} > 0 \text{ y } \frac{dh}{dt} < 0 \text{ transitorio}$$

Flujo permanente: turbina, compresores, ventiladores

$$\int_{\forall} e \rho d\forall = 0$$

Proceso adiabático: no hay transferencia de calor

$$w_{ent} = 0$$

Se le debe proporcionar potencia a una bomba

#### 4.9. Eficiencias

Generador eléctrico

$$\eta_{eólica} = \frac{P_{mec}}{\Delta \dot{E}_c} \quad \Delta \dot{E}_c : \text{ cambio de energía cinética}$$

$$\eta_{\text{generador eléctrico}} = \frac{\dot{W}_{elec}}{P_{mec}}$$

$$\eta_{mec} = \eta_{eólica} \eta_{\text{generador eléctrico}}$$

Bomba

$$\Delta u = 0$$

$$\dot{Q}_{sal} = 0$$

$$\dot{Q}_{ent} = 0$$

$$\dot{W}_{sal} = 0$$

$$\eta_B = \frac{\Delta \dot{E}_p}{P_{mec}} = \frac{P_{hidráulica}}{P_{mec}}$$

$$\eta_{elec} = \frac{P_{mec}}{\dot{W}_{elec}} = \frac{P_{mec}}{P_{elec}}$$

$$\eta_{mec} = \eta_B \cdot \eta_{elct}$$

Motor

$$\begin{aligned}\eta_{\text{motor combustión interna}} &= \frac{P_{mec}}{\dot{Q}_{combustible}} \\ &= \frac{\tau W}{\dot{Q}} = \frac{\tau W}{\dot{m}_c \cdot PCI} \\ &= \frac{\tau W}{\rho \dot{V} \cdot PCI}\end{aligned}$$

$PCI$  : poder calorífico específico

Boiler: calentador de agua

$$\eta_{Boiler} = \frac{\dot{Q}_{H_2O}}{\dot{Q}_{combust}} = \frac{\dot{m}_{H_2O}(T_2 - T_1)}{\dot{m}_{combust} \cdot PCI}$$

$\dot{Q}_{combust}$  : energía térmica

$\dot{m}_{combust}$  : cuando no hay cambio de fase

Calentador de agua eléctrico

$$\eta_{CA} = \frac{\dot{Q}_{H_2O}}{\dot{W}_{elec}} = \frac{\dot{m}_{H_2O}}{E \cdot I \cdot f \cdot p}$$

$(T_2 - T_1)$  : portemperaturas

Generador de vapor

$$\eta_{G.V} = \frac{\dot{Q}_{vapor}}{\dot{Q}_{comb}} = \frac{\dot{m}_{vapor}(h_2 - h_1)}{\dot{m}_{comb} \cdot PCI}$$

otras eficiencias

- refrigerador
- colector solar
- turbina: vapor, gas, hidráulica
- compresor
- ventilador
- reactor nuclear
- panel fotovoltaico
- horno