MPRO - ECMA
Classement de territoires en zone de montagne

Adrien Maréchal
Benoît Mulocher

CNAM

17 janvier 2016

Table des matières

1 Rappel des notations et du problème

Une commune est décrite par un ensemble de mailles M. Chaque maille $(i,j) \in M$ est affectée de :

- un handicap de pente noté H_{ij}^p,
- un coefficient correcteur noté associé à la pente C_{ij}^p,
- un handicap d'altitude noté H_{ij}^a,
- un coefficient correcteur associé à l'altitude C_{ij}^a.

À l'ensemble M des mailles sont associés un handicap de pente $H^p(M)$ et d'altitude $H^a(M)$, définis par :

$$H^p(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^p C_{ij}^p S_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^p S_{ij}} \quad \text{et} \quad H^a(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^a C_{ij}^a S_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^a S_{ij}}$$

où S_{ij} représente le pourcentage de la surface de la maille (i,j) retenu.

Dans le cadre simplifié où une maille est soit retenue entièrement, soit non retenue, cela donne :

$$H^p(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^p C_{ij}^p x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^p x_{ij}} \quad \text{et} \quad H^a(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^a C_{ij}^a x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^a x_{ij}}$$

où $x_{ij} = 1$ si la maille (i,j) est retenue, et 0 sinon.

Le problème s'énonce comme suit :

Déterminer, pour l'ensemble M des mailles d'une commune donnée, la plus grande surface d'un seul tenant, c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble $Z \subseteq M$ de mailles contigües, tel que la valeur de $H^p(Z) + H^a(Z)$ soit supérieure ou égale à 2.

2 Modélisation du problème en ignorant la connexité

2.1 Modélisation du problème

On cherche a trouver la plus grande surface vérifiant une certaine contrainte sur les handicaps de pente et d'altitude. La taille d'une telle surface est obtenue en comptant le nombre de maille retenues, et l'objectif est de maximiser cette taille. Dès lors, on peut écrire la fonction objectif comme :

$$\max_{x_{ij},(i,j)\in M} \sum_{(i,j)\in M} x_{ij} \tag{1}$$

où x_{ij} sont des variables associées à chaque maille.

La contrainte $H^p(Z) + H^a(Z) \geq 2$, où $Z = \{(i,j) \in M, x_{ij} = 1\}$ s'écrit en fonction des variables x_{ij} du problème, sous forme fractionnaire :

$$\frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^p C_{ij}^p x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^p x_{ij}} + \frac{\sum_{(i,j)\in M} H_{ij}^a C_{ij}^a x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C_{ij}^a x_{ij}} \geq 2 \tag{2}$$

où les x_{ij} sont des booléens, comme annoncé dans la modélisation :

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in M \tag{3}$$

Lorsque l'on ignore la contrainte de connexité, le problème complet s'écrit donc :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_{ij},(i,j)\in M} \sum\limits_{(i,j)\in M} x_{ij} & \\ \quad \text{s.c.} \quad \dfrac{\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}} + \dfrac{\sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}} \geq 2 & \\ \quad x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in M \end{cases} \tag{P_{frac}}$$

2.2 Linéarisation de la contrainte fractionnaire

Pour linéariser la contrainte fractionnaire, on introduit les variables p_{ij} et a_{ij}, $(i,j) \in M$ qui vont remplacer

$$p_{ij} = x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}$$

et

$$a_{ij} = x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}$$

Après multiplication de la contrainte (2) par les dénominateurs, a on :

$$\sum_{(i,j)\in M} \left(H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij} \left(\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} \right) \right) \\ + \sum_{(i,j)\in M} \left(H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij} \left(\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} \right) \right) \geq 2 \sum_{(i,j)\in M} \left(C^p_{ij} x_{ij} \left(\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} \right) \right)$$

qu'on réécrit donc :

$$\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} a_{ij} + \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} p_{ij} \geq 2 \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} a_{ij}$$

soit finalement :

$$\sum_{(i,j)\in M} \left(H^p_{ij} C^p_{ij} - 2C^p_{ij} \right) a_{ij} + \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} p_{ij} \geq 0 \tag{4}$$

Pour que la formulation reste équivalente, il faut ajouter les contraintes suivantes sur les nouvelles variables p_{ij} et a_{ij}, $(i,j) \in M$:

$$p_{ij} \leq x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} \tag{5}$$

$$p_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

$$p_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij} + (x_{ij} - 1) \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} \tag{7}$$

$$p_{ij} \geq 0 \tag{8}$$

$$p_{ij} \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Les contraintes (5) et (8) assurent $p_{ij} = 0$ si $x_{ij} = 0$, tandis que les contraintes (6) et (7) assurent que p_{ij} prenne bien la valeur attendue $\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}$ quand $x_{ij} = 1$.

De la même manière pour les a_{ij}, $(i,j) \in M$:

$$a_{ij} \leq x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} \tag{10}$$

$$a_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} \tag{11}$$

$$a_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} + (x_{ij} - 1) \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} \tag{12}$$

$$a_{ij} \geq 0 \tag{13}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Remarque : Suite à ces changements, la contrainte "principale" (4) n'est plus parfaitement symétrique en les termes associés à la pente et ceux associés à l'altitude. En particulier, rien n'empêche a priori que $H^p_{ij} C^p_{ij} - 2C^p_{ij}$ (i.e. le coefficient affecté à a_{ij}) soit négatif pour certains (i,j).

On aurait également pu inverser le rôle des p_{ij} et des a_{ij} dans la réécriture de la contrainte.

3 Modélisation de la connexité

Pour modéliser la connexité, on a utilisé la méthode suggérée par l'énoncé. On définit des variables d^h_{ij} pour représenter la distance $h \in \mathbb{N}$ d'une maille sélectionnée (i,j) à une origine fixée. Ainsi, si on suppose qu'une origine a été déterminée, on aura :

$$d^h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la maille } (i,j) \text{ est sélectionnée et est à distance } h \text{ de l'origine} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'origine sera en fait une maille dont la distance h est nulle. Comme on ne veut qu'une unique composante connexe, on détermine une origine par la contrainte

$$\sum_{(i,j)\in M} d^0_{ij} = 1 \tag{15}$$

Le fait que l'on attribue une distance aux mailles retenues seules s'écrit

$$\sum_{h=0}^{h_{\max}} d^h_{ij} = x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M \tag{16}$$

ce qui traduit le fait qu'il existe nécessairement un $h \in \mathbb{N}$ tel qu'une maille retenue soit à distance $h_{\max}$ de l'origine. Cela implique également que l'origine doit bien être une maille sélectionnée.

$h_{\max}$ est ici un entier choisit suffisamment grand pour que toute maille soit à distance au plus $h_{\max}$ d'une autre maille. Typiquement, si l'ensemble des mailles M s'inscrit dans un carré de taille $n \times m$, $h_{\max} = nm$ convient.

Enfin, une maille sélectionnée ne peut être à distance $h+1$ de l'origine, que si l'un de ses voisins au moins est lui même à distance h de l'origine. On a ainsi :

$$d^{h+1}_{ij} \leq d^h_{i+1\ j} + d^h_{i-1\ j} + d^h_{i\ j+1} + d^h_{i\ j-1} \qquad \forall h \in [\![0, h_{\max} - 1]\!],\ \forall (i,j) \in M \tag{17}$$

De cette façon, si $d^h_{ij} = 1$ pour une certaine maille $(i,j) \in M$, h ne représente pas forcément la longueur du plus court chemin de l'origine à (i,j), mais la taille d'un chemin existant. Seule nous important l'existence d'un tel chemin pour la connexité, cela n'est pas problématique.

4 Modélisation complète du problème en variables mixtes

Le problème complet, sans contrainte fractionnaire et tenant compte de la connexité, s'écrit :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
 & \displaystyle\max_{x_{ij},(i,j)\in M} \sum_{(i,j)\in M} x_{ij} & \\
 & & \\
\text{s.c.} & \sum_{(i,j)\in M} \left(H^p_{ij}C^p_{ij} - 2C^p_{ij}\right) a_{ij} + \sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij}C^a_{ij}p_{ij} \geq 0 & (1) \\
 & & \\
 & p_{ij} \leq x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (2) \\
 & p_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (3) \\
 & p_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij} + (x_{ij}-1) \sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (4) \\
 & p_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in M & (5) \\
 & & \\
 & a_{ij} \leq x_{ij} \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (6) \\
 & a_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (7) \\
 & a_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij} + (x_{ij}-1) \sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (8) \\
 & a_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in M & (9) \\
 & & \\
 & \sum_{(i,j)\in M} d^0_{ij} = 1 & (10) \\
 & \sum_{h=0}^{h_{\max}} d^h_{ij} = x_{ij} \qquad \forall (i,j) \in M & (11) \\
 & d^{h+1}_{ij} \leq d^h_{i+1\ j} + d^h_{i-1\ j} + d^h_{i\ j+1} + d^h_{i\ j-1} \qquad \forall (i,j) \in M,\ \forall h \in [\![0, h_{\max}-1]\!] & (12) \\
 & & \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in M & \\
 & p_{ij}, a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \forall (i,j) \in M & \\
 & d^h_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in M,\ \forall h \in [\![0, h_{\max}-1]\!] &
\end{array}
\right. \qquad (P)
$$