4.3 随机变量的函数的分布

前面研究了连续型随机变量, 实际中我们可能对随机变量的函数更感兴趣.

设X为随机变量, $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为一函数, 则$Y=g(X)$也是一随机变量, 本节主要研究连续型随机变量函数. 设X为连续型随机变量, 其密度函数为$f_X(x)$, 设$Y=g(X)$是X的函数, 也可看作随机变量, 问题: 如何求解$f_Y(y)$?

求解思路:

- 先求解$Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx$.
- 利用分布函数和概率密度之间的关系求解密度函数$f_Y(y)=F'_Y(y)$.

例4.11. *设连续型随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases}x/8 & 0<x<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 求$Y=2X+8$的密度函数.*

解. 首先求解分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)=P(X\le\frac{y-8}{2})=F_X(\frac{y-8}{2})$, 于是得到密度函数

$$f_Y(y)=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}=\begin{cases}\frac{y-8}{32} & \frac{y-8}{2}\in[0,4]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

□

根据积分求导公式, 如果$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$, 那么$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$.

例4.12. *设X的概率密度为$f_X(x)$, 求$Y=X^2$的概率密度.*

解. 首先有分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$. 当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0$; 当$y>0$时,

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx,$$

进一步得到密度函数

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

最后得到

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(-\sqrt{y})+f_X(\sqrt{y})) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

□

习题. *已知密度函数$f_X(x)$, 求$Y=|X|$的概率密度$f_Y(y)$.*

下面给出一定理, 在满足定理条件时直接写出概率密度函数.

定理4.10. *设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$ $(X \in \mathbb{R})$, 函数 $y = g(x)$ 处处可导且严格单调 (即 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$). 令其反函数 $x = g^{-1}(y) = h(y)$, 则 $Y = g(X)$ 的密度函数为*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & y \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

此定理可推广至区间函数$f_X(x)$ $(x \in [a,b])$, 上述定理依旧成立, 此时$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$ 以及$\beta = \max\{g(a), g(b)\}$.

Proof. 证明思路类似与前面的求解, 不妨假设$g'(x) > 0$ (同理考虑$g'(x) < 0$), 其反函数$x = h(y)$也严格单调, 且$g(x) \in [\alpha, \beta]$. 因此, 当$y \le \alpha$ 时, y 有$F_Y(y) = 0$; 当$y \ge \beta$时, 有$F_Y(y) = 1$; 当$\alpha < y < \beta$时,

$$F_Y(y) = P(g(X) < y) = P(X \le h(y)) = F(h(y)).$$

于是有$f_Y(y) = F'(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$. □

定理4.11. *设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = aX + b$ $(a \ne 0)$ 服从正太分布 $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.*

Proof. 设$g(x) = ax + b$, 可得$\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, 则$g(x)$的反函数$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, 以及$h'(y) = \frac{1}{a}$. 得到

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{y-b}{a} - \mu)^2)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-(y-b-a\mu)^2/2a^2\sigma^2}$$

由此证明$aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. □

习题. *对数正态分布: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 证明$Y = e^X$的概率密度函数*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} y\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

定理4.12. *设随机变量X的分布函数是严格单调的连续函数, 则$Y = F(X) \sim U(0, 1)$.*

Proof. 令$Y = F(X)$的分布函数为$G(y)$, 则

$$G(y) = P(Y \le y) = P(F(X) \le y),$$

由$F(x) \in [0, 1]$, 所以当$y < 0$时, $G(y) = 0$; 当$y \ge 1$时, $G(y) = 1$; 当$y \in [0, 1]$ 时, 由于$F(X)$严格单调, 所以$F^{-1}(y)$存在且严格单调, 于是有$G(y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$. 于是得到分布函数

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y \ge 1. \end{cases},$$

以及密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in [0,1] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

□

Pascal/负二项分布

在多次Bernoulli试验中, X表示事件A第r次成功发生的试验次数, 则X取值$r, r+1, r+2, \cdots$, 于是得到其分布列为

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}\cdot p=\binom{n-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}, \quad n=r, r+1, r+2, \cdots.$$

证明:

$$\sum_{n=r}^{\infty}P(X=n)=1; \quad E(X)=\frac{r}{p}; \quad Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Proof. 设$q=1-p$, 利用泰勒展式可得

$$p^{-r}=(1-q)^{-r}=\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}q^t$$

另一方面有

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}=p^r\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r},$$

设$n-r=t$, 有

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}=p^r\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}(1-p)^{t}=p^r\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}q^t=p^rp^{-r}=1.$$

对于期望$E(X)$有

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=r}^{\infty}n\cdot P(X=n)=\sum_{n=r}^{\infty}n\binom{n-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}\\ &= \frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=1.$$

类似地, 对$E(X^2)$有

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{n=r}^{\infty}n^2P(X=n)=\sum_{n=r}^{\infty}n^2\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}(n+1-1)\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r}\\ &= \frac{r(r+1)}{p^2}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}-\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r}=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}.\end{aligned}$$

于是得到

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}=\frac{r(1-p)}{p^2}.$$

□

5 多维随机变量及其分布

实际问题中很多随机现象是由两个或多个随机因素造成的, 需用多个随机变量描述. 例如:

i) 导弹攻击点的坐标(经度、纬度)

ii) 学生的高考成绩(语文、数学、英语等)

定义5.1. 设随机试验的样本空间是Ω, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$, 定义在Ω上的随机变量. 由它们构成的向量(X, Y)称为二维随机变量.

二维随机向量又称为二维随机变量; 将(X, Y)看作一个整体, 不能分开看待; 几何上, (X, Y)可看作平面上的随机点.

5.1 基本概念与性质

定义5.2 (分布函数)**.** 设(X, Y)是一个二维随机变量, 对任意实数对(x, y), $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$称为二维随机变量$(X, Y)$的分布函数, 或称为随机变量$X$和$Y$的联合分布函数.

几何意义: $F(x, y)$表示点(X, Y)落入以(x, y)为右上定点的无穷矩形的概率.

1) 分布函数$F(x, y)$对每个变量单调不减: 固定y, 当$x_1 > x_2$时, 有$F(x_1, y) \geq F(x_2, y)$; 固定x, 当$y_1 > y_2$时, 有$F(x, y_1) \geq F(x, y_2)$.

2) 分布函数$F(x, y) \in [0, 1]$且对任意$x, y \in \mathbb{R}$, $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

3) 分布函数$F(x, y)$关于每个变量右连续.

由分布函数推导概率的公式:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

随机变量(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)$, 如果我们将随机变量X和Y单独分别看到, 则其分别为随机变量, 下面研究随机变量X和Y的分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

定义5.3. 对二维随机变量(X, Y), 其联合分布函数为$F(x, y)$, 称

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, y < +\infty) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y),$$

为随机变量X的边缘分布函数.

类似定义随机变量Y的边缘分布函数为:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y \leq y, x < +\infty) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y).$$

例5.1. 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})(x,y\in\mathbb{R})$. 求随机变量$X$与$Y$的边缘分布函数以及概率$P(Y>3)$.

解. 由分布函数的性质有

$$\begin{aligned}1 &= F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})\\ 0 &= F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})\\ 0 &= F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})\end{aligned}$$

求解可得

$$C=\frac{\pi}{2},B=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

从而得到$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$, 进一步得到

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$$

同理可得

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$$

最后得到

$$P(Y>3)=1-P(Y\le 3)=1-F_Y(3)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)=\frac{1}{4}.$$

□

定义5.4. 若X,Y为随机变量, 对任意$x,y\in\mathbb{R}$, 事件$X\le x$和$Y\le y$相互独立, 即

$$P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x)\cdot P(Y\le y)\quad\Leftrightarrow\quad F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

称X与Y相互独立.

定理5.1. 设随机变量X与Y相互独立, $f(x)$和$g(y)$是连续或分段连续函数, 则$f(X)$与$g(Y)$也相互独立.

例如: 随机变量X与Y相互独立, 则X^2与Y^3相互独立, $\sin X$与$\cos Y$相互独立.

5.2 二维离散型随机变量

定义5.5. 若二维随机变量(X,Y)的取值是有限个或无限可列的, 称(X,Y)为二维离散型随机变量.

设离散型随机变量X,Y的取值分别为$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$, 称

$$p_{ij}=p(X=x_i,Y=y_j)$$

为(X,Y)的联合分布列. 由分布列的性质可知$p_{ij}\ge 0$和$\sum_{i,j}p_{ij}=1$.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

已知随机变量(X,Y)的联合分布列, 讨论随机变量X和Y各自的分布列, 即边缘分布列. 首先讨论X的边缘分布列

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$$

同理可得随机变量Y的边缘分布列

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$$

为什么称之为“边缘”?

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例5.2. 现有$1,2,3$三个数, X表示从这三个数中随机地抽取一个整数, Y表示从1到X中随机抽取一个数. 求(X,Y)的联合分布列和边缘分布列.

解. 由题意可知随机变量X和Y的取值为$1,2,3$, 当$X=1$时, $Y=1$; 当$X=2$时, Y等可能性取1, 2; 当$X=3$时, Y等可能性取1, 2, 3. 于是有

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	1/3	0	0	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
3	1/9	1/9	1/9	1/3
$p_{\cdot j}$	11/18	5/18	1/9	1

□

定义5.6. 对离散型随机变量(X,Y), 若对所有(x_i,y_j), 有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),\quad 即\quad p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

称随机变量X与Y独立.

习题. 对二维离散随机变量(X,Y), 如果对任何(x_i,y_j), 有$F(x_i,y_j)=F_X(x_i)F_Y(y_j)$成立, 则有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j).$$

定理5.2. 若X和Y独立, 则对任意集合$A\in\mathbb{R},B\in\mathbb{R}$, 有事件$X\in A$和$Y\in B$独立.

例5.3. 设离散型X,Y独立, 求解(X,Y)的联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$p_{\cdot j}$	1/6			

例5.4. 将两个球A,B放入编号为$1,2,3$的三个盒子中, 令X : 放入1号盒的球数, Y : 放入2号盒的球数. 判断X和Y是否独立.

解. 由题意可知

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$p_{\cdot j}$	4/9	4/9	1/9	

由此可到$P(X=2,Y=2)=0\neq P(X=2)P(Y=2)$, 所以$X$和$Y$不独立. □

定义5.7. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为离散型随机变量, 对$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n$有$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i)$, 称$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立*(mutually independent)*. 若$\forall i\neq j\in[n]$, 有X_i和X_j独立, 称$X_1,X_2,\cdots,X_n$两两独立*(pairwise independent)*.

5.3 二维连续型随机变量

定义5.8. 设二维随机变量的分布函数为$F(x,y)$, 如果存在二元非负可积函数$f(x,y)$, 使得对任意实数(x,y)有$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(u,v)dudv$, 称$(X,Y)$为二维连续型的随机变量, 称$f(x,y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的概率密度, 或称为随机变量$X$和$Y$的联合概率密度.

根据定义, 很容易得到概率密度函数$f(x,y)$的如下性质:

1) $p(x,y)\geq 0$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$.

3) $f(x,y)$在(x,y)连续, 则$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

4) G为平面上的一个区域, 则点(X,Y)落入G的概率为

$$P((X,Y)\in G)=\int\int_G p(x,y)dxdy$$

.

例5.5. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-(3x+4y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求$P(0<X<1,0<Y<2)$.

解. 有概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ce^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{c}{12},$$

由此可得$c=12$. 进一步可得

$$P(0<X<1,0<Y<2)=12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy=(1-e^{-3})(1-e^{-8}).$$

□

习题. 二维随机变量(X,Y)密度函数$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy & 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$. 求$P(X+Y\geq 1)$.

如果已知二维随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)$, 下面考虑随机变量X和Y的边缘概率密度. 由前面的知识可知X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t,y)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy)dx.$$

从而得到X的边缘密度为

$$f_X(x)=F'_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy.$$

同理Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

定理5.3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 随机变量X和Y的边缘概率密度为$f_X(x)$和$f_Y(y)$, 如果随机变量X和Y独立, 则有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

Proof. 由二维连续型随机变量独立性定义有$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 其等价于

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)dudv$$

对上式两边同时求导有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. □

例5.6. 设二维随机变量的密度函数$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$. 问$X$与$Y$是否独立.

解.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=c\int_{0}^{+\infty}dy\int_{0}^{y}xe^{-y}dx=c.$$

当$x>0$时:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty}xe^{-y}dy=xe^{-x}.$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

. 当$y>0$时:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}xe^{-y}dx=\frac{1}{2}y^2e^{-y}.$$

□

习题. 设(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$. 求$P(X\le\frac{1}{2})$.

解. 当$0\le x\le 1$, $f_X(x)=4x(1-x^2)$. 所以$P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-x^2)dx=\frac{7}{16}$. □

例5.7. 设X与Y相互独立, X服从$[-1,1]$均匀分布, Y服从参数为$\lambda=2$的指数分布, 求$P(X+Y\le 1)$.

解. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[-1,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$. 因为$X,Y$相互独立, 所以

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y} & -1\le x\le 1, y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}.$$

所以

$$P(X+Y\le 1)=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x}e^{-2y}dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}.$$

. □