Числовые характеристики системы n случайных величин

- n математических ожиданий $m_k = M[\xi_k],\ k \in 1,\dots,n$ образуют его центр распределения $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, около которого группируются значения случайного вектора;
- n дисперсий компонент случайного вектора $D_k = D[\xi_k],\ k \in 1,\dots,n$ характеризуют его рассеяние в направлении координатных осей;
- Корреляционные моменты всевозможных пар компонент характеризуют связь между компонентами случайного вектора

$$K_{\xi_i \xi_j} = K_{ij} = M[(\xi_i - M[\xi_i]) \cdot (\xi_j - M[\xi_j])], \; i, j \in \overline{1,n}.$$

Корреляционная матрица

$$K = (K_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ . & . & . & . \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}, K_{ii} = D_i.$$

Определитель корреляционной матрицы называется ***обобщённой дисперсией*** и даёт оценку меры рассеяния случайного вектора.

Двумерные непрерывные распределения (на плоскости)

Кафедра прикладной математики и механики

Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике

Равномерное распределение на плоскости

Случайный вектор (X, Y) имеет **равномерное распределение в области** D, если его плотность вероятности имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Равномерное распределение на плоскости

Случайный вектор (X, Y) имеет **равномерное распределение в области** D, если его плотность вероятности имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$S(D)$ – площадь области D.

Нормальное распределение на плоскости

Случайный вектор (X, Y) имеет **нормальное распределение на плоскости**, если его плотность вероятности имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1 - r^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left(\frac{(x - m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2r(x - m_X)(y - m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y - m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

Нормальное распределение на плоскости

Случайный вектор (X, Y) имеет **нормальное распределение на плоскости**, если его плотность вероятности имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

$m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y, r = r_{XY}$ – параметры распределения.

Можно доказать, что $f(x,y)$ действительно является плотностью вероятности, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Смысл параметров распределения m_X и σ_X

Найдем плотность распределения компоненты X.

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2(1-r^2)}\right\} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(-\frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\} dy =$$

$$= \left[\text{Замена: } t = \frac{x-m_X}{\sqrt{2}\sigma_X};\ s = \frac{y-m_Y}{\sqrt{2}\sigma_Y};\ldots;\ u = \frac{s-rt}{\sqrt{1-r^2}}\right] =$$

$$= [\text{Упр.}] = \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-r^2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du}_{\text{инт. Пуассона}=\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}.$$

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2(1-r^2)}\right\} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(-\frac{2r(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\} dy =$$

$$= \left[\text{Замена: } t = \frac{x-m_X}{\sqrt{2}\sigma_X};\; s = \frac{y-m_Y}{\sqrt{2}\sigma_Y}; \ldots;\; u = \frac{s-rt}{\sqrt{1-r^2}}\right] =$$

$$= [\text{Упр.}] = \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_X\sqrt{1-r^2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du}_{\text{инт. Пуассона}=\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}.$$

$$= [\text{Упр.}] = \frac{e^{-t^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}\pi\sigma_X\sqrt{1-r^2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du}_{\text{инт. Пуассона}=\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\},$$

т.е. $\boxed{X \in N(m_X;\sigma_X).}$

Аналогично можно доказать, что $\boxed{Y \in N(m_Y;\sigma_Y).}$

Пусть X, Y — некоррелированные СВ, т.е. $r = 0$. Тогда

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} \cdot \exp\left\{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \cdot \exp\left\{-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} =$$

$$= f_1(x) f_2(y) \Rightarrow X, Y \text{ – независимы.} \tag{1}$$

Вывод: для нормального закона на плоскости из некоррелированности X, Y следует независимость X, Y.

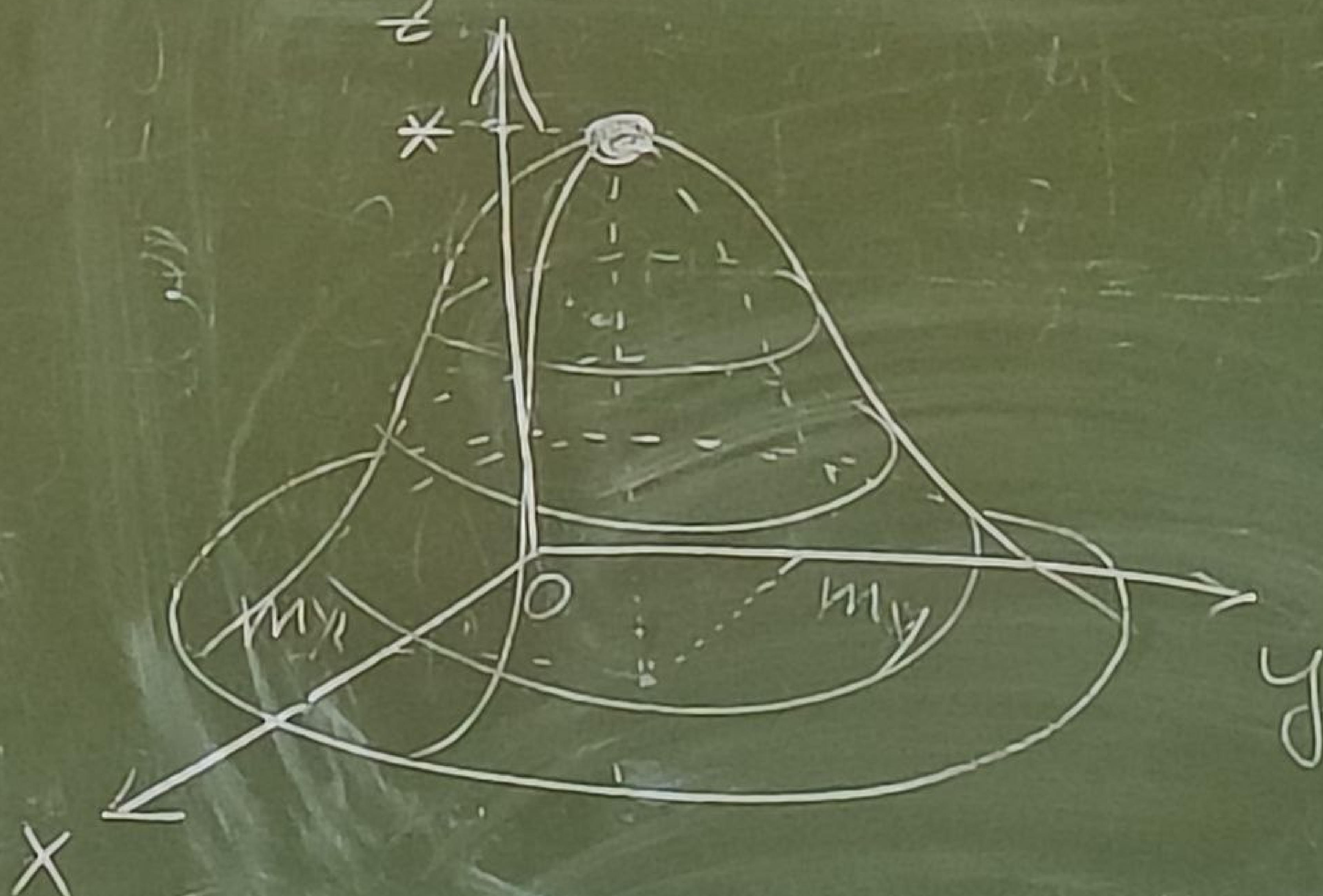
При $r \neq 0$ X и Y **зависимы**.

Приведение N-закона к каноническому виду

График плотности $f(x, y)$ представляет собой холмообразную поверхность, «вершина» которой находится в точке

$$K\left(m_X; m_Y; \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\right).$$

Рисунок!


z
*
O
m_y
x
y

Приведение N-закона к каноническому виду

График плотности $f(x, y)$ представляет собой холмообразную поверхность, «вершина» которой находится в точке

$$K\left(m_X; m_Y; \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\right).$$

Метод сечений

- сечения плоскостями, перпендикулярными xOy, проходящими через точку K - кривые Гаусса
- сечения плоскостями, параллельными xOy: $z = C$

$$f_0 + Bf'_{f_0} + Cf_1 + Df'_{f_1}$$

$$f_0 + C \cdot f_1 =$$

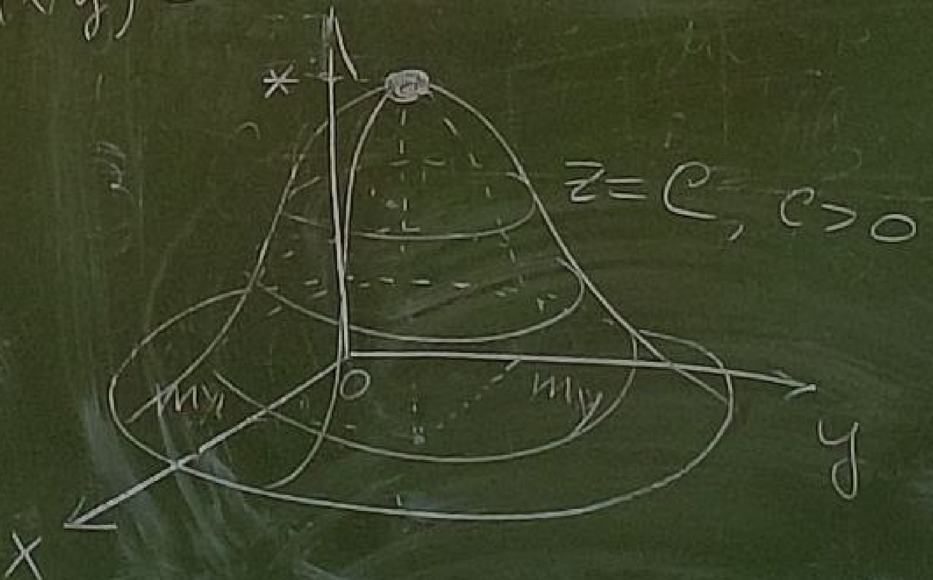
$$b - a$$

$$\Big|_a^b = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$+D = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f_0 + f_1\right.$$

$$f(x,y) = e^{\ldots}$$



Сечения плоскостями $f(x, y) = C$ есть эллипсы рассеивания, уравнения которых

$$\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2r\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} = h^2;$$

$$h^2 = -2(1-r^2)\ln\left(2\pi \cdot C \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{1-r^2}\right).$$

Параллельный перенос и поворот осей осуществляем по формулам

$$\begin{cases} x = m_X + x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha, \\ y = m_Y + x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha. \end{cases}$$

Уравнения преобразуются к каноническому виду. Оси симметрии эллипса образуют с осью Ox углы α и $\alpha + \pi/2$, где α подбирается из условия

$$tg\alpha = \frac{2r\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}.$$

Параллельный перенос и поворот осей осуществляем по формулам

$$\begin{cases} x = m_X + x_0 \cos\alpha - y_0 \sin\alpha, \\ y = m_Y + x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha. \end{cases}$$

Уравнения преобразуются к каноническому виду. Оси симметрии эллипса образуют с осью Ox углы α и $\alpha + \pi/2$, где α подбирается из условия

$$tg\alpha = \frac{2r\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}.$$

При $r = 0$ уравнение эллипса рассеивания имеет вид:

$$\frac{(x - m_X)^2}{(h\sigma_X)^2} + \frac{(y - m_Y)^2}{(h\sigma_Y)^2} = 1.$$

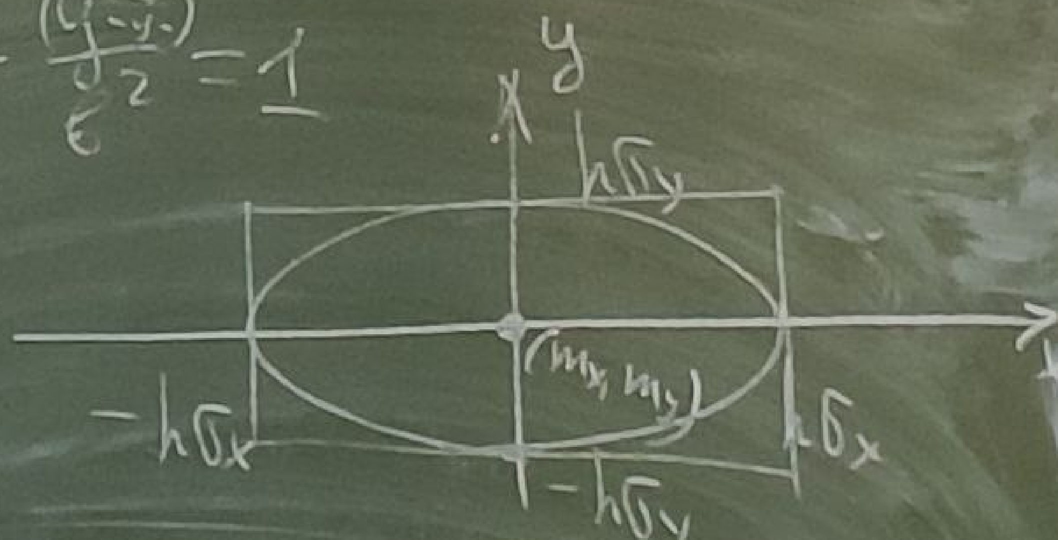
$= b$

f'_1

f_1

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A f_0 + B f'_0 + C f_1 + D f'_1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



$f($

$1, f_1$

$= 1$ ② $B + C(b-a) + D = 2$

$\int_a^b$

$f(x, y) =$

x

При $r = 0$ уравнение эллипса рассеивания имеет вид:

$$\frac{(x - m_X)^2}{(h\sigma_X)^2} + \frac{(y - m_Y)^2}{(h\sigma_Y)^2} = 1.$$

Полуоси эллипса пропорциональны СКО σ_X и σ_Y.

Если $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, то эллипсы преобразуются в круги рассеивания, а рассеяние называется **круговым**.

На практике (где только возможно) стремятся заменить некруговое рассеяние круговым.

Вероятность попадания в прямоугольник

Пусть случайная точка (X, Y) подчинена на плоскости нормальному закону с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right\}.$$

При этом главные оси рассеивания параллельны Ox, Oy; X, Y – независимы.

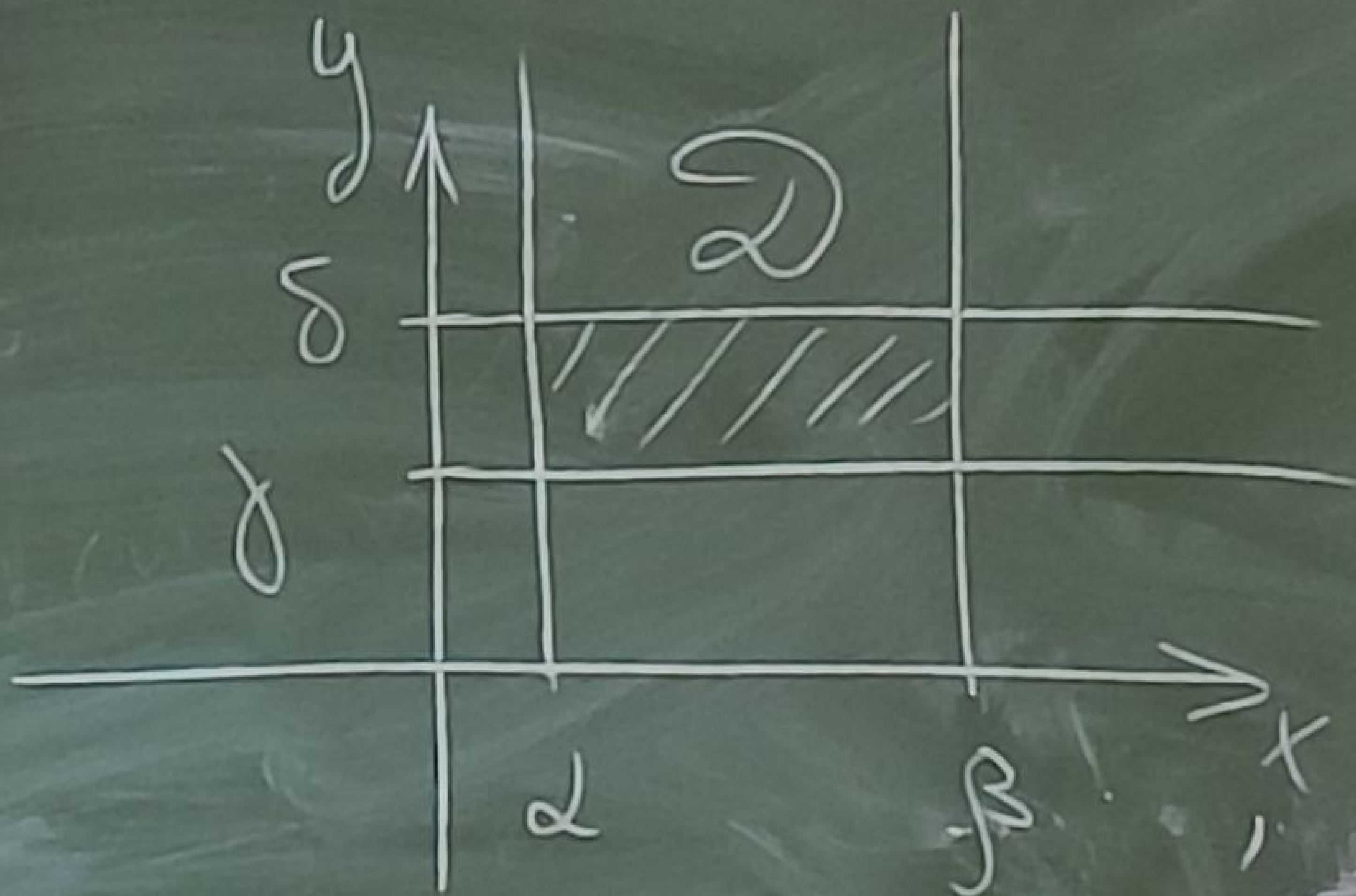
Вероятность попадания в прямоугольник

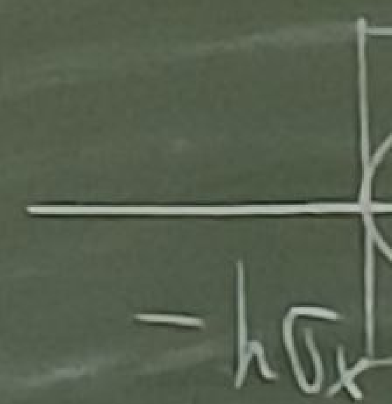
Пусть случайная точка (X, Y) подчинена на плоскости нормальному закону с плотностью вероятности

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}.$$

При этом главные оси рассеивания параллельны Ox,Oy; X, Y – независимы.

$D = [\alpha;\beta]\times[\gamma;\delta]$ – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.


y
𝒟
δ
γ
α
β
x


−hσx

$$P((X,Y) \in D) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} \exp\left\{ -\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} \right\} dx \int_{\gamma}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \exp\left\{ -\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right\} dy =$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\beta - m_X}{\sigma_X} \right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_X}{\sigma_X} \right) \right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\delta - m_Y}{\sigma_Y} \right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_Y}{\sigma_Y} \right) \right).$$

$$= \left(\Phi\left(\frac{\beta - m_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_X}{\sigma_X}\right)\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\delta - m_Y}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_Y}{\sigma_Y}\right)\right)$$

Если $m_X = m_Y = 0$ (нормальный закон дан в канонической форме), то

$$P((X,Y) \in D) = \left(\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_X}\right)\right) \cdot \left(\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma_Y}\right)\right).$$

Вероятность попадания в эллипс рассеивания

Пусть нормальный закон на плоскости задан в канонической форме:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\,\sigma_Y} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}.$$

Рассмотрим эллипс рассеивания B_k, уравнение которого

$$\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} = k^2.$$

Вероятность попадания в эллипс рассеивания

$$P((X,Y)\in B_k)=\iint\limits_{B_k} f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{B_k}\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}dx\,dy=$$

$$=\left[\frac{x}{\sigma_X}=u;\ \frac{y}{\sigma_Y}=v\right]=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_k}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}\right\}du\,dv=$$

$$P((X,Y) \in B_k) = \iint\limits_{B_k} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{B_k} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\} dx\,dy =$$

$$= \left[\frac{x}{\sigma_X} = u;\ \frac{y}{\sigma_Y} = v\right] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_k} \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right\} du\,dv =$$

$$= [u = \rho\cos\varphi;\ v = \rho\sin\varphi;\ I = \rho] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{k} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{0}^{k} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\rho =$$

$$P((X,Y) \in B_k) = \iint\limits_{B_k} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{B_k} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\} dx\,dy =$$

$$= \left[\frac{x}{\sigma_X} = u;\ \frac{y}{\sigma_Y} = v\right] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{C_k} \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right\} du\,dv =$$

$$= [u = \rho\cos\varphi;\ v = \rho\sin\varphi;\ I = \rho] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^k \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\rho\, d\varphi = \int_0^k \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\rho =$$

$$= 1 - exp\{-k^2/2\}.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной точки в эллипс рассеивания, полуоси которого пропорциональны СКО σ_X, σ_Y, равна

$$\boxed{P((X,Y) \in B_k) = 1 - exp\{-k^2/2\}}$$

Вероятность попадания в единичный эллипс рассеивания $(k = 1)$

$$P((X,Y) \in B_1) = 1 - exp\{-1/2\} \approx 0,393.$$

Пример

На пути быстро движущейся малоразмерной цели площадью 1.2 m^2 ставится осколочное поле в форме плоского диска радиуса $R = 30m$.

Внутри диска плотность осколков постоянна и равна 2 оск/m^2.

Если цель накрыта диском, то число осколков, попадающих в нее, можно считать распределенным **по закону Пуассона.**

В силу малости цели можно рассматривать ее как точечную и считать, что она или полностью накрывается диском (O попадает в круг с ц. O_1), или не накрывается вовсе (O не попадает в круг с ц. O_1).

Попадание осколка гарантирует поражение цели.

При **прицеливании** центр круга O_1 пытаются совместить с центром цели O, но вследствие ошибок точка O_1 **рассеивается** около точки O.

Пример

Закон рассеивания – нормальный.

Рассеивание – круговое с $\sigma = 20m$.

Найти вероятность поражения цели (событие A).

Пример

Найти вероятность поражения цели (событие A).

РЕШЕНИЕ

- $A = A_1 \cdot A_2$;
  A_1={точка O попадает в осколочное поле с центром в т. O_1 радиуса R};
  A_2={поражение цели при попадании в осколочное поле}.

Найти вероятность поражения цели (событие A).

РЕШЕНИЕ

1. $A = A_1 \cdot A_2$;
   A_1={точка O попадает в осколочное поле с центром в т. O_1 радиуса R};
   A_2={поражение цели при попадании в осколочное поле}.
2. $P(A_1) = \left[k = \frac{30}{20} = 1,5\right] = 1 - \exp\{-1,5^2/2\} \approx 0,675$
3. $P(A_2) = [\alpha = 1,2 \cdot 2 = 2,4] = 1 - e^{-\alpha} \approx 0,909$
   α -среднее число осколков, попадающих в накрытую полем цель (=площадь цели $\cdot$ плотность поля осколков).
4. $P(A) = 0,675 \cdot 0,909 \approx 0,613.$

Распределение Релея

Рассмотрим на плоскости xOy случайную точку (X,Y), рассеивающуюся вокруг начала координат $O(0;0)$ по круговому нормальному закону со СКО σ.

Найдем распределение СВ R – расстояние от точки (X,Y) до начала координат, т.е. R по сути – **длина случайного вектора** (X,Y).

Вероятность попадания в круг радиуса x

$$F(x) = P(R < x) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} = \left[k = \frac{x}{\sigma}\right] = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, x > 0,$$

$$F(x) = 0, \ x \leq 0.$$

Распределение Релея

Вероятность попадания в круг радиуса x

$$F(x) = P(R < x) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} = \left[k = \frac{x}{\sigma}\right] = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, x > 0.$$

$$F(x) = 0, \ x \leq 0.$$

Дифференцируем функцию распределения по x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leq 0 \end{cases}$$

Закон Релея используется в теории стрельбы, радиотехнике, электротехнике.