Atividade 3 - Método dual do Simplex

Nome: Diogo Dias Lopes nº 2018019746

a) Resolva o problema usando o método dual do Simplex

Minimizar $Z = 16x_1 + 14x_2$ $\iff$ Maximizar $Z' = -16x_1 - 14x_2$

Sujeito a: $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Sujeito a:

$$10x_1 + 4x_2 \geq 120 \xrightarrow{(\times -1)} -10x_1 - 4x_2 + x_3 = -120 \quad \text{Slack}$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 60 \xrightarrow{(\times -1)} -3x_1 - 4x_2 + x_4 = -60 \quad \text{Slack}$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 20 \qquad 1x_1 + 1x_2 + x_5 = 20 \quad \text{Slack}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \longrightarrow x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Passagem do problema de Min Z para Max Z' multiplicando por (-1) e das restrições $\geq$ para $\leq$ e adição das slacks para passar as restrições de $\leq$ para $=$.

1ª iteração

		-16	-14	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3 ← Sai	0	-10	-4	1	0	0	-120	(1)
x_4	0	-3	-4	0	1	0	-60	(2)
x_5	0	1	1	0	0	1	20	(3)
$z_j - c_j$		16	14	0	0	0	0	

$\frac{16}{|-10|} = 1,6 \qquad \frac{14}{|-4|} = 3,5$

↑ entra

SBNA: $x = (0, 0, -120, -60, 20) \rightarrow Z' = 0$

A solução é básica não admissível pois ainda existem valores negativos na coluna b. Logo vamos ter de iterar mais uma vez, retirando a slack x_3 da base substituindo pela variável x_1.

2ª iteração

		-16	-14	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	-16	1	2/5	-1/10	0	0	12
x_4 ← Sai	0	0	-14/5	-3/10	1	0	-24
x_5	0	0	3/5	1/10	0	1	8
$z_j - c_j$		0	38/5	8/5	0	0	-192

$(1)' = -\frac{1}{10} \times (1)$

$(2)' = (2) + 3 \times (1)'$

$(3)' = (3) - (1)'$

$2,7 = \frac{\frac{38}{5}}{\frac{|-14|}{5}} \qquad \frac{\frac{8}{5}}{\frac{|-3|}{10}} = 5,(3)$

↑ entra

SBNA: $x = (12, 0, 0, -24, 8) \rightarrow Z' = -192$

A solução é básica não admissível pois ainda existem valores negativos na coluna b. Logo vamos ter de iterar mais uma vez, retirando a slack x_4 da base substituindo pela x_2.

3ª iteração

	-16 x_1	-14 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b
x_1 -16	1	0	$-1/7$	$1/7$	0	$\frac{60}{7}$
x_2 0	0	1	$3/28$	$-5/14$	0	$\frac{60}{7}$
x_5 0	0	0	$1/28$	$3/14$	1	$\frac{20}{7}$
$z_j - c_j$	0	0	$11/14$	$19/7$	0	$-\frac{1800}{7}$

$(1)'' = (1)' - \frac{2}{5} \times (2)''$

$(2)'' = \left(\frac{-5}{14}\right) \times (2)'$

$(3)'' = (3)' - \frac{3}{5} \times (2)''$

SBA: $x^* = \left\{\frac{60}{7}, \frac{60}{7}, 0, 0, \frac{20}{7}\right\} \rightarrow z'^* = -\frac{1800}{7}$

$z^* = \frac{1800}{7}$

O quadro é ótimo pois não existem valores negativos nas variáveis da base na coluna b.

(b) Formule o problema dual correspondente ao problema anterior

Primal

$\text{Max } z = 16x_1 + 14x_2$

Sujeito a:

$10x_1 + 4x_2 \geq 120 \leftarrow U_1$

$3x_1 + 4x_2 \geq 60 \leftarrow U_2$

$1x_1 + 1x_2 \leq 20 \leftarrow U_3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Dual

$\text{Max } Zd = 120U_1 + 60U_2 + 20U_3$

Sujeito a:

$10U_1 + 3U_2 + 1U_3 \leq 16$

$4U_1 + 4U_2 + 1U_3 \leq 14$

$U_1 \geq 0, U_2 \geq 0, U_3 \leq 0$

(c) Determine a solução ótima do problema dual formulado na alínea anterior bem como o valor ótimo da sua função objetivo, recorrendo ao quadro ótimo obtido em a)

A partir da linha $z_j - c_j$ do quadro ótimo do problema primal, fazendo a correspondência cruzada entre variáveis originais e slacks dos problemas primal e dual, tal como ilustrado no último quadro de a), obtém-se a seguinte solução ótima para o problema dual:

$U^* = \left(\frac{11}{14}, \frac{19}{7}, 0, 0, 0\right)$

$Zd^* = Z^* = \frac{1800}{7}$

Verificação:

$Zd^* = 120 \times \frac{11}{14} + 60 \times \frac{19}{7} + 20 \times 0 = \frac{1800}{7}$ //

c.q.d.