4 连续型随机变量

4.1 概念与性质

4.1.1 分布函数

定义4.1 (分布函数)**.** 任意给定随机变量$X \in \mathbb{R}$, 函数$F(x) = P(X \leq x)$称为X的分布函数.

对任意实数$x_1 < x_2$, 有$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. 分布函数$F(x)$具有如下性质:

i) 单调性: 若$x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \leq F(x_2)$;

ii) 规范性: $F(x) \in [0, 1]$, 且$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

iii) 右连续性: $F(x + 0) = \lim_{\Delta x\to 0^+} F(x + \Delta x) = F(x)$.

任一分布函数必满足以上三性质, 反之亦成立. 满足以上三性质的函数必定是某随机变量的分布函数. 利用分布函数$F(x)$表示随机事件的概率:

$$
\begin{aligned}
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X < a) &= F(a - 0) = \lim_{x\to a^-} F(x) \\
P(X = a) &= F(a) - F(a - 0) \\
P(X \geq a) &= 1 - F(a - 0) \\
P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a - 0).
\end{aligned}
$$

例4.1. 随机变量X的分布列为$\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 2 & 3 \\ \hline P & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array}$. 求$X$的分布函数.

解. 当$x < -1$时, $F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$,
当$-1 \leq x < 2$时, $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$,
当$2 \leq x < 3$时, $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$,
当$x \geq 3$时, $F(x) = 1$. □

例4.2. 在$[0, 1]$区间随机抛一个点, X表示落点的坐标, 假设X落入$[0, 1]$区间内任一子区间的概率与区间长度成正比, 求X的分布函数.

解. 由$X \in [0, 1]$, 当$x < 0$时, $F(x) = 0$, 当$x > 1$时, $F(x) = 1$. 当$x \in [0, 1]$时, $F(x) = P(X \leq x) = kx$, 由$F(1) = 1$, 所以$k = 1$. 综上

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}
$$

□

例4.3. 随机变量X的分布函数$F(X) = A + B\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, 求A, B.

解. 由分布函数的性质有

$$0 = F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} A + B\arctan x = A - \frac{\pi}{2}B,$$

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} A + B\arctan x = A + \frac{\pi}{2}B.$$

所以$A = 1/2, B = 1/\pi$. □

4.1.2 密度函数

定义4.2. 给定随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 如果存在可积函数 $f(x)$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, 称 X 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

性质4.1. 密度函数$f(x)$满足*i)* 非负性: 对任意$x \in \mathbb{R}$, 有$f(x) \geq 0$; *ii)* 规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$;

概率密度满足性质 i) 和 ii), 反之亦成立. 若$f(x)$满足性质 i) 和 ii), 引入$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$是随机变量$X$的分布函数.

对任意$x_1 \leq x_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

几何解释: X落入区间$[x_1, x_2]$的概率等于x轴, $x = x_1$, $x = x_2$, $y = f(x)$所围成的曲边梯形的面积.

定理4.1. 对于连续性随机变量X, 其分布函数$F(x)$在整个实数域上连续; 若$f(x)$在x点连续, 则$F(x)$在x点可导, 且$F'(x) = f(x)$.

Proof. 根据函数的积分性质: 若$f(x)$在$[a, b]$上可积, 则$\phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$在$[a, b]$上连续. 若$f(x)$在$[a, b]$上连续, 则$\phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$在$[a, b]$上可导. □

性质4.2. 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 以及任意连续型随机变量X, 有$P(X = x) = 0$;

Proof. 根据定义有

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x\to 0} P(x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t)dt \leq \lim_{\Delta x\to 0} 2|f(x)|\Delta x \to 0.$$

□

由此可知: 连续型随机变量无需考虑端点, 即

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b),$$

以及概率密度函数不是概率, 即$P(X = x) = 0 \neq f(x)$.

若$f(x)$在点x连续, 由连续性定义有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X\le x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x f(\xi)}{\Delta x}=f(x)\quad (\xi\in(x,x+\Delta x)),$$

由此可得$P(x\le X\le x+\Delta x)\approx f(x)\Delta x$, 若概率密度$f(x)$越大, 则$X$在$x$附近取值的概率越大.

例4.4. 设X是连续型随机变量, 密度函数$f(x)=\begin{cases}c(4x-2x^2) & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 求$P(X>1)$.

解.

$$F(\infty)=1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_0^2 c(4t-2t^2)dt=\frac{8}{3}c,$$

得到$c=3/8$, 所以

$$P(X>1)=\int_1^{\infty}f(t)dt=\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2\frac{8}{3}(4t-2t^2)dt=\frac{1}{2}.$$

□

例4.5 (由密度函数求分布函数)**.** 设X的密度函数$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ a-x & 1<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 求$F(x)$.

解. 根据密度函数的规范性有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^2(a-t)dt=\frac{1}{2}+a-2+\frac{1}{2}=a-1\Rightarrow a=2.$$

进一步得到

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

于是, 当$x\le 0$时, $F(x)=0$; 当$0<x\le 1$时, $F(x)=\int_0^x f(t)dt=x^2/2$; 当$1<x\le 2$时, $F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=1/2+\int_1^x(2-t)dt=-x^2/2+2x-1$; 当$x\ge 2$时, $F(x)=1$. 最后得到

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x^2}{2} & 0<x\le 1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & 1<x\le 2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}.$$

□

例4.6 (由分布函数计算密度函数)**.** 一个靶半径为$2m$的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比. 假设射击都能击中靶. X表示击中点与圆心的距离, 求X的密度函数.

解. 当$x < 0$时, $F(x) = 0$; 当$0 \le x \le 2$时, $F(x) = P(X \le x) = P(0 \le X \le x) = kx^2$. 由$F(2) = 1 = 4k$可得$k = 1/4$, 此时$F(x) = x^2/4$; 当$x > 2$时, $F(x) = 1$. 于是有X的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

□

4.1.3 连续型随机变量的期望和方差

定义4.3. *设连续型随机变量X的密度函数为$f(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$绝对收敛, 称$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$为$X$的期望, 记为$E(X)$, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.*

与离散性随机变量一致, 有如下性质:

性质4.3. *i) 对任意任意常数a, b和随机变量X, 有$E(aX + b) = aE(X) + b$;*
ii) 若X的密度函数为$f(x)$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$绝对可积, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt;$$

iii) 对连续函数$g_1(x), \ldots, g_n(x)$和常数$c_1, \ldots, c_n$), 有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(g_i(X)).$$

例4.7. *设随机变量X的密度函数为$f(x) = \begin{cases} cx & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 求$E(X^m)$, 其中$m$为正整数.*

解. 由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, 可解$c = 2$, 所以

$$E(X^m) = \int_0^1 t^m \cdot 2tdt = 2\int_0^1 t^{m+1}dt = \frac{2}{m+2}.$$

由此可得$E(X) = 2/3$以及$E(X^2) = 1/2$. □

定理4.2. *若随机变量X非负, 有$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > t)dt$.*

Proof. 容易得到

$$X = \int_0^X 1dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{I}[t < X]dt,$$

这里$\mathbb{I}[\cdot]$表示指示函数, 如果论断为真, 其值为1, 否则为0. 于是得到

$$E[X] = \underbrace{E[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}[t < X]dt] = \int_0^{+\infty} E[\mathbb{I}[t < X]]dt}_{\text{积分换序}} = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt.$$

这里使用积分换序

$$\begin{aligned} E[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}[t<X]dt] &= \int_0^{\infty} f(y)(\int_0^{+\infty} \mathbb{I}[t<X]dt)dy \\ &= \int_0^{\infty}(\int_0^{+\infty} f(y)\mathbb{I}[t<X]dy)dt = \int_0^{+\infty} E[\mathbb{I}[t<X]]dt. \end{aligned}$$

□

习题. 利用此定理计算上例中的期望$E(X)=2/3$.

推论4.1. 对任意非负函数$g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和随机变量$X$, 有$E[g(X)]=\int_0^{+\infty}P[g(X)>t]dt$.

定义4.4. 对于连续型随机变量X, 设其密度函数为$f(x)$, 若$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt$收敛, 称$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt$为$X$的方差, 记为$Var(X)$, 即

$$Var(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-E(X))^2f(t)dt.$$

性质4.4. *i)* 对任意随机变量X, 有$Var(X)=E[X-E(X)]^2=E[X^2]-(E(X))^2$; *ii)* 对任意参数$a,b$和随机变量$X$, 有$Var(aX+b)=a^2Var(X)$.

定理4.3 (Bhatia-Davis不等式)**.** 对任意随机变量$X\in[a,b]$, 有

$$Var(X)\le(b-E(X))\,(E(X)-a)\le(b-a)^2/4.$$

Proof. 对任意$X\in[a,b]$, 有

$$(b-X)(X-a)\ge 0\Rightarrow x^2\le(a+b)x-ab$$

两边同时取期望有$E(X^2)\le(a+b)E(X)-ab$, 从而得到

$$Vax(X)=E(X^2)-(E(X))^2\le(a+b)E(X)-ab-E(X^2)=(b-E(X))(E(X)-a).$$

设函数$g(t)=(b-t)(t-a)$ $(t\in(a,b))$, 根据二次函数的性质求解最大值可得$f(t)\le(b-a)^2/4$. □

4.2 常用连续型随机变量

本章介绍三种常用连续型随机变量.

4.2.1 均匀分布(uniform distribution)

给定区间$[a,b]$, 考虑一个随机变量X, 其落入区间$[a,b]$内任何一个点的概率相等, 即均匀分布:

定义4.5. 若随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & 其它\end{cases}$, 称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布, 记 $X\sim U(a,b)$.

首先验证密度函数, 对任意$x\in\mathbb{R}$, 有$f(x)\geq 0$, 满足非负性; 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{a}f(t)dt+\int_{a}^{b}f(t)dt+\int_{b}^{+\infty}f(t)dt=\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt=1.$$

几何解释: 如果$X\sim U(a,b)$, 则X落入$[a,b]$内任一子区间的概率与该区间的长度成正比, 与该区间的位置无关. 由分布函数的定义可知均匀分布$X\sim U(a,b)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$$

定理4.4. 若$X\sim U(a,b)$, 则

$$E(X)=\frac{a+b}{2},\quad Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Proof. 根据期望和方差的定义有

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}tdt=\frac{a+b}{2}\\ E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}t^2dt=\frac{a^2+ab+b^2}{3},\end{aligned}$$

从而得到方法

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

例4.8. 设随机变量ξ服从$U(-3,6)$, 试求方程$4x^2+4\xi x+(\xi+2)=0$有实根的概率.

解. 易知ξ的概率密度函数$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{9} & x\in[-3,6]\\ 0 & 其它\end{cases}$, 设$A=$"方程有实根". 于是有

$$\begin{aligned}P(A)&=P((4\xi)^2-4\times 4\times(\xi+2)\geq 0)\\ &=P((\xi+1)(\xi-2)\geq 0)=P(\xi\leq -1)+P(\xi\geq 2)\\ &=\int_{-3}^{-1}\frac{1}{9}dt+\int_{2}^{6}\frac{1}{9}dt=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

4.2.2 指数分布

定义4.6. 给定常数 $\lambda > 0$, 设随机变量X的密度函数$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 称$X$服从参数为$\lambda$的指数分布, 记$X \sim e(\lambda)$.

首先验证密度函数: 任意$x \in \mathcal{R}$, 有$f(x) \geq 0$非负性成立; 进一步有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = 1.$$

对于指数函数的分布函数: 当$x \leq 0$时有$F(x) = 0$; 当$x > 0$时,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

定理4.5. 若随机变量$X \sim e(\lambda)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Proof. 根据连续函数的定义有

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}, \\ E(X^2) &= \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} 2t dt \\ &= -\frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} t de^{-\lambda t} = -\frac{2}{\lambda}[te^{-\lambda t}]_0^{\infty} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

于是得到$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/\lambda^2$. □

定理4.6 (指数分布的无记忆性)**.** 给定常数$\lambda > 0$, 若随机变量$X \sim e(\lambda)$, 则对任意$s > 0, t > 0$, 有

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Proof. 根据指数分布函数的性质: 对任意 $x > 0$, 有 $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$, 从而直接验证$P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$. □

指数分布是/ 一具有无记忆性的连续型随机变量.

例4.9. 打一次公用电话所用时间$X \sim e(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{10}$. 如果某人刚好在你前面使用公用电话, 求你需等待$10 - 20$分钟的概率.

解. 根据指数分布函数有$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.2325$. □

4.2.3 正态分布

定义4.7. 给定常数$u \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, 如果随机变量X的密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x \in \mathbb{R})$, 称$X$服从参数为$(\mu, \sigma^2)$的正态分布, 又被成为高斯分布, 记$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
特别地, 若$\mu = 0$, $\sigma = 1$, 称$\mathcal{N}(0,1)$为标准正态分布, 其密度函数为$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

验证密度函数: 对任意$x \in \mathbb{R}$, 有$f(x) \geq 0$非负性成立; 下面验证标准正太分布规范性:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2} = 2\pi,$$

这里使用极坐标变换.

习题. 证明$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$.

下面考虑正太分布密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$的图形:

1) 关于直线$x = \mu$对称, 即$f(\mu - x) = f(\mu + x)$.

2) 当$x = \mu$时取最大值, $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

3) $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^5} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ((x-\mu)^2 - \sigma^2)$, 其拐点为$x = \mu \pm \sigma$. $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 0$, 渐近线为$y = 0$.

4) 当σ固定时, 改变μ的值, $f(x)$沿x轴左右平行移动, 不改变其形状.

5) 当μ固定时, 改变σ的值, $f(x)$的最大值$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. 所以$\sigma$越小, 图形越陡, x落入μ附近的概率越大. 反之, σ越大, 图形越平坦, x落入μ附近的概率越小.

根据分布函数的定义有正太分布$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

定理4.7. 若$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$; 反之, 若$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则$\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Proof. Y的分布函数

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X - \mu \leq y\sigma] = P[X \leq y\sigma + \mu] = \int_{-\infty}^{\mu+y\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

令$x = (t-\mu)/\sigma$, 进一步得到

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

从而得到$Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. □

定理4.8. 若$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则$E(X) = 0$和$Var(X) = 1$; 若$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$E(Y) = \mu$和$Var(Y) = \sigma^2$.

Proof. 如果$X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则有
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0$$
因为奇函数在对称的区间上积分为0. 进一步有
$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tde^{-t^2/2}=\left[te^{-t^2/2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=1.$$
如果$Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则$(Y-\mu)/\sigma\sim\mathcal{N}(0,1)$, 于是有
$$0=E((Y-\mu)/\sigma)=(E(Y)-\mu)/\sigma\quad\Rightarrow\quad E(Y)=\mu,$$
$$1=\mathrm{Var}((Y-\mu)/\sigma)=\mathrm{Var}(Y)/\sigma^2\quad\Rightarrow\quad \mathrm{Var}(Y)=\sigma^2.$$
□

定理4.9. *若$X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 对任意$\epsilon>0$, 有*
$$P(X\geq\epsilon)\leq\frac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2};$$
[Mill 不等式] 若$X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 对任意$\epsilon>0$, 有
$$P(|X|\geq\epsilon)\leq\min\left\{1,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\epsilon^2/2}}{\epsilon}\right\};$$

Proof. 对第一个不等式, 我们有
$$P(X\geq\epsilon)=\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+\epsilon)^2/2}dx\leq e^{-\epsilon^2/2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2}.$$
对于Mill不等式, 首先由$\mathcal{N}(0,1)$的密度函数$f(x)=e^{-x^2/2}/\sqrt(2\pi)$可以$f'(x)=xf(x)$, 进一步有
$$P(|X|\geq\epsilon)=2\int_{\epsilon}^{\infty}f(t)dt=2\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{tf(t)}{t}dt\leq2\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f'(t)}{\epsilon}dt=\frac{2}{\epsilon}\left[f(t)\right]_{\epsilon}^{+\infty}=\frac{2}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\epsilon^2/2}.$$
□

对$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 由于其分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$无闭式解, 可将$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$转为为标准正太分布$\mathcal{N}(0,1)$, 设$\mathcal{N}(0,1)$的分布函数为
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
可以通过查表或计算机计算. 对于正太分布$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 在工程应用中, 一般通常认为
$$P(|X-\mu|\leq3\sigma)\approx1.$$
例4.10. *如果$X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 求概率$P(a\leq X\leq b)$.*

解. 将$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$转为为标准正太分布$\mathcal{N}(0,1)$, 即
$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$
□

4.3 随机变量的函数的分布

前面研究了连续型随机变量, 实际中我们可能对随机变量的函数更感兴趣.

设X为随机变量, $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为一函数, 则$Y=g(X)$也是一随机变量, 本节主要研究连续型随机变量函数. 设X为连续型随机变量, 其密度函数为$f_X(x)$, 设$Y=g(X)$是X的函数, 也可看作随机变量, 问题: 如何求解$f_Y(y)$?

求解思路:

- 先求解$Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx$.
- 利用分布函数和概率密度之间的关系求解密度函数$f_Y(y)=F_Y'(y)$.

例4.11. *设连续型随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases}x/8 & 0<x<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 求$Y=2X+8$的密度函数.*

解. 首先求解分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)=P(X\le \frac{y-8}{2})=F_X(\frac{y-8}{2})$, 于是得到密度函数

$$f_Y(y)=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}=\begin{cases}\frac{y-8}{32} & \frac{y-8}{2}\in[0,4]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

□

根据积分求导公式, 如果$F(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt$, 那么$F'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$.

例4.12. *设X的概率密度为$f_X(x)$, 求$Y=X^2$的概率密度.*

解. 首先有分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$. 当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0$; 当$y>0$时,

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx,$$

进一步得到密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

最后得到

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(-\sqrt{y})+f_X(\sqrt{y})) & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

□

习题. *已知密度函数$f_X(x)$, 求$Y=|X|$的概率密度$f_Y(y)$.*

下面给出一定理, 在满足定理条件时直接写出概率密度函数.

定理4.10. *设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$ $(X \in \mathbb{R})$, 函数 $y = g(x)$ 处处可导且严格单调 (即 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$). 令其反函数 $x = g^{-1}(y) = h(y)$, 则 $Y = g(X)$ 的密度函数为*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & y \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

此定理可推广至区间函数$f_X(x)$ $(x \in [a,b])$, 上述定理依旧成立, 此时$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$ 以及 $\beta = \max\{g(a), g(b)\}$.

Proof. 证明思路类似与前面的求解, 不妨假设$g'(x) > 0$ (同理考虑$g'(x) < 0$), 其反函数$x = h(y)$也严格单调, 且$g(x) \in [\alpha, \beta]$. 因此, 当$y \le \alpha$ 时, y 有$F_Y(y) = 0$; 当$y \ge \beta$时, 有$F_Y(y) = 1$; 当$\alpha < y < \beta$时,

$$F_Y(y) = P(g(X) < y) = P(X \le h(y)) = F(h(y)).$$

于是有$f_Y(y) = F'(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$. □

定理4.11. *设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$ 服从正太分布 $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.*

Proof. 设$g(x) = ax + b$, 可得$\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, 则$g(x)$的反函数$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, 以及$h'(y) = \frac{1}{a}$. 得到

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{y-b}{a} - \mu)^2)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-(y-b-a\mu)^2/2a^2\sigma^2}$$

由此证明$aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. □

习题. *对数正态分布: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 证明$Y = e^X$的概率密度函数*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} y\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

定理4.12. *设随机变量X的分布函数是严格单调的连续函数, 则$Y = F(X) \sim U(0, 1)$.*

Proof. 令$Y = F(X)$的分布函数为$G(y)$, 则

$$G(y) = P(Y \le y) = P(F(X) \le y),$$

由$F(x) \in [0, 1]$, 所以当$y < 0$时, $G(y) = 0$; 当$y \ge 1$时, $G(y) = 1$; 当$y \in [0, 1]$ 时, 由于$F(X)$严格单调, 所以$F^{-1}(y)$存在且严格单调, 于是有$G(y) = P(F(X) \le y) = P(X \le F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$. 于是得到分布函数

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y \ge 1. \end{cases},$$

以及密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in [0,1] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

□

Pascal/负二项分布

在多次Bernoulli试验中, X表示事件A第r次成功发生的试验次数, 则X取值$r, r+1, r+2, \cdots$, 于是得到其分布列为

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}\cdot p=\binom{n-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{n-r}, \quad n=r,r+1,r+2,\cdots.$$

证明:

$$\sum_{n=r}^{\infty}P(X=n)=1; \quad E(X)=\frac{r}{p}; \quad Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Proof. 设$q=1-p$, 利用泰勒展式可得

$$p^{-r}=(1-q)^{-r}=\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}q^t$$

另一方面有

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}=p^r\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}(1-p)^{n-r},$$

设$n-r=t$, 有

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}=p^r\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}(1-p)^t=p^r\sum_{t=0}^{\infty}\binom{t+r-1}{r-1}q^t=p^rp^{-r}=1.$$

对于期望$E(X)$有

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=r}^{\infty}n\cdot P(X=n)=\sum_{n=r}^{\infty}n\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}\\ &= \frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}=1.$$

类似地, 对$E(X^2)$有

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{n=r}^{\infty}n^2P(X=n)=\sum_{n=r}^{\infty}n^2\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}(n+1-1)\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}\\ &= \frac{r(r+1)}{p^2}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}p^{r+1}(1-p)^{n-r}-\frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}.\end{aligned}$$

于是得到

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}=\frac{r(1-p)}{p^2}.$$

□