这里使用积分换序

$$\begin{aligned}E[\int_0^{+\infty}\mathbb{I}[t<X]dt] &= \int_0^{\infty} f(y)(\int_0^{+\infty}\mathbb{I}[t<X]dt)dy \\ &= \int_0^{\infty}(\int_0^{+\infty} f(y)\mathbb{I}[t<X]dy)dt = \int_0^{+\infty} E[\mathbb{I}[t<X]]dt.\end{aligned}$$

□

习题. 利用此定理计算上例中的期望$E(X)=2/3$.

推论4.1. 对任意非负函数$g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和随机变量$X$, 有$E[g(X)]=\int_0^{+\infty}P[g(X)>t]dt$.

定义4.4. 对于连续型随机变量X, 设其密度函数为$f(x)$, 若$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt$收敛, 称$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt$为$X$的方差, 记为$Var(X)$, 即

$$Var(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt.$$

性质4.4. *i)* 对任意随机变量X, 有$Var(X)=E[X-E(X)]^2=E[X^2]-(E(X))^2$; *ii)* 对任意参数$a,b$和随机变量$X$, 有$Var(aX+b)=a^2Var(X)$.

定理4.3 (Bhatia-Davis不等式)**.** 对任意随机变量$X\in[a,b]$, 有

$$Var(X)\le(b-E(X))(E(X)-a)\le(b-a)^2/4.$$

Proof. 对任意$X\in[a,b]$, 有

$$(b-X)(X-a)\ge 0\Rightarrow x^2\le(a+b)x-ab$$

两边同时取期望有$E(X^2)\le(a+b)E(X)-ab$, 从而得到

$$Vax(X)=E(X^2)-(E(X))^2\le(a+b)E(X)-ab-E(X^2)=(b-E(X))(E(X)-a).$$

设函数$g(t)=(b-t)(t-a)\ (t\in(a,b))$, 根据二次函数的性质求解最大值可得$f(t)\le(b-a)^2/4$. □

4.2 常用连续型随机变量

本章介绍三种常用连续型随机变量.

4.2.1 均匀分布(uniform distribution)

给定区间$[a,b]$, 考虑一个随机变量X, 其落入区间$[a,b]$内任何一个点的概率相等, 即均匀分布:

定义4.5. 若随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & 其它\end{cases}$, 称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, 记 $X\sim U(a,b)$.

首先验证密度函数, 对任意$x\in\mathbb{R}$, 有$f(x)\geq 0$, 满足非负性; 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{a}f(t)dt+\int_{a}^{b}f(t)dt+\int_{b}^{+\infty}f(t)dt=\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt=1.$$

几何解释: 如果$X\sim U(a,b)$, 则X落入$[a,b]$内任一子区间的概率与该区间的长度成正比, 与该区间的位置无关. 由分布函数的定义可知均匀分布$X\sim U(a,b)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$$

定理4.4. 若$X\sim U(a,b)$, 则

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Proof. 根据期望和方差的定义有

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}tdt=\frac{a+b}{2}\\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}t^2dt=\frac{a^2+ab+b^2}{3},\end{aligned}$$

从而得到方法

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

例4.8. 设随机变量ξ服从$U(-3,6)$, 试求方程$4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0$有实根的概率.

解. 易知ξ的概率密度函数$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{9} & x\in[-3,6]\\ 0 & 其它\end{cases}$, 设$A=$"方程有实根". 于是有

$$\begin{aligned}P(A) &= P((4\xi)^2-4\times 4\times(\xi+2)\geq 0)\\ &= P((\xi+1)(\xi-2)\geq 0)=P(\xi\leq -1)+P(\xi\geq 2)\\ &= \int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}dt+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dt=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

4.2.2 指数分布

定义4.6. 给定常数 $\lambda>0$, 设随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 称$X$服从参数为$\lambda$的指数分布, 记$X\sim e(\lambda)$.

首先验证密度函数: 任意$x\in\mathcal{R}$, 有$f(x)\ge 0$非负性成立; 进一步有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt=[-e^{-\lambda t}]_0^\infty=1.$$

对于指数函数的分布函数: 当$x\le 0$时有$F(x)=0$; 当$x>0$时,

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda x}.$$

定理4.5. 若随机变量$X\sim e(\lambda)$, 则

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Proof. 根据连续函数的定义有

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=[-te^{-\lambda t}]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=-\frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda t}]_0^\infty=\frac{1}{\lambda},\\ E(X^2)&=\lambda\int_0^\infty t^2e^{-\lambda t}dt=[-t^2e^{-\lambda t}]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda t}2tdt\\ &=-\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty tde^{-\lambda t}=-\frac{2}{\lambda}[te^{-\lambda t}]_0^\infty+\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{\lambda^2},\end{aligned}$$

于是得到$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/\lambda^2$. □

定理4.6 (指数分布的无记忆性)**.** 给定常数$\lambda>0$, 若随机变量$X\sim e(\lambda)$, 则对任意$s>0,t>0$, 有

$$P(X>s+t|X>t)=P(X>s).$$

Proof. 根据指数分布函数的性质: 对任意 $x>0$, 有 $P(X>x)=1-F(x)=e^{-\lambda x}$, 从而直接验证$P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$. □

指数分布是/ 一具有无记忆性的连续型随机变量.

例4.9. 打一次公用电话所用时间$X\sim e(\lambda)$, $\lambda=\frac{1}{10}$. 如果某人刚好在你前面使用公用电话, 求你需等待$10-20$分钟的概率.

解. 根据指数分布函数有$P(10\le X\le 20)=F(20)-F(10)=e^{-1}-e^{-2}\approx 0.2325$. □

4.2.3 正态分布

定义4.7. 给定常数$u \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, 如果随机变量X的密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(x \in \mathbb{R})$, 称$X$服从参数为$(\mu, \sigma^2)$的正态分布, 又被成为高斯分布, 记$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
特别地, 若$\mu = 0$, $\sigma = 1$, 称$\mathcal{N}(0, 1)$为标准正态分布, 其密度函数为$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

验证密度函数: 对任意$x \in \mathbb{R}$, 有$f(x) \geq 0$非负性成立; 下面验证标准正太分布规范性:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}rdr = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}d\frac{r^2}{2} = 2\pi,$$

这里使用极坐标变换.

习题. 证明$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt = 1$.

下面考虑正太分布密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$的图形:

1) 关于直线$x = \mu$对称, 即$f(\mu - x) = f(\mu + x)$.
2) 当$x = \mu$时取最大值, $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
3) $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}((x-\mu)^2 - \sigma^2)$, 其拐点为$x = \mu \pm \sigma$. $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 0$, 渐近线为$y = 0$.
4) 当σ固定时, 改变μ的值, $f(x)$沿x轴左右平行移动, 不改变其形状.
5) 当μ固定时, 改变σ的值, $f(x)$的最大值$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. 所以$\sigma$越小, 图形越陡, x落入μ附近的概率越大. 反之, σ越大, 图形越平坦, x落入μ附近的概率越小.

根据分布函数的定义有正太分布$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

定理4.7. 若$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$; 反之, 若$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则$\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Proof. Y的分布函数

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X - \mu \leq y\sigma] = P[X \leq y\sigma + \mu] = \int_{-\infty}^{\mu+y\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

令$x = (t-\mu)/\sigma$, 进一步得到

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

从而得到$Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. □

定理4.8. 若$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 则$E(X) = 0$和$Var(X) = 1$; 若$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$E(Y) = \mu$和$Var(Y) = \sigma^2$.

Proof. 如果$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0$$

因为奇函数在对称的区间上积分为0. 进一步有

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t de^{-t^2/2} = \left[te^{-t^2/2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

如果$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$(Y-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$, 于是有

$$0 = E((Y-\mu)/\sigma) = (E(Y)-\mu)/\sigma \quad \Rightarrow \quad E(Y) = \mu,$$
$$1 = \mathrm{Var}((Y-\mu)/\sigma) = \mathrm{Var}(Y)/\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.$$

□

定理4.9. *若$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 对任意$\epsilon > 0$, 有*

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2};$$

[Mill 不等式] 若$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 对任意$\epsilon > 0$, 有

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \min\left\{1, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\epsilon^2/2}}{\epsilon}\right\};$$

Proof. 对第一个不等式, 我们有

$$P(X \geq \epsilon) = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+\epsilon)^2/2} dx \leq e^{-\epsilon^2/2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} e^{-\epsilon^2/2}.$$

对于Mill不等式, 首先由$\mathcal{N}(0,1)$的密度函数$f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{(}2\pi)$可以$f'(x) = xf(x)$, 进一步有

$$P(|X| \geq \epsilon) = 2\int_{\epsilon}^{\infty} f(t) dt = 2\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{tf(t)}{t} dt \leq 2\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f'(t)}{\epsilon} dt = \frac{2}{\epsilon} \left[f(t)\right]_{\epsilon}^{+\infty} = \frac{2}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon^2/2}.$$

□

对$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 由于其分布函数$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$无闭式解, 可将$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$转为为标准正太分布$\mathcal{N}(0,1)$, 设$\mathcal{N}(0,1)$的分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

可以通过查表或计算机计算. 对于正太分布$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 在工程应用中, 一般通常认为

$$P(|X-\mu| \leq 3\sigma) \approx 1.$$

例4.10. *如果$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 求概率$P(a \leq X \leq b)$.*

解. 将$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$转为为标准正太分布$\mathcal{N}(0,1)$, 即

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

□