9.3 区间估计

问题: 给定一样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$, 根据样本估计未知参数θ的一个范围$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, 其中

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \qquad \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n),$$

使得以较大的概率保证$\theta \in (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, 即

$$\Pr[\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)] \geq 1 - \alpha.$$

定义9.5 (置信区间与置信度)**.** *设样本$X_1, X_2 \cdots, X_n$是总体X的一个样本, 总体X的分布含未知参数θ, 找出统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, ($\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$), 使得*

$$\Pr[\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2] \geq 1 - \alpha$$

称区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为$\theta$的置信区间, $1-\alpha$为该区间的置信度.

区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$是一随机区间, $1-\alpha$为该区间包含θ的概率/可靠程度. 若$\alpha = 0.05$, 则置信度为95%. 通常采用95%的置信度, 有时也可99%, 90%等. 说明:

i) $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$反映了估计精度, 长度越小, 精度越大.

ii) α反映了估计的可靠度, α越小, 可靠度越高.

iii) α确定, $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的选取并不唯一确定, 常选长度最小的一个.

求解方法: 枢轴变量法.

1) 先找一样本函数$W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$包含待估参数$\theta$, 不含其它参数, 且$W$的分布已知, 称$W$为枢轴变量.

2) 给定置信度$1-\alpha$, 根据W的分布找出常数a, b, 使$\Pr[a < \mu < b] = 1 - \alpha$.

3) 由$a < \mu < b$解出$\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$, 则$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为$\theta$所求置信区间.

9.3.1 正态分布方差已知情况下均值的区间估计

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的一个样本, 若方差$\sigma^2$已知, 在置信度$1-\alpha$下, 确定$\mu$的置信区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$. 根据正太分布的性质, 找出枢轴变量:

$$W = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/n} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

对给定置信度$1-\alpha$, 找出临界值λ_1, λ_2, 使$\Pr[\lambda_1 \leq W \leq \lambda_2] = 1 - \alpha$. 根据分位数查正态分布表得$\Phi(\mu_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, 解出$\lambda_2 = \mu_{\frac{\alpha}{2}}$, $\lambda_1 = -\mu_{\frac{\alpha}{2}}$. 所以

$$\Pr[-\mu_{\frac{\alpha}{2}} \leq W \leq \mu_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha.$$

解出$-\mu_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \mu_{\frac{\alpha}{2}}$, 所以$\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{a}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}}\frac{a}{\sqrt{n}}$为$\mu$的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

习题. 某地区儿童身高服从正态分布，现随机抽查9人, 高度分别为$115, 120, 131, 115, 109, 115, 115, 105, 110$, 已知$\sigma^2 = 7$, 置信度为95%, 求期望$\mu$的置信区间.

9.3.2 正态总体, 方差未知, 求期望的区间估计

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的一样本, 在置信度为$1-\alpha$下确定期望$\mu$的置信区间. 根据以前的定理可知: $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 则

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

设枢轴变量

$$W = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

给定置信度$1-\alpha$, 查t分布表, 得临界值λ_1, λ_2满足

$$\Pr[\lambda_1 \le W \le \lambda_2] = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \lambda_1 = -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

所以

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad \Rightarrow \quad \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

9.3.3 正态总体, 方差σ^2的置信区间

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的样本, 在置信度为$1-\alpha$的情况下，求$\sigma^2$的置信区间. 由前面的定理可知: $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 则

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

设枢轴变量$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, 查$\chi^2$分布表, 得$\lambda_1, \lambda_2$, 使

$$\Pr[\lambda_1 \le W \le \lambda_2] = 1-\alpha.$$

由于χ^2分布不对称性, 采用使概率对称的区间

$$\Pr[\chi^2(n-1) < \lambda_1] = \Pr[\chi^2(n-1) > \lambda_2] = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \quad \lambda_1 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

所以

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},$$

即为方差σ^2的置信区间.

9.3.4 双正态总体情形

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$为总体$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$为总体$Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本, 设

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2 \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2.$$

在置信度为$1-\alpha$的情形下, 求$\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2的区间估计.

1) 如果已知σ_1^2, σ_2^2, 求$\mu_1-\mu_2$的置信区间.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}), \quad \bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}) \quad \bar{X}-\bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}).$$

所以

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

设枢轴变量

$$W = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_1}}},$$

从而求解置信区间

$$\Phi(\mu_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2} \Longrightarrow -\mu_{\frac{\alpha}{2}} \le W \le \mu_{\frac{\alpha}{2}}.$$

2) 如果$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知, 则

$$W = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2), \quad \text{其中} \quad S_W = \frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}.$$

3) 方差σ_1^2/σ_2^2的置信区间. 设枢轴变量

$$W = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

所以

$$\Pr[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \le \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \le F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)] = 1-\alpha.$$

求解置信方差.

某些问题只关心区间的上限或者下限, 如次品率只关心上限, 产品寿命只关心下限.

定义9.6 (单侧置信区间)**.** 对$\alpha \in (0,1)$, 若样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的统计量$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$使

$$\Pr(\theta > \hat{\theta}_1) \le 1-\alpha,$$

称$(\hat{\theta}_1, +\infty)$为$\theta$的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间, $\hat{\theta}_1$称为单侧置信下限.

同理定义单侧置信上限.

例9.16. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2未知, 求μ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限以及上限.

解. 考虑枢轴变量$W = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 所以

$$\Pr[W < t_\alpha(n-1)] = 1-\alpha, \quad \Pr[W > t_{1-\alpha}(n-1)] = 1-\alpha.$$

□

9.3.5 大样本非正态分布的区间估计

若样本量较大时, 利用中心极限定理, 求枢轴变量的近似分布, 再求出估计量.

例9.17. $X_1, X_2, \cdots, X_n$来自总体X的一样本, $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, 求均值μ的$1-\alpha$置信区间.

解. 当n充分大时, 利用中心极限定理设枢轴变量

$$W = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

若σ^2已知, 直接求解; 若σ^2未知, 则用S^2 代替. □

例9.18. $X_1, X_2, \cdots, X_n$来自总体$X \sim Ber(p)$的一样本, 求p的置信度为$1-\alpha$的区间估计.

解. 当n充分大时, 利用中心极限定理设枢轴变量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

□