Подготовка к рубежному контролю №3
по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»,
ИУ1Б, 3-й семестр, 2022г.

Вопросы по теории

1. Дать определение функции распределения (вероятностей) случайного вектора. Сформулировать свойства функции распределения.
2. Дать определение плотности распределения (вероятностей) двумерного случайного вектора. Сформулировать свойства плотности распределения (вероятностей) двумерного случайного вектора.
3. Дать определение независимых случайных величин. Сформулировать необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин.
4. Дать определения математического ожидания дискретной и непрерывной случайной величины. Сформулировать свойства математического ожидания.
5. Дать определение дисперсии случайной величины. Сформулировать свойства дисперсии.
6. Дать определение ковариации двух случайных величин. Сформулировать свойства ковариации.
7. Дать определение коэффициента корреляции двух случайных величин. Сформулировать свойства коэффициента корреляции.
8. Сформулировать теорему: первое неравенство Чебышёва.
9. Сформулировать теорему: второе неравенство Чебышёва.
10. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышёва.
11. Сформулировать закон больших чисел в форме Чебышёва для схемы Бернулли.
12. Сформулировать центральную предельную теорему.
13. Сформулировать локальную теорему Муавра-Лапласа.
14. Сформулировать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Задачи для подготовки

I. Двумерные случайные величины

1. Совместная двумерная плотность распределения (вероятностей) случайного вектора $\xi(\omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \end{pmatrix}$ имеет вид $f_\xi(x,y) = \frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$.

Найти:

1) постоянную C;
2) совместную функцию распределения;
3) одномерные плотности распределения компонент случайного вектора;
4) вероятность попадания случайного вектора $\xi(\omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \end{pmatrix}$ в треугольник ABC с вершинами в точках $A(-1,1), B(1,1)$ и $C(0,0)$;
5) проверить, являются ли случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

Ответ: $C = \frac{1}{\pi^2}$; $F_\xi(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right)$;

$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$; $P = \frac{1}{16}$; $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы.

II. Числовые характеристики случайных величин

2. Диагональ квадрата $\xi(\omega)$ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(1,4)$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади квадрата.
3. Случайная величина $\xi(\omega)$ распределена равномерно в интервале $(0,5)$, а случайная величина $\eta(\omega)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\varepsilon(\omega) = \xi(\omega) - 2\eta(\omega) + 3$, если коэффициент корреляции равен $\rho_{\xi\eta} = -0{,}7$.

III. Метод моментов и метод максимального правдоподобия

4. Методом моментов по выборке $X_1, X_2, \cdots, X_n$ найти оценку параметра θ для плотности

$$p(x) = \begin{cases} 4\theta\sqrt{\dfrac{\theta}{\pi}}x^2\exp(-\theta x^2), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Ответ: $\hat{\theta} = \frac{4}{\pi\bar{x}^2}$.

5. Методом максимального правдоподобия по выборке $X_1, X_2, \cdots, X_n$ найти оценку параметра θ для плотности

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{3}\left(\dfrac{3}{x}\right)^{\theta+1}, & x > 3, \\ 0, & x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{X_k}{3}\right)}$.

Числовые характеристики функции от случайной величины

Пусть $f_\xi(x)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$. Тогда

$$M[\eta(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f_\xi(x)dx.$$

$$D[\eta(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \cdot f_\xi(x)dx - m_\eta^2.$$

Пример 1. Ребро куба $\xi(\omega)$ – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[1,2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

<u>Решение.</u> Обозначим $\eta(\omega)$ – объем куба. Очевидно, что $\eta(\omega) = \xi^3(\omega)$

$$\Rightarrow \quad y = \varphi(x) = x^3, \qquad x \in [1,2].$$

Плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$ имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-1}, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]; \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]. \end{cases}$$

Тогда

$$M[\eta(\omega)] = \int_1^2 x^3 \cdot 1dx = \frac{2^4-1}{4} = \frac{15}{4},$$

$$D[\eta(\omega)] = \int_1^2 (x^3)^2 \cdot 1dx - m_\eta^2 = \frac{2^7-1}{7} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{457}{112}.$$

Свойства числовых характеристик

Свойства математического ожидания

1. Если случайная величина $\xi(\omega)$ принимает всего одно значение, равное C, с вероятностью 1, то $M[C] = C$.
2. $M[\alpha\xi(\omega) + \beta] = \alpha M[\xi(\omega)] + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $M[\xi(\omega) + \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)] + M[\eta(\omega)]$.
4. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то

$$M[\xi(\omega) \cdot \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)] \cdot M[\eta(\omega)].$$

Свойства дисперсии

1. Если случайная величина $\xi(\omega)$ принимает всего одно значение, равное C, с вероятностью 1, то $D[C] = 0$.
2. $D[\alpha\xi(\omega) + \beta] = \alpha^2 D[\xi(\omega)],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - m_\xi^2$.
4. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то
$$D[\xi(\omega) + \eta(\omega)] = D[\xi(\omega)] + D[\eta(\omega)].$$

Свойства ковариации

1. $cov[\xi(\omega), \xi(\omega)] = D[\xi(\omega)]$.
2. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0$.
3. Если $\eta_k(\omega) = \alpha_k \xi_k(\omega) + \beta_k,\ k = 1,2$, то
$$cov[\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)] = \alpha_1 \alpha_2 cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)].$$
4. $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)\eta(\omega)] - M[\xi(\omega)] \cdot M[\eta(\omega)]$.
5. $D[\alpha\xi(\omega) + \beta\eta(\omega) + \gamma] = \alpha^2 D[\xi(\omega)] + \beta^2 D[\eta(\omega)] + 2\alpha\beta cov[\xi(\omega), \eta(\omega)],\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ имеют следующие числовые характеристики: $m_\xi = -5$, $D[\xi(\omega)] = 0{,}5$, $m_\eta = 2$, $D[\eta(\omega)] = 0{,}4$, $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0{,}2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$\varepsilon(\omega) = 4\xi(\omega) - 5\eta(\omega) + 25$.

Решение. Применяя свойства математического ожидания 2 и 3, находим

$$M[\varepsilon(\omega)] = M[4\xi(\omega) - 5\eta(\omega) + 25] = 4m_\xi - 5m_\eta + 25 = -5.$$

Далее применим свойство 5 дисперсии

$$D[\varepsilon(\omega)] = D[4\xi(\omega) - 5\beta\eta(\omega) + 25] = 4^2 D[\xi(\omega)] + (-5)^2 D[\eta(\omega)] +$$
$$+2 \cdot 4 \cdot (-5) cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 10.$$