

第七章 复数 (★★)

内容提要

复数绝大部分考题难度都不高，主要考查复数的基本概念和四则运算，下面先梳理相关的基础知识。

1. 复数的概念：形如 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的数叫做复数，其中 i 叫做虚数单位， $i^2 = -1$ ； a 叫做实部， b 叫做虚部（注意，不是 bi 为虚部）。

2. 对于复数 $z = a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ ， z 为实数 $\Leftrightarrow b = 0$ ； z 为虚数 $\Leftrightarrow b \neq 0$ ； z 为纯虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ 。

3. 复数相等：设 $z_1 = a+bi$ ， $z_2 = c+di$ ，其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，则 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ 且 $b = d$ 。

4. 复数的几何意义：复数 $z = a+bi$ 与复平面内的点 $Z(a, b)$ 一一对应，与复平面内的向量 \overrightarrow{OZ} 一一对应。

5. 复数的模：设复数 $z = a+bi$ ，则我们把 \overrightarrow{OZ} 的模叫做 z 的模，记作 $|z|$ ， $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

6. 共轭复数：复数 $z = a+bi$ 的共轭复数为 $a-bi$ ，记作 $\bar{z} = a-bi$ ； $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 。

7. 复数的四则运算：设复数 $z_1 = a+bi$ ， $z_2 = c+di$ ，其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，则

① $z_1 + z_2 = a+bi + c+di = (a+c) + (b+d)i$ ；② $z_1 - z_2 = a+bi - c-di = (a-c) + (b-d)i$ ；

③ $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ；

④ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$ 。

8. 小结论：

① 设 z_1, z_2 为两个复数，则 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ， $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ；（设复数的代数形式，代入此两式即可证明）

② 设 $k \in \mathbf{N}$ ，则 $i^{4k} = 1$ ， $i^{4k+1} = i$ ， $i^{4k+2} = -1$ ， $i^{4k+3} = -i$ ；

③ 请注意， $|z|^2 \neq z^2$ 。（设 $z = a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ ，则 $|z|^2 = a^2 + b^2$ ， $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ ，显然不等）

典型例题

类型 I：复数的四则运算

【例 1】（2022·天津卷）已知 i 是虚数单位，化简 $\frac{11-3i}{1+2i}$ 的结果为_____。

解析：计算复数的除法，可分子分母同乘以分母的共轭复数，将分母实数化，

$$\frac{11-3i}{1+2i} = \frac{(11-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{11-22i-3i+6i^2}{1-4i^2} = \frac{5-25i}{5} = 1-5i.$$

答案：1-5i

【变式】设 i 为虚数单位，已知复数 $z = \frac{5}{a+i}$ 满足 $|z| = \sqrt{5}$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a > 0$ ，则 $z =$ _____。

解法 1：可先计算 z ，再求模，由题意， $z = \frac{5}{a+i} = \frac{5(a-i)}{(a+i)(a-i)} = \frac{5a-5i}{a^2-i^2} = \frac{5a-5i}{a^2+1} = \frac{5a}{a^2+1} - \frac{5}{a^2+1}i$ ①，

所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{5a}{a^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{5}{a^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{25a^2+25}{(a^2+1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{a^2+1}}$, 由题意, $|z| = \sqrt{5}$, 所以 $\frac{5}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$,

结合 $a > 0$ 可得 $a = 2$, 代入①得: $z = 2 - i$.

解法 2: 也可先由模的性质 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 求 $|z|$, $z = \frac{5}{a+i} \Rightarrow |z| = \frac{|5|}{|a+i|} = \frac{5}{\sqrt{a^2+1}}$,

由题意, $|z| = \sqrt{5}$, 所以 $\frac{5}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{5}$, 结合 $a > 0$ 可得 $a = 2$,

故 $z = \frac{5}{a+i} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{4-i^2} = \frac{5(2-i)}{5} = 2-i$.

答案: $2-i$

【例 2】(2021 · 全国甲卷) 已知 $(1-i)^2 z = 3+2i$, 则 $z =$ ()

(A) $-1-\frac{3}{2}i$ (B) $-1+\frac{3}{2}i$ (C) $-\frac{3}{2}+i$ (D) $-\frac{3}{2}-i$

解析: 复数 z 由方程的形式给出, 先由该方程分离出 z , 再进行计算,

因为 $(1-i)^2 z = 3+2i$, 所以 $z = \frac{3+2i}{(1-i)^2} = \frac{3+2i}{1-2i+i^2} = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i)2i}{(-2i) \cdot 2i} = \frac{6i+4i^2}{-4i^2} = \frac{6i-4}{4} = -1+\frac{3}{2}i$.

答案: B

【反思】当复数 z 以方程的形式给出时, 可先分离出 z , 再对另一侧进行化简.

类型 II: 复数代数形式的运用

【例 3】(2022 · 全国乙卷) 已知 $z = 1-2i$, 且 $z + a\bar{z} + b = 0$, 其中 a, b 为实数, 则 ()

(A) $a=1, b=-2$ (B) $a=-1, b=2$ (C) $a=1, b=2$ (D) $a=-1, b=-2$

解析: $z = 1-2i \Rightarrow \bar{z} = 1+2i$, 代入 $z + a\bar{z} + b = 0$ 得: $1-2i + a(1+2i) + b = 0$, 所以 $1+a+b + (2a-2)i = 0$,

两个复数相等, 则实部和虚部对应相等, 右侧的 0 可看成 $0+0 \cdot i$, 故 $\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 2a-2=0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

答案: A

【变式】已知 i 为虚数单位, 复数 z 满足 $|z-2i| = |z|$, 则 z 的虚部为_____.

解析: 所给方程有模, 无法分离出 z , 故设 z 的代数形式, 代入 $|z-2i| = |z|$ 求解,

设 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $z-2i = a+(b-2)i$, 由题意, $|z-2i| = |z|$,

所以 $\sqrt{a^2 + (b-2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, 解得: $b=1$, 故复数 z 的虚部为 1.

答案: 1

【总结】当不便于通过简单的变形分离出复数 z 再计算时, 可考虑设 $z = a+bi$, 翻译已知条件, 建立方程组求出 a 和 b .

类型III：复数的运算性质

【例4】已知 \bar{z} 是复数 z 的共轭复数，则下列式子中与 $z \cdot \bar{z}$ 不相等的是（ ）

- (A) $|\bar{z}^2|$ (B) $|z|^2$ (C) $|z^2|$ (D) \bar{z}^2

解法1：诸多选项涉及复数的模，可用模的运算性质 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 来快速判断选项，

设 $z = a + bi$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，所以 $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，且 $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ ①，

A项， $|\bar{z}^2| = |\bar{z} \cdot \bar{z}| = |\bar{z}| \cdot |\bar{z}| = |\bar{z}|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$ ；

B项，因为 $|z|^2 = a^2 + b^2$ ，结合①知 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ；

C项， $|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2 = a^2 + b^2$ ，结合①知 $|z^2| = z \cdot \bar{z}$ ；

D项， $\bar{z}^2 = (a - bi)^2 = a^2 + b^2 i^2 - 2abi = a^2 - b^2 - 2abi \neq z \cdot \bar{z}$ ，故选D.

解法2：若不熟悉模的性质，也可设复数的代数形式，逐个验证选项，

设 $z = a + bi$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，所以 $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ ，

A项， $|\bar{z}^2| = |(a - bi)^2| = |a^2 + b^2 i^2 - 2abi| = |a^2 - b^2 - 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (-2ab)^2}$
 $= \sqrt{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$ ；

B项， $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$ ；

C项， $|z^2| = |(a + bi)^2| = |a^2 + b^2 i^2 + 2abi| = |a^2 - b^2 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$ ；

D项，判断方法同解法1.

答案：D

【反思】 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ 是共轭复数的重要性质；若遇到拿不准的性质，可设复数的代数形式来检验.

【变式】(2022·全国甲卷)若 $z = -1 + \sqrt{3}i$ ， $\frac{z}{z\bar{z} - 1} =$ （ ）

- (A) $-1 + \sqrt{3}i$ (B) $-1 - \sqrt{3}i$ (C) $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ (D) $-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

解析： $z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow z\bar{z} = |z|^2 = (\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2})^2 = 4$ ，所以 $\frac{z}{z\bar{z} - 1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{4 - 1} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

答案：C

【例5】(多选) 设 z_1, z_2, z_3 为复数， $z_1 \neq 0$ ，下列命题中正确的是（ ）

(A) 若 $|z_2| = |z_3|$ ，则 $z_2 = \pm z_3$

(B) 若 $z_1 z_2 = z_1 z_3$ ，则 $z_2 = z_3$

(C) 若 $\bar{z}_2 = z_3$ ，则 $|z_1 z_2| = |z_1 z_3|$

(D) 若 $z_1 z_2 = |z_1|^2$ ，则 $z_1 = z_2$

解法 1: A 项, $|z_2|=|z_3|$ 可看成复平面内 $|\overrightarrow{OZ_2}|=|\overrightarrow{OZ_3}|$, 但方向未定, 故 $z_2=\pm z_3$ 不一定成立, 举个反例,

取 $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=1+\sqrt{3}i$, 则 $|z_2|=|z_3|=2$, 但 $z_2\neq\pm z_3$, 故 A 项错误;

B 项, 由 $z_1z_2=z_1z_3$ 两端同除以非零复数 z_1 可得 $z_2=z_3$, 故 B 项正确;

C 项, 看到 $|z_1z_2|$, 想到模的性质 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, 因为 $\bar{z}_2=z_3$, 所以 $|\bar{z}_2|=|z_3|$,

又 $|\bar{z}_2|=|z_2|$, 所以 $|z_2|=|z_3|$, 故 $|z_1z_2|-|z_1z_3|=|z_1|\cdot|z_2|-|z_1|\cdot|z_3|=|z_1|(|z_2|-|z_3|)=0$,

所以 $|z_1z_2|=|z_1z_3|$, 故 C 项正确;

D 项, 我们知道, $z_1\cdot\bar{z}_1=|z_1|^2$, 故要使 $z_1z_2=|z_1|^2$, 只需 $\bar{z}_1=z_2$ 即可, 而不是 $z_1=z_2$, 下面举个反例,

取 $z_1=1+i$, $z_2=1-i$, 满足 $z_1z_2=(1+i)(1-i)=1-i^2=2=|z_1|^2$, 但 $z_1\neq z_2$, 故 D 项错误.

解法 2: A、B、D 三项的判断方法同解法 1, 对于 C 项, 也可设复数的代数形式来验证,

设 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, 因为 $\bar{z}_2=z_3$, 所以 $z_3=c-di$,

故 $|z_1z_2|=|(a+bi)(c+di)|=|ac+adi+bci+bdi^2|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2adbc}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,

$|z_1z_3|=|(a+bi)(c-di)|=|ac-adi+bci-bdi^2|=|(ac+bd)+(bc-ad)i|=\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+2acbd+b^2c^2+a^2d^2-2bcad}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$,

所以 $|z_1z_2|=|z_1z_3|$, 故 C 项正确.

答案: BC

【反思】实数方程的一些变形方法也适用于复数方程, 例如在复数方程两端加上或减去相同的复数, 方程依然成立; 在复数方程两端同时乘以相同的复数, 或同时除以相同的非零复数, 方程也依然成立.

类型 IV: 复数的几何意义

【例 6】(2023·新高考 II 卷) 在复平面内, $(1+3i)(3-i)$ 对应的点位于 ()

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

解析: $(1+3i)(3-i)=3-i+9i-3i^2=6+8i$, 所以该复数对应的点为 $(6,8)$, 位于第一象限.

答案: A

【变式】在复平面内, O 为坐标原点, 复数 $z_1=i(-4+3i)$, $z_2=7+i$ 对应的点分别为 Z_1 , Z_2 , 则 $\angle Z_1OZ_2$ 的大小为 ()

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

解析: $\angle Z_1OZ_2$ 可看成 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的夹角, 用夹角余弦公式计算,

由题意, $z_1=i(-4+3i)=-4i+3i^2=-3-4i$, 所以 $\overrightarrow{OZ_1}=(-3,-4)$, 又 $z_2=7+i$, 所以 $\overrightarrow{OZ_2}=(7,1)$,

$$\text{从而 } \cos \angle Z_1 O Z_2 = \frac{\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2}}{|\overrightarrow{OZ_1}| \cdot |\overrightarrow{OZ_2}|} = \frac{-3 \times 7 + (-4) \times 1}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \times \sqrt{7^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } \angle Z_1 O Z_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

答案：C

【例 7】已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $|z|=1$ ，则 $|z+1+i|$ 的最小值为 ()

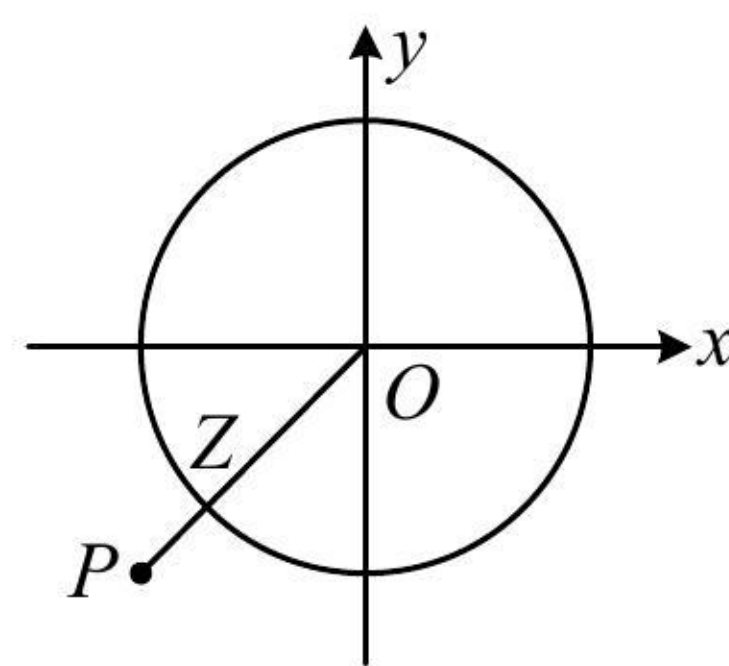
- (A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}-2$ (D) 1

解析：先设 z 的代数形式，将 $|z|=1$ 翻译出来，设 $z=x+yi$ ，则 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ ，所以 $x^2+y^2=1$ ①，

且 $|z+1+i|=|x+1+(y+1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$ ②，由方程①可知复数 z 在复平面上对应的点 $Z(x,y)$ 在单位圆上运动，式②可看成点 Z 与定点 $P(-1,-1)$ 的距离，故画图来看，

如图，因为 $|OP|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ ，所以 $|PZ|_{\min}=\sqrt{2}-1$ ，故 $|z+1+i|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$ 。

答案：A



【反思】遇到模的最值问题，可考虑数形结合来分析。

【变式】(2020·新课标 II 卷) 设复数 z_1 、 z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=2$ ， $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$ ，则 $|z_1-z_2|$ = _____。

解法 1：可设 z_1 的代数形式， z_2 就不用设了，由 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$ 求出 z_2 即可，这样变量的个数少一些，

设 $z_1=x+yi(x,y \in \mathbf{R})$ ，则由 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$ 可得 $z_2=\sqrt{3}-x+(1-y)i$ ，

所以 $z_1-z_2=2x-\sqrt{3}+(2y-1)i$ ，故 $|z_1-z_2|=\sqrt{(2x-\sqrt{3})^2+(2y-1)^2}=\sqrt{4(x^2+y^2)-4(\sqrt{3}x+y)+4}$ ①，

条件中还有 $|z_1|=|z_2|=2$ 没用到，把它翻译出来，

因为 $|z_1|=|z_2|=2$ ，所以 $|z_1|^2=|z_2|^2=4$ ，故 $\begin{cases} x^2+y^2=4 & \text{②} \\ (\sqrt{3}-x)^2+(1-y)^2=4 & \text{③} \end{cases}$ ，

由②③可以解出 x 和 y ，再来算 $|z_1-z_2|$ ，但计算量较大，故尝试把式③化简，看能否整体计算式①，

由③得： $3-2\sqrt{3}x+x^2+1-2y+y^2=4$ ，结合式②整理得： $\sqrt{3}x+y=2$ ④，

此时我们发现把②④整体代入①恰好可求得 $|z_1-z_2|$ ，

所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{4(x^2+y^2)-4(\sqrt{3}x+y)+4}=\sqrt{4 \times 4 - 4 \times 2 + 4}=2\sqrt{3}$ 。

解法 2：求模也可借助图形来分析，先把复数 z_1 、 z_2 在复平面内对应的点设出来，

设复数 z_1 、 z_2 在复平面对应的点为 Z_1 、 Z_2 ，

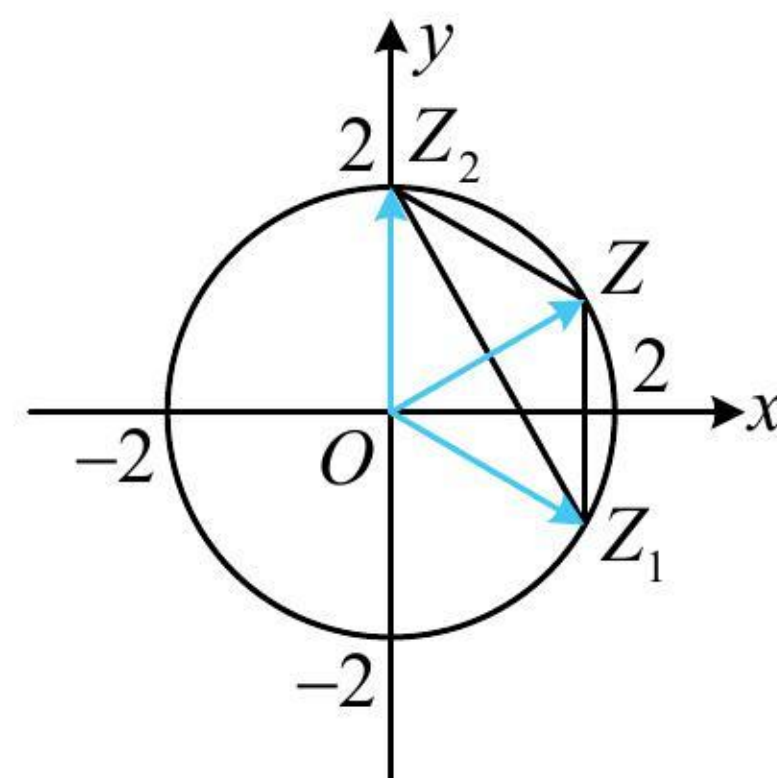
从条件来看， $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的模是已知的，但夹角不知道，夹角由条件 $z_1+z_2=\sqrt{3}+i$ 决定，

因为 $z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i$ ，所以 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = (\sqrt{3}, 1)$ ，故 $|\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}| = 2$ ，

于是问题变成了在 $|\overrightarrow{OZ_1}| = |\overrightarrow{OZ_2}| = |\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}| = 2$ 的条件下，求 $|\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}|$ ，这样图形就能画出来了，

如图， $\triangle OZZ_1$ 和 $\triangle OZZ_2$ 都是边长为 2 的正三角形，所以 $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}| = |\overrightarrow{Z_2Z_1}| = 2\sqrt{3}$ 。

答案： $2\sqrt{3}$



【反思】 对于模的处理，有代数和几何两种思路。本题是近年高考最难的复数题，画图分析显然更优于代数计算，在分析模的时候，可把复数的加减法和向量的加减法对应起来，即 $|z_1 \pm z_2| = |\overrightarrow{OZ_1} \pm \overrightarrow{OZ_2}|$ 。

类型 V：复数的高次方运算

【例 8】 设 i 为虚数单位，则复数 $\frac{1+i}{i^{2023}} = (\quad)$

- (A) $-1+i$ (B) $-1-i$ (C) $1+i$ (D) $1-i$

解析：先化简分母的 i^{2023} ，因为 $i^{2023} = (i^2)^{1011} \times i = (-1)^{1011} \times i = -i$ ，所以 $\frac{1+i}{i^{2023}} = \frac{1+i}{-i} = \frac{(1+i)i}{-i \cdot i} = i + i^2 = -1 + i$ 。

答案： A

【变式】 已知复数 z 满足 $z \cdot \bar{z} = 4$ ，且 $z + \bar{z} + |z| = 0$ ，则 $z^{2022} = (\quad)$

- (A) 1 (B) 2^{2022} (C) -1 (D) -2^{2022}

解析：复数 z 无法直接求出，故可先设复数 z 的代数形式，由已知条件建立方程求出 z ，

设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ ，则 $\bar{z} = a - bi$ ，由题意， $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = 4$ ①，

又 $z + \bar{z} + |z| = 0$ ，所以 $a + bi + a - bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ ，所以 $2a + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ ②，

将①代入②可求得： $a = -1$ ，代回①可求得 $b = \pm\sqrt{3}$ ，所以 $z = -1 \pm \sqrt{3}i$ ，

接下来讨论两种情况，分别计算 z^{2022} ，可先从低次方开始算，

当 $z = -1 + \sqrt{3}i$ 时， $z^2 = (-1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 3i^2 - 2\sqrt{3}i = -2 - 2\sqrt{3}i$ ，

所以 $z^3 = z \cdot z^2 = (-1 + \sqrt{3}i)(-2 - 2\sqrt{3}i) = 2 + 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i - 6i^2 = 8$ ，故 $z^{2022} = (z^3)^{674} = 8^{674} = (2^3)^{674} = 2^{2022}$ ；

当 $z = -1 - \sqrt{3}i$ 时， $z^2 = (-1 - \sqrt{3}i)^2 = 1 + 3i^2 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i$ ，

所以 $z^3 = z \cdot z^2 = (-1 - \sqrt{3}i)(-2 + 2\sqrt{3}i) = 2 - 2\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i - 6i^2 = 8$ ，故 $z^{2022} = (z^3)^{674} = 8^{674} = (2^3)^{674} = 2^{2022}$ ；

综上所述， $z^{2022} = 2^{2022}$ 。

答案： B

【反思】涉及复数的高次方计算，往往先计算低次方，寻找规律.

强化训练

1. (2023·新高考 I 卷·★) 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} =$ ()

- (A) $-i$ (B) i (C) 0 (D) 1

2. (2023·全国乙卷·★) $|2+i^2+2i^3| =$ ()

- (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$

3. (2022·新高考 I 卷·★) 若 $i(1-z)=1$, 则 $z + \bar{z} =$ ()

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

4. (2023·全国甲卷·★) 若复数 $(a+i)(1-ai)=2$, 则实数 $a =$ ()

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. (★) 若复数 $z = \frac{(3i-1)(1-i)}{i^{2023}}$, 则 z 的虚部为_____.

6. (★★) 已知复数 z 满足 $z-i \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{2-z}{z}$ 是纯虚数, 则 $z =$ ()

- (A) $-1-i$ (B) $-1+i$ (C) $1-i$ (D) $1+i$

7. (★) 已知 $z = \frac{2i}{1-i} - 1 + 2i$, 则 z 在复平面内对应的点位于 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

8. (2022 · 山东乳山月考 · ★★★) 已知复数 z 满足 $|z-1| = |z-i|$, 则在复平面内 z 对应的点 Z 的轨迹为 ()

- (A) 直线 (B) 线段 (C) 圆 (D) 等腰三角形

9. (2022 · 安徽肥东期末 · ★★★) 设 \bar{z} 是复数 z 的共轭复数, 若 $\bar{z} \cdot z + 10i = 5z$, 则 $\frac{z}{2+i} =$ ()

- (A) 2 (B) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ (C) 2 或 $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ (D) 2 或 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

《一数·高考数学核心方法》

10. (2022 · 辽宁月考 · ★★★★★) (多选) 若 z_1, z_2 是复数, 则下列命题正确的是 ()

- (A) 若 $z_1 - z_2 > 0$, 则 $z_1 > z_2$
(B) $|z_1 \cdot \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
(C) 若 $z_1 z_2 \neq 0$, 则 $z_1 \neq 0$ 且 $z_2 \neq 0$
(D) 若 $z_1^2 \geq 0$, 则 z_1 是实数

11. (2022 · 福建福州模拟 · ★★★★★) 设 i 为虚数单位, $z \in \mathbf{C}$, 且 $(z-i)(\bar{z}+i)=1$, 则 $|z-3-5i|$ 的最大值是 ()

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8