Московский государственный технический университет
Кафедра ИУ1 «Системы автоматического управления»

Презентация по курсу
«Модели динамических объектов»

Иван Витальевич Лобачев
lobivan99@gmail.com

Лекция 1.
Математические модели и требования к их разработке

Система и динамическая система

- **Система** – множество взаимосвязанных элементов, обособленное от среды и взаимодействующее с ней, как целое.
- **Динамическая система** – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Моделирование

- **Моделирование** – замена реально существующей или проектируемой сложной системы моделью, свойства, характеристики и поведение которой исследуется.
- **Задача моделирования** – создание (построение через процедуру формализации) модели сложной системы с последующим построением и проведением эксперимента над моделью и анализом результатов.
- Принципиально моделирование делится на **реальное** – когда исследуемая система или её части доступны для исследования материально целиком (**натурное**) или в виде стенда с физическим подобием (**физическое**), и на **мысленное** – когда исследуемая система недоступна вещественно, и необходимо работать с некоторой абстракцией – в том числе, **математической**.

Математическое моделирование

- **Математическое моделирование** – исследование системы (объекта, процесса) с предварительно полученной моделью, выраженной в некоторой математической форме записи.
- Математическое моделирование подразделяется на три вида:
  - аналитическое – при помощи различных уравнений;
  - имитационное – воспроизведение функционирования системы;
  - комбинированное.
- Математическое моделирование является одним из основных методов при создании и исследовании различных как технических так и естественных физических систем, объектов и процессов.

Математические модели

- **Математическая модель** – описание (закон эволюции состояния) исследуемой системы (объекта, процесса) одним из существующих математических аппаратов:
  - дифференциальные уравнения;
  - интегро-дифференциальные уравнения;
  - разностные уравнения;
  - алгебраические уравнения;
  - вероятностные и статистические функции;
  - другие способы.

Свойства математических моделей

Все математические модели можно охарактеризовать по наличию/отсутствию следующих свойств:

- Линейность – подверженность дифференциальных уравнений системы принципам гомогенности и суперпозиции. Все реальные системы нелинейны.
- Стационарность – постоянство параметров математической модели во времени.
- Распределенность параметров – задание параметров не в виде конкретного числа, а в виде некоторого диапазона.
- Детерминированность – параметры не являются случайными величинами.
- Непрерывность – определенность состояния системы в любой момент времени.

Требования к математическим моделям

- При разработке математических моделей к ним предъявляется ряд требований, соблюдение которых упрощает и решение задачи формализации, и последующее моделирование.
  - **полнота** – возможность получать набор оценок характеристик системы с требуемой точностью и достоверностью;
  - **гибкость** – возможность моделирования различных ситуаций;
  - **длительность разработки** / **экономичность**;
  - **блочная структура** – обеспечивается возможностью изменения отдельных частей модели без изменения всей модели;
  - **эффективность** для информационного и численного моделирования.

Свойства моделирования

- **Адекватность модели** – степень соответствия модели (описания системы) поведению (изменению, динамики) исследуемой системы (объекта, процесса). Оценка адекватности, как правило, проводится по косвенным показателям, например, сравнением выхода моделируемой системы с выходом системы, полученным в ходе эксперимента, при условии одинаковости (насколько это возможно) моделируемых условий проведения экспериментальным.
- **Ошибка моделирования** – количественная оценка отклонения результатов моделирования от полученных результатов в ходе эксперимента.

Особенности получения и решения дифференциальных уравнений

- В силу нелинейности подавляющего большинства математических моделей динамических систем – то есть, невозможности получения аналитического решения для их динамики во времени, а также по причине необходимости сокращения времени решения в случае рассмотрения линейных систем применяются исключительно численные методы решения ДУ при помощи ЭВМ.
- Получение математических моделей осуществляется в ручном режиме, однако не воспрещается использование программных средств для облегчения вывода ДУ системы.

Лекция 2.
Законы электротехники, применяющиеся при составлении математических моделей

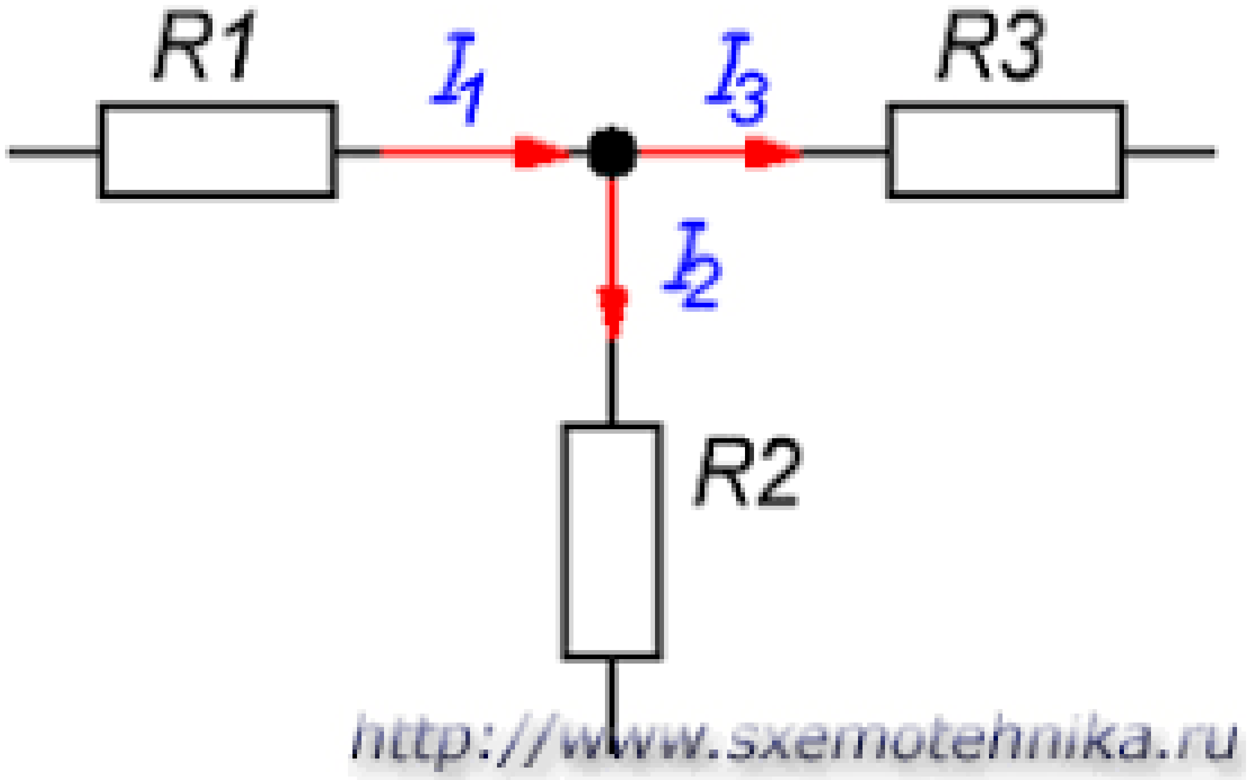
1-й закон Кирхгофа

- **<u>Первое правило Кирхгофа</u>** (правило токов Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в каждом узле любой цепи, равна нулю. При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла — отрицательным: Алгебраическая сумма токов, направленных к узлу, равна сумме направленных от узла.

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0$$

- Иными словами, **<u>сколько тока втекает в узел, столько из него и вытекает</u>**.

Иллюстрация к 1-му закону Кирхгофа



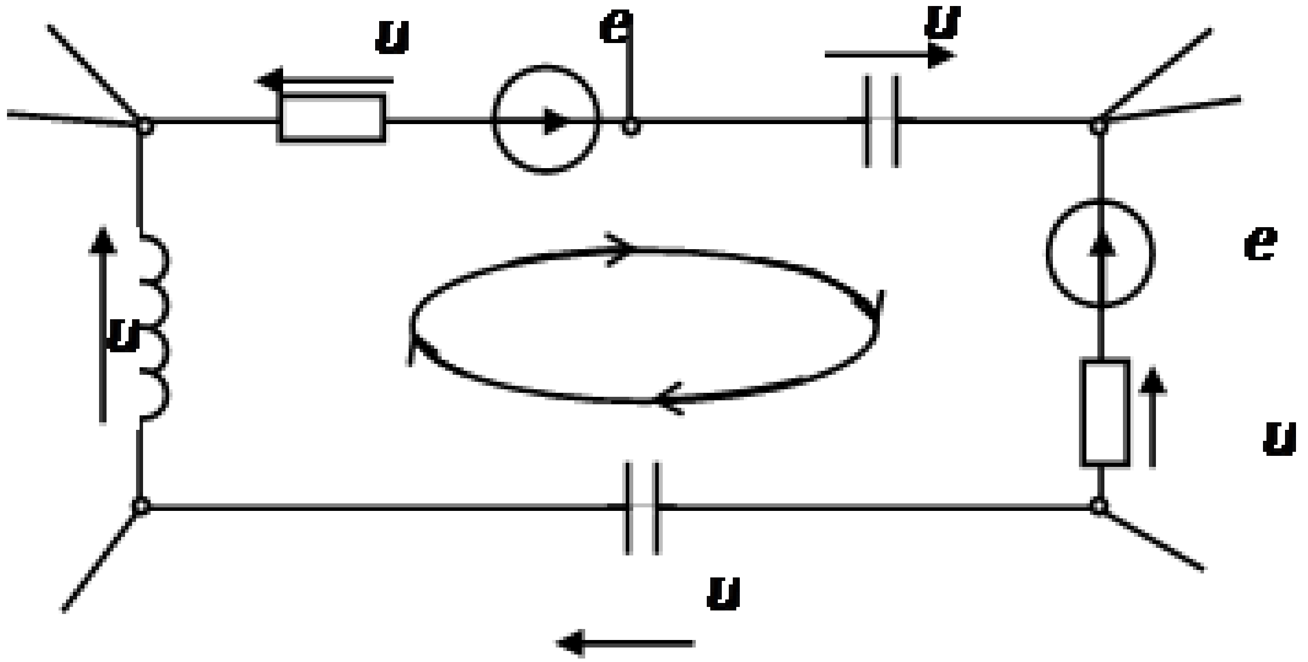
2-й закон Кирхгофа

- <u>**Второе правило Кирхгофа**</u> (правило напряжений Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур.

$$\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{m} U_k = \sum_{k=1}^{m} R_k Z_k$$

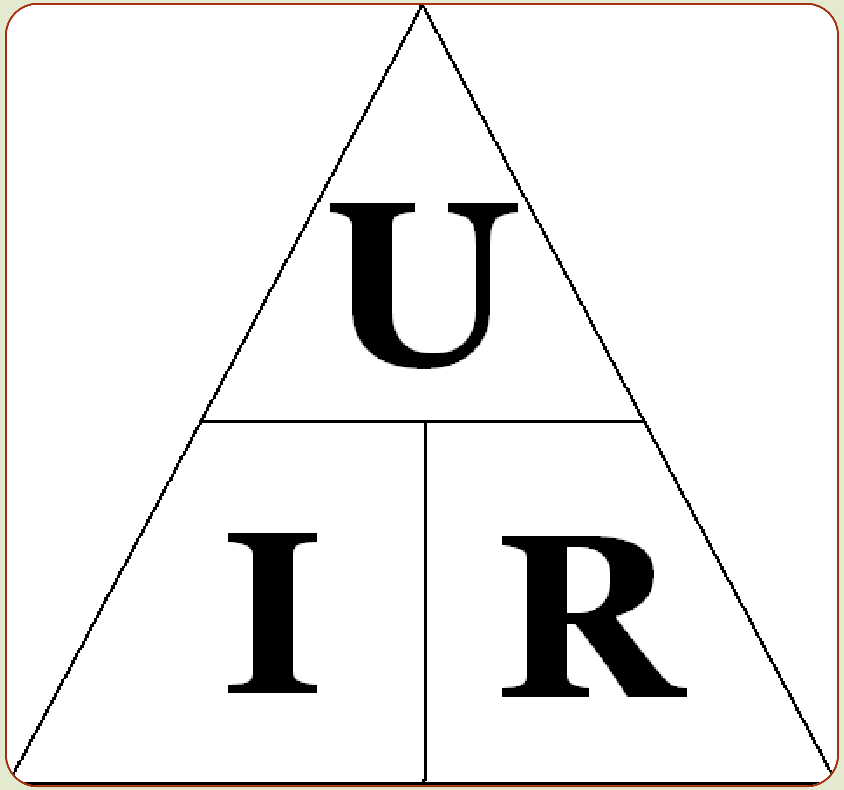
- Иными словами, при полном обходе контура потенциал, изменяясь, возвращается к исходному значению.

Иллюстрация ко 2-му закону Кирхгофа



Закон Ома

- Закон Ома — эмпирический физический закон, определяющий связь электродвижущей силы источника (или электрического напряжения) с силой тока, протекающего в проводнике, и сопротивлением проводника.



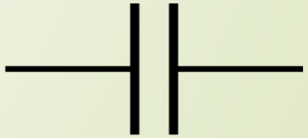
Индуктивные и ёмкостные элементы

- **<u>Катушка индуктивности</u>** – индуктивный элемент электрической цепи, вносящий в неё инерционность (дифференцирующее звено).

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

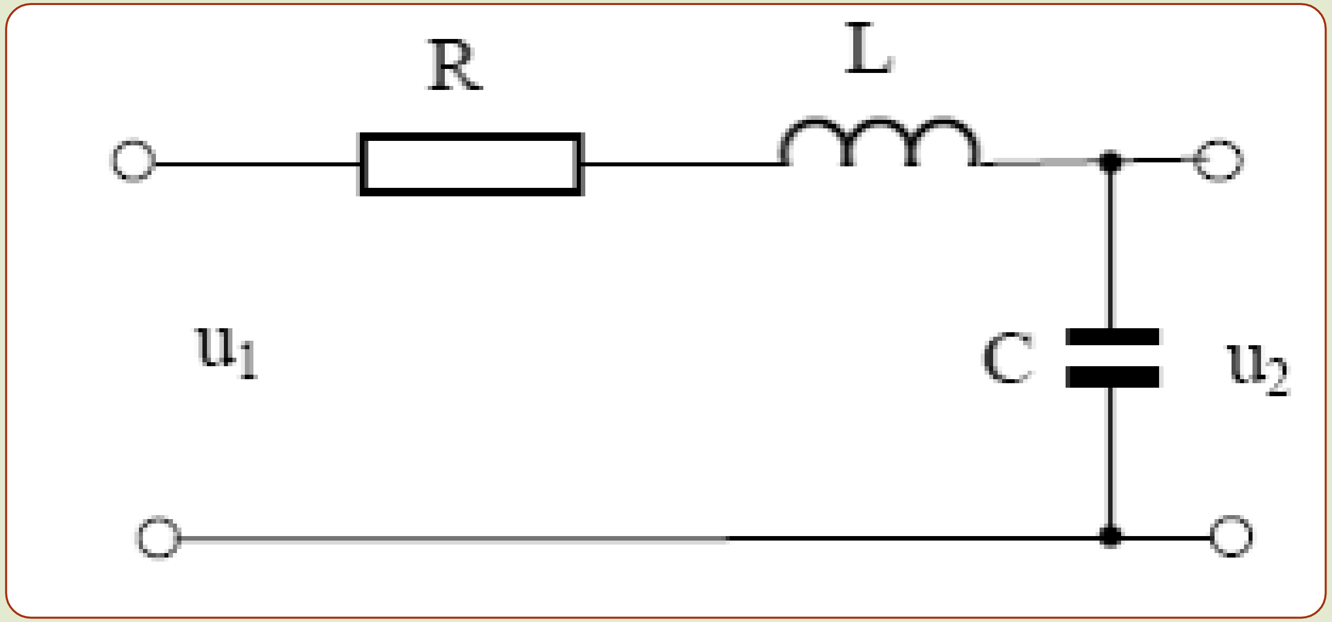
- **<u>Конденсатор</u>** - ёмкостной элемент электрической цепи, накапливающий электрический заряд (интегрирующее звено).

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau$$



Пример составления модели для одноконтурной системы

- Пусть имеется электрическая RLC-цепь. Известны входное напряжение $u_1(t)$ и номиналы элементов (R, L и C). Необходимо определить напряжение на конденсаторе, $u_2(t)$.



Пример составления модели для одноконтурной системы

- Распишем напряжение на элементах:

$$u_R(t) = i_R(t)R$$

$$\boldsymbol{u_C(t)} = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau\,, \boldsymbol{u_L}\,(\boldsymbol{t}) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

- Согласно первому закону Кирхгофа: $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t)$
- Согласно второму закону Кирхгофа: $u_1(t) + u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = 0$
- Необходимо выразить напряжения на резисторе и индуктивности при помощи искомого напряжения на конденсаторе (из тока в конденсаторе):

$$u_2(t) = u_C(t) \qquad u_R(\mathrm{t}) = \mathrm{RC}\frac{du_2(t)}{dt} \qquad u_L(t) = LC\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}$$

- Таким образом, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + RC\frac{du_2}{dt} + u_2(t) = -u_1(t)$$

Метод контурных токов

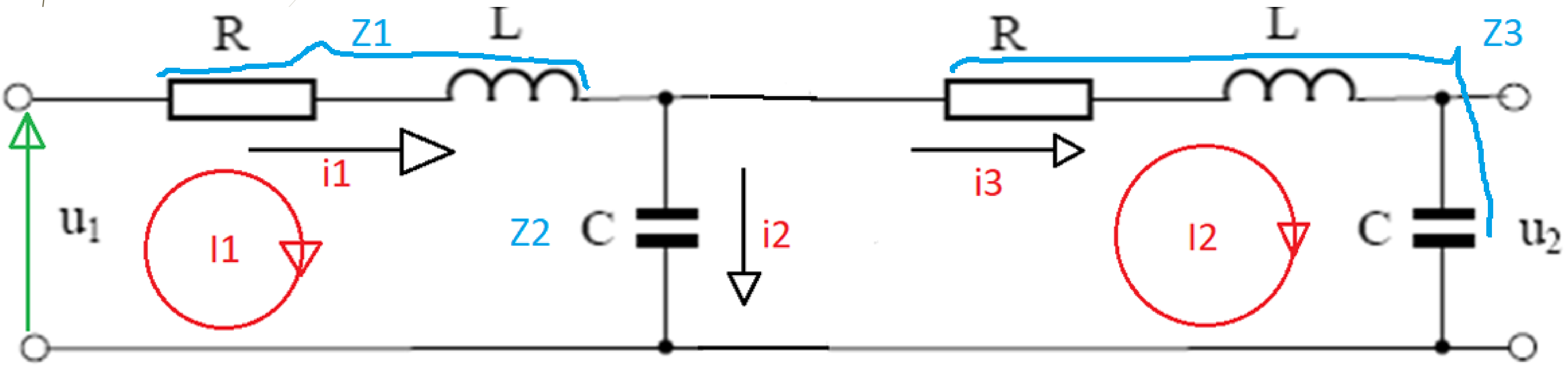
- **Метод контурных токов** основан на допущении, что в каждом из независимых контуров схемы циркулирует некоторый виртуальный контурный ток. Если некоторое ребро принадлежит только одному контуру, реальный ток в нём равен контурному. Если же ребро принадлежит нескольким контурам, ток в нём равен сумме соответствующих контурных токов (с учётом направления обхода контуров). Поскольку независимые контура покрывают собой всю схему (т.е. любое ребро принадлежит хотя бы одному контуру), то ток в любом ребре можно выразить через контурные токи, и контурные токи составляют полную систему токов.

Применение преобразования Лапласа

- **Преобразование Лапласа** — интегральное преобразование, связывающее функцию F(s) комплексного переменного (изображение) с функцией f(x) вещественного переменного (оригинал). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.
- При преобразовании Лапласа оператор $\frac{d}{dt}$ заменяется на оператор s, что, в частности, упрощает взятие производной до умножения на s, а интегрирование – до деления на s. Таким образом, можно для индуктивных и емкостных элементов перейти от выражения напряжения через интеграл и производную к выражению через s.

$$u_C(s) = \frac{1}{sC} i_C(s) = i_C(s) X_C \qquad u_L(s) = sL i_L(s) = i_L(s) X_L$$

Пример составления модели для многоконтурной системы



После определения X_C и X_L актуально понятие импеданса ветви $Z = \sum R + \sum X_C + \sum X_L$

Пример составления модели для многоконтурной системы

- Записываем уравнения для каждого из контуров (аналогично закону Ома для определения напряжения):

$$I_1(Z_1 + Z_2) - I_2 Z_2 = u_1(s)$$
$$I_2(Z_2 + Z_3) - I_1 Z_2 = 0$$

- Находим и выражаем из уравнений I_2:

$$I_2 = \frac{u_1(s) Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} = i_3(s)$$

- По закону Ома находим напряжение на втором конденсаторе:

$$u_2(s) = i_3(s)\ X_{C_2}$$

Пример составления модели для многоконтурной системы

- Распишем значения Z_1, Z_2 и Z_3:

$$Z_1 = R_1 + sL_1$$

$$Z_2 = \frac{1}{sC_2}$$

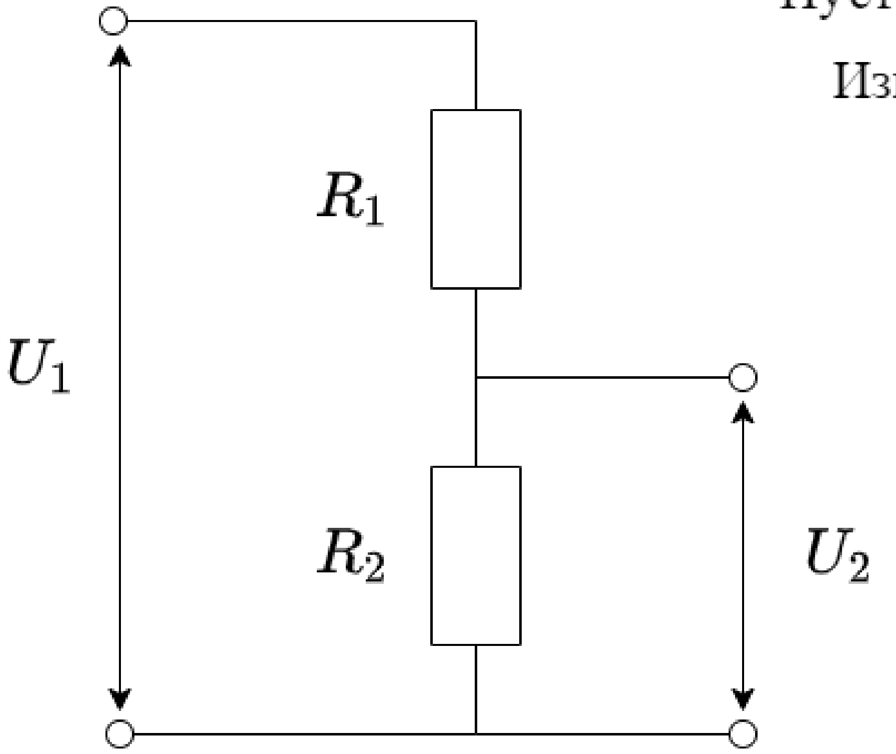
$$Z_3 = R_2 + sL_2 + \frac{1}{sC_2} = \frac{s^2 L_2 C_2 + sR_2 C_2 + 1}{sC_2}$$

- Подставив и расписав выражения для I_2 и u_2, а затем заменив s на $\frac{d}{dt}$, получим следующее ДУ выходного напряжения:

$$L_1 L_2 C_1 C_2 \frac{d^4 u_2}{dt^4} + (L_2 C_2 + R_1 C_1 L_2 C_2 + L_1 C_1 R_2 C_2) \frac{d^3 u_2}{dt^3} + (L_1 C_2 + R_2 C_2 + R_1 C_1 R_2 C_2 + L_1 C_1) \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_2 + R_1 C_1 + 1) \frac{du_2}{dt} = u_1(t)$$

Лекция 3.
Получение математических моделей электрических систем

Простейший делитель напряжения



Пусть U_1 – источник ЭДС, U_2 – вольтметр.

Известны номиналы резисторов R_1 и R_2.

Тогда по законам Кирхгофа :

$$U_1(t) = i_{R_1}(t)R_1 + i_{R_2}(t)R_2$$

$$i_{R_1}(t) = i_{R_2}(t) = i(t)$$

Найдем U_2 :

$$U_2 = i(t)R_2 = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Делитель напряжения общем вид

Пусть U_1 — источник ЭДС, $U_2 \ldots U_N$ — вольтметры.

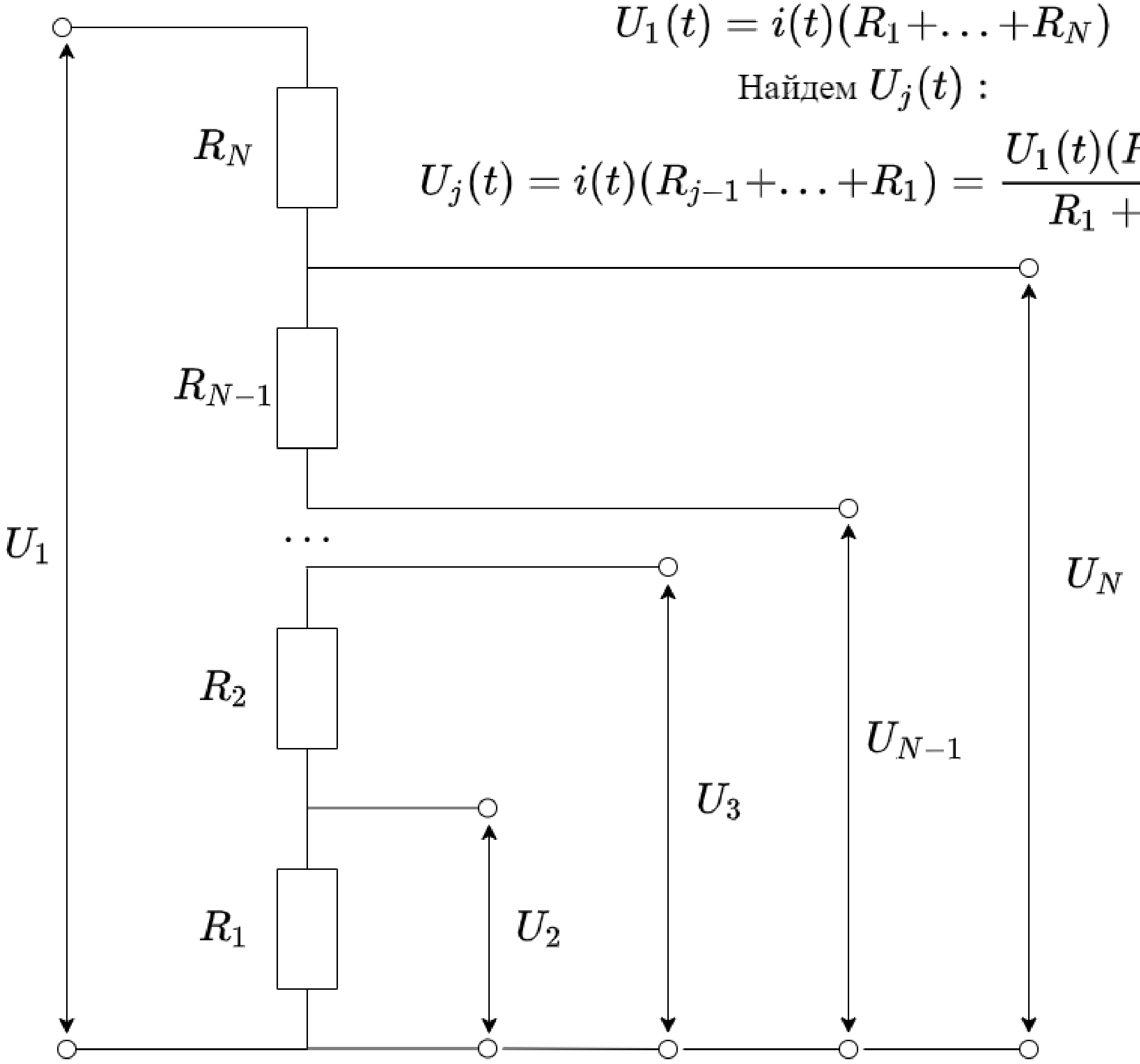
Известны номиналы резисторов $R_1, \ldots, R_N$.

Тогда по законам Кирхгофа :

$$U_1(t) = i(t)(R_1 + \ldots + R_N)$$

Найдем $U_j(t)$:

$$U_j(t) = i(t)(R_{j-1} + \ldots + R_1) = \frac{U_1(t)(R_{j-1} + \ldots + R_1)}{R_1 + R_2 + \ldots R_N}$$



Четырехполюсники

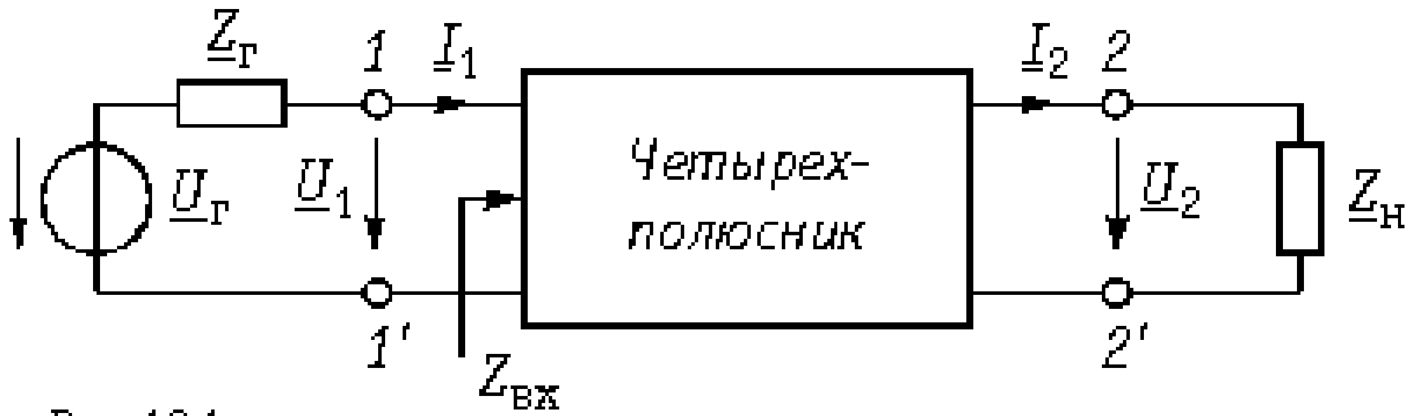


Рис. 12.1

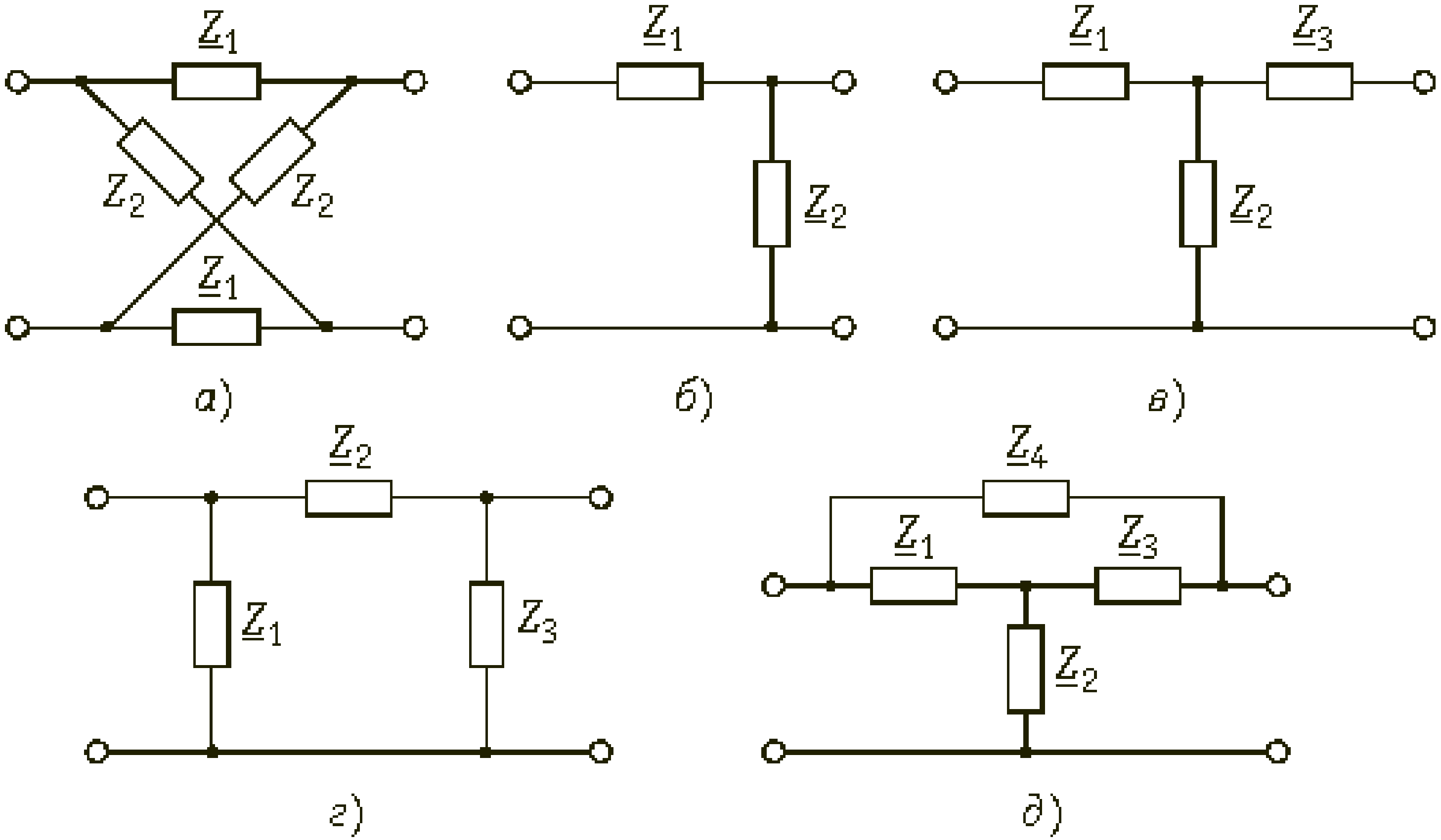


Рис. 12.2

Лекция 4.

Законы механики, применяющиеся при составлении математических моделей

Законы Ньютона

- **Первый закон**: «Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения».
- **Второй закон**: «В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе».
- **Третий закон**: «Материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению».

Интерпретация второго закона

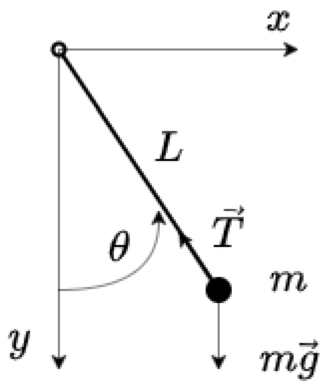
- Формула 2-го закона Ньютона имеет вид $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$. В этом виде, если учесть, что ускорение есть вторая производная по координате, уже содержится дифференциальное уравнение, однако для получения полной модели необходимо найти все силы, действующие на тело. В частности, нужно учитывать положения 3 закона Ньютона.

Принцип Д'Аламбера

- Если к действующей на тело активной силе и реакции связи приложить дополнительную силу инерции, то тело будет находиться в равновесии (сумма всех сил, действующих в системе, дополненная главным вектором инерции, равна нулю):

$$F_i + N_i + J_i = 0$$

Пример подхода к получению модели динамикой Ньютона



Постановка задачи получения модели механикой Ньютона :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

При разложении по осям :

$$x : m\ddot{x} = -Tsin\theta$$

$$y : m\ddot{y} = mg - Tcos\theta$$

Необходимо из выражения по Ox выразить T,

учитывая, что $x = Lsin\theta,\ y = Lcos\theta.$

В итоге, получим ДУ математического маятника :

$$\ddot{\theta}\,\frac{L}{sin\theta} + g = 0$$

Уравнения Лагранжа второго рода

- Уравнения Лагранжа второго рода позволяют описывать динамику тела или системы тел при помощи кинетической и потенциальной энергии всей системы. Данный метод удобен при описании динамики сложных систем (многозвенных маятников, систем «тележка-маятник» и др.).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n$$

где: $L = T - P$ - лагранжиан;

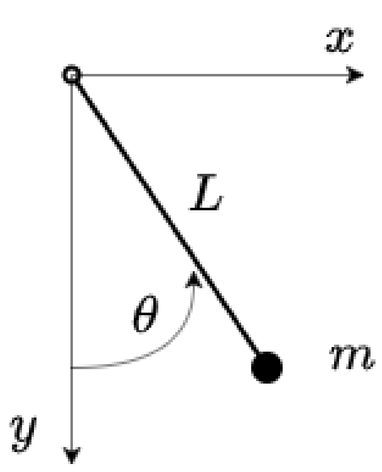
T – кинетическая энергия системы;

P – потенциальная энергия системы;

q_i - обобщенные координаты;

Q_i^n - обобщенные силы.

Пример подхода к получению модели динамикой Лагранжа



Постановка задачи получения модели механикой Лагранжа :

Кинетическая энергия системы $T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2}$;

Потенциальная энергия системы $P = mgy$;

Необходимо учитывать, что $x = Lsin\theta$, $y = Lcos\theta$.

Лагранжиан системы $L = \frac{m\dot{\theta}^2 L^2}{2} + mgLcos\theta$.

В итоге, получим ДУ математического маятника :

$$\ddot{\theta}\frac{L}{sin\theta} + g = 0$$

Динамические уравнения Эйлера

- Уравнения Эйлера описывают вращение твердого тела в системе координат, связанной с самим телом.

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = M_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3$$

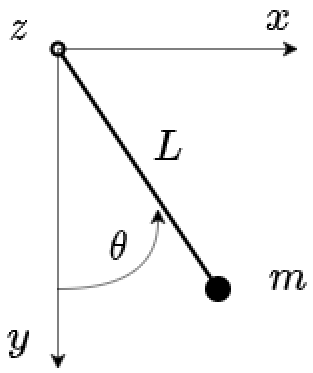
Где: I_{i} – главные моменты инерции относительно соответствующих осей;

$\dot{\omega}_{\mathrm{i}}$ – угловые ускорения относительно соответствующих осей;

ω_{i} – угловые скорости относительно соответствующих осей;

M_{i} – результирующие моменты сил вокруг соответствующих осей.

Пример подхода к получению модели динамикой Эйлера



Постановка задачи получения модели динамикой Эйлера :

Момент силы тяжести : $M = -mgLsin\theta;$

Момент инерции математического маятника : $J = mL^2;$

Динамическое уравнение Эйлера :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgLsin\theta.$$

В итоге, получим ДУ математического маятника :

$$\ddot{\theta}\frac{L}{sin\theta} + g = 0$$

Кинематические уравнения Эйлера

- Определяют проекции вектора угловой скорости вращения тела на подвижные оси координат, связанные с телом через углы Эйлера и их производные по времени:

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Механика Гамильтона

- Механика Гамильтона формально эквивалентна механике Лагранжа, однако своим представлением является переходным звеном от классической к квантовой механике.
- В гамильтоновой механике вводится понятие обобщенных импульсов, сопряженных обобщенным координатам и определяемых через лагранжиан следующим образом:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

- С помощью преобразования Лежандра лагранжиана определяется функция Гамильтона — гамильтониан:

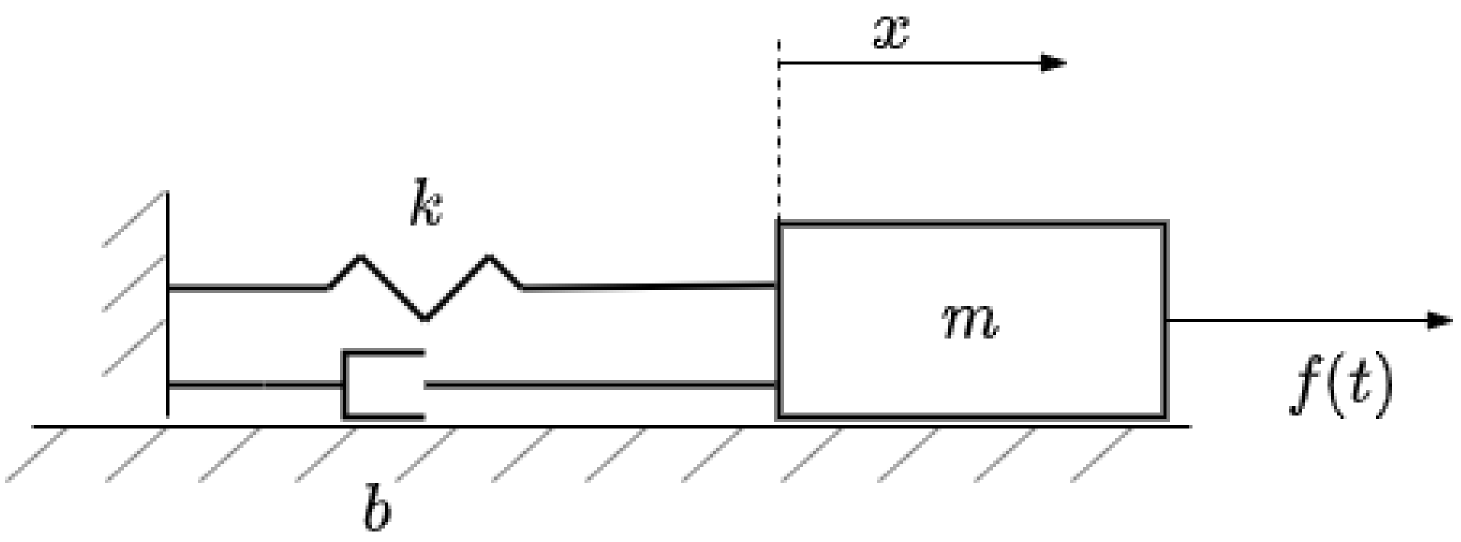
$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

- Далее можно получить систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$
$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

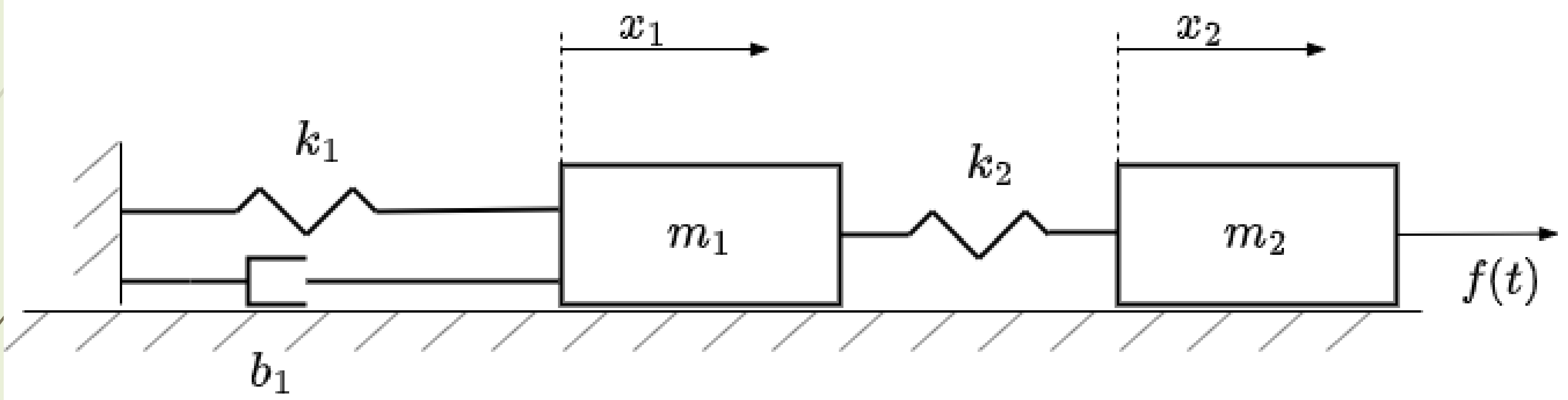
Лекция 5.
Формализм механики Ньютона

Пружинный маятник



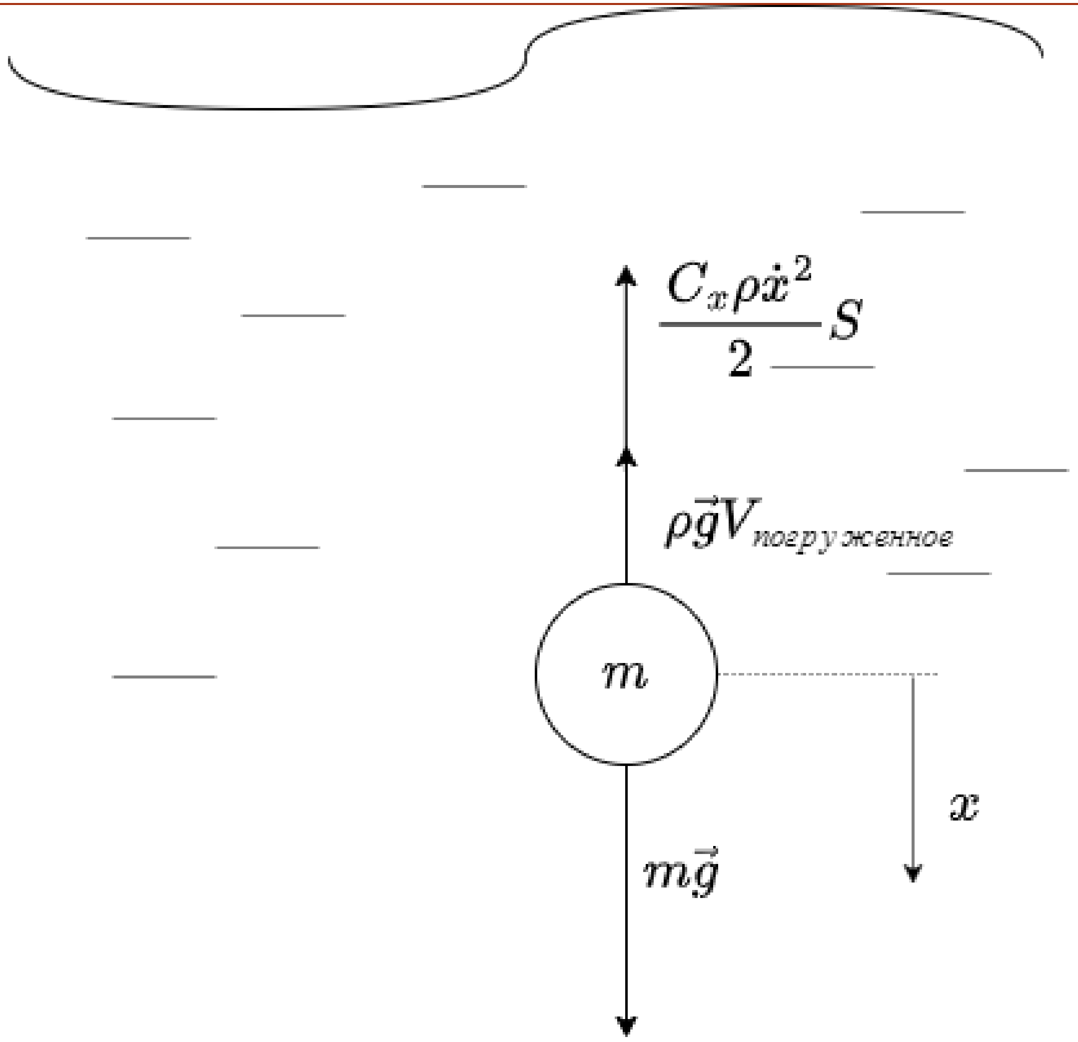
$$\ddot{a} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)$$

Двойной пружинный маятник



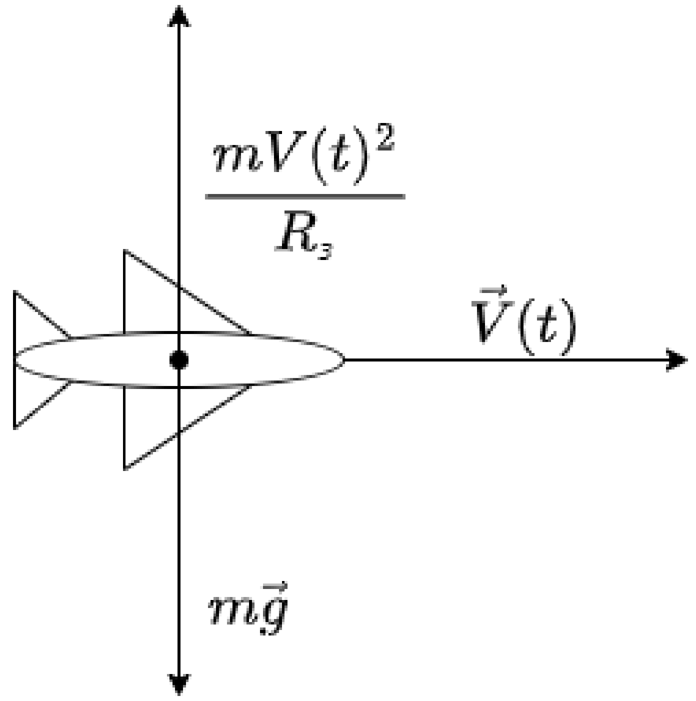
$$\ddot{x}_1 + \frac{b_1}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{m_2}f(t)$$



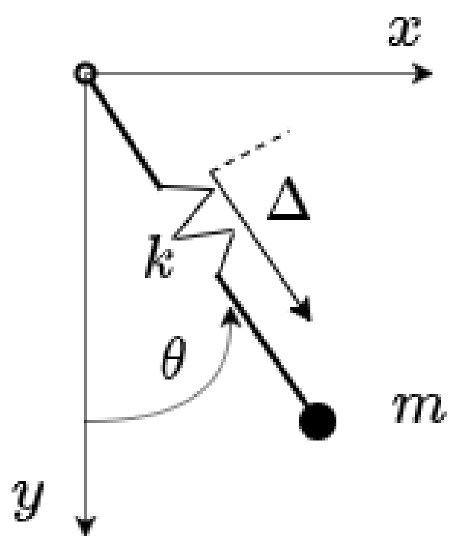
$$\ddot{x} + \frac{C_x \rho \dot{x}^2}{2m} S + \frac{\rho V g}{m} - g = 0$$

Система с центростремительной силой



Закон $V(t)$ – произвольный; $ma = \frac{mV(t)^2}{R_з} - mg$

Маятник с пружиной



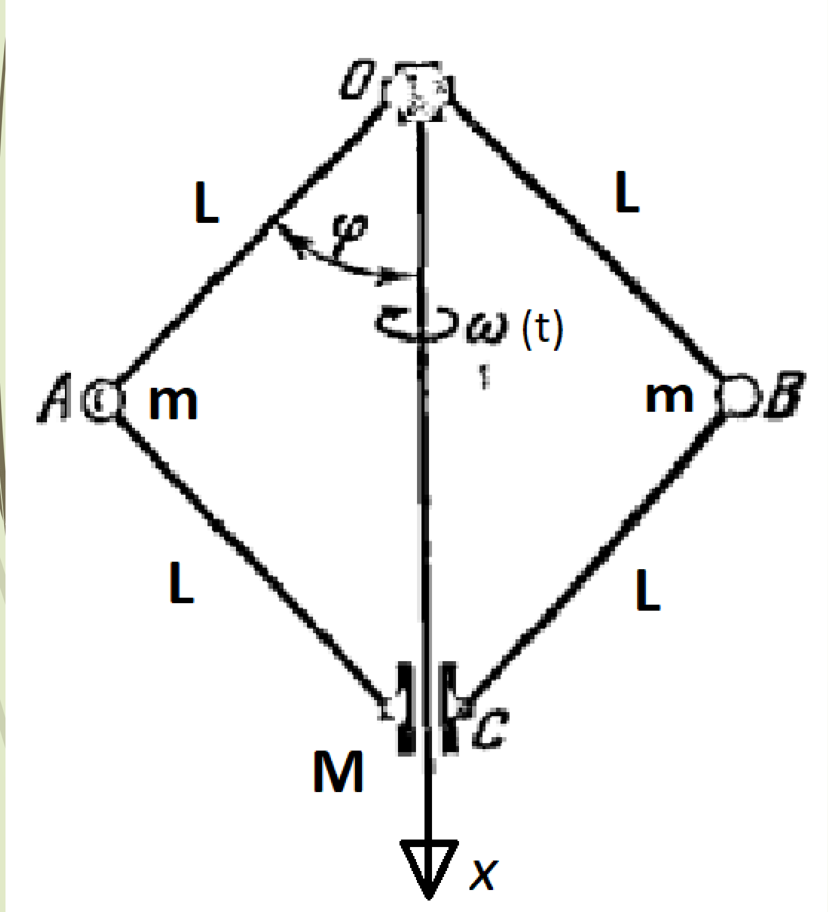
$$m\vec{a} = m\vec{g} + k\vec{\Delta}$$

$$\ddot{x} = (l_0 + x)\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}x + g\,cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0 + x}sin\,\theta - \frac{2\dot{x}}{l_0 + x}\dot{\theta}$$

Лекция 6.
Формализм механики Лагранжа

Центробежный регулятор



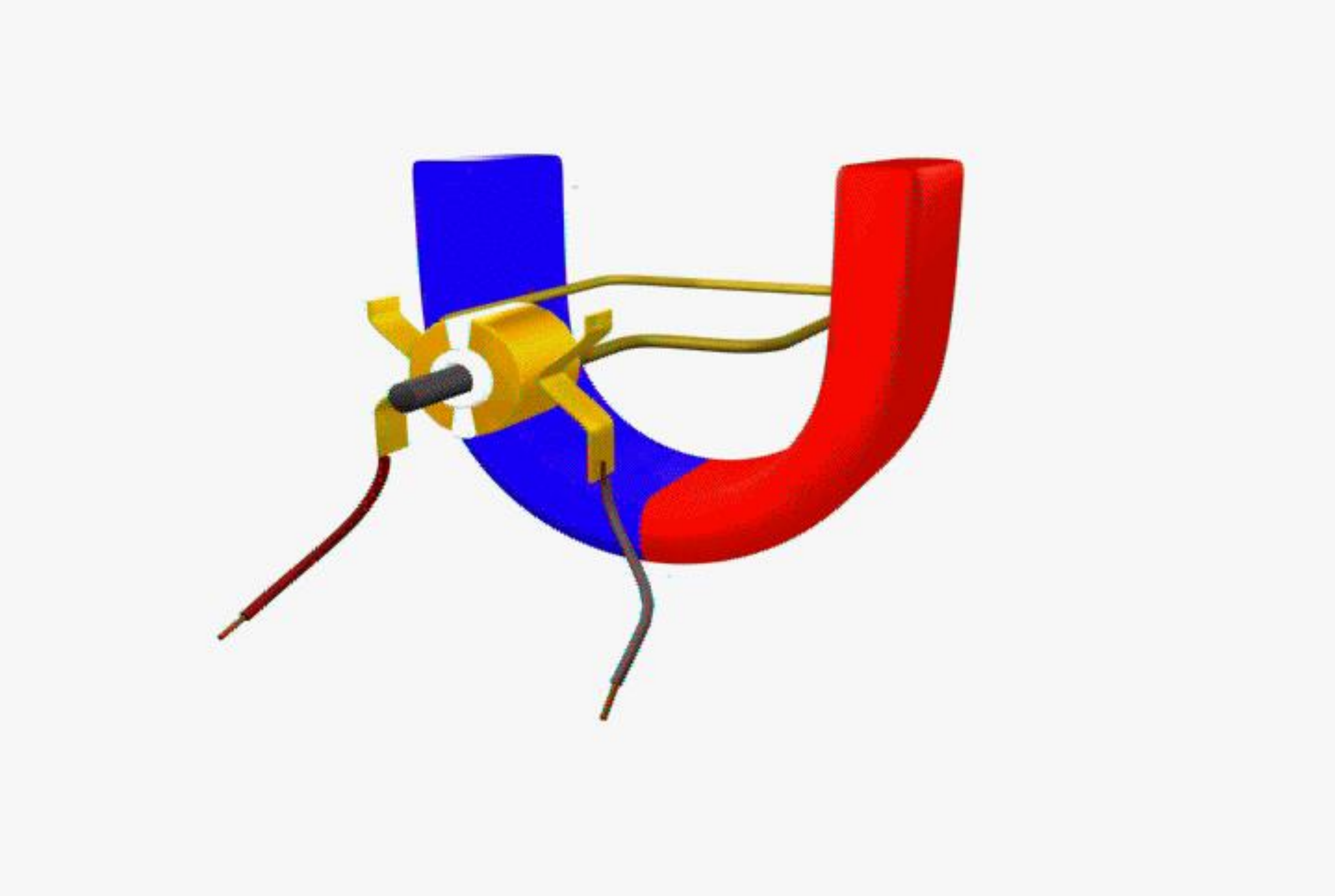
$$(m + 2M\sin^2\varphi)\ddot{\varphi}^2 + 2M\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{g}{l}(m + M)\sin\varphi$$

Лекция 7.
Получение математических моделей электромеханических систем

Двигатель постоянного тока (ДПТ)

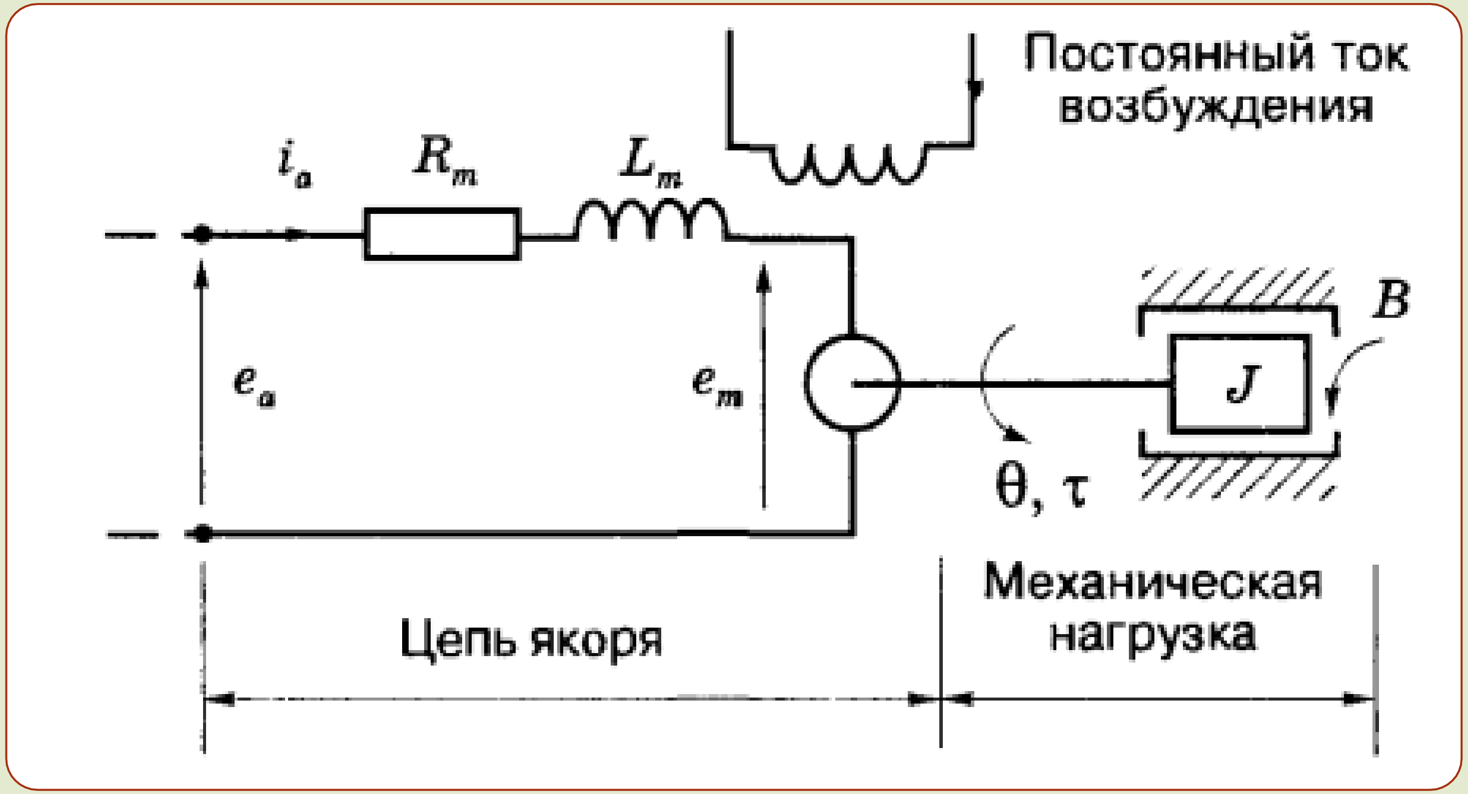
- Простейший двигатель, являющийся машиной постоянного тока, состоит из постоянного магнита на индукторе (статоре), одного электромагнита с явно выраженными полюсами на якоре (двухзубцового якоря с явно выраженными полюсами и с одной обмоткой), щёточноколлекторного узла с двумя пластинами (ламелями) и двумя щётками.
- Простейший двигатель имеет два положения ротора (две «мёртвые точки»), из которых невозможен самозапуск, и неравномерный крутящий момент.

Иллюстрация принципа работы ДПТ



Получение математической модели ДПТ. Постановка задачи

Рассмотрим модель двигателя, управляемого по цепи якоря. Входом системы считается напряжение $e_a(t)$, известны номиналы R_m, L_m. В ДПТ во время вращения в магнитном поле возникает противоЭДС e_m. Выходом является угол поворота двигателя θ и момент на валу двигателя τ. Нагрузка имеет момент инерции J.



Получение математической модели ДПТ

$$e_m(t) = K\Psi \frac{d\theta}{dt}, \qquad (2\text{-}40)$$

где K — параметр электродвигателя, Ψ — магнитный поток, а θ — угол поворота ротора двигателя; следовательно, $d\theta/dt$ — это угловая скорость вращения двигателя. Мы предполагаем, что поток Ψ остается постоянным, следовательно

$$e_m(t) = K_m \frac{d\theta}{dt}. \qquad (2\text{-}41)$$

Преобразуя по Лапласу (2-41), получим

$$E_m(s) = K_m s\Theta(s).$$

Для цепи якоря можно записать:

$$E_a(s) = (L_m s + R_m)I_a(s) + E_m(s),$$

откуда

$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_m(s)}{L_m s + R_m}.$$

Получение математической модели ДПТ

Момент на валу двигателя определяется уравнением

$$\tau(t) = K_1 \Psi i_a(t) = K_\tau i_a(t), \qquad (2\text{-}$$

поскольку магнитный поток считается постоянным. Заметим, что это уравнение та
было бы нелинейным, если магнитный поток являлся бы функцией времени. Преобразо
ние по Лапласу последнего уравнения дает:

$$T(s) = K_\tau I_a(s). \qquad (2\text{-}$$

Заключительное уравнение мы получим путем суммирования всех моментов, дей
вующих на якорь двигателя. На рис. 2.26 J есть сумма всех моментов инерции, привед
ных к оси двигателя, а B — коэффициент, характеризующий все виды трения (о возду
механических элементах и т.д.). Следовательно, уравнение для моментов имеет вид

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau(t) - B\frac{d\theta}{dt}, \qquad (2\text{-}$$

откуда следует

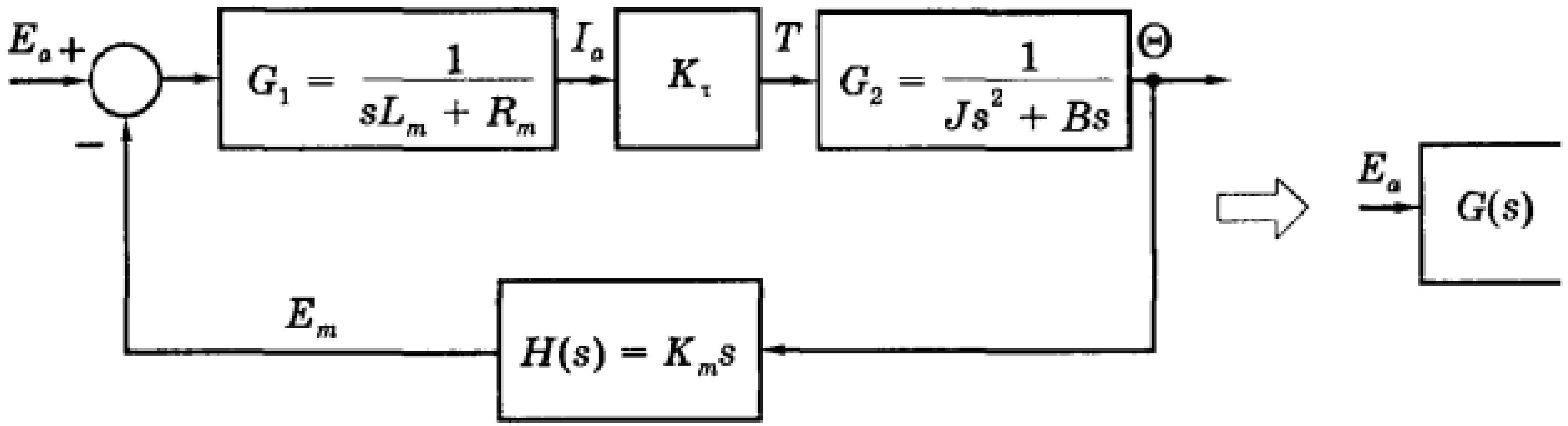
$$T(s) = (Js^2 + Bs)\Theta(s). \qquad (2\text{-}$$

Отсюда для угла поворота двигателя получим:

$$\Theta(s) = \frac{T(s)}{Js^2 + Bs}. \qquad (2\text{-}$$

Получение математической модели ДПТ

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{E_a(s)}=\frac{G_1(s)K_\tau G_2(s)}{1+K_\tau G_1(s)G_2(s)H(s)}\;.\qquad (2$$



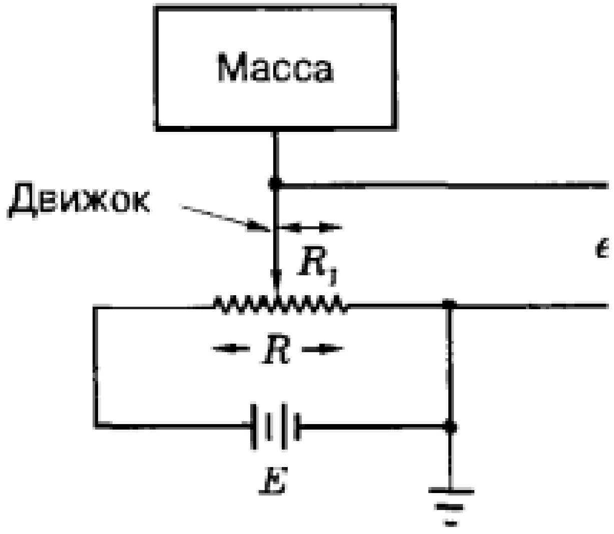
Передаточная функция ДПТ

$$G(s) = \frac{K_\tau}{JL_m s^3 + (BL_m + JR_m)s^2 + (BR_m + K_\tau K_m)s}. \qquad (2\text{-}51)$$

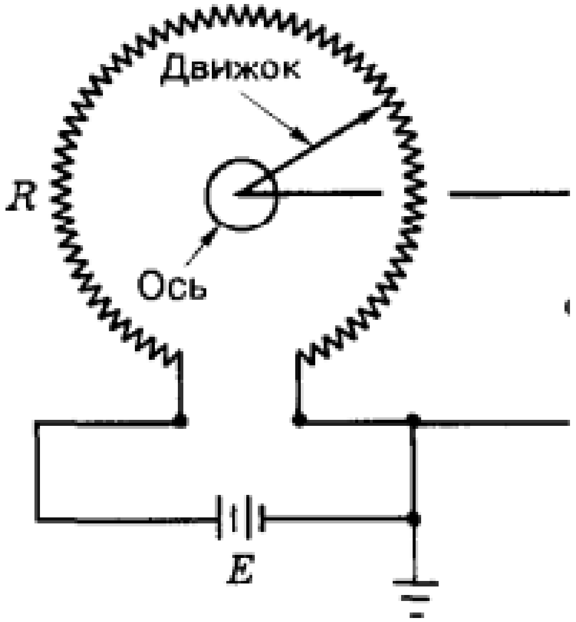
Очень часто при моделировании сервопривода пренебрегают индуктивностью цепи якоря. Тогда передаточная функция приобретает вид:

$$G(s) = \frac{K_\tau}{JR_m s^2 + (BR_m + K_\tau K_m)s}. \qquad (2\text{-}52)$$

Датчики положения



(a)



(б)

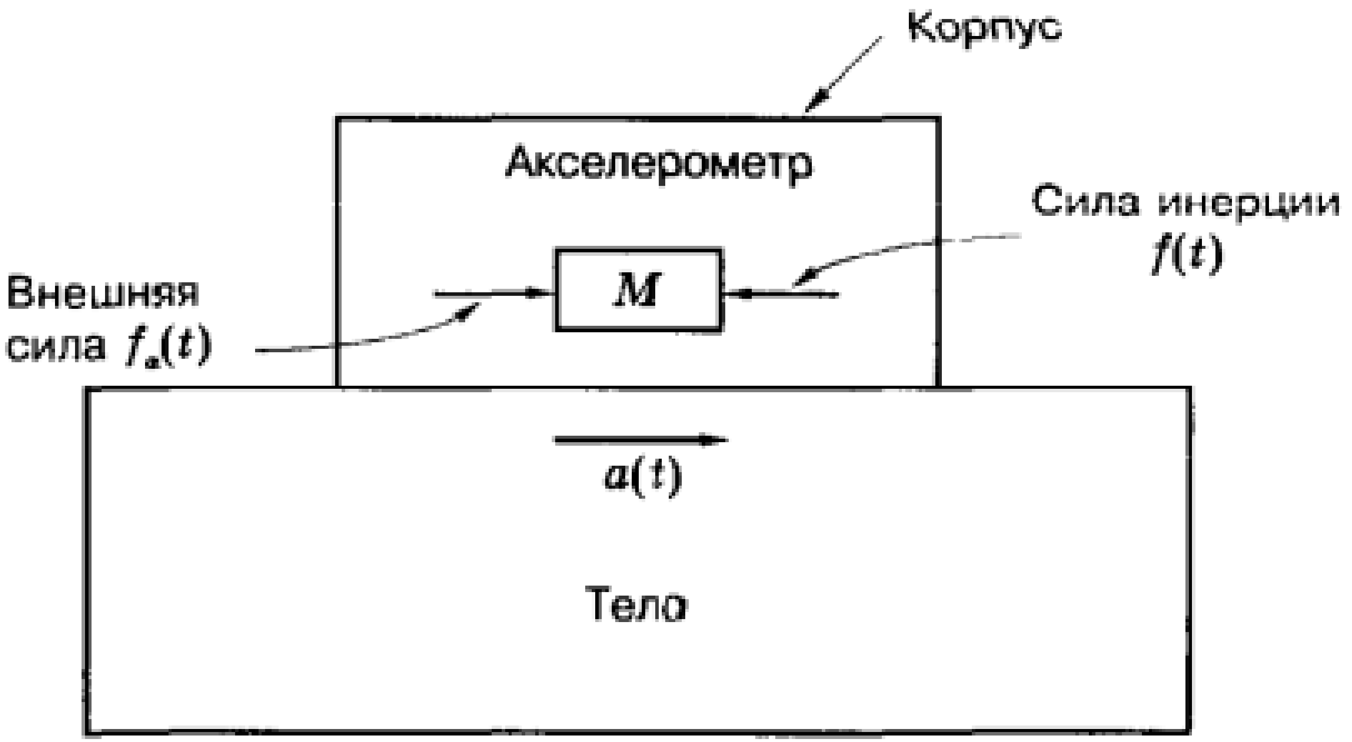
- Электромеханические датчики положения как правило состоят из электрической цепи, номинал нагрузки в которой изменяется при механическом воздействии.

$$e(t) = \frac{R_1(t)}{R} E,$$

$$e(t) = K_x x(t) \text{ или } e(t) = K_\theta \theta(t),$$

Датчики ускорения

$$a(t) = \frac{1}{M} f_a(t). \qquad (2\text{-}59)$$



Лекция 8.
Описание математических моделей в нормальной форме Коши

Характеристика представления ДУ

- Полученное описание объектов и систем как правило состоит из m дифференциальных уравнений порядка n и имеют вид:

$$\begin{cases} a_{10}q_1^{(n)} + a_{11}q_1^{(n-1)} + \ldots + a_{1n-1}\dot{q}_1 + a_{1n}q_1 = f_1(t, Q) \\ a_{20}q_2^{(n)} + a_{21}q_2^{(n-1)} + \ldots + a_{2n-1}\dot{q}_2 + a_{2n}q_2 = f_2(t, Q) \\ \vdots \\ a_{m0}q_m^{(n)} + a_{m1}q_m^{(n-1)} + \ldots + a_{mn-1}\dot{q}_m + a_{mn}q_m = f_m(t, Q) \end{cases}$$

Некоторые коэффициенты могут быть нулевыми, то есть n – максимальный порядок ДУ системы. Решать ДУ различных порядков, каждый из которых больше 1 – нетривиальная задача, однако её можно упростить, приведя систему к форме Коши. В таком случае вместо m ДУ порядка n получим m x n ДУ 1 порядка. Для решения также необходимо знание всех начальных условий.

Подготовка переменных

$$x_1 = q_1$$
$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{q}_1$$
$$\dot{x}_2 = x_3 = \ddot{q}_1$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = q_1^{(n)} = \frac{1}{a_{01}} f_1(t, X) - \frac{a_{11}}{a_{01}} x_n - \ldots - \frac{a_{1n-1}}{a_{01}} x_2 - \frac{a_{1\mathrm{n}}}{a_{01}} x_1$$
$$x_{n+1} = q_2$$
$$\dot{x}_{n+1} = x_{n+2}$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{2n} = q_2^{(n)} = \frac{1}{a_{02}} f_2(t, X) - \frac{a_{21}}{a_{02}} x_{2n} - \ldots - \frac{a_{2n-1}}{a_{02}} x_{n+2} - \frac{a_{2\mathrm{n}}}{a_{02}} x_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$x_{(m-1)n+1} = q_m$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{mn} = q_m^{(n)} = \frac{1}{a_{0m}} f_{\mathrm{m}}(t, X) - \frac{a_{m1}}{a_{0m}} x_{mn} - \ldots - \frac{a_{mn-1}}{a_{0m}} x_{(m-1)n+2} - \frac{a_{2mn}}{a_{0m}} x_{(m-1)n+1}$$

Представление системы в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \dfrac{1}{a_{01}} f_1(t, X) - \dfrac{a_{11}}{a_{01}} x_n - \ldots - \dfrac{a_{1n-1}}{a_{01}} x_2 - \dfrac{a_{1n}}{a_{01}} x_1 \\ \dot{x}_{n+1} = x_{n+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} = q_2^{(n)} = \dfrac{1}{a_{02}} f_2(t, X) - \dfrac{a_{21}}{a_{02}} x_{2n} - \ldots - \dfrac{a_{2n-1}}{a_{02}} x_{n+2} - \dfrac{a_{2n}}{a_{02}} x_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{(m-1)n+1} = x_{(m-1)n+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{mn} = \dfrac{1}{a_{0m}} f_{\mathrm{m}}(t, X) - \dfrac{a_{m1}}{a_{0m}} x_{mn} - \ldots - \dfrac{a_{mn-1}}{a_{0m}} x_{(m-1)n+2} - \dfrac{a_{2mn}}{a_{0m}} x_{(m-1)n+1} \end{cases}$$

Альтернативное представление системы в форме Коши

$$
\begin{cases}
x_1 = q_1 \\
x_2 = q_2 \\
x_3 = q_3 \\
\vdots \\
x_m = q_m \\
\dot{x}_1 = x_{m+1} = \dot{q}_1 \\
\vdots \\
\dot{x}_m = x_{2m} = q_m \\
\vdots \\
\dot{x}_{(n-1)m+1} = q_1^{(n)} = \dfrac{1}{a_{01}} f_1(t, X) - \dfrac{a_{11}}{a_{01}} x_{(n-2)m+1} - \ldots - \dfrac{a_{1n-1}}{a_{01}} x_{m+1} - \dfrac{a_{1n}}{a_{01}} x_1 \\
\vdots \\
\dot{x}_{nm} = q_m^{(n)} = \dfrac{1}{a_{0m}} f_2(t, X) - \dfrac{a_{m1}}{a_{0m}} x_{(n-1)m} - \ldots - \dfrac{a_{mn-1}}{a_{0m}} x_{2m} - \dfrac{a_{2mn}}{a_{0m}} x_m
\end{cases}
$$

Описание неявных систем

- При выводе сложных моделей может быть так, что в одном или нескольких ДУ присутствуют старшие производные одновременно по нескольким координатам. Подобная система, приведенная к форме Коши:

$$\dot{x}_i + \alpha\dot{x}_j + \beta\dot{x}_k + \ldots + \omega\dot{x}_z = f_i(t, \bar{x})$$

- Если рассматривать всю систему в целом, то все левые части можно объединить в матрицу, в таком случае система примет вид:

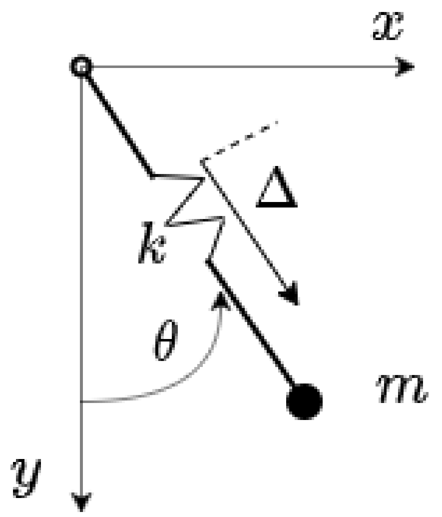
$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \cdots & \omega_1 \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & \omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_i & \cdots & 1 & \beta_i & \cdots & \omega_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{nm} & \beta_{nm} & \gamma_{nm} & \cdots & \omega_{nm} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_i \\ \cdots \\ \dot{x}_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t, \vec{x}) \\ g_2(t, \vec{x}) \\ \cdots \\ g_i(t, \vec{x}) \\ \cdots \\ g_{nm}(t, \vec{x}) \end{bmatrix}$$

Описание неявных систем

- Матрицу $\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \cdots & \omega_1 \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & \omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_i & \cdots & 1 & \beta_i & \cdots & \omega_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{nm} & \beta_{nm} & \gamma_{nm} & \cdots & \omega_{nm} & 1 \end{bmatrix}$ обозначим как М, тогда вектор производных определится следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_i \\ \cdots \\ \dot{x}_{nm} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} g_1(t, \vec{x}) \\ g_2(t, \vec{x}) \\ \cdots \\ g_i(t, \vec{x}) \\ \cdots \\ g_{nm}(t, \vec{x}) \end{bmatrix}$$

Пример перехода к форме Коши



$$m\vec{a} = m\vec{g} + k\vec{\Delta}$$

$$\ddot{x} = (l_0 + x)\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}x + g\,cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l_0 + x}sin\,\theta - \frac{2\dot{x}}{l_0 + x}\dot{\theta}$$

Замена переменных: $\begin{matrix} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \\ x_3 = x \\ x_4 = \dot{x} \end{matrix}$. Уравнения в форме Коши: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l_0+x_3}\sin x_1 - \frac{2x_4}{l_0+x_3}x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = (l_0 + x_3)x_2^2 - \frac{k}{m}x_3 + g\cos x_1 \end{cases}$