2023 年高考全国甲卷数学（理）真题

一、单选题

1．设全集$U=\mathrm{Z}$,集合$M=\{x|\ x=3k+1,k\in Z\},N=\{x|\ x=3k+2,k\in Z\}$，$\complement_U(M\cup N)=$（　）

A．$\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$　　　　B．$\{x|\ x=3k-1,k\in Z\}$

C．$\{x|\ x=3k-2,k\in Z\}$　　　　D．$\varnothing$

【答案】A

【分析】根据整数集的分类，以及补集的运算即可解出．

【详解】因为整数集$\mathbf{Z}=\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\,|\,x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\,|\,x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$U=Z$，

所以，$\complement_U(M\cup N)=\{x|x=3k,k\in Z\}$.

故选：A.

2．设$a\in\mathrm{R},(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2,$，则$a=$（　）

A．-1　　　　B．0　　　　C．1　　　　D．2

【答案】C

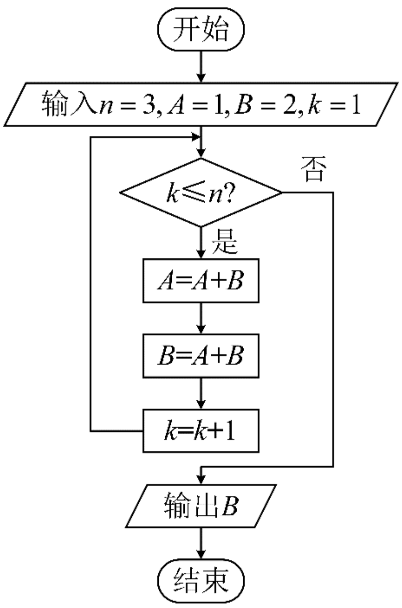
【分析】根据复数的代数运算以及复数相等即可解出．

【详解】因为$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}+a=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2$，

所以$\begin{cases}2a=2\\1-a^2=0\end{cases}$，解得：$a=1$.

故选：C.

3．执行下面的程序框图，输出的$B=$（　）



A．21　　　　B．34　　　　C．55　　　　D．89

【答案】B

【分析】根据程序框图模拟运行，即可解出.

【详解】当$k=1$时，判断框条件满足，第一次执行循环体，$A=1+2=3$，$B=3+2=5$，$k=1+1=2$；

当$k=2$时，判断框条件满足，第二次执行循环体，$A=3+5=8$，$B=8+5=13$，$k=2+1=3$；

当$k=3$时，判断框条件满足，第三次执行循环体，$A=8+13=21$，$B=21+13=34$，$k=3+1=4$；

当$k=4$时，判断框条件不满足，跳出循环体，输出$B=34$.

故选：B.

4．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

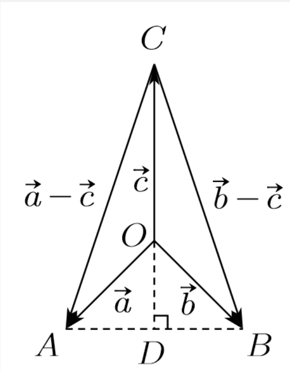
【答案】D

【分析】作出图形,根据几何意义求解.

【详解】因为$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,所以$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$,

即$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}^2$,即$1+1+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$,所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

如图,设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,



由题知,$OA=OB=1,OC=\sqrt{2}$,$\triangle OAB$是等腰直角三角形,

AB边上的高$OD=\frac{\sqrt{2}}{2},AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$CD=CO+OD=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{3},\cos\angle ACD=\frac{3}{\sqrt{10}}$,

$$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=\cos\angle ACB=\cos 2\angle ACD=2\cos^2\angle ACD-1=2\times\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\frac{4}{5}.$$

故选:D.

5．设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前n项和S_n，若$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　）

A．$\frac{15}{8}$　　B．$\frac{65}{8}$　　C．15　　D．40

【答案】C

【分析】根据题意列出关于q的方程,计算出q,即可求出S_4.

【详解】由题知$1+q+q^2+q^3+q^4=5\left(1+q+q^2\right)-4$,

即$q^3+q^4=4q+4q^2$,即$q^3+q^2-4q-4=0$,即$(q-2)(q+1)(q+2)=0$.

由题知$q>0$,所以$q=2$.

所以$S_4=1+2+4+8=15$.

故选:C.

6．某地的中学生中有60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪.在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为（　）

A．0.8　　B．0.6　　C．0.5　　D．0.4

【答案】A

【分析】先算出同时爱好两项的概率,利用条件概率的知识求解.

【详解】同时爱好两项的概率为$0.5+0.6-0.7=0.4$,

记“该同学爱好滑雪”为事件A,记“该同学爱好滑冰”为事件B，则$P(A)=0.5,P(AB)=0.4$,

所以$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$.

故选:A.

7．设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则（　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】B

【分析】根据充分条件、必要条件的概念及同角三角函数的基本关系得解.

【详解】当$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$时，例如$\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=0$但$\sin\alpha+\cos\beta\neq0$,

即$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$推不出$\sin\alpha+\cos\beta=0$；

当$\sin\alpha+\cos\beta=0$时，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=(-\cos\beta)^2+\sin^2\beta=1$,

即$\sin\alpha+\cos\beta=0$能推出$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$.

综上可知，甲是乙的必要不充分条件.

故选：B

8．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，$C$的一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于$A$，$B$两点，则$|AB|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【分析】根据离心率得出双曲线渐近线方程，再由圆心到直线的距离及圆半径可求弦长.

【详解】由$e=\sqrt{5}$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=5$，解得$\frac{b}{a}=2$，

所以双曲线的一条渐近线不妨取$y=2x$，则圆心$(2,3)$到渐近线的距离$d=\frac{|2\times2-3|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

9．现有 5 名志愿者报名参加公益活动，在某一星期的星期六、星期日两天，每天从这 5 人中安排 2 人参加公益活动，则恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式共有（　　）

A．120　　　　B．60　　　　C．30　　　　D．20

【答案】B

【分析】利用分类加法原理，分类讨论五名志愿者连续参加两天公益活动的情况，即可得解.

【详解】不妨记五名志愿者为a,b,c,d,e，

假设a连续参加了两天公益活动，再从剩余的 4 人抽取 2 人各参加星期六与星期天的公益活动，共有$\mathrm{A}_4^2=12$种方法，

同理：b,c,d,e连续参加了两天公益活动，也各有12种方法，

所以恰有 1 人连续参加了两天公益活动的选择种数有$5\times12=60$种.

故选：B.

10．函数$y=f\left(x\right)$的图象由函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到，则$y=f\left(x\right)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为（　　）

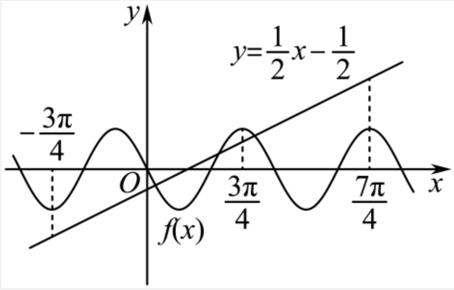
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】C

【分析】先利用三角函数平移的性质求得$f\left(x\right)=-\sin2x$，再作出$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的部分大致图像，考虑特殊点处$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的大小关系，从而精确图像，由此得解.

【详解】因为$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位所得函数为$y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin2x$，所以$f\left(x\right)=-\sin2x$，而$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$显然过$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$与$\left(1,0\right)$两点，

作出$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的部分大致图像如下，



考虑 $2x=-\frac{3\pi}{2},2x=\frac{3\pi}{2},2x=\frac{7\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3\pi}{4},x=\frac{3\pi}{4},x=\frac{7\pi}{4}$ 处 $f\left(x\right)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的大小关系，

当 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 时，$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$，$y=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3\pi+4}{8}<-1$；

当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-4}{8}<1$；

当 $x=\frac{7\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sin\frac{7\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{7\pi-4}{8}>1$；

所以由图可知，$f\left(x\right)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为 3.

故选：C.

11．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形，$PC=PD=3,\angle PCA=45°$，则 $\triangle$PBC 的面积为（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

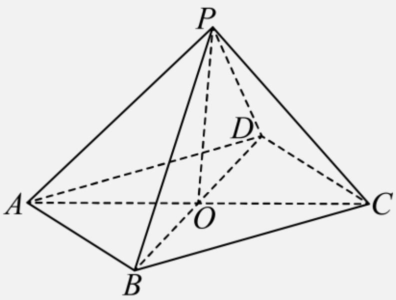
【答案】C

【分析】法一：利用全等三角形的证明方法依次证得 $\triangle PDO\cong\triangle PCO$，$\triangle PDB\cong\triangle PCA$，从而得到 $PA=PB$，再在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$，从而求得 $PB=\sqrt{17}$，由此在 $\triangle$PBC 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解；

法二：先在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$，$\cos\angle PCB=\frac{1}{3}$，从而求得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-3$，再利用空间向量的数量积运算与余弦定理得到关于 $PB,\angle BPD$ 的方程组，从而求得 $PB=\sqrt{17}$，由此在 $\triangle$PBC 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解.

【详解】法一：

连结 AC,BD 交于 O，连结 PO，则 O 为 AC,BD 的中点，如图，



因为底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4$，所以 $AC=BD=4\sqrt{2}$，则 $DO=CO=2\sqrt{2}$，

又 $PC=PD=3$，$PO=OP$，所以 $\triangle PDO\cong\triangle PCO$，则 $\angle PDO=\angle PCO$，

又 $PC=PD=3$，$AC=BD=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle PDB\cong\triangle PCA$，则 $PA=PB$，

在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3,AC=4\sqrt{2},\angle PCA=45°$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，

故$PA=\sqrt{17}$，则$PB=\sqrt{17}$，

故在△PBC中，$PC=3,PB=\sqrt{17},BC=4$，

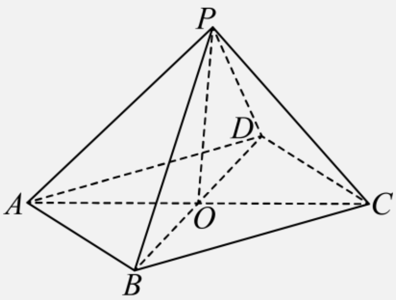
所以$\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以△PBC的面积为$S=\frac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

法二：

连结AC,BD交于O，连结PO，则O为AC,BD的中点，如图，



因为底面$ABCD$为正方形，$AB=4$，所以$AC=BD=4\sqrt{2}$，

在$\triangle PAC$中，$PC=3,\angle PCA=45°$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，故$PA=\sqrt{17}$，

所以$\cos\angle APC=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{17+9-32}{2\times\sqrt{17}\times3}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle APC=\sqrt{17}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=-3$，

不妨记$PB=m,\angle BPD=\theta$，

因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)$，所以$\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)^2=\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)^2$，

即$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PD}^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$，

则$17+9+2\times(-3)=m^2+9+2\times3\times m\cos\theta$，整理得$m^2+6m\cos\theta-11=0$①，

又在$\triangle PBD$中，$BD^2=PB^2+PD^2-2PB\cdot PD\cos\angle BPD$，即$32=m^2+9-6m\cos\theta$，则$m^2-6m\cos\theta-23=0$②，

两式相加得$2m^2-34=0$，故$PB=m=\sqrt{17}$，

故在△PBC中，$PC=3,PB=\sqrt{17},BC=4$，

所以$\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以△PBC 的面积为$S=\frac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

故选：C.

12．设 O 为坐标原点，F_1,F_2 为椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$的两个焦点，点 P 在 C 上，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$|OP|=$（　　）

A．$\frac{13}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C．$\frac{14}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{35}}{2}$

【答案】B

【分析】方法一：根据焦点三角形面积公式求出$\triangle PF_1F_2$的面积，即可得到点P的坐标，从而得出$|OP|$的值；

方法二：利用椭圆的定义以及余弦定理求出$|PF_1||PF_2|,|PF_1|^2+|PF_2|^2$，再结合中线的向量公式以及数量积即可求出；

方法三：利用椭圆的定义以及余弦定理求出$|PF_1|^2+|PF_2|^2$，即可根据中线定理求出.

【详解】方法一：设$\angle F_1PF_2=2\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan\theta$，

由$\cos\angle F_1PF_2=\cos2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{3}{5}$，解得：$\tan\theta=\frac{1}{2}$，

由椭圆方程可知，$a^2=9,b^2=6,c^2=a^2-b^2=3$，

所以，$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_p|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times|y_p|=6\times\frac{1}{2}$，解得：$y_p^2=3$，

即$x_p^2=9\times\left(1-\frac{3}{6}\right)=\frac{9}{2}$，因此$|OP|=\sqrt{x_p^2+y_p^2}=\sqrt{3+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选：B.

方法二：因为$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，

即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②，联立①②，

解得：$|PF_1||PF_2|=\frac{15}{2},|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，

而$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)$，所以$|OP|=\left|\overrightarrow{PO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|$，

即$\left|\overrightarrow{PO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{21+2\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选：B.

方法三：因为$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，

即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②，联立①②，解得：$|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，

由中线定理可知，$(2|OP|)^2+|F_1F_2|^2=2\left(|PF_1|^2+|PF_2|^2\right)=42$，易知$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，解得：$|OP|=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

故选：B.

【点睛】本题根据求解的目标可以选择利用椭圆中的二级结论焦点三角形的面积公式快速解出，也可以常规利用定义结合余弦定理，以及向量的数量积解决中线问题的方式解决，还可以直接用中线定理解决，难度不是很大.

二、填空题

13．若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$________.

【答案】2

【分析】利用偶函数的性质得到 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，从而求得 $a=2$，再检验即可得解.

【详解】因为 $y=f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=(x-1)^2+ax+\cos x$ 为偶函数，定义域为 R，

所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)^2-\frac{\pi}{2}a+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}a+\cos\frac{\pi}{2}$，

则 $\pi a=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2=2\pi$，故 $a=2$，

此时 $f(x)=(x-1)^2+2x+\cos x=x^2+1+\cos x$，

所以 $f(-x)=(-x)^2+1+\cos(-x)=x^2+1+\cos x=f(x)$，

又定义域为 R，故 $f(x)$ 为偶函数，所以 $a=2$.

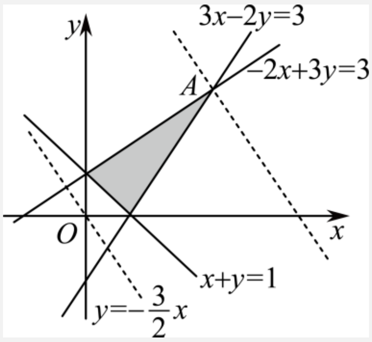
故答案为：2.

14．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-2y\le 3\\ -2x+3y\le 3\\ x+y\ge 1\end{cases}$，设 $z=3x+2y$ 的最大值为____________.

【答案】15

【分析】由约束条件作出可行域，根据线性规划求最值即可.

【详解】作出可行域，如图，



由图可知，当目标函数 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$ 过点 A 时，z 有最大值，

由 $\begin{cases}-2x+3y=3\\ 3x-2y=3\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$，即 $A(3,3)$，

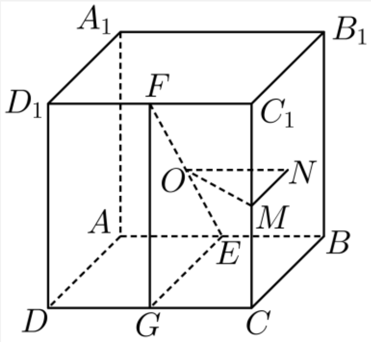
所以 $z_{\max}=3\times3+2\times3=15$.故答案为：15

15．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB，C_1D_1 的中点，以 EF 为直径的球的球面与该正方体的棱共有____________个公共点．

【答案】12

【分析】根据正方体的对称性，可知球心到各棱距离相等，故可得解.

【详解】不妨设正方体棱长为 2，EF 中点为O，取CD，CC_1 中点G,M，侧面BB_1C_1C 的中心为N，连接 FG,EG,OM,ON,MN，如图，



由题意可知，O为球心，在正方体中，$EF=\sqrt{FG^2+EG^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，即$R=\sqrt{2}$，

则球心O到CC_1的距离为$OM=\sqrt{ON^2+MN^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

所以球O与棱CC_1相切，球面与棱CC_1只有 1 个交点，

同理，根据正方体的对称性知，其余各棱和球面也只有 1 个交点，

所以以EF为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为 12.

故答案为：12

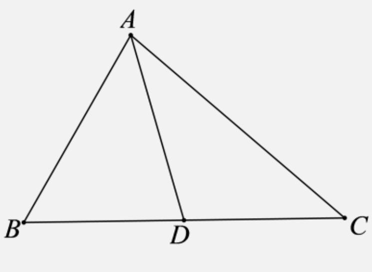
16．在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°,AB=2,BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$的角平分线交$BC$于$D$，则$AD=$_________.

【答案】2

【分析】方法一：利用余弦定理求出AC，再根据等面积法求出AD；

方法二：利用余弦定理求出AC，再根据正弦定理求出B,C，即可根据三角形的特征求出.

【详解】



如图所示：记$AB=c,AC=b,BC=a$，

方法一：

由余弦定理可得，$2^2+b^2-2\times 2\times b\times\cos 60^\circ=6$，

因为$b>0$，解得：$b=1+\sqrt{3}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$可得，$\dfrac{1}{2}\times 2\times b\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 2\times AD\times\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times AD\times b\times\sin 30^\circ$，

解得：$AD=\dfrac{\sqrt{3}b}{1+\dfrac{b}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{3+\sqrt{3}}=2$．

故答案为：2．

方法二：由余弦定理可得，$2^2+b^2-2\times2\times b\times\cos60^\circ=6$，因为$b>0$，解得：$b=1+\sqrt{3}$，

由正弦定理可得，$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin60^\circ}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin C}$，解得：$\sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$1+\sqrt{3}>\sqrt{6}>\sqrt{2}$，所以$C=45^\circ$，$B=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$，

又$\angle BAD=30^\circ$，所以$\angle ADB=75^\circ$，即$AD=AB=2$．

故答案为：2．

【点睛】本题压轴相对比较简单，既可以利用三角形的面积公式解决角平分线问题，也可以用角平分定义结合正弦定理、余弦定理求解，知识技能考查常规.

三、解答题

17．设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2=1, 2S_n=na_n$．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

【答案】(1)$a_n=n-1$

(2)$T_n=2-\left(2+n\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

【分析】（1）根据$a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geq2\end{cases}$即可求出；

（2）根据错位相减法即可解出．

【详解】（1）因为$2S_n=na_n$，

当$n=1$时，$2a_1=a_1$，即$a_1=0$；

当$n=3$时，$2\left(1+a_3\right)=3a_3$，即$a_3=2$，

当$n\geq2$时，$2S_{n-1}=\left(n-1\right)a_{n-1}$，所以$2\left(S_n-S_{n-1}\right)=na_n-\left(n-1\right)a_{n-1}=2a_n$，

化简得：$\left(n-2\right)a_n=\left(n-1\right)a_{n-1}$，当$n\geq3$时，$\dfrac{a_n}{n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{n-2}=\cdots=\dfrac{a_3}{2}=1$，即$a_n=n-1$，

当$n=1,2,3$时都满足上式，所以$a_n=n-1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$．

（2）因为 $\frac{a_{n+1}}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，所以 $T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

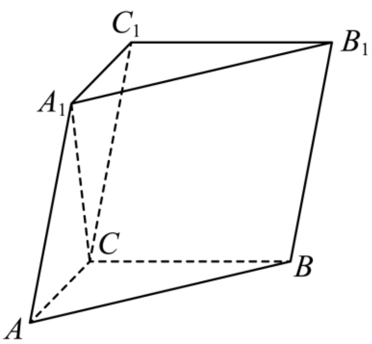
$\frac{1}{2}T_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

两式相减得，

$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

即 $T_n=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathrm{N}^*$.

18．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\perp$底面 ABC，$\angle ACB=90°, AA_1=2$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



(1)证明：$A_1C=AC$；

(2)已知 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

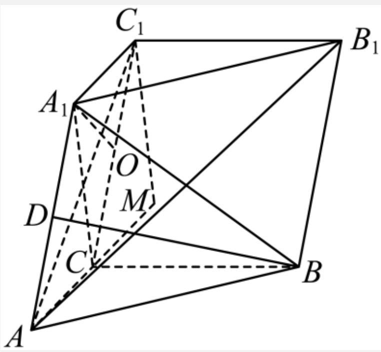
【答案】(1)证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

【分析】（1）根据线面垂直，面面垂直的判定与性质定理可得 $A_1O\perp$平面 BCC_1B_1，再由勾股定理求出 O 为中点，即可得证；

（2）利用直角三角形求出 AB_1 的长及点 A 到面的距离，根据线面角定义直接可得正弦值.

【详解】（1）如图，



$\because A_1C\perp$底面ABC， $BC\subset$面ABC，

$\therefore A_1C\perp BC$， 又$BC \perp AC$， $A_1C, AC\subset$平面ACC_1A_1， $A_1C\cap AC=C$，

$\therefore BC\perp$平面ACC_1A_1，又$BC\subset$平面BCC_1B_1，

$\therefore$平面$ACC_1A_1\perp$平面BCC_1B_1，

过A_1作$A_1O\perp CC_1$交CC_1于O，又平面$ACC_1A_1\cap$平面$BCC_1B_1=CC_1$， $A_1O\subset$平面ACC_1A_1，

$\therefore A_1O\perp$平面BCC_1B_1

$\because A_1$到平面BCC_1B_1的距离为1， $\therefore A_1O=1$，

在$\mathrm{Rt}\triangle A_1CC_1$中， $A_1C\perp A_1C_1, CC_1=AA_1=2$，

设$CO=x$， 则$C_1O=2-x$，

$\because\triangle A_1OC,\triangle A_1OC_1,\triangle A_1CC_1$为直角三角形，且$CC_1=2$，

$CO^2+A_1O^2=A_1C^2$， $A_1O^2+OC_1^2=C_1A_1^2$， $A_1C^2+A_1C_1^2=C_1C^2$，

$\therefore 1+x^2+1+(2-x)^2=4$，解得$x=1$，

$\therefore AC=A_1C=A_1C_1=\sqrt{2}$，

$\therefore A_1C=AC$

（2）$\because AC=A_1C_1, BC\perp A_1C, BC\perp AC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACB\cong\mathrm{Rt}\triangle A_1CB$

$\therefore BA=BA_1$，

过B作$BD\perp AA_1$，交AA_1于D，则D为AA_1中点，

由直线AA_1与BB_1距离为2，所以$BD=2$

$\because A_1D=1$， $BD=2$， $\therefore A_1B=AB=\sqrt{5}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$， $\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{3}$，

延长AC， 使$AC=CM$， 连接C_1M，

由$CM\parallel A_1C_1, CM=A_1C_1$知四边形$A_1CMC_1$为平行四边形，

$\therefore C_1M\parallel A_1C$， $\therefore C_1M\perp$平面ABC， 又$AM\subset$平面ABC，

$\therefore C_1M \perp AM$

则在 $\mathrm{Rt}\triangle AC_1M$ 中，$AM = 2AC, C_1M = A_1C$，$\therefore AC_1 = \sqrt{(2AC)^2 + A_1C^2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$ 中，$AC_1 = \sqrt{(2AC)^2 + A_1C^2}$，$B_1C_1 = BC = \sqrt{3}$，

$\therefore AB_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$，

又 A 到平面 BCC_1B_1 距离也为 1，

所以 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

19．一项试验旨在研究臭氧效应.实验方案如下：选 40 只小白鼠，随机地将其中 20 只分配到实验组，另外 20 只分配到对照组，实验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境，对照组的小白鼠饲养在正常环境，一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量（单位：g）.

(1)设 X 表示指定的两只小白鼠中分配到对照组的只数，求 X 的分布列和数学期望；

(2)实验结果如下：

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为：

15.2 18.8 20.2 21.3 22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1

32.6 34.3 34.8 35.6 35.6 35.8 36.2 37.3 40.5 43.2

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为：

7.8 9.2 11.4 12.4 13.2 15.5 16.5 18.0 18.8 19.2

19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9 25.1 28.2 32.3 36.5

（i）求 40 只小鼠体重的增加量的中位数 m，再分别统计两样本中小于 m 与不小于的数据的个数，完成如下列联表：

	$< m$	$\geq m$
对照组		
实验组		

（ii）根据（i）中的列联表，能否有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与正常环境中体重的增加量有差异.

附：$K^2 = \dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

k_0	0.100	0.050	0.010
$P(k^2 \geq k_0)$	2.706	3.841	6.635

【答案】(1)分布列见解析，$E(X) = 1$

(2)（i）$m=23.4$；列联表见解析，（ii）能

【分析】（1）利用超几何分布的知识即可求得分布列及数学期望；

（2）（i）根据中位数的定义即可求得$m=23.4$，从而求得列联表；

（ii）利用独立性检验的卡方计算进行检验，即可得解.

【详解】（1）依题意，X的可能取值为$0,1,2$，

则$P(X=0)=\dfrac{C_{20}^{0}C_{20}^{2}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{19}{78}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{20}^{1}C_{20}^{1}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{20}{39}$，$P(X=2)=\dfrac{C_{20}^{2}C_{20}^{0}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{19}{78}$，

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{19}{78}$	$\dfrac{20}{39}$	$\dfrac{19}{78}$

故$E(X)=0\times\dfrac{19}{78}+1\times\dfrac{20}{39}+2\times\dfrac{19}{78}=1$.

（2）（i）依题意，可知这40只小白鼠体重增量的中位数是将两组数据合在一起，从小到大排后第20位与第21位数据的平均数，观察数据可得第20位为23.2，第21位数据为23.6，

所以$m=\dfrac{23.2+23.6}{2}=23.4$，

故列联表为：

	$<m$	$\geq m$	合计
对照组	6	14	20
实验组	14	6	20
合计	20	20	40

（ii）由（i）可得，$K^2=\dfrac{40\times(6\times6-14\times14)^2}{20\times20\times20\times20}=6.400>3.841$，

所以能有95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与正常环境中体重的增加量有差异.

20．已知直线$x-2y+1=0$与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$交于A,B两点，且$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1)求p；

(2)设F为C的焦点，M，N为C上两点，$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求$\triangle MFN$面积的最小值.

【答案】(1) $p=2$

(2)$12-8\sqrt{2}$

【分析】（1）利用直线与抛物线的位置关系，联立直线和抛物线方程求出弦长即可得出p；

（2）设直线MN：$x=my+n$，$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$,利用$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，找到$m,n$的关系，以及$\triangle MFN$的面积表达

式，再结合函数的性质即可求出其最小值.

【详解】（1）设$A\left(x_A,y_A\right),B\left(x_B,y_B\right)$，

由$\begin{cases}x-2y+1=0\\ y^2=2px\end{cases}$可得，$y^2-4py+2p=0$，所以$y_A+y_B=4p,y_Ay_B=2p$，

所以$|AB|=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}=\sqrt{5}|y_A-y_B|=\sqrt{5}\times\sqrt{\left(y_A+y_B\right)^2-4y_Ay_B}=4\sqrt{15}$，

即$2p^2-p-6=0$，因为$p>0$，解得：$p=2$.

（2）因为$F\left(1,0\right)$，显然直线MN的斜率不可能为零，

设直线MN：$x=my+n$，$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases}y^2=4x\\ x=my+n\end{cases}$可得，$y^2-4my-4n=0$，所以，$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4n$，

$\Delta=16m^2+16n>0\Rightarrow m^2+n>0$，

因为$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，所以$\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=0$，

即$\left(my_1+n-1\right)\left(my_2+n-1\right)+y_1y_2=0$，

亦即$\left(m^2+1\right)y_1y_2+m\left(n-1\right)\left(y_1+y_2\right)+\left(n-1\right)^2=0$，

将$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4n$代入得，

$4m^2=n^2-6n+1$，$4\left(m^2+n\right)=\left(n-1\right)^2>0$，

所以$n\neq1$，且$n^2-6n+1\geq0$，解得$n\geq3+2\sqrt{2}$或$n\leq3-2\sqrt{2}$.

设点F到直线MN的距离为d，所以$d=\dfrac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}$，

$|MN|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{16m^2+16n}$

$=2\sqrt{1+m^2}\sqrt{4\left(n^2-6n+1\right)+16n}=2\sqrt{1+m^2}|n-1|$，

所以$\triangle MFN$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times|MN|\times d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}\times2\sqrt{1+m^2}|n-1|=\left(n-1\right)^2$，

而$n\geq3+2\sqrt{2}$或$n\leq3-2\sqrt{2}$，

所以，当$n=3-2\sqrt{2}$时，

$\triangle MFN$的面积$S_{\min}=\left(2-2\sqrt{2}\right)^2=12-8\sqrt{2}$.

【点睛】本题解题关键是根据向量的数量积为零找到m,n的关系，一是为了减元，二是通过相互的制约关系找到各自的范围，为得到的三角形面积公式提供定义域支持，从而求出面积的最小值.

21．已知函数 $f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(1)当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 a 的取值范围．

【答案】(1)答案见解析.

(2) $(-\infty,3]$

【分析】（1）求导,然后令 $t=\cos^2 x$,讨论导数的符号即可;

（2）构造 $g(x)=f(x)-\sin 2x$,计算 $g'(x)$ 的最大值,然后与 0 比较大小,得出 a 的分界点,再对 a 讨论即可.

【详解】（1） $f'(x)=a-\frac{\cos x\cos^3 x+3\sin x\cos^2 x\sin x}{\cos^6 x}=a-\frac{\cos^2 x+3\sin^2 x}{\cos^4 x}=a-\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}$

令 $\cos^2 x=t$,则 $t\in(0,1)$

则 $f'(x)=g(t)=a-\frac{3-2t}{t^2}=\frac{at^2+2t-3}{t^2}$

当 $a=8$, $f'(x)=g(t)=\frac{8t^2+2t-3}{t^2}=\frac{(2t-1)(4t+3)}{t^2}$

当 $t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,即 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)<0$.

当 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,即 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

（2）设 $g(x)=f(x)-\sin 2x$

$g'(x)=f'(x)-2\cos 2x=g(t)-2\left(2\cos^2 x-1\right)=\frac{at^2+2t-3}{t^2}-2(2t-1)=a+2-4t+\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}$

设 $\varphi(t)=a+2-4t+\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}$

$\varphi'(t)=-4-\frac{2}{t^2}+\frac{6}{t^3}=\frac{-4t^3-2t+6}{t^3}=-\frac{2(t-1)(2t^2+2t+3)}{t^3}>0$

所以 $\varphi(t)<\varphi(1)=a-3$.

1° 若 $a\in(-\infty,3]$, $g'(x)=\varphi(t)<a-3\le 0$

即 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,所以 $g(x)<g(0)=0$.

所以当 $a\in(-\infty,3]$, $f(x)<\sin 2x$,符合题意.

2° 若 $a\in(3,+\infty)$

当 $t\to 0,\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}=-3\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\to-\infty$,所以 $\varphi(t)\to-\infty$.

$\varphi(1)=a-3>0$.

所以 $\exists t_0\in(0,1)$,使得 $\varphi\left(t_0\right)=0$,即 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $g'\left(x_0\right)=0$.

当 $t\in\left(t_0,1\right)$, $\varphi(t)>0$,即当 $x\in\left(0,x_0\right)$, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增.

所以当 $x\in(0,x_0)$, $g(x)>g(0)=0$,不合题意.

综上,a 的取值范围为 $(-\infty,3]$.

【点睛】关键点点睛:本题采取了换元,注意复合函数的单调性 $t=\cos x$ 在定义域内是减函数,若 $t_0=\cos x_0$,当 $t\in(t_0,1)$, $\varphi(t)>0$,对应当 $x\in(0,x_0)$, $g'(x)>0$.

22．已知点 $P(2,1)$，直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），α 为 l 的倾斜角，l 与 x 轴正半轴，y 轴正半轴分别交于 A，B 两点，且 $|PA|\cdot|PB|=4$.

(1)求 α；

(2)以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程.

【答案】(1) $\dfrac{3\pi}{4}$

(2) $\rho\cos\alpha+\rho\sin\alpha-3=0$

【分析】（1）根据 t 的几何意义即可解出；

（2）求出直线 l 的普通方程，再根据直角坐标和极坐标互化公式即可解出.

【详解】（1）因为 l 与 x 轴，y 轴正半轴交于 A,B 两点，所以 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，

令 $x=0$，$t_1=-\dfrac{2}{\cos\alpha}$，令 $y=0$，$t_2=-\dfrac{1}{\sin\alpha}$，

所以 $|PA||PB|=|t_2t_1|=\left|\dfrac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|=\left|\dfrac{4}{\sin2\alpha}\right|=4$，所以 $\sin2\alpha=\pm1$，

即 $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

（2）由（1）可知，直线 l 的斜率为 $\tan\alpha=-1$，且过点 $(2,1)$，

所以直线 l 的普通方程为：$y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$，

由 $x=\rho\cos\alpha,y=\rho\sin\alpha$ 可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\alpha+\rho\sin\alpha-3=0$.

23．设 $a>0$，函数 $f(x)=2|x-a|-a$.

(1)求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

(2)若曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2，求 a.

【答案】(1) $\left(\dfrac{a}{3},3a\right)$

(2)2

【分析】（1）分 $x\le a$ 和 $x>a$ 讨论即可;

（2）写出分段函数,画出草图,表达面积解方程即可.

【详解】(1) 若 $x \le a$,则 $f(x)=2a-2x-a<x$,

即 $3x>a$,解得 $x>\frac{a}{3}$,即 $\frac{a}{3}<x\le a$,

若 $x>a$,则 $f(x)=2x-2a-a<x$,

解得 $x<3a$,即 $a<x<3a$,

综上,不等式的解集为 $\left(\frac{a}{3},3a\right)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}-2x+a, x\le a\\ 2x-3a, x>a\end{cases}$.

画出 $f(x)$ 的草图,则 $f(x)$ 与 x 轴围成 $\triangle ABC$,

$\triangle ABC$ 的高为 $a, A\left(\frac{a}{2},0\right), B\left(\frac{3a}{2},0\right)$,所以 $|AB|=a$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot a=\frac{1}{2}a^2=2$,解得 $a=2$.