

Trabalho prático
Metodologias de Otimização e Apoio à Decisão
Programação Linear Inteira – Aplicação a
Problema Reais
2020/2021

ÍNDICE

1.Trabalho proposto	3
2.Descrição do trabalho pesquisado	4
3.Formulação matemática do problema.....	5
1.Definição da função objetivo	5
2.Definição das restrições.....	6
4.Algoritmos de PLI	8
5.Ferramentas utilizadas para a resolução do problema.....	9
1. Analytic Solver Platform	9
2. CPLEX	9
6.Resumo.....	10
7.Bibliografia	11

1. Trabalho proposto

O trabalho que nos foi proposto tem o seguinte tema “Programação Linear Inteira – Aplicação a Problema Reais” e consiste num trabalho de pesquisa cujo objetivo é encontrar casos reais da vida prática (não académicos) que tenham sido modelados como problemas de Programação Inteira, Pura ou Mista, e resolvidos recorrendo a algoritmos de PLI (tais como os de Gomory ou Branch and Bound). Como resultado, deverá ser produzido um documento onde sejam descritos os problemas encontrados, apresentados os modelos matemáticos, referenciados os algoritmos e/ou as ferramentas computacionais usados na sua resolução, retiradas conclusões e apresentadas as referências bibliográficas.

2.Descrição do trabalho pesquisado

Após uma breve pesquisa encontramos um trabalho que se enquadrava muito bem no pretendido que foi dissertação submetida ao Instituto Superior de Engenharia do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Eletrotécnica – Sistemas Elétricos de Energia elaborada pelo sr, António Moreira ao qual desde já agradecemos cujo tema é Aplicação de um modelo de programação linear inteira mista (PLIM) na expansão da rede de distribuição de energia elétrica em Angola.

Desde logo ficamos surpreendidos pois podemos constatar que a matéria lecionada nesta unidade curricular se pode estender aos mais variados temas e pode unir várias áreas do saber, o que se torna lógico após refletirmos, pois o seu propósito é resolver problemas que possam ser modelados e resolvidos pelos algoritmos/ferramentas usadas na aula sejam eles problemas ligados à área da informática, eletrónica, medicina...

Passando ao trabalho por nos pesquisado resumidamente propõem-se a tentar melhorar a distribuição de energia elétrica em Angola.

Para isso ao mapa de subestações e pontos de consumo existentes foi proposto um novo mapa que colmatava as necessidades de energia tendo por base um comparativo de potencia elétrica disponível com a potencia necessária alimentar e o a proximidade aos pontos de consumo e a viabilidade geográfica, isto é, em terrenos atualmente desocupados e pertencentes ao governo Angolano.

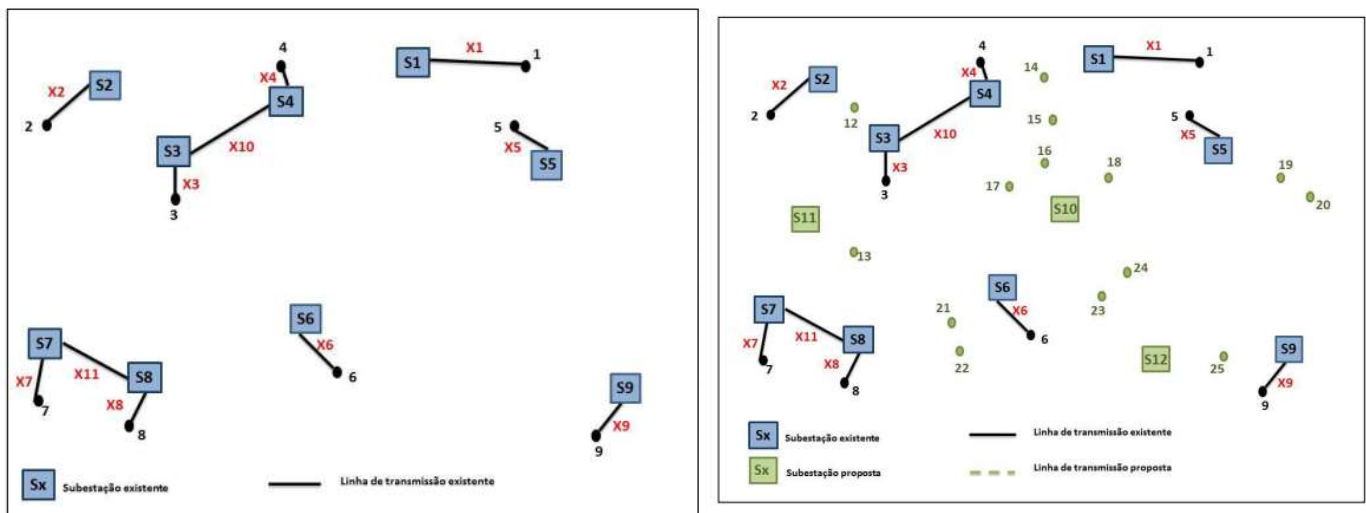


Fig.1-Mapa de subestações existentes vs Mapa de subestações proposto

Tal como anteriormente referido este trabalho é da área da eletrotecnia e assim inicialmente, mais concretamente nos três primeiros capítulos, é especificado num grande detalhe a parte das redes elétricas tais como sistemas elétricos, capacidades elétricas potenciais e instaladas...

3. Formulação matemática do problema

No capítulo 4, começa o âmbito do nosso trabalho de pesquisa.

Em qualquer resolução de problemas reais ou académicos após nos depararmos com o problema o primeiro passo é a formulação matemática do mesmo e esta fase é normalmente composta duas partes:

1. Definição da função objetivo
2. Definição das restrições

1. Definição da função objetivo

O objetivo do trabalho era minimizar os custos relacionados com a implementação da rede reformulada a implementar.

Os custos a minimizar identificados para resumir foram os seguintes:

- a) Custo de construção de novos circuitos
- b) Custo de construção de novas subestações
- c) Custos com perdas de potência ativa em circuitos novos e circuitos existentes
- d) Custo de operação nas subestações
- e) Custo de seletividade do sistema

Equação 4 - Função minimização com custos fixos

$$\begin{aligned} \min Z = & \$4.043,52 \cdot Y_{12} + \$2.235,60 \cdot Y_{15} + \$6.366,60 \cdot Y_{16} + \$1.458,00 \cdot Y_{17} + \$1.458,00 \\ & \cdot Y_{18} + \$2.109,24 \cdot Y_{19} + \$2.284,20 \cdot Y_{20} + \$874,80 \cdot Y_{21} + \$4.033,80 \cdot Y_{22} \\ & + \$2.721,60 \cdot Y_{23} + \$8.748,00 \cdot Y_{24} + \$2.118,96 \cdot Y_{25} + \$1.389,96 \cdot Y_{26} \\ & + \$1.117,80 \cdot Y_{27} + \$1.205,28 \cdot Y_{28} + \$7.027,56 \cdot Y_{29} + \$4.860,00 \cdot Y_{30} \\ & + \$1.798,20 \cdot Y_{31} + \$1.117,80 \cdot Y_{32} + \$2.673,00 \cdot Y_{33} + \$2.624,40 \cdot Y_{34} \\ & + \$1.817,64 \cdot Y_{35} + \$3.402,00 \cdot Y_{36} + \$1.020,60 \cdot Y_{37} + \$3.888,00 \cdot Y_{38} \\ & + \$15.080.000,00 + \$18.850.000,00 + \$22.620.000,00 \end{aligned}$$

Fig.2-Função objetivo

Deparamo-nos ainda que para além do grau quantitativo de variáveis da função objetivo ser bastante alto o grau de complexidade das mesmas é bem maior do que num problema académico que estamos acostumados a estudar. Por exemplo aqui as variáveis Y_{21} a Y_{38} são as linhas de distribuição propostas são variáveis binárias pois o objetivo do problema é saber se para minimizar custos estas são ou não viáveis no resultado ótimo.

2. Definição das restrições

O mesmo ocorre na definição das restrições das restrições em que para além de inúmeras, são bastante mais complexas e diversificadas.

Quanto às restrições a maior parte se prendem a restrições provenientes de leis físicas, sendo elas:

- a) Restrição de Potência (a soma das potências que saem da subestação deverá ser menor ou igual à capacidade da subestação (desprezando as perdas);
- b) Restrição de acordo com as leis da física, sustentadas no Princípio da Conservação de Energia e no Princípio de Quantidade de Carga Elétrica;
- c) Restrição de trânsito de potência nas linhas

Devemos sempre pensar no problema numa visão geral do contexto a que este está inserido por exemplo como este problema é inserido na área da eletrotecnia tanto a maior parte das restrições prendem-se por leis físicas relacionados com esta mesma área.

Surgindo assim a formulação do modelo completo ilustrado na seguinte imagem

Modelo completo:

Equação 4 - Função minimização com custos fixos

$$\begin{aligned} \min Z = & \$4.043,52 \cdot Y_{12} + \$2.235,60 \cdot Y_{15} + \$6.366,60 \cdot Y_{16} + \$1.458,00 \cdot Y_{17} + \$1.458,00 \\ & \cdot Y_{18} + \$2.109,24 \cdot Y_{19} + \$2.284,20 \cdot Y_{20} + \$874,80 \cdot Y_{21} + \$4.033,80 \cdot Y_{22} \\ & + \$2.721,60 \cdot Y_{23} + \$8.748,00 \cdot Y_{24} + \$2.118,96 \cdot Y_{25} + \$1.389,96 \cdot Y_{26} \\ & + \$1.117,80 \cdot Y_{27} + \$1.205,28 \cdot Y_{28} + \$7.027,56 \cdot Y_{29} + \$4.860,00 \cdot Y_{30} \\ & + \$1.798,20 \cdot Y_{31} + \$1.117,80 \cdot Y_{32} + \$2.673,00 \cdot Y_{33} + \$2.624,40 \cdot Y_{34} \\ & + \$1.817,64 \cdot Y_{35} + \$3.402,00 \cdot Y_{36} + \$1.020,60 \cdot Y_{37} + \$3.888,00 \cdot Y_{38} \\ & + \$15.080.000,00 + \$18.850.000,00 + \$22.620.000,00 \end{aligned}$$

Sujeito a:

$X_1 + X_{20} \leq 80$	$X_{28} = 6,8$
$X_2 + X_{17} \leq 80$	$X_{25} + X_{26} = 6,8$
$X_3 + X_9 + X_{18} \leq 100$	$X_{22} - X_{23} + X_{24} = 6,8$
$X_4 + X_{10} + X_{19} \leq 40$	$X_{23} = 6,8$
$X_5 + X_{22} + X_{25} \leq 80$	$X_{34} + X_{36} = 6,8$
$X_6 - X_{33} + X_{34} \leq 80$	$X_{35} = 6,8$
$X_7 \leq 40$	$X_{31} - X_{32} - X_{33} = 6,8$
$X_8 - X_{36} \leq 40$	$X_{32} = 6,8$
$X_9 + X_{24} + X_{29} \leq 20$	$X_{29} + X_{30} = 6,8$
$X_{26} + X_{27} + X_{38} \leq 80$	-
$X_{12} + X_{15} + X_{16} \leq 120$	$X_{31} - X_{32} + X_{33} \geq 0$
$X_{30} + X_{31} \leq 100$	$X_{34} - X_{35} + X_{36} \geq 0$
-	$X_{12} \geq 0$
$X_1 + X_5 + X_{37} = 154,36$	$X_{19} + X_{20} - X_{21} \geq 0$
$X_2 + X_{12} = 122,4$	$X_2 \geq 0$
$X_3 + X_{10} + X_{17} + X_{18} + X_{38} = 140,08$	$X_1 - X_{37} \geq 0$
$X_4 + X_{19} + X_{20} = 53,72$	-
$X_6 = 137,7$	$X_{33} \geq 60$
$X_7 + X_{16} = 55,76$	$X_{16} \geq 50$
$X_8 = 55,76$	$X_{31} \geq 90$
$X_9 = 8,16$	$X_7 \geq 40$
$X_{17} + X_{18} = 6,8$	$X_{36} \geq 16$
$X_{15} = 6,8$	$X_{12} + X_{38} \leq 860 Y_{12} + X_{38}$
$X_{19} + X_{20} - X_{21} = 6,8$	$X_1 + X_{38} \geq 0$
$X_{21} = 6,8$	$Y_{12} + Y_{38}$ binárias
$X_{27} - X_{28} = 6,8$	

Fig.3-Modelo completo

4. Algoritmos de PLI

Após a formulação matemática do problema ser concluída, o próximo passo é a resolução deste mesmo problema normalmente através de um algoritmo. Apesar de no trabalho o autor nunca ter referenciado um algoritmo concreto, devido à complexidade do problema, sendo logo apresentadas ferramentas computacionais em que o autor insere os dados obtidos a partir da formulação do problema para a resolução do mesmo; após uma pesquisa pela matéria lecionada nesta unidade curricular recomendaríamos a utilização do algoritmo de Branch and Bound pois nos fez lembrar um problema exemplo em que se usa este mesmo algoritmo, o **Problema do Caixeiro Viajante (PCV)**, em que no nosso caso as cidades seriam as subestações de energia.

Podemos analisar as semelhanças através das seguintes figuras:

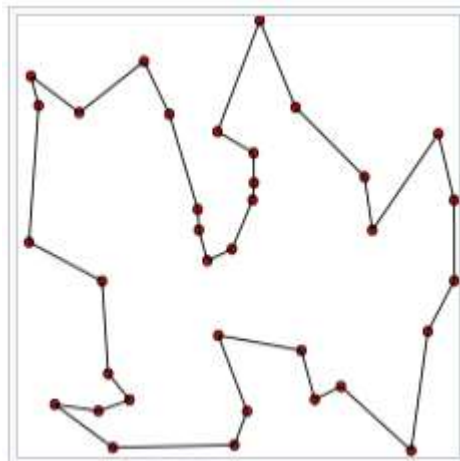


Fig.4-Solução de um PCV usando o algoritmo PCV

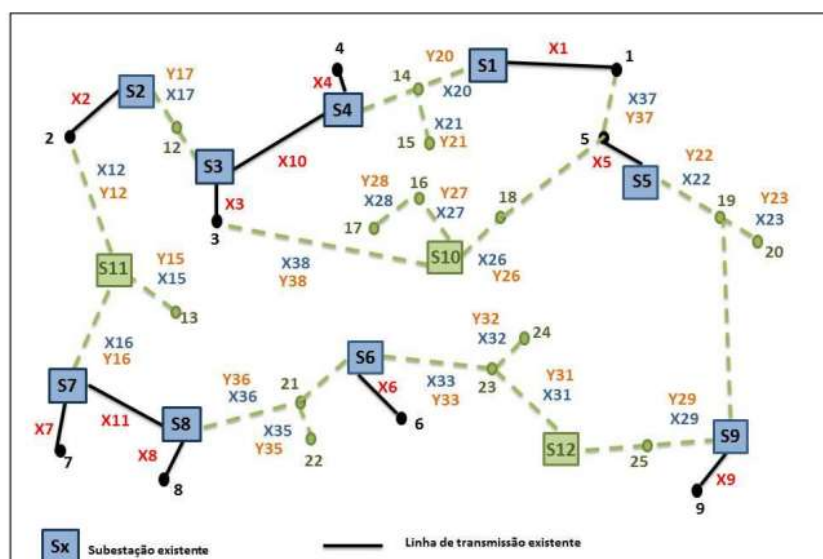


Fig.5-Solução proposta pelo autor para o problema apresentado

5. Ferramentas utilizadas para a resolução do problema

Como anteriormente foi referido devido á complexidade do problema o autor não recorreu a nenhum método/ algoritmo tradicional sendo este facto reforçado pela menção do software solver do Excel (ferramenta que já tivemos contacto na unidade curricular de Investigação Operacional) ao qual o autor se referencia, passando a citar, como “o Solver do Excel é limitado no tamanho do problema que possa ser solucionado, sendo as ferramentas propostas potencialmente mais interessantes”. Sendo que estas ferramentas utilizadas para a resolução do problema foram as seguintes:

1. Analytic Solver Platform

“A Plataforma Analytic Solver é o primeiro software com a capacidade para análise e exploração visual de dados de ensaios de simulação de Monte Carlo, com resultados em histogramas, gráficos, e estatísticas descritivas resumindo os resultados da simulação, sem limitações recorrendo a ferramentas algorítmicas de XLMiner disponíveis para análise de dados de ensaios de simulação colocados numa folha de excel.” Descrição da ferramenta segundo o autor.

2. CPLEX

“A sigla CPLEX é a combinação da letra C, referindo-se à linguagem de programação C utilizada no desenvolvimento deste algoritmo, e a terminação PLEX, em referência ao algoritmo simplex de solução de problemas de programação linear. Os algoritmos presentes no software da IBM ILOG CPLEX Optimizer contêm solvers de alto desempenho matemático de programação para a programação linear, programação inteira mista, programação quadrática, e os problemas de programação quadrática com restrições, permitindo também a resolução dos problemas com milhões de restrições e variáveis.” Descrição da ferramenta segundo o autor.

Após uma pesquisa podemos concluir que ambos podem ser usados sozinhos, mas a sua combinação é o ideal para a resolução destes problemas complexos, pois combinamos uma ferramenta com vários algoritmos integrados e com capacidade de resolução de problemas muito complexos (CPLEX), a uma ferramenta muito útil na introdução de dados pois é muito parecida esta introdução a uma folha excel sendo assim muito fácil e intuitiva como uma excelente capacidade de análise e exploração visual dos resultados através de gráficos e assim sendo ainda são dos softwares mais usados para a resolução destes problemas de cariz real.

6. Resumo

Através deste trabalho de pesquisa podemos ter uma noção do quão complexo um problema de Programação Linear Mista pode ser complexo assim como a variedade de áreas a que estes mesmos podem ser aplicados.

Desde logo deparamo-nos com algo bem diferente aos problemas académicos que normalmente costumamos formular em que existe um número de variáveis bem reduzidas que temos de abranger. Num caso real as variáveis são bem mais vastas e a sua definição bem mais abstrata.

Através da formulação matemática do problema concluímos que devemos sempre pensar no problema numa visão geral do contexto a que este está inserido, o exemplo pesquisado inserido na área da eletrotecnia tanto a maior parte das restrições prendem-se por leis físicas relacionados com esta mesma área.

Além disso apesar de existirem ferramentas computacionais muito avançadas para a resolução de problemas desta espécie sentimos consolidámos conceitos já lecionados tal como a formulação de um problema de um problema, função objetivo e restrições, e também os possíveis algoritmos que podem dar suporte á resolução destes problemas.

Por fim, foram nos apresentadas ferramentas de resolução deste tipo de problemas que até então eram desconhecidas por nós, que aliam um poder computacional e de algoritmia grandes a uma possível visualização dos dados obtidos.

7. Bibliografia

- <https://core.ac.uk/download/pdf/47140664.pdf> - trabalho base da pesquisa
- https://www.youtube.com/watch?v=AgTFFrlS46g&ab_channel=SamBurer – vídeo explicativo de como utilizar a ferramenta Analytic Solver Plataform
- https://www.youtube.com/watch?v=Xox8B-PucuY&ab_channel=Hakeem-Ur-Rehman%2CPhD – vídeo explicativo de como utilizar a ferramenta CPLEX
- https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem - problema do caixeiro viajante
- Material disponibilizado ao longo da unidade curricular