5) $COV(CX,Y) = C \cdot COV(X,Y) = COV(X,CY)$;

6) $COV(X+C,Y) = COV(X,Y) = COV(X+C, Y+C)$;

7) $|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$

- Применяем свойство 4) к случайным величинам

Свойства

4) $D\left[X \pm Y\right] = D[X] + D[Y] \pm 2K_{XY};$

- $D[X+Y] = M\left[(X+Y) - M[X+Y]\right]^2 =$

$= M\left[(X-m_X)^2\right] + 2M\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right] + M\left[(Y-m_Y)^2\right] =$

$= D[X] + D[Y] + 2K_{XY};$

$D[X-Y] = D[X] + D[-Y] + 2M[(X-m_X)(-Y-M[-Y])] =$

$= D[X] + D[Y] - 2K_{XY}.$

5) $COV(CX,Y)=C\cdot COV(X,Y)=COV(X,CY)$;

6) $COV(X+C,Y)=COV(X,Y)=COV(X+C,Y+C)$;

7) $|K_{XY}|\le\sigma_X\cdot\sigma_Y$

Применяем свойство 4) к случайным величинам

$$\frac{X-m_X}{\sigma_X} \text{ и } \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}:$$

$$D\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right) = D\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right) + D\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right) \pm$$

$$\pm 2 \cdot M\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} - M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right]\right) \cdot \left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y} - M\left[\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right]\right)\right] =$$

$$= 1 + 1 \pm 2M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right] =$$

$$D\left[\frac{X-m_x}{\sigma_x}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2} \cdot \underbrace{D[X-m_x]}_{D[X]=\sigma_x^2}$$

$f(x) = y$

Замеч

Любая

мно

$$D\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\pm\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)=D\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right)+D\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)\pm$$

$$\pm 2\cdot M\left[\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X}-M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right]\right)\cdot\left(\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}-M\left[\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right]\right)\right]=$$

$$=1+1\pm 2M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X}\cdot\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right]=2\left(1\pm\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\geq 0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\sigma_X\sigma_Y\leq K_{XY}\leq\sigma_X\sigma_Y.$$

Таким образом, $|K_{XY}|\leq\sigma_X\sigma_Y$.

Ковариация содержит информацию о зависимости между величинами.

Значение K_{XY} изменяется при изменении единиц измерения X и Y.

Поэтому для характеристики между величинами удобно рассматривать безразмерную величину.

<u>Определение</u> ***Коэффициентом корреляции СВ*** X и Y называется

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}}.$$

Очевидно, что

$$r_{XY} = COV(Z_1, Z_2), \text{ где}$$

$$Z_1 = \frac{X - m_X}{\sigma_X}; \qquad Z_2 = \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \; -$$

стандартные СВ.

Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)

1) $|r_{XY}| \le 1;$

□ $|r_{XY}| = \dfrac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \le \dfrac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$

2) X, Y – независимы $\Rightarrow$ $r_{XY} = 0;$

$f_i(x) = \dots$

$f(x) = y$

Замеч

r_{xy} Любая

много

$r_{xy} = 0$ (X, Y – некоррелированные

Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)

1) $|r_{XY}| \le 1;$

$$\sqcup \quad |r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \le \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

2) X, Y – независимы $\Rightarrow \quad r_{XY} = 0;$

3) Если X, Y связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$; $a \ne 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причём $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$;

$$\sqcup \quad COV(X,Y) = COV(X, aX + b) = a \cdot COV\left(X, X + \frac{b}{a}\right) =$$

Теорема 2 (свойства коэффициента корреляции)

1) $|r_{XY}| \le 1;$

$$\Box \quad |r_{XY}| = \frac{|K_{XY}|}{\sigma_X \sigma_Y} \le \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X \sigma_Y} = 1$$

2) X, Y – независимы $\Rightarrow \quad r_{XY} = 0;$

3) Если X, Y связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$; $a \ne 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причём $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $r_{XY} = -1$ при $a < 0;$

$$\Box \; COV(X,Y) = COV(X, aX+b) = a \cdot COV\left(X, X + \frac{b}{a}\right) =$$

$$= a \cdot COV(X,X) = a \cdot D[X];$$

$$D[Y] = D[aX + b] = a^2 D[X];$$

$$r_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}} = \frac{a \cdot D[X]}{\sqrt{D[X]} \cdot |a| \cdot \sqrt{D[X]}} =$$

$$= \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}.$$

4) Если $\left| r_{XY} \right| = 1$, то X и Y связаны линейной функциональной зависимостью;

□ Пусть $r_{XY} = 1$. Тогда из равенства

$$D\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 2\left(1 - \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\right)$$

(свойство 7, Теорема 1) получаем

$$D\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = C;$$

$$C = M\left[C\right] = M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X} - \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = M\left[\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right] -$$

$$- M\left[\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right] = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{X-m_X}{\sigma_X}-\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}=C;$$

$$C=M\left[C\right]=M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X}-\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right]=M\left[\frac{X-m_X}{\sigma_X}\right]-$$

$$-M\left[\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right]=0-0=0\ \Rightarrow\ C=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{X-m_X}{\sigma_X}=\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\quad\Rightarrow$$

$$Y=\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-m_X)+m_Y.$$

При $r_{XY} = -1$ получаем

$$Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Y$$

вывод: при $r_{XY} = \pm 1$ X и Y связаны линейной

функциональной зависимостью.

r_{XY} характеризует степень тесноты линейной зависимости между СВ.

$r_{XY} > 0$ – положительная корреляция:

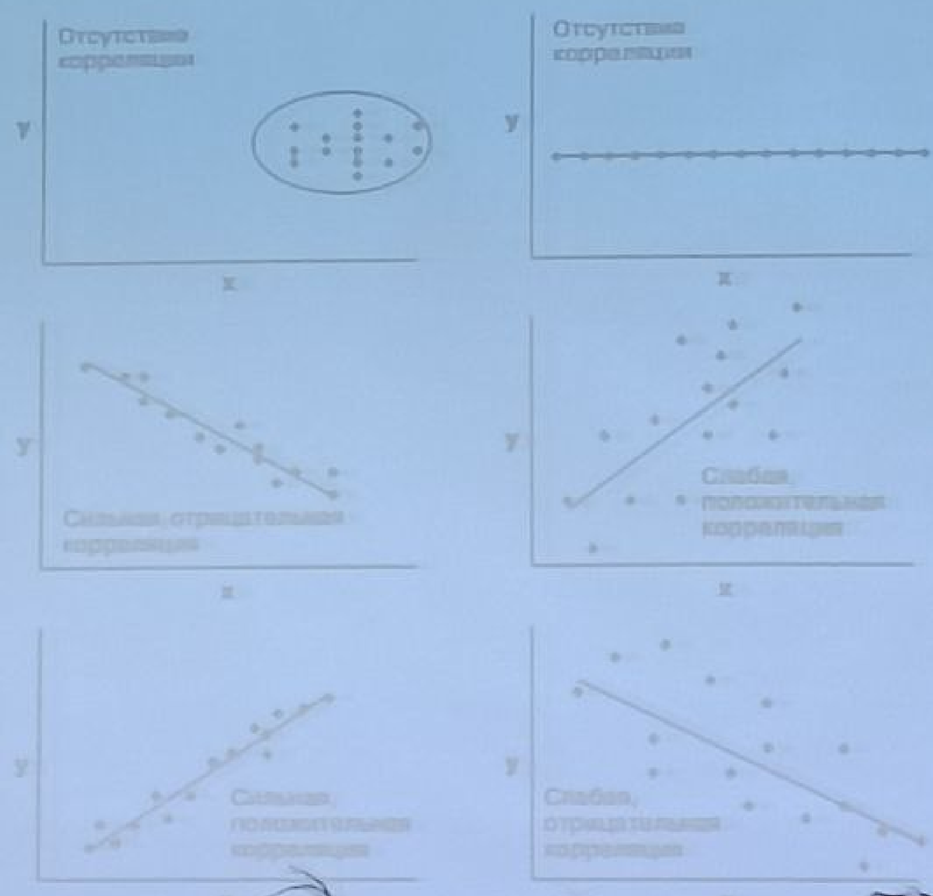
при возрастании одной СВ (X) другая (Y) имеет тенденцию в среднем возрастать. В отдельных опытах большему X может соответствовать меньшее Y.

$r_{XY} < 0$ – отрицательная корреляция

При возрастании одной СВ (X) другая (Y) имеет тенденцию в среднем убывать.

Смысл знака коэффициента корреляции

Примеры корреляционных полей



Ковариационная (корреляционная) матрица

Величины $D[X]=\sigma_X^2, D[Y]=\sigma_Y^2$ и K_{XY} характеризуют

Разброс положений случайной точки на плоскости.

Эти числовые характеристики принято записывать в виде ковариационной матрицы системы случайных величин (X,Y):

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & K_{XY} \\ K_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

$K = (k_{ij})_{n \times n}$ $\qquad r_{xy}$

$r_{xy} = 0$ (X, Y - некорре