# Análisis de Lenguajes de Programación

Trabajo práctico 1

Bautista Marelli Francisco Alcácer

Octubre 2020

# 1. Ejercicio 1

## 1.1. Sintaxis Abstracta

```
intexp ::= nat | var | -u intexp
| intexp + intexp
| intexp -b intexp
| intexp × intexp
| intexp ÷ intexp

boolexp ::= true | false
| intexp == intexp
| intexp != intexp
| intexp < intexp
| intexp > intexp
| boolexp && boolexp
| boolexp || boolexp
| ¬ boolexp

comm ::= skip
| var = intexp
| comm; comm
| if boolexp then comm else comm
| while boolexp do comm
```

## 1.2. Sintaxis Concreta

```
digit ::= ’0’ | ’1’ | · · · | ’9’
letter ::= ’a’ | · · · | ’Z’
nat ::= digit | digit nat
var ::= letter | letter var

intelem ::= nat
| var
| '-' intelem
| '(' intexp ')'
intfactor ::= intfactor '*' intelem
| intfactor '/' intelem
| intelem
intterm ::= intterm ’+’ intfactor
| intterm ’-’ intfactor
| intfactor
intassgn ::= var ’=’ intassgn
| intterm
intexp ::= intexp ',' intassgn
| intassgn

boolelem ::= 'true' | 'false' | '(' boolexp ')'
boolfactor ::= intexp '==' intexp
| intexp '!=' intexp
| intexp '<' intexp
| intexp '>' intexp
| boolelem
boolnot ::= '!' boolnot
| boolfactor
boolterm ::= boolterm '&&' boolnot
| boolnot
boolexp ::=  boolexp ’||’ boolterm
| boolterm

commelem ::= skip
| var ’=’ intexp
| ’if’ boolexp ’{’ comm ’}’
| ’if’ boolexp ’{’ comm ’}’ ’else’ ’{’ comm ’}’
| ’while’ boolexp ’{’ comm ’}’
comm ::= comm ';' commelem
```

# 2. Ejercicio 4

## 2.1. Regla de EAssgn

$$\frac{\langle e,\ \sigma\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n,\ \sigma'\rangle}{\langle v = e,\ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n,\ [\sigma' \mid v : n]\rangle}\ \text{EA}\textsc{ssgn}$$

## 2.2. Regla de ESeq

$$\frac{\langle e_0,\ \sigma\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n_0,\ \sigma'\rangle \quad \langle e_1,\ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n_1,\ \sigma''\rangle}{\langle e_0, e_1,\ \sigma\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n_1,\ \sigma''\rangle}\ \text{ES}\textsc{eq}$$

# 3. Ejercicio 5

Queremos demostrar que si: $t \rightsquigarrow t' \ \wedge \ t \rightsquigarrow t''$ entonces tenemos que $t' = t''$. Para esto suponemos que $\Downarrow_{exp}$ es determinista
Para esto realizamos inducción en $t \rightsquigarrow t'$:
$P(t \rightsquigarrow t') : t \rightsquigarrow t' \ \wedge \ t \rightsquigarrow t'' \implies t' = t''$
Analicemos $t \rightsquigarrow t''$ cuando la ultima regla de derivación de $t \rightsquigarrow t'$ es:

- Ass)

  Si la ultima regla utilizada fue Ass entonces tenemos que $t : \langle v = e, \sigma\rangle$ y $t' : \langle skip, [\sigma'|v : n]\rangle$

  Podemos ver que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ solo puede ser Ass. Supongamos que $t' \neq t''$, luego vemos que $t''$ tiene la forma $\langle skip, [\sigma''|v : n']\rangle$ y tambien que $\langle e, \sigma\rangle \ \Downarrow_{exp} \ \langle n', \sigma''\rangle$ . De esto podemos obtener que, $n \neq n' \vee \sigma' \neq \sigma''$, pero llegamos a un absurdo ya que $\Downarrow_{exp}$ es deterministica y tenemos que $n = n' \wedge \sigma' = \sigma''$ y de esta forma concluimos que $t' = t''$

- Seq1)

  Si la ultima regla utilizada fue Seq1 entonces tenemos $t : \langle skip;\ c_1,\ \sigma\rangle$ y $t' : \langle c_1,\ \sigma'\rangle$.

  Supongamos que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es Seq2. Luego tenemos $t'' : \langle c_0'; c_1, \sigma\rangle$ donde $\langle c_0,\ \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle c_0',\ \sigma'\rangle$. Pero como sabemos (de $t$) que $c_0 = skip$ y como $skip$ esta en forma normal, no podemos tener $c_0 \rightsquigarrow c_0'$ lo cual es absurdo, lo cual viene de suponer que la ultima regla es Seq2.

  De esta forma podemos concluir que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es Seq1 y $\therefore t' = t''$

- Seq2)

  Si la ultima regla utilizada fue Seq2 entonces tenemos $t : \langle c_0;\ c_1,\ \sigma\rangle$ y $t' : \langle c_0';\ c_1,\ \sigma'\rangle$ donde $\langle c_0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle c_0', \sigma'\rangle$.

  Supongamos que la ultima regla de derivación de $t \rightsquigarrow t''$ es Seq1. Tenemos que $\langle c_0,\ \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle c_0',\ \sigma'\rangle$ donde $c_0 = skip$, lo cual esto no puede pasar ya que $skip$ esta en forma normal. Esto es absurdo, el cual viene de suponer que la ultima regla de derivación de $t \rightsquigarrow t''$ es Seq1. Luego la regla es Seq2.

  Ahora, supongamos que $t' \neq t''$, entonces estos tienen la forma: $t' : \langle c_0';\ c_1,\ \sigma'\rangle$ y $t'' : \langle c_0'';\ c_1,\ \sigma''\rangle$. Pero como $\langle c_0,\ \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle c_0',\ \sigma'\rangle$ y $\langle c_0,\ \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle c_0'',\ \sigma''\rangle$ son subderivaciones de $t \rightsquigarrow t'$

y $t \rightsquigarrow t''$ respectivamente, por $HI$ esto es absurdo ($\rightsquigarrow$ es deteminista en subderivaciones), por lo tanto se tiene que $c_0' = c_0'' \wedge \sigma' = \sigma'' \therefore\ t' = t''$

- If1)

  Si la ultima regla utilizada fue If1 entonces tenemos que $t\ :\ \langle if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma\rangle$, $t'\ :\ \langle c_0, \sigma'\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle\ \Downarrow_{exp}\ \langle true, \sigma'\rangle$.

  Ahora supongamos que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es If2 entonces tenemos que:

  $t : \langle if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle\ \Downarrow_{exp}\ \langle false, \sigma'\rangle$.

  Pero como $\Downarrow_{exp}$ es determinista, tenemos que $true\ =\ false$ lo cual es absurdo, esto viene de suponer que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es If2. Con esto podemos concluir que la ultima regla es If1 y $t' = t''$

- If2)

  Si la ultima regla utilizada fue If2 entonces tenemos que $t\ :\ \langle if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma\rangle$, $t'\ :\ \langle c1, \sigma'\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle\ \Downarrow_{exp}\ \langle false, \sigma'\rangle$.

  Ahora supongamos que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es If1 entonces tenemos que:

  $t : \langle if\ b\ then\ c_0\ else\ c_1, \sigma\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle\ \Downarrow_{exp}\ \langle true, \sigma'\rangle$.

  Pero como $\Downarrow_{exp}$ es determinista, tenemos que $false\ =\ true$ lo cual es absurdo, esto viene de suponer que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es If1. Con esto podemos concluir que la ultima regla es If2 y $t' = t''$.

- While1)

  Si la ultima regla utilizada fue While1 entonces tenemos $t : \langle while\ b\ do\ c, \sigma\rangle$,

  $t' : \langle c; while\ b\ do\ c, \sigma'\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle true, \sigma'\rangle$.

  Ahora supongamos que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es While2 entonces tenemos que

  $t : \langle while\ b\ do\ c, \sigma\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle false, \sigma'\rangle$.

  Pero como $\Downarrow_{exp}$ es determinista, tenemos que $false = true$ lo cual es absurdo, esto viene de suponer que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es While2. Con esto podemos concluir que la ultima regla es While1 y $\therefore t' = t''$.

- While2)

  Si la ultima regla utilizada fue While2 entonces tenemos $t : \langle while\ b\ do\ c, \sigma\rangle$, $t' : \langle skip, \sigma'\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle false, \sigma'\rangle$.

  Ahora supongamos que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es While1 entonces tenemos que

  $t : \langle while\ b\ do\ c, \sigma\rangle$ y $\langle b, \sigma\rangle \Downarrow_{exp} \langle true, \sigma'\rangle$.

  Pero como $\Downarrow_{exp}$ es determinista, tenemos que $false = true$ lo cual es absurdo, esto viene de suponer que la ultima regla de $t \rightsquigarrow t''$ es While1. Con esto podemos concluir que la ultima regla es While2 y $\therefore t' = t''$.

# 4. Ejercicio 6

1. Primero trabajamos con:

$$\langle x = y = 1 \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle$$

Llamamos $c_0$ : **while** $x > 0$ **do** $x = x - y$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle 1, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{1}, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle}\ \text{NVal}}{\langle y = 1, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{1}, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 1]\rangle}\ \text{EAssgn}}{\langle x = y = 1, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Ass}}{\langle x = y = 1 \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Seq2}$$

2. Ahora trabajamos con:

$$\langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle$$

$$\dfrac{}{\langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Seq1}$$

3. Ahora trabajamos con:

$$\langle c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle x = x - y \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle$$

Llamamos $\sigma'$ : $[[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle x, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle 1, \ \sigma'\rangle}\ \text{Var} \quad \dfrac{}{\langle 0, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{0}, \ \sigma'\rangle}\ \text{NVal}}{\langle x > 0, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{true}, \ \sigma'\rangle}\ \text{Gt}}{\langle c_0, \ \sigma'\rangle \rightsquigarrow \langle x = x - y \ ; \ c_0, \ \sigma'\rangle}\ \text{While1}$$

4. Ahora trabajamos con:

$$\langle x = x - y \ ; \ c_0, \ \sigma'\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle x, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{1}, \ \sigma'\rangle}\ \text{Var} \quad \dfrac{}{\langle y, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{1}, \ \sigma'\rangle}\ \text{Var}}{\langle x - y, \ \sigma'\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{0}, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Minus}}{\langle x = x - y, \ \sigma'\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip}, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Ass}}{\langle x = x - y \ ; \ c_0, \ \sigma'\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Seq2}$$

5. Ahora trabajamos con:

$$\langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

$$\dfrac{}{\langle \mathbf{skip} \ ; \ c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle c_0, \ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle}\ \text{Seq1}$$

6. Ahora trabajamos con

$$\langle \textbf{while } x > 0 \textbf{ do } x = x - y,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle \textbf{skip},\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

Denotamos $\sigma'' : [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle x,\ \sigma''\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{0},\ \sigma''\rangle}\ \textsc{Var} \qquad \dfrac{}{\langle 0,\ \sigma''\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \mathbf{0},\ \sigma''\rangle}\ \textsc{NVal}}{\langle x > 0,\ \sigma''\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle \textbf{false},\ \sigma''\rangle}\ \textsc{Gt}}{\langle \textbf{while } x > 0 \textbf{ do } x = x - y,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle \textbf{skip},\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle}\ \textsc{While2}$$

Luego para finalizar sabemos que si $t \rightsquigarrow t' \implies t \rightsquigarrow^* t'$, entonces los árboles nos quedan:

1. $$\langle x = y = 1\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \rightsquigarrow^* \langle \textbf{skip}\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle$$

2. $$\langle \textbf{skip}\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow^* \langle c_0,\ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle$$

3. $$\langle c_0,\ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow^* \langle x = x - y\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 1] \mid y : 1]\rangle$$

4. $$\langle x = x - y\ ;\ c_0,\ \sigma'\rangle \rightsquigarrow^* \langle \textbf{skip}\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

5. $$\langle \textbf{skip}\ ;\ c_0,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow^* \langle c_0,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

6. $$\langle \textbf{while } x > 0 \textbf{ do } x = x - y,\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle \rightsquigarrow \langle \textbf{skip},\ [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

Y con la regla de transitividad:

$$t \rightsquigarrow^* t' \ \wedge\ t' \rightsquigarrow^* t'' \implies t \rightsquigarrow^* t''$$

Concluimos que:

$$\langle x = y = 1; \textbf{while } x > 0 \textbf{ do } x = x - y, [[\sigma \mid x : 2] \mid y : 2]\rangle \rightsquigarrow^* \langle \textbf{skip}, [[\sigma \mid x : 0] \mid y : 1]\rangle$$

# 5. Ejercicio 10

## 5.1. Sintaxis Abstracta

```
intelem ::= nat | var | -u intexp
intfactor ::= intfactor * intelem
| intfactor / intelem
| intelem
intterm ::= intterm + intfactor
| intterm - intfactor
|intterm
intassgn ::= var = intassgn
| intterm
intexp ::= intexp, intexp

boolelem ::= true | false
boolfactor ::= intexp == intexp
| intexp != intexp
| intexp < intexp
| intexp > intexp
| boolelem
boolnot ::= ! boolnot
| boolfactor
boolterm ::= boolterm && boolnot
| boolnot
boolexp ::= boolexp || booterm
| boolterm

commelem ::= skip
| var = intexp
commfactor ::= if boolexp then comm else comm
| while boolexp do comm
| for intexp boolexp intexp comm
commterm ::= commfactor | commelem
comm ::= comm ; commterm
```

## 5.2. Regla de Producción

$$\frac{\langle e_0,\ \sigma\rangle \Downarrow_{\text{exp}} \langle n_0,\ \sigma'\rangle}{\langle \mathbf{for}(e_0;\ b\ ; e_1)\ c,\ \sigma\rangle \rightsquigarrow \langle \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ (c;\ \mathbf{if}\ 1 \neq e_1\ \mathbf{then\ skip\ else\ skip}),\ \sigma'\rangle}\ \textsc{For}$$