Metodos de Punto Fijos

Bautista Marelli

February 25, 2021

Índice

Introducción

Vamos a recordar la definición de punto fijo

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que α es un punto fijo si:

$$f(\alpha) = \alpha$$

Introducción

Vamos a recordar la definición de punto fijo

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que α es un punto fijo si:

$$f(\alpha) = \alpha$$

Ejemplo de punto fijo

Sea $f(x) = \frac{x^3}{9}$. Es continua en $\mathbb{R}$.
Queremos buscar α / $f(\alpha) = \alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{9}$$

Podemos ver para esta ecuación encontramos distintas soluciones:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{9} = \frac{-27}{9} = -3, \; f(0) = \frac{0^3}{9} = \frac{0}{9} = 0, \; f(3) = \frac{3^3}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Estos valores, -3, 0, 3, son a lo que llamamos **puntos fijos**

Ejemplo de punto fijo

Sea $f(x) = \frac{x^3}{9}$. Es continua en $\mathbb{R}$.
Queremos buscar α / $f(\alpha) = \alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{9}$$

Podemos ver para esta ecuación encontramos distintas soluciones:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{9} = \frac{-27}{9} = -3, \; f(0) = \frac{0^3}{9} = \frac{0}{9} = 0, \; f(3) = \frac{3^3}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Estos valores, -3, 0, 3, son a lo que llamamos **puntos fijos**

Ejemplo de punto fijo

Sea $f(x) = \frac{x^3}{9}$. Es continua en $\mathbb{R}$.
Queremos buscar α / $f(\alpha) = \alpha$

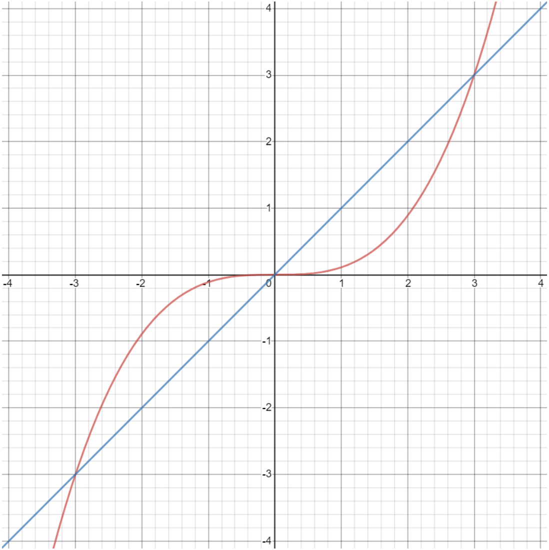
$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{9}$$

Podemos ver para esta ecuación encontramos distintas soluciones:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{9} = \frac{-27}{9} = -3, \;\; f(0) = \frac{0^3}{9} = \frac{0}{9} = 0, \;\; f(3) = \frac{3^3}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Estos valores, $-3,\ 0,\ 3$, son a lo que llamamos **puntos fijos**

Representación gráfica



Formula General

Generamos una sucesión $\{x_{n+1}\}$ con una $g(x)$ apropiada.

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Dada una función f de la forma $f(x) = x - g(x)$. Queremos buscar α / $f(\alpha) = 0$

Existencia de un Punto Fijo

Lema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un intervalo $[a; b]$.
Supongamos que satisface: $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$. Luego podemos concluir que $f(x)$ tiene al menos 1 un punto fijo $\alpha \in [a; b]$ (α es solución de $x = f(x)$)

Existencia de un Punto Fijo

Lema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un intervalo $[a; b]$.
Supongamos que satisface: $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$. Luego podemos concluir que $f(x)$ tiene al menos 1 un punto fijo $\alpha \in [a; b]$ (α es solución de $x = f(x)$)

Existencia de un Punto Fijo

Lema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un intervalo $[a; b]$.
Supongamos que satisface: $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$. Luego podemos concluir que $f(x)$ tiene al menos 1 un punto fijo $\alpha \in [a; b]$ (α es solución de $x = f(x)$)

Demostración

Demostración

Definimos la función $g(x)$ / $g(x) = x - f(x)$. Vemos que $g(x)$ es continua en $[a; b]$.

Notemos que si evaluamos $g(x)$ en a y b tenemos:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

Vemos que $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema de Bolzano

$$\therefore \ \exists \alpha \in [a; b] \ / \ g(\alpha) = 0 \implies 0 = g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \implies f(\alpha) = \alpha \quad \square$$

Demostración

Definimos la función $g(x)$ / $g(x) = x - f(x)$. Vemos que $g(x)$ es continua en $[a; b]$.

Notemos que si evaluamos $g(x)$ en a y b tenemos:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

Vemos que $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema de Bolzano

$$\therefore \ \exists \alpha \in [a; b] \ / \ g(\alpha) = 0 \implies 0 = g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \implies f(\alpha) = \alpha \qquad \square$$

Demostración

Demostración

Definimos la función $g(x)$ / $g(x) = x - f(x)$. Vemos que $g(x)$ es continua en $[a; b]$.

Notemos que si evaluamos $g(x)$ en a y b tenemos:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

Vemos que $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema de Bolzano

$$\therefore \ \exists \alpha \in [a; b] \ / \ g(\alpha) = 0 \implies 0 = g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \implies f(\alpha) = \alpha \quad \square$$

Demostración

Demostración

Definimos la función $g(x)$ / $g(x) = x - f(x)$. Vemos que $g(x)$ es continua en $[a; b]$.

Notemos que si evaluamos $g(x)$ en a y b tenemos:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

Vemos que $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema de Bolzano

$\therefore \ \exists \alpha \in [a; b] \ / \ g(\alpha) = 0 \implies 0 = g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \implies f(\alpha) = \alpha \quad \square$

Demostración

Demostración

Definimos la función $g(x)$ / $g(x) = x - f(x)$. Vemos que $g(x)$ es continua en $[a; b]$.
Notemos que si evaluamos $g(x)$ en a y b tenemos:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$
$$g(b) = b - f(b) \geq 0$$

Vemos que $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema de Bolzano

$$\therefore \ \exists \alpha \in [a; b] \ / \ g(\alpha) = 0 \implies 0 = g(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \implies f(\alpha) = \alpha \qquad \square$$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Condición suficiente de convergencia

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ y su derivada sea continua en $[a; b]$.
Supongamos $a \leq x \leq b \implies a \leq f(x) \leq b$.
Luego si $\lambda := \sup_{x \in [a;b]} |f'(x)| < 1$
Tenemos:

1. $\exists! \alpha$ solución de $f(x) = x$ en $[a; b]$
2. $\forall x_0 \in [a; b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a α
3. $|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_0 - x_1|$
4. $\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = f'(\alpha)$

Demostración [1]

Utilizamos el TVM

Por el Teorema del Valor Medio utilizando $w, z \in [a; b]$ podemos obtener:

$$f(w) - f(z) = f'(c)(w - z), \ \ p.a \ c \ entre \ w, \ \ z$$

$$|f(w) - f(z)| = |f'(c)||(w - z)|$$

$|f'(c)| \leq \lambda$ por hipótesis

$$|f(w) - f(z)| \leq \lambda|(w - z)|, \text{ a } \leq \text{w, z } \leq \text{b} \tag{1}$$

Demostración [1]

Utilizamos el TVM

Por el Teorema del Valor Medio utilizando $w, z \in [a; b]$ podemos obtener:

$$f(w) - f(z) = f'(c)(w - z),\ p.a\ c\ entre\ w,\ z$$

$$|f(w) - f(z)| = |f'(c)||(w - z)|$$

$|f'(c)| \leq \lambda$ por hipótesis

$$|f(w) - f(z)| \leq \lambda|(w - z)|, \text{ a } \leq \text{w, z } \leq \text{b} \tag{1}$$

Demostración [1]

Utilizamos el TVM

Por el Teorema del Valor Medio utilizando $w, z \in [a; b]$ podemos obtener:

$$f(w) - f(z) = f'(c)(w - z), \ p.a \ c \ entre \ w, \ z$$

$$|f(w) - f(z)| = |f'(c)||(w - z)|$$

$|f'(c)| \leq \lambda$ por hipótesis

$$|f(w) - f(z)| \leq \lambda|(w - z)|, \text{ a } \leq \text{w, z } \leq \text{b} \quad (1)$$

Demostración [1]

Utilizamos el TVM

Por el Teorema del Valor Medio utilizando $w, z \in [a; b]$ podemos obtener:

$$f(w) - f(z) = f'(c)(w - z),\ p.a\ c\ entre\ w,\ z$$

$$|f(w) - f(z)| = |f'(c)||(w - z)|$$

$|f'(c)| \leq \lambda$ por hipótesis

$$|f(w) - f(z)| \leq \lambda|(w - z)|, \text{ a } \leq \text{w, z } \leq \text{b} \tag{1}$$

Demostración [1]

Proof.

Por el Lema, sabemos $\exists \alpha \ / \ f(\alpha) = \alpha$. Supongamos que hay 2 soluciones. Sean α, β soluciones ($f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = \beta$):

$$\alpha - \beta = f(\alpha) - f(\beta)$$

$\langle TVM \ : (1) \rangle$

$$|\alpha - \beta| \leq \lambda |\alpha - \beta|$$
$$(1 - \lambda)|\alpha - \beta| \leq 0$$

Como $\lambda < 1 \implies (1 - \lambda) > 0$, entonces debemos tener que $\alpha = \beta$. Y de esta forma demostramos que $f(x) = x$ tiene solución única. □

Demostración [1]

Proof.

Por el Lema, sabemos $\exists \alpha \ / \ f(\alpha) = \alpha$. Supongamos que hay 2 soluciones. Sean α, β soluciones ($f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = \beta$):

$$\alpha - \beta = f(\alpha) - f(\beta)$$

$\langle TVM \ : (1) \rangle$

$$|\alpha - \beta| \leq \lambda |\alpha - \beta|$$
$$(1 - \lambda)|\alpha - \beta| \leq 0$$

Como $\lambda < 1 \implies (1 - \lambda) > 0$, entonces debemos tener que $\alpha = \beta$. Y de esta forma demostramos que $f(x) = x$ tiene solución única. $\square$

Proof.

Por el Lema, sabemos $\exists\alpha \ / \ f(\alpha)=\alpha$. Supongamos que hay 2 soluciones. Sean α,β soluciones ($f(\alpha)=\alpha$ y $f(\beta)=\beta$):

$$\alpha-\beta = f(\alpha)-f(\beta)$$

$\langle TVM \ : (1)\rangle$

$$|\alpha-\beta| \leq \lambda|\alpha-\beta|$$
$$(1-\lambda)|\alpha-\beta| \leq 0$$

Como $\lambda<1 \implies (1-\lambda)>0$, entonces debemos tener que $\alpha=\beta$. Y de esta forma demostramos que $f(x)=x$ tiene solución única. $\square$

Demostración [1]

Proof.

Por el Lema, sabemos $\exists \alpha \ / \ f(\alpha) = \alpha$. Supongamos que hay 2 soluciones. Sean α, β soluciones ($f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = \beta$):

$$\alpha - \beta = f(\alpha) - f(\beta)$$

$\langle TVM \ : (1) \rangle$

$$|\alpha - \beta| \leq \lambda |\alpha - \beta|$$
$$(1 - \lambda)|\alpha - \beta| \leq 0$$

Como $\lambda < 1 \implies (1 - \lambda) > 0$, entonces debemos tener que $\alpha = \beta$.

Y de esta forma demostramos que $f(x) = x$ tiene solución única. $\square$

Demostración [1]

Proof.

Por el Lema, sabemos $\exists \alpha \ / \ f(\alpha) = \alpha$. Supongamos que hay 2 soluciones. Sean α, β soluciones ($f(\alpha) = \alpha$ y $f(\beta) = \beta$):

$$\alpha - \beta = f(\alpha) - f(\beta)$$

$\langle TVM \ : (1)\rangle$

$$|\alpha - \beta| \leq \lambda|\alpha - \beta|$$
$$(1 - \lambda)|\alpha - \beta| \leq 0$$

Como $\lambda < 1 \implies (1 - \lambda) > 0$, entonces debemos tener que $\alpha = \beta$. Y de esta forma demostramos que $f(x) = x$ tiene solución única. $\square$

Método de Newton

Sea $f(x)$ función talque $f(x)$ y $f'(x)$ sea continua en $[a; b]$. Queremos buscar α / $f(\alpha) = 0$.

Definimos $g(x) = x + h(x) \cdot f(x)$. Vamos a buscar $h(x)$ talque $g'(\alpha) = 0$.

$$g'(\alpha) = 1 + h'(\alpha) \cdot f(\alpha) + h(\alpha) \cdot f'(\alpha) = 1 + h(\alpha) \cdot f'(\alpha)$$

$$h(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Como podemos tomar $h(x)$ cualquiera que cumpla lo anterior:

$$h(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

De esta forma nos queda: $g(x) = x + f(x) \cdot \frac{-1}{f'(x)}$

Método de Newton

Sea $f(x)$ función talque $f(x)$ y $f'(x)$ sea continua en $[a;b]$. Queremos buscar α / $f(\alpha)=0$.
Definimos $g(x)=x+h(x)\cdot f(x)$. Vamos a buscar $h(x)$ talque $g'(\alpha)=0$.

$$g'(\alpha)=1+h'(\alpha)\cdot f(\alpha)+h(\alpha)\cdot f'(\alpha)=1+h(\alpha)\cdot f'(\alpha)$$

$$h(\alpha)=\frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Como podemos tomar $h(x)$ cualquiera que cumpla lo anterior:

$$h(x)=\frac{-1}{f'(x)}$$

De esta forma nos queda: $g(x)=x+f(x)\cdot\frac{-1}{f'(x)}$

Método de Newton

Sea $f(x)$ función talque $f(x)$ y $f'(x)$ sea continua en $[a; b]$. Queremos buscar α / $f(\alpha) = 0$.
Definimos $g(x) = x + h(x) \cdot f(x)$. Vamos a buscar $h(x)$ talque $g'(\alpha) = 0$.

$$g'(\alpha) = 1 + h'(\alpha) \cdot f(\alpha) + h(\alpha) \cdot f'(\alpha) = 1 + h(\alpha) \cdot f'(\alpha)$$

$$h(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Como podemos tomar $h(x)$ cualquiera que cumpla lo anterior:

$$h(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

De esta forma nos queda: $g(x) = x + f(x) \cdot \frac{-1}{f'(x)}$

Método de Newton

Sea $f(x)$ función talque $f(x)$ y $f'(x)$ sea continua en $[a; b]$. Queremos buscar α / $f(\alpha) = 0$.
Definimos $g(x) = x + h(x) \cdot f(x)$. Vamos a buscar $h(x)$ talque $g'(\alpha) = 0$.

$$g'(\alpha) = 1 + h'(\alpha) \cdot f(\alpha) + h(\alpha) \cdot f'(\alpha) = 1 + h(\alpha) \cdot f'(\alpha)$$

$$h(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

Como podemos tomar $h(x)$ cualquiera que cumpla lo anterior:

$$h(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

De esta forma nos queda: $g(x) = x + f(x) \cdot \frac{-1}{f'(x)}$

Método de Newton

Formula General de Iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton Multivariable

Sean $\mathbf{f} = [f_1, ..., f_p]^T$ ecuaciones, $\mathbf{z} = [z_1, ..., z_p]^T$ incógnitas y $\mathbf{0} = [0, ..., 0]^T$.

El sistema de ecuaciones: $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$

Formula General

$$x_{n+1} = x_n - [J(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n), \ \textit{si } J(x_n) \textit{ es no singular}$$

Método de la Secante

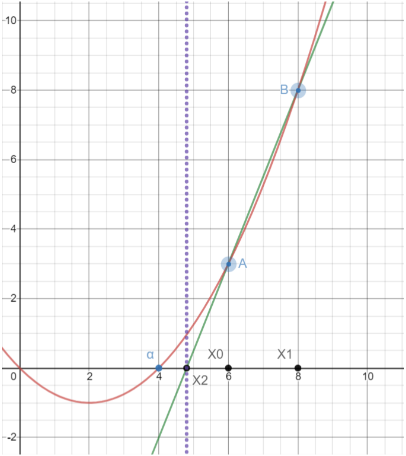
Sea $f(x)$ y dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) tales que f pase por los mismos.

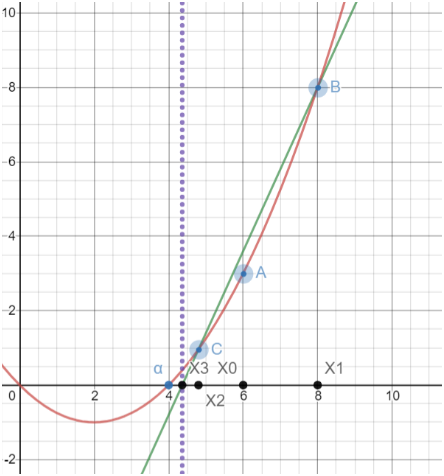
$$f'(x) \approx \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Utilizamos la ecuación del Método de Newton para calcular x_2:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Método de la Secante





Método de la Secante

Formula General de Iteración

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \cos(x) - x$. Vemos que $f(x)$ es continua en R
Vamos a resolver la ecuación $f(x) = 0$ utilizando los métodos dados.
Solución: $\alpha = 0.7390851$

Ejemplo: Demostración de la convergencia

Tomemos el intervalo $[-1;1]$. Definimos una nueva función $g(x) = \cos(x)$.
Notemos que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $[-1,1]$.
Si graficamos $g(x)$ y $g'(x)$ podemos ver:

- $\forall x \in [-1;1],\ g(x) \in [-1,1]$
- $\forall x \in [-1;1],\ |g'(x)| < 1$

Vemos que se cumplen las condiciones del Teorema mencionado anteriormente. $\exists \alpha \in [-1;1]$ talque $g(\alpha) = \alpha \implies f(\alpha) = 0$

Ejemplo: Demostración de la convergencia

Tomemos el intervalo $[-1;1]$. Definimos una nueva función $g(x) = \cos(x)$.
Notemos que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $[-1,1]$.
Si graficamos $g(x)$ y $g'(x)$ podemos ver:

- $\forall x \in [-1;1],\ g(x) \in [-1,1]$
- $\forall x \in [-1;1],\ |g'(x)| < 1$

Vemos que se cumplen las condiciones del Teorema mencionado anteriormente. $\exists \alpha \in [-1;1]$ talque $g(\alpha) = \alpha \implies f(\alpha) = 0$

Ejemplo: Demostración de la convergencia

Tomemos el intervalo $[-1;1]$. Definimos una nueva función $g(x) = \cos(x)$.
Notemos que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $[-1,1]$.
Si graficamos $g(x)$ y $g'(x)$ podemos ver:

- $\forall x \in [-1;1],\ g(x) \in [-1,1]$
- $\forall x \in [-1;1],\ |g'(x)| < 1$

Vemos que se cumplen las condiciones del Teorema mencionado anteriormente. $\exists \alpha \in [-1;1]$ talque $g(\alpha) = \alpha \implies f(\alpha) = 0$

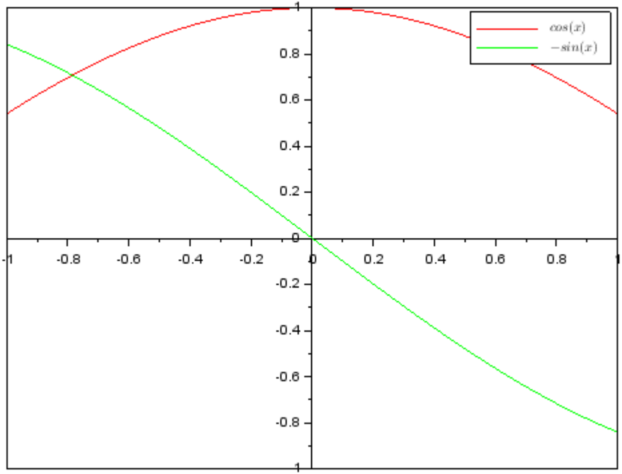
Ejemplo: Demostración de la convergencia

Tomemos el intervalo $[-1;1]$. Definimos una nueva función $g(x) = \cos(x)$. Notemos que $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $[-1,1]$.
Si graficamos $g(x)$ y $g'(x)$ podemos ver:

- $\forall x \in [-1;1],\ g(x) \in [-1,1]$
- $\forall x \in [-1;1],\ |g'(x)| < 1$

Vemos que se cumplen las condiciones del Teorema mencionado anteriormente. $\exists \alpha \in [-1;1]$ talque $g(\alpha) = \alpha \implies f(\alpha) = 0$

Ejemplo: Demostración de la convergencia



Ejemplo: Método de Newton

Sea $x_0 = -1 \in [-1; 1]$.

Calculamos $f'(x) = -\sin(x) - 1$. Realizamos las iteraciones:

x_1) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = (-1) - \frac{\cos(-1)+1}{-\sin(-1)-1} \approx 8.716217$

x_2) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 2.9760607$

x_3) $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx -0.4257847$

x_4) $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 1.8511838$

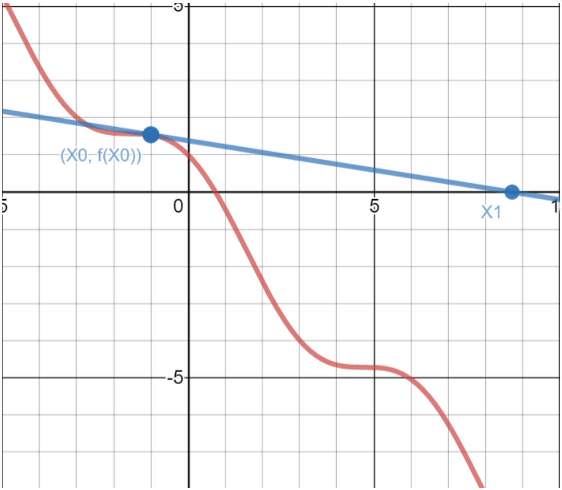
x_5) $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \approx 0.7660395$

x_6) $x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} \approx 0.7392411$

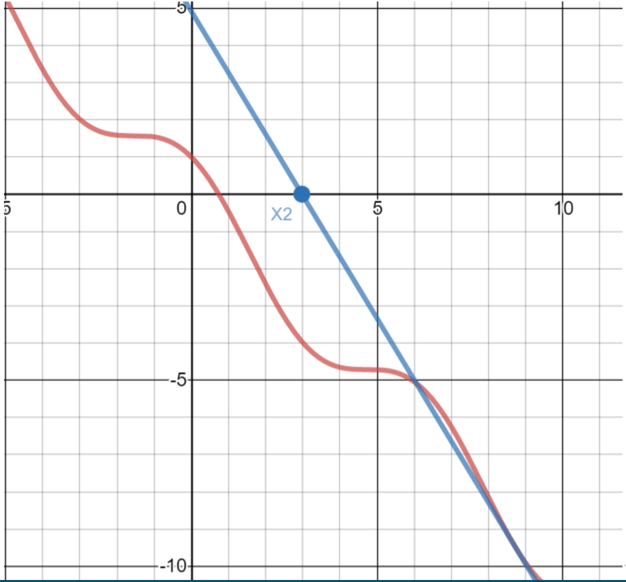
x_7) $x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} \approx 0.7390851$

Podemos ver que converge a un valor ≈ 0.7390851

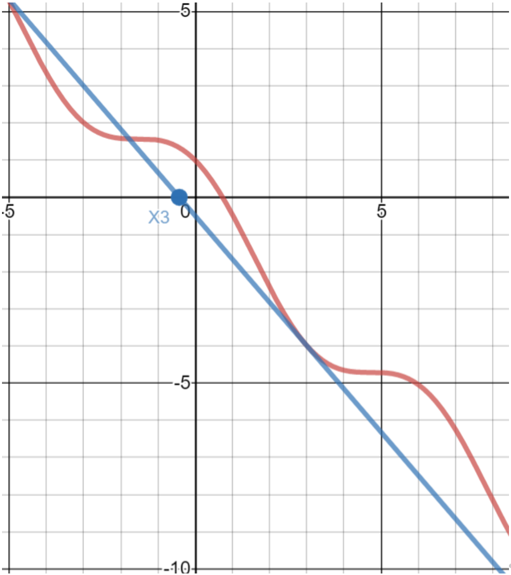
Ejemplo: Método de Newton



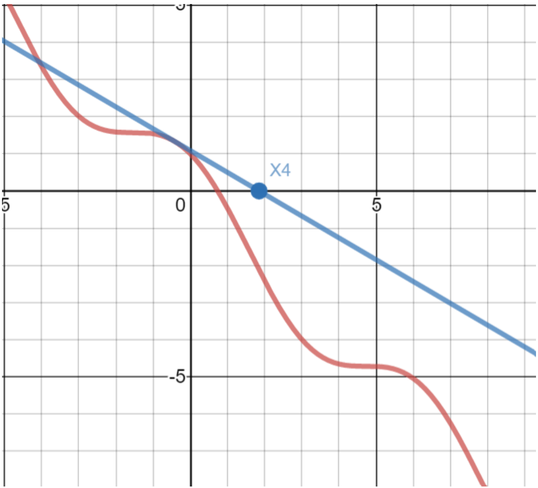
Ejemplo: Método de Newton



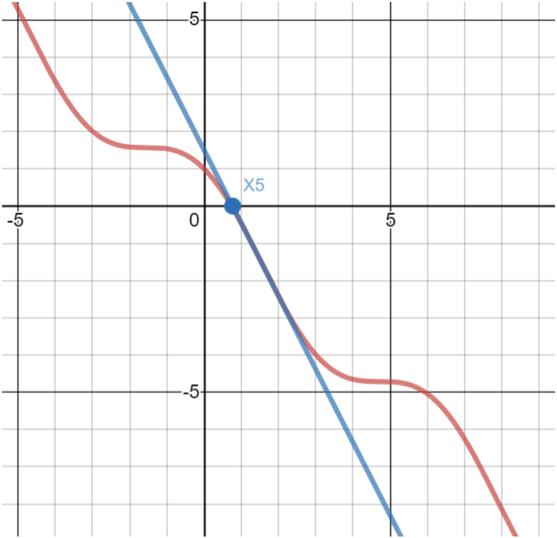
Ejemplo: Método de Newton



Ejemplo: Método de Newton



Ejemplo: Método de Newton



Ejemplo: Método de la Secante

Sea $A = (-0.5, 1.3775826)$ y $B = (0.5, 0.3775826)$.
Luego realizamos las iteraciones:

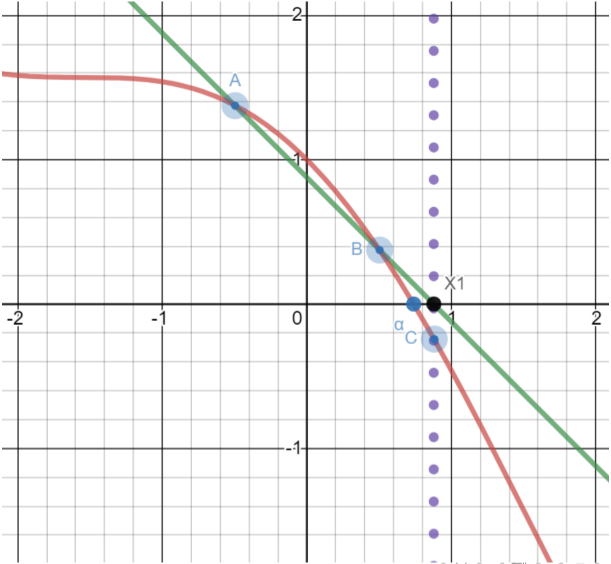
C) $x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \approx 0.8775826$
Calculamos $f(x_2) = -0.2385701 \implies C = (0.8775826, -0.2385701)$

D) $x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \approx 0.7313852$
Calculamos $f(x_3) = 0.0128647 \implies D = (0.7313852, 0.0128647)$

E) $x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 0.7388654$
Calculamos $f(x_4) = 0.0003677 \implies E = (0.7388654, 0.0003677)$

Si seguimos con este procedimiento vemos que el método converge a un valor ≈ 0.7390851

Ejemplo: Método de la Secante



Ejemplo: Método de la Secante