MPRO–ECMA

Sujet du projet 2015-2016

1 Objectif du projet

Le but de ce projet est l'étude d'un problème de classement de territoires agricoles en zone de montagne. Parmi les territoires agricoles, on considère des *zones défavorisées* qui sont des zones soumises à des contraintes naturelles. Dans ces zones, les agriculteurs sont éligibles à des aides compensatoires de l'Union Européenne liées à ce handicap naturel. Ces aides sont versées par le ministère de l'agriculture, de l'agroalimentaire et de la forêt.

On distingue actuellement 3 types de zones défavorisées :
— les zones de montagne,
— les zones défavorisées simples,
— les zones affectées de handicaps spécifiques.

L'unité de base pour la délimitation d'une zone défavorisée est la commune.

Dans ce projet, on cherche à établir si une zone donnée peut être classée en zone de montagne.

Une commune est décrite par un ensemble de mailles M (représentant chacune une surface carrée d'un hectare, par exemple) résultant d'un quadrillage de son territoire (cf. Figure 1), et chaque maille appartient à une classe de pente et à une classe d'altitude.

Chaque maille (i, j) est affectée d'un handicap de pente, noté H^p_{ij}, et d'un coefficient correcteur, noté C^p_{ij}, qui dépendent de la classe (dite *classe de pente*) à laquelle elle appartient (voir la Table 1). Ces valeurs peuvent dépendre de la région concernée.

Chaque maille (i, j) est également affectée d'un handicap d'altitude, noté H^a_{ij}, et d'un coefficient correcteur, noté C^a_{ij}, donnés en Table 2. Ces valeurs peuvent dépendre de la région concernée.

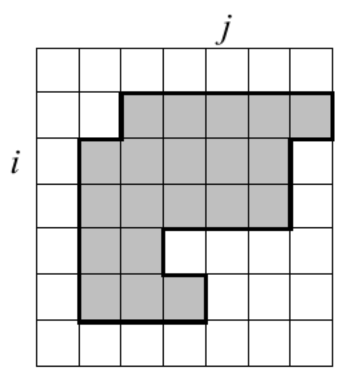

FIGURE 1 – Représentation du maillage d'une commune

Classe de pente	H_{ij}^p	C_{ij}^p
1	0.00	0.750
2	0.20	0.630
3	1.00	0.500
4	2.00	0.370
5	4.00	0.2500
6	6.00	0.167
7	8.00	0.125

TABLE 1 – Handicaps de pente et coefficients correcteurs par classe de pente.

Classe d'altitude	H_{ij}^a	C_{ij}^a
0	0.050	0.750
1	0.054	0.720
2	0.300	0.670
3	0.560	0.6200
4	0.860	0.560
5	1.300	0.500
6	2.000	0.430
7	3.000	0.365
8	4.300	0.300
9	5.850	0.235
10	7.700	0.180
11	10.100	0.140
12	13.600	0.125
13	18.500	0.100

TABLE 2 – Handicaps d'altitude et coefficients correcteurs par classe d'altitude.

À l'ensemble M des mailles d'une commune on peut associer un handicap de pente, noté $H^p(M)$, et un handicap d'altitude, noté $H^a(M)$, définis de la façon suivante :

$$H^p(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} S_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} S_{ij}} \quad et \quad H^a(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} S_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} S_{ij}}$$

où S_{ij} représente le pourcentage de la surface de la maille (i,j) retenu.

Pour simplifier, on considère en réalité qu'une maille est soit retenue entièrement, soit non retenue. En effet, on peut par exemple toujours considérer un maillage plus fin pour y parvenir. On obtient alors, pour l'ensemble M des mailles d'une commune :

$$H^p(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H^p_{ij} C^p_{ij} x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^p_{ij} x_{ij}} \quad et \quad H^a(M) = \frac{\sum_{(i,j)\in M} H^a_{ij} C^a_{ij} x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in M} C^a_{ij} x_{ij}}$$

où x_{ij} vaut 1 si la maille (i,j) est retenue, et 0 sinon.

Historiquement, une commune était classée ou non en zone de montagne. Certains ont trouvé ce classement injuste du fait que certaines parties seulement d'une commune pouvaient être concernées par le classement en zone de montagne. Il a donc été admis qu'il était possible de ne classer que certaines parties d'une commune. Différents travaux ont alors abouti à la conclusion suivante :

Le classement en zone de montagne d'un sous-ensemble de mailles de M est possible si son handicap pente-altitude, qui est la somme de son handicap de pente et de son handicap d'altitude, est supérieur ou égal à 2.

Ainsi, on aboutit au problème suivant :

Déterminer, pour l'ensemble M des mailles d'une commune donnée, la plus grande surface d'un seul tenant, c'est-à-dire le plus grand sous-ensemble $Z \subseteq M$ de mailles contigües, tel que la valeur de $H^p(Z) + H^a(Z)$ soit supérieure ou égale à 2.

2 Travail demandé

Exercice 1 — *Modélisation du problème en ignorant la connexité*
Nous proposons de considérer tout d'abord un problème simplifié qui est le suivant :

Déterminer, pour l'ensemble M des mailles d'une commune donnée, le plus grand sous-ensemble de mailles $Z \subseteq M$ tel que la valeur de $H^p(Z) + H^a(Z)$ soit supérieure ou égale à 2.

1. *Modélisation du problème*
   Proposez une modélisation de ce problème par un programme mathématique en variables binaires ayant une fonction objectif linéaire et une contrainte fractionnaire.
2. *Linéarisation de la contrainte fractionnaire*
   Proposez une façon de linéariser la contrainte fractionnaire.

Exercice 2 — *Modélisation de la connexité*
Proposez une façon de modéliser la contrainte sur la connexité de la solution attendue. Pour cela, la première étape sera de modéliser le voisinage d'une maille (i,j). Par exemple, une

commune peut être représentée par un graphe où chaque maille (i, j) est un sommet et il existe une arête (ou un arc) entre les sommets (i, j) et (k, l) si et seulement si les mailles (i, j) et (k, l) sont voisines. Ensuite, plusieurs choix de modélisation sont possibles. Une façon de faire est de fixer une des mailles sélectionnées comme maille "origine", et d'ajouter des variables pour définir les distances des autres mailles sélectionnées par rapport à cette origine. Une maille sélectionnée ne pourra alors être à distance h de l'origine que si un de ses voisins est à distance $h - 1$ (pour un certain h), et toute maille choisie doit être à une distance finie h (bornée par un paramètre $h_{\max}$) de l'origine.

Exercice 3 — *Résolution du problème*
Les instances du problème étudié qui seront à résoudre sont à récupérer à l'URL suivante : `http://cedric.cnam.fr/~lamberta/MPRO/ECMA/data`

1. Tester la résolution par Cplex du modèle découlant des exercices 1 et 2 (et dont une version linéarisée découle notamment de la question 2 de l'exercice 1).
2. Concevoir, implémenter et tester une heuristique ou une méta-heuristique pour résoudre le problème étudié. L'heuristique peut être gloutonne, basée sur une recherche locale, intégrée au sein d'une méta-heuristique, ou bien un mélange des trois. Elle peut également être basée sur d'autres idées ou concepts ; en réalité vous avez toute latitude pour la concevoir. **Attention** : il vous est demandé dans ce travail de fournir une heuristique avec garantie de performance a posteriori, à l'aide d'une borne que vous calculerez.
3. Concevoir un algorithme de résolution complet du problème proposé, dans l'idéal un algorithme exact. Plusieurs options s'offrent à vous : vous pouvez par exemple partir d'une solution obtenue par une heuristique puis développer un algorithme de branch-and-bound, ou bien améliorer la résolution de votre modèle par l'ajout d'inégalités valides dans un algorithme de branch-and-cut. Vous êtes libres d'utiliser toutes les méthodes de résolution que vous souhaitez, le but étant de résoudre à l'optimum, ou au plus près mais avec garantie de performance, les instances fournies.

3 Echéancier et modalités

Les exercice 1 et 2 du travail à réaliser sont à rendre pour le 17 janvier 2015 à minuit. Ce travail de modélisation est individuel. L'exercice 3 peut être réalisé en binôme. Un rapport présentant l'intégralité du travail effectué est à rendre le 9 mars 2015 minuit au plus tard, par e-mail de préférence. Ce rapport devra comporter une analyse des algorithmes proposés en fonction des résultats expérimentaux obtenus. Les soutenances se dérouleront le matin du mercredi 16 mars. L'évaluation se fera, d'une part, sur la justification et l'analyse des méthodes de résolution proposées pour le problème étudié, et, d'autre part, sur la qualité effective de ces algorithmes de résolution.

Par qualité effective de ces algorithmes de résolution, nous entendons :
- Si la méthode est exacte, le critère principal d'évaluation est le temps de résolution, sur les instances proposées,
- Si la méthode est approchée, le critère d'évaluation est, d'une part, la qualité de la solution obtenue par rapport au temps de résolution, et, d'autre part, sa garantie de performance.