定义5.6. 对离散型随机变量(X,Y), 若对所有(x_i,y_j), 有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j), \quad \text{即} \quad p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

称随机变量X与Y独立.

习题. 对二维离散随机变量(X,Y), 如果对任何(x_i,y_j), 有$F(x_i,y_j)=F_X(x_i)F_Y(y_j)$ 成立, 则有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j).$$

定理5.2. 若X和Y独立, 则对任意集合$A\in\mathbb{R},B\in\mathbb{R}$, 有事件$X\in A$和$Y\in B$独立.

例5.3. 设离散型X,Y独立, 求解(X,Y)的联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$p_{\cdot j}$	1/6			

例5.4. 将两个球A,B放入编号为$1,2,3$的三个盒子中, 令X : 放入1号盒的球数, Y : 放入2号盒的球数. 判断X和Y是否独立.

解. 由题意可知

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$p_{\cdot j}$	4/9	4/9	1/9	

由此可到$P(X=2,Y=2)=0\neq P(X=2)P(Y=2)$, 所以$X$和$Y$不独立. □

5.3 二维连续型随机变量

定义5.7. 设二维随机变量的分布函数为$F(x,y)$, 如果存在二元非负可积函数$f(x,y)$, 使得对任意实数(x,y)有$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$, 称$(X,Y)$为二维连续型随机变量, 称$f(x,y)$称为二维随机变量$(X,Y)$的概率密度, 或称为随机变量$X$和$Y$的联合概率密度.

根据定义, 很容易得到概率密度函数$f(x,y)$的如下性质:

非负性 1) $p(x,y)\geq 0$.

规范性 2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$.

f性质 3) $f(x,y)$在(x,y)连续, 则$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

计算概率 4) G为平面上的一个区域, 则点(X,Y)落入G的概率为

$$P((X,Y)\in G)=\int\int_G p(x,y)dxdy$$

.

例5.5. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求$P(0<X<1,0<Y<2)$.

解. 有概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ce^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{c}{12},$$

由此可得$c=12$. 进一步可得

$$P(0<X<1,0<Y<2)=12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy=(1-e^{-3})(1-e^{-8}).$$

□

习题. 二维随机变量(X,Y)密度函数$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$. 求$P(X+Y\ge 1)$.

给定概率密度$f(x,y)$, 下面考虑随机变量X和Y的边缘概率密度, 其定义如下:

定义5.8. 二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 则随机变量X和Y的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

另一个变量从负无穷到正无穷积分

边缘概率密度的定义完全由边缘分布的定义导出, 即由前面的知识可知X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dt=\int_{-\infty}^{x}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dy)dt.$$

从而得到X的边缘密度为

$$f_X(x)=F'_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy.$$

例5.6. 设(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$. 求$P(X\le\frac{1}{2})$.

解. 当$0\le x\le 1$, $f_X(x)=4x(1-x^2)$. 所以$P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-x^2)dx=\frac{7}{16}$. □

关于连续随机变量的独立性, 有如下性质:

定理5.3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 随机变量X和Y的边缘概率密度为$f_X(x)$和$f_Y(y)$, 如果随机变量X和Y独立, 则有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

Proof. 由二维连续型随机变量独立性定义有$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 其等价于

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx\int_{-\infty}^{y}f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)dudv$$

对上式两边同时求导有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. □

例5.7. 设二维随机变量的密度函数$f(x,y)=\begin{cases}cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$. 问$X$与$Y$是否独立.

解.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=c\int_{0}^{+\infty}dy\int_{0}^{y}xe^{-y}dx=c.$$

当$x>0$时:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{x}^{+\infty}xe^{-y}dy=xe^{-x}.$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

. 当$y>0$时:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{0}^{y}xe^{-y}dx=\frac{1}{2}y^2e^{-y}.$$

□

例5.8. 设X与Y相互独立, X服从$[-1,1]$均匀分布, Y服从参数为$\lambda=2$的指数分布, 求$P(X+Y\leq 1)$.

解. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[-1,1]\\ 0 & 其它\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$. 因为$X,Y$相互独立, 所以

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y} & -1\leq x\leq 1, y\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}.$$

所以

$$P(X+Y\leq 1)=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x}e^{-2y}dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}.$$

. □

二维正态分布

二维正态分布$(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, 其中

$$\mu=(\mu_x,\mu_y)^\top,\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix}$$

Σ是一个正定的矩阵, 即要求$|\rho|<1$. 正太分布的密度函数为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\xi-\mu)^\top\Sigma^{-1}(\xi-\mu)\right)\qquad \xi=(x,y)^\top\\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}-\frac{2\rho}{\sigma_x\sigma_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right]\right)\end{aligned}$$

其中

$$|\Sigma|=(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2,\quad \Sigma^{-1}=\frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\begin{pmatrix}\sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y\\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1/\sigma_x^2 & -\rho/\sigma_x\sigma_y\\ -\rho/\sigma_x\sigma_y & 1/\sigma_y^2\end{pmatrix}.$$

定理5.4. 对二维正态分布, $\xi=(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, 其中

$$\mu=(\mu_x,\mu_y)^\top,\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y\\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2\end{pmatrix},$$

则边缘分布$X\sim\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$, $Y\sim\mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$.

Proof. 根据正太分布的概率密度定义以及边缘密度公式有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2-2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x\sigma_y}(y-\mu_y)]}dy$$

令$t=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$, 所以$dy=\sigma_y dt$, 则有

$$f_X(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[t-2\rho t(x-\mu_x)^2/\sigma_x]}dy=\frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}.$$

从而完成证明. □

上述定理说明正太分布的边缘分布还是正太分布.

定理5.5. 若二维随机变量$(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, 则$X$与$Y$独立的充要条件为$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{pmatrix}$.

Proof. 必要性证明: 当$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & 0\\ 0 & \sigma_y^2\end{pmatrix}$时, 由上一定理可得:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}[(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2+(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2]}=f_X(x)f_Y(y).$$

充分性证明: 利用定义反证即可. □

多维正太分布

假设n维随机变量$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\top$服从正太分布

$$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)\qquad \mu\in\mathbb{R}^n,\quad \Sigma\in\mathbb{R}^{n\times n}\ \text{正定},$$

其密度函数为

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|}\exp\left(-\frac{1}{2}(\xi-\mu)^\top\Sigma^{-1}(\xi-\mu)\right)$$

其中$\xi=(x_1,\ldots,x_n)^\top$.

定理5.6. 如果正太分布$\xi=(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, 其中

$$\mu=(\mu_x,\mu_y)^\top,\quad \mu_x=(\mu_{x_1},\mu_{x_2},\cdots,\mu_{x_n}),\quad \mu_y=(\mu_{y_1},\mu_{y_2},\cdots,\mu_{y_m}),\quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sum_{xx} & \sum_{yx}\\ \sum_{xy} & \sum_{yy}\end{pmatrix},$$

那么,

- 边缘分布$X\sim N(\mu_x,\Sigma_{xx})$和$Y\sim N(\mu_y,\Sigma_{yy})$
- X与Y独立$\Leftrightarrow\sum=\begin{pmatrix}\sum_{xx} & 0\\ 0 & \sum_{yy}\end{pmatrix}$.