1.4 组合计数: 十二路

著名组合学家 Gian-Carlo Rota (1932-1999)提出了组合计数十二路(The Twelvefold Way). 考虑两个集合的函数映射 $f:[N]\to[M]$, 其中 $|N|=n$ 以及 $|M|=m$, 考虑无任何约束, 1-1单射, 满射三个条件下函数映射的个数.

该问题被Knuth进一步简化为将n个(相同/不同)的球放入m个(相同/不同)的箱子, 有多少种不同的放法. 首先给出结论, 后面一一解释.

每个箱子中球的个数	不限	≤ 1	≥ 1
n个不同的球, m个不同的箱子	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,k)$
n个相同的球, m个不同的箱子	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
n个不同的球, m个相同的箱子	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\left\{\begin{smallmatrix}1, n\leq m\\ 0, n>m\end{smallmatrix}\right.$	$S(n,m)$
n个不同的球, m个相同的箱子	$\sum_{k=1}^{m} p_k(n)$	$\left\{\begin{smallmatrix}1, n\leq m\\ 0, n>m\end{smallmatrix}\right.$	$p_m(n)$

1.4.1 排列, 组合与多重组合

排列: 从n个不同的元素中取出r个元素进行排列, 有$(n)_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$种不同的方法.

组合: 从n个不同的元素中取出r个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 共有$\binom{n}{r}$种方法, 其中

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{(n)_r}{r!}.$$

下面将组合的概念进行推广.

多重组合: 有n个不同的元素, 分成k个不同的组, 每组依次为$n_1,n_2,\cdots,n_k$个元素, 即$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$, 共有

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种方法, 称$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$为多重组合, 本质上有$\binom{n}{r}=\binom{n}{r,n-r}$.

多重组合的另一种解释: n个元素分别属于k个不同的类, 每个类的元素个数分别为$n_1,n_2,\ldots,n_k$, 如果同类元素之间不可分辨, 现将n个元素排成一列, 有$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$种不同的排列方法. 组合与多项式系数之间有如下关系:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\\ (x_1+x_2+\cdots+x_k)^n &= \sum_{\substack{\text{整数}n_i\geq 0 \quad (i\in[n])\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}\end{aligned}$$

根据排列组合, 有如下结论:

每个箱子中球的个数	不限	≤ 1	≥ 1
n个不同的球, m个不同的箱子	m^n	$(m)_n$	
n个相同的球, m个不同的箱子		$\binom{m}{n}$	

1.4.2 整数的有序分解

研究方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$有多少个非负整数解. 该问题等价于将$n$个相同的球放入$k$个箱子中, 每个箱子中分别有$x_1, x_2, \ldots, x_k$个球, $x_i \geq 0$, 有多少种不同的放法.

针对这个问题, 考虑下面一个对应关系: 将n条竖线$|$和$k-1$个$*$排列成一排, 在最后加入一个$*$. 如下例所示:

$$\underbrace{|||}_{x_1} *|| * \cdots * \underbrace{||||||}_{x_i} * \cdots ||||*$$

第i个$*$和第$i-1$个$*$之间的竖线个数表示x_i的值, 而第1个$*$之前的竖线个数表示x_1的值. 可以发现方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$与这种排列之间存在一一对应关系, 因此方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$有

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

种非负整数解.

例如: 方程$x_1 + x_2 + x_3 = 10$有$\binom{12}{2}$种非负整数解.

推广. *求方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ $(k \leq n)$有多少种正整数解.*

解. 令$\widetilde{x}_1 = x_1 - 1, \widetilde{x}_2 = x_2 - 1, \cdots, \widetilde{x}_k = x_k - 1$, 方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ $(k \leq n)$有多少种正整数解等价于方程$\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_k = n - k$有多少种非负整数解. 根据上面的结论有

$$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

种正整数解. □

推广. *求不等式$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ $(k \leq n)$有多少种非负整数解.*

习题. *不等式 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 17$ 有多少种正整数解.*

对于n个(相同/不同)的球放入m个(相同/不同)的箱子, 有如下结论:

每个箱子中球的个数	不限	≤ 1	≥ 1
n个相同的球, m个不同的箱子	$\binom{n+m-1}{n}$		$\binom{n-1}{m-1}$

1.4.3 第二类Stirling数(The Stirling number of the second kind)

定义1.4. *将n个不同的元素分成k个非空的块(集合, Block), 不同的划分数称为第二类Stirling数, 记为$S(n,k)$或$\left\{ {n \atop k} \right\}$.*

这里以集合$A=\{1,2,3\}$为例:

- 若分成1个非空的块, 则有$\{1,2,3\}$, 此时$S(3,1)=1$;
- 若分成2个非空的块, 则有$\{\{1\},\{2,3\}\},\{\{2\},\{1,3\}\},\{\{3\},\{1,2\}\}$, 此时$S(3,2)=3$;
- 若分成1个非空的块, 则有$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, 此时$S(3,3)=1$;

由定义可知$S(n,n)=S(n,1)=1$.

下面考虑第二类Stirling数的递推关系, 将n个不同的元素分成k个非空的块, 如果最后一个元素n独立为一个块$\{n\}$, 则其余元素构成$k-1$块, 即$S(n-1,k)$划分数; 如果元素n不独立成一个块$\{n\}$, 则其余元素构成k块, 即$S(n-1,k)$划分数, 再将第n个元素放入k块中, 故有$k\cdot S(n-1,k)$. 于是得到第二类Stirling数的递推关系:

$$S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1).$$

第二类Stirling数的一般表达式为:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

对于n个(相同/不同)的球放入m个(相同/不同)的箱子, 有如下结论:

每个箱子中球的个数	不限	≤ 1	≥ 1
n个不同的球, m个不同的箱子			$m!S(n,k)$
n个不同的球, m个相同的箱子	$\sum_{k=1}^{m}S(n,k)$	$\begin{cases}1, n\leq m\\0, n>m\end{cases}$	$S(n,m)$

1.4.4 整数的无序分解(Partition)

将正整数n划分(partition)为k个部分, 每个部分都是正数, 且这些划分之间是无序的, 即整数n有多少种不同的划分数, 记为$p_k(n)$.

这里以7的划分为例

$k=1$	$\{7\}$	$p_1(7)=1$
$k=2$	$\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$	$p_2(7)=3$
$k=3$	$\{1,1,5\},\{1,2,4\},\{1,3,3\},\{2,2,3\}$	$p_3(7)=4$
$k=4$	$\{1,1,1,4\},\{1,1,2,3\},\{1,2,2,2\}$	$p_4(7)=3$
$k=5$	$\{1,1,1,1,3\},\{1,1,1,2,2\}$	$p_5(7)=2$
$k=6$	$\{1,1,1,1,1,2\}$	$p_6(7)=1$
$k=7$	$\{1,1,1,1,1,1,1\}$	$p_7(7)=1$

对于一般情况, 我们容易得到$p_1(n)=p_n(n)=1$. 将整数n划分成k个非空的部分, 等价于以下数学问题:

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n \quad \text{s. t.} \quad x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_k\geq 1.$$

将整数n划分成k个非空的部分, 考虑最后一个部分$x_k = 1$时, $(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$是整数$n-1$的$k-1$部分的划分; 当$x_k > 1$时, $(x_1 - 1, x_2 - 1, \cdots, x_{k-1} - 1, x_k - 1)$是整数$n-k$的$k$部分的划分. 于是得到以下关于$p_k(n)$的递推关系:

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$

进一步可以得到以下性质:

性质1.7. 有$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!} \leq p_k(n) \leq \frac{\binom{n-1+k(k-1)/2}{k-1}}{k!}$.

性质1.8. 固定k, 随着$n \to \infty$ 有 $P_k(n) \to \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$ 成立.

将n个相同的球, 分入m个相同的箱子, 每个箱子至少有1球, 一共有$P_m(n)$种放法. 如果不限制每个箱子中球的个数, 那么有$\sum_{k=1}^{n}$种放法. 至此完成十二路的证明.

对于n个(相同/不同)的球放入m个(相同/不同)的箱子, 有如下结论:

每个箱子中球的个数	不限	≤ 1	≥ 1
n个不同的球, m个相同的箱子	$\sum_{k=1}^{m} p_k(n)$	$\{^{1,n\leq m}_{0,n>m}$	$p_m(n)$

2 条件概率与独立性

2.1 条件概率

2.2 独立性