Пусть теперь n = 3, m = 2.

•
$$P_3(2) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3) =$$

= $3p^2q = C_3^2 p^2 q^{3-2}$.

Общий случай:

•
$$P_n(m) = \underline{p}^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m} = C_n^m$$
 слагаемых $= C_n^m p^m q^{n-m}$.

Теорема доказана.



Формула Бернулли

Следствие

Пусть $m_1, \ m_2$ — целые числа, т.ч. $0 \le m_1 \le m_2 \le n$. Тогда

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{m_1-1} C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=m_2+1}^n C_n^k p^k q^{n-k}.$$



Пусть m_0 — наивероятнейшее число наступлений события A в серии n независимых испытаний.

Теорема

 $np - q \le m_0 \le np + p$.



По формуле Бернулли при $m \in \overline{1,n}$

$$\frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} =$$

$$= \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!}{m!(n-m)!n!} \cdot \frac{p}{q} =$$

$$=\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)}.$$



Далее рассмотрим три возможных случая:

(1)

$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} > 1 \Rightarrow np-mp+p > m-mp$$
$$\Rightarrow np+p > m \Rightarrow m < (n+1)p;$$



Далее рассмотрим три возможных случая:

(1)

$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} > 1 \Rightarrow np - mp + p > m - mp$$
$$\Rightarrow np + p > m \Rightarrow m < (n+1)p;$$

(2)
$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} = 1 \Rightarrow m = (n+1)p;$$

(3)
$$\frac{(n-m+1)p}{m(1-p)} < 1 \Rightarrow m > (n+1)p$$
.

Ю.В. Шапарь

TR n MC



Таким образом

(1') $P_n(m) > P_n(m-1)$ при m < (n+1)p;

IO. B. IIIanapa TB II



Таким образом

(1)
$$P_n(m) > P_n(m-1)$$
 при $m < (n+1)p$;

(2)
$$P_n(m) = P_n(m-1)$$
 при $m = (n+1)p;$

(3)
$$P_n(m) < P_n(m-1)$$
 при $m > (n+1)p$.



Следовательно для m_0 выполняются соотношения:

$$\begin{cases}
P_n(m_0 + 1) < P_n(m_0) \\
P_n(m_0 - 1) < P_n(m_0)
\end{cases}$$

С учетом (1') и (3') получаем:

$$\begin{cases}
 m_0 + 1 > (n+1)p \\
 m_0 < (n+1)p
\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}
 m_0 > np + p - 1 \\
 m_0 < np + p
\end{cases}$$

$$\begin{cases} m_0 > np - q \\ m_0 < np + p \end{cases}$$

Вывод:

$$np - q < m_0 < np + p.$$



Независимые испытания с несколькими исходами

Пусть в одном испытании возможны m исходов: $1, 2, \ldots, m$ с вероятностями $p_i, i \in \overline{1, m}$.

При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Обозначим через $P(n_1,n_2,\ldots,n_m)$ вероятность того, что в $n=n_1+n_2+\ldots+n_m$ независимых испытаниях исход 1 появился n_1 раз, исход $2-n_2$ раз, \ldots исход $m-n_m$ раз.

Утверждение

Для любого n и любых целых $n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0,\dots, n_m\geqslant 0,$ т.ч. $n=n_1+n_2+\dots+n_m$

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$$

(полиномнальная формула).

Ю.В. Шапарь

ТВ и МС Лекции №4



Теорема Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постояниа и близка к нулю, n велико и при этом $\lambda = np < 10$, то

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$$
.

Теорема Пуассона

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и близка к нулю, n велико и при этом $\lambda = np < 10$, то

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Бернулли.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

101 10 1 1 1 1 2 190

Ю.В. Шапары

La vuin Not

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)\lambda_{\mathfrak{Q}}^m}{m!n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

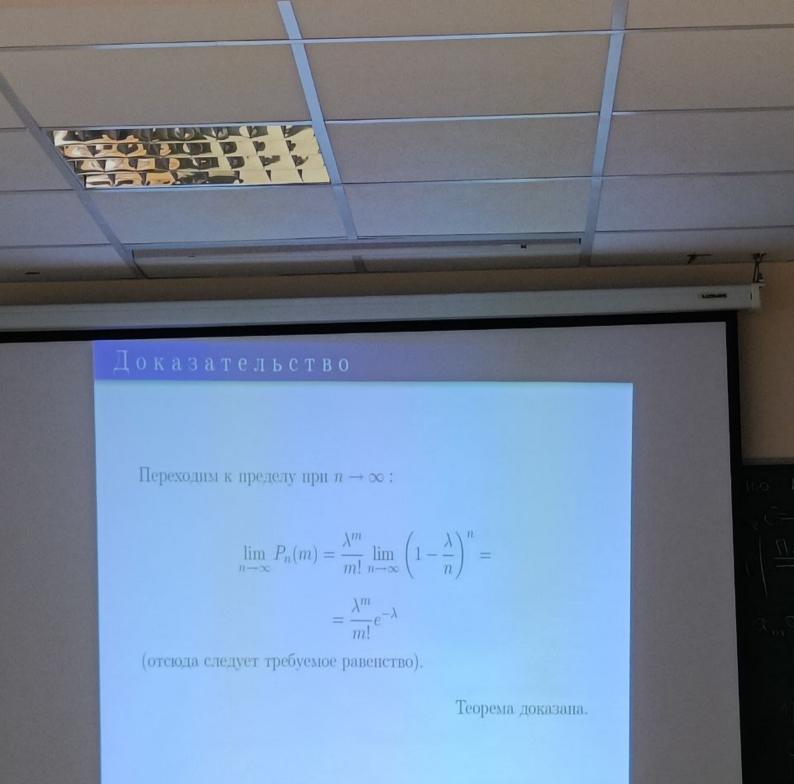
Ю.В. Шапарь

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots (n-m+1)\lambda^m}{m!n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

Ю.В. Шапары

TB n MC.



Ю.В. Шапарь

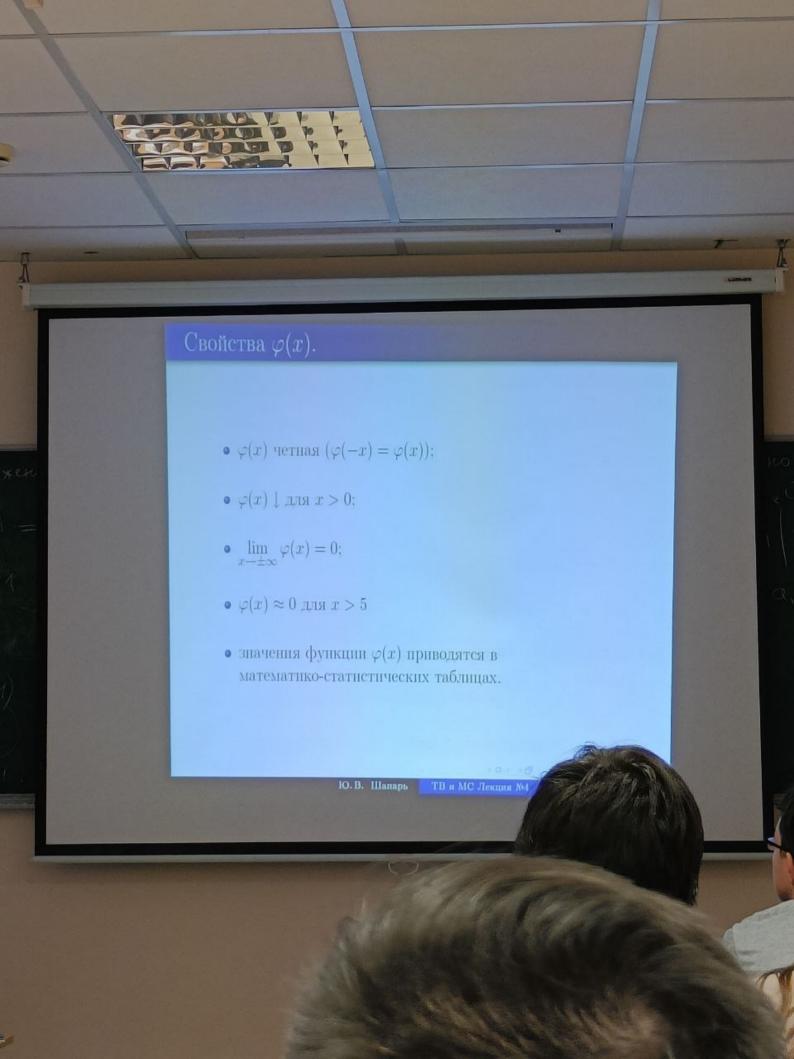
Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, n велико и при этом np>10, то

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0),$$

где
$$q=1-p; \ \ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \ \ x_0=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

IO.B. III



Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, n велико, то

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Ю.В. Шапары

чин Мо



Свойства $\Phi(x)$.

- $\Phi(x)$ нечетная $(\Phi(-x) = -\Phi(x))$;
- $\Phi(0) = 0$;
- $\Phi(x) \uparrow$ для $x \in \mathbb{R}$;
- $\bullet \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0, 5;$
- $\bullet \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0, 5;$
- $\Phi(x) \approx 0,5$ для x > 5;
- значения функции $\Phi(x)$ приводятся в математико-статистических таблицах.

Ю.В. Шапарь

ТВ и МС Лекции №4



Следствие (ЗБЧ в схеме Бернулли)

Формула отклонения частоты от вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Ю.В. Шапарь

ЭС Локция Not

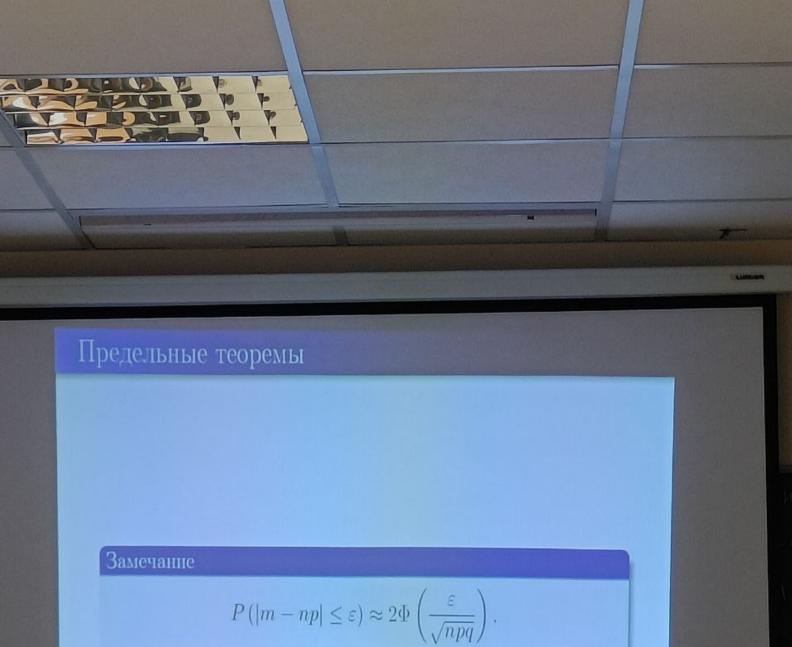


$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + p < \frac{m}{n} < \varepsilon + p \Rightarrow -\varepsilon n + np < m < \varepsilon n + np.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\frac{\varepsilon n+pn-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon n+pn-np}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)+\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right).$$



$$P(|m-np| \le \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

