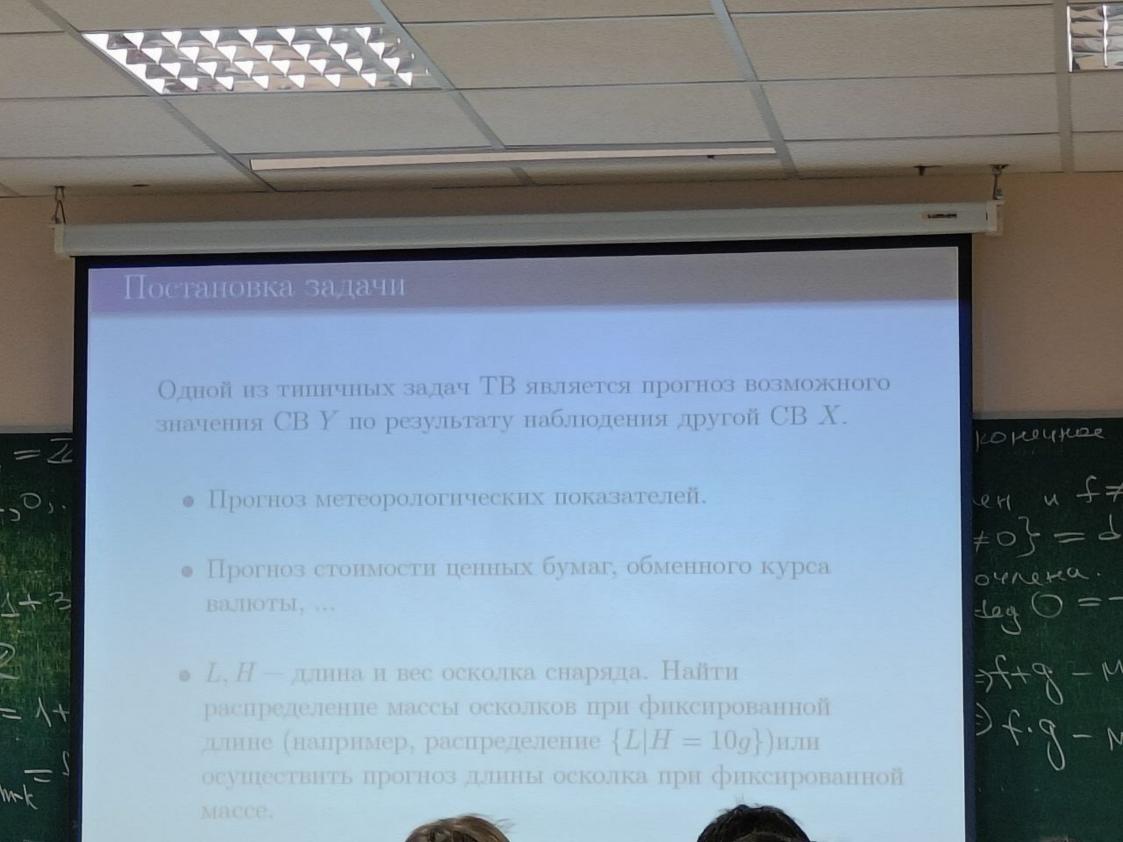
Условные распределения вероятности

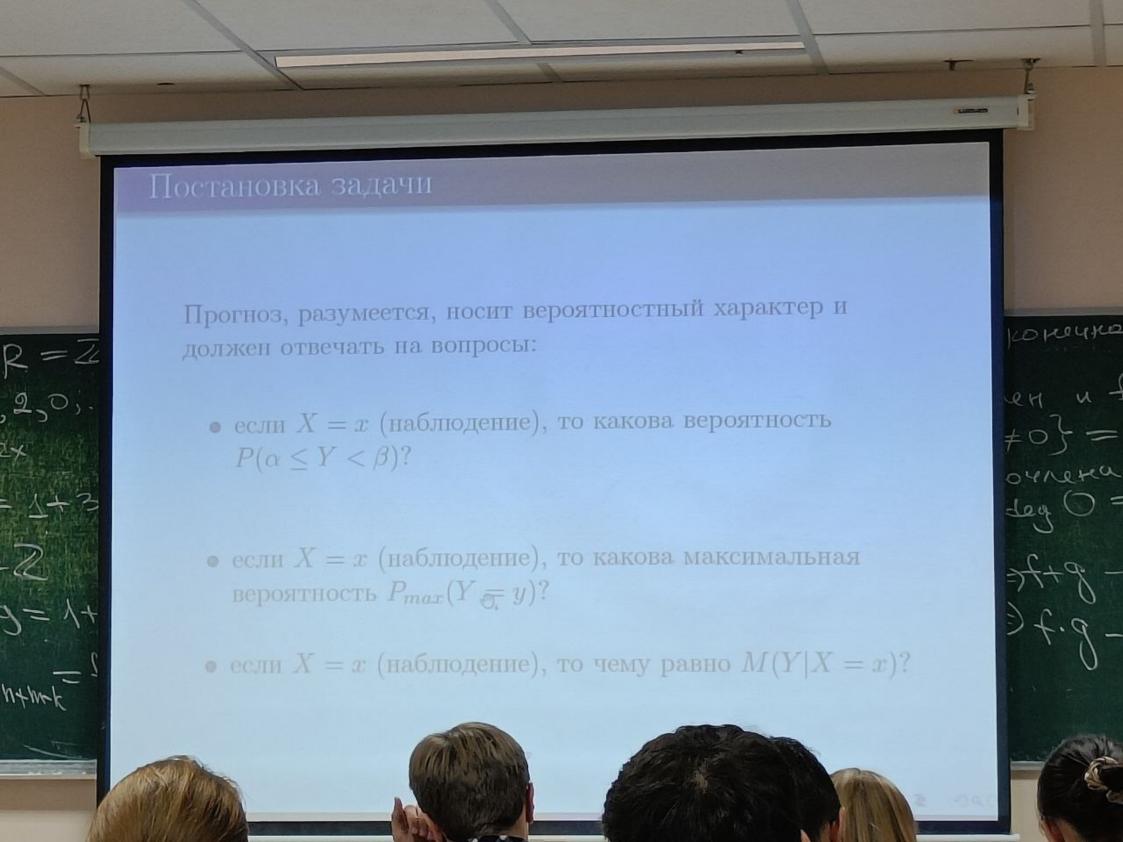
Кафедра прикладной математики и механики

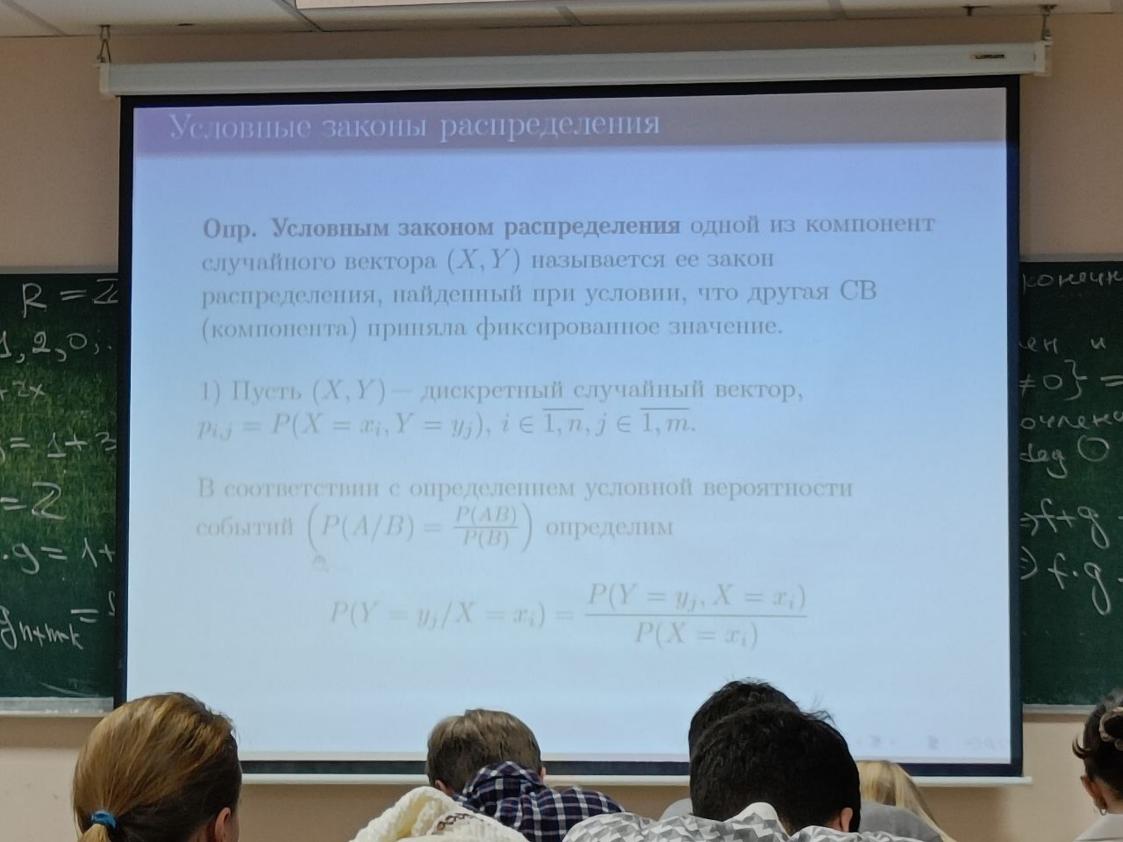
Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике

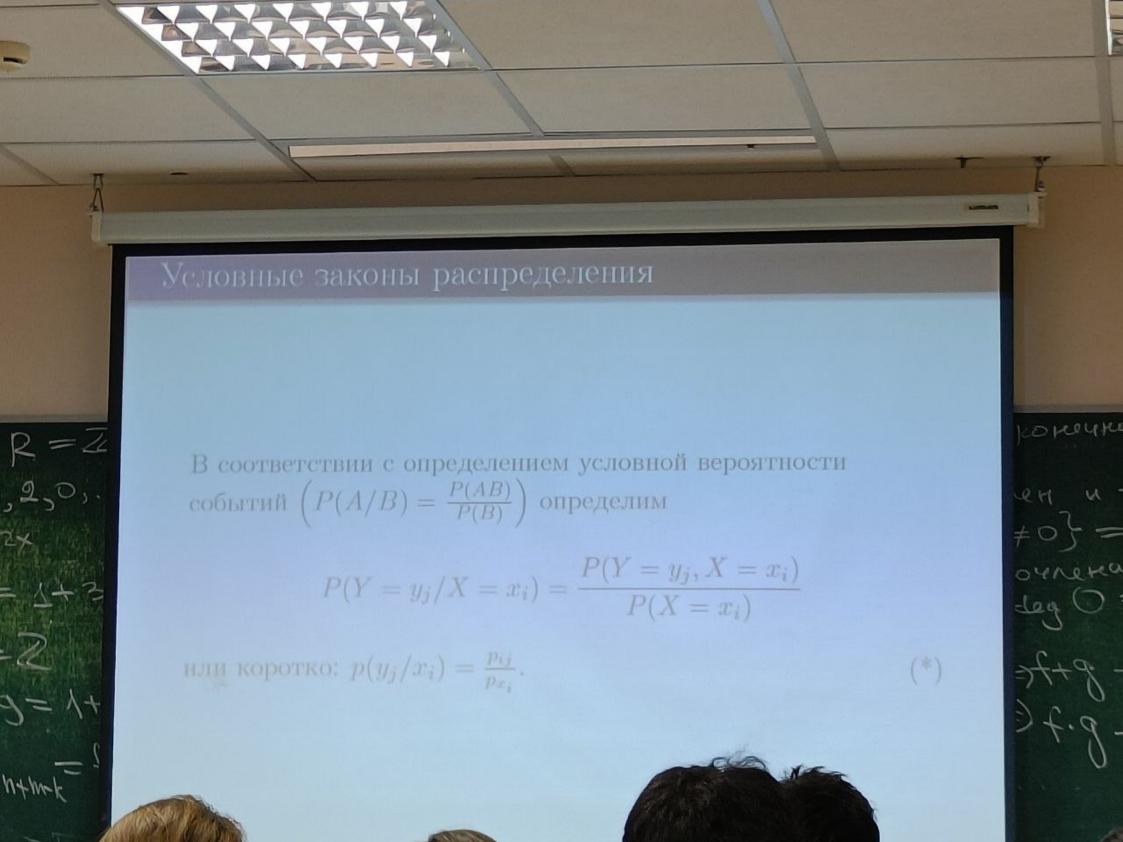
Постановка задачи

Одной из типичных задач ТВ является прогноз возможного значения СВ Y по результату наблюдения другой СВ X.









Условные законы распределения

Совокупность вероятностей (*)

$$p(y_1/x_i), p(y_2/x_i), p(y_3/x_i), \dots, p(y_m/x_i)$$

KOH

RH

представляет собой условный закон распределения СВ Y при условии, что $X=x_i$.

При этом

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Условные законы распределения

Совокупность вероятностей (*)

$$p(y_1/x_i), p(y_2/x_i), p(y_3/x_i), \dots, p(y_m/x_i)$$

RH

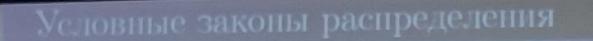
041

представляет собой условный закон распределения СВ Y при условии, что $X=x_i$.

При этом

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Аналогично определяется условный закон распределения $CB\ X$ при условии, что $Y=y_j$.



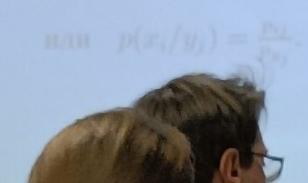
При этом

2,0,.

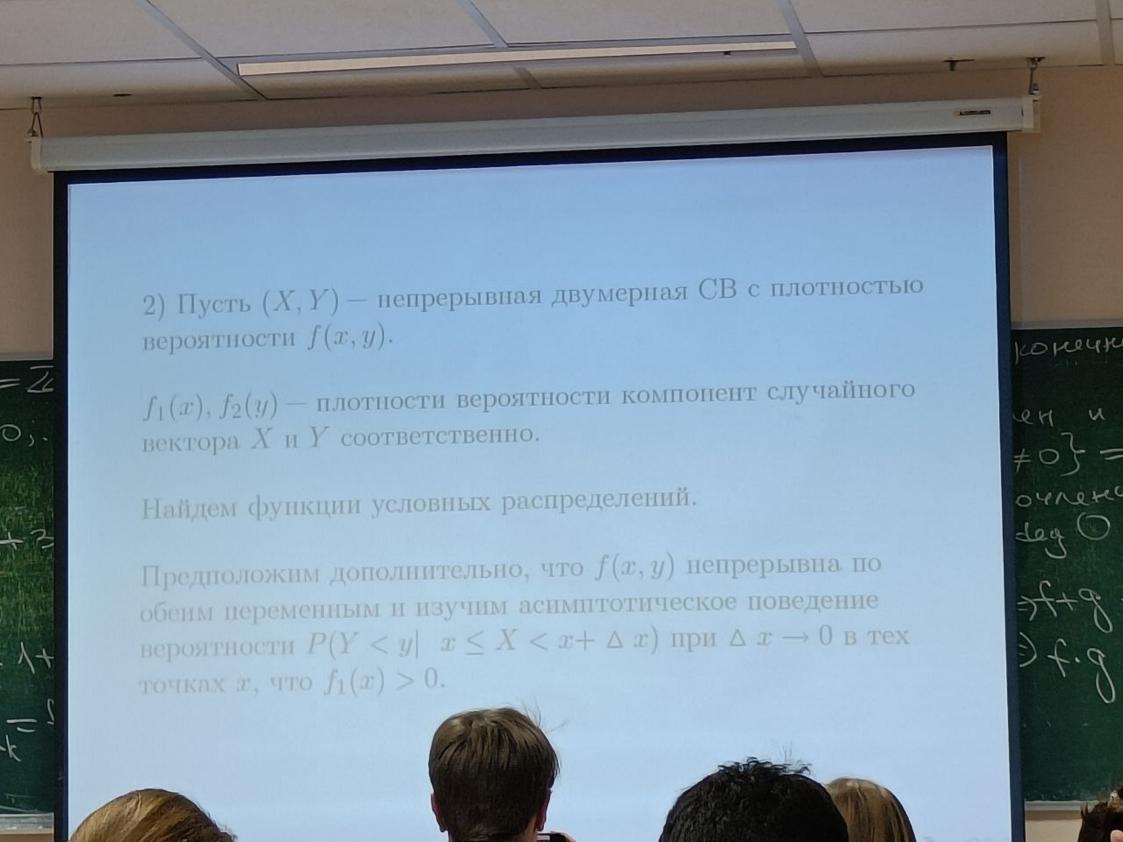
$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1$$

Аналогично определяется условный закон распределения СВ X при условии, что $Y = y_j$.

$$P(X = x_i/Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$







$$P(Y < y | x \le X < x + \Delta x) = \frac{P(Y < y, x \le X < x + \Delta x)}{P(x \le X < x + \Delta x)} =$$

$$=\frac{\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}f(u,v)\,du\,dv}{\int\limits_{x+\Delta x}^{x+\Delta x}f_{1}(t)\,dt}=$$

применяем теорему о среднем для интегралов

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x + \lambda_1 \Delta x, v) dv \cdot \Delta x}{f_1(x + \lambda_2 \Delta x) \cdot \Delta x}$$

где $0 < \lambda_i < 1$, $i \in \overline{0,1}$.

Используя непрерывность функций f(x,y) и $f_1(x)$, определим условную вероятность распределения Y относительно события X=x.

Устремим $\Delta x \to 0$.

$$F(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(Y < y | x \le X < x + \Delta x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x, v) dv}{f_1(x)}$$

eH

- функция распределения Y при условии, что X^{\bullet} фиксировано.

Условная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{d}{dy} = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{f_2(x)}$$

Используя непрерывность функций f(x,y) и $f_1(x)$, определим условную вероятность распределения Y относительно события X=x.

Устремим $\Delta x \to 0$.

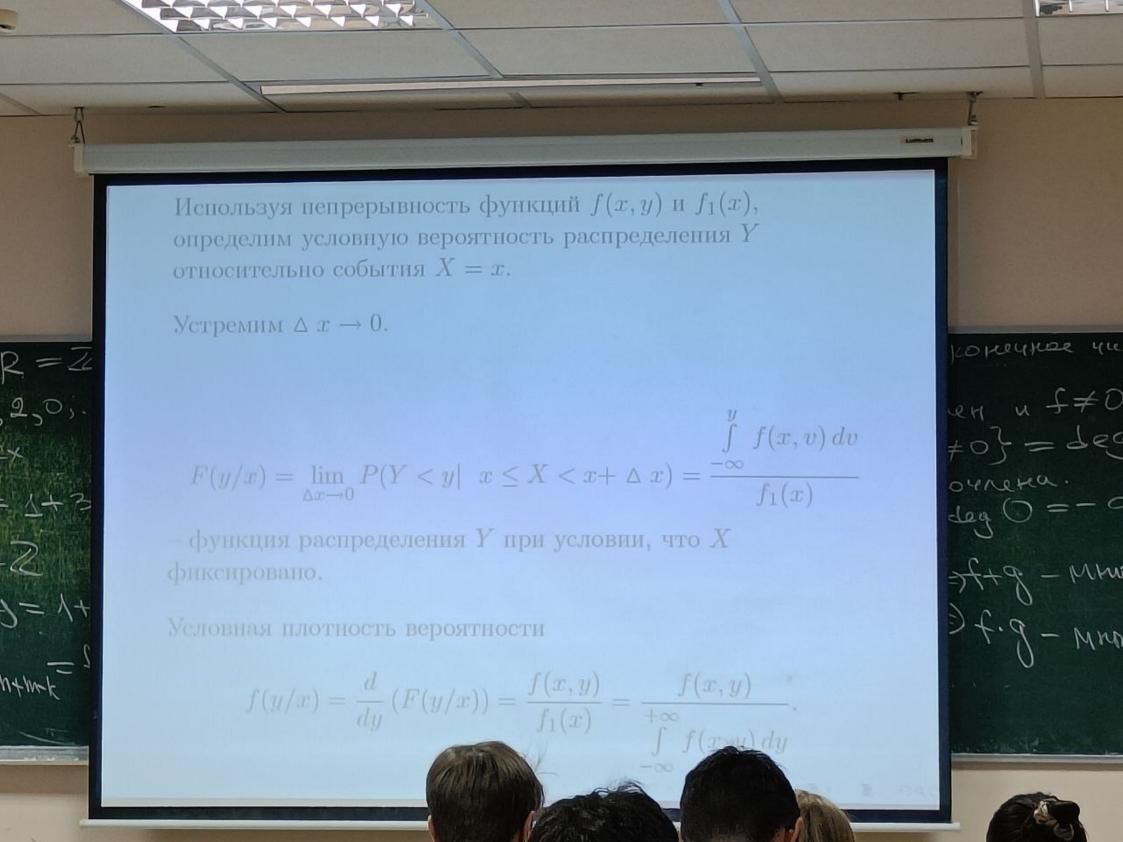
$$F(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(Y < y | x \le X < x + \Delta x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv}{f_1(x)}$$

concurre

- функция распределения Y при условии, что X фиксировано.

Условная плотность вероятности

$$f(y/x) = \frac{d}{dy} \left(F(y/x) \right) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{f_2(x)} = \frac{f(x,y)}{f_2(x)}$$



Аналогично получаем

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx}.$$

Замечание.

Значения x, в которых $f_1(x) = 0$ (значения y, в которых $f_2(y) = 0$) можно исключить из области значений СВ X (СВ Y), т.к. они в совокупности образуют множество нулевой вероятности.



