2 条件概率与独立性

2.1 条件概率

2.1.1 条件概率

在解决很多实际的概率问题时, 往往需要考虑在某些附加信息(条件)下的事件发生的概率. 通常记事件A发生的条件下事件B发生的概率为$P(B|A)$, 称为事件A条件下事件B的概率.

例2.1. 投掷一枚骰子后观察点数. 事件B表示观察到3点, 事件A表示观察到奇数点, 求$P(B), P(B|A)$.

解. 整个样本空间$\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$, 以及事件$B = \{3\}$和事件$A = \{1, 3, 5\}$. 根据古典概型得到

$$P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

□

条件概率的本质: 缩小了有效的样本空间. 下面给出条件概率的形式化定义.

定义2.1. 设A, B为同一空间的两个随机事件且$P(A) > 0$, 称$P(B|A) = P(AB)/P(A)$为事件A发生的条件下事件B发生的概率, 简称**条件概率**.

若事件A发生的条件下事件B发生, 则试验结果必为AB. 由于A发生的条件下考虑B事件的发生, 因此将A看作新的样本空间, 称为缩减的样本空间. 下面给出条件概率的性质:

- 有界性: $0 \le P(B|A) \le 1$

  Proof. 由$AB \subset A$, 有$0 \le P(AB) \le P(A)$, 根据$P(A) > 0$得到$0 \le \frac{P(AB)}{P(A)} \le 1$. □

- 规范性：$P(\Omega|A) = 1$

  Proof. 由$\Omega \cap A = A$得$P(\Omega|A) = \frac{P(A\Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$. □

- 容斥原理: $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$.

  Proof. 根据条件概率的定义有$P(B_1 \cup B_2|A) = P((B_1 \cup B_2) \cap A)/P(A)$, 根据事件的分配率和容斥原理有

  $$P((B_1 \cup B_2) \cap A) = P(AB_1 \cap AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) - P(AB_1AB_2) = P(AB_1B_2),$$

  代入完成证明. □

- 补事件: $P(B|A) = 1 - P(\overline{B}|A)$.

  Proof. 由于事件B和$\overline{B}$互不相容, 有$P(\Omega|A) = 1 = P(B \cup \overline{B}|A) = P(B|A) + P(\overline{B}|A)$. □

- 可列可加性: 设$B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots$是两两互不相容的事件, 则$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$.

  Proof. 由于$B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots$是两两互不相容的事件, 则$AB_1, AB_2, \cdots, AB_i, \cdots$也是两两互不相容的事件, 根据定义有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \frac{P(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i))}{P(A)} = \frac{P(\cup_{i=1}^{\infty} AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

□

例2.2. 一盒子装有4只不同的产品, 其中3只一等品, 1只二等品. 从盒子中不放回取产品两次, 每次任取一只, 设事件A表示第一次拿到一等品, 事件B表示第二次取到一等品, 求$P(B|A)$.

解. [第一种方法] 将3只一等产品分别标为$\{1, 2, 3\}$, 二等品编号4. 事件(i, j)表示第一,二次分别取到第i, j号产品.
$\Omega = \{(i, j), i \neq j\}, |\Omega| = 4 \times 3 = 12,$
$A = \{(i, j), i \neq j, i \neq 4\}, |A| = 3 \times 3 = 9,$
$B = \{(i, j), i \neq j, j \neq 4\}, |B| = 3 \times 3 = 9,$
$AB = \{(i, j), i \neq j, i \neq 4, j \neq 4\}, |AB| = 3 \times 2 = 6.$
所以$P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, P(AB) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$.

[第二种方法: 缩减样本空间] 当第一次取得一等品后剩下2只一等品, 1只2等品, 因此有$P(B|A) = \frac{2}{3}$. □

例2.3. 掷两次均匀的骰子, 已知第一次掷出6点, 问两次掷出点数之和≥ 10的概率.

解. [第一种方法] 首先有样本空间$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, 事件$A = \{(i, j) : i = 6, 1 \leq j \leq 6\}$, 事件$B = \{(i, j) : i + j \geq 10\}$, 事件$AB = \{(6, j) : j = 4, 5, 6\}$, 于是有$P(B|A) = 1/2$.

[第一种方法: 缩减空间] 第一次掷6点的情况下, 第二次掷的样本空间$\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$, 事件$B = \{两次掷的点数之和 \geq 10\} = \{4, 5, 6\}$, 所以$P(B|A) = 1/2$. □

2.1.2 乘法公式

根据条件概率公式$P(B|A) = P(AB)/P(A)$可得

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

由此可推广到多个事件的乘法公式: 若$P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 由定义可得

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}).$$

例2.4. 一批灯泡100只, 其中10只为次品, 其余为正品. 做不放回抽取, 每次抽取一只, 求第三次才是正品的概率.

解. 设事件A_i ={第i次抽到的正品} $(i=1,2,3)$, 事件B ={第3次才抽到的正品}. 于是有$B=\bar{A}_1\bar{A}_2\ A_3$, 以及

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}.$$

□

例2.5. *假设有一串钥匙n把, 只有一把能打开门. 任取一把开门, 用后分开, 求第k次打开门的概率.*

解. [第一种方法: 抽签原理] 第k次打开门的事件由前$k-1$次都没有打开门, 以及第k次打开门的事件构成. 第k次打开门的概率为

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\times\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}.$$

[第二种方法: 乘积公式] 设事件A_i表示第i次不能打开门, 则第k次打开门的事件可以表示为$A_1A_2\cdots A_{k-1}\bar{A}_k$. 于是有

$$\begin{aligned}
&P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A}_k)\\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{k-1}|A_1\cdots A_{k-2})P(\overline{A}_k|A_1A_2\cdots A_k)\\
&= \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

□

习题(Matching问题)**.** *有n对夫妻参加一次活动, 所有夫妻被随机两两分成n组, 每组1男1女, 问n对夫妻恰好两两配对的概率.*

2.1.3 全概率公式(Law of total probability)

全概率公式用于复杂的概率计算, 本质上是加法和乘法的综合运用: 对互不相容的事件A,B, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$; 乘法$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

定义2.2 (样本空间的划分)**.** *若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足: i) 互斥性或互不相容性: $A_i\cap A_j=\emptyset\ (i\neq j)$; ii) 完备性: $\cup_{i=1}^n A_i=\Omega$, 则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为空间Ω的一个划分.*

注1): 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$为样本空间的一个划分, 则每次试验, 事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$有且仅有一事件发生.

注2): 若$n=2$, 则$A_1=\overline{A}_2$, 即A_1,A_2互为补事件, 对立事件.

定理2.1 (全概率公式)**.** *设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为样本空间Ω的一个划分. 对任意事件B, 有*

$$P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i),$$

该公式称为全概率公式.

Proof. 根据事件的分配律可得$B = B\cap\Omega = B\cap(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} BA_i$, 由$A_i\cap A_j = \emptyset$可得$BA_i\cap BA_j = \emptyset$, 即$BA_i$和$BA_j$两两不相容. 由概率的可列可加性得到

$$P(B) = P\left(B\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

□

[直觉解释]: 将事件B看作某一过程的结果, 将$A_1, A_2, \cdots, A_n$看作该过程的若干原因, 如果

i) 每一原因发生的概率已知, 即$P(A)$已知,

ii) 每一原因对结果B的影响已知, 即$P(B|A_k)$已知,

则$P(B)$可求.

例2.6. *有一种同型号产品由甲乙丙三家工厂生产, 其生产的市场份额分别为30%, 50%, 20%, 三家工厂的次品率分别为2%, 1%, 1%. 求这批产品中任取一件是次品的概率.*

解. 设事件$B =${任取一件是次品}, $A_i =${任取一件为第i厂的产品}, ($i =$甲,乙,丙). 所以

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 1.3\%.$$

□

例2.7 (推迟决定问题)**.** *随机抛n次均匀的硬币, 证明正面向上的次数是偶数(奇数)的概率是1/2.*

Proof. [第一种方法: 全概率公式] 令A表示前$n-1$次抛硬币向上的次数为偶数, B表示前n次抛硬币向上的次数为偶数, 则$\bar{A}$表示前$n-1$次抛硬币向上的次数为奇数. 于是有:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{P(A)}{2} + \frac{P(\overline{A})}{2} = \frac{1}{2}.$$

[第二种方法: 直接计算概率] 正面向上的次数是偶数分别是: $0, 2, 4, \ldots, 2k$ $(2k \leq n)$, 于是有

$$\sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{0\leq k\leq n/2} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2}.$$

[第三种方法: 推迟决定原则(Principle of deferred decision)] 无论前$n-1$次抛正面朝上的次数为奇数或偶数, 结果的奇偶性取决于最后一次, 机会各半. □

2.1.4 贝叶斯公式(Bayes' Law)

实际中还存在另一类问题, 已知结果找原因, 因果互换: 即在观察到事件B已发生的条件下, 寻找导致B发生的概率.

定理2.2 (贝叶斯公式(Bayes' law)). *设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分. 若事件$P(B)>0$, 则*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Proof. 由全概率公式可知$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}$. □

[直觉解释]: 将事件B看作某一过程的结果, 将$A_1, A_2, \cdots, A_n$看作过程中的若干原因, 如果

1) 每一原因发生的概率$P(A_i)$已知;

2) 每一原因A_i对结果B的影响已知, 即$P(B|A_i)$已知,

已知事件B已发生, 求事件B由第i个原因引起的概率$P(A_i|B)$.

特别地, 当$n=2$时, 即事件A和$\bar{A}$为Ω的一个划分, 有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}.$$

例2.8. *已知有3家元件厂, 编号分别为$1,2,3$, 它们的次品率分别为$0.02, 0.01, 0.03$, 所占市场份额分别为$0.15, 0.8, 0.05$. 在仓库中随机取一件, 若已知取到的是次品, 求此产品出自三家工厂的概率.*

解. 设事件A_i ={为所需产品来自第i厂} $(i=1,2,3)$, 于是有$P(A_1)=0.15, P(A_2)=0.8, P(A_3)=0.05$. 设事件$B$表示取到次品, 有$P(B|A_1)=0.02$, $P(B|A_1)=0.01$, $P(B|A_1)=0.03$. 根据全概率公式有

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3) = 0.0125.$$

根据贝叶斯公式有

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.15\cdot 0.02}{0.0125} = \frac{30}{125} \\
P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.8\cdot 0.01}{0.0125} = \frac{80}{125} \\
P(A_3|B) &= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05\cdot 0.03}{0.0125} = \frac{15}{125}
\end{aligned}$$

因此次品出自第2工厂的概率最大. □

习题. *已知事件A为病人被诊断为肝癌, 事件C为病人患有肝癌, $P(A|C)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C})=0.9$, $P(C)=0.0004$. 求$P(C|A)$.*

例2.9 (三囚徒问题). *三犯人A, B, C均被判为死刑, 被单独隔离. 法官随机赦免了其中一人, 看守知道谁被赦免但不会说. 犯人A问看守: B和C谁会被判死刑? 看守的策略: 1) 若赦免B, 则说C; 2) 若赦免C, 则说B; 3) 若赦免A, 则以$1/2$的概率说B或C. 看守回答A: 犯人B会被执行死刑. 犯人A兴奋不已, 因为生存的概率为$1/2$. 犯人A将此事告诉犯人C, C同样高兴因为他觉得A的生存几率为$1/3$, 而自己的生存几率为$2/3$. 那么谁错了?*

解. 设事件$A=\{A$被赦免$\}$, 事件$B=\{B$被赦免$\}$, 事件$C=\{C$被赦免$\}$, 由题意可知$P(A)=P(B)=P(C)=1/3$. 设事件D=$\{$看守说B被赦免$\}$, 则有$P(D|A)=1/2$, $P(D|B)=0$, $P(D|C)=1$. 由全概率公式有

$$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=1/2.$$

由贝叶斯公式有

$$P(A|D)=\frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}=\frac{1}{3}\quad P(C|D)=\frac{P(C)P(D|C)}{P(D)}=\frac{2}{3}$$

所以A的推断不正确, C的推断正确. □

例2.10 (三门问题)**.** *美国游戏节目: 参赛者看到三扇关闭的门, 其中一门后面是汽车, 两门后面是山羊, 选中有车的门可赢得汽车. 当参赛者选完一扇门但未开启, 节目主持人开启剩下两门的一门露出山羊. 问题: 参赛者是否要换到另一扇关上的门?*

解. 若不换门, 赢的概率为1/3, 若换门, 赢的概率为2/3. □