

Mecánica de fluidos

BMJIvan

23 de septiembre de 2021

1. Conceptos fundamentales

$$\text{Aplicaciones} \left\{ \begin{array}{l} \text{Transporte de fluidos} \\ \text{Conversión de la energía} \\ \text{Acondicionamiento de ambiente} \\ \text{Turbomáquinaria} \\ \text{Transporte (vehicular)} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Áreas de} \\ \text{mecánica de fluidos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Aerodinámica} \\ \text{Hidráulica} \\ \text{Hidrología} \\ \text{Metrología} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Hidráulica de potencia} \\ \text{Redes de tubería} \\ \text{Neumática} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Técnicas o} \\ \text{métodos o analíticos} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Analíticos} \\ \text{Experimentales} \\ \text{Computacionales} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Diferenciales} \\ \text{Diferenciales} \end{array} \right.$$

Presión, esfuerzo normal: Genera deformaciones lineales

$$P = \lim \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}$$

Esfuerzo cortante: Genera deformaciones angulares

$$\tau = \lim \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

1.1. Propiedades de los fluidos

Densidad

$$\rho = \frac{m}{v} \left[\frac{kg}{m^3}, \frac{lbm}{pie^3}, \frac{slug}{pie^3} \right]$$

Peso específico

$$\gamma = \frac{W_g}{v} = \frac{mg}{v} = \rho g \left[\frac{N}{m^3}, \frac{lb}{pie^3} \right]$$

Densidad relativa

$$sg = GE = \rho_r = \frac{\rho_{fluido}}{\rho_{H_2O} \quad T=4^\circ C}$$

Viscosidad dinámica o absoluta

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{d\bar{u}}{dy}} \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Gradiente de velocidad}}$$

$$\mu = \frac{\tau y}{\dot{u}} \left[N \cdot s / m^2, lb \cdot s / pie^2 \right]$$

Viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[m^2 / s, pie^2 / s \right]$$

1.2. Gases ideales

Proceso adiabático: Aquel proceso en el que no se gana ni pierde calor, es decir, cuenta con un aislamiento térmico.

En proceso adiabático reversible no hay transferencia de calor y por lo tanto el proceso es isoentrópico.

Un proceso adiabático irreversible no es isoentropico.

\forall : Volumen

$$\nu : \text{volumen específico} \quad \frac{\forall}{m} = \frac{1}{\rho}$$

1. Ley de Boyle y Mariotte

Si $T = \text{constante}$

$$P \propto \frac{1}{\forall}$$

$$P\forall = C$$

$$P_1\forall_1 = P_2\forall_2$$

2. Ley de Charles

Si $P = \text{constante}$

$$\forall \propto T$$

$$\frac{\forall}{T} = C$$

$$\frac{\forall_1}{T_1} = \frac{\forall_2}{T_2}$$

3. Ley de Gay - Lussac

Si $\forall = \text{constante}$

$$P \propto T$$

$$\frac{P}{T} = C$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{P\forall}{T} &= C \\ \frac{P_1\forall_1}{T_1} &= \frac{P_2\forall_2}{T_2} \\ \frac{P\nu}{T} &= nR_u \\ R_u &= \frac{P\forall}{Tn}\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}P &= 1 \text{ atmósfera} \\ T &= 0^\circ C = 273,15K \\ n &= 1 \text{ kmol} \\ \forall &= 22,413m^3 \\ R_u &= 8,314^{kJ}/_{kmol \cdot K} \\ n &= \frac{m}{M} \frac{\text{masa}}{\text{masa molar}} \\ R &= \frac{R_u}{M} \text{ constante del gas}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}R_u &= \frac{P\forall}{T^m/M} = \frac{MP\forall}{Tm} \\ m \frac{R_u}{M} &= \frac{P\forall}{T} \\ \frac{P\forall}{T} &= mR \\ P\forall &= TmR \\ P \frac{\forall}{m} &= TR \\ P\nu &= TR \\ P &= \frac{1}{\nu} TR = \rho TR \\ \frac{P}{\rho} &= TR\end{aligned}$$

1.3. Velocidad sonica o acústica y viscosidad

A partir de 1

$$dp \propto - \frac{d\forall}{\forall} dp = -E_v \frac{d\forall}{\forall}$$

Donde E_v es el modulo de compresibilidad o modulo volumétrico.
De la definición de masa

$$\begin{aligned}m &= \rho \forall \\dm &= \rho dv + d\rho \forall, \quad dm = 0 \\-\rho d\forall &= d\rho \forall \\-\frac{d\forall}{\forall} &= \frac{d\rho}{\rho}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$dp = E_v \frac{d\rho}{\rho}$$

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad \text{Velocidad del sonido a través de líquidos}$$

$$K = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$$

$$R = C_p - C_v \quad [kJ/kg \cdot K]$$

$$R = ,287^{kJ}/kg \cdot K$$

$$C = \sqrt{\frac{k_p}{\rho}} = \sqrt{KTR}$$

$$E_v = P \quad \text{Proceso isotérmico}$$

$$E_v = KP \quad \text{Proceso isoentropico}$$

Líquidos incompresibles $\rho = \text{constante}$

Líquidos compresibles $\rho \neq \text{constante}$

$$\text{Mach} = \frac{\vec{v}}{C} \quad \frac{\text{velocidad fluido}}{\text{velocidad de sonido}}$$

$$\text{Mach} \leq ,3 \quad \text{flujo de gas incompresible}$$

$$\text{Mach} \geq ,3 \quad \text{flujo compresible}$$

$$\underbrace{\frac{\mu}{\rho}}_{\text{Dinámica}} = \underbrace{v}_{\text{Cinemática}}$$

$$\mu = \text{constante o } 0 \quad \text{ideal o no viscoso}$$

$$\mu \neq \text{constante o } 0 \quad \text{real o viscoso}$$

$$\text{Fluido de acuerdo al comportamiento de la } \mu \left\{ \begin{array}{l} \text{Newtoniano} \left\{ \begin{array}{l} \tau \propto \frac{d\theta}{dt} \text{ deformación} \rightarrow \text{ley de viscosidad de Newton} \\ \tau \text{ no } \propto \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \text{Series de potencias} \end{array} \right. \\ \text{Visco-elástico} \left\{ \begin{array}{l} \text{Comportamiento Newtoniano} \\ \text{y no Newtoniano} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dy}$$

Número de Reynolds

$$NR_E = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\overbrace{\rho \vec{v} D}^{\text{Dinámica}}}{\mu} = \frac{\overbrace{\vec{v} D}^{\text{Cinemática}}}{\forall}$$

$$\text{Flujo viscoso} \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo laminar} \left\{ \begin{array}{l} NR_E \leq 2000 \quad (2300) \\ \text{flujo transición} \left\{ \begin{array}{l} 2000 \leq NR_E \leq 4000 \\ \text{flujo turbulento} \left\{ \begin{array}{l} NR_E \geq 4000 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \text{puede ser} \\ \text{laminar o turbulento} \end{array}$$

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel} \rightarrow P_{manométrica}$$

$$Mach > 1 \quad \text{supersónico}$$

$$Mach > 5 \quad \text{hipersónico}$$

$$Mach < 1 \quad \text{sursónico}$$

$$Mach = 1 \quad \text{sónico}$$

$$Mach \leq 1 \quad \text{transónico}$$

$$\dot{V} = \frac{\forall}{t} = \vec{v}A \rightarrow \text{caudal}$$

$$\rho_{gasolina} = 680 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 1,3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 2,85 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{H_2O \text{ mar}} = 1030 \text{ kg/m}^3 \quad E_v = 2,34 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

1.4. Esfuerzo cortante

$$\tau \propto \frac{du}{dt} = \frac{\vec{v}}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{d\vec{v}}{dy}$$

$$\tau \int_0^h dy = \mu \int_0^{\vec{v}}$$

$$\tau h = \mu \vec{v}$$

$$\tau = \mu \frac{\vec{v}}{h}$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

$$\tau = \frac{F_t}{A}$$

Donde F_v es la fuerza viscosa o tangente

$$\mu \frac{\vec{v}}{h} = \frac{F_v}{A}$$

$$F_v = \frac{\mu \vec{v} A}{h}$$

caso 1:

$$A = \pi d L$$

$$h = \frac{D - d}{2}$$

$$F_v = \frac{2\pi d L \vec{v} \mu}{D - d}$$

caso 2:

$$F_v = W \sin \theta$$

$$h = \frac{\mu \vec{v} A}{W \sin \theta}$$

*tablas líquidos y gases: mecánica de fluidos Pottev

1.5. Tensión o esfuerzo superficial

$$\sigma_s = \frac{F_{\text{tensión}}}{l} \left[W/m, lb/pie \right]$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{rsy} - Wg = 0$$

$$\sigma_s \pi D \cos \theta - \rho \forall g = 0$$

$$\sigma_s \pi D \cos \theta - \rho g \frac{\pi D^2}{4} h = 0$$

$$\sigma_s \cos \theta = \frac{\rho g D h}{4}$$

$$h = \frac{4 \sigma_s \cos \theta}{\rho g D}$$

2. Estática de fluidos

2.1. Derivada y series de Taylor

La pendiente de una recta con base de una función

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \end{aligned}$$

La pendiente de la recta tangente en el punto x , o derivada ocurre cuando

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Los coeficientes de $(a + b)^n$ se pueden escribir como

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

El cambio de la altura de una función se puede escribir como

$$\Delta f(x) = f(x + r) - f(x)$$

El valor de la altura final es

$$f(x + r) = f(x) + \Delta f(x)$$

Se aplica lo misma operación una segunda vez

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) \\ &= \Delta(f(x + r) - f(x)) \\ &= f(x + r + r) - f(x + r) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + r) \\ &= f(x + 2r) - 2\Delta f(x) - f(x) \end{aligned}$$

El valor de la altura final es

$$f(x + 2r) = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$$

Se vuelve a repetir

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta(\Delta^2 f(x)) \\ &= f(x + 3r) - f(x + 2r) - 2\Delta^2 f(x) - \Delta f(x), \text{ se sustituye } f(x + 2r) \\ &= f(x + 3r) - f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta^2 f(x) - 2\Delta f(x) - \Delta f(x) \\ &= f(x + 3r) - f(x) - 3\Delta f(x) - 3\Delta^2 f(x) \end{aligned}$$

El valor de la altura es

$$f(x + 3r) = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x)$$

Por lo tanto

$$f(x + nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f(x) + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \dots n}\Delta^n f(x)$$

Haciendo $h = nr$, y multiplicando por 1

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1} \frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 f(x)}{r^2} + \dots + \frac{(n(n-1)\dots 1)r^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{\Delta^n f(x)}{r^n}$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ hace que $r \rightarrow 0$

$$f(x + rn) = f(x + h) = f(x) + hf(x)' + h^2 \frac{f(x)''}{2!} + \dots$$

2.2. Principio de Pascal

presión

$$P = \frac{F}{A} \left[1Pa = 1^N/m^2, \text{ lb}/\text{pie}^2, \text{ lb}/\text{pul}^2 \right]$$

Presión atmosférica

$$Pa \left[1 atm = 760 mmHg = 16,7 \text{ lb}/\text{pul}^2 = 101,325 kPa \right]$$

Presión relativa

$$P_{rel}$$

Presión absoluta

$$P_{abs} = P_{atm} \pm P_{rel}$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$P_y \Delta z \Delta x - P \Delta s \Delta x \sin \theta = \rho \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} a_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$

$$P_z \Delta y \Delta x - P \Delta s \Delta x \cos \theta - \rho g \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} = \rho \frac{\Delta z \Delta y \Delta x}{2} a_z$$

Pero de la figura se puede ver que

$$\Delta z = \Delta s \sin \theta$$

$$\Delta y = \Delta s \cos \theta$$

entonces

$$P_y - P = \rho \frac{\Delta y}{2} a_y$$

$$P_z - P = \frac{\rho}{2} (g + a_z) \Delta z$$

Si $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, y $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

$$p_y - P = 0$$

$$P_z - P = 0$$

$$P = P_z = P_y$$

Transmisor de fuerza. Si la presión de un punto es igual a otro

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Transmisor de presión

$$P_1 A_1 = P_2 A_2$$

si $\Delta z = 1$

$$P = P_x = P_y = P_z$$

2.3. Variación de la presión de un fluido en reposo

$$W = dm g$$

$$= \rho g d\forall$$

$$= \rho g dx dy dz$$

$$f(x + \Delta x) = F(X) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x}{2!} + \dots$$

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$f(x - \delta x) \approx f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x$$

$$(CD) \ P(y + \frac{dy}{2}) = P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$(CI) \ P(y - \frac{dy}{2}) = P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\begin{aligned}
dF_{sy} &= df_y(+)-df_y(-) \\
&= [(P + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2}) - (P - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{2})] dx dz \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \quad (1)
\end{aligned}$$

$$F_{sz} = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \quad (2)$$

$$F_{sx} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \quad (3)$$

$$\underbrace{dF_B}_{\text{cuerpo o m\u00e1scas}} = \rho g dx dy dz \quad (4)$$

Fuerza m\u00e1scica: fuerza que act\u00faa sobre la masa de un fluido.

$$d\vec{F}_T = m\vec{a}$$

$$d\vec{F}_s + d\vec{F}_B = m\vec{a}$$

$$d\vec{F}_{sx} + d\vec{F}_{sy} + d\vec{F}_{sz} + \rho g dx dy dz = m\vec{a}$$

$$(-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g) dx dy dz = \rho dx dy dz \vec{a}$$

$$\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}}_{\text{Ecuaci\u00f3n de cantidad de movimiento}} = \rho \vec{a}$$

Ecuaci\u00f3n de cantidad de movimiento

$$\underbrace{-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}}_{\text{Ecuaci\u00f3n vectorial de hidrost\u00e1tica}} = 0$$

Ecuaci\u00f3n vectorial de hidrost\u00e1tica

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

Si $g_x = g_y = 0$ y $g_z = -g$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho g \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \\
\partial P &= -\rho g \partial z \\
\int_P^0 dP &= -\rho g \int_{-h}^0 dz \\
-P &= -\rho g(+h) \\
P &= \rho gh
\end{aligned}$$

2.4. Fuerzas sobre superficies planas y curvas

2.4.1. Fuerza resultante de una distribución de fuerzas hidrostáticas

considerando

$$\begin{aligned}
dF_R &= PdA \\
\frac{dP}{dh} &= \rho g \\
P &= P_o + \rho gh \\
h &= y \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dF_R &= (P_o + \rho gh)dA \quad P_o = 0 \\
&= \rho gh dA
\end{aligned}$$

$$\int_0^{F_R} = \rho g \sin \theta \int y dA$$

$$F_R = \rho g \sin \theta y_{cg} A$$

$$\underbrace{\int_A y_c dA}_{\text{Primer momento de área}} = y_{cg} A$$

2.4.2. Localización de la fuerza resultante

$$\begin{aligned}
dM_x &= dF_R \cdot y \\
&= \rho g y \sin \theta y dA \\
&= \rho g y^2 \sin \theta dA
\end{aligned}$$

$$M_{Rx} = \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$F_R y_{cp} = \rho g \sin \theta I_{xx}$$

$$y_{cp} = \frac{\rho g \sin \theta I_{xx}}{\rho g \sin \theta y_{cg} A} = \frac{I_{cg} + y_{cg}^2 A}{y_{cg} A} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg}$$

$$\underbrace{\int y^2 dA = I_{xx} = I_{cg} + y_{cg}^2 A}_{\text{Segundo momento de área}}$$

Ejemplo

$$F_H = F_{x2} - F_{x1} = 0$$

$$F_{x2} = F_{x1}$$

$$F_V = 2F_y + 2W_L$$

$$F_x = \rho g \left(h_1 + \frac{r}{2} \right) (rb)$$

$$F_y = \rho g h_1 (rb)$$

$$W = mg$$

$$= \rho \forall g = \rho g \left(R^2 b - \frac{\pi r^2 b}{4} \right)$$

2.5. Principio de Arquímedes

$$\begin{aligned} F_B &= F_i - F_s \\ &= \rho g (h + y) A - \rho g h A \\ &= \rho g y A \\ &= \rho g \forall \end{aligned}$$

F_B : Fuerza de flotabilidad o Boyante

\forall : Volumen desplazado

3. Cinemática de fluidos

3.1. Formas para describir el movimiento de un fluido

3.1.1. Enfoque de Lagrange

Identifica una pequeña masa de fluido en un flujo y describe el movimiento todo el tiempo.

Descripción del movimiento donde las partículas de masa individuales son observadas como función del tiempo.

3.1.2. Enfoque de Euler

Se define un volumen finito llamado volumen de control \forall_c a través del cual una masa fluye hacia dentro o hacia afuera.

Se definen variables de campo, como función del espacio y tiempo dentro del \forall_c

3.2. Campos de presión y aceleración

3.2.1. Campo de aceleración

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ \vec{v} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\end{aligned}$$

3.2.2. Campo de presión

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (x, y, z, t) \\ \vec{v} &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial t}dt\end{aligned}$$

3.3. Ecuación de Euler y Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} \\ &= u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\ &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{Parte local}} + \underbrace{u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}}_{\text{Parte conectiva}}\end{aligned}$$

Donde

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \dots + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Estable o permanente} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{No estable ni permanente, en transición} \end{array} \right.$$

Ecuación de Euler: para compresible e incompresible. A partir de la ecuación de cantidad de movimiento sin esfuerzos cortantes.

$$-\vec{\nabla} \cdot P + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$

$$= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$= \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right)$$

$$\underbrace{\frac{-\vec{\nabla} \cdot P}{\rho}}_{\substack{\text{Fuerzas de presión} \\ \text{debido a las fuerzas} \\ \text{de superficie o contacto}}} + \underbrace{\vec{g}}_{\substack{\text{Fuerzas de gravedad} \\ \text{debido a fuerzas} \\ \text{másicas}}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas de inercia} \\ \text{debido a la} \\ \text{aceleración}}}$$

Ecuación de Navier-Stokes: Solo para incompresibles

$$-\vec{\nabla} \cdot P + \rho \vec{g} + \underbrace{\mu \cdot \nabla^2 \vec{v}}_{\substack{\text{Fuerzas viscosas} \\ \text{debido a la} \\ \text{fricción}}} = \rho \vec{a} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x = \rho a_x \quad g_y = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y = \rho a_y \quad g_z = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z = \rho a_z$$

3.4. Ecuación de Bernoulli

Presión	$\vec{\nabla} \cdot P$	fuerzas superficie
Fuerza	$\rho \vec{g}$	fuerzas cuerpo
Aceleración	$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$	fuerzas inercia
Viscosidad	$\mu \nabla^2 \vec{v}$	fuerzas fricción

$$\begin{aligned}
\vec{a}_s &= f(s, t) \\
&= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \frac{d\vec{v}}{ds} \\
\frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} &= v \\
\frac{1}{2} dv^2 &= v dv \\
d\vec{F}_{Ts} &= dm \vec{a}_s \\
d\vec{F}_s + d\vec{F}_B &= dm \vec{a}_s \\
PdA - (P + dp)dA - dm g \sin \theta &= dm \frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dpdA - \rho ds dA g \sin \theta &= \rho ds dA \frac{D\vec{v}}{Dt} \\
-dp - \rho ds g \sin \theta &= \rho ds \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \frac{d\vec{v}}{ds} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\
-\frac{dp}{\rho} - dz g &= \vec{v} d\vec{v} \\
\int \left(\frac{dp}{\rho} + g dz + \frac{1}{2} d(\vec{v})^2 \right) &= 0 \\
\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + g z &= \text{constante} \\
\underbrace{\frac{P_1}{\rho}}_{\text{energía o trabajo de flujo}} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1)^2 + g z_1 &= \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v}_2)^2 + g z_2 \\
\underbrace{\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} (\vec{v})^2 + g z}_{\text{energía mecánica específica}} &= e_{mec}
\end{aligned}$$

3.4.1. Por cargas o longitud

$$\begin{aligned}
\frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g} (\vec{v})^2 + z &= \text{constante} = \text{carga total} \\
\underbrace{\frac{P_1}{\rho g}}_{\text{Carga presión estática}} + \underbrace{\frac{1}{2g} (\vec{v}_1)^2}_{\text{Carga dinámica}} + \underbrace{z_1}_{\text{Carga elevación o altura}} &= \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} (\vec{v}_2)^2 + z_2
\end{aligned}$$

3.4.2. Por presión

$$P + \frac{\rho}{2}(\vec{v})^2 + \rho g z = \text{constante} = \text{Presión total}$$

$$\underbrace{P_1}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{relativa} \\ \text{o estática}}} + \underbrace{\frac{\rho}{2}(\vec{v}_1)^2}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{dinámica}}} + \underbrace{\rho g z_1}_{\substack{\text{Presión} \\ \text{hidrostática}}} = P_2 + \frac{\rho}{2}(\vec{v}_2)^2 + \rho g z_2$$

Ejemplo

número	cinética	potencial	presión
1	muy pequeña	cero	grande
2	grande	pequeña	cero
3	cero	grande	cero

3.5. Ecuación de Bernoulli: termodinámica

e.c: energía cinética

e.p: energía potencial

$$\delta Q = \Delta U + \delta w$$

$$\delta Q = Q_{ent} - Q_{sal}$$

$$\delta W = w_{ent} - W_{ent}$$

$$\delta Q + \delta W = m(\Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p)$$

$$\delta q + \delta w = \Delta u + \Delta P_v + \Delta e.c + \Delta e.p$$

$$\underbrace{\Delta P_v + \Delta e.c + \Delta cp = 0}_{\text{Ecuación de Bernoulli}}$$

3.6. Caudal

$$\dot{m} = \frac{m}{\Delta t} \left[kg/s, lbm/s, slug/s, \right]$$

$$\dot{V} = \frac{V}{\Delta} \left[m^3/s, lt/s, pie^3/s, gpm \right]$$

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \int_A \rho \vec{v}_n dA \\
\dot{V} &= \int_A \vec{v}_n dA \\
\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{velocidad} \\ \text{media} \\ \text{o promedio}}} &= \frac{1}{A} \int_A \vec{u}_n dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 2r \\
r &= \frac{D}{2} \\
A &= \pi r^2 \\
&= \pi \frac{D^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_A &= \dot{V}_B \\
\vec{v}_A A_A &= \vec{v}_B A_B \\
\vec{v}_B &= \vec{v}_A \frac{A_A}{A_B} \\
&= \vec{v}_A \left(\frac{D_A}{D_B} \right)^2
\end{aligned}$$

3.7. Ecuación de Torricelli

Velocidad terminal o máxima de caída libre

$$\vec{v} = \sqrt{2gz}$$

4. Ecuaciones básicas de los fluidos en forma integral

4.1. Transformación de un sistema a volumen de control

- Volumen de control y el sistema ocupan las regiones 1 y 2 en el tiempo t
- Sistema en el instante t ocupa los volúmenes 1 y 2
- Sistema en el instante $t + \Delta t$ ocupa los volúmenes 2 y 3

$$N_{sist} = \underbrace{\int_m \eta dm}_{\substack{\text{masa} \\ \text{(sistema)}}} = \underbrace{\int_{\forall} \eta \rho d\forall}_{\substack{\text{volumen} \\ \text{(sistema)}}$$

Donde

N : Propiedad extensiva del sistema

η : Propiedad intensiva del sistema

$$\begin{aligned} \left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sist}(t + \Delta t) - N_{sist}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_2(t + \Delta t) + N_3(t + \Delta t) - N_2(t) - N_1(t) + N_1(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(N_2 + N_1)(t + \Delta t) - (N_2 + N_1)}{\Delta} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{\forall_c}(t + \Delta t) - N_{\forall_c}(t)}{\Delta} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dN_{\forall_c}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$d\forall_1 = -\hat{n}dA \cdot \vec{v}_1 \cdot \Delta t$$

$$d\forall_3 = \hat{n}dA \cdot \vec{v}_3 \cdot \Delta t$$

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \hat{n} \rho \vec{v} \Delta t dA$$

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \eta \hat{n} \rho \vec{v} \Delta t dA$$

4.2. Teorema del transporte de Reynolds

Lagrange \rightarrow Euler

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{A_3} \eta \rho \vec{v}_3 dA_3 - \int_{A_1} \eta \rho \vec{v}_1 dA_1 \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{sc} \eta \rho \vec{v} dA \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \eta \rho \vec{v} dA}_{\text{Como cambia dentro del volumen de control}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \int \eta \rho \vec{v} dA}_{\text{Flujo de propiedad extensiva neta a través de la superficie de control}}
\end{aligned}$$

4.3. Propiedades extensivas e intensivas

Extensiva (N)	Intensiva (η)
m: masa	1: ecuación de continuidad
E: energía	e: energía específica
\vec{P} : cantidad de momento lineal	\vec{v} : velocidad
\vec{H} : cantidad de momento angular	$\vec{v} \times \vec{r}$: velocidad angular
S: entropía total	s: entropía específica

4.4. Masa

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sist}} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall_c} \rho d\forall + \underbrace{\int_{sc_{ent}}^{sc_{sal}} \rho \vec{v} dA}_{\text{flujo de masa neto}} \\
\left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sist}} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall &= \int_{sc_{ent}} (\rho \vec{v} dA)_{ent} - \int_{sc_{sal}} (\rho \vec{v} dA)_{sal}
\end{aligned}$$

4.5. Energía

Función de trayectoria no son condición de estado

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{neto} &= \dot{Q}_{ent} - \dot{Q}_{sal} \\
\dot{W}_{neto} &= \dot{W}_{sal} - \dot{W}_{ent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dE}{dt} \right|_{sist} &= \dot{Q} - \dot{W} \\
\left. \frac{dE}{dt} \right|_{sist} &= \dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} e \rho d\forall + \int_{sc} e \rho \vec{v} dA \\
\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} &= \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\forall_c} e \rho d\forall}_{\text{Cambio de energía total}} + \underbrace{\int_{sc} e \rho \vec{v} dA}_{\text{Flujo de energía}} \\
\frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \rho d\forall &= \int_{sc_{ent}} \rho \vec{v} dA - \int_{sc_{sal}} \rho \vec{v} dA \\
\dot{Q}_{neto} + \dot{W}_{neto} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} e \rho d\forall + \int_{sc_{salida}} (e \rho \vec{v} dA)_{sal} - \int_{sc_{entrada}} (e \rho \vec{v} dA)_{ent} \\
e_{s \text{ cerrado}} &= u + \frac{1}{2} v^2 + gz \\
e_{s \text{ abierto}} &= P_v + u + \frac{1}{2} \vec{v} + gz
\end{aligned}$$

4.6. Momento lineal

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \eta \rho d\forall + \int_{sc} \eta \rho \vec{v} dA, \quad N = \vec{P} \quad \eta = \vec{v} \\
\frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{v} \rho d\forall + \int_{sc} \vec{v} \rho \vec{v} dA \\
\sum_{\text{superficie}} F_s + \sum_{\text{cuerpo}} F_B &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{v} \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{v} \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum F_{sx} + \sum F_{Bx} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{u}_x \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_x \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum F_{sy} + \sum F_{By} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall_c} \vec{u}_y \cdot \rho d\forall + \int_{sc} \vec{u}_y \cdot \rho \vec{v} dA
\end{aligned}$$

4.7. Momento angular

$$\begin{aligned}
N = \vec{H} &\rightarrow \eta = \vec{r} \times \vec{v} \\
\frac{d\vec{H}}{dt}\Big|_{sist} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho d\forall + \int_{sc} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho \vec{v} dA \\
\sum M_s + \sum M_g &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho d\forall + \int_{sc} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \rho \vec{v} dA \\
S_{sistema} + S_{generada} &= \frac{d}{dt} \int_{\forall} S \cdot \rho d\forall + \int_{sc} S \cdot \rho \vec{v} dA
\end{aligned}$$

4.8. Para ejercicios

$dh = 0$ permanente o estacionario

$\frac{dh}{dt} > 0$ y $\frac{dh}{dt} < 0$ transitorio

Flujo permanente: turbina, compresores, ventiladores

$$\int_{\forall} e \rho dV = 0$$

Proceso adiabático: no hay transferencia de calor

$$w_{ent} = 0$$

Se le debe proporcionar potencia a una bomba

4.9. Eficiencias

Generador eléctrico

$$\eta_{eólica} = \frac{P_{mec}}{\Delta \dot{E}_c} \quad \Delta \dot{E}_c : \text{ cambio de energía cinética}$$

$$\eta_{\text{generador eléctrico}} = \frac{\dot{W}_{elec}}{P_{mec}}$$

$$\eta_{mec} = \eta_{eólica} \eta_{\text{generador eléctrico}}$$

Bomba

$$\Delta u = 0$$

$$\dot{Q}_{sal} = 0$$

$$\dot{Q}_{ent} = 0$$

$$\dot{W}_{sal} = 0$$

$$\eta_B = \frac{\Delta \dot{E}_p}{P_{mec}} = \frac{P_{hidráulica}}{P_{mec}}$$

$$\eta_{elec} = \frac{P_{mec}}{\dot{W}_{elec}} = \frac{P_{mec}}{P_{elec}}$$

$$\eta_{mec} = \eta_B \cdot \eta_{elct}$$

Motor

$$\begin{aligned}\eta_{\text{motor combustión interna}} &= \frac{P_{mec}}{\dot{Q}_{combustible}} \\ &= \frac{\tau W}{\dot{Q}} = \frac{\tau W}{\dot{m}_c \cdot PCI} \\ &= \frac{\tau W}{\rho \dot{V} \cdot PCI}\end{aligned}$$

PCI : poder calorífico específico

Boiler: calentador de agua

$$\eta_{Boiler} = \frac{\dot{Q}_{H_2O}}{\dot{Q}_{combust}} = \frac{\dot{m}_{H_2O}(T_2 - T_1)}{\dot{m}_{combust} \cdot PCI}$$

$\dot{Q}_{combust}$: energía térmica

$\dot{m}_{combust}$: cuando no hay cambio de fase

Calentador de agua eléctrico

$$\eta_{CA} = \frac{\dot{Q}_{H_2O}}{\dot{W}_{elec}} = \frac{\dot{m}_{H_2O}}{E \cdot I \cdot f \cdot p}$$

$(T_2 - T_1)$: portemperaturas

Generador de vapor

$$\eta_{G.V} = \frac{\dot{Q}_{vapor}}{\dot{Q}_{comb}} = \frac{\dot{m}_{vapor}(h_2 - h_1)}{\dot{m}_{comb} \cdot PCI}$$

otras eficiencias

- refrigerador
- colector solar
- turbina: vapor, gas, hidráulica
- compresor
- ventilador
- reactor nuclear
- panel fotovoltaico
- horno

5. Flujo incompresible en tuberías

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = q = \frac{Q}{\Delta t}$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = w = \frac{W}{\Delta t}$$

$$\dot{Q}_{ent} + \dot{W}_{ent} = \dot{m}(\Delta P_v + \Delta u + \Delta e.c + \Delta e.p) + \dot{Q}_{sal} + \dot{W}_{sal}$$

$$q_{ent} + w_{ent} = (P_2 v_2 - P_1 v_1) + (\mu_2 - \mu_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + q_{sal} + w_{sal}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(u_2 - u_1)}{g} + \frac{(q_{sal} - q_{ent})}{g} + \frac{w_{sal} - w_{ent}}{g}$$

Perdidas totales del sistema

$$hlf = \left[\frac{u_2 - u_1}{g} + \frac{q_{sal} - q_{ent}}{g} \right] = h_f + h_m$$

hlf s: perdidas totales en la succión

Turbina, motores

$$h_T = h_m = \frac{w_{sal}}{g}$$

Bomba, ventilador

$$\begin{aligned} h_B = h_v &= \frac{w_{ent}}{g} \\ &= z_2 + hlf_{1 \rightarrow 2} \\ &= \underbrace{h_{suc} + h_{des}}_{z_2} + hlf_s + hlf_d \end{aligned}$$

Potencia que proporciona una bomba al agua

$$\begin{aligned} h_B &= \frac{w_b}{g} = \frac{\dot{w}_b}{\dot{m}} \\ \dot{w}_B &= PH = h_B g \dot{m} \\ PH &= h_B \cdot g \cdot \rho \cdot \dot{V} = \gamma h_B \dot{V} \end{aligned}$$