

$$5) \operatorname{COV}(CX, Y) = C \cdot \operatorname{COV}(X, Y) = \operatorname{COV}(X, CY);$$

$$6) \operatorname{COV}(X+C, Y) = \operatorname{COV}(X, Y) = \operatorname{COV}(X+C, Y+C);$$

$$7) |K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

□ Применяем свойство 4) к случайным величинам

Ю.А. ИВАНОВ

$$4) D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{XY};$$

$$= \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{-1}$$



Скрыть слайды

Оформить презентацию

Прокрутить слайды

Настройка слайда

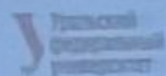
Скрыть слайд

Настройка времени слайда

Закрепить слайд

☒ Воспроизвести закрывающий тест
 ☒ Использовать время показа слайда
 ☒ Показать заметки управления презентацией

Монитор: Автоматически
   
☒ Режим докладчика



5)  $COV(CX, Y) = C \cdot COV(X, Y) = COV(X, CY);$

6)  $COV(X+C, Y) = COV(X, Y) = COV(X+C, Y+C);$

7)  $|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$

□ Применяем свойство 4) к случайным величинам

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} \text{ и } \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} :$$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) &= D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) + D\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) \pm \\ &\pm 2 \cdot M\left[\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right]\right) \cdot \left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - M\left[\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right]\right)\right] = \\ &= 1 + 1 \pm 2M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = \end{aligned}$$



$$\frac{1}{\sigma_x} \left[ \frac{X - m_x}{\sigma_x} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \underbrace{\sigma_x^2}_{\sigma_x^2} \left[ \frac{X - m_x}{\sigma_x} \right]$$

$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$   
 Задача  
 Найти  
 момент



$$\begin{aligned} D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) &= D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) + D\left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) \pm \\ &\pm 2 \cdot M\left[\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X} - M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right]\right) \cdot \left(\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - M\left[\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right]\right)\right] = \\ &= 1 + 1 \pm 2M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 2\left(1 \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right) \geq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\sigma_X \sigma_Y \leq K_{XY} \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Таким образом,  $|K_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y.$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

Здесь

Нормаль

распределение

$$= \mathbb{Q}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} = 2x^2$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2x^2 + 4$$

Ковариация содержит информацию о зависимости между величинами.

Значение  $K_{XY}$  изменяется при изменении единиц измерения  $X$  и  $Y$ .

Поэтому для характеристики между величинами удобно рассматривать безразмерную величину.

$$= 23 = 20$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2$$



Определение Коэффициентом корреляции СВ  $X$  и  $Y$  называется

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}}.$$

Очевидно, что

$$r_{XY} = COV(Z_1, Z_2), \text{ где}$$

$$Z_1 = \frac{X - m_X}{\sigma_X}; \quad Z_2 = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} -$$

стандартные СВ.



## Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)

$$1) |r_{XY}| \leq 1;$$

$$\square |r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \leq \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

$$2) X, Y \text{ — независимы} \Rightarrow r_{XY} = 0;$$

$$f_c(x) = \dots$$

$$f(x) = 0$$

Замеч

Любая  
мног

$\gamma$   
 $\gamma_{xy}$

$\gamma_{xy} = 0$  ( $X, Y$  - некоррелированные)



Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)

1)  $|r_{XY}| \leq 1$ ;

$$\square |r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \leq \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

2)  $X, Y$  — независимы  $\Rightarrow r_{XY} = 0$ ;

3) Если  $X, Y$  связаны линейной зависимостью, т.е.  $Y = aX + b$ ;  $a \neq 0$ , то  $|r_{XY}| = 1$ , причём  $r_{XY} = 1$  при  $a > 0$  и  $r_{XY} = -1$  при  $a < 0$ ;

$$\square \text{COV}(X, Y) = \text{COV}(X, aX + b) = a \cdot \text{COV}\left(X, X + \frac{b}{a}\right) =$$

**Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)**

1)  $|r_{XY}| \leq 1$ ;

$$\square |r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \leq \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

2)  $X, Y$  - независимы  $\Rightarrow r_{XY} = 0$ ;

3) Если  $X, Y$  связаны линейной зависимостью, т.е.  $Y = aX + b$ ;  $a \neq 0$ , то  $|r_{XY}| = 1$ , причём  $r_{XY} = 1$  при  $a > 0$  и  $r_{XY} = -1$  при  $a < 0$ ;

$$\square \text{COV}(X, Y) = \text{COV}(X, aX + b) = a \cdot \text{COV}\left(X, X + \frac{b}{a}\right) = \\ = a \cdot \text{COV}(X, X) = a \cdot D[X];$$

$$f_i(x) = \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{n}$$

Заметим

любая

многочлен

сравнительно

$$= \mathbb{Q}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} = 2x^2 + 1$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2x^2 + 2x$$



$$D[Y] = D[aX + b] = a^2 D[X];$$

$$r_{XY} = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{D[X]} \sqrt{D[Y]}} = \frac{a \cdot D[X]}{\sqrt{D[X]} \cdot |a| \cdot \sqrt{D[X]}} =$$

$$= \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

4) Если  $|r_{XY}| = 1$ , то  $X$  и  $Y$  связаны линейной функциональной зависимостью;

□ Пусть  $r_{XY} = 1$ . Тогда из равенства

$$D\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right)$$

(свойство 7, Теорема 1) получаем

$$D\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$= 2, = 2, 0$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2$$



$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = C;$$

$$C = M[C] = M \left[ \frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \right] = M \left[ \frac{X - m_X}{\sigma_X} \right] -$$

$$- M \left[ \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \right] = 0 - 0 = 0$$

$$= 0_3 = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} =$$

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = C;$$

$$C = M[C] = M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right] -$$

$$- M\left[\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 0 - 0 = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y.$$

$$= \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} = 2x^2 + 1$$

$$= \frac{x^2 + x}{1} = 2x^2 + 2x$$



При  $r_{XY} = -1$  получаем

$$Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y$$

вывод: при  $r_{XY} = \pm 1$  X и Y связаны линейной

функциональной зависимостью.

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

Земля

17  
2xy

Мобас  
Множ

коррелированные

$$= \mathbb{Q}_3 = \langle 0, 1 \rangle$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} = 2x^2$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2x^2 + 4$$

$r_{XY}$  характеризует степень тесноты линейной зависимости между СВ.

$r_{XY} > 0$  – положительная корреляция:

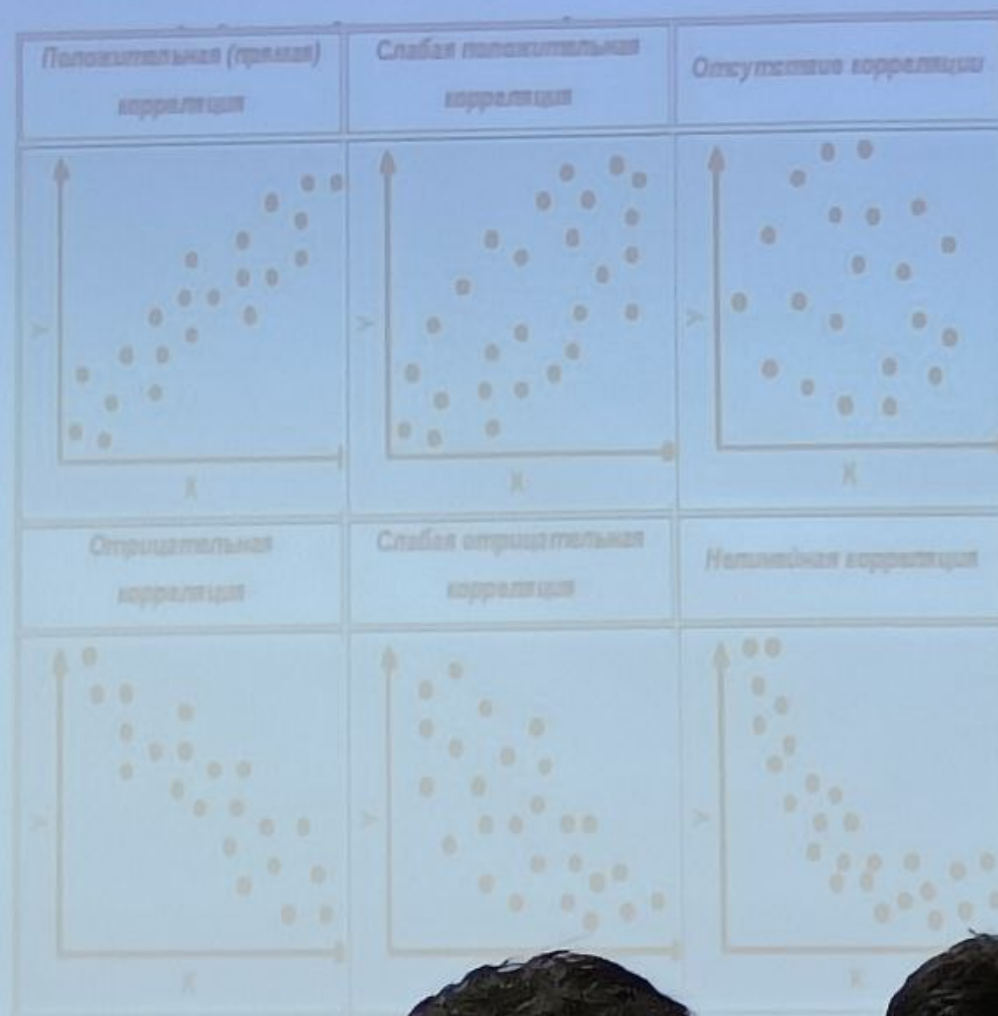
при возрастании одной СВ (X) другая (Y) имеет тенденцию в среднем возрастать. В отдельных опытах большему X может соответствовать меньшее Y.

$r_{XY} < 0$  – отрицательная корреляция

При возрастании одной СВ (X) другая (Y) имеет тенденцию в среднем убывать.



## Смысл знака коэффициента корреляции



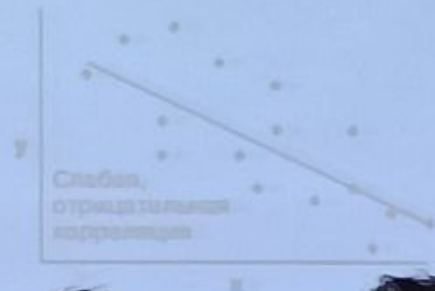
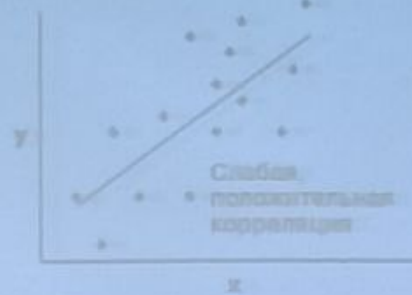
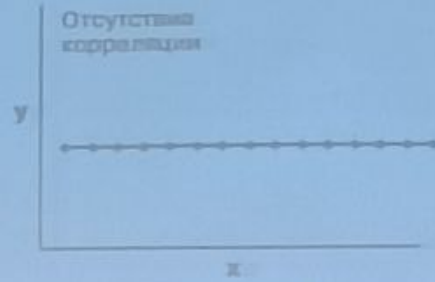
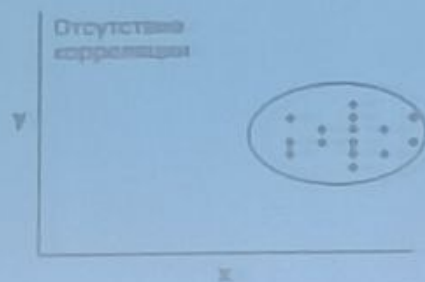
$$= \mathbb{Q}_3 = h$$

$$\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} =$$

# Примеры корреляционных полей



$$= \mathbb{Q}_3 = 40,1$$

$$\frac{1}{2} = 2$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2} = 2x$$

$$= \frac{x^2 + x}{-1} = 2x^2$$



## Ковариационная (корреляционная) матрица

Величины  $D[X] = \sigma_X^2$ ,  $D[Y] = \sigma_Y^2$  и  $K_{XY}$  характеризуют

Разброс положений случайной точки на плоскости.

Эти числовые характеристики принято записывать в виде ковариационной матрицы системы случайных величин  $(X, Y)$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & K_{XY} \\ K_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

$$K = (K_{ij})_{n \times n}$$

$$\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (X, Y - \text{некоррелированы})$$